T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUADRATİK MATRİSLERİN DOĞRUSAL BİLEŞİMLERİNİN KUADRATİKLİĞİNİN KARAKTERİZE EDİLMESİ

DOKTORA TEZİ

Mahmut UÇ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR**
Ortak Danışman	**:**	**Prof. Dr. Ahmet Yaşar ÖZBAN**

Aralık 2015

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUADRATİK MATRİSLERİN DOĞRUSAL BİLEŞİMLERİNİN KUADRATİKLİĞİNİN KARAKTERİZE EDİLMESİ

DOKTORA TEZİ

Mahmut UÇ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 11/12/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. **Refik KESKİN** **Jüri Başkanı**	**Prof. Dr.** **Halis AYGÜN** **Üye**	**Prof. Dr.** **Halim ÖZDEMİR** **Üye**

Doç. Dr. **Bahaddin SİNSOYSAL** **Üye**	**Doç. Dr.** **Nesrin GÜLER** **Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Mahmut UÇ

11/12/2015

ÖNSÖZ

Doktora çalışmam boyunca bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca Atılım Üniversitesi öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Ahmet Yaşar ÖZBAN'a desteklerinden dolayı çok teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme ve dualarını hiçbir zaman eksik etmeyen anneme ve babama teşekkür ederim.

Bu çalışmayı maddi açıdan destekleyen Sakarya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Komisyon Başkanlığı'na da ayrıca teşekkürlerimi sunarım (FBEDTEZ 2014-50-02-012).

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}^*$	: Sıfırdan farklı karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}_{m\times n}$	: mxn boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathbb{C}_n$	: $n\times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
I	: Uygun boyutlu birim matris
0	: Uygun boyutlu sıfır matris
$\sigma(A)$	: A matrisinin spektrumu
$A\oplus B$	: A ve B matrislerinin direkt toplamı
A^*	: Bir A matrisinin karmaşık eşleniğinin devriği
A'	: Bir A matrisinin devriği
$\mathcal{R}(A)$	: A matrisinin sütun uzayı
$\operatorname{rank}(A)$	: A matrisinin rankı
$\mathcal{N}(A)$	: A matrisinin sıfır uzayı
$\operatorname{nullity}(A)$	: A matrisinin sıfırlığı (sıfır uzayının boyutu)
$\det(A)$	: A matrisinin determinantı
$\operatorname{cebKat}_A(\lambda)$	: A matrisinin λ özdeğerinin cebirsel katlılığı
$\operatorname{geoKat}_A(\lambda)$	: A matrisinin λ özdeğerinin geometrik katlılığı
(a,b)	: a, b sıralı ikilisi
■	: İspat sonu
bkz.	: Bakınız
vs.	: Vesaire

ÖZET

Anahtar Kelimeler: idempotent matris, involutif matris, kuadratik matris, doğrusal bileşim, benzer matris, köşegenleştirme, eşzamanlı köşegenleştirme.

Bölüm I'de çalışmanın içeriği hakkında kısaca bazı bilgiler verilmiştir. Ayrıca, bazı özel tipli matrislerin doğrusal bileşimleri ile ilgili literatürde bulunan bazı çalışmalar tanıtılmıştır.

Bölüm II, sonraki bölümlere bir hazırlık olarak yazılmıştır. Bu bölümde, daha sonra kullanılacak olan ispatsız olarak bazı teoremler ve temel kavramlar verilmiştir.

Çalışmanın III. Bölüm'ünde r_1 ve r_2 sıfırdan farklı karmaşık sayılar, Q_1 ve Q_2 $n \times n$ boyutlu karmaşık kuadratik matrisler olmak üzere, $r_1Q_1 + r_2Q_2$ doğrusal bileşiminin kuadratik matris olduğu bütün durumlar karakterize edilmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar, doğrusal bileşimin kuadratik matris olması için gerekli katsayı eşitlikleri ile birlikte matris eşitliklerinden oluşmaktadır.

Çalışmanın IV. Bölüm'ünde, III. Bölüm'deki esas sonucun $r_1Q_1 + r_2Q_2$ doğrusal bileşimindeki Q_1 ve Q_2 matrislerinin değişmeli olduğu durumu için alternatif bir ispat verilmiştir. Bu bölümdeki sonuçlar, doğrusal bileşimi oluşturan matrislerin köşegen biçimleri kullanılarak ifade edilmiştir.

III. ve IV. Bölüm sonlarında, bu bölümlerde elde edilen sonuçları destekleyici sayısal örnekler verilmiştir. Ayrıca, bu sonuçların sağlaması Mathematica yazılımı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. İlgili program kodları ve çıktıları da Ek A ve Ek B'de verilmiştir.

V. Bölüm'de, çalışmada elde edilen sonuçların kısaca tanıtımı yapılmış ve öneriler verilmiştir.

CHARACTERIZATION OF QUADRATICITY FOR LINEAR COMBINATIONS OF QUADRATIC MATRICES

SUMMARY

Keywords: idempotent matrix, involutive matrix, quadratic matrix, linear combination, similar matrix, diagonalization, simultaneously diagonalization.

In Chapter I, some brief information about the content of the work is given. In addition, some studies about the linear combinations of some special types of matrices in the literature are introduced.

Chapter II is written as a preparation for the next chapters. In this chapter, some theorems without proofs and fundamental concepts, which will be used later, are given.

In Chapter III, all the situations, where the linear combination of the form $r_1Q_1 + r_2Q_2$ is a quadratic matrix when r_1 and r_2 are nonzero complex numbers and, Q_1 and Q_2 are $n \times n$ complex matrices, are characterized. The results obtained in this chapter consist of matrix equalities together with coefficient equalities which enable the linear combination to be a quadratic matrix.

In Chapter IV, an alternate proof of the main result of Chapter III in the particular case that Q_1 and Q_2 in the linear combination $r_1Q_1 + r_2Q_2$ are commuting matrices, is given. The results in this chapter are given in terms of diagonal forms of matrices which form the linear combination.

At the end of Chapters III and IV, numerical examples are given to exemplify the results which are obtained in these chapters. Verification of these results was performed by using Mathematica software. The codes and outputs of associated programs are given in Appendix A and Appendix B.

In Chapter V, the obtained results in this study are briefly introduced and some suggestions are given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın İçeriği ve Önemi

Çalışmaya konu olan kuadratik matrisler, bazı özel tipli matrislerin sınıflarını kapsayan geniş bir matris sınıfıdır. Örneğin, literatürde sıkça rastlanan idempotent ve involutif matrisler birer kuadratik matristir. Bu nedenle, kuadratik matrislerle ilgili yapılan çalışmalar kuadratik matrislerin özel halleri olan idempotent ve involutif matrisleri de kapsayacak, dolayısıyla kuadratik matrislerle ilgili elde edilen sonuçlar söz konusu özel tipli matrisler için de elde edilmiş olacaktır.

Ayrıca, bu çalışmada ele alınan problem sadece cebirsel olarak değil, uygulamalı bilimlerde, özellikle istatistik teorisinde üstlendiği rol açısından da önemlidir. Şöyle ki, C $n\times n$ boyutlu bir reel simetrik matris ve x vektörü de çok değişkenli $N_n(0,I)$ normal dağılımına sahip $n\times 1$ boyutlu rastgele bir reel vektör ise, bu durumda $x'Cx$ kuadratik formunun *ki-kare* dağılımına sahip olması için gerek ve yeter koşul C matrisinin idempotent matris, yani $C^2=C$, olmasıdır.

İdempotent matrisler ile istatistik teorisi arasındaki bu ilişki kullanılarak kuadratik matrisler ile istatistik teorisi arasında da benzer bir ilişki verilebilir. Şöyle ki, Q $n\times n$ boyutlu bir reel simetrik kuadratik matris olsun. Kuadratik matrisler iki idempotent matrisin doğrusal bileşimi olarak yazılabildiğinden (bkz. Teorem 3.1), x vektörü çok değişkenli $N_n(0,I)$ normal dağılımına sahip $n\times 1$ boyutlu rastgele reel vektör ise, $x'Qx$ kuadratik formu iki *ki-kare* değişkeninin toplamı olarak yazılabilir.

Şimdi, $Q_1,Q_2\in\mathbb{C}_n$ ve $r_1,\, r_2\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere,

$$Q = r_1 Q_1 + r_2 Q_2 \tag{1.1}$$

doğrusal bileşimini göz önüne alalım. Çalışmada, (1.1) doğrusal bileşimindeki Q_1 ve Q_2 matrisleri kuadratik matrisler olmak üzere Q doğrusal bileşim matrisinin de kuadratik matris olması durumlarının karakterize edilmesi problemi ele alınacaktır. Elde edilecek sonuçlar iki özel tipli (idempotent ve/veya involutif) matrisin doğrusal bileşimlerinin yine özel tipli (idempotent veya involutif) matris olması ile ilgili elde edilmiş bütün sonuçları da kapsayacak niteliktedir.

1.2. Literatür Çalışması

Literatürde özel tipli matrislerin doğrusal bileşimlerinin yine özel tipli matrisler olması problemi, P_1 ve P_2 matrisleri idempotent matrisler iken ilave koşullar altında $P_1 + P_2$ toplam ile $P_1 - P_2$ fark matrislerinin idempotent olmalarının çalışılması ile başlamıştır [1]. Bu çalışmadan sonra yapılan benzer çalışmalardan bir kısmı aşağıda verilmektedir.

Baksalary ve Baksalary (1.1)'deki doğrusal bileşimi oluşturan Q_1 ve Q_2 matrisleri idempotent matrisler iken Q doğrusal bileşim matrisinin idempotent olduğu bütün durumların karakterize edilmesi problemini, matrislerin değişmeli ya da değişmesiz olması durumları için [2]'de çalıştılar. Söz konusu çalışmada yöntem olarak cebirsel matris işlemleri kullanılmıştır. Q_1 ve Q_2 matrisleri değişmeli iken, aynı problem için alternatif bir ispat, Özdemir ve Özban tarafından matrislerin özdeğerlerine bağlı bazı eşitlikler kullanılarak verilmiştir [3].

Baksalary ve arkadaşları [4]'te (1.1) doğrusal bileşimindeki Q_1 ve Q_2 matrisleri sırasıyla idempotent ve tripotent matris iken Q doğrusal bileşim matrisinin idempotent olduğu tüm durumların karakterize edildiği problemi çalıştılar. Bu çalışmalarında Baksalary ve arkadaşları, Q_2 tripotent matrisinin ayrık idempotent matrislere ayrışımı özelliğini (yani, Q_2 tripotent matris iken $Q_2 = R_1 - R_2$ ve $R_1R_2 = R_2R_1 = \mathbf{0}$ olacak şekilde R_1 ve R_2 idempotent matrislerinin var olduğunu) kullanarak cebirsel matris işlemleri ile sonuçları elde ettiler. Bu çalışmalarında Q_2 tripotent matrisinin özel bir durumu olan idempotent matris olması hali daha önce [2] ve [3]'te çalışıldığından Q_2 ve $-Q_2$ matrislerinin idempotent olması halleri hariç tutularak kalan bütün durumlar için (yani Q_2 matrisinin esas tripotent matris olması halinde) sonuçlar elde ettiler.

(1.1)'deki doğrusal bileşimde Q_1 idempotent ve Q_2 tripotent matrisleri değişmeli iken Q doğrusal bileşim matrisinin tripotentliği ile ilgili sonuçlar Yao ve arkadaşları tarafından [5]'te verilmiştir. Yao ve arkadaşları bu çalışmalarında doğrusal bileşimi oluşturan matrisleri bloklar halinde yazıp cebirsel matris işlemleri ile sonuçlar elde ettiler. Ayrıca bu çalışmalarında, Baksalary ve arkadaşlarının [4]'teki sonuçlarına blok matrisler kullanarak alternatif bir ispat da verdiler.

Benítez ve Thome, (1.1)'deki doğrusal bileşim matrisini oluşturan Q_1 ve Q_2 matrislerini sırasıyla idempotent ve t-potent matris alarak, doğrusal bileşimin idempotentliğini; $Q_1Q_2 = Q_2Q_1$ şartı altında [6]'da ve $Q_1Q_2 \neq Q_2Q_1$ şartı altında [7]'de çalıştılar. Şu ana kadarki çalışmalarda elde edilen sonuçlarda matris eşitlikleri ile doğrusal bileşimin katsayıları verilirken, Benítez ve Thome, [6]'daki sonuçlarında doğrusal bileşimin katsayıları ile birlikte matrislerin köşegen formlarını, [7]'deki sonuçlarında da katsayılarla birlikte matrislerin bloklarını vermişlerdir.

[8]'de Baksalary ve arkadaşları tarafından (1.1) doğrusal bileşimindeki Q_1 ve Q_2 matrisleri değişmeli tripotent matrisler iken Q doğrusal bileşim matrisinin de tripotent olduğu sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca Q_1 ve Q_2 matrisleri değişmeli idempotent matrisler olduğunda Q doğrusal bileşiminin tripotentliği de çalışmanın sonucu olarak verilmiştir.

Sarduvan ve Özdemir [9]'daki çalışmalarında (1.1) doğrusal bileşimindeki Q_1 ve Q_2 matrisleri;

1. involutif matrisler iken Q doğrusal bileşiminin idempotentliği ve involutifliği,
2. idempotent matrisler iken Q doğrusal bileşiminin involutifliği,
3. değişmeli tripotent matrisler iken Q doğrusal bileşiminin involutifliği,
4. değişmeli involutif matrisler iken Q doğrusal bileşiminin tripotentliği

için sonuçlar elde ettiler.

(1.1) doğrusal bileşimindeki Q_1 ve Q_2 matrisleri değişmeli matrisler iken [9]'daki hemen hemen bütün sonuçlar için alternatif ispatlar Özdemir ve Sarduvan tarafından verilmiştir [10].

(1.1) doğrusal bileşimindeki Q_1 ve Q_2 matrisleri değişmeli tripotent matrisler iken Q doğrusal bileşim matrisinin idempotentliği ve tripotentliği Özdemir ve arkadaşları tarafından [11]'de çalışılmıştır.

Özel tipli matrislerin doğrusal bileşiminin yine özel tipli matris olması durumlarının karakterizasyonları ile ilgili problem, doğrusal bileşimi oluşturan matrislerin sayısı üçe çıkartılarak bazı yazarlar tarafından çalışılmıştır. Buna ilişkin olarak,

$Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C}_n$ ve $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere,

$$Q = r_1Q_1 + r_2Q_2 + r_3Q_3 \tag{1.2}$$

doğrusal bileşim matrisi göz önüne alınsın.

(1.2) doğrusal bileşiminde Q_1, Q_2 ve Q_3 matrisleri idempotent matrisler olmak üzere, Q doğrusal bileşim matrisinin idempotentliği, matrislerin ikisi ayrık

($Q_2Q_3 = Q_3Q_2 = \mathbf{0}$) iken Baksalary tarafından [12]'de ve matrislerin ikisi değişmeli ($Q_1Q_2 = Q_2Q_1$) iken Baksalary ve Benítez tarafından [13]'te çalışılmıştır.

Singthong ve Wanicharpichat (1.2)'deki doğrusal bileşimi oluşturan Q_1, Q_2 ve Q_3 matrisleri değişmeli tripotent matrisler iken Q doğrusal bileşim matrisinin tripotentliğini [14]'te çalıştılar. Aslında Singthong ve Wanicharpichat'in bu çalışmaları Baksalary ve arkadaşlarının [8]'deki değişmeli iki tripotent matrisin doğrusal bileşimlerinin tripotentliğinin bir sonucudur. Singthong ve Wanicharpichat çalışmalarında, $r_2 = d_0d_1$ ve $r_3 = d_0d_2$ olmak üzere, doğrusal bileşim matrisini $Q = r_1Q_1 + d_0\left(d_1Q_2 + d_2Q_3\right)$ biçiminde yazıp, Baksalary ve arkadaşlarının iki tripotent matris için elde ettikleri sonuçları kullanarak önce $Q_0 = r_2Q_2 + r_3Q_3$ doğrusal bileşiminin tripotentliğini, daha sonra da $Q = r_1Q_1 + d_0Q_0$ doğrusal bileşiminin tripotentliğini elde ederek değişmeli üç tripotent matrisin doğrusal bileşimlerinin tripotentliği ile ilgili sonuçları elde etmiş oldular.

Xu ve Xu, (1.2)'deki doğrusal bileşimi oluşturan Q_1, Q_2 ve Q_3 matrisleri değişmeli matrisler olmak üzere Q doğrusal bileşim matrisinin tripotentliğini i) Q_1, Q_2 ve Q_3 matrisleri involutif iken ve ii) Q_1 ve Q_2 involutif ve Q_3 tripotent iken [15]'te çalıştılar.

Buraya kadar verilen literatür bilgisi bazı özel tipli matrislerin doğrusal bileşimlerinin yine özel tipli matris olmaları durumlarının karakterizasyonları ile ilgilidir. Literatürde, yine özel tipli matrislerin doğrusal bileşimleriyle ilgili farklı karakterizasyonlar da mevcuttur.

[16]'da Groß ve Trenkler, P ve Q iki idempotent matris olmak üzere, $P-Q$ fark matrisinin tersinirliği için gerek ve yeter koşullar verdiler. Ayrıca, $P-Q$ matrisi tersinir ise $P+Q$, $I-PQ$ ve $P+Q-PQ$ matrislerinin de tersinir olduklarını elde

ettiler. Daha sonra Koliha ve arkadaşları tarafından, bu çalışma için daha kısa alternatif bir ispat [17]'de verilmiştir.

Baksalary ve Baksalary, iki idempotent matrisin farkı ve toplamının tersinirliği ile ilgili çalışmaları biraz daha ileriye taşıyarak, iki idempotent matrisin doğrusal bileşimlerinin tersinirliği ile ilgili [18]'deki çalışmalarını yayımladılar. Bu çalışmalarında, P_1 ve P_2 iki idempotent matris ve $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $c_1 + c_2 \neq 0$ koşulu altında $P_1 + P_2$ toplamının tersinirliğinin $c_1P_1 + c_2P_2$ doğrusal bileşiminin tersinirliğine denk olduğunu gösterdiler.

Koliha ve Rakočević 2006'daki bir çalışmada [19], Baksalary ve Baksalary'nin [18]'deki sonuçları için daha kuvvetli bir sonuç elde ettiler. Koliha ve Rakočević, P_1 ve P_2 idempotent matrisler ve $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $c_1P_1 + c_2P_2$ doğrusal bileşiminin rankının ve sıfırlığının $c_1 + c_2 \neq 0$ koşulu altında değişmez olduğunu, yani katsayılardan bağımsız olduğunu gösterdiler. Koliha ve Rakočević bu sonucu elde ederken, $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathcal{N}(P_1) \mid (I - P_1)P_2x = \mathbf{0}\}$ olmak üzere, $\mathcal{N}(A)$'nın $\mathcal{N}(c_1P_1 + c_2P_2)$'ye izomorf olduğunu göstermek suretiyle, alışılmışın dışında bir yol izlemişlerdir [19].

Sarduvan ve Özdemir, [20]'deki çalışmalarında, Baksalary ve Baksalary'nin iki idempotent matrisin doğrusal bileşimlerinin tersinirliği ile ilgili [18]'deki sonuçlarına benzer sonuçları tripotent matrisler için elde etmişlerdir.

Groß ve Trenkler'in [16] ve Koliha ve arkadaşlarının [17] çalışmalarının bir genellemesi olarak Zuo [21]'de P ve Q iki idempotent matris olmak üzere $P - Q$ farkının tersinirliğinin ($a \neq 0$, $b \neq 0$ ve $a + b = c$ olmak üzere), $aP + bP - cPQ$ bileşiminin tersinirliğine, $P + Q$ toplamının tersinirliğinin de ($a \neq 0, b \neq 0$ ve $a + b \neq c$ olmak üzere), $aP + bP - cPQ$ bileşiminin tersinirliğine denk olduğunu göstermiştir. Literatürden de görüleceği üzere, benzer çalışmalar güncel olarak yapılmaya devam edilmektedir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde, sonraki bölümlere hazırlık niteliğinde olmak üzere, bazı gösterim, kavram, tanım ve ispatsız bazı teoremler verilecektir.

2.1. Bazı Gösterimler

m ve n doğal sayıları için, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}_{m\times n}$ ve $\mathbb{C}_n$ sembolleri sırasıyla karmaşık sayılar, sıfırdan farklı karmaşık sayılar, $m\times n$ boyutlu matrisler ve $n\times n$ boyutlu matrisler kümesini gösterecektir. Çalışma boyunca matrisler A ve B gibi büyük italik harflerle, skalerler ($\mathbb{C}$ karmaşık saylar kümesinin bir elemanına bir *skaler* denir) de c veya α gibi küçük italik latin veya yunan harfleri ile gösterilecektir. Ayrıca $\mathbf{0}$ ve I sembolleri de sırasıyla uygun boyutlu sıfır ve birim matrisleri temsil edecektir.

2.2. Matrisler

Aşağıda, matrisin tanımı da dahil olmak üzere, matris konusunun en temel kavramları verilmektedir.

Tanım 2.1. a_{ij} ($i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$) karmaşık sayılarının

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

biçiminde düzenlemesine, m *satırlı* n *sütunlu karmaşık matris* veya kısaca $m \times n$ *boyutlu karmaşık matris* denir. Böyle bir matris $A = \left[a_{ij} \right]$ ile de gösterilir [22].

Tanım 2.2. $D = [d_{ij}] \in \mathbb{C}_n$ matrisi, $i \neq j$ için $d_{ij} = 0$ koşulunu sağlıyorsa D matrisine *köşegen matris* denir [23].

Tanım 2.3. Bir $D \in \mathbb{C}_n$ köşegen matrisinin bütün köşegen elemanları eşit ise yani, bir $\alpha \in \mathbb{C}$ için $D = \alpha I$ oluyorsa, D matrisine *skaler matris* denir [23].

Tanım 2.4. Bir $A \in \mathbb{C}_n$ kare matrisi için, $AB = I$ ve $BA = I$ olacak şekilde $B \in \mathbb{C}_n$ matrisi varsa, A matrisine *tersinir (veya nonsingular) matris* denir. Buradaki B matrisine, A *matrisinin tersi* denir ve A^{-1} ile gösterilir [22].

Bu kısımda matrisler üzerindeki cebirsel işlemlerden, hacmi genişletmemek adına, daha fazla bahsedilmeyecektir.

2.3. Bir Matrisin Rankı ve Sıfırlığı

Tanım 2.5. Bir $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisi için $\mathcal{R}(A) = \{ Ax \mid x \in \mathbb{C}_{n \times 1} \} \subset \mathbb{C}_{m \times 1}$ kümesine A matrisinin *sütun uzayı* denir [24].

Tanım 2.6. Bir $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisi için $\mathcal{N}(A) = \{ x \in \mathbb{C}_{n \times 1} \mid Ax = \mathbf{0} \} \subset \mathbb{C}_{n \times 1}$ kümesine A matrisinin *sıfır uzayı* denir [24].

Tanım 2.7. Bir $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisinin sütun uzayının boyutuna A *matrisinin rankı* denir ve $\operatorname{rank}(A)$ ile gösterilir [25].

Tanım 2.8. Bir $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisinin sıfır uzayının boyutuna A *matrisinin sıfırlığı* denir ve $\operatorname{nullity}(A)$ ile gösterilir [25].

Teorem 2.9. Bir $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matris için $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{nullity}(A) = n$ eşitliği vardır [25].

2.4. Doğrusal Denklem Sistemleri ve Çözümleri

Tanım 2.10. x_j ($j = 1,2,\ldots,n$)'ler bilinmeyenler olmak üzere, n tane bilinmeyen ve m tane denklemden oluşan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklindeki sisteme *doğrusal denklem sistemi* denir. Burada a_{ij} ($i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$) sayılarına *sistemin katsayıları* ve b_i ($i = 1,2,\ldots,m$) sayılarına da *sistemin sabitleri* denir [26].

Tanım 2.11. (2.1)'deki doğrusal denklem sistemi,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ve } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

olmak üzere, cebirsel olarak $Ax = b$ matris denklemine eşdeğerdir. Buradaki $A \in \mathbb{C}_{mxn}$ matrisine (2.1)'deki sistemin *katsayılar matrisi* ve bloklanmış

$$[A\,|\,b] = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

matrisine de (2.1)'deki *sistemin artırılmış (ekli) matrisi* denir. Ayrıca (2.1) doğrusal denklem sistemi çözüme sahipse *sistem tutarlıdır* aksi halde *sistem tutarsızdır* denir [26].

Bir doğrusal denklem sisteminin çözümü ile rankı arasındaki ilişkiyi veren ve Rusya'da *Kronecker–Capelli Teoremi*, İtalya'da *Rouché–Capelli Teoremi*, Fransa'da *Rouché–Fontené Teoremi* ve çoğu Latin Amerika ülkeleri ve İspanya'da da *Rouché–Frobenius Teoremi* olarak bilinen teorem [27] aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.12. (Rouché–Frobenius Teoremi) $Ax = b$ doğrusal denklem sisteminin tutarlı olması için gerek ve yeter koşul $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A \mid b])$ olmasıdır. $\operatorname{rank}(A) = k$ ve bilinmeyen sayısı da n olmak üzere $Ax = b$ sistemi tutarlı ise, sistem $n-k$ parametreye bağlı çözüme sahiptir [26].

Ayrıca şunu da belirtelim ki A katsayılar matrisinin rankı, $[A \mid b]$ ekli matrisinin rankını geçemez. Yani, $\operatorname{rank}(A) \le \operatorname{rank}([A \mid b])$ eşitsizliği vardır [28].

2.5. Temel Satır İşlemleri ve Denk Matris

(2.1) doğrusal denklem sisteminde;

1. Bir denklemi sıfırdan farklı bir skalerle çarpmak,
2. İki denklemin yerini değiştirmek,
3. Bir denklemin bir skaler katını diğer bir denkleme eklemek,

işlemlerinden biri veya birkaçı yapılarak elde edilen yeni denklem sistemi

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ &\vdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + c_{m3}x_3 + \cdots + c_{mn}x_n &= d_m \end{aligned} \tag{2.3}$$

olsun. Bu durumda (2.1) ile (2.3) doğrusal denklem sistemleri denktir. Biri tutarlı ise diğeri de tutarlı, biri tutarsız ise diğeri de tutarsızdır. Eğer tutarlı iseler çözümleri aynıdır [29].

Bir doğrusal denklem sisteminin artırılmış matrisinin satırlarına sistemin denklemleri karşılık geldiğinden bu üç işlem artırılmış matrisin satırlarında

1. Bir satırı sıfırdan farklı bir skalerle çarpmak
2. İki satırın yerini değiştirmek
3. Bir satırın bir skaler katını diğer bir satıra eklemek,

işlemlerine karşılık gelir ve *temel satır işlemleri* olarak adlandırılır. [29].

Tanım 2.13. B matrisi sonlu sayıda temel satır işlemleri ile A matrisinden elde edilmişse *B matrisi A matrisine satırca denktir* denir [30].

Teorem 2.14. Satırca denk olan matrislerin rankları eşittir [30].

2.6. Bazı Özel Tipli Matrisler

Aşağıda matrislerin kuvvetlerinin sağladığı özelliklere göre tanımlanan bazı özel tipli matrislerin tanımları verilmiştir.

Tanım 2.15. $P^2 = P$ özelliğini sağlayan bir $P \in \mathbb{C}_n$ matrisine *idempotent matris* denir [31].

Tanım 2.16. $A^2 = I$ özelliğini sağlayan bir $A \in \mathbb{C}_n$ matrisine *involutif matris* denir [32].

İdempotent ve involutif matrisler en genel olarak kuadratik matrisler olarak adlandırılan matrisler sınıfı içinde yer alan matrislerdir.

Tanım 2.17. $T^3 = T$ özelliğini sağlayan bir $T \in \mathbb{C}_n$ matrisine *tripotent matris* denir [31].

İdempotent, involutif ve tripotent matrislerin tanımlarına dikkat edildiğinde, idempotent ve involutif matrislerin aynı zamanda birer tripotent matris oldukları görülür.

Tanım 2.18. $B \in \mathbb{C}_n$ bir kare matris, $t > 1$ bir doğal sayı olmak üzere $B^t = B$ özelliği sağlanıyorsa B matrisine *t-potent matris* denir [6].

2.7. Doğrusal Bileşim ve Doğrusal Bağımsızlık

Tanım 2.19. $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m$$

biçimindeki bir ifadeye $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{C}_n$ vektörlerinin bir *doğrusal bileşimi* denir [33].

Tanım 2.20. $\mathbb{C}_n$'nin bir alt kümesi $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ olsun.

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m = \mathbf{0}$$

denklemi yalnızca aşikar çözüme, yani her i için $c_i = 0$ çözümüne sahipse S kümesi *doğrusal bağımlıdır* denir. Aksi halde S kümesi *doğrusal bağımsızdır* denir [33].

2.8. Bir Matrisin Özdeğeri, Özvektörü ve Spektrumu

Bir matrisin *özdeğerleri* ve *özvektörleri* matrisin özellikleri ile alakalı önemli bilgiler verirler. Uygulamalı matematik alanlarında olduğu kadar finans ve kuantum mekaniği gibi birçok alanda da büyük öneme sahip olan bu özelliklerin tanımlarını verelim.

Tanım 2.21. Bir $A \in \mathbb{C}_n$ kare matrisi için $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polinomuna A *matrisinin karakteristik polinomu* denir.

$p_A(\lambda)$ karakteristik polinomunun derecesi n ve baş terimi $(-1)^n \lambda^n$ dir [24].

Tanım 2.22. $p_A(\lambda)$, bir $A \in \mathbb{C}_n$ matrisinin karakteristik polinomu olmak üzere $p_A(\lambda)$'nın köklerine A *matrisinin özdeğerleri (karakteristik kökleri)* denir [34].

Tanım 2.23. $\lambda \in \mathbb{C}$, bir $A \in \mathbb{C}_n$ matrisinin bir özdeğeri olmak üzere, $Ax = \lambda x$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı $x \in \mathbb{C}_{n \times 1}$ vektörüne A matrisinin λ *özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü* denir [34].

Tanım 2.24. $A \in \mathbb{C}_n$ kare matrisinin bütün özdeğerlerinin kümesine, A matrisinin *spektrumu* denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir [24].

Tanım 2.25. $A \in \mathbb{C}_n$ ve $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ olmak üzere, A matrisinin karakteristik polinomu

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} (\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{n_k} \ , \left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n \right)$$

olsun.

a) Bu polinomdaki n_i tamsayısına λ_i *özdeğerinin cebirsel katlılığı* denir ve $\lambda \in \sigma(A)$ için λ 'nın cebirsel katlılığı $\operatorname{cebKat}_A(\lambda)$ ile gösterilir.

b) $\lambda \in \sigma(A)$ olmak üzere, $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ sıfır uzayının boyutuna yani $\operatorname{nullity}(A - \lambda I)$ sayısına da λ *özdeğerinin geometrik katlılığı* denir. Bir başka deyişle, geometrik katlılık λ özdeğerine karşılık gelen doğrusal bağımsız özvektörlerin sayısıdır [24].

2.9. Benzer Matris, Köşegenleştirme ve Eşzamanlı Köşegenleştirme

Tanım 2.26. $A, B \in \mathbb{C}_n$ kare matrisleri için $B = S^{-1}AS$ eşitliğini sağlayan tersinir bir $S \in \mathbb{C}_n$ matrisi varsa, B *matrisi* A *matrisine benzerdi*r denir. $S^{-1}AS$ çarpımına da S *benzerlik matrisi ile ilişkili benzerlik dönüşümü* denir [23].

B matrisi A matrisine benzer olduğunda, A matrisinin de B matrisine benzer olduğu açıktır.

Tanım 2.27. $A \in \mathbb{C}_n$ kare matrisi köşegen bir matrise benzer ise A matrisine *köşegenleştirilebilir matris* denir [35].

Bir matrisin köşegenleştirilebilmesi ile ilgili birçok denk ifade verilebilir. Bu denk ifadelerden bazıları aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.28. Bir $A \in \mathbb{C}_n$ matrisinin köşegenleştirilebilir matris olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin n tane doğrusal bağımsız özvektöre sahip olmasıdır [35].

Aslında, Λ köşegen matris olmak üzere $A = S\Lambda S^{-1}$ olacak şekilde tersinir bir S matrisi vardır ancak ve ancak S matrisinin sütunları, A matrisinin doğrusal bağımsız özvektörleridir. Bu durumda, Λ 'nın köşegen elemanları, sırasıyla S 'deki vektörlere karşılık gelen A 'nın özdeğerleridir [35].

Teorem 2.29. Bir $A \in \mathbb{C}_n$ matrisinin köşegenleştirilebilmesi için gerek ve yeter koşul her $\lambda \in \sigma(A)$ için $\text{cebKat}_A(\lambda) = \text{geoKat}_A(\lambda)$ olmasıdır [24].

Teorem 2.30. Birbirinden farklı özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ olan bir $A \in \mathbb{C}_n$ matrisi verilsin. A matrisinin köşegenleştirilebilmesi için gerek ve yeter koşul $p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)$ olmak üzere $p(A) = \mathbf{0}$ olmasıdır [23].

Tanım 2.31. $A, B \in \mathbb{C}_n$ matrisleri için $S^{-1}AS$ ve $S^{-1}BS$ çarpımlarının her ikisi de köşegen olacak şekilde bir $S \in \mathbb{C}_n$ benzerlik matrisi varsa A ve B matrisleri *eşzamanlı köşegenleştirilebilir matrislerdir* denir [23].

Teorem 2.32. $A, B \in \mathbb{C}_n$ köşegenleştirilebilir matris olsunlar. A ve B matrislerinin eşzamanlı köşegenleştirilebilir matrisler olmaları için gerek ve yeter koşul A ve B matrislerinin değişmeli olmasıdır [23].

2.10. Blok Köşegen Matris ve Direkt Toplam

Tanım 2.33. $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matrisinin bazı satır ve/veya sütunlarının silinmesi ile elde edilen matrise A matrisinin *bir alt matrisi* denir [32].

Tanım 2.34. Bir matrisin satırları veya sütunları arasına yatay veya dikey çizgiler çizilerek alt matrislere parçalanabilir. Bu durumda matrise *parçalanmış matris* (*blok matris*) ve alt matrislere de *bloklar* denir [32].

Tanım 2.35. $A_{ii} \in \mathbb{C}_{n_i}$ ve $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{kk} \end{pmatrix}$$

biçimindeki $A \in \mathbb{C}_n$ matrisine *blok köşegen matris* denir [23].

Tanım 2.36. Tanım 2.35'teki $A \in \mathbb{C}_n$ matrisi gösterim olarak genellikle $A = A_{11} \oplus A_{22} \oplus \cdots \oplus A_{kk}$ biçiminde veya daha kısa bir şekilde $\bigoplus_{i=1}^{k} A_{ii}$ ile gösterilir. Buna $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{kk}$ *matrislerinin direkt toplamı* denir [23].

2.11. Kuadratik Matrisler

Şimdi, çalışmanın esas konusu olan kuadratik matrislerle ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.37. Bir $A \in \mathbb{C}_n$ kare matrisi ikinci dereceden bir $p(x)$ polinomunu sağlıyorsa, yani $p(A) = \mathbf{0}$ oluyorsa, A matrisine bir *kuadratik matris* denir [36].

Tanım 2.38. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $A \in \mathbb{C}_n$ kuadratik matrisinin sağladığı ikinci dereceden polinom $p(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ ise, A matrisine $\{\alpha, \beta\}$*-kuadratik matris* denir [36].

Teorem 2.39. $A \in \mathbb{C}_n$ matrisi bir $\{\alpha, \beta\}$-kuadratik matris olsun. Bu durumda, $\sigma(A) \subseteq \{\alpha, \beta\}$ olup $\alpha \neq \beta$ ise A matrisi köşegenleştirilebilir [37].

Buradan itibaren, çalışma boyunca $\{\alpha, \beta\}$-kuadratik matris denildiğinde $\alpha \neq \beta$ olan, yani köşegenleştirilebilen $\{\alpha, \beta\}$-kuadratik matrisler kastedilecektir. Eğer $\alpha = \beta$ ise bu matrislere kısaca $\{\alpha\}$-kuadratik matris diyeceğiz.

A bir $\{\alpha, \beta\}$-kuadratik matris olsun. α ve β karmaşık sayılarının bazı değerleri için A matrisi iyi bilinen bazı özel tipli matrislere karşılık gelir. Aşağıdaki tabloda α ve β karmaşık sayılarının aldığı değerlere göre A matrisinin hangi özel tipli matrise karşılık geldiği listelenmiştir.

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $A \in \mathbb{C}_n$ olmak üzere A matrisi $\{\alpha, \beta\}$-kuadratik matris olsun. Bu durumda;

α ***ve*** β	***Sağlanan eşitlik***	A ***matrisinin tipi***
$\alpha=1$ ve $\beta=0$	$A^2=A$	$\{1,0\}$ -kuadratik (idempotent),
$\alpha=1$ ve $\beta=-1$	$A^2=I$	$\{1,-1\}$ -kuadratik (involutif),
$\alpha=-1$ ve $\beta=0$	$A^2=-A$	$\{-1,0\}$ -kuadratik (ters idempotent),
$\alpha=0$ ve $\beta=0$	$A^2=\mathbf{0}$	$\{0\}$ -kuadratik (nilpotent).
$\alpha=i$ ve $\beta=-i$	$A^2=-I$	$\{i,-i\}$ -kuadratik (ters involutif).

BÖLÜM 3. İKİ KUADRATİK MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMLERİNİN KUADRATİKLİĞİ

3.1. Giriş

$Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisleri sırasıyla $\{\alpha_1, \beta_1\}$ ve $\{\alpha_2, \beta_2\}$-kuadratik matrisler ve $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere,

$$Q = r_1 Q_1 + r_2 Q_2 \tag{3.1}$$

doğrusal bileşimi göz önüne alınsın. (3.1)'deki Q doğrusal bileşim matrisinin $\{\alpha_3, \beta_3\}$-kuadratik matris olması durumları karakterize edilecektir. Bu bölümdeki karakterizasyonda, (3.1)'deki Q doğrusal bileşim matrisinin $\{\alpha_3, \beta_3\}$-kuadratik olması için doğrusal bileşimin katsayıları ve matrisleri arasında hangi eşitliklerin sağlanması gerektiği gösterilecektir.

Problem üzerinde çalışırken kuadratik matrislerin, bir idempotent ve bir birim matrisin doğrusal bileşimi şeklinde yazılabilmesi gerçeğini kullanacağız. Aşağıdaki teorem, kuadratik matrislerin, bir idempotent ve bir birim matrisin doğrusal bileşimi şeklinde yazılmasına izin vermektedir.

Teorem 3.1. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $\alpha \neq \beta$ olsun. Bu durumda, $A \in \mathbb{C}_n$ matrisinin $\{\alpha, \beta\}$-kuadratik matris olması için gerek ve yeter koşul

$$A = (\alpha - \beta)P + \beta I \tag{3.2}$$

olacak şekilde bir $P \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisinin mevcut olmasıdır [38].

Çalışma boyunca, Teorem 3.1'deki P idempotent matrisine *A kuadratik matrisi ile ilişkili idempotent matris* diyeceğiz.

Teorem 3.1'in sonucu olarak, (3.1) doğrusal bileşimindeki Q_1 ve Q_2 kuadratik matrisleri ile ilişkili idempotent matrisler sırasıyla P_1 ve P_2 olmak üzere,

$$\begin{aligned} Q_1 &= (\alpha_1 - \beta_1) P_1 + \beta_1 I, \\ Q_2 &= (\alpha_2 - \beta_2) P_2 + \beta_2 I \end{aligned}$$

eşitlikleri vardır. Bundan dolayı (3.1)'deki doğrusal bileşimi

$$\begin{aligned} Q &= r_1 \left((\alpha_1 - \beta_1) P_1 + \beta_1 I \right) + r_2 \left((\alpha_2 - \beta_2) P_2 + \beta_2 I \right) \\ &= r_1 (\alpha_1 - \beta_1) P_1 + r_2 (\alpha_2 - \beta_2) P_2 + (r_1\beta_1 + r_2\beta_2) I \end{aligned} \tag{3.3}$$

biçiminde, iki idempotent ve birim matrisin doğrusal bileşimi şeklinde, yazabiliriz. Dolayısıyla ele alınan problem, iki idempotent ve bir birim matrisin doğrusal bileşimlerinin ne zaman kuadratik matris olacaklarına indirgenmiş oldu.

3.2. İki Kuadratik Matrisin Doğrusal Bileşimlerinin Kuadratikliği

Şimdi, iki idempotent matris ve bir birim matrisin doğrusal bileşiminin kuadratikliği ile ilgili elde edilen sonucu verelim.

Teorem 3.2. P_1 ve P_2 idempotent matrisler olsunlar. $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ ve $c_1, c_2 \neq 0$ olmak üzere,

$$P = c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 I \tag{3.4}$$

doğrusal bileşimi göz önüne alınsın. Bu doğrusal bileşimin $\{\lambda,\mu\}$-kuadratik olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $P_1P_2 = P_2P_1$ ile aşağıdaki ilave koşullardan biri sağlanır,

i) $P_1 = \mathbf{0}$, $P_2 = \mathbf{0}$ ve $(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=0$,

ii) $P_1 = \mathbf{0}$, $c_2+2c_3=\lambda+\mu$ ve $(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=0$,

iii) $P_1 = \mathbf{0}$, $P_2 = I$ ve $(c_2+c_3-\lambda)(c_2+c_3-\mu)=0$,

iv) $P_2 = \mathbf{0}$, $c_1+2c_3=\lambda+\mu$ ve $(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=0$,

v) $P_1 = I$, $P_2 = \mathbf{0}$ ve $(c_1+c_3-\lambda)(c_1+c_3-\mu)=0$,

vi) $P_1P_2 = \mathbf{0}$, $c_1=c_2$, $c_2+2c_3=\lambda+\mu$ ve $(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=0$,

vii) $P_1+P_2 = I$ ve $(c_1+c_3-\lambda)(c_1+c_3-\mu)=(c_2+c_3-\lambda)(c_2+c_3-\mu)=0$,

viii) $P_1 = P_2$, $(c_1+c_2)(c_1+c_2+2c_3-\lambda-\mu)=0$ ve $(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=0$,

ix) $P_1 = P_2 = I$ ve $(c_1+c_2+c_3-\lambda)(c_1+c_2+c_3-\mu)=0$,

x) $P_1P_2 = P_1$, $c_1+c_2=0$, $c_2+2c_3=\lambda+\mu$ ve $(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=0$,

xi) $P_2 = I$, $c_1+2c_2+2c_3=\lambda+\mu$ ve $(c_2+c_3-\lambda)(c_2+c_3-\mu)=0$,

xii) $P_1P_2 = P_2$, $c_1+c_2=0$, $c_1+2c_3=\lambda+\mu$ ve $(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=0$,

xiii) $P_1 = I$, $2c_1+c_2+2c_3=\lambda+\mu$ ve $(c_1+c_3-\lambda)(c_1+c_3-\mu)=0$,

xiv) $P_1+P_2 = P_1P_2+I$, $c_1=c_2$, $3c_1+2c_3=\lambda+\mu$ ve $(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=2c_1c_2$,

(b) $P_1P_2 \neq P_2P_1$ ile $c_1+c_2+2c_3=\lambda+\mu$ ve $c_1c_2(P_1-P_2)^2=(c_3-\lambda)(c_3-\mu)I$ koşulları sağlanır.

İspat. (3.4)'teki P doğrusal bileşiminin $\{\lambda,\mu\}$-kuadratik matris olması için gerek ve yeter koşul $(P-\lambda I)(P-\mu I)=\mathbf{0}$ eşitliğinin, yani

$$(c_1P_1+c_2P_2+c_3I-\lambda I)(c_1P_1+c_2P_2+c_3I-\mu I)=\mathbf{0}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu eşitliği açtığımızda,

$$\begin{aligned}&c_1^2P_1+c_1c_2P_1P_2+c_1c_3P_1-c_1\mu P_1+c_1c_2P_2P_1+c_2^2P_2+c_2c_3P_2-c_2\mu P_2\\&+c_1c_3P_1+c_2c_3P_2+c_3^2I-c_3\mu I-c_1\lambda P_1-c_2\lambda P_2-c_3\lambda I+\lambda\mu I=\mathbf{0}\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned}&c_1\left(c_1+2c_3-\lambda-\mu\right)P_1+c_2\left(c_2+2c_3-\lambda-\mu\right)P_2\\&+c_1c_2P_1P_2+c_1c_2P_2P_1+\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)I=\mathbf{0}\end{aligned}\tag{3.5}$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.4)'teki P doğrusal bileşiminin $\{\lambda,\mu\}$-kuadratik olması için gerek ve yeter koşul (3.5) eşitliğinin sağlanmasıdır. İspat P_1 ve P_2 matrislerinin değişmeli ve değişmeli olmamaları durumları için ayrı ayrı yapılacaktır. Yeter koşul doğrudan hesaplama ile kolaylıkla görüleceğinden sadece gerek koşul gösterilecektir.

Öncelikle, $P_1P_2=P_2P_1$ değişmeli durumu ele alınacaktır. Bu durumda (3.5) eşitliği,

$$\begin{aligned}&c_1\left(c_1+2c_3-\lambda-\mu\right)P_1+c_2\left(c_2+2c_3-\lambda-\mu\right)P_2\\&+2c_1c_2P_1P_2+\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)I=\mathbf{0}\end{aligned}\tag{3.6}$$

eşitliğine dönüşür. Böylece P_1 ve P_2 matrisleri değişmeli iken (3.4)'teki P doğrusal bileşiminin $\{\lambda,\mu\}$-kuadratik matris olması için gerek ve yeter koşul (3.6) eşitliğinin sağlanmasıdır. (3.6) eşitliği soldan P_1 ve sağdan P_2 ile çarpılırsa sırasıyla,

$$\begin{aligned}&\left(c_1\left(c_1+2c_3-\lambda-\mu\right)+\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)\right)P_1\\&+\left(c_2\left(c_2+2c_3-\lambda-\mu\right)+2c_1c_2\right)P_1P_2=\mathbf{0}\end{aligned}\tag{3.7}$$

ve

$$\begin{aligned}&\left(c_2\left(c_2+2c_3-\lambda-\mu\right)+\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)\right)P_2\\&+\left(c_1\left(c_1+2c_3-\lambda-\mu\right)+2c_1c_2\right)P_1P_2=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{3.8}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.7) eşitliğini sağdan P_2 (veya (3.8) eşitliğini soldan P_1) ile çarparak

$$\left(c_1\left(c_1+2c_3-\lambda-\mu\right)+c_2\left(c_2+2c_3-\lambda-\mu\right)+2c_1c_2+\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)\right)P_1P_2=\mathbf{0} \tag{3.9}$$

eşitliği elde edilir. İspatın bu aşamasında $P_1P_2=\mathbf{0}$ ve $P_1P_2\neq\mathbf{0}$ durumlarına göre irdeleme yapılacaktır.

Şimdi, $P_1P_2=\mathbf{0}$ olduğu kabul edilsin. Dolayısıyla (3.7) ve (3.8) eşitlikleri sırasıyla

$$\left(c_1\left(c_1+2c_3-\lambda-\mu\right)+\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)\right)P_1=\mathbf{0} \tag{3.10}$$

ve

$$\left(c_2\left(c_2+2c_3-\lambda-\mu\right)+\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)\right)P_2=\mathbf{0} \tag{3.11}$$

eşitliklerine dönüşür. (3.10) ve (3.11) eşitlikleri sağlanabilecek şekilde, P_1 ve/veya P_2 matrislerinin sıfır olup olmamasına bağlı olarak (3.10) ve (3.11) eşitlikleri için,

$P_1=\mathbf{0}$ ve $P_2=\mathbf{0}$,

$P_1=\mathbf{0}$ ve $P_2\neq\mathbf{0}$,

$P_1\neq\mathbf{0}$ ve $P_2=\mathbf{0}$,

$P_1\neq\mathbf{0}$ ve $P_2\neq\mathbf{0}$, olmak üzere, dört farklı durum söz konusudur.

İlk olarak $P_1 = \mathbf{0}$ ve $P_2 = \mathbf{0}$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (3.6) eşitliği

$$(c_3 - \lambda)(c_3 - \mu) I = \mathbf{0}$$

biçimine dönüşür. Bu eşitliğin sağlanması için $(c_3 - \lambda)(c_3 - \mu) = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla (a) i) şıkkı elde edilmiş olur.

İkinci olarak $P_1 = \mathbf{0}$ ve $P_2 \neq \mathbf{0}$ olduğu kabul edilsin. (3.11) eşitliğinden

$$c_2 (c_2 + 2c_3 - \lambda - \mu) = -(c_3 - \lambda)(c_3 - \mu) \tag{3.12}$$

bulunur. $P_1 = \mathbf{0}$ olduğu hesaba katılarak (3.12) eşitliği (3.6)'da kullanılırsa

$$(c_3 - \lambda)(c_3 - \mu)(I - P_2) = \mathbf{0} \tag{3.13}$$

elde edilir. Bu eşitlikten $(c_3 - \lambda)(c_3 - \mu) = 0$ veya $P_2 = I$ olduğu görülür. Eğer $(c_3 - \lambda)(c_3 - \mu) = 0$ ise, $c_2 \neq 0$ oluğu da dikkate alınarak, (3.12) eşitliğinden $c_2 + 2c_3 = \lambda + \mu$ bulunur. Dolayısıyla, (a) ii) şıkkı elde edilir.

(3.12) eşitliği düzenlendiğinde

$$(c_2 + c_3 - \lambda)(c_2 + c_3 - \mu) = 0$$

biçiminde yazılabilir. Bununla birlikte, $P_2 = I$ alındığında da (a) iii) şıkkı ispat edilmiş olur.

Şimdi de $P_1 \neq \mathbf{0}$ ve $P_2 = \mathbf{0}$ olduğu kabul edilsin. (3.10) eşitliğinden

$$c_1\left(c_1+2c_3-\lambda-\mu\right)=-\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right) \tag{3.14}$$

olduğu görülür. $P_2=\mathbf{0}$ olduğu da göz önüne alınarak (3.14) eşitliği (3.6) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)\left(I-P_1\right)=\mathbf{0}$$

bulunur. Bu eşitliğin sağlanması için de $\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)=0$ veya $P_1=I$ olması gerekir. Eğer $\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)=0$ ise, $c_1\neq 0$ olduğu da düşünülerek (3.14) eşitliğinden $c_1+2c_3=\lambda+\mu$ elde edilir. Dolayısıyla (a) iv) şıkkı ispatlanmış olur.

Öte yandan (3.14) eşitliği düzenlenerek

$$\left(c_1+c_3-\lambda\right)\left(c_1+c_3-\mu\right)=0$$

biçiminde yazılabilir. O halde $P_1=I$ olması durumunda (a) v) şıkkı da gösterilmiş olur.

Son olarak $P_1\neq\mathbf{0}$ ve $P_2\neq\mathbf{0}$ olması durumu göz önüne alındığında (3.10) ve (3.11) eşitliklerinden sırasıyla,

$$\begin{aligned} c_1\left(c_1+2c_3-\lambda-\mu\right)&=-\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right),\\ c_2\left(c_2+2c_3-\lambda-\mu\right)&=-\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

bulunur. $P_1P_2=\mathbf{0}$ olduğu dikkate alınarak (3.15) eşitlikleri (3.6) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)\left(I-P_1-P_2\right)=\mathbf{0} \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.16) eşitliğinin sağlanması için de $(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=0$ veya $P_1+P_2=I$ olması gerekir. $(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=0$ olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla $c_1, c_2 \neq 0$ oluşu da dikkate alındığında (3.15) eşitliklerinden $c_1+2c_3-\lambda-\mu=0$ ve $c_2+2c_3-\lambda-\mu=0$ elde edilir. Bu iki eşitlikten de $c_1=c_2$ ve $c_2+2c_3=\lambda+\mu$ yazılabilir. Dolayısıyla (a) vi) şıkkı elde edilmiş olur.

(3.15) eşitlikleri düzenlenerek sırasıyla

$$(c_1+c_3-\lambda)(c_1+c_3-\mu)=0 \text{ ve } (c_2+c_3-\lambda)(c_2+c_3-\mu)=0$$

yazılabilir. Bununla birlikte, $P_1+P_2=I$ olduğu da kabul edilirse, (a) vii) şıkkı da ispatlanmış olur.

Şimdi de $P_1P_2 \neq \mathbf{0}$ olduğu varsayılsın. Bu durumda (3.9) eşitliğinden

$$c_1(c_1+2c_3-\lambda-\mu)+c_2(c_2+2c_3-\lambda-\mu)+2c_1c_2+(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=0 \quad (3.17)$$

elde edilir. Bu eşitlikten de

$$c_1(c_1+2c_3-\lambda-\mu)+(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=-\left(c_2(c_2+2c_3-\lambda-\mu)+2c_1c_2\right)$$

ve

$$c_2(c_2+2c_3-\lambda-\mu)+(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=-\left(c_1(c_1+2c_3-\lambda-\mu)+2c_1c_2\right)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu iki eşitlik kullanılarak (3.7) ve (3.8) eşitliklerinden sırasıyla

$$\left(c_2\left(c_2+2c_3-\lambda-\mu\right)+2c_1c_2\right)\left(P_1P_2-P_1\right)=\mathbf{0} \tag{3.18}$$

ve

$$\left(c_1\left(c_1+2c_3-\lambda-\mu\right)+2c_1c_2\right)\left(P_1P_2-P_2\right)=\mathbf{0} \tag{3.19}$$

bulunur. Bu durumda (3.18) ve (3.19) eşitlikleri için,

$P_1P_2=P_1$ ve $P_1P_2=P_2$,

$P_1P_2=P_1$ ve $P_1P_2\neq P_2$,

$P_1P_2\neq P_1$ ve $P_1P_2=P_2$,

$P_1P_2\neq P_1$ ve $P_1P_2\neq P_2$,

olmak üzere dört farklı durum söz konusudur. Şimdi bu durumları irdeleyelim.

İlk olarak $P_1P_2=P_1$ ve $P_1P_2=P_2$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, (3.6) eşitliği

$$\begin{aligned}&\left(c_1\left(c_1+2c_3-\lambda-\mu\right)+c_2\left(c_2+2c_3-\lambda-\mu\right)+2c_1c_2\right)P_1P_2\\&+\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)I=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{3.20}$$

biçimine dönüşür. Öte yandan, (3.17) eşitliği (3.20)'de kullanılırsa,

$$\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)\left(I-P_1P_2\right)=\mathbf{0}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için $\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)=0$ veya $P_1P_2=I$ olması gerekir. Eğer $\left(c_3-\lambda\right)\left(c_3-\mu\right)=0$ ise, (3.17) eşitliği buna göre düzenlenip

$$\left(c_1+c_2\right)\left(c_1+c_2+2c_3-\lambda-\mu\right)=0$$

biçiminde yazılabilir ve (a) viii) şıkkı için istenen elde edilir. Diğer taraftan (3.17)'yi

$$(c_1+c_2+c_3-\lambda)(c_1+c_2+c_3-\mu)=0$$

biçiminde düzenleyip, $P_1P_2=I$ alındığında da (a) ix) şıkkı görülür.

Şimdi de $P_1P_2=P_1$ ve $P_1P_2\neq P_2$ olduğu kabul edilsin. $P_1P_2\neq P_2$ olduğundan, (3.19) eşitliğinden

$$c_1(c_1+2c_3-\lambda-\mu)+2c_1c_2=0 \tag{3.21}$$

bulunur. $P_1P_2=P_1$ olduğu hesaba katılarak, (3.21) eşitliği, (3.6) eşitliğinde kullanılırsa,

$$c_2(c_2+2c_3-\lambda-\mu)P_2+(c_3-\lambda)(c_3-\mu)I=\mathbf{0} \tag{3.22}$$

olur. Diğer taraftan (3.21) eşitliği dikkate alınırsa, (3.17) eşitliğinden

$$c_2(c_2+2c_3-\lambda-\mu)=-(c_3-\lambda)(c_3-\mu) \tag{3.23}$$

yazılabilir. Ayrıca yine (3.21) eşitliğinden $c_1\neq 0$ olduğu hesaba katılarak

$$c_1+2c_2+2c_3=\lambda+\mu \tag{3.24}$$

olduğu görülür. (3.22) ve (3.23) eşitlikleri birleştirildiğinde de

$$(c_3-\lambda)(c_3-\mu)(I-P_2)=\mathbf{0}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için $(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=0$ veya $P_2=I$ olmalıdır. Eğer $(c_3-\lambda)(c_3-\mu)=0$ ise, $c_2\neq 0$ olduğu da düşünülerek, (3.23) eşitliğinden $c_2+2c_3=\lambda+\mu$ elde edilir. Bu eşitlik ve (3.24) eşitliğinden $c_1+c_2=0$ olduğu görülür. Dolayısıyla (a) x) şıkkı ispat edilmiş olur.

Diğer taraftan (3.23) eşitliği,

$$(c_2+c_3-\lambda)(c_2+c_3-\mu)=0$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik ve (3.24) dikkate alınarak $P_2=I$ olması halinde (a) xi) şıkkı görülür.

Şimdi de $P_1P_2\neq P_1$ ve $P_1P_2=P_2$ olduğu kabul edilsin. (3.18) eşitliğinden

$$c_2(c_2+2c_3-\lambda-\mu)+2c_1c_2=0 \tag{3.25}$$

elde edilir. $P_1P_2=P_2$ olduğu göz önüne alınarak (3.25) eşitliği, (3.6) eşitliğinde kullanılırsa,

$$c_1(c_1+2c_3-\lambda-\mu)P_1+(c_3-\lambda)(c_3-\mu)I=\mathbf{0} \tag{3.26}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.25) eşitliğini dikkate alarak (3.17) eşitliğinden

$$c_1(c_1+2c_3-\lambda-\mu)=-(c_3-\lambda)(c_3-\mu) \tag{3.27}$$

olduğu görülür. Yine (3.25) eşitliğinde $c_2\neq 0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$2c_1 + c_2 + 2c_3 = \lambda + \mu \tag{3.28}$$

yazılabilir. Öte yandan (3.26) ve (3.27) eşitlikleri birleştirildiğinde

$$(c_3 - \lambda)(c_3 - \mu)(I - P_1) = \mathbf{0}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için de $(c_3 - \lambda)(c_3 - \mu) = 0$ veya $P_1 = I$ olmalıdır. $(c_3 - \lambda)(c_3 - \mu) = 0$ ise, $c_1 \neq 0$ olduğu göz önüne alınarak (3.27) eşitliğinden $c_1 + 2c_3 = \lambda + \mu$ yazılabilir. Bu eşitlik ve (3.28)'den $c_1 + c_2 = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla (a) xii) şıkkı ispat edilmiş olur.

Şimdi de $P_1 = I$ olsun. (3.27) eşitliği düzenlenerek $(c_1 + c_3 - \lambda)(c_1 + c_3 - \mu) = 0$ biçiminde yazılabilir. Bu eşitlik, (3.28) ve $P_1 = I$ olduğu birlikte düşünüldüğünde (a) xiii) şıkkı görülür.

$P_1P_2 \neq P_1$ ve $P_1P_2 \neq P_2$ ise, (3.18) ve (3.19) eşitliklerinden sırasıyla

$$\begin{aligned} c_2\left(c_2 + 2c_3 - \lambda - \mu\right) &= -2c_1c_2, \\ c_1\left(c_1 + 2c_3 - \lambda - \mu\right) &= -2c_1c_2 \end{aligned} \tag{3.29}$$

bulunur. (3.17) ve (3.29) eşitliklerinden

$$(c_3 - \lambda)(c_3 - \mu) = 2c_1c_2 \tag{3.30}$$

yazılabilir. (3.29) ve (3.30) eşitliklerini, (3.6) eşitliğinde yerine yazıp, $c_1c_2 \neq 0$ olduğu da hesaba katıldığında

$$P_1 + P_2 = P_1P_2 + I$$

elde edilir. Diğer taraftan $c_1, c_2 \neq 0$ olduğu göz önüne alınarak, (3.29) eşitliklerinden sırasıyla,

$$2c_1 + c_2 + 2c_3 = \lambda + \mu \quad \text{ve} \quad c_1 + 2c_2 + 2c_3 = \lambda + \mu$$

bulunur. Bu iki eşitlikten $c_1 = c_2$ ve $3c_1 + 2c_3 = \lambda + \mu$ yazılabilir. Dolayısıyla (a) xiv) şıkkı ispat edilmiş olur. Böylece $P_1P_2 = P_2P_1$ durumu için bütün sonuçları elde etmiş olduk.

Simdi de $P_1P_2 \neq P_2P_1$ durumu ile ilgili sonucu belirleyelim.

Bu durumda (3.5) eşitliği bir soldan bir de sağdan P_1 ile çarpıldığında sırasıyla

$$\begin{aligned}&\left(c_1\left(c_1 + 2c_3 - \lambda - \mu\right) + \left(c_3 - \lambda\right)\left(c_3 - \mu\right)\right)P_1 \\ &+\left(c_2\left(c_2 + 2c_3 - \lambda - \mu\right) + c_1c_2\right)P_1P_2 + c_1c_2P_1P_2P_1 = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{3.31}$$

ve

$$\begin{aligned}&\left(c_1\left(c_1 + 2c_3 - \lambda - \mu\right) + \left(c_3 - \lambda\right)\left(c_3 - \mu\right)\right)P_1 \\ &+\left(c_2\left(c_2 + 2c_3 - \lambda - \mu\right) + c_1c_2\right)P_2P_1 + c_1c_2P_1P_2P_1 = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{3.32}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.31) ve (3.32) eşitlikleri taraf tarafa çıkartılarak;

$$\left(c_2^2 + 2c_2c_3 - c_2\left(\lambda + \mu\right) + c_1c_2\right)\left(P_1P_2 - P_2P_1\right) = \mathbf{0} \tag{3.33}$$

olduğu görülür. $P_1P_2 \neq P_2P_1$ ve $c_2 \neq 0$ olduğunu göz önüne alındığında (3.33) eşitliğinden

$$c_1 + c_2 + 2c_3 = \lambda + \mu$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$-c_2 = c_1 + 2c_3 - (\lambda + \mu) \text{ ve } -c_1 = c_2 + 2c_3 - (\lambda + \mu) \tag{3.34}$$

yazılabilir. (3.34) eşitlikleri (3.5) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$-c_1c_2P_1 - c_1c_2P_2 + c_1c_2P_1P_2 + c_1c_2P_2P_1 + (c_3 - \lambda)(c_3 - \mu)I = \mathbf{0}$$

elde edilir. Gerekli düzenleme yapıldığında ise,

$$-c_1c_2(P_1 + P_2 - P_1P_2 - P_2P_1) + (c_3 - \lambda)(c_3 - \mu)I = \mathbf{0}$$

yani

$$c_1c_2(P_1 - P_2)^2 = (c_3 - \lambda)(c_3 - \mu)I$$

bulunur. Böylece, teoremin (b) şıkkı ispatlanmış olur. ■

Teorem 3.2'de $c_3 = 0$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $P_1 \neq \mathbf{0}$ ve $P_2 \neq \mathbf{0}$ alındığında, Baksalary ve Baksalary'nin [2] çalışmasındaki, iki idempotent matrisin doğrusal bileşiminin idempotentliği ile ilgili Teorem sonuç olarak verilebilir. Dolayısıyla Teorem 3.2, [2]'deki Teorem'in bir genellemesi niteliğindendir. Baksalary ve Baksalary'nin bu sonucu, aşağıda verilecek olan iki kuadratik matrisin doğrusal bileşiminin kuadratikliği ile ilgili sonuçtan da elde edilebilir.

Şimdi çalışmanın esas konusu olan kuadratik matrislerle ilgili elde ettiğimiz ana sonuçlardan birini vermeden önce ispatta kullanılacak olan bir sonucu verelim.

Lemma 3.3. Q_1 ve Q_2 matrisleri sırasıyla $\{\alpha_1,\beta_1\}$ ve $\{\alpha_2,\beta_2\}$-kuadratik matrisler ve bu matrislerle ilişkili olan idempotent matrisler de sırasıyla P_1 ve P_2 olsun. Bu durumda $Q_1Q_2=Q_2Q_1$ olması için gerek ve yeter koşul $P_1P_2=P_2P_1$ olmasıdır.

İspat. $\alpha_i \neq \beta_i$ $(i=1,2)$ olduğu dikkate alındığında, ispat matris çarpımından hemen görülür. ■

Teorem 3.4. Q_1 ve Q_2, sırasıyla, $\{\alpha_1,\beta_1\}$ ve $\{\alpha_2,\beta_2\}$-kuadratik matrisleri verilsin. $r_1,r_2\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere

$$Q=r_1Q_1+r_2Q_2 \tag{3.35}$$

doğrusal bileşimi göz önüne alınsın. Q doğrusal bileşiminin $\{\alpha_3,\beta_3\}$-kuadratik matris olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $Q_1Q_2=Q_2Q_1$ ile birlikte aşağıdaki koşullardan biri sağlanır.

i) $Q_1=\beta_1 I$, $Q_2=\beta_2 I$ ve $(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\alpha_3)(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\beta_3)=0$,

ii) $2r_1\beta_1+r_2(\alpha_2+\beta_2)=\alpha_3+\beta_3$, $(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\alpha_3)(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\beta_3)=0$ ve $Q_1=\beta_1 I$,

iii) $(r_1\beta_1+r_2\alpha_2-\alpha_3)(r_1\beta_1+r_2\alpha_2-\beta_3)=0$, $Q_1=\beta_1 I$ ve $Q_2=\alpha_2 I$,

iv) $r_1(\alpha_1+\beta_1)+2r_2\beta_2=\alpha_3+\beta_3$, $(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\alpha_3)(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\beta_3)=0$ ve $Q_2=\beta_2 I$,

v) $(r_1\alpha_1+r_2\beta_2-\alpha_3)(r_1\alpha_1+r_2\beta_2-\beta_3)=0$, $Q_1=\alpha_1 I$ ve $Q_2=\beta_2 I$,

vi) $r_1(\alpha_1-\beta_1)=r_2(\alpha_2-\beta_2)$, $2r_1\beta_1+r_2(\alpha_2+\beta_2)=\alpha_3+\beta_3$,

$(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\alpha_3)(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\beta_3)=0$ ve $(Q_1-\beta_1 I)(Q_2-\beta_2 I)=\mathbf{0}$

vii) $(r_1\alpha_1+r_2\beta_2-\alpha_3)(r_1\alpha_1+r_2\beta_2-\beta_3)=0$, $(r_1\beta_1+r_2\alpha_2-\alpha_3)(r_1\beta_1+r_2\alpha_2-\beta_3)=0$

ve $\dfrac{Q_1-\beta_1 I}{\alpha_1-\beta_1}+\dfrac{Q_2-\beta_2 I}{\alpha_2-\beta_2}=I$,

viii) $\left(r_1\alpha_1-r_1\beta_1+r_2\alpha_2-r_2\beta_2\right)\left(r_1\alpha_1+r_1\beta_1+r_2\alpha_2+r_2\beta_2-\alpha_3-\beta_3\right)=0$,

$\left(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\alpha_3\right)\left(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\beta_3\right)=0$ ve $\dfrac{Q_1-\beta_1 I}{\alpha_1-\beta_1}=\dfrac{Q_2-\beta_2 I}{\alpha_2-\beta_2}$,

ix) $\left(r_1\alpha_1+r_2\alpha_2-\alpha_3\right)\left(r_1\alpha_1+r_2\alpha_2-\beta_3\right)=0$ ve $\dfrac{Q_1-\beta_1 I}{\alpha_1-\beta_1}=\dfrac{Q_2-\beta_2 I}{\alpha_2-\beta_2}=I$

x) $r_1(\alpha_1-\beta_1)+r_2(\alpha_2-\beta_2)=0$, $2r_1\beta_1+r_2(\alpha_2+\beta_2)=\alpha_3+\beta_3$,

$(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\alpha_3)(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\beta_3)=0$ ve $(Q_1-\beta_1 I)\dfrac{Q_2-\beta_2 I}{\alpha_2-\beta_2}=Q_1-\beta_1 I$

xi) $r_1(\alpha_1+\beta_1)+2r_2\alpha_2=\alpha_3+\beta_3$, $(r_1\beta_1+r_2\alpha_2-\alpha_3)(r_1\beta_1+r_2\alpha_2-\beta_3)=0$ ve

$Q_2=\alpha_2 I$,

xii) $r_1(\alpha_1-\beta_1)+r_2(\alpha_2-\beta_2)=0$, $r_1\left(\alpha_1+\beta_1\right)+2r_2\beta_2=\alpha_3+\beta_3$,

$(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\alpha_3)(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\beta_3)=0$ ve $\dfrac{Q_1-\beta_1 I}{\alpha_1-\beta_1}(Q_2-\beta_2 I)=Q_2-\beta_2 I$,

xiii) $2r_1\alpha_1+r_2(\alpha_2+\beta_2)=\alpha_3+\beta_3$, $(r_1\alpha_1+r_2\beta_2-\alpha_3)(r_1\alpha_1+r_2\beta_2-\beta_3)=0$ ve

$Q_1=\alpha_1 I$,

xiv) $r_1(\alpha_1-\beta_1)=r_2(\alpha_2-\beta_2)$, $\dfrac{(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\alpha_3)(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\beta_3)}{(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)}=2r_1r_2$,

$r_1(3\alpha_1-\beta_1)+2r_2\beta_2=\alpha_3+\beta_3$ ve $\dfrac{Q_1-\beta_1 I}{\alpha_1-\beta_1}+\dfrac{Q_2-\beta_2 I}{\alpha_2-\beta_2}=\dfrac{Q_1-\beta_1 I}{\alpha_1-\beta_1}\dfrac{Q_2-\beta_2 I}{\alpha_2-\beta_2}+I$

(b) $Q_1Q_2\neq Q_2Q_1$ ile $\left(\dfrac{Q_1-\beta_1 I}{\alpha_1-\beta_1}-\dfrac{Q_2-\beta_2 I}{\alpha_2-\beta_2}\right)^2=\dfrac{\left(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\alpha_3\right)\left(r_1\beta_1+r_2\beta_2-\beta_3\right)}{r_1r_2\left(\alpha_1-\beta_1\right)\left(\alpha_2-\beta_2\right)}I$ ve

$r_1\left(\alpha_1+\beta_1\right)+r_2\left(\alpha_2+\beta_2\right)=\alpha_3+\beta_3$.

İspat. Q_1 ve Q_2 matrisleri ile ilişkili idempotent matrisler sırasıyla P_1 ve P_2 olsun. Bu durumda,

$$Q_1 = (\alpha_1 - \beta_1) P_1 + \beta_1 I,$$
$$Q_2 = (\alpha_2 - \beta_2) P_2 + \beta_2 I \tag{3.36}$$

eşitlikleri vardır. (3.36) eşitlikleri kullanılarak Q doğrusal bileşim matrisi

$$r_1 Q_1 + r_2 Q_2 = r_1 (\alpha_1 - \beta_1) P_1 + r_2 (\alpha_2 - \beta_2) P_2 + (r_1\beta_1 + r_2\beta_2) I \tag{3.37}$$

biçiminde, yani, iki idempotent ve bir birim matrisin doğrusal bileşimi şeklinde yazılabilir. $\alpha_i \neq \beta_i$ ve $r_i \neq 0$ $(i = 1,2)$ olduğundan (3.37) doğrusal bileşimindeki P_1 ve P_2 matrislerinin katsayıları sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla, (3.37) doğrusal bileşimine Teorem 3.2 uygulanabilir. Ayrıca, Lemma 3.3'ten dolayı $Q_1Q_2 = Q_2Q_1$ ve $Q_1Q_2 \neq Q_2Q_1$ olması durumlarına, sırasıyla, Teorem 3.2'nin $P_1P_2 = P_2P_1$ durumunun (yani (a) şıkkı) ve $P_1P_2 \neq P_2P_1$ durumunun (yani (b) şıkkı) karşılık geldiği açıktır.

Bu nedenle, Teorem 3.2'de $c_1 = r_1(\alpha_1 - \beta_1)$, $c_2 = r_2(\alpha_2 - \beta_2)$, $c_3 = r_1\beta_1 + r_2\beta_2$, $\lambda = \alpha_3$ ve $\mu = \beta_3$ alındığında istenen katsayı eşitlikleri elde edilir.

Diğer taraftan (3.36) eşitliklerinden

$$P_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \beta_1}(Q_1 - \beta_1 I) \text{ ve } P_2 = \frac{1}{\alpha_2 - \beta_2}(Q_2 - \beta_2 I) \tag{3.38}$$

yazılabilir. Teorem 3.2'nin şıklarındaki matris eşitliklerinde P_1 ve P_2 yerine (3.38) eşitliklerindeki değerleri yazılarak istenen matris eşitlikleri de elde edilir. ■

Teorem 3.4'te α_i, β_i ($i=1,2,3$) karmaşık sayılarına bazı değerler verilerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir. Bu sonuçların bazıları literatürde yer almaktadır. Dolayısıyla literatürde mevcut olan bazı çalışmalara da kuadratik matrisler kullanılarak alternatif ispat verilmiş olacaktır.

Bunlara ek olarak belirtilmelidir ki, Teorem 3.4'teki matrislerin türüne göre α_i, β_i $(i=1,\,2,\,3)$'nin alabileceği değerler için hesaplama yapıldığında, teoremin bazı şıklarından hiçbir sonuç gelmezken (bu durumda ilgili koşulu sağlayan doğrusal bileşim yok demektir), bazı şıkları bir başka şıkkın aynısı veya özel bir hali olabilecektir. Dolayısıyla aşağıdaki sonuçların ispatında aynı sonucu veren şıkların tekrar tekrar hesaplamaları yazılmadan, sadece farklı sonuç veren şıkların hesaplamaları yazılacaktır.

Teorem 3.4'te $(\alpha_i, \beta_i) = (1,0)$ $(i=1,\,2,\,3)$ alındığında iki idempotent matrisin doğrusal bileşiminin idempotentliği ile ilgili [2]'deki Teorem elde edilir.

Sonuç 3.5. Q_1 ve Q_2 birbirinden ve sıfırdan farklı iki idempotent matris olsun. $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $r_1Q_1 + r_2Q_2$ doğrusal bileşiminin idempotent olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $Q_1Q_2 = Q_2Q_1$ ile birlikte aşağıdaki koşullardan biri sağlanır,

i) $Q_1Q_2 = \mathbf{0}$, $r_1 = 1$ ve $r_2 = 1$,

ii) $Q_1Q_2 = Q_1$, $r_1 = -1$ ve $r_2 = 1$,

iii) $Q_1Q_2 = Q_2$, $r_1 = 1$ ve $r_2 = -1$,

(b) $Q_1Q_2 \neq Q_2Q_1$ ile birlikte $(Q_1 - Q_2)^2 = \mathbf{0}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ ve $r_1 + r_2 = 1$ koşulları sağlanır.

İspat. Teorem 3.4'te $(\alpha_i, \beta_i) = (1,0)$ ($i=1,\,2,\,3$) alınsın. Bu durumda Teorem 3.4'ün (a) şıkkının vi), x) ve xii) alt şıklarından;

1. $r_1 = r_2$, $r_2 = 1$, $0 = 0$ ve $Q_1Q_2 = \mathbf{0} \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$ ve $Q_1Q_2 = \mathbf{0}$,
2. $r_1 + r_2 = 0$, $r_2 = 1$, $0 = 0$ ve $Q_1Q_2 = Q_1 \Rightarrow r_1 = -1, r_2 = 1$ ve $Q_1Q_2 = Q_1$,
3. $r_1 + r_2 = 0$, $r_1 = 1$, $0 = 0$ ve $Q_1Q_2 = Q_2 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$ ve $Q_1Q_2 = Q_2$

eşitlikleri bulunur. Bunlar da sırasıyla Sonuç 3.5'in (a) şıkkının i), ii) ve iii) alt şıklarına karşılık gelir.

Son olarak Teorem 3.4'ün (b) şıkkından, $(Q_1 - Q_2)^2 = \mathbf{0}$ ve $r_1 + r_2 = 1$ elde edilir. $r_1 + r_2 = 1$ ve $r_1, r_2 \neq 0$ birlikte düşünüldüğünde de $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ olduğu görülür. Dolayısıyla Sonucun (b) şıkkı da ispatlanmış olur. ■

Teorem 3.4'te $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2) = (1,0)$ ve $(\alpha_3, \beta_3) = (1,-1)$ alındığında [9]'daki Teorem 2.5 ve [10]'daki Teorem 2.5 elde edilir.

Sonuç 3.6. Q_1 ve Q_2 birbirinden ve sıfırdan farklı iki idempotent matris olsunlar. $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $r_1Q_1 + r_2Q_2$ doğrusal bileşiminin involutif olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır:

(a) $Q_1Q_2 = Q_2Q_1$ ile birlikte aşağıdaki koşullardan biri sağlanır.

i) $(r_1, r_2) \in \{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\}$ ve $Q_1 + Q_2 = I$,

ii) $(r_1, r_2) \in \{(-2,1), (2,-1)\}$ ve $Q_2 = I$,

iii) $(r_1, r_2) \in \{(1,-2), (-1,2)\}$ ve $Q_1 = I$,

(b) $Q_1Q_2 \neq Q_2Q_1$ ile birlikte $r_1 + r_2 = 0$ ve $(Q_1 - Q_2)^2 = \dfrac{-1}{r_1r_2} I$ koşulları sağlanır.

İspat. Teorem 3.4'te $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2) = (1,0)$ ve $(\alpha_3, \beta_3) = (1,-1)$ alınsın. Bu durumda Teorem 3.4'ün (a) şıkkının vii), xi) ve xiii) alt şıklarından sırasıyla;

1. $(r_1-1)(r_1+1)=0$, $(r_2-1)(r_2+1)=0$ ve $Q_1+Q_2=I \Rightarrow$

   $(r_1,r_2)\in\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$ ve $Q_1+Q_2=I$,

2. $r_1+2r_2=0$, $(r_2-1)(r_2+1)=0$ ve $Q_2=I \Rightarrow (r_1,r_2)\in\{(-2,1),(2,-1)\}$ ve

   $Q_2=I$,

3. $2r_1+r_2=0$, $(r_1-1)(r_1+1)=0$ ve $Q_1=I \Rightarrow (r_1,r_2)\in\{(1,-2),(-1,2)\}$ ve $Q_1=I$

ifadeleri elde edilir. Bunlar da sırasıyla Sonuç 3.6'nın (a) şıkkının i), ii) ve iii) alt şıklarına karşılık gelir.

Öte yandan, Teorem 3.4'ün (b) şıkkından $Q_1Q_2\neq Q_2Q_1$, $r_1+r_2=0$ ve $(Q_1-Q_2)^2=\frac{-1}{r_1r_2}I$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.4'te $(\alpha_1,\beta_1)=(1,0)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(1,-1)$ ve $(\alpha_3,\beta_3)=(1,0)$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.7. Q_1 sıfırdan farklı bir idempotent matris ve Q_2 involutif matris olsun. Ayrıca $Q_1\neq\pm Q_2$ koşulu sağlansın. Bu durumda $r_1,r_2\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $r_1Q_1+r_2Q_2$ doğrusal bileşiminin idempotent olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır:

(a) $Q_1Q_2=Q_2Q_1$ ile birlikte aşağıdaki koşullardan biri sağlanır.

i) $(r_1,r_2)=(-1,-1)$ ve $Q_2=-I$,

ii) $(r_1,r_2)\in\{(1,1),(2,1)\}$ ve $2Q_1+Q_2=I$,

iii) $(r_1,r_2)\in\{(1,-1),(2,-1)\}$ ve $2Q_1-Q_2=I$,

iv) $(r_1,r_2)=(-1,1)$ ve $Q_2=I$,

v) $(r_1,r_2)=\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$ ve $Q_1=I$

(b) $Q_1Q_2\neq Q_2Q_1$ ile birlikte $r_1=1$ ve $(2Q_1-Q_2-I)^2=2(1+r_2)I$ koşulları sağlanır.

İspat. $(\alpha_1,\beta_1)=(1,0)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(1,-1)$ ve $(\alpha_3,\beta_3)=(1,0)$ alındığında Teorem 3.4'ün (a) şıkkının iv), vii), viii), xi) ve xiii) alt şıklarından sırasıyla;

1. $r_1-2r_2=1$, $(-r_2-1)(-r_2)=0$ ve $Q_2=-I \Rightarrow (r_1,r_2)=(-1,-1)$ ve $Q_2=-I$
2. $(r_1-r_2-1)(r_1-r_2)=0$, $(r_2-1)r_2=0$, $Q_1+\frac{1}{2}(Q_2+I)=I \Rightarrow$

   $(r_1,r_2)\in\{(1,1),(2,1)\}$ ve $2Q_1+Q_2=I$
3. $(r_1+2r_2)(r_1-1)=0$, $(-r_2-1)(-r_2)=0$ ve $Q_1=\frac{1}{2}(Q_2+I)\Rightarrow$

   $(r_1,r_2)\in\{(1,-1),(2,-1)\}$ ve $2Q_1-Q_2=I$,
4. $r_1+2r_2=1$, $(r_2-1)r_2=0$ ve $Q_2=I\Rightarrow(r_1,r_2)=(-1,1)$ ve $Q_2=I$,
5. $2r_1=1$, $(r_1-r_2-1)(r_1-r_2)=0$ ve $Q_1=I\Rightarrow(r_1,r_2)=\left(\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$ ve $Q_1=I$

bulunur. Bunlar da sırasıyla Sonuç 3.7'nin (a) şıkkının i), ii), iii), iv) ve v) alt şıklarına karşılık gelir.

Teorem 3.4'ün (b) şıkkından ise, $r_1=1$ ve $\left(Q_1-\frac{Q_2+I}{2}\right)^2=\frac{(-r_2-1)(-r_2)}{2r_1r_2}I$ gelir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında $(2Q_1-Q_2+I)^2=2(1+r_2)I$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.4'te $(\alpha_1,\beta_1)=(1,0)$ ve $(\alpha_2,\beta_2)=(\alpha_3,\beta_3)=(1,-1)$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.8. Q_1 sıfırdan farklı bir idempotent matris ve Q_2 involutif matris olsun ve $Q_1 \neq \pm Q_2$ koşulunu sağlansınlar. $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $Q = r_1 Q_1 + r_2 Q_2$ doğrusal bileşimi göz önüne alınsın.

(a) $Q_1Q_2 = Q_2Q_1$ ise, Q doğrusal bileşim matrisinin involutif olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

i) $(r_1, r_2) \in \{(2,1), (-2,-1)\}$ ve $Q_1Q_2 = -Q_1$,

ii) $(r_1, r_2) \in \{(2,-1), (-2,1)\}$ ve $Q_1Q_2 = Q_1$,

(b) $Q_1Q_2 \neq Q_2Q_1$ ise, Q doğrusal bileşim matrisini involutif yapacak katsayılar mevcut değildir.

İspat. $(\alpha_1, \beta_1) = (1, 0)$ ve $(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_3, \beta_3) = (1, -1)$ aldığımızda Teorem 3.4'ün (a) şıkkının vi) ve x) alt şıkkından sırasıyla;

1. $r_1 = 2r_2$, $0 = 0$, $(-r_2 - 1)(-r_2 + 1) = 0$ ve $Q_1(Q_2 + I) = \mathbf{0} \Rightarrow$

   $(r_1, r_2) \in \{(2,1), (-2,-1)\}$ ve $Q_1Q_2 = -Q_1$,

2. $r_1 + 2r_2 = 0$, $0 = 0$, $(-r_2 - 1)(-r_2 + 1) = 0$ ve $Q_1 \dfrac{1}{2}(Q_2 + I) = Q_1 \Rightarrow$

   $(r_1, r_2) \in \{(-2,1), (2,-1)\}$ ve $Q_1Q_2 = Q_1$

elde edilir. Bunlar da sırasıyla Sonuç 3.8'in (a) şıkkının i) ve ii) alt şıklarına karşılık gelir.

Diğer taraftan, Teorem 3.4'ün (b) şıkkındaki birinci eşitlikten $r_1 = 0$ elde edilir ki $r_1 \neq 0$ ile çelişir. Dolayısıyla istenen elde edilir. ■

Teorem 3.4'te $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2) = (1, -1)$ ve $(\alpha_3, \beta_3) = (1, 0)$ aldığımızda [9]'daki Teorem 2.2 ve [10]'daki Teorem 2.2 elde edilir.

Sonuç 3.9. Q_1 ve Q_2 matrisleri $Q_1 \neq \pm Q_2$ koşulunu sağlayan iki involutif matris olsun. $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $Q = r_1 Q_1 + r_2 Q_2$ doğrusal bileşimi göz önüne alınsın.

(a) $Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1$ ise, Q doğrusal bileşiminin idempotent olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

i) $(r_1, r_2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ve $Q_1 + Q_2 = -Q_1 Q_2 - I$,

ii) $(r_1, r_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ve $Q_1 - Q_2 = Q_1 Q_2 - I$,

iii) $(r_1, r_2) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ve $Q_1 - Q_2 = -Q_1 Q_2 + I$,

iv) $(r_1, r_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ve $Q_1 + Q_2 = Q_1 Q_2 + I$,

(b) $Q_1 Q_2 \neq Q_2 Q_1$ ise, Q doğrusal bileşim matrisini idempotent yapacak katsayılar mevcut değildir.

İspat. $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2) = (1, -1)$ ve $(\alpha_3, \beta_3) = (1, 0)$ alalım. Teorem 3.4'ün (a) şıkkının vi), x), xii) ve xiv) alt şıklarından sırasıyla;

1. $r_1 = r_2$, $-2r_1 = 1$, $(-r_1 - r_2 - 1)(-r_1 - r_2) = 0$ ve $(Q_1 + I)(Q_2 + I) = \mathbf{0} \Rightarrow$

   $(r_1, r_2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ve $Q_1 + Q_2 = -Q_1 Q_2 - I$,

2. $r_1 + r_2 = 0$, $-2r_1 = 1$, $(-r_1 - r_2 - 1)(-r_1 - r_2) = 0$, $(Q_1 + I)\frac{1}{2}(Q_2 + I) = Q_1 + I \Rightarrow$

   $(r_1, r_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ve $Q_1 - Q_2 = Q_1 Q_2 - I$,

3. $r_1 + r_2 = 0$, $-2r_2 = 1$, $(-r_1 - r_2 - 1)(-r_1 - r_2) = 0$ ve $\frac{1}{2}(Q_1 + I)(Q_2 + I) = Q_2 + I$

   $\Rightarrow (r_1, r_2) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ve $Q_1 - Q_2 = -Q_1 Q_2 + I$,

4. $r_1 = r_2$, $(-r_1 - r_2 - 1)(-r_1 - r_2) = 8r_1r_2$, $4r_1 - 2r_2 = 1$ ve

$$\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2 + 2I) = \frac{1}{4}(Q_1 + I)(Q_2 + I) + I \Rightarrow (r_1, r_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ ve}$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_1Q_2 + I$$

eşitlikleri bulunur. Bunlar da sırasıyla Sonuç 3.9'un (a) şıkkının i), ii), iii) ve iv) alt şıklarına karşılık gelir.

Diğer taraftan, Teorem 3.4'ün (b) şıkkındaki birinci eşitlikten $0 = 1$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla Q_1 ve Q_2 matrislerinin değişmeli olmaması durumunda Q doğrusal bileşim matrisini idempotent yapacak $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ katsayıları mevcut değildir. ■

Teorem 3.4'te $(\alpha_i, \beta_i) = (1, -1)$ $(i = 1,2,3)$ alındığında [9]'daki Teorem 2.4 ve [10]'daki Teorem 2.4 elde edilir.

Sonuç 3.10. Q_1 ve Q_2 matrisleri $Q_1 \neq \pm Q_2$ koşulunu sağlayan iki involutif matris olsun. $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $Q = r_1Q_1 + r_2Q_2$ doğrusal bileşimi göz önüne alınsın.

(a) $Q_1Q_2 = Q_2Q_1$ ise, Q doğrusal bileşim matrisini involutif yapacak katsayılar mevcut değildir,

(b) $Q_1Q_2 \neq Q_2Q_1$ ise Q doğrusal bileşiminin involutif olması için gerek ve yeter koşul $r_1r_2(Q_1 - Q_2)^2 = \left((r_1 + r_2)^2 - 1\right)I$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $(\alpha_i, \beta_i) = (1, -1)$ $(i = 1, 2, 3)$ için Teorem 3.4'ün (a) şıkkındaki eşitlikleri doğrulayan durumlar meydana gelmez. Dolayısıyla değişmeli olan ve birbirinin ± 1 katı olmayan iki involutif matrisin doğrusal bileşimleri hiçbir zaman involutif olamaz.

Teorem 3.4'ün (a) şıkkının alt şıklardan bir tanesini kontrol edelim. $(\alpha_i,\beta_i)=(1,-1)$ ($i=1,2,3$) alalım. Teorem 3.4'ün (a) vi) şıkkının ikinci eşitliğinden $-2r_1=0$ bulunur. Bu ise ise $r_1\neq 0$ ile çelişir. Bütün şıklar denendiğinde buna benzer çelişkilerin geldiği görülür.

Yine $(\alpha_i,\beta_i)=(1,-1)$ ($i=1,2,3$) değerleri için. Teorem 3.4'ün (b) şıkkında hesaplama yapıldığında $0=0$ ve $\left(\frac{Q_1+I}{2}-\frac{Q_2+I}{2}\right)^2=\frac{(-r_1-r_2-1)(-r_1-r_2+1)}{4r_1r_2}I$ gelir. Gerekli düzenleme yapıldığında $r_1r_2(Q_1-Q_2)^2=\left((r_1+r_2)^2-1\right)I$ elde edilir. ■

Not: Yukarıda verilen Sonuç 3.5-3.10'daki sonuçların (a) şıkları, Mathematica Paket Programı'nda yazılan bir program aracılığı ile doğrulanmıştır (bkz. EK A).

3.3. Sayısal Örnekler

Şimdi de yaptığımız çalışmaları doğrulayan iki sayısal örnek verelim.

Örnek 3.11.

$$Q_1=\begin{pmatrix} -37/23 & -14/23 & 0 & 28/23 \\ 2/23 & -21/23 & 0 & -4/23 \\ -6/23 & -6/23 & -1 & 12/23 \\ -52/23 & -52/23 & 0 & 81/23 \end{pmatrix} \text{ ve } Q_2=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & -1 \\ -5/6 & -5/6 & 0 & 5/3 \\ 19/6 & 19/6 & 0 & -19/3 \\ -7/6 & -7/6 & 0 & 7/3 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan Q_1 ve Q_2 matrisleri $Q_1Q_2\neq Q_2Q_1$ koşulunu sağlayan, sırasıyla, $\{3,-1\}$ ve $\{2,0\}$-kuadratik matrislerdir. $r_1,\ r_2\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere, $r_1Q_1+r_2Q_2$ doğrusal bileşim matrisi $\{4,-1\}$-kuadratik matris olacak şekilde r_1 ve r_2 katsayılarını belirleyelim. Teorem 3.4'ün (b) şıkkında $(\alpha_1,\beta_1)=(3,-1)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(2,0)$ ve

$(\alpha_3,\beta_3)=(4,-1)$ alındığında $\left(\frac{1}{4}(Q_1+I)-\frac{1}{2}Q_2\right)^2=\frac{(-r_1-4)(-r_1+1)}{8r_1r_2}I$ ve $2r_1+2r_2=3$ eşitlikleri veya eşdeğer olarak $\frac{r_1r_2}{2}(Q_1+I-2Q_2)^2=(r_1+4)(r_1-1)I$ ve $r_1+r_2=\frac{3}{2}$ bulunur. Birinci eşitlikte matrisler yerine konulup hesaplama yapıldığında sol taraftaki matris $\mathbf{0}$ (sıfır) olacağından sonuç olarak $(r_1+4)(r_1-1)I=\mathbf{0}$ ve $r_1+r_2=\frac{3}{2}$ bulunur. Bu eşitliklerden de $(r_1,r_2)=\left(1,\frac{1}{2}\right)$ veya $(r_1,r_2)=\left(-4,\frac{11}{2}\right)$ katsayıları bulunur. Gerekli hesaplamalar yapıldığında $Q_1+\frac{1}{2}Q_2$ ve $-4Q_1+\frac{11}{2}Q_2$ doğrusal bileşim matrislerinin gerçekten de $\{4,-1\}$-kuadratik matris oldukları görülecektir.

Her $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)\in\{(3,-1,2,0),(3,-1,0,2),(-1,3,2,0),(-1,3,0,2)\}$ değeri için aynı hesaplamayı yaptığımızda aynı katsayıları buluruz.

Örnek 3.12.

$$Q_1=\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/6 & -1/6 \\ -2/3 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & -1/4 \\ -4/3 & -1/2 & -5/12 & 7/12 \end{pmatrix} \text{ ve } Q_2=\begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -8/3 & -5/3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisleri $Q_1Q_2=Q_2Q_1$ koşulunu sağlayan, sırasıyla $\{1,0\}$ ve $\{1,-1\}$ kuadratik (yani, sırasıyla idempotent ve involutif) matrislerdir. $r_1,r_2\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $r_1Q_1+r_2Q_2$ doğrusal bileşiminin involutif olması için gerekli katsayı değerlerini belirlemeye çalışalım. Bu matris çifti, Teorem 3.4'ün (a) x) ve Sonuç 3.8'in (a) ii) şıkkındaki matris eşitliklerini sağlarlar. Her ikisinden de doğrusal bileşimin katsayılarını bulmamız mümkündür. Biz kısalık olsun diye Sonuç 3.8'in (a) ii) şıkkından bulalım.

$Q_1Q_2 = Q_1$ eşitliği sağlandığından doğrusal bileşimin katsayıları $(r_1, r_2) \in \{(2,-1),(-2,1)\}$ olmalıdır. Hesaplama yapılırsa, gerçekten de $2Q_1 - Q_2$ ve $-2Q_1 + Q_2$ matrislerinin involutif oldukları görülür.

BÖLÜM 4. DEĞİŞMELİ İKİ KUADRATİK MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMLERİNİN KUATRATİKLİĞİNE FARKLI BİR BAKIŞ

4.1. Giriş

Bu bölümde sıfırdan farklı değişmeli iki kuadratik matrisin doğrusal bileşimlerinin kuadratikliği problemine farklı bir metotla yaklaşacağız. Önceki bölümde elde ettiğimiz sonuçlarda doğrusal bileşimin kuadratik olması için gerekli katsayılar ile birlikte bazı matris eşitlikleri vermiştik. Bu bölümde ise doğrusal bileşimin katsayıları ile birlikte doğrusal bileşimi oluşturan matrislerin köşegen formlarını vereceğiz.

Bu bölümde doğrusal bileşimi oluşturan matrisler, değişmeli olduğundan kullanacağımız yöntem, değişmeli iki matrisin eşzamanlı köşegenleştirilmesi gerçeğine dayanır.

Bölüm 2, Teorem 2.39'dan biliyoruz ki, eğer $\alpha \neq \beta$ ise, $A \in \mathbb{C}_n$, $\{\alpha, \beta\}$-kuadratik matrisi köşegenleştirilebilir matristir. Eğer $\alpha = \beta$ ise, yani $(A - \alpha I)^2 = \mathbf{0}$ ise A matrisinin köşegenleştirilebilmesi hakkında ne söylenebilir? Bu tip matrisler, yani $\{\alpha\}$-kuadratik matrisler, her zaman köşegenleştirilemezler. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi $\{2\}$-kuadratik bir matristir. Bu matrisin karakteristik polinomu $\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)^3$ olduğundan yegâne özdeğeri 2 ve bu özdeğerin cebirsel katlılığı $\text{cebKat}_2=3$ tür. Diğer taraftan

$$A-2I=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı 1 olduğundan Teorem 2.9'a göre $\text{nullity}(A-2I)=2$ yani $\text{geoKat}_2=2$ olup, A matrisi köşegenleştirilemez.

Burada bir $\{\alpha\}$-kuadratik matrisin köşegenleştirilebilmesi ile ilgili aşağıdaki sonucu vermek yararlı olacaktır. Bu sonucun ispatı kolaylıkla görülebildiğinden verilmeyecektir.

Teorem 4.1. $\alpha\in\mathbb{C}$ olsun. Bir $A\in\mathbb{C}_n$, $\{\alpha\}$-kuadratik matrisinin köşegenleştirilebilmesi için gerek ve yeter koşul $A=\alpha I$ olmasıdır.

Ayrıca, şunu da belirtelim ki $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ ve $\alpha\neq\beta$ olmak üzere, bir $A=\alpha I$ skaler matrisi $(A-\alpha I)^2=\mathbf{0}$ ve $(A-\alpha I)(A-\beta I)=\mathbf{0}$ eşitliklerini sağladığından A skaler matrisi, $\{\alpha\}$-kuadratik veya $\{\alpha,\beta\}$-kuadratik matris olarak düşünülebilir.

Bu açıklamalardan sonra, skaler matris olmayan $\{\alpha,\beta\}$-kuadratik matrislerden bahsederken aşağıdaki tanımı kullanmak kolaylık sağlayacaktır.

Tanım 4.2. $A\in\mathbb{C}_n$ matrisi bir $\{\alpha,\beta\}$-kuadratik matris olsun. Eğer $A\neq\alpha I$ ve $A\neq\beta I$ ise veya buna denk olarak eğer α ve β'nın her ikisi de A matrisinin özdeğerleri iseler A matrisine *esas (essentially)* $\{\alpha,\beta\}$*-kuadratik matris* denir [36].

Bu tanıma göre P idempotent matrisine $P \neq I$ ve $P \neq \mathbf{0}$ ise *esas idempotent* ve A involutif matrisine $A \neq \pm I$ ise *esas involutif* matris denir.

Şimdi $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisleri sıfırdan farklı, değişmeli ve sırasıyla $\{\alpha_1, \beta_1\}$ ve $\{\alpha_2, \beta_2\}$-kudaratik matris olsunlar. $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere,

$$Q = r_1 Q_1 + r_2 Q_2 \tag{4.1}$$

doğrusal bileşimi göz önüne alınsın.

Bu bölümde verilecek sonuçlar, (4.1) doğrusal bileşimindeki Q_1 ve Q_2 matrisleri sırasıyla esas $\{\alpha_1, \beta_1\}$ ve esas $\{\alpha_2, \beta_2\}$-kuadratik matrisler iken, Q doğrusal bileşim matrisinin $\{\alpha_3, \beta_3\}$-kuadratik matris olması için gerek ve yeter koşulları içerecektir.

Yukarıda bahsettiğimiz esas sonucu vermeden önce (4.1)'deki doğrusal bileşimi oluşturan Q_1 ve Q_2 matrislerinden birinin veya her ikisinin skaler matris olması hallerini irdeleyelim.

Öncelikle, (4.1)'deki matrisler $Q_1 = \alpha_1 I$ ve $Q_2 = \alpha_2 I$ olsunlar. Bu durumda doğrusal bileşim $Q = (r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2)I$ olur. $\alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{C}$ olmak üzere Q doğrusal bileşiminin $\{\alpha_3, \beta_3\}$-kuadratik matris olması için $Q = \alpha_3 I$ veya $Q = \beta_3 I$ olmalıdır. O halde, doğrusal bileşimin katsayıları $r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 = \alpha_3$ veya $r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 = \beta_3$ denklemlerinin çözümü olacaktır. $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ olduğundan (çünkü Q_1, $Q_2 \neq \mathbf{0}$ dır) $t \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $(r_1, r_2) = \left(t, \alpha_2^{-1}(\alpha_3 - \alpha_1 t)\right)$ veya $(r_1, r_2) = \left(t, \alpha_2^{-1}(\beta_3 - \alpha_1 t)\right)$ olacaktır.

Son olarak, (4.1)'deki matrisler, $Q_1 = \alpha_1 I$ ve Q_2 esas $\{\alpha_2, \beta_2\}$-kuadratik matrisler olsun. $\{\alpha_2, \beta_2\}$-kuadratik matrisler köşegenleştirilebildiğinden, genelliği bozmaksızın, $S^{-1}Q_2S=\alpha_2 I\oplus\beta_2 I$ olacak şekilde bir $S\in\mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. Bu durumda (4.1)'deki doğrusal bileşimi soldan S^{-1} ve sağdan S matrisi ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned} r_1S^{-1}Q_1S+r_2S^{-1}Q_2S &= r_1\left(\alpha_1 I\oplus\alpha_1 I\right)+r_2\left(\alpha_2 I\oplus\beta_2 I\right) \\ &= \left(r_1\alpha_1+r_2\alpha_2\right)I\oplus\left(r_1\alpha_1+r_2\beta_2\right)I \end{aligned} \tag{4.2}$$

bulunur. (4.2)'deki doğrusal bileşim matrisinin köşegen formda olduğu aşikârdır. Şimdi bu doğrusal bileşimin, $\alpha_3,\ \beta_3\in\mathbb{C}$ olmak üzere, $\{\alpha_3,\beta_3\}$-kuadratik matris olduğunu varsayalım. $\alpha_2\neq\beta_2$ olduğundan Q doğrusal bileşimi skaler matris olamaz. Dolayısıyla

$$\left(r_1\alpha_1+r_2\alpha_2\right)I\oplus\left(r_1\alpha_1+r_2\beta_2\right)I=\alpha_3 I\oplus\beta_3 I$$

veya

$$\left(r_1\alpha_1+r_2\alpha_2\right)I\oplus\left(r_1\alpha_1+r_2\beta_2\right)I=\beta_3 I\oplus\alpha_3 I$$

eşitliklerinden biri sağlanır. Bu eşitliklerden de sırasıyla,

$$\begin{aligned} r_1\alpha_1+r_2\alpha_2 &= \alpha_3 \\ r_1\alpha_1+r_2\beta_2 &= \beta_3 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} r_1\alpha_1+r_2\alpha_2 &= \beta_3 \\ r_1\alpha_1+r_2\beta_2 &= \alpha_3 \end{aligned}$$

denklem sistemleri elde edilir. Burada $\alpha_1 \neq 0$ ve $\alpha_2 \neq \beta_2$ olduğundan her iki sistemin katsayılar matrisinin rankı 2 olup, sistemler tek çözüme sahiptirler. Bu çözümler sırasıyla

$$(r_1, r_2) = \left(\frac{\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3}{\alpha_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\alpha_3 - \beta_3}{\alpha_2 - \beta_2} \right) \text{ ve } (r_1, r_2) = \left(\frac{\alpha_2\alpha_3 - \beta_2\beta_3}{\alpha_1(\alpha_2 - \beta_2)}, \frac{\beta_3 - \alpha_3}{\alpha_2 - \beta_2} \right)$$

olur.

4.2. Değişmeli İki Kuadratik Matrisin Doğrusal Bileşimlerinin Kuadratikliği

Şimdi de bu bölümün esas sonucunu, yani (4.1)'deki doğrusal bileşimi oluşturan matrislerin her ikisinin de skaler matris olmaması hali ile ilgili teoremi verelim.

Teorem 4.3. $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1,2,3$) olmak üzere Q_1 ve Q_2 matrisleri $Q_1Q_2 = Q_2Q_1$ koşulunu sağlayan, sırasıyla, esas $\{\alpha_1, \beta_1\}$ ve $\{\alpha_2, \beta_2\}$-kuadratik matrisler olsun. Bu durumda, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere

$$Q = r_1Q_1 + r_2Q_2, \tag{4.3}$$

doğrusal bileşiminin $\{\alpha_3, \beta_3\}$-kuadratik olması için gerek ve yeter koşul, bir S tersinir matrisi için $x, y \in \{\alpha_3, \beta_3\}$ olmak üzere $c_1S^{-1}Q_1S + c_2S^{-1}Q_2S = S^{-1}QS$ doğrusal bileşiminin, aşağıdakilerden biri olmasıdır;

(a) $r_1(\alpha_1 I \oplus \beta_1 I) + r_2(\alpha_2 I \oplus \beta_2 I) = xI \oplus yI$,

i) $\alpha_1\beta_2 \neq \alpha_2\beta_1$, $\alpha_2 y \neq \beta_2 x$ ve $\alpha_1 y \neq \beta_1 x$ ise,

$$r_1 = \frac{-\alpha_2 y + \beta_2 x}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \text{ ve } r_2 = \frac{\alpha_1 y - \beta_1 x}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$$

ii) $\alpha_1\beta_2=\alpha_2\beta_1$ ve $\alpha_1 y=\beta_1 x$ ise, $r_1=t$ ve $r_2=\dfrac{x-\alpha_1 t}{\alpha_2}$, $t\in\mathbb{C}^*\setminus\{x\alpha_1^{-1}\}$ veya

$r_2=\dfrac{y-\beta_1 t}{\beta_2}$, $t\in\mathbb{C}^*\setminus\{y\beta_1^{-1}\}$

(b) $r_1(\alpha_1 I\oplus\beta_1 I)+r_2(\beta_2 I\oplus\alpha_2 I)=xI\oplus yI$,

i) $\alpha_1\alpha_2\neq\beta_1\beta_2$, $\alpha_2 x\neq\beta_2 y$ ve $\alpha_1 y\neq\beta_1 x$ ise,

$r_1=\dfrac{\alpha_2 x-\beta_2 y}{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}$ ve $r_2=\dfrac{\alpha_1 y-\beta_1 x}{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}$

ii) $\alpha_1\alpha_2=\beta_1\beta_2$ ve $\alpha_1 y=\beta_1 x$ ise, $r_1=t$ ve $r_2=\dfrac{x-\alpha_1 t}{\beta_2}$, $t\in\mathbb{C}^*\setminus\{x\alpha_1^{-1}\}$ veya

$r_2=\dfrac{y-\beta_1 t}{\alpha_2}$, $t\in\mathbb{C}^*\setminus\{y\beta_1^{-1}\}$

(c) $(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-2\alpha_2\beta_1)x+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)y=0$ ise, $x\neq y$ olmak üzere

$$\frac{x-y}{\alpha_1-\beta_1}(\alpha_1 I\oplus\beta_1 I\oplus\beta_1 I)+\frac{y-x}{\alpha_2-\beta_2}(\alpha_2 I\oplus\alpha_2 I\oplus\beta_2 I)=xI\oplus yI\oplus xI,$$

(d) $(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-2\beta_1\beta_2)x+(\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2)y=0$ ise, $x\neq y$ olmak üzere

$$\frac{x-y}{\alpha_1-\beta_1}(\alpha_1 I\oplus\beta_1 I\oplus\beta_1 I)+\frac{x-y}{\alpha_2-\beta_2}(\beta_2 I\oplus\alpha_2 I\oplus\beta_2 I)=xI\oplus xI\oplus yI,$$

(e) $(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-2\alpha_1\alpha_2)x+(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)y=0$ ise, $x\neq y$ olmak üzere

$$\frac{y-x}{\alpha_1-\beta_1}(\alpha_1 I\oplus\alpha_1 I\oplus\beta_1 I)+\frac{y-x}{\alpha_2-\beta_2}(\alpha_2 I\oplus\beta_2 I\oplus\alpha_2 I)=yI\oplus xI\oplus xI,$$

(f) $(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-2\alpha_1\beta_2)x+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)y=0$ ise, $x\neq y$ olmak üzere

$$\frac{y-x}{\alpha_1-\beta_1}(\alpha_1 I\oplus\alpha_1 I\oplus\beta_1 I)+\frac{x-y}{\alpha_2-\beta_2}(\alpha_2 I\oplus\beta_2 I\oplus\beta_2 I)=xI\oplus yI\oplus xI.$$

İspat. Q_1 ve Q_2 matrisleri, sırasıyla $\{\alpha_1,\beta_1\}$ ve $\{\alpha_2,\beta_2\}$-kuadratik matris olduklarından α_i ve β_i ($i=1,2$) değerlerinin her ikisi aynı anda sıfır olamaz (çünkü $\alpha_i\neq\beta_i$ dir). Ayrıca, $Q_1Q_2=Q_2Q_1$ olduğundan, Teorem 2.32'ye göre Q_1 ve Q_2 matrisleri eşzamanlı köşegenleştirilebilirler. Dolayısıyla, Λ_1 ve Λ_2 köşegen matrisler olmak üzere, $\Lambda_1 = S^{-1}Q_1S$ ve $\Lambda_2 = S^{-1}Q_2S$ olacak şekilde bir $S \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır ve Λ_1 ve Λ_2'nin köşegen elemanları, sırasıyla Q_1 ve Q_2 matrislerinin öz değerleridir. S matrisinin sütunları arasında uygun düzenleme yapılarak Λ_1 ve Λ_2 köşegen matrisleri, genelliği bozmaksızın,

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha_1 I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \beta_1 I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \beta_1 I \end{pmatrix} \text{ ve } \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta_2 I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha_2 I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \beta_2 I \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Tabi ki, burada bazı bloklar mevcut olmayabilir. Kolaylık olması bakımından bu matrisler, $L_1 = \alpha_2 I \oplus \beta_2 I$ ve $L_2 = \alpha_2 I \oplus \beta_2 I$ olmak üzere,

$$\Lambda_1 = \alpha_1 I \oplus \beta_1 I \quad \text{ve} \quad \Lambda_2 = L_1 \oplus L_2$$

biçiminde yazılsın. Q_1 matrisinin esas kuadratik matris olduğu düşünülürse, Λ_1 matrisinin blokları ile Λ_2 matrisinin L_1 ve L_2 blokları kesinlikle mevcut olması gerekirken L_1 ve L_2 matrislerinin bazı blokları olmayabilir. Bu nedenle aşağıdaki dokuz farklı durum elde edilir.

1) $L_1 = \alpha_2 I$ ve $L_2 = \beta_2 I$,
2) $L_1 = \beta_2 I$ ve $L_2 = \alpha_2 I$,
3) $L_1 = \alpha_2 I$ ve $L_2 = \alpha_2 I \oplus \beta_2 I$,
4) $L_1 = \beta_2 I$ ve $L_2 = \alpha_2 I \oplus \beta_2 I$,
5) $L_1 = \alpha_2 I \oplus \beta_2 I$ ve $L_2 = \alpha_2 I$,
6) $L_1 = \alpha_2 I \oplus \beta_2 I$ ve $L_2 = \beta_2 I$,
7) $L_1 = \alpha_2 I \oplus \beta_2 I$ ve $L_2 = \alpha_2 I \oplus \beta_2 I$,
8) $L_1 = \alpha_2 I$ ve $L_2 = \alpha_2 I$,

9) $L_1 = \beta_2 I$ ve $L_2 = \beta_2 I$.

Q_2 esas $\{\alpha_2, \beta_2\}$-kuadratik matris olduğundan, son iki durumun var olması da mümkün değildir. Bütün bu mümkün durumlar ve Q doğrusal bileşim matrisinin $\{\alpha_3, \beta_3\}$-kuadratik matris olması hesaba katıldığında $\gamma_i \in \{\alpha_3, \beta_3\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ olmak üzere, 1) den 7) ye kadar olan durumlarla ilişkili olarak, sırasıyla aşağıdaki doğrusal denklem sistemleri elde edilir:

1) $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$,

2) $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$,

4) $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$,

6) $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$,

7) $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}$.

Şimdi bu doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerini inceleyelim.

1) durumu ile ilişkili

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i \in \{\alpha_3, \beta_3\} \quad (i = 1, 2),$$

doğrusal sistemi göz önüne alınsın. Sistemin katsayılar matrisinin determinantı; $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ olduğunda sistemin tek çözümü

$$r_1 = \frac{-\alpha_2\gamma_2 + \beta_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \text{ ve } r_2 = \frac{\alpha_1\gamma_2 - \beta_1\gamma_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$$

olacaktır. Diğer taraftan $r_1, r_2 \neq 0$ olduğu da göz önüne alındığında $\alpha_2\gamma_2 \neq \beta_2\gamma_1$ ve $\alpha_1\gamma_2 \neq \beta_1\gamma_1$ koşullarının da sağlanması gerekir. Eğer $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$ ise, sistemin tutarlı olması için $\alpha_1\gamma_2 = \beta_1\gamma_1$ olması gerekir. Bu durumda bir parametreye bağlı sonsuz sayıda çözüm var olup çözümler

$$r_1 = t \text{ ve } r_2 = \frac{\gamma_1 - \alpha_1 t}{\alpha_2}, \quad t \in \mathbb{C}^* \setminus \{\gamma_1\alpha_1^{-1}\}$$

veya

$$r_1 = t \text{ ve } r_2 = \frac{\gamma_2 - \beta_1 t}{\beta_2}, \quad t \in \mathbb{C}^* \setminus \{\gamma_2\beta_1^{-1}\}$$

biçimindedir. $\gamma_1 = x$ ve $\gamma_2 = y$ ile gösterildiğinde (a) şıkkı elde edilmiş olur.

2) durumu ile ilişkili

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i \in \{\alpha_3, \beta_3\} \quad (i = 1, 2).$$

doğrusal denklem sistemi göz önüne alınsın. Sistemin katsayılar determinantı; $\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 \neq 0$ ise sistem tek çözüme sahiptir ve çözüm

$$r_1 = \frac{\alpha_2\gamma_1 - \beta_2\gamma_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2} \text{ ve } r_2 = \frac{\alpha_1\gamma_2 - \beta_1\gamma_1}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}$$

biçimindedir. Diğer taraftan $r_1, r_2 \neq 0$ olduğu da göz önüne alındığında $\alpha_2\gamma_1 \neq \beta_2\gamma_2$ ve $\alpha_1\gamma_2 \neq \beta_1\gamma_1$ koşullarının da sağlaması gerekir. Eğer, $\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 = 0$ ise, sistemin çözüme sahip olması için $\alpha_1\gamma_2 = \beta_1\gamma_1$ olması gerekir. Bu durumda bir parametreye bağlı sonsuz sayıda çözüm vardır ve çözüm,

$$r_1 = t \text{ ve } r_2 = \frac{\gamma_1 - \alpha_1 t}{\beta_2}, \quad t \in \mathbb{C}^* \setminus \{\gamma_1\alpha_1^{-1}\}$$

veya

$$r_1 = t \text{ ve } r_2 = \frac{\gamma_2 - \beta_1 t}{\alpha_2}, \quad t \in \mathbb{C}^* \setminus \{\gamma_2\beta_1^{-1}\}$$

biçimindedir. $\gamma_1 = x$ ve $\gamma_2 = y$ ile gösterildiğinde (b) şıkkı elde edilmiş olur.

Şimdi 3) durumu ile ilişkili

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i \in \{\alpha_3, \beta_3\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

doğrusal denklem sistemi göz önüne alınsın. Eğer sistemin artırılmış matrisinin determinantı, yani

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \neq 0,$$

ise Rouché Frobenius Teoremi’nden sitemin çözümü yoktur. O halde sistemin çözümünün olması için öncelikli koşul

$$\beta_2(\beta_1\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2) + \alpha_2(\alpha_1\gamma_3 - \beta_1(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3)) = 0 \tag{4.4}$$

olmasıdır. Şimdi de,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

katsayılar matrisinin rankının 2 olduğunu görelim. Bu matris, $\alpha_i \neq \beta_i$ $(i = 1,2)$, koşulu altında, rankı 2 olan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

matrisine satırca denktir. Dolayısıyla, (4.5) matrisinin rankı 2 olup (4.4) koşulu altında yine Rouché Frobenius Teoremi’nden sistemin tek çözümü vardır. Sistemin artırılmış matrisi de satırca

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\gamma_1-\gamma_2}{\alpha_1-\beta_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{\gamma_2-\gamma_3}{\alpha_2-\beta_2} \\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

matrisine denk olduğundan sistemin çözümü

$$r_1=\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\alpha_1-\beta_1} \text{ ve } r_2=\frac{\gamma_2-\gamma_3}{\alpha_2-\beta_2}. \tag{4.6}$$

şeklinde bulunur. $r_1, r_2 \neq 0$ olduğu göz önüne alındığında, (4.6)'dan $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3$ elde edilir. $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3 \in \{\alpha_3,\beta_3\}$ olduğundan $\gamma_1=\gamma_3$ eşitliği vardır. $\gamma_1=\gamma_3=x$ ve $\gamma_2=y$ koyarak, (4.4) eşitliği düzenlendiğinde

$$\left(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2-2\alpha_2\beta_1\right)x+\left(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2\right)y=0$$

elde edilir. Dolayısıyla, (c) şıkkı elde edilmiş olur.

4) durumu ile ilişkili

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i \in \{\alpha_3,\beta_3\} \quad (i=1,2,3)$$

doğrusal denklem sistemi göz önüne alınsın. Sitemin çözümünün olması için, Rouché Frobenius Teoremi'nden dolayı, sistemin artırılmış matrisinin determinantı,

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}=\beta_2(-\alpha_1\gamma_2+\beta_1(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3))+\alpha_2(-\beta_1\gamma_1+\alpha_1\gamma_3)=0 \tag{4.7}$$

olmalıdır. $\alpha_i \neq \beta_i$ ($i = 1, 2$), koşulu altında

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

katsayılar matrisi, rankı 2 olan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

matrisine satırca denktir. Dolayısıyla, (4.8) matrisinin rankı 2 olup, (4.7) koşulu altında yine Rouché Frobenius Teoremi'nden sistemin tek çözümü vardır. Sistemin artırılmış matrisi de satırca

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\gamma_1 - \gamma_3}{\alpha_1 - \beta_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{\gamma_2 - \gamma_3}{\alpha_2 - \beta_2} \\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

matrisine denk olduğundan sistemin çözümünün

$$r_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma_3}{\alpha_1 - \beta_1} \text{ ve } r_2 = \frac{\gamma_2 - \gamma_3}{\alpha_2 - \beta_2}. \tag{4.9}$$

olduğu görülür. $r_1, r_2 \neq 0$ olduğundan $\gamma_1 \neq \gamma_3 \neq \gamma_2$ dir. Ayrıca, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \{\alpha_3, \beta_3\}$ olduğundan $\gamma_1 = \gamma_2$ elde edilir. $\gamma_1 = \gamma_2 = x$ ve $\gamma_3 = y$ koyarak, (4.7) eşitliği düzenlendiğinde,

$$\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-2\beta_1\beta_2\right)x+\left(\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2\right)y=0$$

olur. Dolayısıyla (d) şıkkı elde edilir.

5) durumu ile ilişkili

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_1 & \beta_2\\ \beta_1 & \alpha_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix},\quad \gamma_i\in\{\alpha_3,\beta_3\}\quad (i=1,2,3)$$

doğrusal denklem sistemi göz önüne alınsın. Sistemin çözümünün olması için Rouché Frobenius Teoremi'nden dolayı, sitemin artırılmış matrisinin determinantı

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \gamma_1\\ \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2\\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_3\end{pmatrix}=\beta_1(-\beta_2\gamma_1+\alpha_2\gamma_2)+\alpha_1(\alpha_2(\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3)+\beta_2\gamma_3)=0 \quad (4.10)$$

olmalıdır. $\alpha_i\neq\beta_i$ $(i=1,2)$ koşulu altında

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_1 & \beta_2\\ \beta_1 & \alpha_2\end{pmatrix} \quad (4.11)$$

katsayılar matrisi, rankı 2 olan

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

matrisine satırca denktir. Dolayısıyla (4.11) matrisinin rankı 2 olup (4.10) koşulu altında yine Rouché Frobenius Teoremi'nden sistemin tek çözümü vardır. Sistemin artırılmış matrisi de

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma_1 \\ 0 & 1 & \dfrac{\gamma_1-\gamma_2}{\alpha_2-\beta_2} \\ 1 & 0 & \dfrac{\gamma_1-\gamma_3}{\alpha_1-\beta_1} \end{pmatrix}$$

matrisine satırca denk olduğundan, sistemin çözümü

$$r_1 = \frac{\gamma_1-\gamma_3}{\alpha_1-\beta_1} \text{ ve } r_2 = \frac{\gamma_1-\gamma_2}{\alpha_2-\beta_2}. \qquad (4.12)$$

şeklinde elde edilir. $r_1, r_2 \neq 0$ olduğundan, $\gamma_3 \neq \gamma_1 \neq \gamma_2$ dir. Ayrıca, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \{\alpha_3, \beta_3\}$ olduğundan $\gamma_2 = \gamma_3$ bulunur. $\gamma_1 = x$ ve $\gamma_2 = \gamma_3 = y$ koyarak (4.10) eşitliği düzenlendiğinde (e) şıkkı elde edilir.

Şimdi de 6) durumu ile ilişkili

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i \in \{\alpha_3, \beta_3\} \quad (i = 1,2,3).$$

doğrusal denklem sistemi göz önüne alınsın. Sitemin çözümünün olması için, Rouché Frobenius Teoremi'nden dolayı, sistemin artırılmış matrisinin determinantı

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma_1 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \beta_1(-\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2) + \alpha_1(-\alpha_2\gamma_3 + \beta_2(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3)) = 0 \quad (4.13)$$

olmalıdır. $\alpha_i \neq \beta_i$ ($i=1,2$) koşulu altında sistemin

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

katsayılar matrisi rankı 2 olan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

matrisine satırca denktir. Dolayısıyla (4.14) matrisinin rankı 2 olup (4.13) koşulu altında yine Rouché Frobenius Teoremi'nden sistemin tek çözümü vardır. Sistemin artırılmış matrisinin de satırca

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dfrac{\gamma_1-\gamma_2}{\alpha_2-\beta_2} \\ 1 & 0 & \dfrac{\gamma_2-\gamma_3}{\alpha_1-\beta_1} \\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

matrisine denk olduğu dikkate alınırsa, r_1 ve r_2 katsayıları

$$r_1 = \frac{\gamma_2-\gamma_3}{\alpha_1-\beta_1} \text{ ve } r_2 = \frac{\gamma_1-\gamma_2}{\alpha_2-\beta_2}. \tag{4.15}$$

şeklinde bulunur. $r_1, r_2 \neq 0$ olduğundan, $\gamma_3 \neq \gamma_2 \neq \gamma_1$ dir. Ayrıca, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \{\alpha_3, \beta_3\}$ olduğundan $\gamma_1 = \gamma_3$ elde edilir. $\gamma_1 = \gamma_3 = x$ ve $\gamma_2 = y$ koyarak (4.13) eşitliği düzenlendiğinde, (f) şıkkı da elde edilmiş olur.

Son olarak 7) durumu ile ilişkili olan

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i \in \{\alpha_3, \beta_3\} \quad (i = 1,2,3,4)$$

doğrusal denklem sisteminin, $r_1, r_2 \neq 0$ koşulu altında çözüme sahip olmadığını görelim. $\alpha_i \neq \beta_i$ ($i = 1,2$) koşulu altında sistemin artırılmış matrisi,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\gamma_1 - \gamma_3}{\alpha_1 - \beta_1} \\ 1 & 0 & \dfrac{\gamma_2 - \gamma_4}{\alpha_1 - \beta_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{\gamma_3 - \gamma_4}{\alpha_2 - \beta_2} \\ \beta_1 & \beta_2 & \gamma_4 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

matrisine satırca denktir. Sistemin $r_1, r_2 \neq 0$ olan çözümünün olduğunu varsayalım. Bu durumda $r_1, r_2 \neq 0$ olduğu dikkate alınarak (4.16)'daki artırılmış matristen $\gamma_1 \neq \gamma_3$, $\gamma_3 \neq \gamma_4$ ve $\gamma_1 - \gamma_3 = \gamma_2 - \gamma_4$ olduğu bulunur. Bu koşullar topluca dikkate alındığında

$$\gamma_1 \neq \gamma_2, \quad \gamma_1 \neq \gamma_3, \quad \gamma_2 \neq \gamma_4 \quad \text{ve} \quad \gamma_3 \neq \gamma_4 \tag{4.17}$$

elde edilir. Yine $\gamma_i \in \{\alpha_3, \beta_3\}$ ($i = 1,2,3,4$) olduğu göz önüne alındığında

$$\gamma_1 = \gamma_4 \quad \text{ve} \quad \gamma_2 = \gamma_3 \tag{4.18}$$

olması gerektiği görülür. Bu eşitlikler $\gamma_1-\gamma_3=\gamma_2-\gamma_4$ eşitliğinde yerine yazıldığında $\gamma_1-\gamma_2=\gamma_2-\gamma_1$ veya denk olarak $\gamma_1=\gamma_2$ bulunur ki, bu (4.17) ile çelişir. Dolayısıyla 7) durumu ile ilişkili doğrusal denklem sisteminden $r_1,r_2\neq 0$ olan harhangi bir çözüm gelmez. ■

Elde edilen bu teoremde, α_i ve β_i ($i=1,2,3$) katsayılarına değerler vererek, bazı sonuçlar elde edilebilir.

Teorem 4.3'te $\alpha_i=1$ ve $\beta_i=0$ ($i=1,2,3$) aldığımızda aşağıdaki sonuç elde edilir. Bu sonuç [2]'deki Teorem'in (a) şıkkının değişik bir ifadesidir.

Sonuç 4.4. $P_1,P_2\in\mathbb{C}_n$ birbirinden farklı değişmeli esas idempotent matrisler ve $r_1,r_2\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere, $P=r_1P_1+r_2P_2$ doğrusal bileşimi göz önüne alınsın. P doğrusal bileşim matrisinin idempotent olması için gerek ve yeter koşul bir $S\in\mathbb{C}_n$ tersinir matrisi için $S^{-1}PS$ doğrusal bileşiminin aşağıdakilerden bir tanesi olmasıdır;

(a) $(1)(I\oplus\mathbf{0})+(1)(\mathbf{0}\oplus I)=I\oplus I$,

(b) $(-1)(I\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0})+(1)(I\oplus I\oplus\mathbf{0})=\mathbf{0}\oplus I\oplus\mathbf{0}$,

(c) $(1)(I\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0})+(1)(\mathbf{0}\oplus I\oplus\mathbf{0})=I\oplus I\oplus\mathbf{0}$,

(d) $(1)(I\oplus I\oplus\mathbf{0})+(-1)(I\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0})=\mathbf{0}\oplus I\oplus\mathbf{0}$.

İspat. Teorem 4.3'te $(\alpha_i,\beta_i)=(1,0)$ ($i=1,2,3$) alarak Teorem 4.3'teki tüm şıkları irdeleyelim.

Teorem 4.3'ün (a) i) şıkında verilen birinci koşul sağlanmadığından (çünkü $0\neq 0$ çelişkisi ortaya çıkıyor), bu duruma uyan doğrusal bileşim yoktur. Kaldı ki, koşullar sağlanmış olsa bile Q_1 ve Q_2 matrislerinin eşzamanlı köşegen formları aynı olacağından matrisler eşit olur ki bu hipotezle çelişir. (a) ii) şıkkındaki koşullar sağlanır fakat Q_1 ve Q_2 matrisleri birbirinden farklı olduğundan bu durum da elenir.

(b) i) şıkkındaki birinci koşul sağlanır. İkinci ve üçüncü koşuldan da sırasıyla $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ gelir. $x, y \in \{1,0\}$ olduğundan $x = y = 1$ dir. Diğer taftan $r_1 = 1$ ve $r_2 = 1$ bulunur. (b) i) şıkkındaki köşegen form da düşünüldüğünde sonucun (a) şıkkı elde edilmiş olur. (b) ii) şıkkındaki birinci koşul sağlanmadığından istenen koşullarda (b) ii) formunda bir doğrusal bileşim mevcut değildir.

(c) şıkkındaki duruma uygun istenen özellikte doğrusal bileşim olması için $x = 0$ ve $x \neq y$ olmalıdır. $x, y \in \{1,0\}$ olduğu da göz önüne alındığında $y = 1$ olup doğrusal bileşimin katsayıları sırasıyla -1 ve 1 bulunur. (c) şıkkındaki köşegen form düşünüldüğünde Sonuç 4.4'ün (b) şıkkı elde edilir.

(d) şıkkındaki koşulun sağlanması için $y = 0$ olmalıdır. $x \neq y$ olduğundan $x = 1$ olup, doğrusal bileşimin katsayıları sırasıyla 1 ve 1 bulunur. Köşegen formunda da ilgili değerler yerine yazıldığında Sonuç 4.4'ün (c) şıkkı elde edilir.

(e) şıkkındaki koşulun sağlanması için $-2x + y = 0$ olmalı. $x \neq y$ ve $x, y \in \{1,0\}$ olduğundan, bu mümkün değildir. Dolayısıyla bu şıktaki duruma uygun doğrusal bileşim mevcut değildir.

Son olarak Teorem 4.3'ün (f) şıkkındaki biçimde bir doğrusal bileşim olması için $x = 0$ olmalıdır. $x \neq y$ ve $x, y \in \{1,0\}$ olduğundan $y = 1$ olup doğrusal bileşimin katsayıları sırasıyla 1 ve -1 bulunur. (f) şıkkındaki köşegen formda elde edilen değerler yerine yazıldığında Sonuç 4.4'ün (d) şıkkı elde edilir. ■

Sonuç 4.4 ilk verdiğimiz sonuç olduğundan ispatını biraz detaylı yazdık. Bu ispatta görüldüğü gibi Teorem 4.3'ün bazı şıklarında istenen koşullar sağlanmadığından o şıkka uygun doğrusal bileşim gelmemektedir. Bundan sonraki sonuçların ispatlarında sadece sonuç veren durumlar yazılıp ispatlar daha kısa tutulacaktır.

Teorem 4.3'te $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ve $\beta_3 = -1$ aldığımızda aşağıdaki sonucu elde ederiz. Bu sonuç [9]'daki Teorem 2.5'in (a_1) sıkkının ve [10]'daki Teorem 2.5'in (a) şıkkının yeniden ifadesidir.

Sonuç 4.5. $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n$ birbirinden farklı değişmeli iki esas idempotent matris ve $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $P = r_1P_1 + r_2P_2$ olsun. P matrisinin involutif olması için gerek ve yeter koşul $(r_1, r_2) \in \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$ olmak üzere, P matrisinin $r_1(I \oplus \mathbf{0}) + r_2(\mathbf{0} \oplus I) = r_1I \oplus r_2I$ doğrusal bileşimlerinden birine benzer olmasıdır.

İspat. Teorem 4.3'te $(\alpha_i, \beta_i) = (1,0)$ ($i = 1,2$) ve $(\alpha_3, \beta_3) = (1,-1)$ alalım. Teorem 4.3'ün (b) i) şıkkında bu değerler yerine yazıldığında, bu şıktaki bütün koşullar sağlanır. α_i ve β_i ($i = 1,2,3$)'lerin değerleri, r_i ($i = 1,2$)'leri bulmak için yerine yazıldığında $r_1 = x$ ve $r_2 = y$ bulunur. $x, y \in \{1,-1\}$ olduğu da göz önüne alındığında istenen elde edilir. ■

Teorem 4.3'te $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$ ve $\beta_2 = -1$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.6. $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n$, sırasıyla, değişmeli esas idempotent ve esas involutif matrisler ve $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $P = r_1P_1 + r_2P_2$ olsun. P matrisinin idempotent olması için gerek ve yeter koşul P matrisinin aşağıdaki doğrusal bileşimlerden bir tanesine benzer olmasıdır;

(a) $(2)(I \oplus \mathbf{0}) + (-1)(I \oplus -I) = I \oplus I$,

(b) $(1)(I \oplus \mathbf{0}) + (-1)(I \oplus -I) = \mathbf{0} \oplus I$,

(c) $(2)(I \oplus \mathbf{0}) + (1)(-I \oplus I) = I \oplus I$,

(d) $(1)(I \oplus \mathbf{0}) + (1)(-I \oplus I) = \mathbf{0} \oplus I$.

İspat. Teorem 4.3'te $(\alpha_i,\beta_i)=(1,0)$ $(i=1,3)$ ve $(\alpha_2,\beta_2)=(1,-1)$ alalım. (a) i) şıkkının birinci koşulu sağlanır. İkinci ve üçüncü koşulundan $y\neq -x$ ve $y\neq 0$ gelir. $x,y\in\{1,0\}$ olduğundan $(x,y)\in\{(1,1),(0,1)\}$ olur. Dolayısıyla $(x,y)=(1,1)$ ise $r_1=1$ ve $r_2=-1$ bulunur. Eğer $(x,y)=(0,1)$ ise, $r_1=2$ ve $r_2=-1$ elde edilir. Matrislerin köşegen formu da düşünüldüğünde Sonuç 4.6'nın (a) ve (b) şıkları elde edilmiş olur.

Teorem 4.3'ün (b) i) şıkkındaki koşulların sağlanması için $x\neq -y$ ve $y\neq 0$ olmalı. $x,y\in\{1,0\}$ olduğu da göz önüne alındığında $y=1$ ve $x\in\{1,0\}$ olur. Bu değerler kullanılarak eğer $(x,y)=(1,1)$ ise $r_1=2$ ve $r_2=1$, eğer $(x,y)=(0,1)$ ise $r_1=1$ ve $r_2=1$ elde edilir. Bunlarla birlikte matrislerin köşegen formları dikkate alındığında Sonuç 4.6'nın (c) ve (d) şıkları elde edilir. ■

Teorem 4.3'te $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$, $\beta_1=0$ ve $\beta_2=\beta_3=-1$ aldığımızda aşağıdaki sonuç bulunur.

Sonuç 4.7. $P_1,P_2\in\mathbb{C}_n$ sırasıyla değişmeli esas idempotent ve esas involutif matrisler ve $r_1,r_2\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $P=r_1P_1+r_2P_2$ olsun. P matrisinin involutif olması için gerek ve yeter koşul P matrisinin aşağıdaki doğrusal bileşimlerden bir tanesine benzer olmasıdır;

(a) $(\pm 2)(I\oplus\mathbf{0})+(\mp 1)(I\oplus -I)=\pm(I\oplus I)$,

(b) $(\pm 2)(I\oplus\mathbf{0})+(\pm 1)(-I\oplus I)=\pm(I\oplus I)$,

(c) $(\pm 2)(I\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0})+(\mp 1)(I\oplus I\oplus -I)=\pm(I\oplus -I\oplus I)$,

(d) $(\pm 2)(I\oplus\mathbf{0}\oplus\mathbf{0})+(\pm 1)(-I\oplus I\oplus -I)=\pm(I\oplus I\oplus -I)$.

İspat. Teorem 4.3'te $(\alpha_1,\beta_1)=(1,0)$ ve $(\alpha_i,\beta_i)=(1,-1)$ ($i=2,3$) alındığında, Teorem 4.3'ün (a) i) şıkkının ikinci ve üçüncü koşulundan $y\neq -x$ ve $y\neq 0$ gelir. $x,y\in\{1,-1\}$ olduğundan $(x,y)\in\{(1,1),(-1,-1)\}$ dir. $(x,y)=(1,1)$ ise $r_1=2$ ve $r_2=-1$. Eğer $(x,y)=(-1,-1)$ ise $r_1=-2$ ve $r_2=1$ olur. Teorem 4.3'ün (a) i) şıkkındaki köşegen formda değerler yerine yazıldığında Sonuç 4.7'nin (a) şıkkı elde edilir.

Teorem 4.3'ün (b) i) şıkkının ikinci koşulundan $x\neq -y$ gelir. $x,y\in\{1,-1\}$ olduğu da göz önüne alındığında, $(x,y)\in\{(1,1),(-1,-1)\}$ olur. $(x,y)=(1,1)$ ise, $r_1=2$ ve $r_2=1$ dir. Eğer $(x,y)=(-1,-1)$ ise, $r_1=-2$ ve $r_2=-1$ olur. Matrislerin köşegen formları da düşünüldüğünde Sonuç 4.7'nin (b) şıkkı bulunur.

Teorem 4.3'ün (c) şıkkındaki koşuldan $x=-y$ gelir. $x,y\in\{1,-1\}$ olduğundan da $(x,y)\in\{(1,-1),(-1,1)\}$ bulunur. Eğer $(x,y)=(1,-1)$ ise, $r_1=2$ ve $r_2=-1$ elde edilir. Eğer $(x,y)=(-1,1)$ ise, $r_1=-2$ ve $r_2=1$ bulunur. Teoremin (c) şıkkındaki köşegen formda değerler yerine yazıldığında, Sonuç 4.7'nin (c) şıkkı elde edilir.

Teorem 4.3'ün (d) şıkkındaki koşuldan $x=-y$ olur. $x,y\in\{1,-1\}$ olduğundan $(x,y)\in\{(1,-1),(-1,1)\}$ elde edilir. Eğer $(x,y)=(1,-1)$ ise $r_1=2$ ve $r_2=1$, eğer $(x,y)=(-1,1)$ ise $r_1=-2$ ve $r_2=-1$ bulunur. Köşegen formda değerler yerine konduğunda Sonuç 4.7'nin (d) şıkkı elde edilir. ∎

Teorem 4.3'te $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$, $\beta_1=\beta_2=-1$ ve $\beta_3=0$ aldığımızda aşağıdaki sonuç bulunur. Bu sonuç [9]'daki Teorem 2.2'nin (a) şıkkı ve [10]'daki Teorem 2.2'nin yeniden ifadesidir.

Sonuç 4.8. $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n$ değişmeli esas involutif matrisler, $P_1 \neq \pm P_2$ ve $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $P = r_1 P_1 + r_2 P_2$ olsun. P matrisinin idempotent olması için gerek ve yeter koşul P matrisinin aşağıdaki doğrusal bileşimlerden bir tanesine benzer olmasıdır;

(a) $\left(-\frac{1}{2}\right)(I \oplus -I \oplus -I) + \left(\frac{1}{2}\right)(I \oplus I \oplus -I) = \mathbf{0} \oplus I \oplus \mathbf{0}$,

(b) $\left(-\frac{1}{2}\right)(I \oplus -I \oplus -I) + \left(-\frac{1}{2}\right)(-I \oplus I \oplus -I) = \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \oplus I$,

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)(I \oplus I \oplus -I) + \left(\frac{1}{2}\right)(I \oplus -I \oplus I) = I \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}$,

(d) $\left(\frac{1}{2}\right)(I \oplus I \oplus -I) + \left(-\frac{1}{2}\right)(I \oplus -I \oplus -I) = \mathbf{0} \oplus I \oplus \mathbf{0}$.

İspat. $(\alpha_i, \beta_i) = (1, -1)$ ($i = 1, 2$) ve $(\alpha_3, \beta_3) = (1, 0)$ alalım. Teorem 4.3'ün (c), (d), (e) ve (f) şıklarındaki koşulların sağlanması için hepsinde de $x = 0$ olmalı. $x \neq y$ ve $x, y \in \{1, 0\}$ olduğu düşünüldüğünde, $y = 1$ elde edilir. Bu değerler Teorem 4.3'ün (c), (d), (e) ve (f) şıklarında yerine konduğunda Sonuç 4.8'in (a), (b), (c) ve (d) şıklarındaki doğrusal bileşimler bulunur. ■

Teorem 4.3'te $\alpha_i = 1$ ve $\beta_i = -1$ ($i = 1, 2, 3$) alındığında, [9]'daki Teorem 2.4'ün (a) şıkkı ve [10]'daki Teorem 2.4 elde edilir.

Sonuç 4.9. $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n$ değişmeli iki esas involutif matris, $P_1 \neq \pm P_2$ ve $r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $P = r_1 P_1 + r_2 P_2$ olsun. P matrisini involutif yapacak şekilde katsayılar mevcut değildir.

İspat. Her $(\alpha_i, \beta_i) \in \{(1, -1), (-1, 1)\}$ ($i = 1, 2, 3$) için Teorem 4.3'ün şıklarında hesaplama yaptığımızda hiçbir koşulun sağlanmadığı görülür. Dolayısıyla istenen özelliklerde doğrusal bileşim mevcut değildir. ■

Not: İdempotent ve involutif matrislerle ilgili olarak yukarıda elde edilen tüm sonuçlar, Mathematica paket programı (bkz. Ek B) aracılığı ile de hesaplanıp doğrulanmıştır.

4.3. Sayısal Örnekler

Örnek 4.10.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 2/3 & -4 & 10/3 & -2/3 \\ -2/3 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2 & 8/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2 & 8/3 & 2/3 \end{pmatrix} \text{ ve } Q_2 = \begin{pmatrix} -5/3 & -2 & 5/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1 & 4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

matrisleri değişmeli ve sırasıyla $\{2,0\}$ ve $\{-2,1\}$-kuadratik matrislerdir. Bu matrisler değişmeli olduğundan eşzamanlı köşegenleştirilebilirler. Bu iki matrisi eşzamanlı köşegenleştiren bir matris

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olup, $S^{-1}Q_1S$ ve $S^{-1}Q_2S$ matrisleri sırasıyla

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

dir. $(\alpha_1,\beta_1)=(2,0)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(-2,-1)$ ve $x,y\in\{3,-1\}$ alalım. Bu durumda matrislerin köşegen formları Teorem 4.3'ün b) şıkkına karşılık gelmektedir. $(x,y)=(3,-1)$, $(x,y)=(-1,3)$, $(x,y)=(3,3)$ ve $(x,y)=(-1,-1)$ için, Teorem

4.3'ün (b) i) şıkkındaki $\alpha_1\alpha_2 \neq \beta_1\beta_2$, $\alpha_2 x \neq \beta_2 y$ ve $\alpha_1 y \neq \beta_1 x$ koşullar sağlandığından;

$(x,y)=(3,-1)$ ise $(r_1,r_2)=\left(\frac{7}{4},\frac{1}{2}\right)$, $(x,y)=(-1,3)$ ise $(r_1,r_2)=\left(-\frac{5}{4},-\frac{3}{2}\right)$, $(x,y)=(3,3)$ ise $\left(\frac{3}{4},\frac{-3}{2}\right)$ ve $(x,y)=(-1,-1)$ ise $\left(\frac{-1}{4},\frac{1}{2}\right)$ olacaktır. Gerçekten gerekli hesaplama yapıldığında $\frac{7}{4}Q_1+\frac{1}{2}Q_2$, $-\frac{5}{4}Q_1-\frac{3}{2}Q_2$, $\frac{3}{4}Q_1-\frac{3}{2}Q_2$ ve $\frac{-1}{4}Q_1+\frac{1}{2}Q_2$ matrisleri, sırasıyla

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olacaktır. Bu köşegen formlardan, doğrusal bileşim matrisinin $\{3,-1\}$-kuadratik olduğu da görülmektedir.

Örnek 4.11.

$$Q_1=\begin{pmatrix} -6 & -3 & 18 & 3 \\ -3 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -12 & -4 & 24 & 7 \end{pmatrix} \text{ ve } Q_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 11/3 & -6 & -5/3 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2/3 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

matrisleri değişmeli ve sırasıyla $\{3,-3\}$ ve $\{2,0\}$-kuadratik matrislerdir. Bu iki matrisin doğrusal bileşimlerinin $\{1,-1\}$-kuadratik, yani involutif matris olmasını istiyoruz. Dolayısıyla $x,y\in\{1,-1\}$ alacağız. Bu iki matrisi eşzamanlı köşegenleştiren

$$S=\begin{pmatrix}1&1&4&3\\4&3&4&1\\1&1&2&0\\1&0&4&4\end{pmatrix}$$

benzerlik dönüşüm matrisi ile, $S^{-1}Q_1S$ ve $S^{-1}Q_2S$ matrisleri sırasıyla,

$$\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

olur. Bu da $(\alpha_1,\beta_1)=(3,-3)$ ve $(\alpha_2,\beta_2)=(2,0)$ için Teorem 4.3'teki (f) doğrusal bileşimine karşılık gelir. Ayrıca, $x,y\in\{1,-1\}$, $x\neq y$ için Teorem 4.3'ün (f) şıkkındaki koşul da sağlanır. Dolayısıyla, $(x,y)=(1,-1)$ ise $(r_1,r_2)=\left(-\frac{1}{3},1\right)$ ve $(x,y)=(-1,1)$ ise $(r_1,r_2)=\left(\frac{1}{3},-1\right)$ şeklindedir. Sonuç olarak, $-\frac{1}{3}Q_1+Q_2$ ve $\frac{1}{3}Q_1-Q_2$ doğrusal bileşim matrisleri sırasıyla,

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

olup, bunlar involutif matrislerdir.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

1. Bölüm'de çalışmamızın içeriği hakkında bilgi verilip, çalışmamıza benzer literatürde bulunan bazı çalışmalar tanıtıldı. Çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar, literatür kısmında bahsedilen bu çalışmaların idempotent ve involutif matrislerle ilgili olanlarının bazılarını kapsar niteliktedir.

2. Bölüm'de çalışmada kullanılan temel tanım, gösterim ve teoremler verilerek kuadratik matrisler tanıtıldıktan sonra, kuadratik matrislerle bazı özel tipli (idempotent/involutif) matrisler arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir.

$r_1, r_2 \in \mathbb{C}^*$ ve $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}_n$ kuadratik matrisler olmak üzere, $r_1Q_1 + r_2Q_2$ doğrusal bileşiminin kuadratikliği ile ilgili sonuçlar çalışmanın 3. ve 4. bölümlerinde verilmiştir. 3. Bölüm'de verilen sonuçlar Q_1 ve Q_2 matrislerinin değişmeli ve değişmesiz oldukları her iki durum için de verilmiştir. Bu bölümde sonuçları elde ederken tamamen matrisler arasındaki cebirsel işlemler kullanılmıştır. 4. Bölüm'de ise 3. Bölüm'de elde edilen sonuçların, doğrusal bileşimi oluşturan matrislerin değişmeli olduğu kısmı için doğrusal denklem sistemleri kullanılarak alternatif ispatlar verilmiştir. Belirtilmelidir ki, bu tip çalışmalarda kuadratik matrisler yeni bir konu olduğundan problemin iki farklı yoldan ele alınması, kuadratik matrisler ile ilgi yapılacak benzer çalışmalara farklı bakış açıları getirmesi bakımından önemlidir.

Kuadratik matrisler sınıfı idempotent ve involutif matrisler sınıflarını kapsayan bir sınıftır. Bu nedenle, iki bölümde de kuadratik matrislerle ilgili elde edilen sonuçlar kullanılarak idempotent ve/veya involutif matrislerin doğrusal bileşimlerinin idempotentliği veya involutifliği ile ilgili sonuçlar verilmiştir. İdempotent ve involutif matrislerle ilgili olarak burada verilen sonuçlardan bir kısmı literatürde daha önce çalışılmış problemlerdir. Dolayısıyla bu çalışmalara, kuadratik matrisler kullanılarak alternatif ispatlar verilmiştir.

Biz çalışmamızda kuadratik matrislerin doğrusal bileşimlerinin kuadratikliği konusunu çalıştık. Literatürde bazı özel tipli matrislerin (idempotent, involutif, tripotent vs.) doğrusal bileşimlerinin rankı, sıfırlığı, tersinirliği ve grup tersinirliği vs. gibi birçok karakterizasyonları mevcuttur. Hâlbuki kuadratik matrisler için bu tür çalışmalar henüz yapılmamıştır. Bu karakterizasyonlar kuadratik matrisler için de yapılabilir. Hatta kuadratik matrislerle ilgili çalışmalar biraz daha ileriye taşınarak genelleştirilmiş kuadratik matrisler için de benzer problemler ele alınabilir.

Ayrıca kuadratik matris tanımına benzer bir tanımla $Q \in \mathbb{C}_n$ ve $\lambda, \mu, \varepsilon \in \mathbb{C}$ olmak üzere $(Q-\lambda I)(Q-\mu I)(Q-\varepsilon I)=\mathbf{0}$ eşitliğini sağlayan *kübik matrisler* tanımlanıp çalışma biraz daha ileriye taşınabilir.

KAYNAKLAR

[1] Rao, C.R., Mitra, S.K., Generalized Inverse of Matrices and its Applications. John Wiley & Sons. Inc., New York, 1971.

[2] Baksalary, J.K., Baksalary, O.M., Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices. Linear Algebra Appl., 321: 3-7, 2000.

[3] Özdemir, H., Özban, A.Y., On idempotency of linear combinations of idempotent matrices. Appl. Math. Comput., 159: 439-448, 2004.

[4] Baksalary, J.K., Baksalary, O.M., Styan, G.P., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a tripotent matrix. Linear Algebra Appl., 354: 21-34, 2002.

[5] Yao, H., Sun, Y., Xu, C., Bu, C., A note on linear combinations of an idempotent matrix and a tripotent matrix. J. Appl. Math. Inform., 27: 1493-1499, 2009.

[6] Benítez, J., Thome, N., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a *t*-potent matrix that commute. Linear Algebra Appl., 403: 414-418, 2005.

[7] Benítez, J., Thome, N., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a *t*-potent matrix that do not comute. Linear Multilinear Algebra, 56 (6): 679-687, 2008.

[8] Baksalary, J.K., Baksalary, O.M., Özdemir, H., A note on linear combinations of commuting tripotent matrices. Linear Algebra Appl., 388: 45-51, 2004.

[9] Sarduvan, M., Özdemir, H., On linear combinations of two tripotent, idempotent and involutive matrices. Appl. Math. Comput., 200: 401-406, 2008.

[10] Özdemir, H., Sarduvan, M,. Notes on linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices that commute. An. Ştiinţ. Univ. “Ovidius” Constanța Ser. Mat., 16(2): 83-90, 2008.

[11] Özdemir, H., Sarduvan, M., Özban, A.Y., Güler, N., On idempotency and tripotency of linear combinations of two commuting tripotent matrices. Appl. Math. Comput., 207: 197-201, 2009.

[12] Baksalary, O.M., Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are disjoint. Linear Algebra Appl., 388: 67-78, 2004.

[13] Baksalary, O.M., Benítez, J., Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are commuting. Linear Algebra Appl., 424: 320-337, 2007.

[14] Singthong, U., Wanicharpichat, W., Idempotency of linear combinations of commuting three tripotent matrices. NU Science Journal, 4(S1): 33-39, 2007.

[15] Xu, C., Xu, R., Tripotency of a linear combination of two involutory matrices and a tripotent matrix that mutually commute. Linear Algebra Appl., 437: 2091-2109, 2012.

[16] Groß, J., Trenkler, G., Nonsingularity of the difference of two oblique projectors. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 21 (2): 390-395, 1999.

[17] Koliha, J.J., Rakočević, V., Straškraba, I., The difference and sum of projectors. Linear Algebra Appl., 388: 279-288, 2004.

[18] Baksalary, J.K., Baksalary, O.M., Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices. Linear Algebra Appl., 388: 25-29, 2004.

[19] Koliha, J.J., Rakočević, V., The nullity and rank of linear combinations of idempotent matrices. Linear Algebra Appl., 418: 11-14, 2006.

[20] Sarduvan, M., Özdemir, H., On nonsingularity of linear combinations of tripotent matrices. Acta Univ. Apulensis Math. Inform., 25: 159-164, 2011.

[21] Zuo, K., Nonsingularity of the difference and the sum of two idempotent matrices. Linear Algebra Appl., 433: 476-482, 2010.

[22] Zhang, F. Matrix theory, basic results and techniques. Springer, New York, 2011.

[23] Horn, R.A., Johnson, C.R., Matrix Analysis. Cambridge University Press., New York, 2013.

[24] Meyer, C., Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM., Philadelphia, Pa., 2000.

[25] Seber, A.G., A matrix handbook for statisticians. John Wiley & Sons., Auckland, New Zealand, 2008.

[26] Bronson, R., Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrix Operations. McGraw-Hill., New York, 1989.

[27] http://en.wikipedia.org/wiki/Rouch%C3%A9%E2%80%93Capelli_theorem, Erişim Tarihi: 28.04.2015.

[28] Hildebrand, F.B., Methods of Applied Mathematics. Prentice-Hall., New Jersey, 1965.

[29] Anton, H., Rorres, C., Elementary Linear Algebra. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2010.

[30] Blyth, T.S., Robertson, E.F., Basic Linear Algebra. Springer-Verlag London Limited., Great Britain, 2007.

[31] Graybill, F.A., Matrices with Applications in Statistics. Wadsworth Publishing Company, California, 1983.

[32] Harville, D.A., Matrix Algebra From a Statistician's Perspective. Springer-Verlag, New York, 1997.

[33] Venit, S., Bishop, W., Elementary Linear Algebra. Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1985.

[34] Lütkepohl, H., Handbook of matrices. John Wiley & Sons., Chichester, 1996.

[35] Lay, D.C., Linear Algebra and Its Applications. Pearson Education, Boston, 2012.

[36] Uç, M., Özdemir, H., Özban, A.Y., On the quadraticity of linear combinations of quadratic matrices. Linear Multilinear Algebra, 63(6): 1125–1137, 2015.

[37] Aleksiejczyk, M., Smoktunowicz, A., On properties of quadratic matrices. Math. Pannon., 11 (2): 239-248, 2000.

[38] Özdemir, H., Petik, T. On The Spectra of Some Matrices Dersived From Two Quadratic Matrices. Bull. Iranian Math. Soc., 39(2): 225-238, 2013.

EKLER

EK A: Teorem 3.4'ün (a) şıkkının idempotent ve involutif matrislerle ilgili sonuçlarını veren Mathematica'da yazılan programın kodları ve çıktıları:

```
(* Teorem 3.4'ün (a) şıkkından elde edilen idempotent
 ve/veya involutif matrislerle ilgili sonuçlar. *)
(*Aşağıdaki kodlarda mI birim matrisi temsil etmektedir.*)
SonuclariGoster[Z_] := ({α1, β1, α2, β2, α3, β3} = Z;
  s = Quiet[
    Solve[(r1 β1 + r2 β2 - α3) (r1 β1 + r2 β2 - β3) == 0 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
  If[s ≠ {} && β1 ≠ 0 && β2 ≠ 0 && β1 ≠ β2 && β1 ≠ -β2,
   Print["i)    ", s, ",    ", Q1 == β1 mI, ", ", Q2 == β2 mI]];
  s = Quiet[Solve[2 r1 β1 + r2 (α2 + β2) == α3 + β3 &&
      (r1 β1 + r2 β2 - α3) (r1 β1 + r2 β2 - β3) == 0 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
  If[s ≠ {} && β1 ≠ 0, Print["ii)    ", s, ",    ", Q1 == β1 mI]];
  s = Quiet[
    Solve[(r1 β1 + r2 α2 - α3) (r1 β1 + r2 α2 - β3) == 0 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
  If[s ≠ {} && β1 ≠ 0 && α2 ≠ 0 && β1 ≠ α2 && β1 ≠ -α2,
   Print["iii)  ", s, ",    ", Q1 == β1 mI, ", ", Q2 == α2 mI]];
  s = Quiet[Solve[r1 (α1 + β1) + 2 r2 β2 == α3 + β3 &&
      (r1 β1 + r2 β2 - α3) (r1 β1 + r2 β2 - β3) == 0 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
  If[s ≠ {} && β2 ≠ 0, Print["iv)    ", s, ",    ", Q2 == β2 mI]];
  s = Quiet[
    Solve[(r1 α1 + r2 β2 - α3) (r1 α1 + r2 β2 - β3) == 0 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
  If[s ≠ {} && α1 ≠ 0 && β2 ≠ 0 && α1 ≠ β2 && α1 ≠ -β2,
   Print["v)  ", s, ",    ", Q1 == α1 mI, ", ", Q2 == β2 mI]];
  s = Quiet[Solve[r1 (α1 - β1) == r2 (α2 - β2) && 2 r1 β1 + r2 (α2 + β2) == α3 + β3 &&
      (r1 β1 + r2 β2 - α3) (r1 β1 + r2 β2 - β3) == 0 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
  If[s ≠ {}, Print["vi)    ", s, ",    ", (Q1 - β1 mI) (Q2 - β2 mI) == 0]];
  s = Quiet[Solve[(r1 α1 + r2 β2 - α3) (r1 α1 + r2 β2 - β3) == 0 &&
      (r1 β1 + r2 α2 - α3) (r1 β1 + r2 α2 - β3) == 0 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
  If[s ≠ {}, Print["vii)   ", s, ",    ", Sum[(Qi - βi mI)/(αi - βi), {i, 1, 2}] == mI]];
  s = Quiet[
    Solve[(r1 α1 - r1 β1 + r2 α2 - r2 β2) (r1 α1 + r1 β1 + r2 α2 + r2 β2 - α3 - β3) == 0 &&
      (r1 β1 + r2 β2 - α3) (r1 β1 + r2 β2 - β3) == 0 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
```

```
If[s ≠ {}, Print["viii) ", s, ",     ", (Q1 - β1 mI)/(α1 - β1) == (Q2 - β2 mI)/(α2 - β2)]];
s = Quiet[
   Solve[(r1 α1 + r2 α2 - α3) (r1 α1 + r2 α2 - β3) == 0 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
If[s ≠ {} && α1 ≠ 0 && α2 ≠ 0 && α1 ≠ α2 && α1 ≠ -α2,
 Print["ix) ", s, ",     ", Q1 == α1 mI, ", ", Q2 == α2 mI]];
s = Quiet[Solve[r1 (α1 - β1) + r2 (α2 - β2) == 0 && 2 r1 β1 + r2 (α2 + β2) == α3 + β3 &&
     (r1 β1 + r2 β2 - α3) (r1 β1 + r2 β2 - β3) == 0 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
If[s ≠ {}, Print["x)      ", s, ",     ", (Q1 - β1 mI) (Q2 - β2 mI)/(α2 - β2) == Q1 - β1 mI]];
s = Quiet[Solve[r1 (α1 + β1) + 2 r2 α2 == α3 + β3 &&
     (r1 β1 + r2 α2 - α3) (r1 β1 + r2 α2 - β3) == 0 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
If[s ≠ {} && α2 ≠ 0, Print["xi)    ", s, ",     ", Q2 == α2 mI]];
s = Quiet[Solve[r1 (α1 - β1) + r2 (α2 - β2) == 0 && r1 (α1 + β1) + 2 r2 β2 == α3 + β3 &&
     (r1 β1 + r2 β2 - α3) (r1 β1 + r2 β2 - β3) == 0 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
If[s ≠ {}, Print["xii)   ", s, ",     ", (Q1 - β1 mI)/(α1 - β1) (Q2 - β2 mI) == Q2 - β2 mI]];
s = Quiet[Solve[2 r1 α1 + r2 (α2 + β2) == α3 + β3 &&
     (r1 α1 + r2 β2 - α3) (r1 α1 + r2 β2 - β3) == 0 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
If[s ≠ {} && α1 ≠ 0, Print["xiii) ", s, ",     ", Q1 == α1 mI]];
s =
 Quiet[Solve[r1 (α1 - β1) == r2 (α2 - β2) && ((r1 β1 + r2 β2 - α3) (r1 β1 + r2 β2 - β3))/((α1 - β1) (α2 - β2)) ==
     2 r1 r2 && r1 (3 α1 - β1) + 2 r2 β2 == α3 + β3 && r1 ≠ 0 && r2 ≠ 0, {r1, r2}]];
If[s ≠ {}, Print["xiv)   ", s, ",     ", (Q1 - β1 mI)/(α1 - β1) + (Q2 - β2 mI)/(α2 - β2) ==
    (Q1 - β1 mI)/(α1 - β1) (Q2 - β2 mI)/(α2 - β2) + mI]];

)

Do[
  Print[Style[e[[1]], 18, Bold]]
   Do[
    Print[Style["***********{α1,β1,α1,β2,α3,β3}=", 16, Bold],
      Style[x, 16, Bold], Style["**********", 16, Bold]]
     SonuclariGoster[x];
    Print[];
    ,
    {x, e[[2]]}
   ]
  ,
  {e, {
    {"İki idempotent matrisin doğrusal bileşimlerinin idempotentliği",
```

```
{{1, 0, 1, 0, 1, 0},
  {1, 0, 0, 1, 1, 0}, {0, 1, 1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 1, 1, 0}}},
{"İki idempotent matrisin doğrusal bileşimlerinin involutifliği",
 {{1, 0, 1, 0, 1, -1}, {1, 0, 0, 1, 1, -1},
  {0, 1, 1, 0, 1, -1}, {0, 1, 0, 1, 1, -1}}},
{"İdempotent ve involutif matrislerin doğrusal
   bileşimlerinin idempotentliği",
 {{1, 0, 1, -1, 1, 0}, {1, 0, -1, 1, 1, 0}, {0, 1, 1, -1, 1, 0},
  {0, 1, -1, 1, 1, 0}}},
{"İdempotent ve involutif matrislerin doğrusal
   bileşimlerinin involutifliği",
 {{1, 0, 1, -1, 1, -1}, {1, 0, -1, 1, 1, -1}, {0, 1, 1, -1, 1, -1},
  {0, 1, -1, 1, 1, -1}}},
{"İki involutif matrisin doğrusal bileşimlerinin idempotentliği",
 {{1, -1, 1, -1, 1, 0}, {1, -1, -1, 1, 1, 0},
  {-1, 1, 1, -1, 1, 0}, {-1, 1, -1, 1, 1, 0}}},
{"İki involutif matrisin doğrusal bileşimlerinin involutifliği",
 {{1, -1, 1, -1, 1, -1}, {1, -1, -1, 1, 1, -1},
  {-1, 1, 1, -1, 1, -1}, {-1, 1, -1, 1, 1, -1}}}
   }
  }
 ](*End Do*);
```

İki idempotent matrisin
doğrusal bileşimlerinin idempotentliği

**********$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}$={1, 0, 1, 0, 1, 0}**********

vi) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to 1\}\}$, $Q_1 Q_2 == 0$

vii) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to 1\}\}$, $Q_1 + Q_2 == mI$

viii) $\{\{r_2\to 1-r_1\},\ \{r_2\to -r_1\}\}$, $Q_1 == Q_2$

x) $\{\{r_1\to -1,\ r_2\to 1\}\}$, $Q_1 Q_2 == Q_1$

xi) $\{\{r_1\to -1,\ r_2\to 1\}\}$, $Q_2 == mI$

xii) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to -1\}\}$, $Q_1 Q_2 == Q_2$

xiii) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to -1\}\}$, $Q_1 == mI$

**********$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}$={1, 0, 0, 1, 1, 0}**********

iv) $\{\{r_1\to -1,\ r_2\to 1\}\}$, $Q_2 == mI$

vi) $\{\{r_1\to -1,\ r_2\to 1\}\}$, $Q_1\,(-mI + Q_2) == 0$

vii) $\{\{r_2\to 1-r_1\},\ \{r_2\to -r_1\}\}$, $mI + Q_1 - Q_2 == mI$

viii) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to 1\}\}$, $Q_1 == mI - Q_2$

x) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to 1\}\}$, $Q_1\,(mI - Q_2) == Q_1$

xiii) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to -1\}\}$, $Q_1 == mI$

xiv) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to -1\}\}$, $mI + Q_1 - Q_2 == mI + Q_1\,(mI - Q_2)$

**********$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}$={0, 1, 1, 0, 1, 0}**********

ii) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to -1\}\},\quad Q_1 == mI$

vi) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to -1\}\},\quad (-mI+Q_1)\ Q_2 == 0$

vii) $\{\{r_2\to 1-r_1\},\ \{r_2\to -r_1\}\},\quad mI-Q_1+Q_2 == mI$

viii) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to 1\}\},\quad mI-Q_1 == Q_2$

xi) $\{\{r_1\to -1,\ r_2\to 1\}\},\quad Q_2 == mI$

xii) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to 1\}\},\quad (mI-Q_1)\ Q_2 == Q_2$

xiv) $\{\{r_1\to -1,\ r_2\to 1\}\},\quad mI-Q_1+Q_2 == mI+(mI-Q_1)\ Q_2$

**********$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}$={0, 1, 0, 1, 1, 0}**********

ii) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to -1\}\},\quad Q_1 == mI$

iv) $\{\{r_1\to -1,\ r_2\to 1\}\},\quad Q_2 == mI$

vii) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to 1\}\},\quad 2\ mI-Q_1-Q_2 == mI$

viii) $\{\{r_2\to 1-r_1\},\ \{r_2\to -r_1\}\},\quad mI-Q_1 == mI-Q_2$

x) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to -1\}\},\quad (-mI+Q_1)\ (mI-Q_2) == -mI+Q_1$

xii) $\{\{r_1\to -1,\ r_2\to 1\}\},\quad (mI-Q_1)\ (-mI+Q_2) == -mI+Q_2$

xiv) $\{\{r_1\to 1,\ r_2\to 1\}\},\quad 2\ mI-Q_1-Q_2 == mI+(mI-Q_1)\ (mI-Q_2)$

İki idempotent matrisin doğrusal bileşimlerinin involutifliği

**********$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}$={1, 0, 1, 0, 1, -1}**********

vii)
$\{\{r_1\to -1,\ r_2\to -1\},\ \{r_1\to -1,\ r_2\to 1\},\ \{r_1\to 1,\ r_2\to -1\},\ \{r_1\to 1,\ r_2\to 1\}\},\quad Q_1+Q_2 == mI$

xi) $\{\{r_1\to -2,\ r_2\to 1\},\ \{r_1\to 2,\ r_2\to -1\}\},\quad Q_2 == mI$

xiii) $\{\{r_1\to -1,\ r_2\to 2\},\ \{r_1\to 1,\ r_2\to -2\}\},\quad Q_1 == mI$

**********$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}$={1, 0, 0, 1, 1, -1}**********

iv) $\{\{r_1\to -2,\ r_2\to 1\},\ \{r_1\to 2,\ r_2\to -1\}\},\quad Q_2 == mI$

viii)
$\{\{r_1\to -1,\ r_2\to -1\},\ \{r_1\to -1,\ r_2\to 1\},\ \{r_1\to 1,\ r_2\to -1\},\ \{r_1\to 1,\ r_2\to 1\}\},\quad Q_1 == mI-Q_2$

xiii) $\{\{r_1\to -1,\ r_2\to 2\},\ \{r_1\to 1,\ r_2\to -2\}\},\quad Q_1 == mI$

**********$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}$={0, 1, 1, 0, 1, -1}**********

ii) $\{\{r_1\to -1,\ r_2\to 2\},\ \{r_1\to 1,\ r_2\to -2\}\},\quad Q_1 == mI$

viii)
$\{\{r_1\to -1,\ r_2\to -1\},\ \{r_1\to -1,\ r_2\to 1\},\ \{r_1\to 1,\ r_2\to -1\},\ \{r_1\to 1,\ r_2\to 1\}\},\quad mI-Q_1 == Q_2$

xi) $\{\{r_1\to -2,\ r_2\to 1\},\ \{r_1\to 2,\ r_2\to -1\}\},\quad Q_2 == mI$

**********$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}$={0, 1, 0, 1, 1, -1}**********

ii) $\{\{r_1 \to -1, r_2 \to 2\}, \{r_1 \to 1, r_2 \to -2\}\}$, $Q_1 == mI$

iv) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $Q_2 == mI$

vii) $\{\{r_1 \to -1, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to -1, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 1, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 1, r_2 \to 1\}\}$
, $2\,mI - Q_1 - Q_2 == mI$

İdempotent ve involutif matrislerin doğrusal bileşimlerinin idempotentliği

************$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}$=\{1, 0, 1, -1, 1, 0\}************

iv) $\{\{r_1 \to -1, r_2 \to -1\}\}$, $Q_2 == -mI$

vii) $\{\{r_1 \to 1, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $Q_1 + \frac{1}{2}(mI + Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_1 \to 1, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $Q_1 == \frac{1}{2}(mI + Q_2)$

xi) $\{\{r_1 \to -1, r_2 \to 1\}\}$, $Q_2 == mI$

xiii) $\left\{\left\{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to -\frac{1}{2}\right\}, \left\{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}$, $Q_1 == mI$

************$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}$=\{1, 0, -1, 1, 1, 0\}************

iv) $\{\{r_1 \to -1, r_2 \to 1\}\}$, $Q_2 == mI$

vii) $\{\{r_1 \to 1, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $Q_1 + \frac{1}{2}(mI - Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_1 \to 1, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $Q_1 == \frac{1}{2}(mI - Q_2)$

xi) $\{\{r_1 \to -1, r_2 \to -1\}\}$, $Q_2 == -mI$

xiii) $\left\{\left\{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to -\frac{1}{2}\right\}, \left\{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}$, $Q_1 == mI$

************$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}$=\{0, 1, 1, -1, 1, 0\}************

ii) $\left\{\left\{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to -\frac{1}{2}\right\}, \left\{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}$, $Q_1 == mI$

iv) $\{\{r_1 \to -1, r_2 \to -1\}\}$, $Q_2 == -mI$

vii) $\{\{r_1 \to 1, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $mI - Q_1 + \frac{1}{2}(mI + Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_1 \to 1, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $mI - Q_1 == \frac{1}{2}(mI + Q_2)$

xi) $\{\{r_1 \to -1, r_2 \to 1\}\}$, $Q_2 == mI$

************$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}$=\{0, 1, -1, 1, 1, 0\}************

ii) $\left\{\left\{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to -\frac{1}{2}\right\}, \left\{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}$, $Q_1 == mI$

iv) $\{\{r_1 \to -1, r_2 \to 1\}\}$, $Q_2 == mI$

vii) $\{\{r_1 \to 1, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $mI - Q_1 + \frac{1}{2}(mI - Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_1 \to 1, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $\quad mI - Q_1 == \frac{1}{2}(mI - Q_2)$

xi) $\{\{r_1 \to -1, r_2 \to -1\}\}$, $\quad Q_2 == -mI$

İdempotent ve involutif matrislerin doğrusal bileşimlerinin involutifliği

************$\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_3\} = \{1, 0, 1, -1, 1, -1\}$************

iv) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $\quad Q_2 == -mI$

vi) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $\quad Q_1 (mI + Q_2) == 0$

vii) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $\quad Q_1 + \frac{1}{2}(mI + Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $\quad Q_1 == \frac{1}{2}(mI + Q_2)$

x) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $\quad \frac{1}{2} Q_1 (mI + Q_2) == Q_1$

xi) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $\quad Q_2 == mI$

************$\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_3\} = \{1, 0, -1, 1, 1, -1\}$************

iv) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $\quad Q_2 == mI$

vi) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $\quad Q_1 (-mI + Q_2) == 0$

vii) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $\quad Q_1 + \frac{1}{2}(mI - Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $\quad Q_1 == \frac{1}{2}(mI - Q_2)$

x) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $\quad \frac{1}{2} Q_1 (mI - Q_2) == Q_1$

xi) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $\quad Q_2 == -mI$

************$\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_3\} = \{0, 1, 1, -1, 1, -1\}$************

iv) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $\quad Q_2 == -mI$

vii) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $\quad mI - Q_1 + \frac{1}{2}(mI + Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $\quad mI - Q_1 == \frac{1}{2}(mI + Q_2)$

xi) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $\quad Q_2 == mI$

xii) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $\quad (mI - Q_1)(mI + Q_2) == mI + Q_2$

xiv) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $\quad mI - Q_1 + \frac{1}{2}(mI + Q_2) == mI + \frac{1}{2}(mI - Q_1)(mI + Q_2)$

************$\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_3, \beta_3\} = \{0, 1, -1, 1, 1, -1\}$************

iv) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $\quad Q_2 == mI$

vii) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $mI - Q_1 + \frac{1}{2}(mI - Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $mI - Q_1 == \frac{1}{2}(mI - Q_2)$

xi) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $Q_2 == -mI$

xii) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to 1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to -1\}\}$, $(mI - Q_1)(-mI + Q_2) == -mI + Q_2$

xiv) $\{\{r_1 \to -2, r_2 \to -1\}, \{r_1 \to 2, r_2 \to 1\}\}$, $mI - Q_1 + \frac{1}{2}(mI - Q_2) == mI + \frac{1}{2}(mI - Q_1)(mI - Q_2)$

İki involutif matrisin doğrusal bileşimlerinin idempotentliği

$**********\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}=\{1, -1, 1, -1, 1, 0\}**********$

ii) $\{\{r_1 \to -\frac{1}{2}, r_2 \to -\frac{1}{2}\}, \{r_1 \to -\frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\}\}$, $Q_1 == -mI$

iv) $\{\{r_1 \to -\frac{1}{2}, r_2 \to -\frac{1}{2}\}, \{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to -\frac{1}{2}\}\}$, $Q_2 == -mI$

vi) $\{\{r_1 \to -\frac{1}{2}, r_2 \to -\frac{1}{2}\}\}$, $(mI + Q_1)(mI + Q_2) == 0$

vii) $\{\{r_2 \to r_1\}\}$, $\frac{1}{2}(mI + Q_1) + \frac{1}{2}(mI + Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_2 \to -r_1\}\}$, $\frac{1}{2}(mI + Q_1) == \frac{1}{2}(mI + Q_2)$

x) $\{\{r_1 \to -\frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\}\}$, $\frac{1}{2}(mI + Q_1)(mI + Q_2) == mI + Q_1$

xi) $\{\{r_1 \to -\frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\}, \{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\}\}$, $Q_2 == mI$

xii) $\{\{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to -\frac{1}{2}\}\}$, $\frac{1}{2}(mI + Q_1)(mI + Q_2) == mI + Q_2$

xiii) $\{\{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to -\frac{1}{2}\}, \{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\}\}$, $Q_1 == mI$

xiv) $\{\{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\}\}$, $\frac{1}{2}(mI + Q_1) + \frac{1}{2}(mI + Q_2) == mI + \frac{1}{4}(mI + Q_1)(mI + Q_2)$

$**********\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}=\{1, -1, -1, 1, 1, 0\}**********$

ii) $\{\{r_1 \to -\frac{1}{2}, r_2 \to -\frac{1}{2}\}, \{r_1 \to -\frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\}\}$, $Q_1 == -mI$

iv) $\{\{r_1 \to -\frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\}, \{r_1 \to \frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\}\}$, $Q_2 == mI$

vi) $\{\{r_1 \to -\frac{1}{2}, r_2 \to \frac{1}{2}\}\}$, $(mI + Q_1)(-mI + Q_2) == 0$

vii) $\{\{r_2 \to -r_1\}\}$, $\frac{1}{2}(mI + Q_1) + \frac{1}{2}(mI - Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_2 \to r_1\}\}$, $\frac{1}{2}(mI + Q_1) == \frac{1}{2}(mI - Q_2)$

x) $\left\{\left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad \frac{1}{2}\ (mI + Q_1)\ (mI - Q_2)\ == mI + Q_1$

xi) $\left\{\left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\},\ \left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad Q_2 == -mI$

xii) $\left\{\left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad \frac{1}{2}\ (mI + Q_1)\ (-mI + Q_2)\ == -mI + Q_2$

xiii) $\left\{\left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\},\ \left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad Q_1 == mI$

xiv) $\left\{\left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad \frac{1}{2}\ (mI + Q_1) + \frac{1}{2}\ (mI - Q_2)\ == mI + \frac{1}{4}\ (mI + Q_1)\ (mI - Q_2)$

************{α_1,β_1,α_1,β_2,α_3,β_3}={-1, 1, 1, -1, 1, 0}************

ii) $\left\{\left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\},\ \left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad Q_1 == mI$

iv) $\left\{\left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\},\ \left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad Q_2 == -mI$

vi) $\left\{\left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad (-mI + Q_1)\ (mI + Q_2)\ == 0$

vii) $\{\{r_2 \to -r_1\}\}, \quad \frac{1}{2}\ (mI - Q_1) + \frac{1}{2}\ (mI + Q_2)\ == mI$

viii) $\{\{r_2 \to r_1\}\}, \quad \frac{1}{2}\ (mI - Q_1)\ == \frac{1}{2}\ (mI + Q_2)$

x) $\left\{\left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad \frac{1}{2}\ (-mI + Q_1)\ (mI + Q_2)\ == -mI + Q_1$

xi) $\left\{\left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\},\ \left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad Q_2 == mI$

xii) $\left\{\left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad \frac{1}{2}\ (mI - Q_1)\ (mI + Q_2)\ == mI + Q_2$

xiii) $\left\{\left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\},\ \left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad Q_1 == -mI$

xiv) $\left\{\left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad \frac{1}{2}\ (mI - Q_1) + \frac{1}{2}\ (mI + Q_2)\ == mI + \frac{1}{4}\ (mI - Q_1)\ (mI + Q_2)$

************{α_1,β_1,α_1,β_2,α_3,β_3}={-1, 1, -1, 1, 1, 0}************

ii) $\left\{\left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\},\ \left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad Q_1 == mI$

iv) $\left\{\left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\},\ \left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad Q_2 == mI$

vi) $\left\{\left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad (-mI + Q_1)\ (-mI + Q_2)\ == 0$

vii) $\{\{r_2 \to r_1\}\}, \quad \frac{1}{2}\ (mI - Q_1) + \frac{1}{2}\ (mI - Q_2)\ == mI$

viii) $\{\{r_2 \to -r_1\}\}, \quad \frac{1}{2}\ (mI - Q_1)\ == \frac{1}{2}\ (mI - Q_2)$

x) $\left\{\left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}, \quad \frac{1}{2}\ (-mI + Q_1)\ (mI - Q_2)\ == -mI + Q_1$

xi) $\left\{\left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\},\ \left\{r_1 \to \frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}$, $Q_2 == -mI$

xii) $\left\{\left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}$, $\frac{1}{2}\,(mI - Q_1)\,(-mI + Q_2) == -mI + Q_2$

xiii) $\left\{\left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\},\ \left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to \frac{1}{2}\right\}\right\}$, $Q_1 == -mI$

xiv) $\left\{\left\{r_1 \to -\frac{1}{2},\ r_2 \to -\frac{1}{2}\right\}\right\}$, $\frac{1}{2}\,(mI - Q_1) + \frac{1}{2}\,(mI - Q_2) == mI + \frac{1}{4}\,(mI - Q_1)\,(mI - Q_2)$

İki involutif matrisin doğrusal bileşimlerinin involutifliği

************$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}=\{1, -1, 1, -1, 1, -1\}$************

vii) $\{\{r_2 \to -1 + r_1\},\ \{r_2 \to 1 + r_1\}\}$, $\frac{1}{2}\,(mI + Q_1) + \frac{1}{2}\,(mI + Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_2 \to -1 - r_1\},\ \{r_2 \to 1 - r_1\}\}$, $\frac{1}{2}\,(mI + Q_1) == \frac{1}{2}\,(mI + Q_2)$

************$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}=\{1, -1, -1, 1, 1, -1\}$************

vii) $\{\{r_2 \to -1 - r_1\},\ \{r_2 \to 1 - r_1\}\}$, $\frac{1}{2}\,(mI + Q_1) + \frac{1}{2}\,(mI - Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_2 \to -1 + r_1\},\ \{r_2 \to 1 + r_1\}\}$, $\frac{1}{2}\,(mI + Q_1) == \frac{1}{2}\,(mI - Q_2)$

************$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}=\{-1, 1, 1, -1, 1, -1\}$************

vii) $\{\{r_2 \to -1 - r_1\},\ \{r_2 \to 1 - r_1\}\}$, $\frac{1}{2}\,(mI - Q_1) + \frac{1}{2}\,(mI + Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_2 \to -1 + r_1\},\ \{r_2 \to 1 + r_1\}\}$, $\frac{1}{2}\,(mI - Q_1) == \frac{1}{2}\,(mI + Q_2)$

************$\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\}=\{-1, 1, -1, 1, 1, -1\}$************

vii) $\{\{r_2 \to -1 + r_1\},\ \{r_2 \to 1 + r_1\}\}$, $\frac{1}{2}\,(mI - Q_1) + \frac{1}{2}\,(mI - Q_2) == mI$

viii) $\{\{r_2 \to -1 - r_1\},\ \{r_2 \to 1 - r_1\}\}$, $\frac{1}{2}\,(mI - Q_1) == \frac{1}{2}\,(mI - Q_2)$

EK B: Teorem 4.3'ün idempotent ve involutif matrislerle ilgili sonuçlarını veren Mathematica'da yazılan programın kodları ve çıktıları:

```
(* Teorem 4.3'ten elde edilen idempotent
 ve/veya involutif matrislerle ilgili sonuçlar *)
sM[ω_] := (
  If[ω == 1, Return["I"]];
  If[ω == 0, Return["0"]];
  If[ω < 0, Return[StringForm["(``)I", ω]]];
  If[ω > 0 && ω ≠ 1, Return[StringForm["``I", ω]]];
 )
mP[ω_] := (
  If[ω < 0, Return[StringForm["(``)", ω]], Return[ω]];
 )
SonuclariGoster[Z_] := (

   {α1, β1, α2, β2, α3, β3} = Z;

   str = "(α1, β1) =(" <> ToString[α1] <> "," <> ToString[β1] <>
     "), (α2, β2) =(" <> ToString[α2] <> "," <> ToString[β2] <>
     "), (α3, β3) =(" <> ToString[α3] <> "," <> ToString[β3] <> ") ";
   Print["********** ", Style[str, 12, Bold], "**********"];

   Do[
    {x, y} = liste;
    If[{α1, β1} ≠ {α2, β2},
     s = Solve[α1 β2 ≠ α2 β1 && α2 y ≠ β2 x &&
         α1 y ≠ β1 x && r1 == (-α2 y + β2 x)/(α1 β2 - α2 β1) && r2 == (α1 y - β1 x)/(α1 β2 - α2 β1), {r1, r2}];
     If[s ≠ {}, a1 = r1 /. s[[1]]; a2 = r2 /. s[[1]];
      Print["a.i) ", mP[a1], "(", sM[α1], "⊕", sM[β1], ")+",
       mP[a2], "(", sM[α2], "⊕", sM[β2], ")=", sM[x], "⊕", sM[y]]];
    ](*End If*)
    , {liste, {{α3, α3}, {α3, β3}, {β3, α3}, {β3, β3}}}
   ]; (*End Do*)

   Do[
    {x, y} = liste;

    s = If[{α1, β1} ≠ {α2, β2} && α1 β2 == α2 β1 && α1 y == β1 x && α2 ≠ 0 && α1 ≠ 0,
      Print["a.ii) (", t, ")(", sM[α1], "⊕", sM[β1], ")+(", (x - α1 t)/α2,
       ")(", sM[α2], "⊕", sM[β2], ")=", sM[x], "⊕", sM[y]]]
    , {liste, {{α3, α3}, {α3, β3}, {β3, α3}, {β3, β3}}}
   ]; (*End Do*)
```

```
Do[
 {x, y} = liste;
 If[{α1, β1} ≠ {β2, α2},
  s = Solve[α1 α2 ≠ β1 β2 && α2 x ≠ β2 y &&
     α1 y ≠ β1 x && r1 == (α2 x - β2 y)/(α1 α2 - β1 β2) && r2 == (α1 y - β1 x)/(α1 α2 - β1 β2), {r1, r2}];
  If[s ≠ {}, a1 = r1 /. s[[1]]; a2 = r2 /. s[[1]];
   Print["b.i) ", mP[a1], "(", sM[α1], "⊕", sM[β1], ")+",
    mP[a2], "(", sM[β2], "⊕", sM[α2], ")=", sM[x], "⊕", sM[y]]];
 ](*End If*)
 , {liste, {{α3, α3}, {α3, β3}, {β3, α3}, {β3, β3}}}
]; (*End Do*)

Do[
 {x, y} = liste;
 s = If[{α1, β1} ≠ {β2, α2} && α1 α2 == β1 β2 && α1 y == β1 x && β2 ≠ 0 && α1 ≠ 0,
   Print["b.ii) (", t, ")(", sM[α1], "⊕", sM[β1], ")+(", (x - α1 t)/β2,
    ")(", sM[β2], "⊕", sM[α2], ")=", sM[x], "⊕", sM[y]]]
 , {liste, {{α3, α3}, {α3, β3}, {β3, α3}, {β3, β3}}}
]; (*End Do*)
Do[
 {x, y} = liste;
 If[{α1, β1, β1} ≠ {α2, α2, β2},
  s = Solve[(α1 α2 + β1 β2 - 2 α2 β1) x + (α2 β1 - α1 β2) y == 0 && x ≠ y &&
     α1 ≠ β1 && α2 ≠ β2 && r1 == (x - y)/(α1 - β1) && r2 == (y - x)/(α2 - β2), {r1, r2}];
  If[s ≠ {}, a1 = r1 /. s[[1]]; a2 = r2 /. s[[1]]; Print["c) ", mP[a1],
    "(", sM[α1], "⊕", sM[β1], "⊕", sM[β1], ")+", mP[a2], "(", sM[α2],
    "⊕", sM[α2], "⊕", sM[β2], ")=", sM[x], "⊕", sM[y], "⊕", sM[x]]];
 ](*End If*)
 , {liste, {{α3, α3}, {α3, β3}, {β3, α3}, {β3, β3}}}
]; (*End Do*)
Do[
 {x, y} = liste;
 If[{α1, β1, β1} ≠ {β2, α2, β2},
  s = Solve[(α1 β2 + β1 α2 - 2 β2 β1) x + (β2 β1 - α1 α2) y == 0 && x ≠ y &&
     α1 ≠ β1 && α2 ≠ β2 && r1 == (x - y)/(α1 - β1) && r2 == (x - y)/(α2 - β2), {r1, r2}];
```

```
    If[s ≠ {}, a1 = r1 /. s[[1]]; a2 = r2 /. s[[1]]; Print["d)  ", mP[a1],
      "(", sM[α1], "⊕", sM[β1], "⊕", sM[β1], ")+", mP[a2], "(", sM[β2],
      "⊕", sM[α2], "⊕", sM[β2], ")=", sM[x], "⊕", sM[x], "⊕", sM[y]]];
   ](*End If*)
   , {liste, {{α3, α3}, {α3, β3}, {β3, α3}, {β3, β3}}}
  ]; (*End Do*)
  Do[
   {x, y} = liste;
   If[{α1, α1, β1} ≠ {α2, β2, α2},
    s = Solve[(α1 β2 + β1 α2 - 2 α2 α1) x + (α2 α1 - β1 β2) y == 0 && x ≠ y &&
       α1 ≠ β1 && α2 ≠ β2 && r1 == (y - x)/(α1 - β1) && r2 == (y - x)/(α2 - β2), {r1, r2}];
    If[s ≠ {}, a1 = r1 /. s[[1]]; a2 = r2 /. s[[1]]; Print["e)  ", mP[a1],
      "(", sM[α1], "⊕", sM[α1], "⊕", sM[β1], ")+", mP[a2], "(", sM[α2],
      "⊕", sM[β2], "⊕", sM[α2], ")=", sM[y], "⊕", sM[x], "⊕", sM[x]]];
   ](*End If*)
   , {liste, {{α3, α3}, {α3, β3}, {β3, α3}, {β3, β3}}}
  ]; (*End Do*)
  Do[
   {x, y} = liste;
   If[{α1, α1, β1} ≠ {α2, β2, β2},
    s = Solve[(α1 α2 + β1 β2 - 2 β2 α1) x + (β2 α1 - β1 α2) y == 0 && x ≠ y &&
       α1 ≠ β1 && α2 ≠ β2 && r1 == (y - x)/(α1 - β1) && r2 == (x - y)/(α2 - β2), {r1, r2}];
    If[s ≠ {}, a1 = r1 /. s[[1]]; a2 = r2 /. s[[1]]; Print["f)  ", mP[a1],
      "(", sM[α1], "⊕", sM[α1], "⊕", sM[β1], ")+", mP[a2], "(", sM[α2],
      "⊕", sM[β2], "⊕", sM[β2], ")=", sM[x], "⊕", sM[y], "⊕", sM[x]]];
   ](*End If*)
   , {liste, {{α3, α3}, {α3, β3}, {β3, α3}, {β3, β3}}}
  ];(*End Do*)


 )(*DurumlarıGoster Son*);

Do[
  Print[Style[e[[1]], 14, Bold]]
   Do[

    SonuclariGoster[x];
    ,
```

```
     {x, e[[2]]}
    ]
   ,
   {e, {
     {"İki idempotent matrisin idempotentliği",
      {{1, 0, 1, 0, 1, 0},
       {1, 0, 0, 1, 1, 0}, {0, 1, 1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 1, 1, 0}}},
     {"İki idempotent matrisin involutifliği",
      {{1, 0, 1, 0, 1, -1}, {1, 0, 0, 1, 1, -1},
       {0, 1, 1, 0, 1, -1}, {0, 1, 0, 1, 1, -1}}},
     {"Biri idempotent diğeri involutif matrisin idempotentliği",
      {{1, 0, 1, -1, 1, 0}, {1, 0, -1, 1, 1, 0},
       {0, 1, 1, -1, 1, 0}, {0, 1, -1, 1, 1, 0}}},
     {"Biri idempotent diğeri involutif matrisin involutifliği",
      {{1, 0, 1, -1, 1, -1}, {1, 0, -1, 1, 1, -1},
       {0, 1, 1, -1, 1, -1}, {0, 1, -1, 1, 1, -1}}},
     {"İki involutif matrisin idempotentliği",
      {{1, -1, 1, -1, 1, 0}, {1, -1, -1, 1, 1, 0},
       {-1, 1, 1, -1, 1, 0}, {-1, 1, -1, 1, 1, 0}}},
     {"İki involutif matrisin involutifliği",
      {{1, -1, 1, -1, 1, -1}, {1, -1, -1, 1, 1, -1},
       {-1, 1, 1, -1, 1, -1}, {-1, 1, -1, 1, 1, -1}}}
    }
   }
  ](*End Do*);
```

İki idempotent matrisin idempotentliği

********** $(\alpha_1, \beta_1)=(1,0)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(1,0)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(1,0)$ **********

b.i) 1(I⊕0)+1(0⊕I)=I⊕I

c) (−1)(I⊕0⊕0)+1(I⊕I⊕0)=0⊕I⊕0

d) 1(I⊕0⊕0)+1(0⊕I⊕0)=I⊕I⊕0

f) 1(I⊕I⊕0)+(−1)(I⊕0⊕0)=0⊕I⊕0

********** $(\alpha_1, \beta_1)=(1,0)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(0,1)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(1,0)$ **********

a.i) 1(I⊕0)+1(0⊕I)=I⊕I

c) 1(I⊕0⊕0)+1(0⊕0⊕I)=I⊕0⊕I

d) (−1)(I⊕0⊕0)+1(I⊕0⊕I)=0⊕0⊕I

e) 1(I⊕I⊕0)+(−1)(0⊕I⊕0)=I⊕0⊕0

********** $(\alpha_1, \beta_1)=(0,1)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(1,0)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(1,0)$ **********

a.i) 1(0⊕I)+1(I⊕0)=I⊕I

d) 1(0⊕I⊕I)+(−1)(0⊕I⊕0)=0⊕0⊕I

e) (−1)(0⊕0⊕I)+1(I⊕0⊕I)=I⊕0⊕0

f) 1(0⊕0⊕I)+1(I⊕0⊕0)=I⊕0⊕I

********** $(\alpha_1, \beta_1)=(0,1)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(0,1)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(1,0)$ **********

b.i) 1(0⊕I)+1(I⊕0)=I⊕I

c) 1(0⊕I⊕I)+(-1)(0⊕0⊕I)=0⊕I⊕0

e) 1(0⊕0⊕I)+1(0⊕I⊕0)=0⊕I⊕I

f) (-1)(0⊕0⊕I)+1(0⊕I⊕I)=0⊕I⊕0

İki idempotent matrisin involutifliği

********** $(\alpha_1,\beta_1)=(1,0)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(1,0)$, $(\alpha_3,\beta_3)=(1,-1)$ **********

b.i) 1(I⊕0)+1(0⊕I)=I⊕I

b.i) 1(I⊕0)+(-1)(0⊕I)=I⊕(-1)I

b.i) (-1)(I⊕0)+1(0⊕I)=(-1)I⊕I

b.i) (-1)(I⊕0)+(-1)(0⊕I)=(-1)I⊕(-1)I

********** $(\alpha_1,\beta_1)=(1,0)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(0,1)$, $(\alpha_3,\beta_3)=(1,-1)$ **********

a.i) 1(I⊕0)+1(0⊕I)=I⊕I

a.i) 1(I⊕0)+(-1)(0⊕I)=I⊕(-1)I

a.i) (-1)(I⊕0)+1(0⊕I)=(-1)I⊕I

a.i) (-1)(I⊕0)+(-1)(0⊕I)=(-1)I⊕(-1)I

********** $(\alpha_1,\beta_1)=(0,1)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(1,0)$, $(\alpha_3,\beta_3)=(1,-1)$ **********

a.i) 1(0⊕I)+1(I⊕0)=I⊕I

a.i) (-1)(0⊕I)+1(I⊕0)=I⊕(-1)I

a.i) 1(0⊕I)+(-1)(I⊕0)=(-1)I⊕I

a.i) (-1)(0⊕I)+(-1)(I⊕0)=(-1)I⊕(-1)I

********** $(\alpha_1,\beta_1)=(0,1)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(0,1)$, $(\alpha_3,\beta_3)=(1,-1)$ **********

b.i) 1(0⊕I)+1(I⊕0)=I⊕I

b.i) (-1)(0⊕I)+1(I⊕0)=I⊕(-1)I

b.i) 1(0⊕I)+(-1)(I⊕0)=(-1)I⊕I

b.i) (-1)(0⊕I)+(-1)(I⊕0)=(-1)I⊕(-1)I

Biri idempotent diğeri involutif matrisin idempotentliği

********** $(\alpha_1,\beta_1)=(1,0)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(1,-1)$, $(\alpha_3,\beta_3)=(1,0)$ **********

a.i) 2(I⊕0)+(-1)(I⊕(-1)I)=I⊕I

a.i) 1(I⊕0)+(-1)(I⊕(-1)I)=0⊕I

b.i) 2(I⊕0)+1((-1)I⊕I)=I⊕I

b.i) 1(I⊕0)+1((-1)I⊕I)=0⊕I

********** $(\alpha_1,\beta_1)=(1,0)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(-1,1)$, $(\alpha_3,\beta_3)=(1,0)$ **********

a.i) 2(I⊕0)+1((-1)I⊕I)=I⊕I

a.i) 1(I⊕0)+1((-1)I⊕I)=0⊕I

b.i) 2(I⊕0)+(-1)(I⊕(-1)I)=I⊕I

b.i) 1(I⊕0)+(-1)(I⊕(-1)I)=0⊕I

********** $(\alpha_1,\beta_1)=(0,1)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(1,-1)$, $(\alpha_3,\beta_3)=(1,0)$ **********

a.i) 2(0⊕I)+1(I⊕(-1)I)=I⊕I

a.i) 1(0⊕I)+1(I⊕(-1)I)=I⊕0

b.i) 2(0⊕I)+(-1)((-1)I⊕I)=I⊕I

b.i) 1(0⊕I)+(-1)((-1)I⊕I)=I⊕0

********** $(\alpha_1, \beta_1)=(0,1)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(-1,1)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(1,0)$ **********

a.i) 2(0⊕I)+(-1)((-1)I⊕I)=I⊕I

a.i) 1(0⊕I)+(-1)((-1)I⊕I)=I⊕0

b.i) 2(0⊕I)+1(I⊕(-1)I)=I⊕I

b.i) 1(0⊕I)+1(I⊕(-1)I)=I⊕0

Biri idempotent diğeri involutif matrisin involutifliği

********** $(\alpha_1, \beta_1)=(1,0)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(1,-1)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(1,-1)$ **********

a.i) 2(I⊕0)+(-1)(I⊕(-1)I)=I⊕I

a.i) (-2)(I⊕0)+1(I⊕(-1)I)=(-1)I⊕(-1)I

b.i) 2(I⊕0)+1((-1)I⊕I)=I⊕I

b.i) (-2)(I⊕0)+(-1)((-1)I⊕I)=(-1)I⊕(-1)I

c) 2(I⊕0⊕0)+(-1)(I⊕I⊕(-1)I)=I⊕(-1)I⊕I

c) (-2)(I⊕0⊕0)+1(I⊕I⊕(-1)I)=(-1)I⊕I⊕(-1)I

d) 2(I⊕0⊕0)+1((-1)I⊕I⊕(-1)I)=I⊕I⊕(-1)I

d) (-2)(I⊕0⊕0)+(-1)((-1)I⊕I⊕(-1)I)=(-1)I⊕(-1)I⊕I

********** $(\alpha_1, \beta_1)=(1,0)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(-1,1)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(1,-1)$ **********

a.i) 2(I⊕0)+1((-1)I⊕I)=I⊕I

a.i) (-2)(I⊕0)+(-1)((-1)I⊕I)=(-1)I⊕(-1)I

b.i) 2(I⊕0)+(-1)(I⊕(-1)I)=I⊕I

b.i) (-2)(I⊕0)+1(I⊕(-1)I)=(-1)I⊕(-1)I

c) 2(I⊕0⊕0)+1((-1)I⊕(-1)I⊕I)=I⊕(-1)I⊕I

c) (-2)(I⊕0⊕0)+(-1)((-1)I⊕(-1)I⊕I)=(-1)I⊕I⊕(-1)I

d) 2(I⊕0⊕0)+(-1)(I⊕(-1)I⊕I)=I⊕I⊕(-1)I

d) (-2)(I⊕0⊕0)+1(I⊕(-1)I⊕I)=(-1)I⊕(-1)I⊕I

********** $(\alpha_1, \beta_1)=(0,1)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(1,-1)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(1,-1)$ **********

a.i) 2(0⊕I)+1(I⊕(-1)I)=I⊕I

a.i) (-2)(0⊕I)+(-1)(I⊕(-1)I)=(-1)I⊕(-1)I

b.i) 2(0⊕I)+(-1)((-1)I⊕I)=I⊕I

b.i) (-2)(0⊕I)+1((-1)I⊕I)=(-1)I⊕(-1)I

e) 2(0⊕0⊕I)+(-1)(I⊕(-1)I⊕I)=(-1)I⊕I⊕I

e) (-2)(0⊕0⊕I)+1(I⊕(-1)I⊕I)=I⊕(-1)I⊕(-1)I

f) 2(0⊕0⊕I)+1(I⊕(-1)I⊕(-1)I)=I⊕(-1)I⊕I

f) (-2)(0⊕0⊕I)+(-1)(I⊕(-1)I⊕(-1)I)=(-1)I⊕I⊕(-1)I

********** $(\alpha_1, \beta_1)=(0,1)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(-1,1)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(1,-1)$ **********

a.i) 2(0⊕I)+(-1)((-1)I⊕I)=I⊕I

a.i) (-2)(0⊕I)+1((-1)I⊕I)=(-1)I⊕(-1)I

b.i) 2(0⊕I)+1(I⊕(-1)I)=I⊕I

b.i) $(-2)(0\oplus I)+(-1)(I\oplus(-1)I)=(-1)I\oplus(-1)I$

e) $2(0\oplus 0\oplus I)+1((-1)I\oplus I\oplus(-1)I)=(-1)I\oplus I\oplus I$

e) $(-2)(0\oplus 0\oplus I)+(-1)((-1)I\oplus I\oplus(-1)I)=I\oplus(-1)I\oplus(-1)I$

f) $2(0\oplus 0\oplus I)+(-1)((-1)I\oplus I\oplus I)=I\oplus(-1)I\oplus I$

f) $(-2)(0\oplus 0\oplus I)+1((-1)I\oplus I\oplus I)=(-1)I\oplus I\oplus(-1)I$

İki involutif matrisin idempotentliği

********** $(\alpha_1,\beta_1)=(1,-1)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(1,-1)$, $(\alpha_3,\beta_3)=(1,0)$ **********

b.ii) $(t)(I\oplus(-1)I)+(t)((-1)I\oplus I)=0\oplus 0$

c) $(-\frac{1}{2})(I\oplus(-1)I\oplus(-1)I)+\frac{1}{2}(I\oplus I\oplus(-1)I)=0\oplus I\oplus 0$

d) $(-\frac{1}{2})(I\oplus(-1)I\oplus(-1)I)+(-\frac{1}{2})((-1)I\oplus I\oplus(-1)I)=0\oplus 0\oplus I$

e) $\frac{1}{2}(I\oplus I\oplus(-1)I)+\frac{1}{2}(I\oplus(-1)I\oplus I)=I\oplus 0\oplus 0$

f) $\frac{1}{2}(I\oplus I\oplus(-1)I)+(-\frac{1}{2})(I\oplus(-1)I\oplus(-1)I)=0\oplus I\oplus 0$

********** $(\alpha_1,\beta_1)=(1,-1)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(-1,1)$, $(\alpha_3,\beta_3)=(1,0)$ **********

a.ii) $(t)(I\oplus(-1)I)+(t)((-1)I\oplus I)=0\oplus 0$

c) $(-\frac{1}{2})(I\oplus(-1)I\oplus(-1)I)+(-\frac{1}{2})((-1)I\oplus(-1)I\oplus I)=0\oplus I\oplus 0$

d) $(-\frac{1}{2})(I\oplus(-1)I\oplus(-1)I)+\frac{1}{2}(I\oplus(-1)I\oplus I)=0\oplus 0\oplus I$

e) $\frac{1}{2}(I\oplus I\oplus(-1)I)+(-\frac{1}{2})((-1)I\oplus I\oplus(-1)I)=I\oplus 0\oplus 0$

f) $\frac{1}{2}(I\oplus I\oplus(-1)I)+\frac{1}{2}((-1)I\oplus I\oplus I)=0\oplus I\oplus 0$

********** $(\alpha_1,\beta_1)=(-1,1)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(1,-1)$, $(\alpha_3,\beta_3)=(1,0)$ **********

a.ii) $(t)((-1)I\oplus I)+(t)(I\oplus(-1)I)=0\oplus 0$

c) $\frac{1}{2}((-1)I\oplus I\oplus I)+\frac{1}{2}(I\oplus I\oplus(-1)I)=0\oplus I\oplus 0$

d) $\frac{1}{2}((-1)I\oplus I\oplus I)+(-\frac{1}{2})((-1)I\oplus I\oplus(-1)I)=0\oplus 0\oplus I$

e) $(-\frac{1}{2})((-1)I\oplus(-1)I\oplus I)+\frac{1}{2}(I\oplus(-1)I\oplus I)=I\oplus 0\oplus 0$

f) $(-\frac{1}{2})((-1)I\oplus(-1)I\oplus I)+(-\frac{1}{2})(I\oplus(-1)I\oplus(-1)I)=0\oplus I\oplus 0$

********** $(\alpha_1,\beta_1)=(-1,1)$, $(\alpha_2,\beta_2)=(-1,1)$, $(\alpha_3,\beta_3)=(1,0)$ **********

b.ii) $(t)((-1)I\oplus I)+(t)(I\oplus(-1)I)=0\oplus 0$

c) $\frac{1}{2}((-1)I\oplus I\oplus I)+(-\frac{1}{2})((-1)I\oplus(-1)I\oplus I)=0\oplus I\oplus 0$

d) $\frac{1}{2}((-1)I\oplus I\oplus I)+\frac{1}{2}(I\oplus(-1)I\oplus I)=0\oplus 0\oplus I$

e) $(-\frac{1}{2})((-1)I\oplus(-1)I\oplus I)+(-\frac{1}{2})((-1)I\oplus I\oplus(-1)I)=I\oplus 0\oplus 0$

f) $(-\frac{1}{2})((-1)I\oplus(-1)I\oplus I)+\frac{1}{2}((-1)I\oplus I\oplus I)=0\oplus I\oplus 0$

İki involutif matrisin involutifliği

********** $(\alpha_1, \beta_1)=(1,-1)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(1,-1)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(1,-1)$ **********

b.ii) $(t)(I\oplus(-1)I)+(-1+t)((-1)I\oplus I)=I\oplus(-1)I$

b.ii) $(t)(I\oplus(-1)I)+(1+t)((-1)I\oplus I)=(-1)I\oplus I$

********** $(\alpha_1, \beta_1)=(1,-1)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(-1,1)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(1,-1)$ **********

a.ii) $(t)(I\oplus(-1)I)+(-1+t)((-1)I\oplus I)=I\oplus(-1)I$

a.ii) $(t)(I\oplus(-1)I)+(1+t)((-1)I\oplus I)=(-1)I\oplus I$

********** $(\alpha_1, \beta_1)=(-1,1)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(1,-1)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(1,-1)$ **********

a.ii) $(t)((-1)I\oplus I)+(1+t)(I\oplus(-1)I)=I\oplus(-1)I$

a.ii) $(t)((-1)I\oplus I)+(-1+t)(I\oplus(-1)I)=(-1)I\oplus I$

********** $(\alpha_1, \beta_1)=(-1,1)$, $(\alpha_2, \beta_2)=(-1,1)$, $(\alpha_3, \beta_3)=(1,-1)$ **********

b.ii) $(t)((-1)I\oplus I)+(1+t)(I\oplus(-1)I)=I\oplus(-1)I$

b.ii) $(t)((-1)I\oplus I)+(-1+t)(I\oplus(-1)I)=(-1)I\oplus I$

ÖZGEÇMİŞ

Mahmut Uç, 30 Mayıs 1971 yılında Gaziantep'te doğdu. Lise öğrenimini 1991 yılında Gaziantep Ondokuz Mayıs Lisesi'nde tamamladı. 1996 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Anabilim Dalından Matematik Öğretmeni olarak mezun oldu. 1999 Yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD'da yüksek lisans öğrenimini tamamladı. 1997-2002 yılları arasında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalıştı. 2002-2013 yılları arasında Sakarya Üniversitesi Karasu Meslek Yüksekokulu Bilgisayar Teknolojileri ve Programlama Programı'nda öğretim görevlisi olarak çalıştı. 2013 yılından beri aynı üniversitenin Kaynarca Seyfettin Selim Meslek Yüksekokulu'nda Öğretim Görevlisi olarak çalışmalarını sürdürmektedir. Yabancı dili İngilizcedir.