

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FERMİYONİK FİBONACCİ OSİLATÖRLERİ GAZI
MODELİNİN YÜKSEK SICAKLIKLARDA İSTATİSTİK
MEKANİKSEL ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ**

DOKTORA TEZİ

Emre DİL

Enstitü Anabilim Dalı : FİZİK
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ali Serdar ARIKAN
Ortak Danışman : Prof. Dr. Abdullah ALĞIN

Kasım 2014

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FERMİYONİK FIBONACCİ OSİLATÖRLERİ GAZI
MODELİNİN YÜKSEK SICAKLIKLARDA İSTATİSTİK
MEKANİKSEL ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Emre DİL

Enstitü Anabilim Dalı : FİZİK

Bu tez 26 / 12 /2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.



Prof. Dr.

Mehmet BEKTAŞOĞLU

Jüri Başkanı



Prof. Dr.

Abdullah ALĞIN

Üye



Doç. Dr.

Ali Serdar ARIKAN

Üye



Prof. Dr.

Ali KAYA

Üye



Prof. Dr.

Barış Tamer TONGUÇ,

Üye

Yrd. Doç. Dr.

Hacı Ahmet YILDIRIM

Üye



Doç. Dr.

Özgür DELİCE

Üye

TEŞEKKÜR

Tez çalıŐmalarım boyunca her an bilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli danıŐmanlarım Doç. Dr. Ali Serdar ARIKAN ve Prof. Dr. Abdullah ALĐIN'a en içten teŐekkürlerimi sunarım.

Bu tez alıŐması Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'ın 113F226 no'lu araştırma projesi kapsamında desteklenmiŐtir.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vii
ÖZET.....	x
SUMMARY.....	xi
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
ÖZDEŞ PARÇACIK SİSTEMLERİ.....	6
2.1. Özdeş Parçacıklar.....	6
2.2. Kuantum Özdeş Parçacık Sistemleri ve Simetrileştirme İlkesi.....	7
BÖLÜM 3.	
FERMİYON SİSTEMLERİ.....	16
3.1. Fock Uzayı ve Fermiyon Cebiri.....	16
3.2. İki Parametre ile Deforme Fermiyon Cebiri.....	25
BÖLÜM 4.	
İDEAL FERMİ GAZI.....	28
4.1. Fermi Gazının Genel İstatistik Mekaniksel Özellikleri.....	29
4.1.1. Yüksek sıcaklık ve düşük yoğunluk limiti ($N\lambda^3/V \ll 1$).....	41
4.1.2. Düşük sıcaklık ve yüksek yoğunluk limiti ($N\lambda^3/V \gg 1$).....	46
4.2. Fermi Gazı Modelinin Bazı Fiziksel Uygulamaları.....	46

BÖLÜM 5.

İKİ PARAMETRE İLE DEFORME FERMİ GAZI MODELİ.....	50
5.1. Modelin Kuantum Cebirsel Özellikleri.....	50
5.2. (q,p) -Deforme Fermi Gazı Modelinin İstatistik Mekaniksel Özellikleri	52
5.3. (q,p) -Deforme Fermi Gazı Modelinin Hal Denklemi	64
5.3.1. Üç boyutlu uzayda hal denklemi ve virial katsayıları.....	64
5.3.2. İki boyutlu uzayda hal denklemi ve virial katsayıları	72

BÖLÜM 6.

SONUÇLAR VE TARTIŞMA	82
KAYNAKLAR.....	85
EKLER.....	90
ÖZGEÇMİŞ.....	102

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A	: Alan
a	: Yok etme operatörü
a^+ veya a^*	: Yaratma operatörü
β	: $1/kT$
c	: Deforme yok etme operatörü
c^*	: Deforme yaratma operatörü
C_V	: Öz ısı
$\hat{D}_x^{(q,p)}$: Modifiye edilmiş Fibonacci fark operatörü
$\hat{\partial}_x^{(q,p)}$: Fibonacci fark operatörü
E	: Enerji
ε	: Tek parçacık enerji seviyesi
ε_F	: Fermi enerjisi
F	: Helmholtz serbest enerjisi
$f_n(z)$: Standart Fermi-Dirac fonksiyonları
$f_n(z, q, p)$: (q, p) -Deforme Fermi-Dirac fonksiyonları
\hat{H}	: Hamilton işlemcisi
h	: Planck sabiti
\hbar	: $h/2\pi$
k	: Boltzmann sabiti
λ	: Termal dalga boyu
m	: Kütle
μ	: Kimyasal potansiyel
N	: Toplam parçacık sayısı
\hat{N}	: Sayı operatörü

$[\hat{N}]$: Deforme sayı operatörü
$n(\eta)$: Standart Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu
$n(\eta, q, p)$: (q, p) -Deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu
P	: Basınç
\hat{P}_{ij}	: Değiş-tokuş operatörü
\vec{p}	: Momentum
p	: İkinci deformasyon parametresi
ψ	: Dalga fonksiyonu
Q_N	: Paylaşım fonksiyonu
q	: Birinci deformasyon parametresi
r	: Konum
S	: Entropi
$SU(n)$: n -Boyutlu Özel üniter grup
$SU_q(n)$: n -Boyutlu q -Deforme özel üniter grup
T	: Sıcaklık
t	: Zaman
U	: İç enerji
V	: Hacim
Z	: Büyük paylaşım fonksiyonu
z	: Fugasite

ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 4.1. Standart Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun sonlu sıcaklıklarda η 'ya göre değişimi ($\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$)32
- Şekil 4.2. $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ Standart Fermi-Dirac fonksiyonlarının $0 \leq z \leq 1$ aralığında değişimi.....38
- Şekil 5.1. $(q, p) \leq 1$ aralığında (q, p) -Deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun farklı p değerleri için η ve q 'ya göre değişimi ($\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$)55
- Şekil 5.2. $(q, p) \geq 1$ aralığında (q, p) -Deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun farklı p değerleri için η ve q 'ya göre değişimi ($\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$)55
- Şekil 5.3. $(q, p) \leq 1$ aralığında $f_{3/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonunun farklı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimi ($\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$)59
- Şekil 5.4. $(q, p) \geq 1$ aralığında $f_{3/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonunun farklı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimi ($\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$)59
- Şekil 5.5. $(q, p) \leq 1$ aralığında $f_{5/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonunun farklı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimi ($\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$)60
- Şekil 5.6. $(q, p) \geq 1$ aralığında $f_{5/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonunun farklı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimi ($\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$)60

Şekil 1.7. $(q, p) \leq 1$ aralığında $S^{(q,p)} \lambda^3 / kV$ entropi fonksiyonunun farklı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimi ($\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$)	63
Şekil 1.8. $(q, p) \geq 1$ aralığında $S^{(q,p)} \lambda^3 / kV$ entropi fonksiyonunun farklı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimi ($\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$)	63
Şekil 5.9. $(q, p) \leq 1$ aralığında $a_2(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi	68
Şekil 5.10. $(q, p) \geq 1$ aralığında $a_2(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi	68
Şekil 5.11. $(q, p) \leq 1$ aralığında $a_3(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi	69
Şekil 5.12. $(q, p) \geq 1$ aralığında $a_3(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi	69
Şekil 5.13. $(q, p) \leq 1$ aralığında $a_4(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi	70
Şekil 5.14. $(q, p) \geq 1$ aralığında $a_4(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi	70
Şekil 5.15. $(q, p) \leq 1$ aralığında $a_5(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi	71
Şekil 5.16. $(q, p) \geq 1$ aralığında $a_5(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi	71
Şekil 5.17. $(q, p) \leq 1$ aralığında $\tilde{a}_2(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi	77
Şekil 5.18. $(q, p) \geq 1$ aralığında $\tilde{a}_2(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi	77
Şekil 5.19. $(q, p) \leq 1$ aralığında $\tilde{a}_3(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi	78

Şekil 5.20. $(q, p) \geq 1$ aralığında $\tilde{a}_3(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi.....	78
Şekil 5.21. $(q, p) \leq 1$ aralığında $\tilde{a}_4(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi.....	79
Şekil 5.22. $(q, p) \geq 1$ aralığında $\tilde{a}_4(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi.....	79
Şekil 5.23. $(q, p) \leq 1$ aralığında $\tilde{a}_5(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi.....	80
Şekil 5.24. $(q, p) \geq 1$ aralığında $\tilde{a}_5(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi.....	80

ÖZET

Anahtar kelimeler: Fermi Sistemleri, Deforme Fermi Gazı Modeli, Kuantum Grup ve Cebirleri, Deforme Fermiyonlar, Fibonacci Analizi, Virial Açılımı, İstatistiksel Termodinamik

Bu tez çalışmasında fermiyonik Fibonacci osilatörleri (FFO) gazı modeli göz önüne alınmış, sistemin yüksek sıcaklıklar limitinde istatistik mekaniksel özellikleri incelenmiştir. İlk dört bölümde; deforme cebirlerin uygulamaları, kuantum özdeş parçacık sistemleri, standart fermiyon cebiri, (q,p) -deforme fermiyon osilatör cebiri ve ideal Fermi gazının genel istatistik mekaniksel özellikleri hakkında temel bilgiler verilmiştir.

Beşinci bölüm tez çalışmasının orijinal kısmıdır. Modelin deforme dağılım fonksiyonu elde edilerek, toplam parçacık sayısı, iç enerji, entropi gibi termo-istatistiksel fonksiyonlar, yüksek sıcaklıklar limitinde reel, bağımsız (q,p) deformasyon parametreleri cinsinden hesaplanmıştır. Modelin hal denklemi ve ilk beş virial katsayısı iki ve üç boyutlu uzayda bulunmuştur. Son bölümde ise bulunan deforme termo-istatistiksel fonksiyonlara deformasyonun etkileri ve modelin olası fiziksel uygulamaları tartışılmıştır.

THE INVESTIGATION OF THE HIGH TEMPERATURE STATISTICAL MECHANICAL PROPERTIES OF THE FERMIONIC FIBONACCI OSCILLATORS GAS MODEL

SUMMARY

Keywords: Fermi Systems, Deformed Fermi Gas Model, Quantum Groups and Algebras, Deformed Fermions, Fibonacci Calculus, Virial Expansion, Statistical Thermodynamics

In this study, the Fermionic Fibonacci oscillators (FFO) gas model is considered. In the high temperature limit, its statistical mechanical properties are investigated. In the first four chapters, basic informations are given about applications of deformed algebras, quantum identical particle systems, standard fermion algebra, the (q,p) -deformed fermion oscillator algebra and statistical mechanical properties of the ideal Fermi gas.

The fifth chapter is the original part of the thesis. By obtaining the deformed distribution function of the model, the thermo-statistical functions such as; total particle number, internal energy and entropy are calculated in terms of the real, independent (q,p) deformation parameters. All of these calculations are achieved in the high temperature limits. The equation of state and the first five virial coefficients of the model are found in two and three dimensional spaces. In the last chapter, the effects of the deformation on the obtained deformed thermo-statistical functions and possible physical applications are discussed.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Doğadaki sistemlerin incelenmesinde kullanılan fiziksel yöntemler ve hesaplamalar incelemenin yapıldığı hız, boyut ve enerji ölçeğine göre farklılık gösterir. Mesela atomaltı parçacıkların söz konusu olduğu boyutta klasik mekanik yasaları geçerliliğini yitirir ve yerini kuantum mekaniği yasalarına bırakır. Öyle ki artık gözlenebilirler lineer vektör uzayında birer işlemciyle temsil edilirler. Burada üzerinde durulabilecek bir diğer ilginç nokta kuantum mekaniğindeki h Planck sabitinin klasik mekaniği deforme eden bir parametre olarak değerlendirilebilmesidir [1, 2]. Deformasyonun başka örnekleri ile karşılaşmak da mümkündür. Mesela xy -koordinatları arasındaki sıra değiştirme bağıntısının bir q deformasyon parametresi ışığında tanımlanması ile komütatif olmayan geometriye geçiş yapmak mümkündür. Bu yapı kuantum gruplarıyla yakından alakalıdır [3]. Öyle ki iki boyutlu kuantum düzleminde tanımlanan komütatif olmayan diferansiyel analizin yapısının kuantum matrisleri ile tanımlanan bir dönüşüm altında değişmez kaldığını görmek mümkündür [4]. Burada kuantum matrisleriyle kast edilen yapıda, matris elemanları q deformasyon parametresi ile tanımlanan sıra değiştirme bağıntılarına sahiptir. $q = 1$ için bu yapı klasik matris yapısına karşı gelmektedir.

Kuantum grubu yapısı ilk defa kuantum alan teorisi ve istatistik mekanikte integrallenebilir sistemlerin davranışı çalışılırken Kulish, Reshetikhin [5], Sklyanin, Takhtajan ve Faddeev [6, 7] tarafından ortaya konmuştur [8].

Kuantum grupları ile deforme bozon cebirleri arasında bir ilişkinin varlığından da bahsetmek mümkündür. Bilinmektedir ki bozon cebirinin deformasyonu ilk defa Arik-Coon tarafından gerçekleştirilmiştir [9]. Daha sonra Macfarlane ve Biedenharn birbirlerinden bağımsız bir şekilde bozon cebirinin deformasyonunu Arik-Coon'dan farklı bir formda gerçekleştirmişlerdir [10, 11]. Bu deformasyon ışığında deforme bozon cebirleri ile kuantum grupları arasında bir ilişkinin varlığı ortaya konmuştur.

Öyle ki $su_q(2)$ Lie cebiri işlemcilerinin deforme bozon cebiri işlemcileri cinsinden ifade edilebileceği bu çalışmalar ışığında görülmüştür. Bu durum, o dönemde deforme cebirlere olan ilginin artmasına da sebep olmuştur.

Deforme cebirlerin farklı uygulama alanlarından bahsetmek mümkündür. Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) çok parçacık formalizminin nükleer çiftlenim kuvvetleri versiyonunda dalga fonksiyonu için standart fermiyon yaratma, yok etme operatörleri yerine deforme yaratma, yok etme operatörleri kullanılmış; kuantum işgal olasılıkları ve gap (boşluk), deformasyon parametresine bağlı olarak incelenmiştir [12]. Bir başka çalışmada, Nambu-Jona-Lasinio (NJL) modeli gap denkleminde standart fermiyon operatörleri yerine deforme fermiyon operatörleri kullanılmıştır. Söz konusu çalışmada görülmüştür ki, NJL dört fermiyon etkileşmelerinin çiftlenim kuvveti deformasyonun etkisiyle artmıştır. Bu da dinamik kütle ile alakalı olan kuark yoğunlaşmasında bir artışa sebep olmuştur [13]. Öte yandan, çekirdekteki çok parçacık etkileşmelerinin incelenmesinde de deforme cebirlerin daha yüksek mertebeden etkilerin anlaşılmasında önemli bir rol oynadığını görmek mümkündür [14]. Yine mezonların radyal ve rotasyonel uyarılmaları ve dinamik kütleleriyle ilgili çalışmalarda κ -deforme Poincare cebirinin deneysel verilerle iyi bir uyum içinde olduğu söylenebilir [13, 15]. Kuark ve leptonların kütle spektrumları hakkında q -deforme cebirler ışığında söz söylenebileceği gibi [16, 17], kuantum cebirlerini kullanarak fermiyonlar ve bozonlar arasındaki etkileşimleri tarif etmek de mümkündür [18].

Deforme bozon ve fermiyon sistemlerinin istatistik mekaniksel özelliklerinin incelendiği çalışmalara son yıllarda sıklıkla rastlamak mümkündür. Öyle ki literatürde bu sistemlerin yüksek ve düşük sıcaklık limitlerinin termo-istatistiksel özelliklerinin incelendiği bir çok çalışma vardır [19-28]. İstatistiksel mekaniğin olası bir genelleştirilmesi olarak değerlendirilebilecek bu yaklaşımlar dışında, Tsallis tarafından ortaya konulan Tsallis istatistiği de istatistiksel mekaniğin diğer bir olası genelleştirilmiş formalizmidir [29].

Deforme cebirler yukarıda bahsi geçen çalışmalara ek olarak daha birçok çalışmada karşımıza çıkar. Kompozit parçacıkların iç yapısının anlaşılması için kompozit

yapıyı oluşturan parçacıkların arasındaki etkileşimlerden veya basit olmayan komütasyon bağıntılarından faydalanılması gerekir. Deforme osilatör sistemleri bu amaca yönelik olarak kullanılabilir yapılarıdır. Deformasyon parametrelerinin kompozit yapı hakkında taşıdığı anlam ışığında, kompozit yapının yapıtaşları olarak ya q -deforme bozonları ya da q -deforme fermiyonları göz önüne almak mümkün olabilir [30, 31].

Ağır iyon çarpışmalarında üretilen ve kaydedilen hadronların iki parçacıklı korelasyon fonksiyonlarının alışılmadık davranışlarını efektif olarak tanımlamak için, q -Bose gazı modelindeki q -deforme osilatör cebirinin kullanılması, deforme cebirlerin farklı alanlardaki uygulamalarına bir başka örnektir [32].

Literatürde deforme cebirlerin karadelik fiziğine uygulamalarına rastlamak da mümkündür. Örneğin Pouliot çalışmasında [33], kuantum gravite teorisini geliştirmek üzere pertürbasyon teorisinde karşılaşılan harmonik salınıcıyı deforme etmeyi önermiştir. Ancak bu yöntemle sonlu sayıda durum elde edilebilirken, süpersimetri kırılması istenilen seviyede gözlenememiştir [33].

Diatomik moleküllerin titreşimsel spektrumlarının tanımlanmasında $SU_q(1,1)$ ve $U_q(2)$ simetrisine sahip q -deforme anharmonik osilatörlerini kullanmak mümkündür [34, 35]. Bu iki model ışığında titreşimsel moleküler spektrumları yeterince iyi tanımlamak mümkün olur. Ancak, spektrumu veren eşitliklerde ayrışma limitlerinin altında beliren seviye sayılarının çıkması bu modelin bir dezavantajdır. Deneysel olarak bu sayının ya bilinmesi veya bu sayının serbest ekstra bir parametre olarak denklemde kullanılması gerekir. Bonatsos ve Daskolyannis çalışmalarında [36] söz konusu dezavantajı da ortadan kaldırarak diatomik moleküllerin titreşimsel spektrumunu yine q -deforme anharmonik osilatörler yardımıyla tanımlamışlardır [36].

Nükleer kollektif yapıyla ilgili ilk başarılı q -deforme cebir uygulaması Yu. F. Smirnov [37] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmayı zenginleştiren ve nükleer fiziğe q -deforme cebirlerinin nasıl uygulandığını örnekleyen bir başka çalışma da Georgieva

ve arkadaşları tarafından yapılmıştır [38]. Georgieva ve arkadaşları iki ayrı örnek göz önüne alarak kuantum deforme cebirlerin nükleer fiziğe uygulamasını gerçekleştirmişlerdir. q -deforme $SU(3)$ dinamik simetri grubu ile tam çözülebilen iki-boyutlu etkileşimli bozon modelinin deforme versiyonunu ele aldıkları gibi, çiftlenim korelasyonlarını çalışmak için de q -deforme $Sp(4)$ modelini göz önüne almışlardır [38].

Deforme cebirlerin bir diğer önemli uygulaması Monterio ve Rodrigues tarafından gerçekleştirilmiştir [39]. Landau teorisi ile ${}^4\text{He}$ izotopunun süper akışkan özelliklerinin tanımlanması düşük sıcaklıklarda deneysel sonuçlarla bazı farklılıklar içerir. Landau teorisinde ${}^4\text{He}$ izotopu içindeki fononların dispersiyon bağıntısında pozitif çıkan bir parametrenin, deneysel verilere göre negatif çıkması gerekir. Monterio ve Rodrigues çalışmalarında [39] göstermişlerdir ki, deneysel verilerdeki gibi negatif değer elde edilmesi, fononların q -deforme bozonik osilatörler olarak dikkate alınmasıyla mümkün olabilir. Buradan elde edilen ısı kapasitesi değerinin de deneysel sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmüştür [39].

Deforme sistemlerle ilgili farklı alanlardaki çalışmalara daha bir çok örnek verilebilir. Ancak artık bu tez çalışmasında göz önüne alınan sistem ve tezin içeriği hakkında birkaç söz söylemek daha uygun olacaktır. Tezin ikinci bölümünde özdeş parçacıklar sisteminden ve simetristirme ilkesinden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ise öncelikle fermiyon cebiri üzerinde durulmuş; daha sonra da termostatistiksel özellikleri incelenecek deforme Fermi sistemin inşasına ilişkin kısa bir bilgi verilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde ideal Fermi gazı sistemi ve bu sistemin istatistik mekaniksel özellikleri ile ilgili hesaplar özetlenmiştir. Beşinci bölüm, tez çalışmasının orijinal kısmını oluşturan (q,p) -deforme Fermi gazı modelinin yüksek sıcaklıklardaki termostatistiksel özelliklerinin incelendiği bölümdür. Bu bölümde (q,p) -deforme Fermi gazı modelinin toplam parçacık sayısı, dağılım fonksiyonu, basıncı, iç enerjisi ve entropisi deformasyon parametreleri cinsinden elde edilmiştir. Ayrıca sistemin iki ve üç boyutlu uzayda, yüksek sıcaklıklardaki hal denkleminin virial açılımı çıkartılmış olup, ilk beş virial katsayısı deformasyon parametrelerinin fonksiyonu olarak ayrı ayrı hesaplanmıştır. Son bölümde ise elde edilen tüm termo-

istatistiksel fonksiyonlara q ve p deformasyon parametrelerinin etkileri araştırılmış olup, bu çerçevede deformasyon parametrelerinin fiziksel yorumları yapılmaya çalışılmıştır. (q,p) -Deforme Fermi gazı modelinin olası fiziksel uygulamaları da ayrıca tartışılmıştır.

BÖLÜM 2. ÖZDEŞ PARÇACIK SİSTEMLERİ

Bu bölümde ilk olarak özdeş parçacık kavramı ele alınacak ve bu parçacıklardan oluşan fiziksel sistemlerin klasik mekanik ve kuantum mekaniği ışığında nasıl incelendikleri hakkında kısa bir bilgi verilecektir. Kuantum özdeş parçacık sistemlerinde, sistemi tanımlayan dalga fonksiyonlarının simetrik veya antisimetrik olma özellikleri, önce iki parçacık ardından da çok parçacıklı sistemler için tekrar edilecek ve bu çerçevede de simetrileştirme ilkesinden kısaca bahsedilecektir.

2.1. Özdeş Parçacıklar

Kütle, yük, hacim gibi fiziksel özellikleri birbirinin aynısı olan parçacıklara özdeş parçacıklar denir [40, 41]. Doğaldır ki, özdeş parçacık sistemlerini incelerken, klasik veya kuantum yaklaşımından hangisinin göz önüne alınacağına bağlı olarak yapılacak işlemler birbirlerinden farklılık gösterecektir.

Klasik mekaniğe göre, özdeş parçacıkları ayırt etmek mümkündür. Çünkü özdeş parçacıklar için kesin olarak tanımlanabilecek bir yörünge söz konusudur. Dolayısıyla sistemdeki parçacıkların bütün özellikleri aynı olsa bile, yörüngeleri onları ayırt etmeyi mümkün kılacaktır [41, 42]. Bu sebeple özdeş parçacıklardan oluşan bir sistemdeki herhangi iki parçacığın değiş tokuşu ile elde edilen iki konfigürasyonun fiziksel olarak birbirinin aynısı olduğu söylenemez [43].

Kuantum mekaniğinde ise, sistemi oluşturan özdeş parçacıkları klasik mekanikteki yaklaşım çerçevesinde ayırt etmek mümkün değildir. Çünkü kuantum mekaniğinde klasik mekanikteki gibi belirli bir yörüngeden bahsetmek mümkün değildir [41, 43]. Burada parçacıklar dalga fonksiyonlarıyla tanımlanır. Dalga fonksiyonlarının sıfırdan farklı olduğu bölgelerin kesişmesine göre, parçacıkların ayırt edilmesi ile ilgili söz söylemek mümkün olur [41, 42]. Mesela bir atomun elektronlarını, dalga

fonksiyonlarının sıfırdan farklı olduğu bölgede bir kesişimin varlığından dolayı ayırt etmek mümkün değilken, birbirinden yeterince uzakta olan farklı atomların elektronlarını birbirinden ayırt etmek mümkündür [41, 42].

2.2. Kuantum Özdeş Parçacık Sistemleri ve Simetrileştirme İlkesi

Kuantum mekaniğinde parçacıklar $\psi(\vec{r}, t)$ ile gösterilen dalga fonksiyonlarıyla tanımlanırlar. Parçacığın bir t anında \vec{r} konumunda bulunma olasılığıyla ilgili bilgiye ulaşmayı sağlayan $\psi(\vec{r}, t)$ dalga fonksiyonu Schrödinger denklemi olarak bilinen bir diferansiyel denklemi sağlar [44]. N tane ayırt edilemez parçacıktan oluşan bir sistem için zamana bağlı Schrödinger denklemi

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r_1, s_1; r_2, s_2; \dots; r_N, s_N, t) = \hat{H}(r_1, s_1; r_2, s_2; \dots; r_N, s_N, t) \psi(r_1, s_1; r_2, s_2; \dots; r_N, s_N, t) \quad (2.1)$$

eşitliği ile ifade edilir [41, 45]. Burada r_1, r_2, \dots, r_N ve s_1, s_2, \dots, s_N ile sırasıyla konum ve spin koordinatlarını temsil edilmektedir. Bu ifadeyi

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(1, 2, \dots, N, t) = \hat{H}(1, 2, \dots, N, t) \psi(1, 2, \dots, N, t) \quad (2.2)$$

şeklinde daha kısa bir şekilde yazmak mümkündür. Burada $1, 2, \dots, N$ sistemdeki parçacıkların hem konum hem de spin koordinatlarını temsilen kullanılmaktadır [41]. Eğer parçacıklar birbirleriyle etkileşmiyor ve zamana bağlı olmayan bir potansiyel içindelerse, (2.2) eşitliğindeki \hat{H} Hamilton işlemcisi

$$\hat{H}(1, 2, \dots, N, t) = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \dots + \frac{\hat{p}_N^2}{2m} + \hat{V}(1) + \hat{V}(2) + \dots + \hat{V}(N) \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir [41, 46]. Yukarıdaki eşitlikten de açıkça görüleceği gibi, özdeş parçacıklar birbirleriyle değiş-tokuş ettiğinde, Hamilton işlemcisi değişmez kalır [41, 45]. Söz konusu simetrinin sonuçlarını daha iyi görebilmek için N tane özdeş

etkileşmeyen parçacıktan oluşan bir sistemi incelemek yerine, iki parçacıktan oluşan bir sistemi incelemek daha uygun olacaktır. Birbirleriyle etkileşmeyen iki özdeş parçacık için (2.3) eşitliği ile ifade edilen Hamilton işlemcisinin

$$\hat{H}(1,2) = \hat{H}(2,1) \quad (2.4)$$

eşitliğini sağladığı kolaylıkla görülebilir [41, 45]. N parçacıklı sistemde olduğu gibi bu sistemde de potansiyelin zamandan bağımsız olduğu kabul edildiğinden, zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$\hat{H}(1,2)\psi(1,2) = E\psi(1,2) \quad (2.5)$$

şeklinde yazılabilir [41]. Burada Hamilton operatörünün $\psi(1,2)$ öz durumuna karşı gelen enerji özdeğeri E ile gösterilmektedir. Parçacıklar etkileşmediği için Hamilton operatörü

$$\hat{H}(1,2) = \hat{H}(1) + \hat{H}(2) \quad (2.6)$$

şeklinde ayrı ayrı parçacıkların Hamilton operatörlerinin toplamı cinsinden de yazılabilir [41, 45]. Böylece (2.5) eşitliğindeki $\psi(1,2)$ ve E ifadeleri için sırasıyla

$$\psi(1,2) = \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) \quad (2.7)$$

$$E_I = E_{1\alpha} + E_{2\beta} \quad (2.8)$$

eşitlikleri yazılabilir [41, 46]. Burada α ve β indisleri birinci ve ikinci parçacığın buldukları kuantum durumlarını temsilen kullanılmıştır. (2.6)-(2.8) eşitlikleri ışığında (2.5) eşitliğini

$$\hat{H}(1)\psi_\alpha(1) = E_{1\alpha}\psi_\alpha(1) \quad (2.9)$$

$$\hat{H}(2)\psi_\beta(2) = E_{2\beta}\psi_\beta(2) \quad (2.10)$$

şeklinde iki ayrı eşitlikle ifade etmek mümkündür [41]. 1 ve 2 no'lu parçacıklar özdeş olduklarından, (2.7) ve (2.8) eşitliklerindeki gibi

$$\psi(1,2) = \psi_\alpha(2)\psi_\beta(1) \quad (2.11)$$

$$E_{II} = E_{2\alpha} + E_{1\beta} \quad (2.12)$$

ifadeleri yazılabilir [41]. Böylece (2.9) ve (2.10) eşitliklerine benzer şekilde

$$\hat{H}(2)\psi_\alpha(2) = E_{2\alpha}\psi_\alpha(2) \quad (2.13)$$

$$\hat{H}(1)\psi_\beta(1) = E_{1\beta}\psi_\beta(1) \quad (2.14)$$

eşitlikleri elde edilebilir. Burada sistemdeki parçacıklar özdeş olduğundan (2.9) ve (2.13) özdeğer denklemlerindeki enerji özdeğerleri ile (2.10) ve (2.14) özdeğer denklemlerindeki enerji özdeğerleri birbirine eşittir [41]. Bir başka deyişle; $\hat{H}(1,2)$ işlemcisinin (2.7) öz durumuna karşı gelen E_I enerji özdeğeri ile (2.11) öz durumuna karşı gelen E_{II} enerji özdeğeri aynıdır [41]. Böylece sistemi oluşturan özdeş parçacıklar değiş-tokuş edildiğinde, sistemin enerjisinin değişmeyeceği matematiksel olarak görülmüş olur. Bu durum değiş-tokuş dejenereliği olarak da isimlendirilir [41].

Herhangi bir $f(1,2)$ fonksiyonuna etkisi

$$\hat{P}_{12}f(1,2) = f(2,1) \quad (2.15)$$

eşitliği ile tanımlanan bir \hat{P}_{12} [41, 45, 47, 48] değiş-tokuş işlemcisinin, (2.5) eşitliğindeki Hamilton işlemcisi ile sıra değiştirdiği kolaylıkla görülebileceğinden;

$\hat{H}(1,2)$ işlemcisi ile \hat{P}_{12} işlemcisinin ortak özfonksiyonlara sahip olduğunu söylemek mümkündür [41, 45]. Böylece $\psi(1,2)$ özfonksiyonu için

$$\hat{P}_{12} \psi(1,2) = \lambda \psi(1,2) \quad (2.16)$$

özdeğer denklemi yazılabilir. Değiş-tokuş işlemcisinin tanım eşitliğinden de

$$\hat{P}_{12} \psi(1,2) = \psi(2,1) \quad (2.17)$$

eşitliğinin yazılabileceği bilinmekteydi [41]. Böylece (2.16) ve (2.17) eşitliklerini kullanarak

$$\lambda^2 \psi(1,2) = \psi(1,2) \quad (2.18)$$

eşitliğini elde etmek hiç de zor değildir. Bu eşitlik λ özdeğerinin ancak -1 veya +1 değerini alabileceğini açıkça göstermektedir [41]. Yani $\psi(1,2)$ dalga fonksiyonu ya

$$\psi_s(1,2) = \psi_s(2,1) \quad (2.19)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde simetrik formda olmalı, ya da

$$\psi_a(1,2) = -\psi_a(2,1) \quad (2.20)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde antisimetrik formda olmalıdır [41]. Bu gereklilik (2.16) eşitliğinde λ yerine -1 veya +1 yazıldığında kolaylıkla görülebilir. Öyleyse (2.5) eşitliği ile ifade edilen özdeğer denklemindeki özvektörler de ya simetrik ya da antisimetrik formda olmalıdır. Bundan önce (2.7) ve (2.11) eşitliklerinde ifade edilen dalga fonksiyonlarının ikisi de yalnız başlarına simetrik veya antisimetrik formda değildirler. Ancak bunların

$$\psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) + \psi_\alpha(2)\psi_\beta(1) \} \quad (2.21)$$

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2) - \psi_\alpha(2)\psi_\beta(1) \} \quad (2.22)$$

şeklinde yazılan lineer kombinasyonları, istenilen simetrik ve antisimetrik fonksiyonları elde etmeyi mümkün kılar [41, 45]. Bu eşitliklerdeki $1/\sqrt{2}$ katsayısı dalga fonksiyonlarının normalize olma koşulundan gelmektedir.

Özdeş iki parçacıktan oluşan sistemin dalga fonksiyonunun (2.21) veya (2.22) eşitliğindeki gibi ya simetrik ya da antisimetrik formda olma zorunluluğu, sistemin olasılık yoğunluk fonksiyonuna bakılarak da anlaşılabilir. Açıktır ki, sistemi oluşturan parçacıkların durumlar arası değiş-tokuşu sonucu, sistemin olasılık yoğunluğu fonksiyonu, parçacıkların özdeş olması sebebiyle

$$|\psi(1,2)|^2 = |\psi(2,1)|^2 \quad (2.23)$$

eşitliğini sağlar. Dolayısıyla $\psi(1,2)$ dalga fonksiyonu ya (2.19) eşitliğini sağlayacak şekilde simetrik ya da (2.20) eşitliğini sağlayacak şekilde antisimetrik olmalıdır [46, 49].

N özdeş parçacıktan oluşan bir sisteme bu durumun nasıl genellenebileceğini görmek için öncelikle üç parçacıklı bir sistem göz önüne almak uygun olacaktır. Kuantum durumları α , β ve γ ile ifade edilen, potansiyeli zamandan bağımsız üç özdeş parçacıktan oluşan bir sistem için yazılacak Schrödinger denkleminin olası çözümlerinin $\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3)$, $\psi_\alpha(1)\psi_\beta(3)\psi_\gamma(2)$, $\psi_\alpha(2)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(3)$, $\psi_\alpha(2)\psi_\beta(3)\psi_\gamma(1)$, $\psi_\alpha(3)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(1)$, $\psi_\alpha(3)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(2)$ şeklinde ifade edilebileceğini görmek, iki parçacıklı sistem için yapılan hesaplamalar ışığında hiç de zor değildir. Ancak iki parçacıklı sistem incelenirken görülmüştür ki sistemin dalga fonksiyonu simetrik veya antisimetrik olacak şekilde elde edilen çözümlerin

lineer kombinasyonu olmalıdır. Üç parçacıklı sistem için bu durumu \hat{P}_i ile gösterilen bir permütasyon işlemcisi yardımıyla ifade etmek mümkündür [40, 50, 51]. \hat{P}_i işlemcisi

$$\hat{P}_1\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3) = \psi_\alpha(1)\psi_\beta(3)\psi_\gamma(2), \quad (2.24)$$

$$\hat{P}_2\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3) = \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3), \quad (2.25)$$

$$\hat{P}_3\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3) = \psi_\alpha(2)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(3), \quad (2.26)$$

$$\hat{P}_4\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3) = \psi_\alpha(2)\psi_\beta(3)\psi_\gamma(1), \quad (2.27)$$

$$\hat{P}_5\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3) = \psi_\alpha(3)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(1), \quad (2.28)$$

$$\hat{P}_6\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3) = \psi_\alpha(3)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(2), \quad (2.29)$$

eşitlikleri ışığında tanımlanabilir. Burada i alt indisi ile değiş-tokuş sayısı ifade edilmektedir. Ancak dikkat edilirse i indisi yapılacak değiş-tokuş sayısını ifade ederken, hangi parçacıkların değiş-tokuş edileceğini açıkça göstermemektedir. Dolayısıyla bu notasyon ışığında yukarıdaki eşitlikleri

$$\hat{P}_1\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3) = \psi_\alpha(2)\psi_\beta(1)\psi_\gamma(3), \quad (2.30)$$

$$\hat{P}_2\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3) = \psi_\alpha(2)\psi_\beta(3)\psi_\gamma(1), \quad (2.31)$$

$$\hat{P}_3\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3) = \psi_\alpha(3)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(1), \quad (2.32)$$

$$\hat{P}_4\psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3) = \psi_\alpha(1)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3), \quad (2.33)$$

$$\hat{P}_5 \psi_\alpha(1) \psi_\beta(2) \psi_\gamma(3) = \psi_\alpha(1) \psi_\beta(3) \psi_\gamma(2), \quad (2.34)$$

$$\hat{P}_6 \psi_\alpha(1) \psi_\beta(2) \psi_\gamma(3) = \psi_\alpha(3) \psi_\beta(1) \psi_\gamma(2), \quad (2.35)$$

şeklinde de tanımlamak mümkün olabilir. Bu farklılık nihai hedef sistemin dalga fonksiyonunu elde etmek olduğu sürece sorun teşkil etmez. Çünkü burada önemli olan mümkün tüm permütasyonları elde ederken i indisinin tek mi çift mi değer aldığıdır. Dolayısıyla bu notasyon çerçevesinde

$$\psi_s = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i=1}^6 \hat{P}_i \psi_\alpha(1) \psi_\beta(2) \psi_\gamma(3) \quad (2.36)$$

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{i=1}^6 (-1)^i \hat{P}_i \psi_\alpha(1) \psi_\beta(2) \psi_\gamma(3) \quad (2.37)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada (2.36) eşitliği simetrik dalga fonksiyonunu, (2.37) eşitliği de antisimetrik dalga fonksiyonunu ifade etmektedir. (2.37) eşitliğinden de görüldüğü gibi antisimetrik dalga fonksiyonunda tek permütasyonlar lineer kombinasyonda -1 katsayısına sahiptir. Her iki eşitlikte de $1/\sqrt{3!}$ normalizasyon sabitidir.

Bu yaklaşımlar çerçevesinde kolaylıkla görülebilir ki; N özdeş parçacıktan oluşan bir sistem için simetrik ve antisimetrik dalga fonksiyonları sırasıyla

$$\psi_s = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{i=1}^{N!} \hat{P}_i \psi_\alpha(1) \psi_\beta(2) \dots \psi_\nu(N) \quad (2.38)$$

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{i=1}^{N!} (-1)^i \hat{P}_i \psi_\alpha(1) \psi_\beta(2) \dots \psi_\nu(N) \quad (2.39)$$

eşitlikleriyle ifade edilebilir [40, 50, 51]. (2.39) eşitliğine dikkatli bir şekilde bakılırsa bu ifadenin parçacıkların tüm durumlar arası permütasyonlarının birer satır olarak yazıldığı $N \times N$ 'lik bir determinant ifadesine eşdeğer olacağı görülebilir. Yani (2.39) eşitliği

$$\psi_a(1,2,\dots,N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) & \dots & \psi_\alpha(N) \\ \psi_\beta(1) & \psi_\beta(2) & \dots & \psi_\beta(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_\nu(1) & \psi_\nu(2) & \dots & \psi_\nu(N) \end{vmatrix} \quad (2.40)$$

şeklinde de yazılabilir Buradaki $N \times N$ 'lik determinanta Slater determinanı denir. [52] Bu determinant ifadesinde karşılaşılan tüm eksi işaretler, artı yapılırsa (2.38) eşitliğiyle ifade edilen simetrik dalga fonksiyonunu elde etmek de mümkün olur.

Şimdiye kadar matematiksel bir dille ortaya konulan durum, birkaç cümle ile aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

N özdeş parçacıktan oluşan bir sistemde, herhangi bir fiziksel gözlenebilir için ölçüm yapıldığında bulunan özdeşlerin, parçacıkların durumlar arası değiş tokuşundaki herhangi bir permütasyon öz durumuna karşı geldiği söylenebilir. Aynı özdeğere sahip farklı permütasyon öz durumlarının ortaya çıktığı bu durumdan değiş-tokuş dejenereliği olarak da bahsedilmiştir [40]. Burada söz konusu edilen özdeşlerin, sistemin hangi permütasyon öz durumuna veya permütasyonların nasıl bir lineer kombinasyonuna karşı geldiği “simetristirme ilkesi” ile ortaya konabilir. Bu ilke “ N özdeş parçacığa ait sistemin durumu, N parçacığın permütasyonlarına göre simetrik veya antisimetrik olmak zorundadır” sözleriyle ifade edilebilir [40]. Yani “özdeş parçacıklardan oluşan bir sistem ya simetrik ya da antisimetrik dalga fonksiyonuna sahiptir” denilebilir.

Parçacıkların spinleri ile onların uydukları istatistik arasında dikkate değer bir ilişki vardır [48]. Simetrik dalga fonksiyonlarıyla durumları tanımlanan parçacıklara bozon denir ve bozonlar Bose-Einstein istatistiğine uyarlar [40]. Deneyler, \hbar birimlerinde sıfır veya tamsayı spinli parçacıkların bozon olduğunu göstermiştir. Örneğin 0 (\hbar)

spinli π ve K mezonlar veya 1 (\hbar) spinli foton birer bozondur. Antisimetrik dalga fonksiyonlarıyla durumları tanımlanan parçacıklara da fermiyon denir. Fermiyonlar, \hbar birimlerinde yarım tamsayı spinli parçacıklar olup, Fermi-Dirac istatistiğine uyarlar. Elektron, müon ve nötrino da fermiyon tipli parçacıklara örnek olarak verilebilir [50].

(2.40) eşitliğindeki determinant ifadesi durumları antisimetrik dalga fonksiyonları ile ifade edilen parçacıkların önemli bir özelliğini bir çırpıda görmeyi mümkün kılar. Sistemdeki iki veya daha fazla parçacık aynı kuantum durumunda ise, elemanları tek parçacık durumlarından oluşan determinant ifadesinin iki veya daha fazla satırı birbirine eşit olur. Bu durumda determinantın değeri sıfır olacağından, antisimetrik dalga fonksiyonu da sıfır olur. Yani aynı kuantum durumunda birden fazla fermiyon bulunamaz. Bu da 1925 yılında Pauli tarafından ortaya konulan Pauli dışarlama ilkesinden başka bir şey değildir [50].

BÖLÜM 3. FERMİYON SİSTEMLERİ

Bu bölümde ilk olarak, çok parçacıklı sistemlerin durumunun işgal sayısı durum vektörleri ışığında ifade edildiği, Fock uzayından kısaca bahsedilecektir. Herhangi bir durumda parçacık yaratan veya yok eden işlemciler fermiyonlar için tanımlanacak ve bu operatörlerin sağladığı cebirsel yapı üzerinde durulacaktır. Son olarak da iki parametrelili deforme fermiyon cebirinin işlemcileri tensor notasyonu ışığında yazılacak ve bu cebirsel yapının nasıl inşa edildiği hakkında kısa bir bilgi verilecektir.

3.1. Fock Uzayı ve Fermiyon Cebiri

N özdeş parçacıktan oluşan bir sistemin kuantum durum vektörü, tek parçacık durumunu tanımlayan herhangi bir D dinamik değişkeninin bir tam seti kullanılarak yazılabilir [53]. Sistemin herhangi bir durumunda, sistemdeki parçacıklar söz konusu dinamik değişkenin farklı değerlerine sahip olabilirler. Burada hangi parçacığın D_α değerine sahip α durumunda, hangi parçacığın D_β değerine sahip β durumunda olduğunu bilmek mümkün değildir. Ancak α durumunda veya β durumunda bulunan parçacık sayısı hakkında söz söylemek mümkündür. Yani, N özdeş parçacıktan oluşan bir sistemin herhangi bir durumunu, α durumundaki parçacık sayısı n_α , β durumundaki parçacık sayısı n_β , vs ... ile ifade etmek mümkündür [53]. Söz konusu yaklaşım çerçevesinde, \hat{D} işlemcisinin her D_α özdeğerine bir \hat{N}_α işgal sayı işlemcisinin karşı geldiği söylenebilir. Bu sayı işlemcisinin özvektörleri D_α özdeğerine sahip n_α tane parçacığın bulunduğu bir durumu tanımlar. \hat{N}_α işlemcisinin n_α özdeğerleri de biraz önce vurgulandığı gibi o durumdaki parçacık sayısını verir. \hat{N}_α işlemcilerinin hepsinin sıra değiştiren, Hermitsel bir tam set

oluşturduğu durumda, Fock uzayı olarak da bilinen çok parçacık sistemi vektör uzayı için baz vektörler

$$|n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\gamma, \dots\rangle \quad (3.1)$$

şeklinde yazılabilir. Bu baz vektörler özdeş parçacıklar sistemi için tam bir ortonormal baz vektör seti oluşturur. Sistemin en genel durumunu bu baz vektörlerin lineer kombinasyonu ile tanımlamak mümkündür [53]. Hiç parçacığın bulunmadığı vakum durumu için Fock uzayı baz vektörü

$$|0, 0, \dots, 0, \dots\rangle \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer sistemde β durumunda bir parçacık bulunuyorsa, o zaman tek parçacık durum vektörü

$$|0, n_\beta = 1, 0, \dots, 0, \dots\rangle \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu iki durum vektörü arasındaki geçiş, yaratma işlemcisi olarak isimlendirilen a_β^+ yardımıyla

$$a_\beta^+ |0, 0, \dots, 0, \dots\rangle \propto |0, n_\beta = 1, 0, \dots, 0, \dots\rangle \quad (3.4)$$

biçiminde ifade edilebileceği gibi, yok etme işlemcisi olarak isimlendirilen a_β yardımıyla

$$a_\beta |0, n_\beta = 1, 0, \dots, 0, \dots\rangle \propto |0, 0, \dots, 0, \dots\rangle \quad (3.5)$$

biçiminde de gösterilebilir. Bu durum daha genel olarak

$$a_\gamma |n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\gamma, \dots\rangle \propto |n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\gamma - 1, \dots\rangle \quad (3.6)$$

$$a_\gamma^+ |n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\gamma, \dots\rangle \propto |n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\gamma + 1, \dots\rangle \quad (3.7)$$

ifadeleriyle de özetlenebilir. Burada a_γ ve a_γ^+ işlemcileri, γ durumunda parçacık yok etme ve yaratma işlemcileridir.

Buraya kadar yazılan ifadelerde sistemi oluşturan parçacıkların özdeş oldukları söylenmiş ancak onların bozon ya da fermiyon tipi parçacık olmalarına ilişkin herhangi bir vurgu yapılmamıştır. Tez çalışması fermiyon tipli parçacıklara odaklı olduğundan, bu noktadan sonra, durum vektörlerinin yapısı, yaratma ve yok etme işlemcilerinin durum vektörlerine etkisi ve bu işlemcilerin sağladığı cebirsel yapı fermiyon tipi parçacıklar göz önüne alınarak incelenecektir.

Pauli dışarlama ilkesine göre bir kuantum durumunda birden fazla fermiyon tipi parçacık bulunamayacağından, (3.1) ifadesindeki durum vektöründe $n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\gamma$ sadece 0 ve 1 değerlerini alabilir. Buna göre N tane özdeş fermiyonun $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ ile adlandırılmış N tane kuantum durumunda buldukları bir sistem

$$|n_\alpha = 1, n_\beta = 1, \dots, n_\gamma = 1\rangle = |1_\alpha, 1_\beta, \dots, 1_\gamma\rangle \quad (3.8)$$

şeklinde bir Fock uzayı durum vektörü ile tanımlanabilir. Bu sistemin durum vektörünü ikinci bölümde ifade edildiği şekilde Slater determinantı yardımıyla da ifade etmek mümkündür. Yani

$$|1_\alpha, 1_\beta, \dots, 1_\gamma\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) & \dots & \psi_\alpha(N) \\ \psi_\beta(1) & \psi_\beta(2) & \dots & \psi_\beta(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_\gamma(1) & \psi_\gamma(2) & \dots & \psi_\gamma(N) \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

eşitliği yazılabilir [54-56].

Yaratma ve yok etme işlemcileri arasındaki cebirsel bağıntıların bulunabilmesi için, bu işlemcilerin durum vektörlerine etkisine odaklanmak uygun olacaktır [54, 55]. α ve β kuantum durumlarında birer parçacığın bulunduğu iki özdeş fermiyondan oluşan bir sisteme, γ kuantum durumunda parçacık yaratma işlemcisinin etkisi

$$a_{\gamma}^{+}|1_{\alpha},1_{\beta}\rangle \equiv a_{\gamma}^{+} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) \\ \psi_{\beta}(1) & \psi_{\beta}(2) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} \psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) & \psi_{\alpha}(3) \\ \psi_{\beta}(1) & \psi_{\beta}(2) & \psi_{\beta}(3) \\ \psi_{\gamma}(1) & \psi_{\gamma}(2) & \psi_{\gamma}(3) \end{vmatrix} \equiv |1_{\alpha},1_{\beta},1_{\gamma}\rangle \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilebilir [54, 56]. Öte yandan $N=3$ özdeş fermiyonun, α, β, γ durumlarını işgal ettikleri bir sistemde γ durumunda bir parçacık yok etmek için a_{γ} operatörünün, sistemi temsil eden durum vektörüne etkisi

$$a_{\gamma}|1_{\alpha},1_{\beta},1_{\gamma}\rangle \equiv a_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} \psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) & \psi_{\alpha}(3) \\ \psi_{\beta}(1) & \psi_{\beta}(2) & \psi_{\beta}(3) \\ \psi_{\gamma}(1) & \psi_{\gamma}(2) & \psi_{\gamma}(3) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) \\ \psi_{\beta}(1) & \psi_{\beta}(2) \end{vmatrix} \equiv |1_{\alpha},1_{\beta}\rangle \quad (3.11)$$

eşitlikleri ile ifade edilebilir [54, 56].

$N=2$ özdeş fermiyonun, α, β durumlarında bulunduğu bir sisteme γ ve δ durumlarında parçacık yaratma işlemcilerinin farklı sırayla etkileri için ise

$$\begin{aligned} a_{\delta}^{+}a_{\gamma}^{+}|1_{\alpha},1_{\beta}\rangle &\equiv a_{\delta}^{+}a_{\gamma}^{+} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) \\ \psi_{\beta}(1) & \psi_{\beta}(2) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4!}} \begin{vmatrix} \psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) & \psi_{\alpha}(3) & \psi_{\alpha}(4) \\ \psi_{\beta}(1) & \psi_{\beta}(2) & \psi_{\beta}(3) & \psi_{\beta}(4) \\ \psi_{\gamma}(1) & \psi_{\gamma}(2) & \psi_{\gamma}(3) & \psi_{\gamma}(4) \\ \psi_{\delta}(1) & \psi_{\delta}(2) & \psi_{\delta}(3) & \psi_{\delta}(4) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$a_{\gamma}^{+}a_{\delta}^{+}|1_{\alpha},1_{\beta}\rangle \equiv a_{\gamma}^{+}a_{\delta}^{+} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) \\ \psi_{\beta}(1) & \psi_{\beta}(2) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{4!}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) & \psi_\alpha(3) & \psi_\alpha(4) \\ \psi_\beta(1) & \psi_\beta(2) & \psi_\beta(3) & \psi_\beta(4) \\ \psi_\delta(1) & \psi_\delta(2) & \psi_\delta(3) & \psi_\delta(4) \\ \psi_\gamma(1) & \psi_\gamma(2) & \psi_\gamma(3) & \psi_\gamma(4) \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{4!}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) & \psi_\alpha(3) & \psi_\alpha(4) \\ \psi_\beta(1) & \psi_\beta(2) & \psi_\beta(3) & \psi_\beta(4) \\ \psi_\gamma(1) & \psi_\gamma(2) & \psi_\gamma(3) & \psi_\gamma(4) \\ \psi_\delta(1) & \psi_\delta(2) & \psi_\delta(3) & \psi_\delta(4) \end{vmatrix} \tag{3.13}
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. (3.12) ve (3.13) eşitliğinden de yaratma işlemcileri arasındaki antikomütasyon bağıntısının

$$a_\delta^+ a_\gamma^+ + a_\gamma^+ a_\delta^+ = 0 \tag{3.14}$$

eşitliğiyle ifade edilebileceği görülebilir. Bu bağıntı kısaca

$$\{a_\gamma^+, a_\delta^+\} = 0 \tag{3.15}$$

şeklinde de yazılabilir [54, 56].

Bir diğer antikomütasyon bağıntısı da, $N = 4$ özdeş fermiyonun, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durumlarında bulunduğu bir sisteme γ ve δ durumlarında parçacık yok etme işlemcilerinin farklı sırayla etkileri ışığında incelenebilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
a_\gamma a_\delta |1_\alpha, 1_\beta, 1_\gamma, 1_\delta\rangle &\equiv a_\gamma a_\delta \frac{1}{\sqrt{4!}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) & \psi_\alpha(3) & \psi_\alpha(4) \\ \psi_\beta(1) & \psi_\beta(2) & \psi_\beta(3) & \psi_\beta(4) \\ \psi_\gamma(1) & \psi_\gamma(2) & \psi_\gamma(3) & \psi_\gamma(4) \\ \psi_\delta(1) & \psi_\delta(2) & \psi_\delta(3) & \psi_\delta(4) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) \\ \psi_\beta(1) & \psi_\beta(2) \end{vmatrix} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{\delta}a_{\gamma}|1_{\alpha},1_{\beta},1_{\gamma},1_{\delta}\rangle &\equiv a_{\delta}a_{\gamma}\frac{1}{\sqrt{4!}}\begin{vmatrix}\psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) & \psi_{\alpha}(3) & \psi_{\alpha}(4) \\ \psi_{\beta}(1) & \psi_{\beta}(2) & \psi_{\beta}(3) & \psi_{\beta}(4) \\ \psi_{\gamma}(1) & \psi_{\gamma}(2) & \psi_{\gamma}(3) & \psi_{\gamma}(4) \\ \psi_{\delta}(1) & \psi_{\delta}(2) & \psi_{\delta}(3) & \psi_{\delta}(4)\end{vmatrix} \\
&= -a_{\delta}a_{\gamma}\frac{1}{\sqrt{4!}}\begin{vmatrix}\psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) & \psi_{\alpha}(3) & \psi_{\alpha}(4) \\ \psi_{\beta}(1) & \psi_{\beta}(2) & \psi_{\beta}(3) & \psi_{\beta}(4) \\ \psi_{\delta}(1) & \psi_{\delta}(2) & \psi_{\delta}(3) & \psi_{\delta}(4) \\ \psi_{\gamma}(1) & \psi_{\gamma}(2) & \psi_{\gamma}(3) & \psi_{\gamma}(4)\end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) \\ \psi_{\beta}(1) & \psi_{\beta}(2)\end{vmatrix} \tag{3.17}
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada kullanılan notasyona göre yok etme işlemcileri, Slater determinantında son satırda yazılan durumu yok etmektedir [55, 56]. Bu sebeple (3.17) eşitliğinde, determinantın son iki satırı değış tokuş edildikten sonra yok etme işlemcilerinin etkisi göz önüne alınmıştır. (3.16) ve (3.17) eşitlikleri

$$a_{\gamma}a_{\delta} + a_{\delta}a_{\gamma} = 0 \tag{3.18}$$

antikomütasyon bağıntısını elde etmeyi mümkün kılar. Bu bağıntı da kısaca

$$\{a_{\gamma}, a_{\delta}\} = 0 \tag{3.19}$$

şeklinde de yazılabilir [54].

$N = 2$ özdeş fermiyonun, α, β durumlarında bulunduğu bir sisteme β durumunda parçacık yok etme ve γ durumunda parçacık yaratma operatörlerinin etkileri de

$$a_{\beta}a_{\gamma}^{+}|1_{\alpha},1_{\beta}\rangle \equiv a_{\beta}a_{\gamma}^{+}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) \\ \psi_{\beta}(1) & \psi_{\beta}(2)\end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) \\ \psi_{\gamma}(1) & \psi_{\gamma}(2)\end{vmatrix} \tag{3.20}$$

$$a_{\gamma}^{+}a_{\beta}|1_{\alpha},1_{\beta}\rangle \equiv a_{\gamma}^{+}a_{\beta}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) \\ \psi_{\beta}(1) & \psi_{\beta}(2)\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\psi_{\alpha}(1) & \psi_{\alpha}(2) \\ \psi_{\gamma}(1) & \psi_{\gamma}(2)\end{vmatrix} \tag{3.21}$$

eşitlikleri ile ifade edilebilir. Dolayısıyla a_β ve a_γ^+ işlemcileri arasında

$$\{a_\beta, a_\gamma^+\} = 0 \quad (3.22)$$

şeklinde yazılabilen bir antikomütasyon bağıntısı vardır [54, 56].

α ve β kuantum durumlarında bulunan iki özdeş fermiyondan oluşan bir sisteme γ durumunda parçacık yaratma ve yok etme işlemcilerinin etkilerini

$$a_\gamma a_\gamma^+ |1_\alpha, 1_\beta\rangle \equiv a_\gamma a_\gamma^+ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) \\ \psi_\beta(1) & \psi_\beta(2) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) \\ \psi_\beta(1) & \psi_\beta(2) \end{vmatrix} \quad (3.23)$$

$$a_\gamma^+ a_\gamma |1_\alpha, 1_\beta\rangle \equiv a_\gamma^+ a_\gamma \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) \\ \psi_\beta(1) & \psi_\beta(2) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

eşitlikleri ışığında inceleyerek a_γ ve a_γ^+ işlemcileri arasındaki cebirsel yapıyı görmek mümkündür [54, 56]. Bu cebirsel yapı α ve γ kuantum durumlarında bulunan iki özdeş fermiyondan oluşan bir sisteme γ durumunda parçacık yaratma ve yok etme işlemcilerinin etkileri incelenerek de görülebilir. Öyle ki bu durumda

$$a_\gamma a_\gamma^+ |1_\alpha, 1_\gamma\rangle \equiv a_\gamma a_\gamma^+ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) \\ \psi_\gamma(1) & \psi_\gamma(2) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

$$a_\gamma^+ a_\gamma |1_\alpha, 1_\gamma\rangle \equiv a_\gamma^+ a_\gamma \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) \\ \psi_\gamma(1) & \psi_\gamma(2) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \psi_\alpha(1) & \psi_\alpha(2) \\ \psi_\gamma(1) & \psi_\gamma(2) \end{vmatrix} \quad (3.26)$$

eşitlikleri yazılabilir. (3.23) ve (3.24) eşitlikleri de (3.25) ve (3.26) eşitlikleri de a_γ ve a_γ^+ işlemcileri arasındaki cebirsel ilişkinin

$$\{a_\gamma, a_\gamma^+\} = 1 \quad (3.27)$$

şeklinde yazılabileceğini ortaya koymaktadır [54, 56]. Dolayısıyla yaratma ve yok etme işlemcileri arasındaki olası bütün cebirsel işlemler, daha kapalı bir formda

$$\{a_i, a_j\} = 0 \quad (3.28)$$

$$\{a_i, a_j^+\} = \delta_{ij} \quad (3.29)$$

eşitlikleri ışığında ifade edilebilir. Burada δ_{ij} Kronecker deltadır. Fermiyon yaratma ve yok etme operatörleri arasındaki bu antikomütasyon bağıntılarına fermiyon cebiri denilmektedir.

(3.23)-(3.26) eşitliklerine bakıldığında (3.6) ve (3.7) ifadeleri yerine

$$a_\gamma |n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\gamma, \dots\rangle = \sqrt{n_\alpha} |n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\gamma - 1, \dots\rangle \quad (3.30)$$

$$a_\gamma^+ |n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\gamma, \dots\rangle = \sqrt{1 - n_\alpha} |n_\alpha, n_\beta, \dots, n_\gamma + 1, \dots\rangle \quad (3.31)$$

eşitliklerinin yazılabileceğini görmek de mümkün olur.

$i, j = 1, 2, \dots, d$ olmak üzere (3.28) ve (3.29) eşitlikleri ile ifade edilen fermiyon cebirinin yok etme işlemcileri tensor notasyonu kullanılarak

$$a_1 = a \otimes \underbrace{1^{\hat{N}_f} \otimes 1^{\hat{N}_f} \otimes \dots \otimes 1^{\hat{N}_f}}_{d-1 \text{ Tane}} \quad (3.32)$$

$$a_2 = (-1)^{\hat{N}_f} \otimes a \otimes \underbrace{1^{\hat{N}_f} \otimes \dots \otimes 1^{\hat{N}_f}}_{d-2 \text{ Tane}} \quad (3.33)$$

⋮

$$a_d = \underbrace{(-1)^{\hat{N}_f} \otimes (-1)^{\hat{N}_f} \otimes (-1)^{\hat{N}_f} \otimes \dots \otimes (-1)^{\hat{N}_f}}_{d-1 \text{ Tane}} \otimes a \quad (3.34)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu notasyon hem yok etme işlemcilerinin matris temsilinin bir çarpıda görülebilmesi açısından hem de fermiyon cebirinin deformasyonunun nasıl gerçekleştirildiğinin daha kolay anlaşılması açısından önemlidir. Burada fermiyonik yok etme işlemcisi a , yaratma işlemcisi a^+ ve sayı işlemcisi \hat{N}_f arasında

$$aa^+ + a^+a = 1 \quad (3.35)$$

$$[a, \hat{N}_f] = a \quad (3.36)$$

$$[a^+, \hat{N}_f] = -a^+ \quad (3.37)$$

$$a^2 = 0 \quad (3.38)$$

$$\hat{N}_f^2 = \hat{N}_f \quad (3.39)$$

bağıntıları sağlanmaktadır [57].

3.2. İki Parametre ile Deforme Fermiyon Cebiri

Bugüne kadar yapılan çalışmalara bakıldığında fermiyon cebirinin deformasyonunun farklı şekillerde gerçekleştirildiği görülebilir [58-60]. Bu çalışmada deformasyonun reel iki parametre ile gerçekleştirildiği iki parametre ile deforme fermiyon cebiri göz önüne alınmıştır.

İki parametre ile deforme fermiyon cebirinin nasıl inşa edildiği hakkında fikir sahibi olmak için bir önceki bölümde (3.32)-(3.34) eşitlikleri ile tanımlanan fermiyonik yok etme işlemcilerine odaklanmak uygun olacaktır.

$$c_1 = a \otimes \underbrace{p^{\hat{N}_f} \otimes p^{\hat{N}_f} \otimes \dots \otimes p^{\hat{N}_f}}_{d-1 \text{ Tane}} \quad (3.40)$$

$$c_2 = (-q)^{\hat{N}_f} \otimes a \otimes \underbrace{p^{\hat{N}_f} \otimes \dots \otimes p^{\hat{N}_f}}_{d-2 \text{ Tane}} \quad (3.41)$$

⋮

$$c_d = \underbrace{(-q)^{\hat{N}_f} \otimes (-q)^{\hat{N}_f} \otimes \dots \otimes (-q)^{\hat{N}_f}}_{d-1 \text{ Tane}} \otimes a \quad (3.42)$$

eşitlikleri ile tanımlanan deforme fermiyon yok etme işlemcilerinin $p = 1$, $q = 1$ için standart fermiyon işlemcilerine karşı geldiği görülebilir. İşlemcilerin yukarıdaki eşitliklerdeki gibi tensor çarpım uzayında ifade edilmesi cebirsel yapının bir çırpıda görülebilmesi açısından da önemlidir.

$i < j$ için $c_i c_j$ ve $c_j c_i$ ifadelerine bakılırsa, sırasıyla,

$$c_i c_j = (-q)^{2\hat{N}_f} \otimes \dots \otimes (-q)^{2\hat{N}_f} \otimes a(-q)^{\hat{N}_f} \otimes p^{\hat{N}_f} (-q)^{\hat{N}_f} \otimes \dots \otimes p^{\hat{N}_f} (-q)^{\hat{N}_f} \otimes p^{\hat{N}_f} a \otimes p^{2\hat{N}_f} \otimes \dots \otimes p^{2\hat{N}_f} \quad (3.43)$$

$$c_j c_i = (-q)^{2\hat{N}_f} \otimes \dots \otimes (-q)^{2\hat{N}_f} \otimes (-q)^{\hat{N}_f} a \otimes (-q)^{\hat{N}_f} p^{\hat{N}_f} \otimes \dots \otimes (-q)^{\hat{N}_f} p^{\hat{N}_f} \otimes a p^{\hat{N}_f} \otimes p^{2\hat{N}_f} \otimes \dots \otimes p^{2\hat{N}_f} \quad (3.44)$$

eşitliklerinin yazılabileceği görülebilir. i 'nci ve j 'nci terimlere bakıldığında (3.43) ve (3.44) ifadelerinin birbirlerine eşit olmadığı kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla c_i ve c_j işlemcileri arasındaki komütasyon bağıntısını bulmak için öncelikle

$$a(-q)^{\hat{N}_f} = (-q)^{\hat{N}_f+1} a \quad (3.45)$$

$$a p^{\hat{N}_f} = p^{\hat{N}_f+1} a \quad (3.46)$$

eşitliklerinin varlığını görmek uygun olacaktır. Bu eşitlikler, herhangi bir r reel deformasyon parametresi için

$$r^{\hat{N}_f} = 1 - (1-r)\hat{N}_f \quad (3.47)$$

eşitliğinin yazılmasının ardından (3.37) eşitliğinin kullanılmasıyla görülebilir. Böylece (3.43) ve (3.44) ifadeleri arasında

$$c_i c_j = -\frac{q}{p} c_j c_i \quad i < j, \quad i = 1, 2, \dots, d-1, \quad j = 1, 2, \dots, d \quad (3.48)$$

şeklinde bir eşitlik yazmanın mümkün olduğu görülebilir.

$$c^* = c^+ \quad (3.49)$$

$$\hat{N}_f^* = \hat{N}_f \quad (3.50)$$

şeklinde tanımlanan bir * işlemi ışığında, deforme fermiyon işlemcileri arasındaki komütasyon bağıntılarının tümü

$$c_i c_j = -\frac{q}{p} c_j c_i, \quad i < j, \quad i = 1, 2, \dots, d-1, \quad j = 1, 2, \dots, d \quad (3.51)$$

$$c_i c_j^* = -q p c_j^* c_i, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, d \quad (3.52)$$

$$c_i^2 = 0 \quad (3.53)$$

$$c_1 c_1^* + p^2 c_1^* c_1 = p^{2\hat{N}} \quad (3.54)$$

$$c_i c_i^* + q^2 c_i^* c_i = c_{i+1} c_{i+1}^* + p^2 c_{i+1}^* c_{i+1} \quad i, j = 1, 2, \dots, d \quad (3.55)$$

$$c_d c_d^* + q^2 c_d^* c_d = q^{2\hat{N}} \quad (3.56)$$

$$\sum_{i=1}^d c_i^* c_i = [\hat{N}_1 + \hat{N}_2 + \dots + \hat{N}_d] = [\hat{N}] \quad (3.57)$$

şeklinde elde edilebilir [57].

BÖLÜM 4. İDEAL FERMİ GAZI

1850’li yıllara kadar deneysel bir bilim olarak gelişen termodinamik, bir sistemin makroskobik özelliklerini sistemin mikroskobik yapısına bakmadan inceler. Mikroskobik yapı kinetik teori ile kısmen incelenmeye başlamış olsa da, 1872 yılındaki Boltzmann’ın çalışmalarına kadar moleküler dinamik ile makroskobik termodinamik arasındaki gerçek bağlantı ortaya konamamıştır [61].

İstatistiksel mekanik ele alınan sistemi oluşturan parçacıkların türüne göre ve ele alınan sistemin enerji ve parçacık alışverişine izin verme durumuna göre farklı sistemlerde çalışır. Ayırtedilebilir parçacıklardan oluşan bir sistem klasik yaklaşım çerçevesinde incelenirken Maxwell-Boltzmann istatistiği kullanır. Kuantum mekaniğin ele alınan ve ayırt edilemez parçacıklardan oluşan bozonlar için Bose-Einstein istatistiği ve fermiyonlar için de Fermi-Dirac istatistiği kullanılır [50]. İç enerjisi ve parçacık sayısı değişmeyen sistemler mikrokanoik kümede incelenirken, sadece enerji alışverişine izin veren sistemler kanonik kümede, enerji ve parçacık alışverişine izin verilen sistemler de büyük kanonik kümede incelenir.

Bu bölümde birbirleriyle etkileşmeyen fermiyonlardan oluşan Fermi gazı sistemi büyük kanonik küme yaklaşımıyla incelenecektir [62]. Öncelikle fermiyonlardan oluşan sistemin büyük paylaşım fonksiyonunun nasıl yazılacağı hakkında bilgi verilecek, sonrasında da sistemin basıncını, toplam parçacık sayısını ifade eden nicelikler ile büyük paylaşım fonksiyonu arasındaki ilişkiyi ortaya koyan eşitlikler yazılacaktır. İdeal Fermi gazı sisteminin yüksek ve düşük sıcaklıklar için termostatistiksel özellikleri hakkında bilgi verilip, Fermi gazı modelinin doğadaki bazı örneklerinden bahsedilecektir.

4.1. Fermi Gazının Genel İstatistik Mekaniksel Özellikleri

Parçacık sayısı sabit ve N olan bir fermiyon sisteminin çevresiyle enerji alışverişine izin verildiği durumda bu sistem kanonik küme yaklaşımıyla incelenebilir ve bu sisteme ait paylaşım fonksiyonu

$$Q_N(V, T) = \sum_r e^{-E_r/kT} \quad (4.1)$$

eşitliği ile verilir [61]. Burada k Boltzmann sabitidir. Herhangi bir E_r iç enerjisini verebilecek tüm \vec{p} momentumlu, ε_p enerjili parçacık sayısı n_p ile gösterilirse

$$E_r = \sum_p n_p \varepsilon_p \quad (4.2)$$

$$N = \sum_p n_p \quad (4.3)$$

eşitliklerini yazmak mümkün olur [61, 63]. Buna göre paylaşım fonksiyonu

$$Q_N(V, T) = \sum_{\substack{\{n_p\} \\ \sum_p n_p = N}} \exp\{-\beta \sum_p n_p \varepsilon_p\} \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir [61, 63]. Burada $\beta = 1/kT$ ve toplam işlemi (4.3) koşulunu sağlayan tüm $\{n_p\}$ dağılımlar kümesi üzerinden bir toplamdır [61]. Unutulmamalıdır ki fermiyonlar için $n_p = 0, 1$ değerlerini alabilmektedir [63].

Enerji ve parçacık alışverişine izin verilen bir fermiyon sisteminde ise (4.2) ve (4.3) eşitlikleri ile verilen E_r ve N büyüklükleri değişmektedir. Bu durumda paylaşım fonksiyonu yerine sistemin büyük paylaşım fonksiyonu ile ilgilenilir. Büyük paylaşım fonksiyonu

$$\begin{aligned}
Z(z, V, T) &= \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N(V, T) \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_p\}} \prod_p (ze^{-\beta\varepsilon_p})^{n_p} \quad (4.5)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir [63]. Burada $z = e^{\beta\mu}$ fugasite olarak adlandırılan sistemin etkin basıncı, μ de kimyasal potansiyelidir. Burada $\sum_{\{n_p\}}$ toplamı yine $N = \sum_p n_p$ şartını sağlayacak olan toplamdır. Ancak büyük kanonik kümede N sürekli değiştiği için buradaki iki toplam tüm mümkün n_p 'ler üzerinden ayrı ayrı toplam almaya denktir [61]. Böylece büyük paylaşım fonksiyonu

$$\begin{aligned}
Z(z, V, T) &= \sum_{n_0, n_1, \dots} [(ze^{-\beta\varepsilon_0})^{n_0} (ze^{-\beta\varepsilon_1})^{n_1} \dots] \\
&= \sum_{n_0} (ze^{-\beta\varepsilon_0})^{n_0} \sum_{n_1} (ze^{-\beta\varepsilon_1})^{n_1} \dots \\
&= \prod_p \sum_n (ze^{-\beta\varepsilon_p})^n \quad (4.6)
\end{aligned}$$

biçiminde yeniden yazılabilir [63]. Fermiyonlar için $n = 0, 1$ olduğundan (4.6) eşitliği

$$Z(z, V, T) = \prod_p (1 + ze^{-\beta\varepsilon_p}) \quad (4.7)$$

şeklinde düzenlenebilir [63]. Büyük paylaşım fonksiyonunun logaritması sistemin termodinamik büyüklüklerinin elde edilmesi için kullanılabilir. Sistemin basınç ve toplam parçacık sayısını içeren ifadeler sırasıyla

$$\frac{PV}{kT} = \ln Z(z, V, T) = \sum_p \ln(1 + ze^{-\beta\varepsilon_p}) \quad (4.8)$$

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z(z, V, T) = \sum_p \frac{1}{1 + z^{-1} e^{\beta\varepsilon_p}} \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir [63]. Dikkat edilirse, sistemin p momentumlu, ε_p enerjili ortalama parçacık sayısı $\langle n_p \rangle$

$$\langle n_p \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_p} \ln Z(z, V, T) = \frac{1}{1 + z^{-1} e^{\beta\varepsilon_p}} \quad (4.10)$$

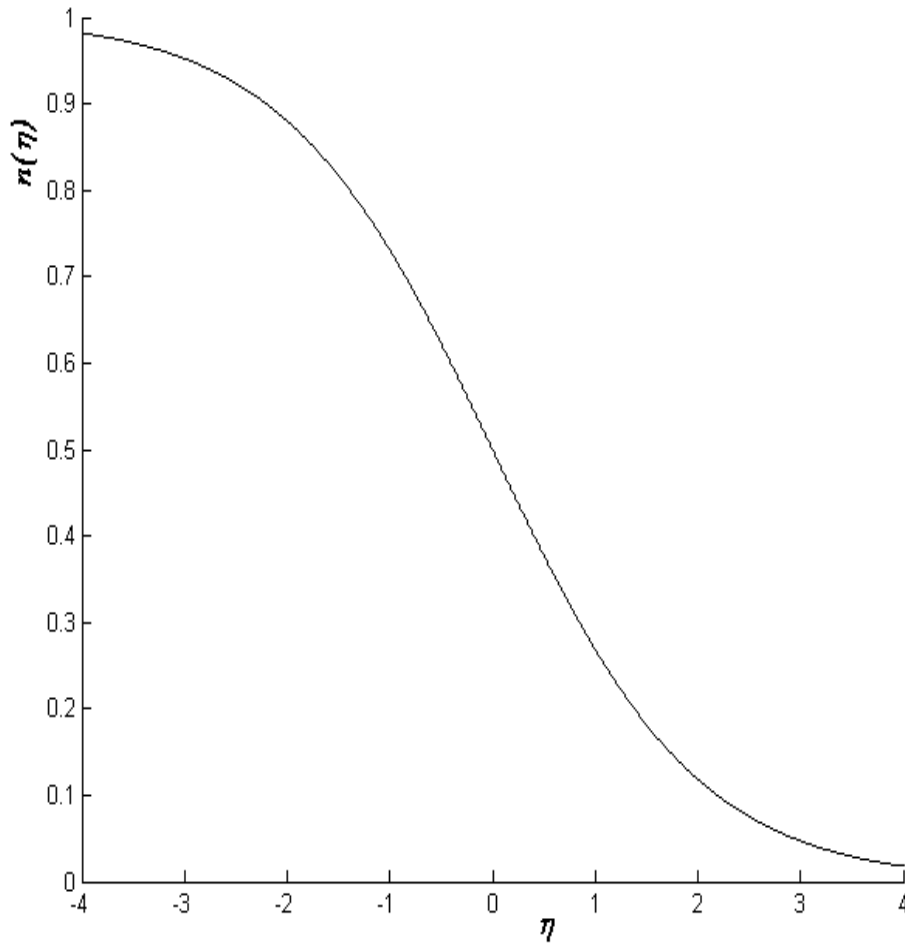
eşitliğiyle ifade edilebilir. Dağılım fonksiyonu olarak da adlandırılan bu ifade

$$N = \sum_p \langle n_p \rangle \quad (4.11)$$

eşitliğinin (4.9) eşitliği ile kıyaslanmasıyla da elde edilebilir [63]. (4.10) eşitliği $\eta = \beta(\varepsilon_p - \mu)$ dönüşümü ile

$$n(\eta) = \frac{1}{1 + e^\eta} \quad (4.12)$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir. Bu dağılım fonksiyonunun sonlu sıcaklıklarda η 'ya göre değişimi Şekil 4.1.'de verilmiştir.



Şekil 4.1. Standart Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun sonlu sıcaklıklarda η 'ya göre değişimi ($\eta = \beta(\varepsilon_p - \mu)$).

Dağılım fonksiyonunun Şekil 4.1. de verilen ve sıcaklığın sıfır olmayan fakat sıfıra çok yakın değerlerinde $\eta = \beta(\varepsilon_p - \mu)$ değişkenine bağlı değişim grafiğine göre tek-parçacık enerji seviyesi ε_p , μ 'den büyükken $T=0$ durumuna göre bazı fermiyonların istatistiksel olarak daha üst seviyelere uyarıldıkları anlaşılmaktadır. Ayrıca yine Pauli dışarlama ilkesine göre dağılım fonksiyonunun birden büyük değer alamayacağı da görülmektedir [61, 64]. Şekil 4.1.'deki standart Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun grafiği için Matlab program kodu Ek 1.'de sunulmuştur.

(4.8) ve (4.9) eşitliklerinde; $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ limitinde sayısı çok fazla olan kesikli durumlar süreklimiş gibi ele alınabilirler ve toplam sembolüyle ifade edilen eşitlikler uygun bir şekilde integrale dönüştürülebilir. Öyle ki bu eşitliklerde p üzerinden toplamlar,

$$\sum_p \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3 p \quad (4.13)$$

şeklinde integrale dönüştürülebilir [63]. Böylece (4.8) ve (4.9) eşitlikleri

$$\frac{P}{kT} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln(1 + ze^{-\beta p^2/2m}) \quad (4.14)$$

$$\frac{N}{V} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{1 + z^{-1} e^{\beta p^2/2m}} \quad (4.15)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $\varepsilon_p = p^2/2m$ ve $d^3 p = 4\pi p^2 dp$ 'dir. (4.14) ve (4.15) eşitliklerinde g dejenerelik faktörü 1 kabul edilmiştir. (4.14) ve (4.15) eşitlikleri $x^2 = \beta p^2/2m$ dönüşümü yapılarak

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^2 \ln(1 + ze^{-x^2}) \quad (4.16)$$

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1 + z^{-1} e^{x^2}} \quad (4.17)$$

şeklinde yeniden yazılabilir [63]. Burada $\lambda = h/\sqrt{2\pi mkT}$ termal dalga boyudur. (4.16) ve (4.17)'deki eşitliklerde

$$f_n(z) = \frac{2}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1} dx}{1+z^{-1}e^{x^2}}, \quad 0 \leq z \leq \infty \quad (4.18)$$

ile verilen Fermi integralleri tanımlanırsa [64], bunlar

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad (4.19)$$

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z) \quad (4.20)$$

formunda yeniden yazılabilir [61, 63]. (4.18) eşitliğindeki $\Gamma(n)$

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \quad (4.21)$$

eşitliği ile tanımlanan Gamma fonksiyonudur [61]. Kısmi integrasyon uygulayarak Gamma fonksiyonlarının aynı zamanda

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \quad (4.22)$$

eşitliğini sağladığını da görmek mümkündür [61]. (4.19) ve (4.20) eşitliklerinde n yarım tamsayı değerler almaktadır. Bu değerlere karşı gelen Gamma fonksiyonlarını kolayca hesaplayabilmek için

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (4.23)$$

eşitliğini de not etmek uygun olacaktır [61].

(4.8) ve (4.19) eşitlikleri ışığında

$$\ln Z = \frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad (4.24)$$

yazılabileceğinden, sistemin iç enerjisi için

$$U = - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{z,V} = \frac{3}{2} kT \frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z) = \frac{3}{2} NkT \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \quad (4.25)$$

eşitliği elde edilebilir [61]. Böylece sistemin iç enerjisinin

$$U = \frac{3}{2} PV \quad (4.26)$$

eşitliğini sağladığı da görülebilir.

İdeal fermi gazı için sabit hacimdeki öz ısısı C_V

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{N,V} = - \frac{3}{2T} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f_n(z) = \frac{1}{z} f_{n-1}(z) \quad (4.28)$$

eşitlikleri yardımıyla, (4.25) eşitliğinden hareketle $C_V = (\partial U / \partial T)_{N,V}$ ifadesinden

$$\frac{C_V}{Nk} = \frac{15}{4} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)} \quad (4.29)$$

elde edilebilir [61]. Sistemin Helmholtz serbest enerjisi ve entropisi de

$$F = \mu N - PV, \quad S = \frac{1}{T} (U - F) \quad (4.30)$$

eşitliklerinden hareketle sırasıyla

$$F = NkT \left\{ \ln z - \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \right\} \quad (4.31)$$

$$S = Nk \left\{ \frac{5}{2} \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} - \ln z \right\} \quad (4.32)$$

şeklinde yazılabilir [61].

Dikkat edilirse, sistemin iç enerjisi, öz ısısı, Helmholtz serbest enerjisi ve entropisini ifade eden eşitliklerin hepsi Fermi-Dirac fonksiyonlarını içermektedir. Ancak bu fonksiyonları, (4.18) tanım eşitliğinden de görülebileceği gibi z 'nin değer aralığına göre farklı formda ifade etmek mümkündür. Bu durumu daha iyi ifade edebilmek için (4.18) eşitliğindeki $\frac{1}{1+z^{-1}e^{-x^2}}$ terimine odaklanmak uygun olacaktır.

$$\frac{1}{1+z^{-1}e^{-x^2}} = ze^{-x^2} \frac{1}{1+ze^{-x^2}} \quad (4.33)$$

eşitliğinden görülebilir ki $\frac{1}{1+ze^{-x^2}}$ terimi ancak $z < 1$ için yakınsamaktadır.

Dolayısıyla $z < 1$ için bu terimi seriye açmak mümkündür. Yani $z < 1$ limitinde $f_n(z)$ fonksiyonu için sırasıyla

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{2}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1} dx}{1+z^{-1}e^{-x^2}} \\ &= \frac{2}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{2n-1} \frac{ze^{-x^2}}{1+ze^{-x^2}} dx \\ &= \frac{2}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{2n-1} ze^{-x^2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (ze^{-x^2})^l dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{2n-1} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} (ze^{-x^2})^l dx \\
&= \frac{2}{\Gamma(n)} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} z^l \int_0^{\infty} x^{2n-1} e^{-x^2 l} dx \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{z^l}{l^n}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

eşitliklerini yazmak mümkündür [61, 63]. Burada son satır yazılırken $x^2 l = w$ dönüşümüyle elde edilen

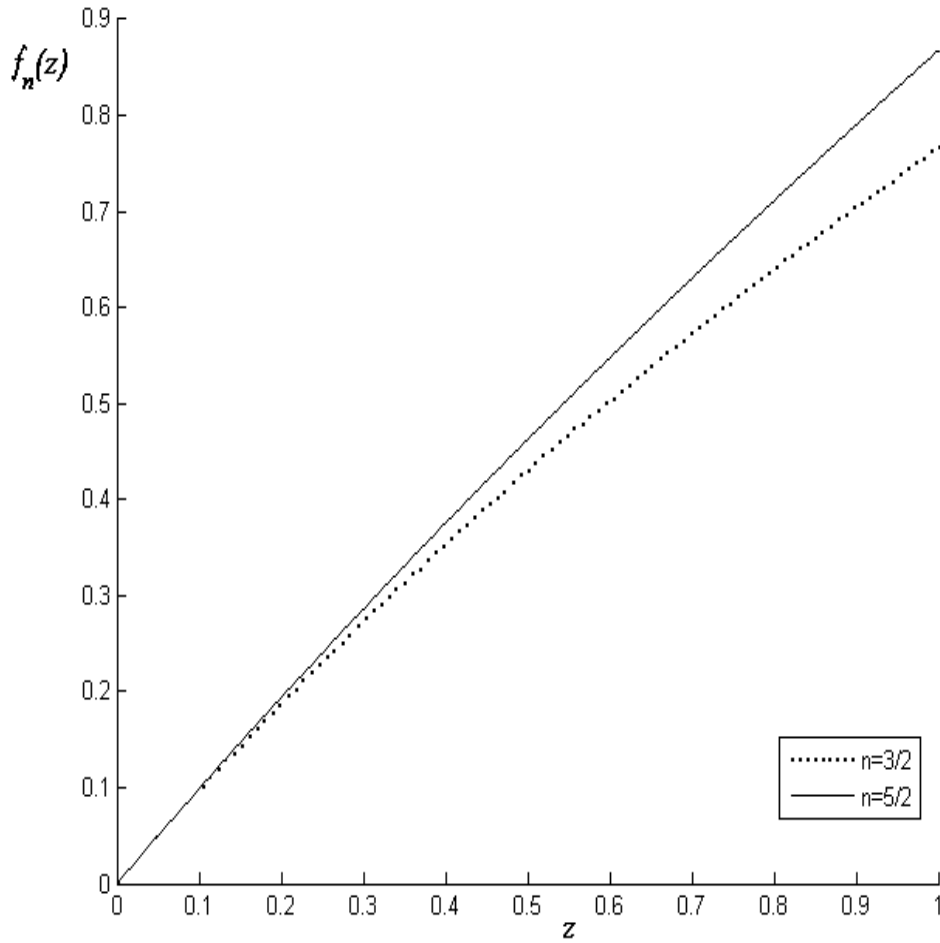
$$\int_0^{\infty} x^{2n-1} e^{-x^2 l} dx = \frac{1}{2l^n} \int_0^{\infty} e^{-w} w^{n-1} dw = \frac{1}{2l^n} \Gamma(n) \tag{4.35}$$

eşitliği kullanılmıştır. (4.34) eşitliğinin $n = 5/2$ ve $n = 3/2$ için düzenlenmesiyle Fermi-Dirac fonksiyonları $z < 1$ limiti için

$$f_{5/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \frac{z^3}{3^{5/2}} - \frac{z^4}{4^{5/2}} + \dots \tag{4.36}$$

$$f_{3/2}(z) = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} - \frac{z^4}{4^{3/2}} + \dots \tag{4.37}$$

şeklinde yazılabilir. Bu fonksiyonların z 'ye göre değişimlerini gösteren grafik de



Şekil 4.2. $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ Standart Fermi-Dirac fonksiyonlarının $0 \leq z \leq 1$ aralığında değişimi.

şeklinde çizilebilir. Ayrıca $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ standart Fermi-Dirac fonksiyonlarının grafiklerinin Matlab program kodları Ek 1. kısmında sunulmuştur.

Fermi-Dirac fonksiyonlarının $z > 1$ limit durumundaki davranışını incelemek için öncelikle (4.18) eşitliğinde $x^2 = y$ dönüşümünü yapıp, sonrasında bu ifade için kısmi integrasyon uygulamak uygun olacaktır. Bu işlemler yapıldığında (4.18) eşitliğinin

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \frac{y^n e^{y-z}}{(e^y + 1)^2} dy \quad (4.38)$$

şeklinde yeniden yazılabileceğini görmek mümkündür [63]. Burada $z = e^{\mu/kT} = e^v$ olarak alınmıştır. (4.38) eşitliğindeki integral elemanter yollarla çözülemeyeceğinden, bu ifadedeki y^n 'yi v civarında seriye açmak uygun olacaktır.

y^n için v civarında Taylor seri açılımı yapıldığında, $f_n(z)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \frac{e^{y-v} dy}{(e^{y-v} + 1)^2} \left[\binom{n}{0} v^n + \binom{n}{1} v^{n-1} (y-v) + \binom{n}{2} v^{n-2} (y-v)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_{-v}^\infty \frac{e^t dt}{(e^t + 1)^2} \left[\binom{n}{0} v^n + \binom{n}{1} v^{n-1} t + \binom{n}{2} v^{n-2} t^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

şeklinde yazılabilir [63]. Dikkat edilirse son eşitlikte $y-v=t$ dönüşümü yapıldığından integralin sınırları da değişmiştir. Bu yeni sınırlar ışığında integral ifadesi

$$\int_{-v}^\infty = \int_{-\infty}^\infty - \int_{-\infty}^{-v} \quad (4.40)$$

şeklinde iki integrale ayrılabilir. Burada sınırları $-\infty$ ile $-v$ arasında değişen integrale bakılırsa, en büyük katkının e^{-v} 'lü terimden geleceği görülebilir. Ancak burada bu hesapların detayı gösterilmeyeceği gibi, bu hesaplamalar da sonuna kadar yapılmayacaktır. Bunun sebebi biraz ileride daha net bir şekilde ortaya konulacaktır.

$f_n(z)$ fonksiyonu

$$I_m = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^t t^m dt}{(e^t + 1)^2} \quad (4.41)$$

eşitliği ışığında

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left[I_0 \binom{n}{0} v^n + \binom{n}{1} I_1 v^{n-1} t + \binom{n}{2} I_2 v^{n-2} t^2 + \dots \right] + O(e^{-v}) \quad (4.42)$$

şeklinde yeniden yazılabilir [63]. I_m integralleri için gerekli işlemler yapıldığında, m 'nin tek değerleri için I_m integrallerinin sıfıra eşit olduğu görülür. $I_0 = 1$ olmak üzere m 'nin çift değerleri için de I_m integralleri

$$I_m = (m-1)!2m(1-2^{1-m})\zeta(m) \quad (4.43)$$

eşitliği ile ifade edilebilir [63]. Burada $\zeta(m)$

$$\zeta(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m} \quad (4.44)$$

eşitliği ile ifade edilen Riemann zeta fonksiyonlarıdır. (4.42) eşitliği yazılırken, sınırları $-\infty$ ile $-\nu$ arasında değişen integralden gelen katkı sadece mertebe olarak vurgulanmıştır. Bunun sebebi z 'nin çok büyük değerleri için bu integralden gelecek katkının diğer terimlerle mukayese edildiğinde göz ardı edilebilecek olmasıdır. Yani $z \gg 1$ için $f_n(z)$ fonksiyonu

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left[\binom{n}{0} (\ln z)^n + \binom{n}{2} 4(1-2^{-1})\zeta(m)\zeta(2)(\ln z)^{n-2} + \dots \right] \quad (4.45)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Böylece $n = 5/2$ ve $n = 3/2$ için $f_n(z)$ fonksiyonları $z \gg 1$ için sırasıyla

$$f_{5/2}(z) = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} [(\ln z)^{5/2} + \frac{5\pi^2}{8} (\ln z)^{1/2} + \dots] \quad (4.46)$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} [(\ln z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-1/2} + \dots] \quad (4.47)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\zeta(2) = \pi^2/6$ eşitliği kullanılmıştır [63].

Buraya kadar $f_n(z)$ standart Fermi-Dirac fonksiyonlarının z 'nin farklı değer aralığına göre nasıl ifade edilebileceği matematiksel olarak ortaya konmuştur. Ancak unutulmamalıdır ki z 'nin almış olduğu değerler, göz önüne alınan ideal Fermi gazı sisteminin sıcaklığı ile yakından ilgilidir. Öyle ki $z \ll 1$ ve $z \gg 1$ limit durumları fiziksel olarak ideal Fermi gazında sırasıyla yüksek ve düşük sıcaklıklar limitine karşı gelmektedir.

4.1.1. Yüksek sıcaklık ve düşük yoğunluk limiti ($N\lambda^3/V \ll 1$)

Yüksek sıcaklık ve düşük yoğunluk limitinde, yani $N\lambda^3/V \ll 1$ için parçacıklar arası ortalama uzaklık, termal dalga boyundan çok büyüktür. Bu sebeple sistemdeki kuantum etkiler göz ardı edilebilir ve sistemin klasik rejimde olması beklenir [62, 63].

(4.20) ve (4.37) eşitliklerinden bilinmektedir ki

$$\frac{N\lambda^3}{V} = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} - \frac{z^4}{4^{3/2}} + \dots \quad (4.48)$$

eşitliğini yazmak mümkündür. Bu eşitlik ışığında z , $(N\lambda^3/V)$ 'nin kuvvet serisi olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} z = & \frac{N\lambda^3}{V} + \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^2 + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^{3/2}} \right) \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^3 + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{5}{6^{3/2}} + \frac{5}{2^{9/2}} \right) \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^4 \\ & + \left(\frac{95}{2^5 3^2} + \frac{3}{2^{7/2}} - \frac{7}{2^3 3^{1/2}} - \frac{1}{5^{3/2}} \right) \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^5 + \dots \end{aligned} \quad (4.49)$$

eşitliğinin elde edilebileceği görülür. Bu eşitlikten de $N\lambda^3/V \ll 1$ için

$$z \approx \frac{N\lambda^3}{V} \quad (4.50)$$

yaklaşımının yapılabileceği kolaylıkla söylenebilir. Yani yüksek sıcaklık ve düşük yoğunluk limiti daha önceden yapılan hesaplamalardaki $z \ll 1$ durumuna da karşı gelmektedir. Yüksek sıcaklıklar limitinde (4.10) eşitliğiyle verilen Fermi-Dirac dağılım fonksiyonu beklendiği gibi

$$\langle n_p \rangle \approx \frac{\lambda^3}{V} e^{-\beta \epsilon_p} \quad (4.51)$$

eşitliğiyle ifade edilen klasik Maxwell-Boltzmann dağılım fonksiyonuna dönüşür [63].

(4.19) eşitliği, (4.36) eşitliğini kullanarak

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} \left(z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \frac{z^3}{3^{5/2}} - \frac{z^4}{4^{5/2}} + \dots \right) \quad (4.52)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (4.49) eşitliğindeki z ifadesinin bu eşitlikte yerine yazılmasıyla, ideal Fermi gazının hal denkleminin virial açılımı

$$\begin{aligned} \frac{PV}{NkT} = & 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{2}{3^{5/2}} \right) \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^2 + \left(\frac{5}{2^{11/2}} - \frac{1}{2^{3/2}3^{1/2}} + \frac{3}{2^5} \right) \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^3 \\ & + \left(\frac{7}{2^6} - \frac{1}{3^{1/2}2} + \frac{1}{2^{5/2}} + \frac{2}{3^3} - \frac{4}{5^{5/2}} \right) \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.53)$$

şeklinde elde edilir.

$z \ll 1$ için $f_n(z) \approx z$ olduğundan, bu limitte ideal Fermi gazının tüm özellikleri klasik Maxwell-Boltzmann gazının özelliklerine indirgenir. Örneğin sistemin hal denklemi

$$PV = NkT \quad (4.54)$$

olurken, sistemin iç enerjisi de (4.25)'ten yararlanarak

$$U = \frac{3}{2} NkT, \quad (4.55)$$

eşitliğine indirgenir. Ayrıca bu limitte, sistemin öz ısısını, Helmholtz serbest enerjisini ve entropisini ifade eden eşitlikler (4.29), (4.31) ve (4.32)'den yararlanarak sırasıyla

$$C_V = \frac{3}{2} Nk, \quad (4.56)$$

$$F = NkT \left\{ \ln \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) - 1 \right\}, \quad (4.57)$$

$$S = Nk \left\{ \frac{5}{2} - \ln \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) \right\} \quad (4.58)$$

olacaktır [61].

Şimdiye kadar ideal Fermi gazının üç boyutlu uzayda yüksek sıcaklıklar limitindeki özellikleri üzerinde durulmuştur. Bu sistemin düşük sıcaklıklarındaki özelliklerinden bahsetmeden önce, yüksek sıcaklıklar limitinde iki boyutlu uzay için sistemin hal denkleminin virial açılımından bahsetmek uygun olacaktır. Bunun için ideal Fermi gazı yine büyük kanonik kümede incelenecektir. Bu sistem için

$$\frac{PA}{kT} = \ln Z = \sum_p \ln (1 + ze^{-\beta p^2/2m}) \quad (4.59)$$

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z = \sum_p \frac{1}{1 + z^{-1} e^{\beta p^2 / 2m}} \quad (4.60)$$

eşitliklerini yazmak mümkündür [65]. Burada A parçacıkların içinde buldukları alandır ve $A \rightarrow \infty$ limitinde kesikli \vec{p} 'ler üzerinden toplam

$$\sum_p \rightarrow \frac{A}{h^2} \int_0^\infty d^2 p \quad (4.61)$$

şeklinde integrale dönüşür. (4.59) ve (4.60) eşitlikleri bu dönüşüm ile

$$\frac{P}{kT} = \frac{2\pi}{h^2} \int_0^\infty p dp \ln(1 + z e^{-\beta p^2 / 2m}) \quad (4.62)$$

$$\frac{N}{A} = \frac{2\pi}{h^2} \int_0^\infty \frac{p dp}{1 + z^{-1} e^{\beta p^2 / 2m}} \quad (4.63)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu iki eşitlik, $\beta p^2 / 2m = x^2$ dönüşümü yapılır ve (4.62) eşitliğinde kısmi integrasyon uygulanırsa, iki boyutlu hal için

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^2} f_2(z) \quad (4.64)$$

$$\frac{N}{A} = \frac{1}{\lambda^2} f_1(z) \quad (4.65)$$

elde edilebilir. Burada $f_2(z)$ ve $f_1(z)$

$$f_2(z) = 2 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{1 + z^{-1} e^{x^2}} \quad (4.66)$$

$$f_1(z) = 2 \int_0^{\infty} \frac{x dx}{1 + z^{-1} e^{x^2}} \quad (4.67)$$

eşitlikleriyle ifade edilen Fermi-Dirac fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla $z < 1$ için

$$f_2(z) = z - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} - \frac{z^4}{4^2} + \frac{z^5}{5^2} - \dots \quad (4.68)$$

$$f_1(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots \quad (4.69)$$

ifadelerini yazmak mümkün olduğu gibi, (4.65) ve (4.69) eşitliklerini göz önüne alarak

$$f_1(z) = \frac{N\lambda^2}{A} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \dots \quad (4.70)$$

ifadesi de elde edilebilir. Bu ifadeler yardımıyla, z için

$$z = \frac{N\lambda^2}{A} + \frac{1}{2} \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right)^4 + \frac{1}{120} \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right)^5 + \dots \quad (4.71)$$

eşitliğini yazmak mümkündür. (4.64) ve (4.68) eşitliklerinden

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^2} \left(z - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} - \frac{z^4}{4^2} + \frac{z^5}{5^2} - \dots \right) \quad (4.72)$$

eşitliğinin yazılabileceği görülebilir. (4.71) eşitliğindeki z ifadesi (4.72) eşitliğinde kullanıldığında

$$\begin{aligned} \frac{PA}{NkT} = & 1 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right) + \frac{1}{2^2 3^2} \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right)^2 + \left(\frac{5}{2^4} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^4} \right) \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right)^3 \\ & - \frac{1}{2^4 3^2 5^2} \left(\frac{N\lambda^2}{A} \right)^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.73)$$

şeklinde, sistemin hal denkleminin virial açılımı elde edilir [65].

4.1.2. Düşük sıcaklık ve yüksek yoğunluk limiti ($N\lambda^3/V \gg 1$)

Bu tez çalışmasında iki parametre ile deforme Fermi gazı modelinin yüksek sıcaklıklar limitindeki özelliklerine odaklanılacağından, ideal Fermi gazının düşük sıcaklık limitindeki özellikleri kısaca ele alınacaktır.

$N\lambda^3/V \gg 1$ düşük sıcaklıklar limiti için parçacıklar arası mesafe termal dalga boyundan çok çok küçüktür. Bu durumda sistem Pauli dışarlama ilkesi ve diğer tüm kuantum etkilerinin dikkate alınacağı kuantum rejimindedir [63]. Sistemin düşük sıcaklık ve yüksek yoğunluk limiti göz önüne alındığından (4.20) eşitliği ışığında

$$f_{3/2}(z) \gg 1 \quad (4.74)$$

yazılabilir. Dolayısıyla $z \gg 1$ için yazılan (4.47) eşitliğini kullanarak, düşük sıcaklıklar için

$$\frac{N\lambda^3}{V} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[(\ln z)^{3/2} + \frac{\pi^2}{8} (\ln z)^{-1/2} + \dots \right] \quad (4.75)$$

ifadesini yazmak mümkündür [63]. İstenirse düşük sıcaklıklar limiti için $f_{5/2}(z)$ fonksiyonu, iç enerji, basınç ve öz ısı gibi diğer termo-istatistiksel fonksiyonlar da hesaplanabilir [63].

4.2. Fermi Gazı Modelinin Bazı Fiziksel Uygulamaları

Etkileşmeyen fermiyon parçacıklarının oluşturduğu ideal Fermi gazı modeli metallerde iletim elektronlarına ait bazı ilginç ölçülebilir büyüklüklerin hesaplanmasındaki tutarsızlıkların ortadan kaldırılmasına olanak verir [61, 64]. Tarihsel olarak metallerin elektron teorisi Drude ve Lorentz tarafından geliştirilmiştir [61]. Elektron gazı için Maxwell-Boltzmann istatistiği kullanılarak metallerin çeşitli özellikleriyle ilgili teorik sonuçlar elde edilmiştir. Drude-Lorentz modeli metallerin fiziksel davranışlarını anlamada kayda değer teorik bir temel oluştursa da, hem nitel hem de nicel olarak bir takım ciddi tutarsızlıklarla karşılaşmıştır. Örneğin metallerin gözlemlenen özısının hemen hemen sadece örgü titreşimlerinden kaynaklandığı, elektron gazının hiç katkıda bulunmadığı görülüyordu. Oysa, teori eş bölüşüm teoreminden dolayı gazdaki her elektronun metalin özısına $3k/2$ kadar bir katkı yapacağını söylüyordu. Ayrıca Drude-Lorentz teorisi ısı iletkenlik katsayısı ve elektriksel iletkenlik katsayısı gibi metallerin taşıma özelliklerinin incelenmesine de uygulanmıştı. Fakat teorik değerlerle deneysel değerler arasında yine bir uyumsuzluk bulunuyordu. Nihayet metallerin taşıma özellikleriyle ilgili tatmin edici çalışmalar Sommerfeld tarafından ortaya konmuştu. Sommerfeld metallerdeki elektron gazını tanımlamak için Maxwell-Boltzmann istatistiği yerine Fermi-Dirac istatistiğini kullanarak, birçok tutarsızlığı düzeltme dehasını göstermişti [61]. Metallerin serbest elektronlarının yoğunluğu 10^{22} cm^{-3} mertebesindedir ve bu durum için hesaplanan T_F Fermi sıcaklığı 10^4 K mertebesindedir. Bu sebeple oda sıcaklığı T_o için, $T_o \ll T_F$ olduğundan, metallerin serbest elektronları dejenere Fermi gazı olarak ele alınabilirler [66]. Elektronların metal atomlarına bağımlılıkları olmasaydı Coulomb etkileşiminden dolayı elektronlar bu şekildeki yüksek yoğunluğuna sahip olamayacaklardı ve bu sebeple dejenere ortadan kalkacak ve dejenere fermi gazı modeli kullanılamayacaktı. Ayrıca unutulmamalıdır ki metallere bağlı haldeykenki Coulomb etkileşimi de ihmal edilebilecek düzeyde olduğundan, metallerin serbest elektronları dejenere Fermi gazı sistemi olarak ele alınabilir [67].

Dış manyetik alan içinde, etkileşmeyen fermiyon gazının denge durumunun incelenmesi, ideal Fermi gazı modelinin uygulamadaki önemini vurgulamak için bir

diğer örnek olarak verilebilir. Temel problem gazın manyetik momentini sıcaklık ve dış manyetik alanın bir fonksiyonu olarak belirlemek ve gazın manyetik duyarlılığını hesaplamaktır. Maxwell-Boltzmann yaklaşımıyla yüksek sıcaklıklarda Curie yasasına uyan, düşük sıcaklıklarda manyetik doymuşluk durumuna ulaşılan pozitif bir manyetik duyarlılık değeri elde ediliyordu. Fakat problemin Fermi istatistiği ile incelenmesiyle belirgin bir şekilde farklı sonuçlar elde edilmekteydi; özellikle de düşük sıcaklıklarda. Çünkü Fermi gazı mutlak sıfırda dahi kısmi olarak hareketlidir ve bu yüzden bir manyetik doyum asla gerçekleşmez; bu sebeple sıcaklığa bağlı olmayan ve gazın yoğunluğuna bağlı olan bir limit duyarlılık değeri elde edilmekteydi. Söz konusu çalışmalar ilk olarak 1927 yılında Pauli tarafından yapılmış ve paramanyetik metallerin sıcaklıktan bağımsız karakteri ortaya konmuştu. Pauli'nin bahsedilen davranışı ortaya koymasındaki motivasyon, bu materyallerin serbest elektronlarının bir dejenere Fermi gazı sistemi olarak ele alınabilmesiydi [64]. Bu sebeple bu olay Pauli paramanyetizmi olarak adlandırılmış ve klasik Langevin paramanyetizminin yerini almıştır [61].

Klasik istatistikte karşılığı olmayan, kuantum istatistiğinde karşılaşılan bir diğer olay da Landau diamanyetizmidir. Dış manyetik alan altında yüklü parçacıkların yörüngeleri kuantumlanır. Bu olay ilk olarak 1930 yılında Landau tarafından ortaya konmuştur ve paramanyetik duyarlılığa benzer şekilde yine Curie yasasına uyan, $T \rightarrow 0$ limitinde sıcaklıktan bağımsız, yoğunluğa bağlı fakat negatif işaretli bir duyarlılığın olması gerektiği sonucuna varılmıştır. Genel olarak Fermi gazının manyetik davranışı, hem parçacıkların iç manyetik momentleri, hem de yörüngelerinin kuantizasyonu tarafından belirlenen bir manyetik davranıştır. Eğer spin-orbit etkileşmeleri ihmal edilebilir düzeydeyse, sistemin davranışı bu ikisinin basitçe birleşimiyle elde edilir [61].

Beyaz cüce yıldızlarının istatistiksel denge durumu Fermi istatistiğinin astrofizik alanındaki ilk uygulaması olarak görülebilir [61]. Beyaz cüce yıldızları beyaz ışığına rağmen anormal bir şekilde sönük ve küçük boyutlu yıldızlardır [63]. Yapısındaki hidrojeni tamamen tüketmesinden dolayı parlaklığını yitiren beyaz cüce yıldızları helyumdan oluşmaktadır. Bir beyaz cüce yıldızı tipik olarak 10^7 g/cm^3 yoğunluğa,

$10^{33} g$ kütle ve $10^7 K$ merkezi sıcaklığa sahiptir. Dolayısıyla bir beyaz cüce yıldızı aşırı yüksek sıcaklık ve basınçta bulunan helyum kütlesi olarak da ele alınabilir. Bu şartlarda helyum atomları tamamen iyonize olduklarından, yıldız helyum çekirdeğinden ve elektronlardan oluşan bir gaz olarak ele alınabilir. Bu elektron gazı yoğunluğu yaklaşık olarak $10^{30} \text{elektron/cm}^3$ olan bir ideal Fermi gazı olarak düşünülebilir. Bu da $20 MeV$ mertebesinde bir Fermi enerjisine ve $10^{11} K$ civarında bir Fermi sıcaklığına karşı gelmektedir. Fermi sıcaklığının yıldız sıcaklığından çok daha büyük olmasından dolayı, elektron gazı yüksek dejenere bir Fermi gazıdır. Elektron gazı taban durumda bulunan bir ideal Fermi gazı şeklindedir ve büyük bir sıfır-nokta basıncına sahiptir. Bu basınç helyum çekirdekleri tarafından oluşturulan gravitasyonel çekim ile dengelenmektedir ve yıldızın bütünlüğü bu çekim ile korunmaktadır. Buradan bir beyaz cüce yıldızının taban durumunda bulunan N elektron ve $N/2$ hareketsiz helyum çekirdeğinden oluştuğu varsayımına ulaşılabilir. Bu model beyaz cüce yıldızlarının yapısını oluşturan iyonize Helyum atomlarının elektronlarının, yoğunluk, Fermi enerjisi, Fermi sıcaklığı, Fermi basıncı gibi termostatistiksel özelliklerinin incelendiği bir yapının yanısıra [64] helyum çekirdeklerinin de gravitasyonel olarak incelendiği bir sistemin özelliklerini taşır [63].

Yukarıda serbest Fermi gazının istatistik mekaniksel özelliklerinin kullanıldığı bazı uygulamalar sunulmuş olup, bundan sonraki bölümde bu tez çalışmasının orijinal kısmını oluşturan (q,p) -deforme Fermi gazı modelinin istatistik mekaniksel özellikleri incelenecektir.

BÖLÜM 5. İKİ PARAMETRE İLE DEFORME FERMİ GAZI MODELİ

Tez çalışmasının orijinal kısmını oluşturan bu bölümde iki parametre ile deforme Fermi gazı modeli ile birlikte modelin genel istatistik mekaniksel özellikleri ele alınacak ve yüksek sıcaklıklardaki davranışına odaklanılacaktır. Bölümün bütünlüğü açısından öncelikle modelin kuantum cebirsel yapısı incelenecektir. Daha sonra modele ait toplam parçacık sayısı, basınç, iç enerji ve entropi fonksiyonları, deformasyon parametrelerine bağlı olarak bulunacaktır. Modelin hal denkleminin virial açılımı iki ve üç boyutlu uzayda çıkartılıp, ilk beş virial katsayısı deformasyon parametreleri cinsinden ifade edilecektir. Son olarak da yapılan hesaplamalar ışığında deformasyonun Fermi gazı modelinin kuantum istatistiksel özelliklerine etkisi üzerinde durulacaktır.

5.1. Modelin Kuantum Cebirsel Özellikleri

Bu çalışmada göz önüne alınan q ve p gibi iki reel bağımsız parametre ile deforme Fermi gazı modelinin kuantum cebirsel özellikleri aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

Deforme cebirin, i durumundan bir fermiyon eksiltmeyi temsil eden deforme yok etme operatörü c_i ve aynı durumda bir fermiyon arttırmayı temsil eden deforme yaratma operatörü c_i^* daha önce üçüncü bölümde yazıldığı gibi

$$c_i c_k = -\frac{q}{p} c_k c_i, \quad i < k, \quad (5.1)$$

$$c_i c_k^* = -qp c_k^* c_i, \quad i \neq k, \quad (5.2)$$

$$c_i^2 = 0, \quad (5.3)$$

$$c_1 c_1^* + p^2 c_1^* c_1 = p^{2\hat{N}}, \quad (5.4)$$

$$c_i c_i^* + q^2 c_i^* c_i = c_{i+1} c_{i+1}^* + p^2 c_{i+1}^* c_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, d-1, \quad (5.5)$$

$$q^{2\hat{N}} = c_d c_d^* + q^2 c_d^* c_d, \quad (5.6)$$

bağıntılarını sağlar. [68]. Sistemin toplam deforme sayı operatörü

$$[\hat{N}] = [\hat{N}_1 + \hat{N}_2 + \dots + \hat{N}_d] = \sum_{i=1}^d c_i^* c_i \quad (5.7)$$

biçimindedir ve deforme sayı operatörünün özdeğer spektrumu da

$$[n] = \frac{q^{2n} - p^{2n}}{q^2 - p^2} \quad (5.8)$$

şeklindeki Fibonacci temel tamsayıdır ($q \neq p, (q, p) \in R^+$). Bu yüzden (q, p) -deforme Fermi osilatörlerine, fermiyonik Fibonacci osilatörleri (FFO) adı da verilir. Burada \hat{N}_i deforme olmayan sayı operatörüdür ve bir i durumundaki fermiyon sayısının ölçümünden sorumludur. Bu sebeple sadece 0 ve 1 özdeğerlerine sahiptir. (5.1)-(5.8) eşitlikleriyle tanımlanan (q, p) -Fermi osilatörleri $SU_r(d)$ kuantum grup simetrisine sahiptir ($r = p/q$) [68].

Genel olarak q -deforme osilatör sistemlerinin deforme sayı operatörleri Jackson türev operatörü (JD) ile ilişkilendirilebildikleri literatürde iyi bilinmektedir [25, 26]. Öyleki bu tür sistemlerin istatistik mekaniksel özelliklerinin incelenmesinde de JD kullanılabilir. (q, p) -Deforme bozonik ve fermiyonik osilatör sistemlerinin istatistik

mekaniksel özelliklerinin incelemesinde de JD'nin iki parametrelili genelleştirilmesi olan Fibonacci fark operatörü $\partial^{(q,p)}$ kullanılabilir. Bu da

$$\partial_x^{(q,p)} f(x) = \frac{f(q^2 x) - f(p^2 x)}{(q^2 - p^2)x} \quad (5.9)$$

şeklinde tanımlanır [69]. (5.1)-(5.8) ile verilen FFO'nün oluşturduğu deforme Fermi gazı modelinin bu tez çalışmasında incelenecek termo-istatistiksel özelliklerinin bulunması için (5.9) eşitliğinin modifiye edilmiş formu kullanılacaktır. Aşağıda iki parametre ile deforme Fermi gazı modelinin bahsedilen istatistik mekaniksel özellikleri incelenecektir.

5.2. (q,p) -Deforme Fermi Gazı Modelinin İstatistik Mekaniksel Özellikleri

Büyük kanonik kümede (q,p) -deforme Fermi gazı modelinin Hamilton operatörü

$$\hat{H}_{q,p} = \sum_i (\varepsilon_i - \mu) \hat{N}_i \quad (5.10)$$

formunda alınabilir [70]. Burada ε_i , i durumundaki parçacığın kinetik enerjisi, ve \hat{N}_i , ε_i enerjili durumla uyumlu sayı operatörüdür. Bu Hamilton operatörü dolaylı olarak deforme ifadeleri içerdiği için özünde deforme bir Hamilton operatörüdür [70]. Öte yandan literatürde (5.10) formulu Hamilton operatörleri diğer deforme fermiyon ve bozon sistemleri için de göz önüne alınmıştır [25, 26, 71, 72].

(5.10) eşitliğinde verilen deforme Hamilton operatörü modelin büyük bölüşüm fonksiyonunda

$$Z = Tr(e^{-\beta \hat{H}_{q,p}}) \quad (5.11)$$

kullanılabilir. Dikkat edilirse bölüşüm fonksiyonu standart formdadır. Buradan termodinamik fonksiyonların hesaplanmasında kullanılmak üzere bu fonksiyonun logaritması

$$\ln Z = \sum_i \ln(1 + z e^{-\beta \varepsilon_i}) \quad (5.12)$$

formunda alınabilir. Burada $z = e^{\beta \mu}$ fugasitedir.

(q,p) -Deforme Fermi gazı modelinin termo-istatistiğini incelemek için (5.10)'daki deforme Hamiltonyen nedeniyle standart termodinamik bağıntılar modifiye edilmelidir. Örneğin incelenen model için $N \neq z(\partial \ln Z / \partial z)$ olmaktadır. Dolayısıyla buradaki standart termodinamik türev operatörü, Fibonacci fark operatörünün modifiye edilmiş formu ile yerdeğiştirmelidir:

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \hat{D}_z^{(q,p)} \quad (5.13)$$

olup, burada $\hat{D}_z^{(q,p)}$;

$$D_z^{(q,p)} f(z) = \frac{(q^2 - p^2)}{\ln(q^2 / p^2)} \left[\frac{f(q^2 z) - f(p^2 z)}{(q^2 - p^2)z} \right] \quad (5.14)$$

ile verilir [70, 71]. Böylece modelin toplam parçacık sayısı

$$N = z \hat{D}_z^{(q,p)} \ln Z \quad (5.15)$$

eşitliğinden bulunabilir. Aynı zamanda, $N = \sum_i n_{i,q,p}$ ile verilen sınırlayıcı koşul da

sağlanır. Modelin ortalama parçacık sayısı ise

$$[n_i] = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_{q,p}} [\hat{N}_i] \right) = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}_{q,p}} c_i^* c_i \right) \quad (5.16)$$

eşitliğinden yararlanılarak bulunabilir [20]. Buradan (5.1)-(5.8), (5.10) kullanılarak modelin ortalama parçacık sayısı

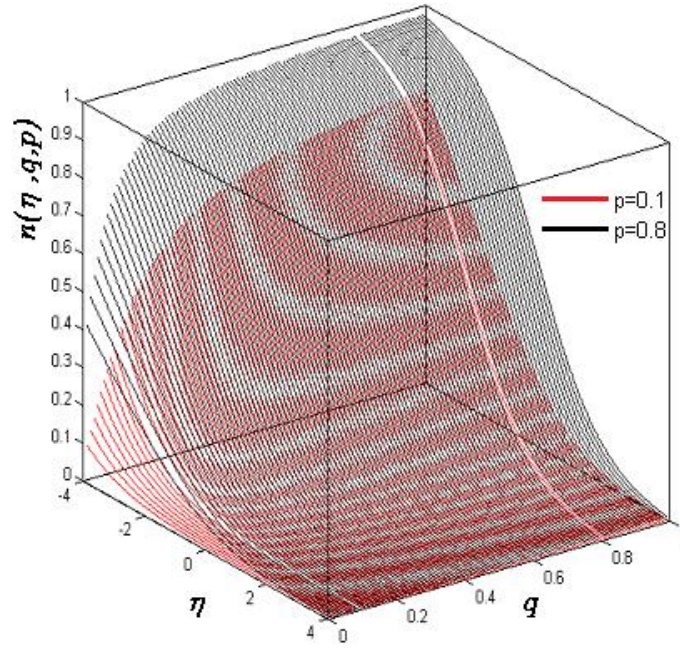
$$n_{i,q,p} = \frac{1}{\left| \ln(q^2 / p^2) \right|} \left| \ln \left(\frac{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_i} + q^2}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_i} + p^2} \right) \right| \quad (5.17)$$

formunda elde edilir [70]. Burada $q \neq p$ olup, deformasyon parametrelerinin değişim aralıklarını kısıtlamak yerine (5.17)'de mutlak değerler göz önüne alınarak dağılım fonksiyonunun pozitif olma koşulu yerine getirilmiştir. Ayrıca $(q, p) \rightarrow 1$ limitinde bu dağılım fonksiyonunun (4.12)'deki ideal Fermi gazının dağılım fonksiyonuna indirgendiği modelin kuantum cebirsel özellikleri kullanılarak görülebilir.

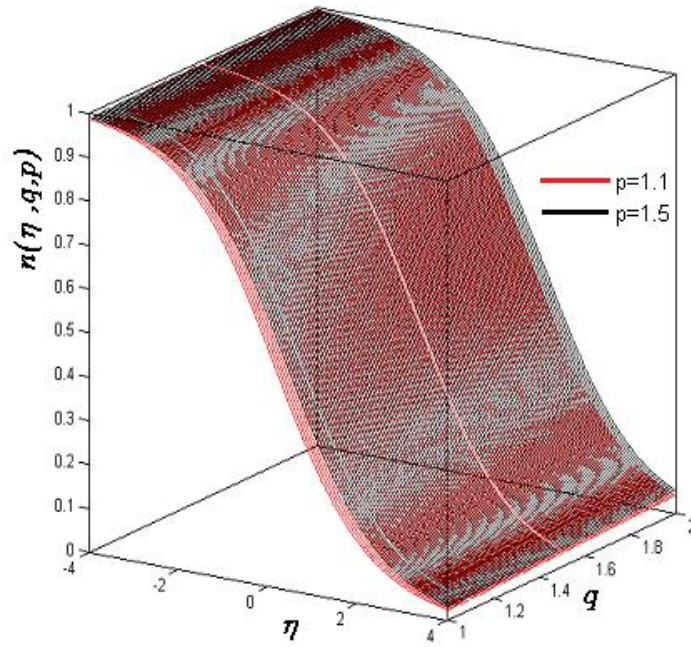
q ve p deformasyon parametrelerinin dağılım fonksiyonuna etkisini incelemek için $\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$ dönüşümüyle

$$n(\eta, q, p) = \frac{1}{\left| \ln(q^2 / p^2) \right|} \left| \ln \left(\frac{e^\eta + q^2}{e^\eta + p^2} \right) \right| \quad (5.18)$$

elde edilebilir. Bu dağılım fonksiyonunun farklı p değerleri için η ve q 'ya bağlı değişim grafikleri $(q, p) \leq 1$ ve $(q, p) \geq 1$ aralıkları için sırasıyla Şekil 5.1. ve Şekil 5.2.'de gösterilmiştir. Bu grafiklerin data analizlerinin sonucunda her iki aralık için $n(\eta, q, p)$ 'nin q ve p deformasyon parametrelerinin değerleri artarken arttığı görülmüştür.



Şekil 5.1. $(q, p) \leq 1$ aralığında (q,p)-Deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun farklı p değerleri için η ve q 'ya göre değişimi ($\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$).



Şekil 5.2. $(q, p) \geq 1$ aralığında (q,p)-Deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun farklı p değerleri için η ve q 'ya göre değişimi ($\eta = \beta(\varepsilon - \mu)$).

(q,p) -Deforme basınç ifadesi

$$\frac{PV}{kT} = \ln Z = \sum_i \ln(1 + ze^{-\beta\varepsilon_i}) \quad (5.19)$$

eşitliğinden elde edilebilir.

Termodinamik limite $N, V \rightarrow \infty$ durumu için (4.13) dönüşümünde $\varepsilon = p^2/2m$ eşitliğinin kullanılmasıyla,

$$\sum_i \rightarrow \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \quad (5.20)$$

dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüm ile $N = \sum_i n_{i,q,p}$ ve (5.19) eşitlikleri

$$N = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \left| \frac{1}{\ln(q^2/p^2)} \right| \left| \ln \left(\frac{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} + q^2}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} + p^2} \right) \right| \quad (5.21)$$

$$\frac{P}{kT} = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \ln(1 + ze^{-\beta\varepsilon}) \quad (5.22)$$

şeklinde yazılabilir. $x = \beta\varepsilon$ dönüşümü yapılırsa (5.14) eşitliğinde verilen $\hat{D}_x^{(q,p)}$ operatörü de kullanılarak (5.21) ve (5.22) eşitlikleri

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{1/2} dx \left| \frac{1}{\ln(q^2/p^2)} \right| \left| \ln \left(\frac{z^{-1}e^x + q^2}{z^{-1}e^x + p^2} \right) \right| \quad (5.23)$$

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{3/2} dx \left| \frac{1}{\ln(q^2/p^2)} \right| \left| \ln \left(\frac{z^{-1}e^x + q^2}{z^{-1}e^x + p^2} \right) \right| \quad (5.24)$$

formunda yeniden yazılabilir. (5.23) ve (5.24) eşitliklerindeki integraller

$$f_n(z, q, p) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{n-1} dx \frac{1}{|\ln(q^2/p^2)|} \left| \ln \left(\frac{z^{-1}e^x + q^2}{z^{-1}e^x + p^2} \right) \right| \quad (5.25)$$

şeklinde iki-parametre ile genelleştirilmiş Fermi integralleridir [70]. Böylece (5.23) ve (5.24) eşitlikleri

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} f_{3/2}(z, q, p) \quad (5.26)$$

$$\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} f_{5/2}(z, q, p) \quad (5.27)$$

formunda yazılabilir. Unutulmamalıdır ki yüksek sıcaklıklar limitindeki incelemelerde $z \ll 1$ limiti dikkate alındığından, bu limitte (5.25) eşitliğindeki integrale kısmi integrasyon uygulanır ve

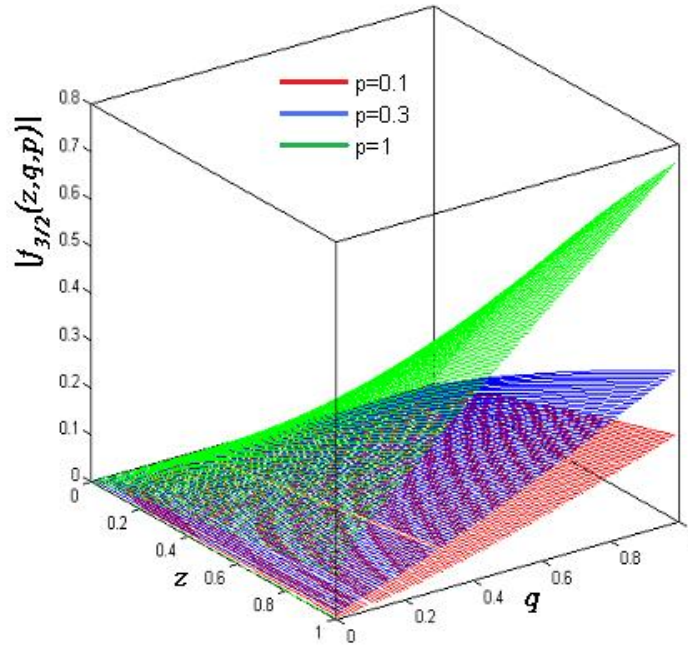
$$\frac{1}{1+q^2ze^{-x}} = \sum_{l=0}^{\infty} (-q^2ze^{-x})^l, \quad \frac{1}{1+p^2ze^{-x}} = \sum_{l=0}^{\infty} (-p^2ze^{-x})^l \quad (5.28)$$

yazılabilir. Buradan (5.25)'deki iki-parametre ile genelleştirilmiş Fermi integrallerinin çözümleri yapılırsa,

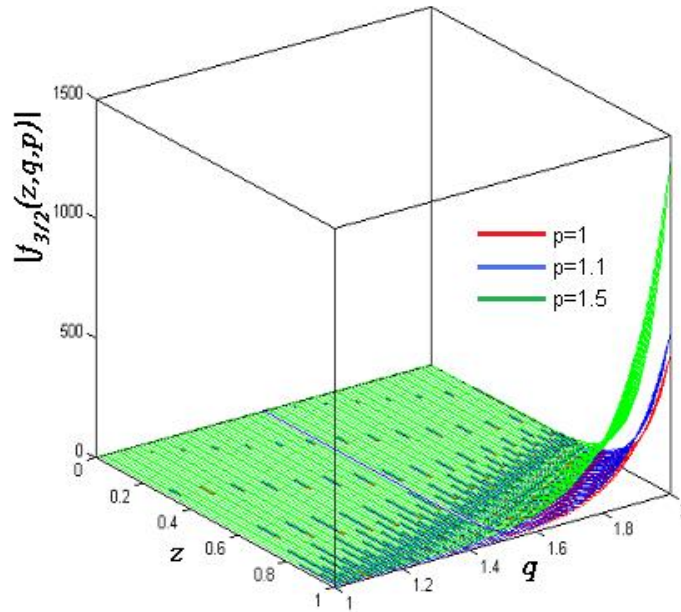
$$f_n(z, q, p) = \frac{1}{|\ln(q^2/p^2)|} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{(q^2z)^l}{l^{n+1}} - \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{(p^2z)^l}{l^{n+1}} \right\} \quad (5.29)$$

bulunur [70]. Şekil 5.3. ve Şekil 5.4.'de sırasıyla $f_{3/2}(z, q, p)$ fonksiyonlarının bazı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimlerinin grafikleri $(q, p) \leq 1$, $(q, p) \geq 1$ aralıkları için incelenmiştir. Şekil 5.5. ve Şekil 5.6.'da da sırasıyla $f_{5/2}(z, q, p)$

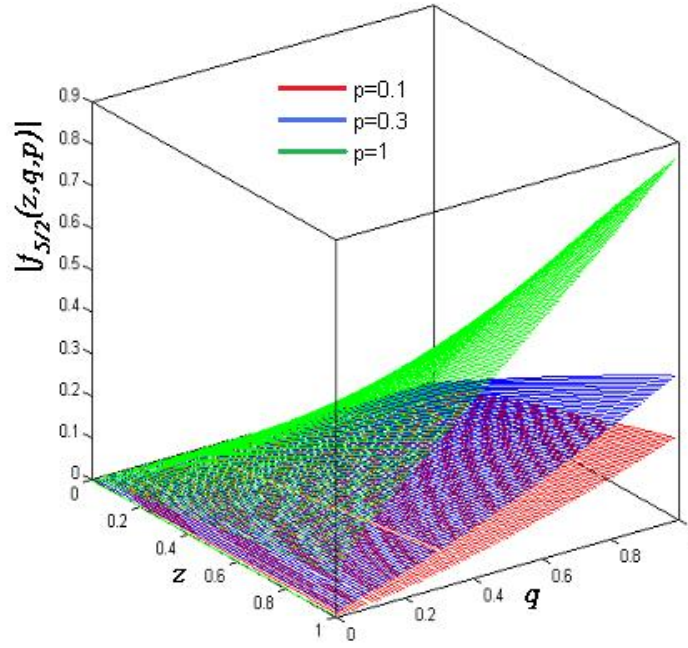
fonksiyonlarının bazı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimlerinin grafikleri $(q, p) \leq 1$, $(q, p) \geq 1$ aralıkları için incelenmiştir. Şekil 5.3.-Şekil 5.6.'nın elde edilmesi için gerekli olan Matlab program kodları Ek 2.'de verilmiştir. q ve p parametrelerinin artmasıyla $f_{3/2}(z, q, p)$ ve $f_{5/2}(z, q, p)$ fonksiyonlarının da arttığı gözlemlenmiştir. Bu fonksiyonlar $(q, p) \leq 1$ aralığında standart $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ fonksiyonlarından küçük, $(q, p) \geq 1$ aralığında ise büyük değerler almaktadır. Kendi içinde de, $f_{3/2}(z, q, p)$ fonksiyonu $(q, p) \leq 1$ aralığında $f_{5/2}(z, q, p)$ fonksiyonundan küçük, fakat $(q, p) \geq 1$ aralığında da büyük değerler almaktadır.



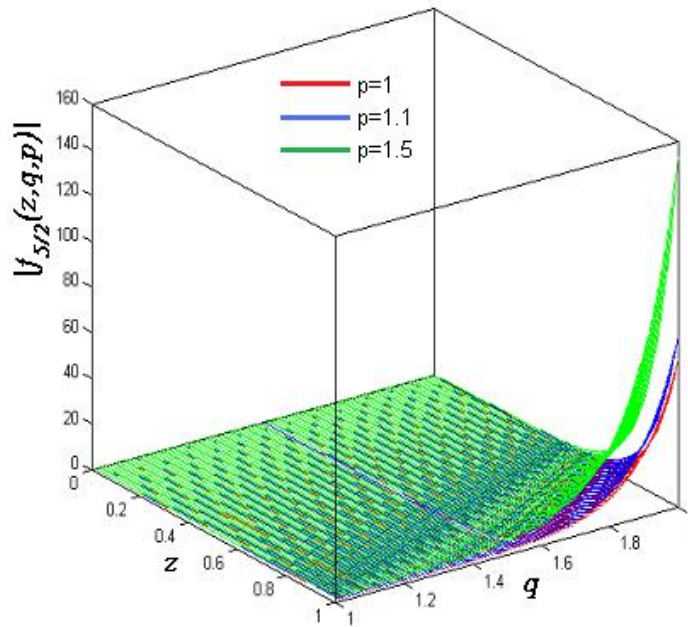
Şekil 5.3. $(q, p) \leq 1$ aralığında $f_{3/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonunun farklı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimi.



Şekil 5.4. $(q, p) \geq 1$ aralığında $f_{3/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonunun farklı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimi.



Şekil 5.5. $(q, p) \leq 1$ aralığında $f_{5/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonunun farklı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimi.



Şekil 5.6. $(q, p) \geq 1$ aralığında $f_{5/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonunun farklı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimi.

Modelin iç enerjisi $U = -(\partial \ln Z / \partial \beta)$ denkleminde elde edilebilir. Bunun için iç enerji

$$U = -\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta} D_{\alpha_i}^{(q,p)} \ln(1 + z\alpha_i) \quad (5.30)$$

formunda yeniden yazılmalıdır. Burada $\alpha_i = e^{-\beta \varepsilon_i}$ olmak üzere (5.14) eşitliğindeki $\hat{D}^{(q,p)}$ modifiye edilmiş Fibonacci fark operatörü kullanılmıştır. Öte yandan iç enerji fonksiyonu

$$U = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{\left| \ln(q^2/p^2) \right|} \left| \ln \left(\frac{1 + q^2 z e^{-\beta \varepsilon_i}}{1 + p^2 z e^{-\beta \varepsilon_i}} \right) \right| \quad (5.31)$$

formunu da sağlar. Termodinamik limitte $N, V \rightarrow \infty$ için (5.20) kullanılarak (5.31)'deki iç enerji ifadesi

$$U = \frac{3}{2} kT \frac{V}{\lambda^3} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{3/2} dx \frac{1}{\left| \ln(q^2/p^2) \right|} \left| \ln \left(\frac{1 + q^2 z e^{-x}}{1 + p^2 z e^{-x}} \right) \right| \quad (5.32)$$

formuna dönüşür. Burada yine $x = \beta \varepsilon$ olarak alınmıştır. Buradan (5.25) eşitliğindeki (q,p) -deforme Fermi-Dirac fonksiyonları kullanılırsa sistemin iç enerjisi

$$U = \frac{3}{2} kT \frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z, q, p) \quad (5.33)$$

olur. Burada $f_{5/2}(z, q, p)$ fonksiyonu (5.29) eşitliğinde verilmiştir.

Sistemin Helmholtz serbest enerjisi, (5.26) ve (5.27) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$F = \mu N - PV = NkT \left\{ \ln z - \frac{f_{5/2}(z, q, p)}{f_{3/2}(z, q, p)} \right\} \quad (5.34)$$

şeklinde elde edilir. Modelin entropi fonksiyonu da

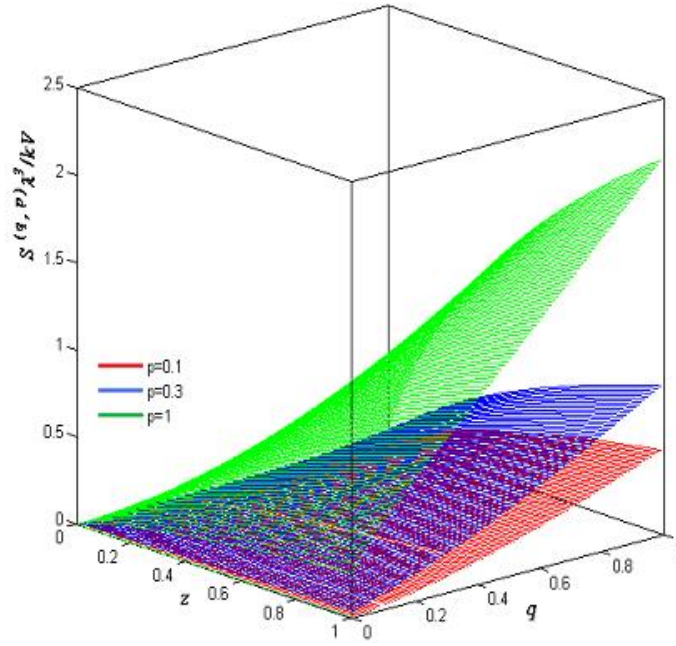
$$\frac{S}{k} = \ln Z + \beta U - \beta \mu N \quad (5.35)$$

şeklindeki eşitlikten elde edilebilir. Bu ifadede (5.26), (5.27) ve (5.33) eşitlikleriyle ifade edilen (q, p) -Fermi gazı modeline ait sonuçlar kullanılırsa, sistemin yüksek sıcaklıklarda deforme entropi fonksiyonu

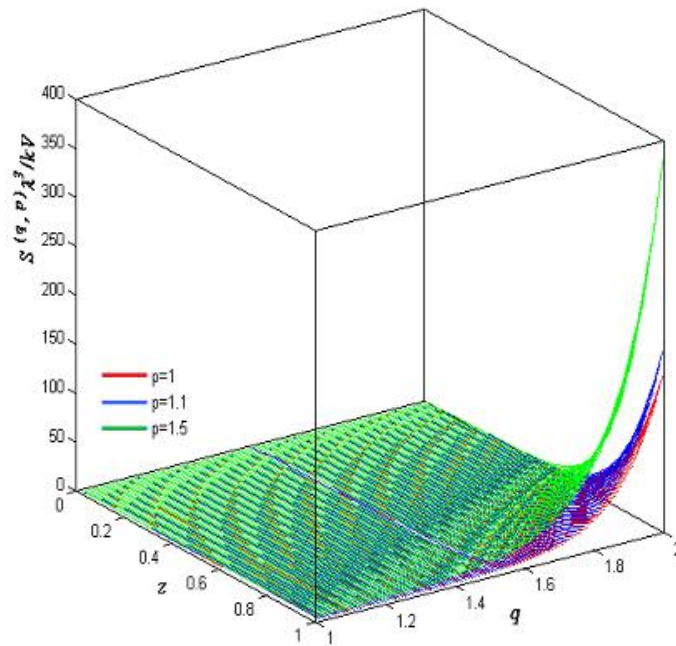
$$\frac{S^{(q,p)}}{V} = \frac{k}{\lambda^3} \left[\frac{5}{2} f_{5/2}(z, q, p) - f_{3/2}(z, q, p) \ln z \right] \quad (5.36)$$

şeklinde elde edilebilir. (5.36) eşitliğinden $S^{(q,p)} \lambda^3 / kV$ iki parametre ile deforme entropi fonksiyonunun bazı sabit p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimlerinin grafikleri Şekil 5.7. ve Şekil 5.8.'de $(q, p) \leq 1$, $(q, p) \geq 1$ aralıkları için incelenmiştir. Şekil 5.7. ve Şekil 5.8.'in elde edilmesi için gerekli olan Matlab program kodları Ek 2.'de verilmiştir. q ve p parametrelerinin artmasıyla $S^{(q,p)} \lambda^3 / kV$ fonksiyonunun da arttığı gözlemlenmiştir.

Bir sonraki bölümde sistemin yüksek sıcaklıklardaki hal denkleminin virial açılımı incelenecektir.



Şekil 5.7. $(q, p) \leq 1$ aralığında $S\lambda^3/kV$ entropi fonksiyonunun farklı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimi.



Şekil 5.8. $(q, p) \geq 1$ aralığında $S\lambda^3/kV$ entropi fonksiyonunun farklı p değerleri için z ve q 'ya bağlı değişimi.

5.3. (q,p) -Deforme Fermi Gazı Modelinin Hal Denklemleri

(q,p) -Deforme Fermi gazı modelinin yüksek sıcaklıklardaki hal denkleminin virial açılımı ve ilk beş virial katsayı q ve p deformasyon parametrelerinin fonksiyonu olarak, üç boyutlu ve iki boyutlu uzayda ayrı ayrı elde edilecektir. Virial katsayılarının q ve p parametreleri için değişim grafikleri incelenecek ve deformasyonun etkileri bulunmaya çalışılacaktır.

5.3.1. Üç boyutlu uzayda hal denklemleri ve virial katsayıları

Yüksek sıcaklıklar (veya $z \ll 1$) limitinde (5.29) eşitliğindeki $f_n(z, q, p)$ ifadesi (5.26) eşitliğinde kullanıldığında

$$\frac{N\lambda^3}{V} = \frac{1}{|\ln(q^2/p^2)|} \left[q^2 z - p^2 z - \frac{(q^2 z)^2 - (p^2 z)^2}{2^{5/2}} + \frac{(q^2 z)^3 - (p^2 z)^3}{3^{5/2}} - \frac{(q^2 z)^4 - (p^2 z)^4}{4^{5/2}} + \frac{(q^2 z)^5 - (p^2 z)^5}{5^{5/2}} \right] \quad (5.37)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} z = & \frac{|\ln(q^2/p^2)|}{(q^2 - p^2)} \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) + \frac{|\ln(q^2/p^2)|^2}{2^{5/2}} \frac{(q^4 - p^4)}{(q^2 - p^2)^3} \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^2 \\ & + \left[\frac{|\ln(q^2/p^2)|^3}{2^4} \frac{(q^4 - p^4)^2}{(q^2 - p^2)^5} - \frac{|\ln(q^2/p^2)|^3}{3^{5/2}} \frac{(q^6 - p^6)}{(q^2 - p^2)^4} \right] \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^3 \\ & + \left[\frac{5}{2^{15/2}} |\ln(q^2/p^2)|^4 \frac{(q^4 - p^4)^3}{(q^2 - p^2)^7} - \frac{5}{2^{5/2} 3^{5/2}} |\ln(q^2/p^2)|^4 \frac{(q^6 - p^6)(q^4 - p^4)}{(q^2 - p^2)^6} \right. \\ & \left. + \frac{|\ln(q^2/p^2)|^4}{4^{5/2}} \frac{(q^8 - p^8)}{(q^2 - p^2)^5} \right] \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{7}{2^9} \left| \ln(q^2/p^2) \right|^5 \frac{(q^4 - p^4)^4}{(q^2 - p^2)^9} - \frac{7}{2^5 3^{3/2}} \left| \ln(q^2/p^2) \right|^5 \frac{(q^4 - p^4)^2 (q^6 - p^6)}{(q^2 - p^2)^8} \right. \\
& + \frac{\left| \ln(q^2/p^2) \right|^5}{3^4} \frac{(q^6 - p^6)^2}{(q^2 - p^2)^7} + \frac{3}{2^{13/2}} \left| \ln(q^2/p^2) \right|^5 \frac{(q^8 - p^8)(q^4 - p^4)}{(q^2 - p^2)^7} \\
& \left. - \frac{\left| \ln(q^2/p^2) \right|^5}{5^{5/2}} \frac{(q^{10} - p^{10})}{(q^2 - p^2)^6} \right] \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^5 \tag{5.38}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada yüksek sıcaklıklar limiti $N\lambda^3/V \ll 1$ durumuna karşı geldiği için z ifadesinde $N\lambda^3/V$ 'nin beşinci kuvvetinden sonraki terimler ihmal edilmiştir. (5.29) eşitliğinin (5.27) eşitliğinde kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} \frac{1}{\left| \ln(q^2/p^2) \right|} & \left[q^2 z - p^2 z - \frac{(q^2 z)^2 - (p^2 z)^2}{2^{7/2}} + \frac{(q^2 z)^3 - (p^2 z)^3}{3^{7/2}} \right. \\
& \left. - \frac{(q^2 z)^4 - (p^2 z)^4}{4^{7/2}} + \frac{(q^2 z)^5 - (p^2 z)^5}{5^{7/2}} + \dots \right] \tag{5.39}
\end{aligned}$$

şeklinde basınç ifadesi elde edilir. (5.38) eşitliğindeki z ifadesinin burada kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\frac{PV}{NkT} = a_1(q, p) + a_2(q, p) \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right) & + a_3(q, p) \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^2 + a_4(q, p) \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^3 \\
& + a_5(q, p) \left(\frac{N\lambda^3}{V} \right)^4 + \dots \tag{5.40}
\end{aligned}$$

biçiminde sistemin hal denkleminin virial açılımı bulunabilir. Burada $a_1(q, p)$, $a_2(q, p)$, $a_3(q, p)$, $a_4(q, p)$ ve $a_5(q, p)$ sistemin q ve p parametrelerine bağlı ilk beş virial katsayısıdır ve

$$a_1(q, p) = 1 \quad (5.41)$$

$$a_2(q, p) = \frac{1}{2^{7/2}} \frac{|\ln(q^2/p^2)|}{(q^2 - p^2)^2} (q^4 - p^4) \quad (5.42)$$

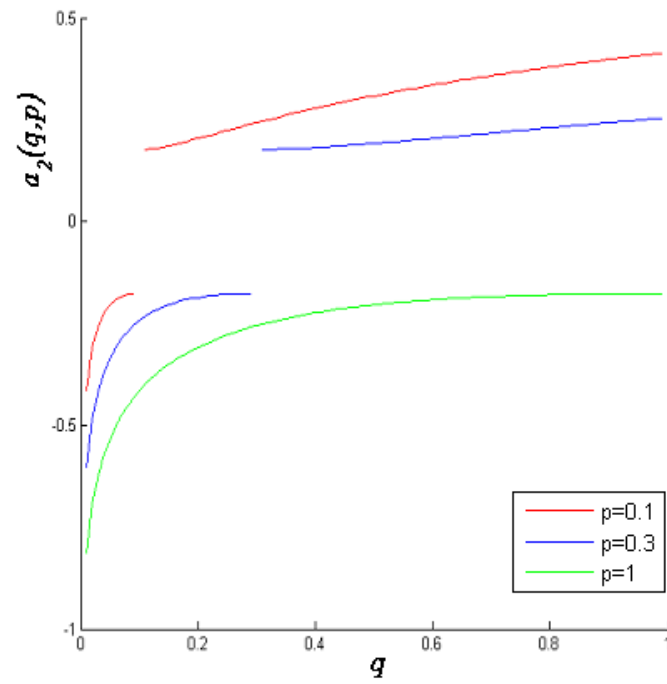
$$a_3(q, p) = \frac{1}{2^5} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^2}{(q^2 - p^2)^4} (q^4 - p^4)^2 - \frac{2}{3^{7/2}} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^2}{(q^2 - p^2)^3} (q^6 - p^6) \quad (5.43)$$

$$a_4(q, p) = \frac{5}{2^{17/2}} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^3}{(q^2 - p^2)^6} (q^4 - p^4)^3 - \frac{3}{6^{5/2}} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^3}{(q^2 - p^2)^5} (q^6 - p^6)(q^4 - p^4) \\ + \frac{3}{2^7} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^3}{(q^2 - p^2)^4} (q^8 - p^8) \quad (5.44)$$

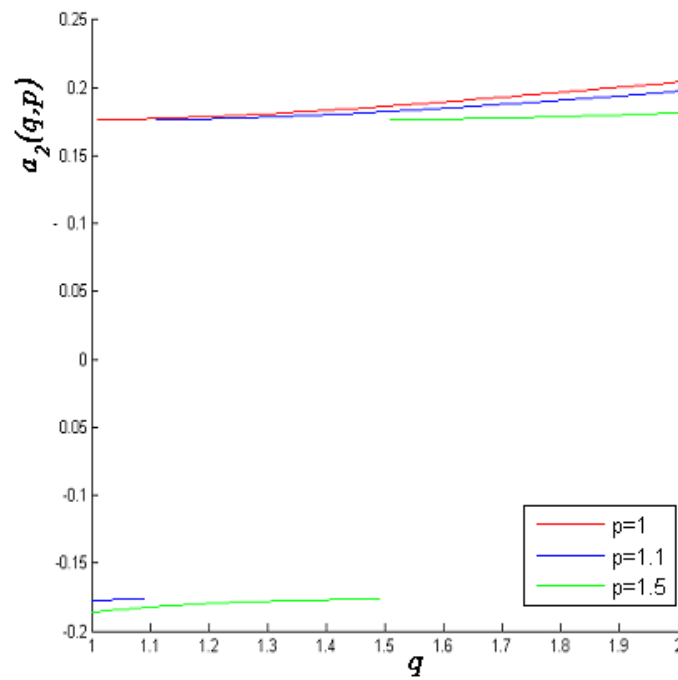
$$a_5(q, p) = \frac{7}{2^{10}} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^4}{(q^2 - p^2)^8} (q^4 - p^4)^4 - \frac{1}{2^3 3^{3/2}} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^4}{(q^2 - p^2)^7} (q^4 - p^4)^2 (q^6 - p^6) \\ + \frac{2}{3^5} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^4}{(q^2 - p^2)^6} (q^6 - p^6)^2 + \frac{1}{2^{11/2}} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^4}{(q^2 - p^2)^6} (q^8 - p^8)(q^4 - p^4) \\ - \frac{4}{5^{7/2}} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^4}{(q^2 - p^2)^5} (q^{10} - p^{10}) \quad (5.45)$$

şeklindeki gibidir [70]. Birincisi hariç bulunan bu virial katsayılarının q ve p deformasyon parametrelerine göre değişimlerinin grafikleri $(q, p) \leq 1$ ve $(q, p) \geq 1$ aralıkları için Şekil 5.9.-Şekil 5.16.'da verilmiştir. Şekil 5.9.-Şekil 5.16.'nın elde edilmesi için gerekli olan Matlab program kodları Ek 2.'de verilmiştir. Virial katsayılarının serbest bozon gazı için negatif, serbest fermiyon gazı için de pozitif değerler alabildiği bilinmektedir [61, 63, 64]. Ancak (q, p) -deforme Fermi gazına ait bu virial katsayılarının Şekil 5.9.-Şekil 5.16.'da görüleceği üzere q ve p parametrelerinin bazı değerlerinde negatif, bazı değerlerinde de pozitif olduğu

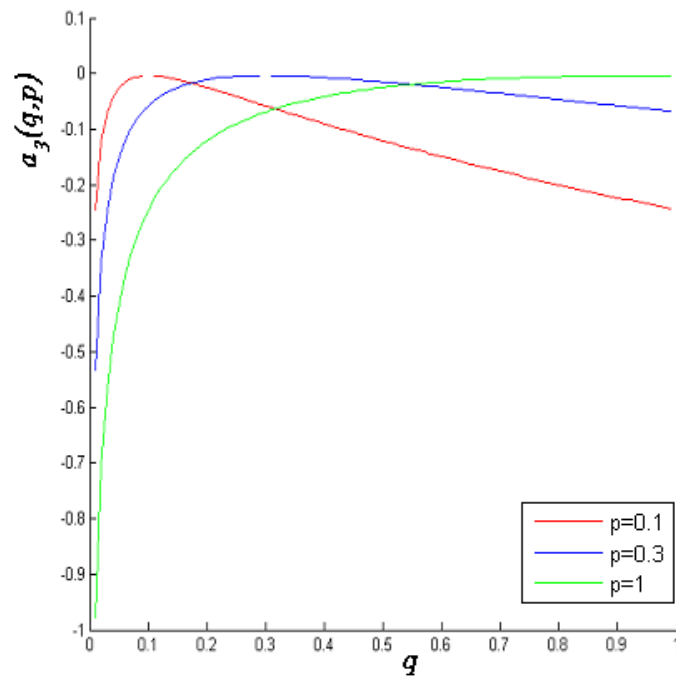
görülmüştür. Bu da q ve p parametrelerinin modelin orijinal fermiyonik davranıştan bozonik davranışa geçmesinde rol oynayabilecekleri şeklinde yorumlanmıştır.



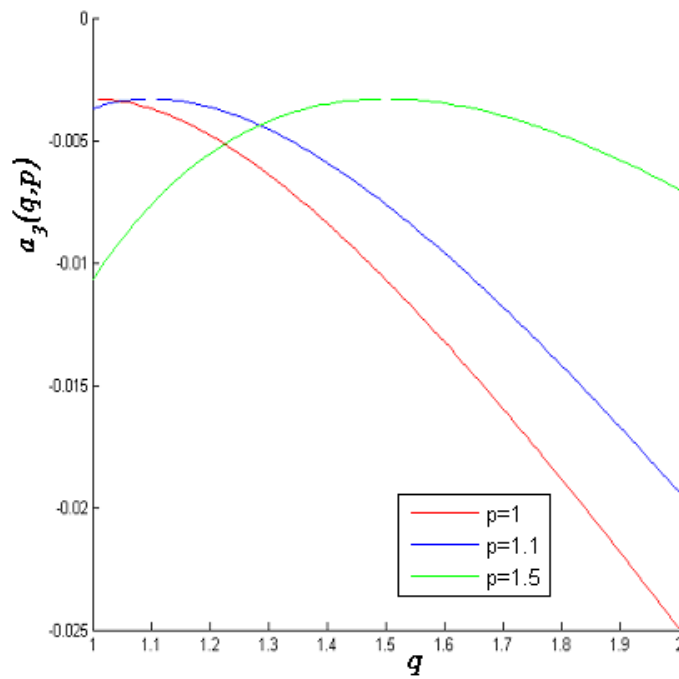
Şekil 5.9. $(q, p) \leq 1$ aralığında $a_2(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



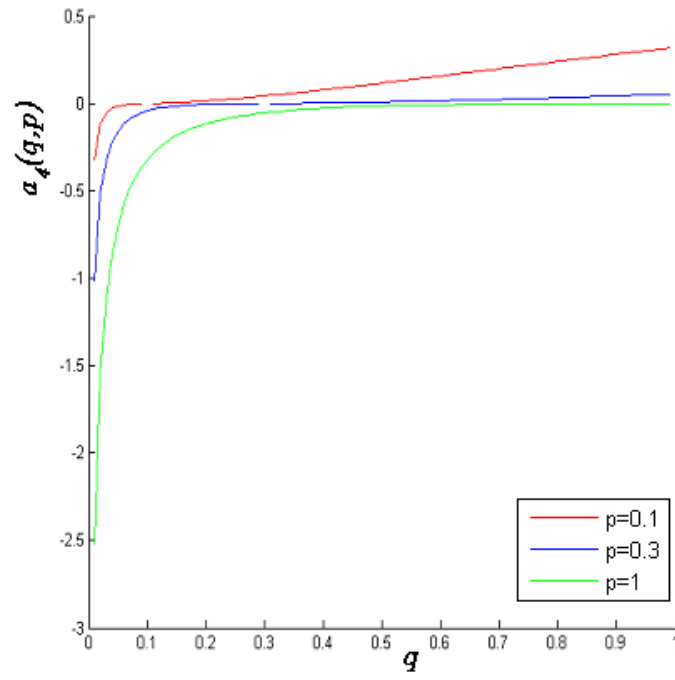
Şekil 5.10. $(q, p) \geq 1$ aralığında $a_2(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



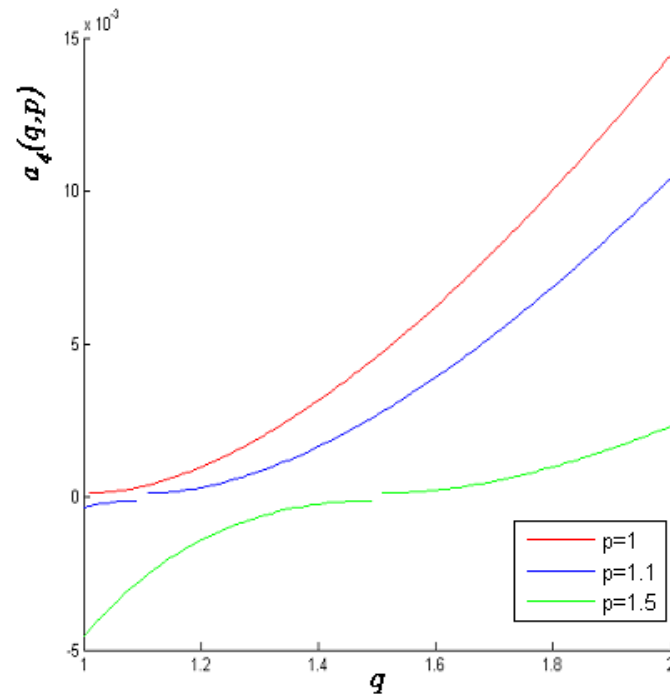
Şekil 5.11. $(q, p) \leq 1$ aralığında $a_3(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



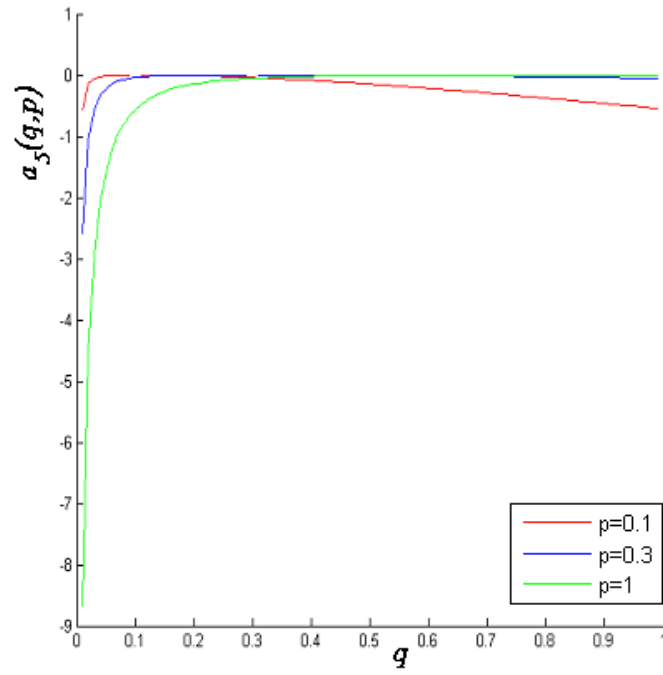
Şekil 5.12. $(q, p) \geq 1$ aralığında $a_3(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



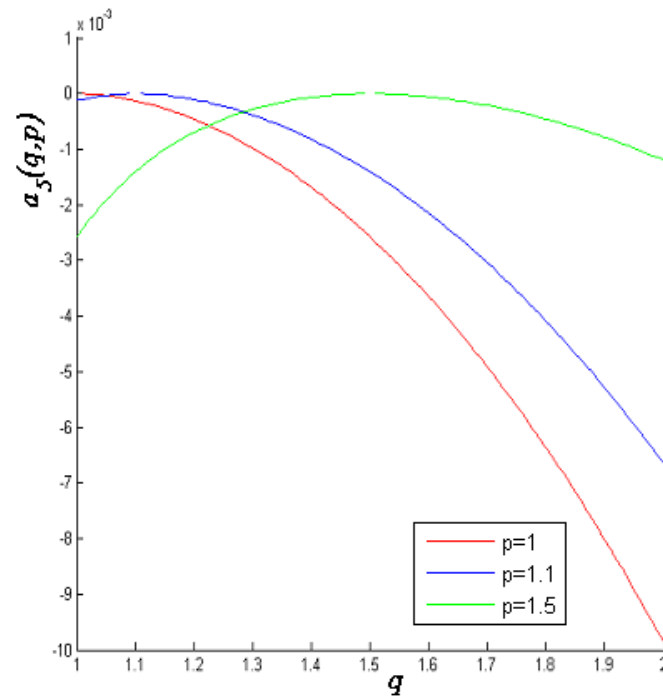
Şekil 5.13. $(q, p) \leq 1$ aralığında $a_4(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



Şekil 5.14. $(q, p) \geq 1$ aralığında $a_4(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



Şekil 5.15. $(q,p) \leq 1$ aralığında $a_5(q,p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



Şekil 5.16. $(q,p) \geq 1$ aralığında $a_5(q,p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi

Üç boyutlu uzayda modelin hal denkleminin virial açılımı ve ilk beş virial katsayısının bulunmasından sonra, aşağıda modelin iki boyutlu uzayda hal denklemi ve virial katsayıları bulunacaktır.

5.3.2. İki boyutlu uzayda hal denklemi ve virial katsayıları

İki boyutlu uzayda modelin basınç ifadesi (4.59) eşitliğine benzer şekilde

$$\frac{\tilde{P}}{kT} = \frac{1}{A} \ln Z \quad (5.46)$$

den bulunabilir. Bu hal için $A, \tilde{N} \rightarrow \infty$ limiti göz önüne alınarak

$$\sum_i \rightarrow \frac{2\pi mA}{h^2} \int_0^\infty d\varepsilon \quad (5.47)$$

dönüşümüyle toplamlar integrale dönüştürülür. Böylece iki boyutlu uzayda modelin basınç ve toplam parçacık sayısı

$$\frac{\tilde{P}}{kT} = \frac{2\pi m}{h^2} \int_0^\infty d\varepsilon \ln(1 + ze^{-\beta\varepsilon}) \quad (5.48)$$

$$\frac{\tilde{N}}{A} = \frac{2\pi m}{h^2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{\left| \ln(q^2/p^2) \right|} \left| \ln \left(\frac{z^{-1} e^{\beta\varepsilon} + q^2}{z^{-1} e^{\beta\varepsilon} + p^2} \right) \right| \quad (5.49)$$

halini alır. Bu eşitlikler $x = \beta\varepsilon$ dönüşümü yapıldığında

$$\frac{\tilde{P}}{kT} = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty dx \ln(1 + ze^{-x}) \quad (5.50)$$

$$\frac{\tilde{N}}{A} = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} dx \frac{1}{|\ln(q^2/p^2)|} \left| \ln \left(\frac{z^{-1}e^x + q^2}{z^{-1}e^x + p^2} \right) \right| \quad (5.51)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu eşitliklerde $m = ze^{-x}$ dönüşümü ve (5.14)'deki $\hat{D}_m^{(q,p)}$ modifiye edilmiş Fibonacci fark operatörü kullanılarak kısmi integrasyon yapıldığında bu iki eşitlik

$$\frac{\tilde{P}}{kT} = \frac{1}{\lambda^2} f_2(z, q, p) \quad (5.52)$$

$$\frac{\tilde{N}}{A} = \frac{1}{\lambda^2} f_1(z, q, p) \quad (5.53)$$

şeklindeki gibi yazılabilir [70]. $f_1(z, q, p)$ ve $f_2(z, q, p)$ Fermi integralleri

$$f_1(z, q, p) = \int_0^{\infty} dx \frac{1}{|\ln(q^2/p^2)|} \left| \ln \left(\frac{z^{-1}e^x + q^2}{z^{-1}e^x + p^2} \right) \right| \quad (5.54)$$

$$f_2(z, q, p) = \int_0^{\infty} dx \frac{x}{|\ln(q^2/p^2)|} \left| \ln \left(\frac{z^{-1}e^x + q^2}{z^{-1}e^x + p^2} \right) \right| \quad (5.55)$$

biçimindedir. (5.54) ve (5.55) eşitlikleri çözümlerse

$$f_1(z, q, p) = \frac{1}{|\ln(q^2/p^2)|} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{(q^2 z)^l}{l^2} - \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{(p^2 z)^l}{l^2} \right\} \quad (5.56)$$

$$f_2(z, q, p) = \frac{1}{|\ln(q^2/p^2)|} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{(q^2 z)^l}{l^3} - \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{(p^2 z)^l}{l^3} \right\} \quad (5.57)$$

bulunur.

Yukarıda bulunan ifadeler iki boyutlu uzayda hal denkleminin elde edilmesi için kullanılacaktır. Öncelikle (5.56) eşitliğinin (5.53) eşitliğinde kullanılmasıyla

$$\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} = \frac{1}{|\ln(q^2/p^2)|} \left[q^2 z - p^2 z - \frac{(q^2 z)^2 - (p^2 z)^2}{2^2} + \frac{(q^2 z)^3 - (p^2 z)^3}{3^2} - \frac{(q^2 z)^4 - (p^2 z)^4}{4^2} + \frac{(q^2 z)^5 - (p^2 z)^5}{5^2} \right] \quad (5.58)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} z = & \frac{|\ln(q^2/p^2)|}{(q^2 - p^2)} \left(\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} \right) + \frac{|\ln(q^2/p^2)|^2}{2^2} \frac{(q^4 - p^4)}{(q^2 - p^2)^3} \left(\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} \right)^2 \\ & + \left[\frac{|\ln(q^2/p^2)|^3}{2^3} \frac{(q^4 - p^4)^2}{(q^2 - p^2)^5} - \frac{|\ln(q^2/p^2)|^3}{3^2} \frac{(q^6 - p^6)}{(q^2 - p^2)^4} \right] \left(\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} \right)^3 \\ & + \left[\frac{5}{2^6} |\ln(q^2/p^2)|^4 \frac{(q^4 - p^4)^3}{(q^2 - p^2)^7} - \frac{5}{2^2 3^2} |\ln(q^2/p^2)|^4 \frac{(q^6 - p^6)(q^4 - p^4)}{(q^2 - p^2)^6} \right. \\ & \left. + \frac{|\ln(q^2/p^2)|^4}{4^2} \frac{(q^8 - p^8)}{(q^2 - p^2)^5} \right] \left(\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} \right)^4 \\ & + \left[\frac{7}{2^7} |\ln(q^2/p^2)|^5 \frac{(q^4 - p^4)^4}{(q^2 - p^2)^9} - \frac{7}{2^4 3} |\ln(q^2/p^2)|^5 \frac{(q^4 - p^4)^2 (q^6 - p^6)}{(q^2 - p^2)^8} \right. \\ & \left. + \frac{|\ln(q^2/p^2)|^5}{3^3} \frac{(q^6 - p^6)^2}{(q^2 - p^2)^7} + \frac{3}{2^5} |\ln(q^2/p^2)|^5 \frac{(q^8 - p^8)(q^4 - p^4)}{(q^2 - p^2)^7} \right. \\ & \left. - \frac{|\ln(q^2/p^2)|^5}{5^2} \frac{(q^{10} - p^{10})}{(q^2 - p^2)^6} \right] \left(\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} \right)^5 \end{aligned} \quad (5.59)$$

bulunur. Burada yüksek sıcaklıklar limiti $\tilde{N}\lambda^2 / A \ll 1$ durumuna karşı geldiği için z ifadesinde $\tilde{N}\lambda^2 / A$ 'nın beşinci kuvvetinden sonraki terimler ihmal edilmiştir. (5.57) eşitliğinin (5.52) eşitliğinde kullanılmasıyla da

$$\frac{\tilde{P}}{kT} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{|\ln(q^2/p^2)|} \left[q^2 z - p^2 z - \frac{(q^2 z)^2 - (p^2 z)^2}{2^3} + \frac{(q^2 z)^3 - (p^2 z)^3}{3^3} - \frac{(q^2 z)^4 - (p^2 z)^4}{4^3} + \frac{(q^2 z)^5 - (p^2 z)^5}{5^3} \right] \quad (5.60)$$

eşitliği elde edilir. (5.59) eşitliğindeki z ifadesi (5.60) eşitliğinde kullanıldığında sistemin yüksek sıcaklıklardaki hal denkleminin virial açılımı

$$\frac{\tilde{P}A}{\tilde{N}kT} = \tilde{a}_1(q, p) + \tilde{a}_2(q, p) \left(\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} \right) + \tilde{a}_3(q, p) \left(\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} \right)^2 + \tilde{a}_4(q, p) \left(\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} \right)^3 + \tilde{a}_5(q, p) \left(\frac{\tilde{N}\lambda^2}{A} \right)^4 + \dots \quad (5.61)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\tilde{a}_1(q, p)$, $\tilde{a}_2(q, p)$, $\tilde{a}_3(q, p)$, $\tilde{a}_4(q, p)$ ve $\tilde{a}_5(q, p)$ sistemin iki boyutlu uzayda q ve p parametrelerine bağlı ilk beş virial katsayısıdır ve

$$\tilde{a}_1(q, p) = 1 \quad (5.62)$$

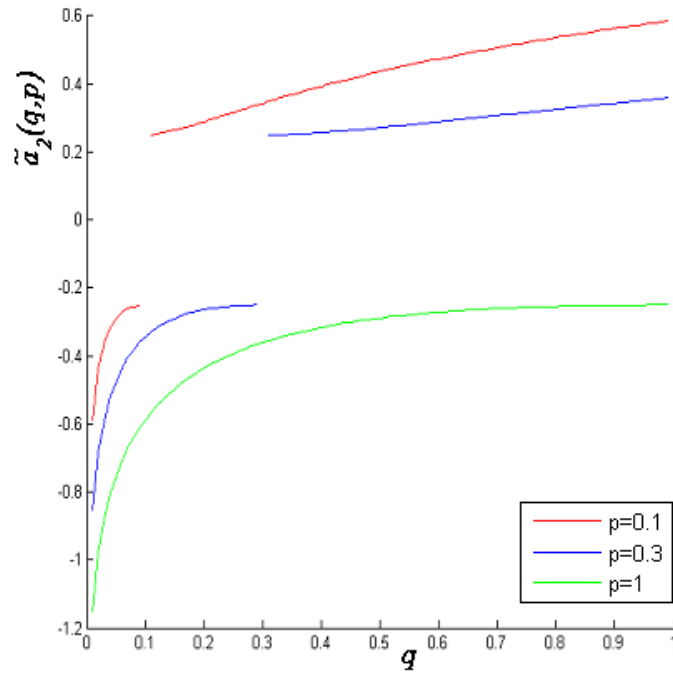
$$\tilde{a}_2(q, p) = \frac{1}{2^3} \frac{|\ln(q^2/p^2)|}{(q^2 - p^2)^2} (q^4 - p^4) \quad (5.63)$$

$$\tilde{a}_3(q, p) = \frac{1}{2^4} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^2}{(q^2 - p^2)^4} (q^4 - p^4)^2 - \frac{2}{3^3} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^2}{(q^2 - p^2)^3} (q^6 - p^6) \quad (5.64)$$

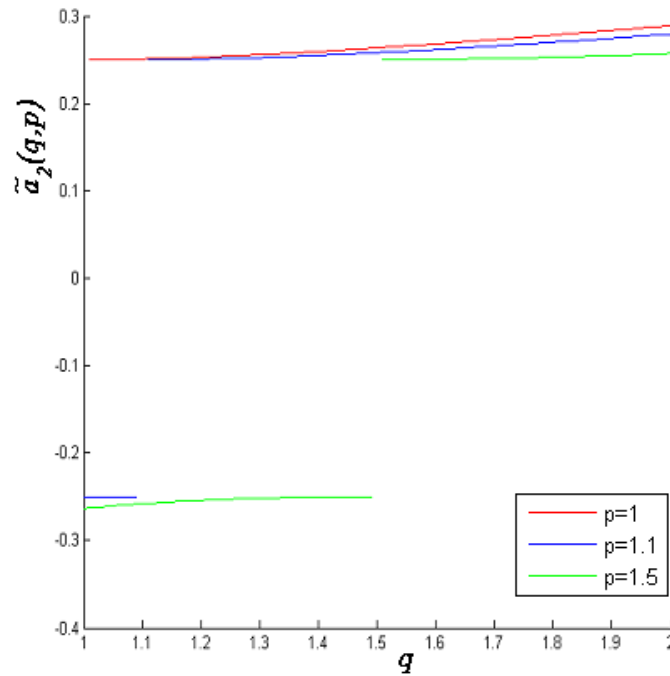
$$\begin{aligned}\tilde{a}_4(q, p) = & \frac{5}{2^7} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^3}{(q^2 - p^2)^6} (q^4 - p^4)^3 - \frac{3}{6^2} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^3}{(q^2 - p^2)^5} (q^6 - p^6)(q^4 - p^4) \\ & + \frac{3}{2^6} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^3}{(q^2 - p^2)^4} (q^8 - p^8)\end{aligned}\quad (5.65)$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}_5(q, p) = & \frac{7}{2^8} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^4}{(q^2 - p^2)^8} (q^4 - p^4)^4 - \frac{1}{2^2 3} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^4}{(q^2 - p^2)^7} (q^4 - p^4)^2 (q^6 - p^6) \\ & + \frac{2}{3^4} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^4}{(q^2 - p^2)^6} (q^6 - p^6)^2 + \frac{1}{2^4} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^4}{(q^2 - p^2)^6} (q^8 - p^8)(q^4 - p^4) \\ & - \frac{4}{5^3} \frac{|\ln(q^2/p^2)|^4}{(q^2 - p^2)^5} (q^{10} - p^{10})\end{aligned}\quad (5.66)$$

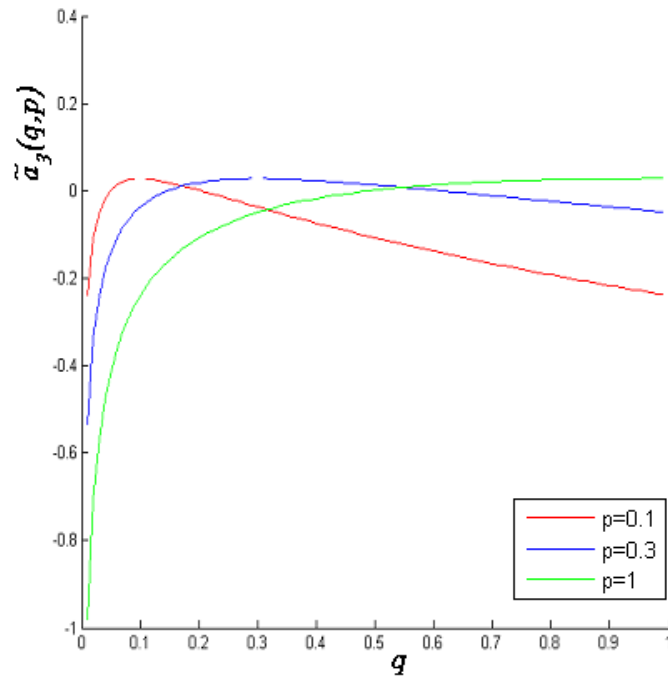
şeklinde. Birinci virial katsayısı hariç, bulunan bu virial katsayılarının q ve p deformasyon parametrelerine göre değişimlerinin grafikleri $(q, p) \leq 1$ ve $(q, p) \geq 1$ aralıkları için Şekil 5.17.-Şekil 5.24.'de verilmiştir. Şekil 5.17.-Şekil 5.24.'ün elde edilmesi için gerekli olan Matlab program kodları Ek 2.'de verilmiştir. İki boyutlu uzay için de (q, p) -deforme Fermi gazına ait virial katsayılarının Şekil 5.17.-Şekil 5.24.'deki grafiklerden de görüleceği üzere q ve p parametrelerinin bazı değerlerinde negatif, bazı değerlerinde de pozitif olduğu görülür. Yine bu durum q ve p parametrelerinin modelin iki boyutlu uzayda da, orjinal fermiyonik davranıştan bozonik davranışa geçmesinde rol oynayabileceği yorumunu mümkün kılmaktadır.



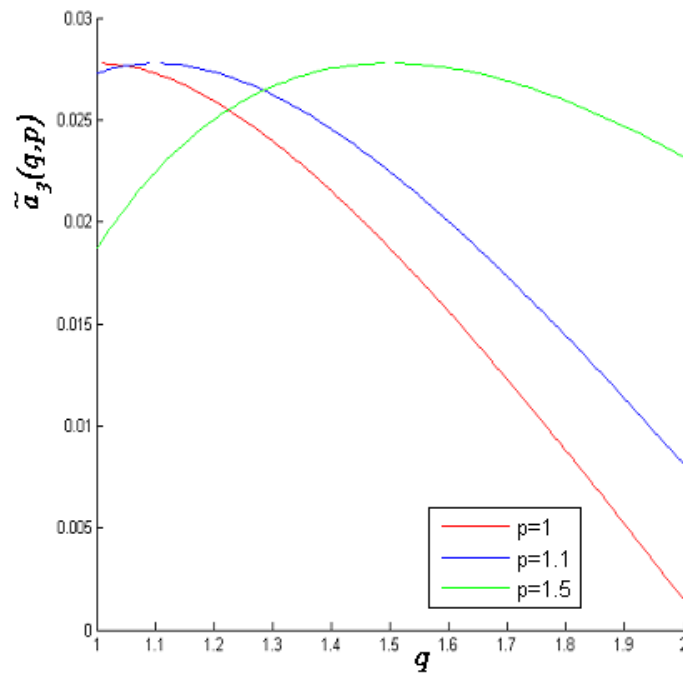
Şekil 5.17. $(q, p) \leq 1$ aralığında $\tilde{a}_2(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



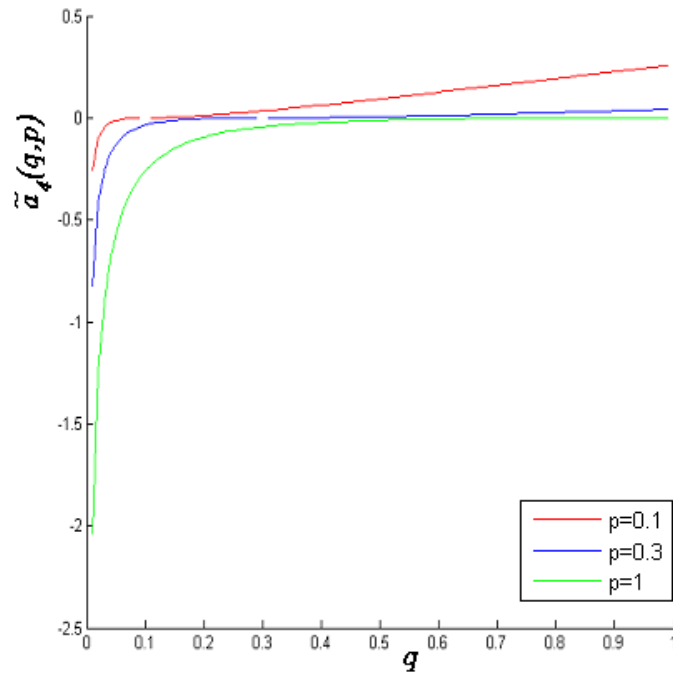
Şekil 5.18. $(q, p) \geq 1$ aralığında $\tilde{a}_2(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



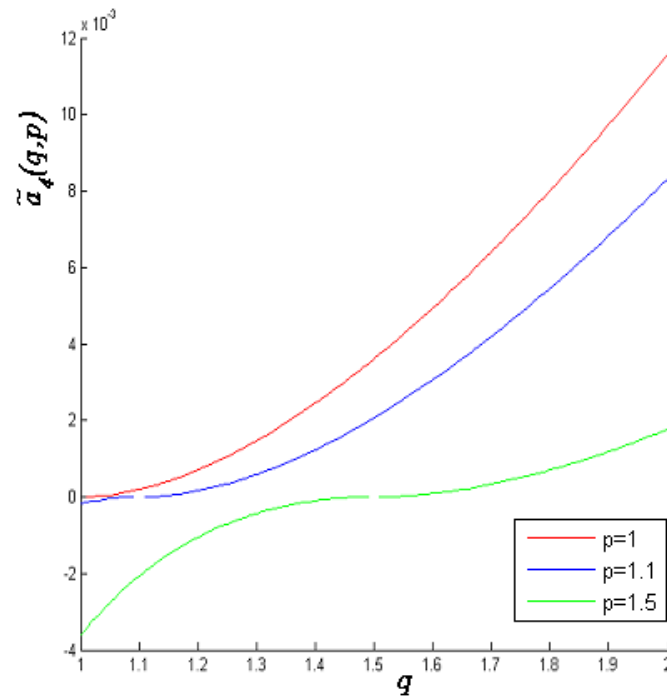
Şekil 5.19. $(q, p) \leq 1$ aralığında $\tilde{a}_3(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



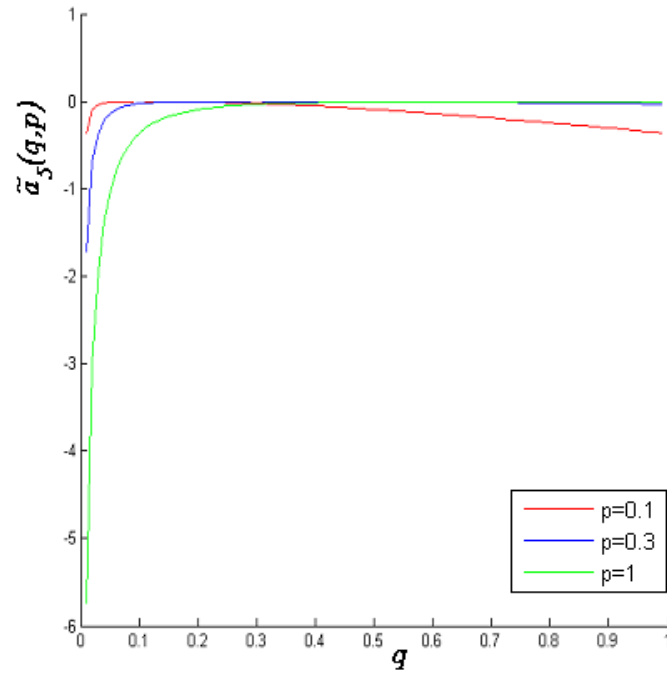
Şekil 5.20. $(q, p) \geq 1$ aralığında $\tilde{a}_3(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



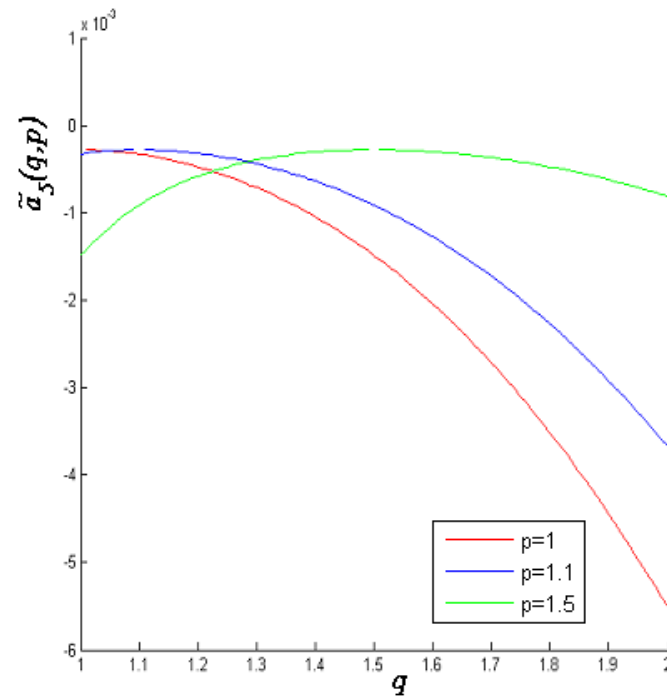
Şekil 5.21. $(q, p) \leq 1$ aralığında $\tilde{a}_4(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



Şekil 5.22. $(q, p) \geq 1$ aralığında $\tilde{a}_4(q, p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



Şekil 5.23. $(q,p) \leq 1$ aralığında $\tilde{a}_5(q,p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi



Şekil 5.24. $(q,p) \geq 1$ aralığında $\tilde{a}_5(q,p)$ deforme virial katsayısının q ve p ile değişimi

Bu bölümde (q,p) -deforme Fermi gazı modeline ait termo-istatistiksel fonksiyonlar yüksek sıcaklıklar limitinde bulunup, q ve p parametrelerinin bu fonksiyonlara etkisi incelenmiştir. Sistemin hal denklemi ve virial katsayıları q ve p parametreleri cinsinden elde edilmiştir. Son bölümde (q,p) -deforme Fermi gazı modelinin istatistik mekaniksel özelliklerine deformasyonun etkileri ve diğer sonuçlar tartışılacaktır.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında ilk olarak fermiyon sistemlerinin genel kuantumsal ve istatistiksel özellikleri ele alınmıştır. Daha sonra fermiyon cebirinin iki parametre ile deformasyonu ile oluşturulan FFO sisteminin kuantum cebirsel yönleri analiz edilmiştir. Bu tür deforme osilatörlerin oluşturduğu (q,p) -deforme Fermi gazı modelinin istatistik mekaniksel yönleri üzerine odaklanılmıştır. Yüksek sıcaklık limitinde fermiyonik Fibonacci osilatörleri gazı modelinin dağılım fonksiyonu, toplam parçacık sayısı, basınç, iç enerji ve entropisi q ve p parametrelerine bağlı olarak bulunmuştur. Modelin iki ve üç boyutlu uzayda hal denkleminin virial açılımı elde edilmiş ve ilk beş virial katsayısı q ve p parametreleri cinsinden hesaplanmıştır. Deformasyon parametrelerinin söz konusu termo-istatistiksel fonksiyonlara etkisi araştırılmış ve bu çerçevede deformasyon parametreleri fiziksel olarak yorumlanmaya çalışılmıştır.

Modelin $n(\eta, q, p)$ deforme dağılım fonksiyonunun $(q, p) \leq 1$ ve $(q, p) \geq 1$ aralıklarında q ve p parametrelerinin artışıyla arttığı gözlemlenmiştir. Ayrıca $(q, p) \leq 1$ aralığında deforme dağılım fonksiyonu sabit η değerleri için ideal fermiyon dağılım fonksiyonundan küçük değerler alırken, $(q, p) \geq 1$ aralığında büyük değerler alabilmektedir.

Öte yandan modelin $f_{3/2}(z, q, p)$ ve $f_{5/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonları, hem $(q, p) \leq 1$, hem de $(q, p) \geq 1$ aralıklarında q ve p 'nin artışıyla artmaktadır. Deforme Fermi-Dirac fonksiyonları $(q, p) \leq 1$ aralığında sabit z değerlerinde ideal Fermi-Dirac fonksiyonlarından küçük değerler alırken, $(q, p) \geq 1$ aralığında ise büyük değerler almaktadır. Ayrıca kendi içinde de yine sabit z değerlerinde $(q, p) \leq 1$ aralığında $f_{5/2}(z, q, p)$ fonksiyonu $f_{3/2}(z, q, p)$

fonksiyonundan daha büyük değerler alırken, $(q, p) \geq 1$ aralığında da daha küçük değerler almaktadır.

Özetlemek gerekirse $n(\eta, q, p)$ deforme dağılım fonksiyonu $(q, p) \leq 1$ ve $(q, p) \geq 1$ aralıklarında, sabit η değerlerinde q ve p artarken artmaktadır. Fakat sabit q ve p değerlerinde η artarken azalmaktadır. $f_{3/2}(z, q, p)$, $f_{5/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonların $(q, p) \leq 1$ ve $(q, p) \geq 1$ aralıklarında sabit z değerlerinde q ve p artarken artmaktadır.

Üç boyutlu uzay için (q, p) -deforme Fermi gazı modelinin yüksek sıcaklıklardaki hal denkleminin virial açılımındaki $a_2(q, p)$, $a_3(q, p)$, $a_4(q, p)$ ve $a_5(q, p)$ deforme virial katsayıları, q ve p 'nin artışına göre bazı aralıklarda artarken, bazı aralıklarda azalmaktadır. Ayrıca $a_2(q, p)$ ve $a_4(q, p)$ hem $(q, p) \leq 1$, hem de $(q, p) \geq 1$ aralıklarında pozitif ve negatif değerler alabilmektedir. Dolayısıyla q ve p parametrelerine bağlı olarak virial katsayıları pozitifken sistem fermiyonik davranış göstermekte, negatifken de sistem bozon benzeri davranış gösterebilmektedir. $a_3(q, p)$ ve $a_5(q, p)$ hem $(q, p) \leq 1$, hem de $(q, p) \geq 1$ aralıklarında sadece negatif değerler almaktadır. Oysa $a_2(q, p)$ ve $a_4(q, p)$ $q > p$ için pozitif, $q < p$ için negatif değerler alabilmektedir. Şekil 5.9.-Şekil 5.16.'deki virial katsayısı grafiklerine bakıldığında grafikte süreksizlikler görülmektedir. Bu süreksizlikler sistemin fermiyonik davranıştan bozonik davranışa geçiş yaptığı şeklinde yorumlanabilmektedir.

İki boyutlu uzayda elde edilen $\tilde{a}_2(q, p)$, $\tilde{a}_3(q, p)$, $\tilde{a}_4(q, p)$ ve $\tilde{a}_5(q, p)$ deforme virial katsayıları da q ve p 'nin artışına göre bazı aralıklarda artarken, bazı aralıklarda azalmaktadır. $\tilde{a}_2(q, p)$ ve $\tilde{a}_4(q, p)$ virial katsayıları hem $(q, p) \leq 1$, hem de $(q, p) \geq 1$ aralıklarında pozitif ve negatif değerler alabilmektedir. $\tilde{a}_3(q, p)$ katsayısı $(q, p) \leq 1$ aralığında pozitif ve negatif değerler alırken, $(q, p) \geq 1$ aralığında sadece pozitif değerler almaktadır. $\tilde{a}_5(q, p)$ ise sadece her iki aralıkta da negatif değer alabilmektedir.

Beşinci bölümde elde edilen (q,p) -deforme Fermi gazı modelinin tüm deforme termo-istatistiksel fonksiyonları $(q,p) \rightarrow 1$ limitinde ideal Fermi gazı sonuçlarına indirgenir. Ayrıca modelin incelenen (q,p) -deforme termo-istatistiksel fonksiyonlarının grafiklerine ait Matlab program kodları Ek 2. kısmında sunulmuştur.

Modelin $S^{(q,p)} \lambda^3 / kV$ entropi fonksiyonu hem $(q,p) \leq 1$, hem de $(q,p) \geq 1$ aralıklarında q ve p 'nin artışıyla artmaktadır. Bu fonksiyon $(q,p) \leq 1$ aralığında sabit z değerlerinde ideal Fermi gazının entropi fonksiyonundan küçük değerler alırken, $(q,p) \geq 1$ aralığında ise büyük değerler almaktadır. Ayrıca kendi içinde de yine sabit z değerlerinde $(q,p) \leq 1$ aralığında, $(q,p) \geq 1$ aralığındakinden daha küçük değerler almaktadır.

İdeal Fermi gazının hal denklemlerinin virial açılımlarındaki virial katsayıları belli sabit sayılardır. Oysa parçacıklar arası etkileşmelerin olduğu gerçek fiziksel sistemlerin virial katsayıları etkileşme potansiyelinin bir fonksiyonu şeklindedir [61]. (q,p) -Deforme Fermi gazı modeli için elde edilen virial katsayıları da bir sabit olmak yerine, q ve p deformasyon parametrelerinin bir fonksiyonu olduğundan bu parametrelerin parçacıklar arası etkileşmeler hakkında bilgi taşıyabilecekleri düşünülebilir. Ayrıca modelin q ve p 'nin belirli değerlerinde orijinal fermiyonik davranıştan bozonik davranışa geçebilmesi deforme fermiyonik parçacıklar arasındaki etkileşmelerden dolayı oluşabileceği, buradan da bunların kompozit fermiyon (veya kuazi-fermion) olabilecekleri yorumunu yapmak mümkün olur [70].

Öte yandan Bölüm 4.3.'de dejenere Fermi gazının uygulama alanlarına yönelik olarak metallerin elektron teorisi, Pauli paramanyetizması, Landau diyamanyetizması, beyaz cüce yıldızlarının istatistik mekaniksel özellikleri gibi örnekler verilmişti. Bunlara benzer uygulamalarda da sistemin parçacıkları (q,p) -deforme fermiyonlarla yer değiştirilerek yeniden ele alınırlarsa, parçacıklar arası etkileşmeler gelecekte (q,p) -deforme Fermi gazı modelinin istatistik mekaniksel yönleri aracılığıyla çalışılabilir ve böylece gerçek fiziksel sistemlerde bazı lineer olmayan davranışların açıklanmasında faydalı olup olmayacakları gözlemlenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] ARRATIA, O., MARTN, MA., del OLMO, MA., Deformation in phase space. http://arxiv.org/PS_cache/math-ph/pdf/9805/9805016.pdf, 1998.
- [2] MALIK, RP., Quantum groups q dynamics and rajaji. <http://arxiv.org/abs/hep-th/0103140>, 2001.
- [3] MANİN, YUI., Quantum groups and noncommutative geometry. Montreal University Preprint, CRM-1561, 1988.
- [4] JAGANATHAN, R., Some introductory notes on quantum groups, quantum algebras, and their applications. <http://arxiv.org/abs/math-ph/0105002>, 2001.
- [5] KULISH, P., RESHETIKNIN, N., Quantum linear problem for the Sine-Gordon equation and higher representations. Zap. Nauch. Seminarov LOMI, 101:101-110, 1981. (J. Soviet Math., 23:2435-2441, 1983.)
- [6] SKLYANIN, E., TAKHATAJAN, L., FADDEEV, L., Quantum inverse problem method I. Theor. Math. Phys., 40:688-706, 1979.
- [7] FADDEEV, LD., Integrable models in (1+1)-dimensional quantum field theory. In Les Houches Lectures XXXIX, 1982. Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland Amsterdam, 563-608, 1984.
- [8] BIEDENHARN, LC., LOHE, MA., Quantum groups symmetry and q -tensor algebra. World Scientific, Singapore, 1999.
- [9] ARIK, M., COON, DD., Hilbert spaces of analytical functions and generalized coherent states. J. Math. Phys., 17:524-527, 1976.
- [10] MACFARLANE, A. J., On q -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU_q(2)$. J. Phys. A, 22:4581, 1989.
- [11] BIEDENHARN, LC., The quantum group $SU_q(2)$ and a q -analogue of the boson operators, J. Phys. A., 22:L873-878, 1989.
- [12] TRIPODI, L., LIMA, CL., On a q -covariant form of the BCS approximation. Phys. Lett. B., 412:7-13, 1997.

- [13] TÍMOTEO, VS., LÍMA, CL., Effect of q -deformation in the NJL gap equation. Phys. Lett. B., 448:1-5, 1999.
- [14] SVIRATCHEVA, KD., BAHRI, C., GEORGIEVA, AI., DRAAYER, JP., Physical significance of q -deformation and Many-Body interactions in nuclei. Phys. Rev. Lett., 93:152501, 2004.
- [15] DEY, J., DEY, M., FERREIRA, PL., TOMÍ, L., Pion to upsilon from κ -deformed Poincaré phenomenology. Phys. Lett. B., 365:157-162, 1996.
- [16] PALLADINO, BE., FERREIRA, PL., Fundamental fermion masses from deformed $SU_q(2)$ triplets. IL Nuovo Cimento, 110 A:303-314, 1997.
- [17] IACHELLO, F., Group Theory and Special Symmetries in Nuclear Physics. Proceedings of the International Symposium in Honor of K. T. Hecht, edited by J. P. DRAAYER and J. JANECKE, World Scientific, Singapore, 211-218, 1992.
- [18] BALLESTEROS, A., CIVITARESE, O., HERRANZ, FJ., REBOIRO, M., Fermion-boson interactions and quantum algebras. Phys. Rev. C., 66:064317, 2002.
- [19] LEE, CR., YU, JP., On q -analogues of the statistical distribution. Phys. Lett. A., 150:63, 1990.
- [20] TUSZYNSKI, JA., RUBIN, JL., MEYER, J., KIBLER, Statistical mechanics of a q -deformed boson gas. M., Phys. Lett. A., 175:173, 1993.
- [21] CHAICHIAN, M., FELÍPE, RG., MONTONEN, C., Statistics of q -oscillators, quons and relations to fractional statistics. J. Phys. A: Math. Gen., 26:4017, 1993.
- [22] UBRIACO, MR., Thermodynamics of a free $SU_q(2)$ fermionic system. Phys. Lett. A., 219:205-211, 1996.
- [23] UBRIACO, MR., High and low temperature behavior of a quantum group fermion gas. Mod. Phys. Lett. A., 11:2325, 1996.
- [24] UBRIACO, MR., Anyonic behavior of quantum group gases. Phys. Rev. E., 55(1):291-296, 1997.
- [25] LAVAGNO, A., NARAYANA SWAMY, P., Thermostatistics of a q -deformed boson gas. Phys. Rev. E., 61(2):1218-1226, 2000.
- [26] LAVAGNO, A., NARAYANA SWAMY, P., Generalized thermodynamics of q -deformed bosons and fermions. Phys. Rev. E., 65:036101, 2002.
- [27] ALGIN, A., BASER, M., Thermostatistical properties of two-parameter generalised quantum group fermion gas. 387:1088-1098, 2008.

- [28] ALGIN, A., ARIK, M., ARIKAN, AS., High-temperature behavior of a two-parameter deformed quantum group fermion gas. *Phys. Rev. E.*, 65:026140–5, 2002.
- [29] TSALLIS, C., Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *J. Stat. Phys.*, 52:479-487, 1998.
- [30] GREENBERG, OW., Particles with small violations of Fermi or Bose Statistics. *Phys. Rev. D*, 43, 4111, 1991.
- [31] GAVRILIK, AM., KACHURIK, II., MISHCHENKO YA., Quasibosons composed of two q -fermions: realization by deformed oscillators. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 44, 475303, 2011.
- [32] GAVRILIK, AM., Quantum algebras in phenomenological description of particle properties. *Nuc. Phys. B (Proc. Suppl.)*, 102&103:298-305, 2001.
- [33] POULIOT, P., Finite number of states, de Sitter space and quantum groups at roots of unity. *Class. Quantum Grav.* 21;145–162, 2004.
- [34] BONATSOS, D., ARGYRES, EN., RAYCHEV, PP., $SU_q(1,1)$ Description of vibrational molecular spectra. *J. Phys. A*, 24:L403, 1991.
- [35] BONATSOS, D., RAYCHEV, PP., FAESSLER, A., Quantum algebraic description of vibrational molecular spectra. *Chem. Phys. Lett.*, 178:221, 1991.
- [36] BONATSOS. D., DASKALOYANNIS, C., Generalized deformed oscillators for vibrational spectra of diatomic molecules. *Phys. Rev. A.*, 46, 1;75, 1992.
- [37] RAYCHEV, PP., ROUSSEV, RP., SMIRNOV, YF., The quantum algebra $SU_q(2)$ and rotational spectra of deformed nuclei. *J. Phys. G*, 16:L137, 1990.
- [38] GEORGIEVA AI., SVIRATCHEVA, KD., IVANOV, MI., DRAAYER, JP., q -Deformation of symplectic dynamical symmetries in algebraic models of nuclear structure. *ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ, ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА*, том 74, №6, с. 910–918, 2011.
- [39] MONTEIRO, MR., RODRIGUES, LMCS., Quantum algebraic nature of the phonon spectrum in 4He . *Phys. Rev. Lett.*, 76, 7; 1098, 1996.
- [40] MESSIAH, A., *Quantum Mechanics*. John Wiley and Sons, Inc., 1966.
- [41] DERELİ, T., VERÇİN, A., *Kuantum mekaniği temel kavramlar ve uygulamaları*. Türkiye Bilimler Akademisi, Türkiye, 2009.

- [42] SCHIFF, LI., Quantum Mechanics. McGraw-Hill, 1968.
- [43] SHANKAR, R., Principles of quantum mechanics. Plenum Press, New York, 1994.
- [44] GASIOROWICZ, S., Quantum physics. John Wiley and Sons, New York, 2003.
- [45] LEVI, AFJ., Applied quantum mechanics. Cambridge University Press, UK, 2003.
- [46] KARAOĞLU, B., Kuantum mekaniğine giriş. Seçkin Yayıncılık, Ankara, 2008.
- [47] ZETTILI, N., Quantum mechanics. John Wiley and Sons, New York, 2001.
- [48] SAKURAI, JJ., Modern Quantum mechanics. Revised Edition, Addison Wesley Publishing Company, USA, 1994.
- [49] LIBOFF, RL., Introductory quantum mechanics. Addison Wesley Longman, New York, 1997.
- [50] BRANSDEN, BH., JOACHAIN, CJ., Introduction to quantum mechanics. Longman Scientific & Technical, England, 1989.
- [51] DAS, A., MELISSINOS, AC., Quantum Mechanics: A Modern Introduction. CRC Press, Switzerland, 1986.
- [52] SLATER, JC., Quantum theory of matter. McGraw-Hill, New York, 1968.
- [53] MERZBACHER, E., Quantum mechanics. John Wiley and Sons, New York, 1970.
- [54] RAIMES, S., Many-Electron theory. North-Holland Publishing Company, Netherlands, 1972.
- [55] MARUHN, JA., REINHARD, P.-G., SURAUD, E., Simple Models of Many-Fermion Systems. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [56] MİLLER, ABD., Quantum mechanics for scientists and engineers. Cambridge University Press, USA, 2008.
- [57] ARIKAN, AS., Multiparameter Generalization of Deformed Particle Algebras. Doktora Tezi, Bogaziçi Üniv., Fen Bilimleri Enstitüsü, 2004.
- [58] CHAICHIAN, M., KULISH, Quantum Lie-Superalgebras and q -oscillators. P., Phys. Lett. B, 234:72, 1990.

- [59] PARTHASARATHY, R., VISWANATHAN, KS., A q -analogue of the supersymmetric oscillator and its q -superalgebra. J. Phys. A, Math. Gen., 24:613, 1991.
- [60] JING, S., XU, JJ., Comment on the q -deformed fermionic oscillator. J. Phys. A-Math. Gen. 24:L891, 1991.
- [61] PATHRIA, RK., Statistical mechanics. Betterworth Heinemann, Burlington, 1996.
- [62] KARAOĞLU, B., İstatistik mekaniğe giriş. Seçkin Yayıncılık, Ankara, 2009.
- [63] HUANG, K., Statistical mechanics. John Wiley and Sons, New York, 1987.
- [64] GREINER, W., NEISE, L., STÖCKER, H., Thermodynamics and statistical mechanics. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [65] KHARE, A., Fractional statistics and quantum theory. World Scientific, Singapore, 2005.
- [66] HONERKAMP, J., Statistical physics: An advance approach with applications. Springer, Berlin Heidelberg, 2002.
- [67] CHANDLER, D., Introduction to modern statistical mechanics. Oxford Universtiy Press, New York, 1987.
- [68] ALGIN, A., ARIK, M., ARIKAN, AS., Multi-parameter deformed fermionic oscillators. Eur. Phys. J. C., 25:487-491, 2002.
- [69] ARIK, M., DEMİRCAN, E., TURGUT T., EKİNCİ L., MÜNGAN, M., Fibonacci Oscillators. Z. Physik C, 55;89, 1992.
- [70] ALGIN, A., ARIKAN , AS., DİL, E., High temperature thermostatics of fermionic fibonacci oscillators with intermediate statistics. Physica A, 416; 499–517, 2014.
- [71] ALGIN, A., Bose-Einstein condensation in a gas of Fibonacci oscillators. J. Stat. Mech., P10009, 2008.
- [72] ŞENAY, M., Deforme Bir Fermi Gazı Modelinin Yüksek Sıcaklıklarda Termo-istatistiksel Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2012.

EKLER

EK 1.

* Standart Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun grafiği için Matlab program kodu

```
x=[-4:0.001:4];
y=1./(exp(x)+1);
>> plot(x,y,'k') , xlabel('\eta','FontSize',14), ylabel('n(\eta)', 'FontSize',14)
```

* $f_{3/2}(z)$ ve $f_{5/2}(z)$ Fermi-Dirac fonksiyonlarının grafiği için Matlab program kodu

```
>> z=[0:0.001:1];
sum=0;
for l=1:49;
sum=sum+((((-1)^(l-1))*(z.^l))/(l^1.5));
end
>> y=[0:0.001:1];
sum2=0;
for l=1:49;
sum2=sum2+((((-1)^(l-1))*(y.^l))/(l^2.5));
end
>> plot(z,sum,'k',y,sum2,'k') , xlabel('z', 'FontSize',14), ylabel('f_{n}(z)', 'FontSize',14) ,
legend('n={3/2}', 'n={5/2}')
```

EK 2.

* $(q, p) \leq 1$ aralığında (q, p) -Deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun grafiği için Matlab program kodu

```
>> [x,y] = meshgrid(0:0.01:0.99,-4:0.01:4);
>> z=abs(1./log((x.^2)./((0.1)^2))).*abs(log((exp(y)+x.^2)./(exp(y)+(0.1)^2)));
>> v=abs(1./log((x.^2)./((0.8)^2))).*abs(log((exp(y)+x.^2)./(exp(y)+(0.8)^2)));
>> plot3(x,y,z,'r',x,y,v,'k'), grid off, xlabel('q','FontSize',14) , ylabel('\eta','FontSize',14) ,
zlabel('n(\eta ,q,p)','FontSize',14)
```

* $(q, p) \geq 1$ aralığında (q, p) -Deforme Fermi-Dirac dağılım fonksiyonunun grafiği için Matlab program kodu

```
[x,y] = meshgrid(1.01:0.01:2,-4:0.01:4);
z=abs(1./log((x.^2)./((1.1)^2))).*abs(log((exp(y)+x.^2)./(exp(y)+(1.1)^2)));
v=abs(1./log((x.^2)./((1.5)^2))).*abs(log((exp(y)+x.^2)./(exp(y)+(1.5)^2)));
plot3(x,y,z,'r',x,y,v,'k'), grid off, xlabel('q','FontSize',14) , ylabel('\eta','FontSize',14) ,
zlabel('n(\eta ,q,p)','FontSize',14)
```

* $(q, p) \leq 1$ aralığında $f_{3/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonunun grafiği için Matlab program kodu

```
>> [x,y] = meshgrid(0:0.01:0.99,0:0.01:1);
sum=0;
for k=1:49;
sum=sum+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((0.1)^2))).*(k^2.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((0.1^2).*y).^k));
end;
>> sum1=0;
>> for k=1:49;
sum1=sum1+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((0.3)^2))).*(k^2.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((0.3^2).*y).^k));
end;
>> sum2=0;
>> for k=1:49;
sum2=sum2+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1)^2))).*(k^2.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1^2).*y).^k));
end;
>> plot3(x,y,abs(sum),'r',x,y,abs(sum1), 'b',x,y,abs(sum2), 'g'), xlabel('q','FontSize',14),
ylabel('z','FontSize',14) , zlabel('|f_{3/2}(z,q,p)|','FontSize',14);
```

* $(q, p) \geq 1$ aralığında $f_{3/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonunun grafiği için

Matlab program kodu

```
>> [x,y] = meshgrid(1.01:0.01:2 , 0:0.01:1);
sum=0;
for k=1:9;
sum=sum+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1)^2))).*(k^2.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1.^2).*y).^k));
end;
>> sum1=0;
>> for k=1:9;
sum1=sum1+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1.1)^2))).*(k^2.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1.1.^2).*y).^k));
end;
>> sum2=0;
>> for k=1:9;
sum2=sum2+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1.5)^2))).*(k^2.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1.5.^2).*y).^k));
end;
>> plot3(x,y,abs(sum),'r',x,y,abs(sum1), 'b',x,y,abs(sum2), 'g'), xlabel('q','FontSize',14),
ylabel('z','FontSize',14) , zlabel('|f_{3/2}(z,q,p)|','FontSize',14);
```

* $(q, p) \leq 1$ aralığında $f_{5/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonunun grafiği için

Matlab program kodu

```
>> [x,y] = meshgrid(0:0.01:0.99,0:0.01:1);
sum=0;
for k=1:49;
sum=sum+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((0.1)^2))).*(k^3.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((0.1.^2).*y).^k));
end;
>> sum1=0;
>> for k=1:49;
sum1=sum1+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((0.3)^2))).*(k^3.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((0.3.^2).*y).^k));
end;
>> sum2=0;
>> for k=1:49;
sum2=sum2+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1)^2))).*(k^3.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1.^2).*y).^k));
end;
>> plot3(x,y,abs(sum),'r',x,y,abs(sum1), 'b',x,y,abs(sum2), 'g'), xlabel('q','FontSize',14),
ylabel('z','FontSize',14) , zlabel('|f_{5/2}(z,q,p)|','FontSize',14);
```


* $(q, p) \geq 1$ aralığında $f_{5/2}(z, q, p)$ deforme Fermi-Dirac fonksiyonunun grafiği için

Matlab program kodu

```
>> [x,y] = meshgrid(1.01:0.01: 2, 0:0.01:1);
sum=0;
for k=1:9;
sum=sum+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1)^2))).*(k^3.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1.^2).*y).^k));
end;
>> sum1=0;
>> for k=1:9;
sum1=sum1+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1.1)^2))).*(k^3.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1.1.^2).*y).^k));
end;
>> sum2=0;
>> for k=1:9;
sum2=sum2+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1.5)^2))).*(k^3.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1.5.^2).*y).^k));
end;
>> plot3(x,y,abs(sum),'r',x,y,abs(sum1), 'b',x,y,abs(sum2), 'g'), xlabel('q','FontSize',14),
ylabel('z','FontSize',14) , zlabel('|f_{5/2}(z,q,p)|','FontSize',14);
```

* $(q, p) \leq 1$ aralığında $S^{(q,p)} \lambda^3 / kV$ entropi fonksiyonunun grafiği için Matlab program kodu

```
>> [x,y] = meshgrid(0:0.01:0.99,0:0.01:1);
sum=0;
for k=1:49;
sum=sum+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((0.1)^2))).*(k^2.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((0.1.^2).*y).^k));
end;
sum1=0;
for k=1:49;
sum1=sum1+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((0.3)^2))).*(k^2.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((0.3.^2).*y).^k));
end;
sum2=0;
for k=1:49;
sum2=sum2+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1)^2))).*(k^2.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1.^2).*y).^k));
end;
>> sum3=0;
for k=1:49;
sum3=sum3+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((0.1)^2))).*(k^3.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((0.1.^2).*y).^k));
end;
sum4=0;
for k=1:49;
```

```

sum4=sum4+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((0.3)^2))).*(k^3.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((0.3^2).*y).^k));
end;
sum5=0;
for k=1:49;
sum5=sum5+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1)^2))).*(k^3.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1^2).*y).^k));
end;
>> e=((5/2).*abs(sum3))-(abs(sum)).*log(y);
>> f=((5/2).*abs(sum4))-(abs(sum1)).*log(y);
>> g=((5/2).*abs(sum5))-(abs(sum2)).*log(y);
>> plot3(x,y,e,'r',x,y,f,'b',x,y,g,'g'), xlabel('q','FontSize',14), ylabel('z','FontSize',14),
zlabel('S{\lambda}^3/kV','FontSize',14);

```

* $(q, p) \geq 1$ aralığında $S^{(q,p)} \lambda^3 / kV$ entropi fonksiyonunun grafiği için Matlab

program kodu

```

>> [x,y] = meshgrid(1.01:0.01: 2, 0:0.01:1);
sum=0;
for k=1:9;
sum=sum+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1)^2))).*(k^2.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1^2).*y).^k));
end;
>> sum1=0;
>> for k=1:9;
sum1=sum1+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1.1)^2))).*(k^2.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1.1^2).*y).^k));
end;
>> sum2=0;
>> for k=1:9;
sum2=sum2+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1.5)^2))).*(k^2.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1.5^2).*y).^k));
end;
sum3=0;
for k=1:9;
sum3=sum3+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1)^2))).*(k^3.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1^2).*y).^k));
end;
>> sum4=0;
>> for k=1:9;
sum4=sum4+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1.1)^2))).*(k^3.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1.1^2).*y).^k));
end;
>> sum5=0;
>> for k=1:9;
sum5=sum5+((-1)^(k-1)./(abs(log((x.^2)./((1.5)^2))).*(k^3.5))).*(((x.^2).*y).^k)-
(((1.5^2).*y).^k));
end;
>> e=((5/2).*abs(sum3))-(abs(sum)).*log(y);

```

```
>> f=((5/2).*abs(sum4))-(abs(sum1)).*log(y);
>> g=((5/2).*abs(sum5))-(abs(sum2)).*log(y);
>> plot3(x,y,e,'r',x,y,f,'b',x,y,g,'g'), xlabel('q','FontSize',14), ylabel('z','FontSize',14),
zlabel('S{\lambda}^3/kV','FontSize',14);
```

* $(q, p) \leq 1$ aralığında $a_2(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab program kodu

```
>> x= [0:0.01:0.99];
>> y=(1/2^(7/2))*((abs(log((x.^2)/((0.1)^2))))./(((x.^2)-(0.1)^2).^2)).*((x.^4)-(0.1)^4));
>> u=(1/2^(7/2))*((abs(log((x.^2)/(0.3)^2))))./(((x.^2)-(0.3)^2).^2)).*((x.^4)-(0.3)^4));
>> w=(1/2^(7/2))*((abs(log((x.^2)/(1^2))))./(((x.^2)-(1^2).^2)).*((x.^4)-(1^4)));
>> plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14), ylabel('a_{2}(q,p)','FontSize',14),
,legend('p=0.1','p=0.3','p=1');
```

* $(q, p) \geq 1$ aralığında $a_2(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab program kodu

```
>> x= [1:0.01:2];
>> y=(1/2^(7/2))*((abs(log((x.^2)/((1)^2))))./(((x.^2)-(1)^2).^2)).*((x.^4)-(1)^4));
>> u=(1/2^(7/2))*((abs(log((x.^2)/(1.1)^2))))./(((x.^2)-(1.1)^2).^2)).*((x.^4)-(1.1)^4));
>> w=(1/2^(7/2))*((abs(log((x.^2)/((1.5)^2))))./(((x.^2)-(1.5)^2).^2)).*((x.^4)-(1.5)^4));
>> plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14), ylabel('a_{2}(q,p)','FontSize',14),
,legend('p=1','p=1.1','p=1.5');
```

* $(q, p) \leq 1$ aralığında $a_3(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab program kodu

```
>> x= [0:0.01:0.99];
>> y=((1/2^5)*(((abs(log((x.^2)/((0.1)^2)))).^2)/(((x.^2)-(0.1)^2).^4)).*((x.^4)-((0.1)^4).^2))-((2/3^(7/2))*(((abs(log((x.^2)/((0.1)^2)))).^2)/(((x.^2)-(0.1)^2).^3)).*((x.^6)-((0.1)^6)));
>> u=((1/2^5)*(((abs(log((x.^2)/((0.3)^2)))).^2)/(((x.^2)-(0.3)^2).^4)).*((x.^4)-((0.3)^4).^2))-((2/3^(7/2))*(((abs(log((x.^2)/((0.3)^2)))).^2)/(((x.^2)-(0.3)^2).^3)).*((x.^6)-((0.3)^6)));
>> w=((1/2^5)*(((abs(log((x.^2)/((1)^2)))).^2)/(((x.^2)-(1)^2).^4)).*((x.^4)-((1)^4).^2))-((2/3^(7/2))*(((abs(log((x.^2)/((1)^2)))).^2)/(((x.^2)-(1)^2).^3)).*((x.^6)-((1)^6)));
>> plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14), ylabel('a_{3}(q,p)','FontSize',14),
legend('p=0.1','p=0.3','p=1');
```

* $(q, p) \geq 1$ aralığında $a_3(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab

program kodu

```
>> x= [1:0.01:2];
>> y=((1/2^(5))*(((abs(log((x.^2)./(1^2))))).^2)/(((x.^2)-(1^2)).^4)).*(((x.^4)-(1^4)).^2))-
((2/3^(7/2))*(((abs(log((x.^2)./(1^2))))).^2)/(((x.^2)-(1^2)).^3)).*((x.^6)-(1^6)));
>> u=((1/2^(5))*(((abs(log((x.^2)./(1.1^2))))).^2)/(((x.^2)-(1.1^2)).^4)).*(((x.^4)-
(1.1^4)).^2))-((2/3^(7/2))*(((abs(log((x.^2)./(1.1^2))))).^2)/(((x.^2)-
(1.1^2)).^3)).*((x.^6)-(1.1^6)));
>> w=((1/2^(5))*(((abs(log((x.^2)./(1.5^2))))).^2)/(((x.^2)-(1.5^2)).^4)).*(((x.^4)-
(1.5^4)).^2))-((2/3^(7/2))*(((abs(log((x.^2)./(1.5^2))))).^2)/(((x.^2)-
(1.5^2)).^3)).*((x.^6)-(1.5^6)));
>> plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14) , ylabel('a_{3}(q,p)','FontSize',14)
,legend('p=1','p=1.1','p=1.5');
```

* $(q, p) \leq 1$ aralığında $a_4(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab

program kodu

```
>> x= [0:0.01:0.99];
>> y=((5/2^(17/2))*(((abs(log((x.^2)./(0.1^2))))).^3)/(((x.^2)-(0.1^2)).^6)).*(((x.^4)-
(0.1^4)).^3))-((3/6^(5/2))*(((abs(log((x.^2)./(0.1^2))))).^3)/(((x.^2)-
(0.1^2)).^5)).*((x.^6)-(0.1^6)).*((x.^4)-(0.1^4)))+(3/2^(7))*(((abs(log((x.^2)./(
0.1^2))))).^3)/(((x.^2)-(0.1^2)).^4)).*((x.^8)-(0.1^8)));
>> u=((5/2^(17/2))*(((abs(log((x.^2)./(0.3^2))))).^3)/(((x.^2)-(0.3^2)).^6)).*(((x.^4)-
(0.3^4)).^3))-((3/6^(5/2))*(((abs(log((x.^2)./(0.3^2))))).^3)/(((x.^2)-
(0.3^2)).^5)).*((x.^6)-(0.3^6)).*((x.^4)-(0.3^4)))+(3/2^(7))*(((abs(log((x.^2)./(
0.3^2))))).^3)/(((x.^2)-(0.3^2)).^4)).*((x.^8)-(0.3^8)));
>> w=((5/2^(17/2))*(((abs(log((x.^2)./(1^2))))).^3)/(((x.^2)-(1^2)).^6)).*(((x.^4)-
(1^4)).^3))-((3/6^(5/2))*(((abs(log((x.^2)./(1^2))))).^3)/(((x.^2)-(1^2)).^5)).*((x.^6)-
(1^6)).*((x.^4)-(1^4)))+(3/2^(7))*(((abs(log((x.^2)./(1^2))))).^3)/(((x.^2)-
(1^2)).^4)).*((x.^8)-(1^8)));
>> plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14) , ylabel('a_{4}(q,p)','FontSize',14),
legend('p=0.1','p=0.3','p=1');
```

* $(q, p) \geq 1$ aralığında $a_4(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab

program kodu

```
>> x= [1:0.01:2];
>> y=((5/2^(17/2))*(((abs(log((x.^2)./(1^2))))).^3)/(((x.^2)-(1^2)).^6)).*(((x.^4)-
(1^4)).^3))-((3/6^(5/2))*(((abs(log((x.^2)./(1^2))))).^3)/(((x.^2)-(1^2)).^5)).*((x.^6)-
(1^6)).*((x.^4)-(1^4)))+(3/2^(7))*(((abs(log((x.^2)./(1^2))))).^3)/(((x.^2)-
(1^2)).^4)).*((x.^8)-(1^8)));
>> u=((5/2^(17/2))*(((abs(log((x.^2)./(1.1^2))))).^3)/(((x.^2)-(1.1^2)).^6)).*(((x.^4)-
(1.1^4)).^3))-((3/6^(5/2))*(((abs(log((x.^2)./(1.1^2))))).^3)/(((x.^2)-
(1.1^2)).^5)).*((x.^6)-(1.1^6)).*((x.^4)-(1.1^4)))+(3/2^(7))*(((abs(log((x.^2)./(
1.1^2))))).^3)/(((x.^2)-(1.1^2)).^4)).*((x.^8)-(1.1^8)));
```

```
>> w=((5/2^(17/2))*(((abs(log((x.^2)./(1.5)^2))))).^3)/(((x.^2)-((1.5)^2)).^6).*(((x.^4)-
((1.5)^4)).^3)-((3/6^(5/2))*(((abs(log((x.^2)./(1.5)^2))))).^3)/(((x.^2)-
(1.5)^2)).^5)).*(((x.^6)-(1.5)^6)).*((x.^4)-(1.5)^4)))+(3/2^(7))*(((abs(log((x.^2)./(
(1.5)^2))))).^3)/(((x.^2)-(1.5)^2)).^4)).*((x.^8)-(1.5)^8));
>> plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14), ylabel('a_{4}(q,p)','FontSize',14),
legend('p=1','p=1.1','p=1.5');
```

* $(q, p) \leq 1$ aralığında $a_5(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab

program kodu

```
>> x= [0:0.01:0.99];
y= (((2/(3^5))*((abs(log((x.^2)./(0.1)^2))))).^4).*(((x.^6)-(0.1)^6).^2))/(((x.^2)-(0.1)^2).^6))+
((1/(2^(11/2))*((abs(log((x.^2)./(0.1)^2))))).^4).*(((x.^4)-(0.1)^4)).*((x.^8)-(0.1)^8))/(((x.^2)-
(0.1)^2).^6)- ((1/(2^3))*3^(3/2))*((abs(log((x.^2)./(0.1)^2))))).^4).*(((x.^4)-
(0.1)^4).^2).*((x.^6)-(0.1)^6))/(((x.^2)-(0.1)^2).^7))+
(((7/(2^10))*((abs(log((x.^2)./(0.1)^2))))).^4).*(((x.^4)-(0.1)^4).^4))/(((x.^2)-(0.1)^2).^8))-
(((4/(5^(7/2))*((abs(log((x.^2)./(0.1)^2))))).^4).*(((x.^10)-(0.1)^10)))/(((x.^2)-(0.1)^2).^5));
u= (((2/(3^5))*((abs(log((x.^2)./(0.3)^2))))).^4).*(((x.^6)-(0.3)^6).^2))/(((x.^2)-(0.3)^2).^6))+
((1/(2^(11/2))*((abs(log((x.^2)./(0.3)^2))))).^4).*(((x.^4)-(0.3)^4)).*((x.^8)-(0.3)^8))/(((x.^2)-
(0.3)^2).^6)- ((1/(2^3))*3^(3/2))*((abs(log((x.^2)./(0.3)^2))))).^4).*(((x.^4)-
(0.3)^4).^2).*((x.^6)-(0.3)^6))/(((x.^2)-(0.3)^2).^7))+
(((7/(2^10))*((abs(log((x.^2)./(0.3)^2))))).^4).*(((x.^4)-(0.3)^4).^4))/(((x.^2)-(0.3)^2).^8))-
(((4/(5^(7/2))*((abs(log((x.^2)./(0.3)^2))))).^4).*(((x.^10)-(0.3)^10)))/(((x.^2)-(0.3)^2).^5));
w= (((2/(3^5))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*(((x.^6)-(1)^6).^2))/(((x.^2)-(1)^2).^6))+
((1/(2^(11/2))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*(((x.^4)-(1)^4)).*((x.^8)-(1)^8))/(((x.^2)-
(1)^2).^6)- ((1/(2^3))*3^(3/2))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*(((x.^4)-
(1)^4).^2).*((x.^6)-(1)^6))/(((x.^2)-(1)^2).^7))+
(((7/(2^10))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*(((x.^4)-(1)^4).^4))/(((x.^2)-(1)^2).^8))-
(((4/(5^(7/2))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*(((x.^10)-(1)^10)))/(((x.^2)-(1)^2).^5));
plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14), ylabel('a_{5}(q,p)','FontSize',14),
legend('p=0.1','p=0.3','p=1');
```

* $(q, p) \geq 1$ aralığında $a_5(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab

program kodu

```
>> x= [1:0.01:2];
y= (((2/(3^5))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*(((x.^6)-(1)^6).^2))/(((x.^2)-(1)^2).^6))+
((1/(2^(11/2))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*(((x.^4)-(1)^4)).*((x.^8)-(1)^8))/(((x.^2)-
(1)^2).^6)- ((1/(2^3))*3^(3/2))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*(((x.^4)-
(1)^4).^2).*((x.^6)-(1)^6))/(((x.^2)-(1)^2).^7))+
(((7/(2^10))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*(((x.^4)-(1)^4).^4))/(((x.^2)-(1)^2).^8))-
(((4/(5^(7/2))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*(((x.^10)-(1)^10)))/(((x.^2)-(1)^2).^5));
u= (((2/(3^5))*((abs(log((x.^2)./(1.1)^2))))).^4).*(((x.^6)-(1.1)^6).^2))/(((x.^2)-(1.1)^2).^6))+
((1/(2^(11/2))*((abs(log((x.^2)./(1.1)^2))))).^4).*(((x.^4)-(1.1)^4)).*((x.^8)-(1.1)^8))/(((x.^2)-
(1.1)^2).^6)- ((1/(2^3))*3^(3/2))*((abs(log((x.^2)./(1.1)^2))))).^4).*(((x.^4)-
(1.1)^4).^2).*((x.^6)-(1.1)^6))/(((x.^2)-(1.1)^2).^7))+
(((7/(2^10))*((abs(log((x.^2)./(1.1)^2))))).^4).*(((x.^4)-(1.1)^4).^4))/(((x.^2)-(1.1)^2).^8))-
(((4/(5^(7/2))*((abs(log((x.^2)./(1.1)^2))))).^4).*(((x.^10)-(1.1)^10)))/(((x.^2)-(1.1)^2).^5));
```

```

(((7/(2^(10))))*(abs(log((x.^2)./(1.1)^2))).^4).*(((x.^4)-(1.1)^4).^4)./(((x.^2)-(1.1)^2).^8))-
(((4/(5^(7/2))))*(abs(log((x.^2)./(1.1)^2))).^4).*(((x.^10)-(1.1)^10))./(((x.^2)-(1.1)^2).^5)) ;
w= (((2/(3^5)))*(abs(log((x.^2)./(1.5)^2))).^4).*(((x.^6)-(1.5)^6).^2)./(((x.^2)-(1.5)^2).^6))+
((1/(2^(11/2))))*(abs(log((x.^2)./(1.5)^2))).^4).*(((x.^4)-(1.5)^4).*((x.^8)-(1.5)^8))./(((x.^2)-
(1.5)^2).^6))- ((1/((2^3)*(3^(3/2))))*(abs(log((x.^2)./(1.5)^2))).^4).*(((x.^4)-
(1.5)^4).^2).*((x.^6)-(1.5)^6))./(((x.^2)-(1.5)^2).^7))+
(((7/(2^(10))))*(abs(log((x.^2)./(1.5)^2))).^4).*(((x.^4)-(1.5)^4).^4)./(((x.^2)-(1.5)^2).^8))-
(((4/(5^(7/2))))*(abs(log((x.^2)./(1.5)^2))).^4).*(((x.^10)-(1.5)^10))./(((x.^2)-(1.5)^2).^5)) ;
plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14) , ylabel('a_{5}(q,p)','FontSize',14),
legend('p=1','p=1.1','p=1.5');

```

* $(q, p) \leq 1$ aralığında $\tilde{a}_2(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab

program kodu

```

>> x= [0:0.01:0.99];
>> y=(1/2^3)*((abs(log((x.^2)./((0.1)^2)))))./(((x.^2)-(0.1)^2).^2).*((x.^4)-(0.1)^4));
>> u=(1/2^3)*((abs(log((x.^2)./((0.3)^2)))))./(((x.^2)-(0.3)^2).^2).*((x.^4)-(0.3)^4));
>> w=(1/2^3)*((abs(log((x.^2)./((1)^2)))))./(((x.^2)-(1)^2).^2).*((x.^4)-(1)^4));
>> plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14) , ylabel('a_{2}(q,p)',
'fontsize',14),legend('p=0.1','p=0.3','p=1');

```

* $(q, p) \geq 1$ aralığında $\tilde{a}_2(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab

program kodu

```

>> x= [1:0.01:2];
>> y=(1/2^3)*((abs(log((x.^2)./((1)^2)))))./(((x.^2)-(1)^2).^2).*((x.^4)-(1)^4));
>> u=(1/2^3)*((abs(log((x.^2)./((1.1)^2)))))./(((x.^2)-(1.1)^2).^2).*((x.^4)-(1.1)^4));
>> w=(1/2^3)*((abs(log((x.^2)./((1.5)^2)))))./(((x.^2)-(1.5)^2).^2).*((x.^4)-(1.5)^4));
>> plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14) , ylabel('a_{2}(q,p)',
'fontsize',14),legend('p=1','p=1.1','p=1.5');

```

* $(q, p) \leq 1$ aralığında $\tilde{a}_3(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab

program kodu

```

>> x= [0:0.01:0.99];
>> y=((1/2^4)*(((abs(log((x.^2)./((0.1)^2))))).^2)./(((x.^2)-((0.1)^2).^4)).*(((x.^4)-
((0.1)^4).^2))-((2/3^3)*(((abs(log((x.^2)./((0.1)^2))))).^2)./(((x.^2)-((0.1)^2).^3)).*(((x.^6)-
((0.1)^6)))));
>> u=((1/2^4)*(((abs(log((x.^2)./((0.3)^2))))).^2)./(((x.^2)-((0.3)^2).^4)).*(((x.^4)-
((0.3)^4).^2))-((2/3^3)*(((abs(log((x.^2)./((0.3)^2))))).^2)./(((x.^2)-((0.3)^2).^3)).*(((x.^6)-
((0.3)^6)))));
>> w=((1/2^4)*(((abs(log((x.^2)./((1)^2))))).^2)./(((x.^2)-((1)^2).^4)).*(((x.^4)-((1)^4).^2))-
((2/3^3)*(((abs(log((x.^2)./((1)^2))))).^2)./(((x.^2)-((1)^2).^3)).*(((x.^6)-((1)^6)))));

```

```
>> plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14), ylabel('a_{3}(q,p)',
'fontsize',14),legend('p=0.1','p=0.3','p=1');
```

* $(q, p) \geq 1$ aralığında $\tilde{a}_3(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab

program kodu

```
>> x= [1:0.01:2];
>> y=((1/2^4)*(((abs(log((x.^2)/((1)^2))))).^2)/(((x.^2)-((1)^2)).^4)).*(((x.^4)-((1)^4)).^2))-
((2/3^3)*(((abs(log((x.^2)/((1)^2))))).^2)/(((x.^2)-((1)^2)).^3)).*((x.^6)-((1)^6)));
>> u=((1/2^4)*(((abs(log((x.^2)/((1.1)^2))))).^2)/(((x.^2)-((1.1)^2)).^4)).*(((x.^4)-
((1.1)^4)).^2))-((2/3^3)*(((abs(log((x.^2)/((1.1)^2))))).^2)/(((x.^2)-((1.1)^2)).^3)).*((x.^6)-
((1.1)^6)));
>> w=((1/2^4)*(((abs(log((x.^2)/((1.5)^2))))).^2)/(((x.^2)-((1.5)^2)).^4)).*(((x.^4)-
((1.5)^4)).^2))-((2/3^3)*(((abs(log((x.^2)/((1.5)^2))))).^2)/(((x.^2)-((1.5)^2)).^3)).*((x.^6)-
((1.5)^6)));
>> plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14), ylabel(' a_{3}(q,p)' ,
'fontsize',14),legend('p=1','p=1.1','p=1.5');
```

* $(q, p) \leq 1$ aralığında $\tilde{a}_4(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab

program kodu

```
>> x= [0:0.01:0.99];
>> y=((5/2^7)*(((abs(log((x.^2)/((0.1)^2))))).^3)/(((x.^2)-((0.1)^2)).^6)).*(((x.^4)-
(0.1)^4).^3))-((3/6^2)*(((abs(log((x.^2)/((0.1)^2))))).^3)/(((x.^2)-((0.1)^2)).^5)).*(((x.^6)-
(0.1)^6)).*((x.^4)-((0.1)^4)))+((3/2^6)*(((abs(log((x.^2)/((0.1)^2))))).^3)/(((x.^2)-
(0.1)^2).^4)).*((x.^8)-((0.1)^8)));
>> u=((5/2^7)*(((abs(log((x.^2)/((0.3)^2))))).^3)/(((x.^2)-((0.3)^2)).^6)).*(((x.^4)-
(0.3)^4).^3))-((3/6^2)*(((abs(log((x.^2)/((0.3)^2))))).^3)/(((x.^2)-((0.3)^2)).^5)).*(((x.^6)-
(0.3)^6)).*((x.^4)-((0.3)^4)))+((3/2^6)*(((abs(log((x.^2)/((0.3)^2))))).^3)/(((x.^2)-
(0.3)^2).^4)).*((x.^8)-((0.3)^8)));
>> w=((5/2^7)*(((abs(log((x.^2)/((1)^2))))).^3)/(((x.^2)-((1)^2)).^6)).*(((x.^4)-((1)^4).^3))-
((3/6^2)*(((abs(log((x.^2)/((1)^2))))).^3)/(((x.^2)-((1)^2)).^5)).*(((x.^6)-((1)^6)).*((x.^4)-
(1)^4)))+((3/2^6)*(((abs(log((x.^2)/((1)^2))))).^3)/(((x.^2)-((1)^2)).^4)).*((x.^8)-((1)^8)));
>> plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14), ylabel(' a_{4}(q,p)' ,
'fontsize',14),legend('p=0.1','p=0.3','p=1');
```

* $(q, p) \geq 1$ aralığında $\tilde{a}_4(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab

program kodu

```
>> x= [1:0.01:2];
>> y=((5/2^7)*(((abs(log((x.^2)/((1)^2))))).^3)/(((x.^2)-((1)^2)).^6)).*(((x.^4)-((1)^4).^3))-
((3/6^2)*(((abs(log((x.^2)/((1)^2))))).^3)/(((x.^2)-((1)^2)).^5)).*(((x.^6)-((1)^6)).*((x.^4)-
(1)^4)))+((3/2^6)*(((abs(log((x.^2)/((1)^2))))).^3)/(((x.^2)-((1)^2)).^4)).*((x.^8)-((1)^8)));
```

```

>> u=((5/2^(7))*(((abs(log((x.^2)./(1.1)^2))))).^3)/(((x.^2)-(1.1)^2).^6)).*(((x.^4)-(1.1)^4).^3)-((3/6^2))*(((abs(log((x.^2)./(1.1)^2))))).^3)/(((x.^2)-(1.1)^2).^5)).*(((x.^6)-(1.1)^6)).*((x.^4)-(1.1)^4))+((3/2^6))*(((abs(log((x.^2)./(1.1)^2))))).^3)/(((x.^2)-(1.1)^2).^4)).*((x.^8)-(1.1)^8));
>> w=((5/2^(7))*(((abs(log((x.^2)./(1.5)^2))))).^3)/(((x.^2)-(1.5)^2).^6)).*(((x.^4)-(1.5)^4).^3)-((3/6^2))*(((abs(log((x.^2)./(1.5)^2))))).^3)/(((x.^2)-(1.5)^2).^5)).*(((x.^6)-(1.5)^6)).*((x.^4)-(1.5)^4))+((3/2^6))*(((abs(log((x.^2)./(1.5)^2))))).^3)/(((x.^2)-(1.5)^2).^4)).*((x.^8)-(1.5)^8));
>> plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14), ylabel('a_{4}(q,p)',
'fontsize',14),legend('p=1','p=1.1','p=1.5');

```

* $(q, p) \leq 1$ aralığında $\tilde{a}_5(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab program kodu

```

>> x= [0:0.01:0.99];
y= (((2/(3^4))*((abs(log((x.^2)./(0.1)^2))))).^4).*((x.^6)-(0.1)^6).^2)/(((x.^2)-(0.1)^2).^6))+
((1/(2^4))*((abs(log((x.^2)./(0.1)^2))))).^4).*((x.^4)-(0.1)^4).*((x.^8)-(0.1)^8))/(((x.^2)-
(0.1)^2).^6)- ((1)/(12))*((abs(log((x.^2)./(0.1)^2))))).^4).*(((x.^4)-(0.1)^4).^2).*((x.^6)-
(0.1)^6))/(((x.^2)-(0.1)^2).^7))+ ((7/(2^8))*((abs(log((x.^2)./(0.1)^2))))).^4).*((x.^4)-
(0.1)^4).^4)/(((x.^2)-(0.1)^2).^8))-((4/(5^3))*((abs(log((x.^2)./(0.1)^2))))).^4).*((x.^10)-
(0.1)^10))/(((x.^2)-(0.1)^2).^5));
u= (((2/(3^4))*((abs(log((x.^2)./(0.3)^2))))).^4).*((x.^6)-(0.3)^6).^2)/(((x.^2)-(0.3)^2).^6))+
((1/(2^4))*((abs(log((x.^2)./(0.3)^2))))).^4).*((x.^4)-(0.3)^4).*((x.^8)-(0.3)^8))/(((x.^2)-
(0.3)^2).^6)- ((1)/(12))*((abs(log((x.^2)./(0.3)^2))))).^4).*(((x.^4)-(0.3)^4).^2).*((x.^6)-
(0.3)^6))/(((x.^2)-(0.3)^2).^7))+ ((7/(2^8))*((abs(log((x.^2)./(0.3)^2))))).^4).*((x.^4)-
(0.3)^4).^4)/(((x.^2)-(0.3)^2).^8))-((4/(5^3))*((abs(log((x.^2)./(0.3)^2))))).^4).*((x.^10)-
(0.3)^10))/(((x.^2)-(0.3)^2).^5));
w= (((2/(3^4))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*((x.^6)-(1)^6).^2)/(((x.^2)-(1)^2).^6))+
((1/(2^4))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*((x.^4)-(1)^4).*((x.^8)-(1)^8))/(((x.^2)-
(1)^2).^6)- ((1)/(12))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*(((x.^4)-(1)^4).^2).*((x.^6)-
(1)^6))/(((x.^2)-(1)^2).^7))+ ((7/(2^8))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*((x.^4)-
(1)^4).^4)/(((x.^2)-(1)^2).^8))-((4/(5^3))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*((x.^10)-
(1)^10))/(((x.^2)-(1)^2).^5));
plot(x,y,'r',x,u,'b',x,w,'g'); xlabel('q','FontSize',14), ylabel('a_{5}(q,p)','FontSize',14),
legend('p=0.1','p=0.3','p=1');

```

* $(q, p) \geq 1$ aralığında $\tilde{a}_5(q, p)$ deforme virial katsayısının grafiğinin Matlab program kodu

```

>> x= [1:0.01:2];
y= (((2/(3^4))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*((x.^6)-(1)^6).^2)/(((x.^2)-(1)^2).^6))+
((1/(2^4))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*((x.^4)-(1)^4).*((x.^8)-(1)^8))/(((x.^2)-
(1)^2).^6)- ((1)/(12))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*(((x.^4)-(1)^4).^2).*((x.^6)-
(1)^6))/(((x.^2)-(1)^2).^7))+ ((7/(2^8))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*((x.^4)-
(1)^4).^4)/(((x.^2)-(1)^2).^8))-((4/(5^3))*((abs(log((x.^2)./(1)^2))))).^4).*((x.^10)-
(1)^10))/(((x.^2)-(1)^2).^5));

```



```

u= ((2/(3^4))*((abs(log((x.^2)/(1.1)^2))).^4)*(((x.^6)-(1.1)^6).^2)/((x.^2)-(1.1)^2).^6)+
((1/(2^4))*((abs(log((x.^2)/(1.1)^2))).^4)*(((x.^4)-(1.1)^4)*(x.^8)-(1.1)^8))/((x.^2)-
(1.1)^2).^6)- ((1)/(12))*((abs(log((x.^2)/(1.1)^2))).^4)*(((x.^4)-(1.1)^4).^2)*((x.^6)-
(1.1)^6))/((x.^2)-(1.1)^2).^7)+ ((7/(2^8))*((abs(log((x.^2)/(1.1)^2))).^4)*(((x.^4)-
(1.1)^4).^4))/((x.^2)-(1.1)^2).^8)-((4/(5^3))*((abs(log((x.^2)/(1.1)^2))).^4)*(((x.^10)-
(1.1)^10))/((x.^2)-(1.1)^2).^5) ;
w= ((2/(3^4))*((abs(log((x.^2)/(1.5)^2))).^4)*(((x.^6)-(1.5)^6).^2)/((x.^2)-(1.5)^2).^6)+
((1/(2^4))*((abs(log((x.^2)/(1.5)^2))).^4)*(((x.^4)-(1.5)^4)*(x.^8)-(1.5)^8))/((x.^2)-
(1.5)^2).^6)- ((1)/(12))*((abs(log((x.^2)/(1.5)^2))).^4)*(((x.^4)-(1.5)^4).^2)*((x.^6)-
(1.5)^6))/((x.^2)-(1.5)^2).^7)+ ((7/(2^8))*((abs(log((x.^2)/(1.5)^2))).^4)*(((x.^4)-
(1.5)^4).^4))/((x.^2)-(1.5)^2).^8)-((4/(5^3))*((abs(log((x.^2)/(1.5)^2))).^4)*(((x.^10)-
(1.5)^10))/((x.^2)-(1.5)^2).^5) ;
plot(x,y,'r',x,u, 'b',x,w, 'g'); xlabel('q','FontSize',14) , ylabel('a_{5}(q,p)','FontSize',14),
legend('p=1','p=1.1','p=1.5');

```

ÖZGEÇMİŞ

Emre Dil, 28.10.1981'de Düzce'de doğmuş, ilk, orta ve lise eğitimlerini Düzce'de tamamlamıştır. 1999 yılında Düzce Lisesi'nden mezun olup, aynı yıl Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik bölümünde lisans öğrenimine başlamıştır ve 2004 yılında lisans öğrenimi tamamlamıştır. 2009 yılında Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik EABD'de yüksek lisans öğrenimine başlamış ve 2010 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamlanmıştır. 2010 yılında yine Sakarya Üniversitesi, Fizik EABD'de doktora öğrenimine başlayan Emre Dil doktora öğrenimine devam etmektedir. 2009 yılında Sinop Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik bölümüne, Sakarya Üniversitesi Fizik bölümüne, 2547 sayılı Yükseköğretim Kanununun 35. Maddesine göre görevlendirilmek üzere araştırma görevlisi olarak atanmış ve şu an hala Sakarya Üniversitesinde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.