T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN SOBOLEV TÜRÜ KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TANH-COTH YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

DOKTORA TEZİ

Şamil AKÇAĞIL

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL**

Temmuz 2013

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN SOBOLEV TÜRÜ KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TANH-COTH YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

DOKTORA TEZİ

Şamil AKÇAĞIL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 21 / 06 /2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İsmet YILDIZ Jüri Başkanı	**Prof. Dr. Cemalettin KUBAT Üye**	**Doç. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL Üye**
Doç. Dr. Elman HAZAR Üye		**Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali AKINLAR Üye**

TEŞEKKÜR

Bu günlere gelmemde büyük emek sahibi olan anne ve babama,

Doktora eğitimim boyunca daima sabrına başvurduğum ve her türlü desteğini gördüğüm eşime,

Bu çalışmanın her aşamasında büyük birikiminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile örnek edindiğim, öğrencisi olmaktan da onur duyduğum değerli hocam sayın Doç. Dr. Ömer FARUK GÖZÜKIZIL' a,

Değerli önerileri ile çalışmama önemli katkılarda bulunan sayın Prof. Dr. İBRAHİM OKUR'a,

Matematik konusunda beni daima yüreklendiren dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

KdV	: Korteweg-de Vries
$u\ (x, t\ )$	: İki değişkenli fonksiyon
ξ	: Hareketli dalga değişkeni
k	: Dalga sayısı
∇	: Gradient operatörü
Δ	: Laplace operatörü
u_x	: u fonksiyonunun x değişkenine bağlı birinci kısmi türevi
u_{xx}	: u fonksiyonunun x değişkenine bağlı ikinci kısmi türevi
$\mathrm{K}(n, n)$	: $u_t \pm a(u^n)_x + (u^n)_{xxx} = 0$ şeklindeki denklem
$u'(\xi)$	: u fonksiyonunun ξ değişkenine bağlı birinci adi türevi
$u''(\xi)$	: u fonksiyonunun ξ değişkenine bağlı ikinci adi türevi
sn	: sn Jakobi eliptik fonksiyonu
cn	: cn Jakobi eliptik fonksiyonu
dn	: dn Jakobi eliptik fonksiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Sobolev Türü Denklem, Pseudoparabolik Türü Denklem, Tanh-Coth Yöntemi, Riccati Denklemi, Hareketli Dalga Çözümü

Birçok fiziksel olguyu açıklayan Sobolev türü denklemler, boyuta ve zamana bağlı türevleri, en yüksek mertebeden türevli terimlerinde bulundurmaları ile karakterize edilmektedir. En yüksek mertebeli türevlerinde sadece bir tane zamana bağlı türev bulunduran denklemler ise pseudoparabolik denklem olarak adlandırılır ve bu denklemler Sobolev türü denklemlerin özel bir durumudur. Bu çalışmada iyi bilinen Sobolev ve pseudoparabolik denklem türleri ele alınmış ve bu denklemlerin genel özellikleri verilmiştir.

Tanh-coth yöntemi lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerini bulmada etkili ve güvenilir bir yöntemdir. Bugüne kadar bu yöntem yoğun olarak kullanılmış ve yöntemin Riccati denklemi kullanılarak elde edilen modifikasyonları literatürde tartışılmıştır. Bu tezde, tanh-coth yönteminin temel özellikleri ve bu yöntemin diğer uzantıları ele alınmıştır. Buna ek olarak tanh-coth yöntemi, sembolik hesaplama sistemleri yardımıyla Sobolev türü denklemlerin tam çözümlerini araştırmada kullanılmış ve bu denklemlerin birçok hareketli dalga çözümü elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar daha önce elde edilen bilgilerin bir doğrulaması ve geliştirilmesi olarak görülebilir.

Çalışma boyunca, cebirsel işlemler için Maple ve Scientific Work Place programları kullanılmıştır.

SOLUTION OF NONLINEAR SOBOLEV TYPE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY USING THE TANH-COTH METHOD

SUMMARY

Key Words: Sobolev Type Equation, Pseudoparabolic Type Equation, The Tanh-Coth Method, Riccati Equation, Travelling Wave Solution

Sobolev type equations have been used to describe many physical phenomena and they are characterized by having mixed time and space derivatives appearing in the highest-order terms of an partial differential equation. Equations with a one time derivative appearing in the highest order term are called pseudoparabolic and they are special case of Sobolev equations. In this work, well-known Sobolev and pseudoparabolic type equations have been considered and general properties of these equations have been given.

The tanh-coth is a powerful and reliable technique for finding travelling wave solutions for nonlinear partial differential equations. This method has been used extensively and it was subjected by some modifications using the Riccati equation. The main features of the tanh-coth method and various extension forms of this method have been discussed in this thesis. Furthermore, the tanh-coth method with the aid of symbolic computational systems has been employed to investigate exact solutions of Sobolev type equations and abundant travelling wave solutions have been found. The results obtained can be viewed as a verification and improvement of the previously known data.

Throughout the study, Maple and Scientific Work Place was used to deal with the tedious algebraic operations.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler akışkanlar mekaniği, plazma fiziği, katı mekaniği ve kuantum teorisi gibi birçok fiziksel alanda ortaya çıkmakta, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin uygulamaları ile de kimya ve biyolojide sık sık karşılaşılmaktadır. Daha önceki yıllarda lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinde hatırı sayılır ölçüde bir başarı kaydedilmesine rağmen, lineer olmayan dalgaları oluşturan parametrelerin çokluğundan dolayı, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinde ciddi anlamda bir başarı elde edilememiştir.

Önceleri nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemleri ele almak ve bunlara bir çözüm getirmek amacıyla geleneksel yöntemler denilen, karakteristikler ve varyasyonel analiz gibi yöntemler kullanılıyordu. Lineer kısmi türevli diferansiyel denklemlerin aksine nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığını, tekliğini ve kararlılığını ele almak oldukça zordur. Oysa fiziksel problemlerin birçoğunun matematiksel ifadesi lineer olamayan (nonlineer) kısmi türevli diferansiyel denklem şeklindedir. Birçok durumda lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem yerine bu denklemle yaklaşık olarak aynı sonucu veren bir lineer kısmi türevli diferansiyel denklem incelenir. Bununla birlikte böyle bir lineerleştirme daima uygun olmayabilir. Böyle durumlarda orijinal lineer olmayan diferansiyel denklemi ele almak gerekir. Lineer denklemlerle ilgili teori ve metotlar hayli gelişmesine rağmen lineer olmayan denklemler ile ilgili metotlar yeterince gelişmemiştir. Lineer olmayan denklemlerle ilgili metotlar oldukça özel durumlara indirgenmiş olup bunların çoğu yaklaşık çözümlerle ilgilidir. Üstelik lineer denklemlerin çözümünde önemli bir yere sahip olan süperpozisyon prensibi gibi bazı özellikler nonlineer denklemlere uygulanamamaktadır. Bütün bunlardan dolayı son bir çare olarak nonlineer denklemlerin tam çözümleri yerine yaklaşık çözümleri ile ilgilenme ve bunun için de nümerik yöntemlere başvurma yoluna gidilmiştir.

Günümüzde, nonlineer dalga teorisine olan ilginin artmasına paralel olarak, bu teoride büyük bir gelişim yaşanmıştır. Yakın zamanda özel bir tür Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin ele alınması sonucu yeni bir olgu gündeme gelmiştir. Eğer bir dalga yayılımı tamamen nonlineer ise kompakton ve soliton olarak tanımlanan ve tamamen katı parçacıklar gibi davranan dalga tipleri oluşur. Bu dalga tiplerinin keşfi ile nonlineer dalga teorisine ilgi yeniden artmış ve bu dalgaları ifade eden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümleri yeniden gündeme gelmiştir.

Nonlineer yayılım denklemlerini ele alan araştırmacılar tüm denklemleri çözebilen tek bir yöntem olmadığı için genelde birçok farklı yöntemi kullanırlar. Pseudo spektral yöntemi, ters saçılım metodu, Hirota'nın bilineer metodu, Painlev analizi, Backlund dönüşüm metodu, homojen denge metodu, projektif Riccati denklemi metodu, Jacobi eliptik fonksiyonlar metodu bu yöntemlerden bazılarıdır. Bu yöntemlere ait detaylar literatürde fazlasıyla mevcuttur. İncelendiğinde rahatça görülebileceği gibi bu yöntemleri kullanmak çok fazla çaba gerektirir ve oldukça zordur.

Yukarıda bir kısmı listelenen yöntemlere alternatif olarak son yıllarda başka yöntemler de ortaya atılmıştır. Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümleri ile yoğun bir şekilde ilgilenilmesi, nonlineer dalga teorisinde önemli gelişmeler olmasına ve birçok yeni ve etkili çözüm yöntemlerinin doğmasına öncülük etmiştir. Ortaya atılan yöntemlerden biri de $\tanh - \coth$ yöntemidir. Diğer geleneksel yöntemlerin aksine bu yöntemin kullanımının basitliği yanında etkinliğinin olağanüstü oluşu $\tanh - \coth$ yönteminin birçok bilimsel makaleye konu olmasına yol açmıştır.

Ancak bütün bu artan ilgiye rağmen, bu yöntemle ilgili hemen hemen bütün çalışmalar dağınık bir şekilde ve makale boyutunda kalmıştır. Diğer taraftan, hakkında yazılmış kitap ve bilimsel tez yok denecek kadar az olan bu yöntem, birçok önemli fiziksel olguyu tanımlayan Sobolev türü lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere bugüne kadar uygulanmamıştır. Sobolev türü denklemlerin çözümlerinin incelenmesi varlık, teklik ve kararlılık aşamasında kalmıştır. İşte bu amaçla bu çalışmada $\tanh - \coth$ yöntemi ayrıntılı olarak ele alınarak birçok önemli nonlineer dispersif ve disipatif Sobolev türü denkleme başarıyla uygulanmış ve literatürde olmayan birçok yeni çözüm elde edilmiştir. Böylece yöntemin gücü, kullanımının kolaylığı ve güvenilirliği kapsamlı bir şekilde gösterilerek, daha önce başkaları tarafından çözümlerinin varlık, teklik ve kararlılıkları incelenen birçok Sobolev türü denklemin hareketli dalga çözümleri elde edilmiş ve önceki çalışmalar doğrulanmıştır.

Daha sonra da detaylı olarak bahsedileceği gibi, Sobolev türü denklemler birçok fiziksel olguyu açıklamakta ve lineer olmayan dalga teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Son yıllarda bu tür denklemleri inceleme adına hatırı sayılır ölçüde bir çaba sarf edilmiş ve bu denklemler birçok bilimsel araştırmaya konu olmuştur. Bu tip denklemlerle ilgili birçok önemli sonuç elde edilmesine rağmen denklemlerin tam çözümleri hakkında bilindiği kadarıyla bir çalışma olmamıştır. Elinizdeki çalışmanın bu büyük boşluğun doldurulmasına önemli bir katkı sağlaması hedeflenmiştir. Elbette tüm Sobolev türü denklemlerin sadece bir yöntemle çözülebileceğini veya bir Sobolev türü denklemin tüm çözümlerini sadece bir yöntemin verebileceğini iddia etmek mümkün değildir ki zaten böyle bir yöntem de mevcut değildir. Fakat tüm çözümlerin elde edilemediği durumlarda en azından belli formlardaki çözümleri bulmanın önemi de açıktır. Bu düşüncenin verdiği motivasyon ile bu çalışmada hedeflenen de Sobolev türü denklemlerin literatürde olmayan belli tipteki çözümleri $\tanh - \coth$ yöntemi ile elde etmektir ki bunda da başarılı olunmuştur.

Bu çalışmanın hazırlanması esnasında, $\tanh - \coth$ yönteminin oldukça pratik ve sistematik bir şekilde kullanılabilmesinde büyük pay sahibi olan Abdul-Majid Wazwaz tarafından yazılmış “Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory” adlı kitaptan fazlası ile istifade edildiğini önemle belirtmek gerekir. Bu kaynak kitap yöntem hakkında önemli ipuçları vermekte ve birçok denklem türünün çözümünü içermektedir.

Tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde soliter dalgaların tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiş, dalga teorisi ile ilgili önemli tanımlar yapılmıştır. Dispersiyon ve disipasyon kavramları üzerinde ayrıntılı olarak durulmuş hareketli dalga tiplerinden çok önemli olanlar Mathematica ile üretilen grafiklerden yardım alınarak açıklanmıştır. İkinci bölümde, $\tanh - \coth$ yöntem ayrıntılı olarak incelenmiş bunun yanında diğer hiperbolik yöntemlerin genel hatları, farklı ve ortak yanları okuyucuya aktarılmıştır. Üçüncü bölüm tamamen Sobolev türü denklemlere ayrılmıştır. Bu bölümde çalışmanın temelini oluşturan ve çözümleri araştırılan Sobolev türü denklemler tek tek ele alınarak her biri hakkında ayrıntılı bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölüm tezin temel bölümüdür. Bu bölümde, üçüncü bölümde bahsedilen tüm denklemler ele alınarak bu denklemlerin birçok hareketli dalga çözümleri, $\tanh - \coth$ yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Beşinci bölümde yöntemin kullanılabilmesinde çok önemli bir yere sahip olan Maple ve Scientific Work Place programlarının bu denklemlerin çözümlerinde nasıl kullanıldığı hakkında önemli bilgiler verilmiş ve iyi bilinen iki denklem türü bu programlar yardımıyla adım adım çözülmüştür. Altıncı ve son bölümde ise varılan sonuçlar ve bu sonuçlarla ilgili öneriler okuyucuya sunulmuştur.

1.1. Soliter Dalgaların Keşfi

John Scott Russel soliter dalgaları ilk gözlemleyen kişidir. Russel sudaki kabarmaları deneysel olarak gözlemleyerek, “dönüşümün büyük dalgası” olarak adlandırdı [1]. Russel’ın gözlemine göre, dalga su kanalı boyunca hareket ettiğinde orijinal özelliğini koruyordu. Russel’ın gözlemlediği bu tümsek su dalgası şu an soliter veya soliton olarak adlandırılmaktadır. Genel olarak soliton, şeklini ve hızını korumada oldukça kararlı lineer olmayan dalgaları tanımlamaktadır. Soliton dalgalar partiküller gibi bir davranış gösterirler. Bu dalgaların her biri yaklaşık olarak sabit bir hız ve şekle sahip olmakla beraber, iki soliton dalga birbiri ile çarpıştıkları anda tek bir dalga olarak birleşirler. Çarpışmadan sonraki evrede ise başlangıçtaki şekil ve hızlarına tekrar kavuşarak yollarına devam ederler. Çarpışma anında oluşan tek dalganın genliği ayrı ayrı iki dalganın toplam genliğinden küçük olduğundan bu davranış lineer olmayan bir davranıştır.

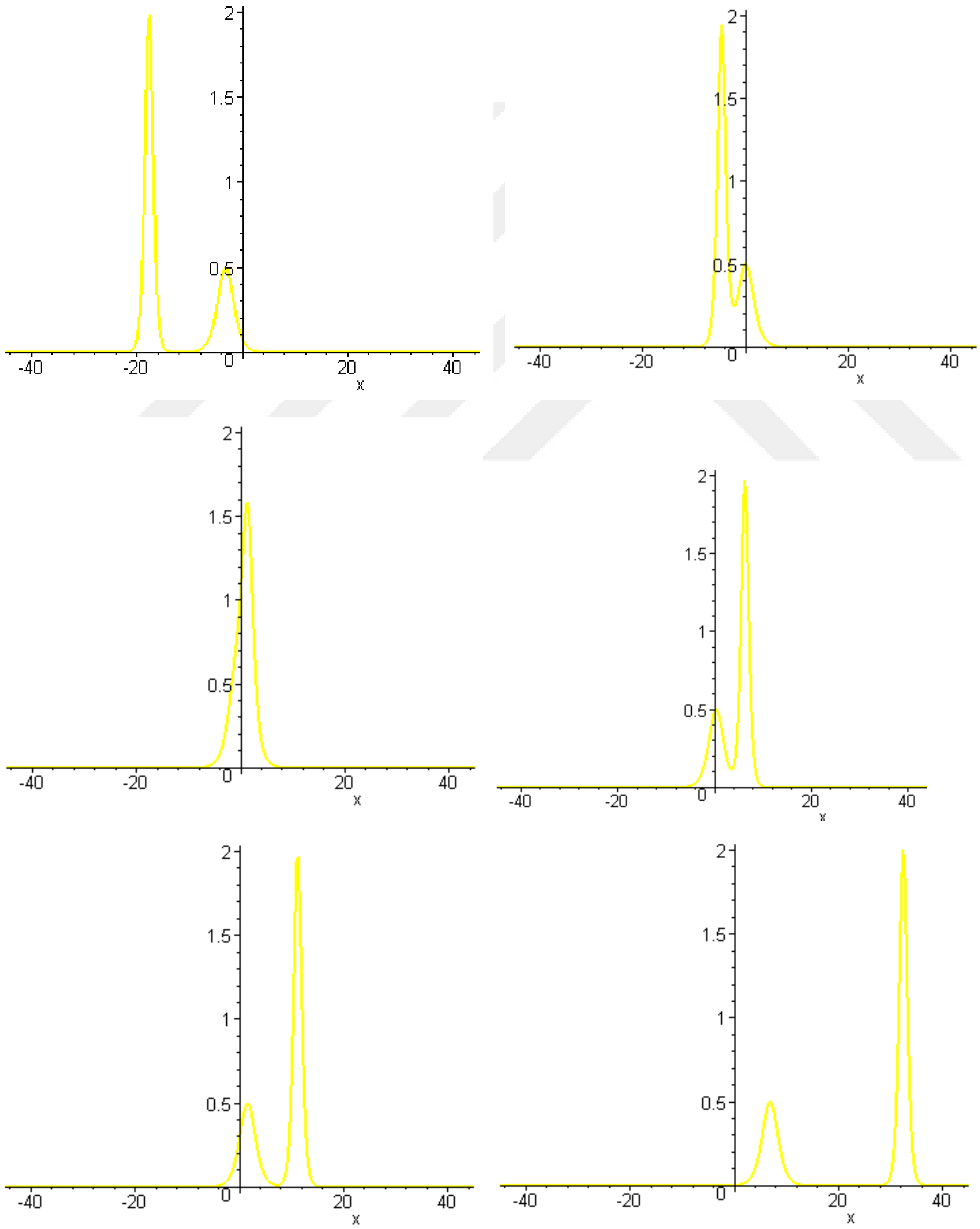
Örnek 1.1. En çok çalışılan nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemlerden biri Korteweg-de Vries (KdV) denklemi olarak isimlendirilen ve

$$u_t + auu_x + u_{xxx} = 0 \quad \textbf{(1.1)}$$

şeklinde verilen denklemdir. Bu denklem, soliton çözümlere sahiptir. Örneğin bu denklemin $a = 6$ için bir soliton çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{2} V \mathrm{sech}^2 \left[\frac{1}{2}\sqrt{V}(V - Vt + \delta)\right] \tag{1.2}$$

şeklindedir. Denklemde V soliton dalganın hızı, δ ise fazdır. Maple ile elde edilen aşağıdaki grafikte, bu denkleme ait iki soliton çözümün karşılaştıklarında nasıl davrandığı gösterilmiştir.



Şekil 1.1 KdV denkleminin iki soliton çözümünün çarpışması

1895 yılında, Diederik Johannes Korteweg (1848–1941) ve O'nun doktora öğrencisi Gustav de Vries (1866–1934), bugün KdV denklemi olarak bilinen nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemi analitik olarak elde etmiştir. KdV denklemi dispersif olan bir ortamda, küçük ancak sonlu genlikte olan su dalgalarının dağılımını ifade ediyordu, ayrıca dispersif ve nonlineer terimler içeriyordu. Daha sonraları KdV denklemi zayıf nonlineer dalgaların çalışılmasında bir model olmuştur.

Genel haliyle bir KdV denklemi

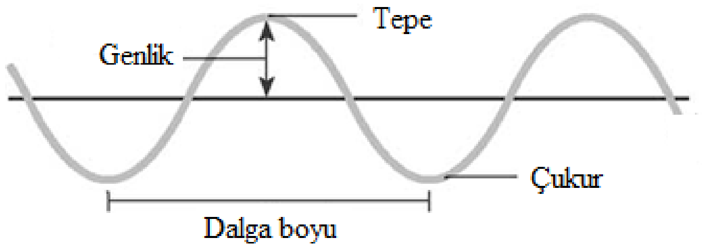
$$u_t + auu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.3}$$

şeklinde ifade edilir. Denklemde bulunan u_t terimi bir yönlü dalga yayılımı sırasında zamanın nasıl değiştiğini tanımlar. Diğer taraftan denklem, birbiriyle karşıt halde bulunan iki terimi de içerir: dalganın yükselme miktarını ifade eden, nonlineer uu_x terimi ve diğeri de dalganın yayılmasını tanımlayan u_{xxx} terimi. Nonlineerlik, dalganın yayılmasını sınırlama eğilimindedir. Başka bir ifade ile bazı nonlineer ortamlarda örneğin sığ olmayan su yüzeyinde, ya da bir optik lifte, yayılmaya bağlı olarak bir dalga yığınının genişlemesi ile ortamın nonlineerliğine bağlı olarak, bu dalga yığınının daralması denge halindedir. Dalganın yükselmesi ve dağılması arasındaki bu denge soliton dalgalardaki soliter dalga çıkıntısını açıklamaktadır. Soliton dalgalardaki kararlılık dalganın nonlineerlik ve yayılma özellikleri arasındaki bu hassas dengeden ileri gelmektedir.

Norman J. Zabusky (1929-) ve Martin D. Kruskal (1925-2006), 1965 yılında, geniş bir soliter dalganın daha küçük bir dalgayı nasıl bastırdığını ve başlangıç koşullarındaki ilişkiyi nümerik olarak incelemişlerdir [2]. Soliter dalgaların KdV denklemini takip eden nonlineer etkileşime tabi olduğunu keşfetmişler. Bundan başka, bu etkileşimden doğan dalgalar orijinal şekillerini, genliklerini ve hızlarını bunun yanında enerjilerini ve kütlelerini de koruyorlardı. Etkileşim sonucunda ise sadece faz kayması oluyordu. Bu kayda değer keşif, yani soliter dalgaların özelliklerini ve karakteristik özelliklerini kaybetmemesi, dalgaların parçacıklar gibi davranışını akla getirmiştir. Bu yüzden Zabusky ve Kruskal soliter dalgaları bu dalgaların parçacıklar gibi davranmalarından dolayı soliton olarak adlandırmıştır. İki solitonun etkileşimi sonucunda hızlarını ve şekillerini korumaları ve titreşimlerinin kararlı bir şekilde korunması yanında, iki soliton dalganın çarpışması sonucunda da bu dalgaların elastik davranışlar sergiledikleri gözlemlenmiştir. Zabusky ve Kruskal daha sonra soliton kelimesi yerine photon, phonon, proton, vb. kelimelerini kullansa da soliton dalga tabiri daha yaygın olarak kullanılmaya devam ettmiş ve öylece kalmıştır. Kısaca özetlemek gerekirse soliton dalgalar soliter dalgaların özel bir türüdür.

1.2. Tanımlar

Tanım 1.1. En genel fiziksel tanım olarak dalga sağa, sola, ileri veya geri harekete verilen isimdir. Ayrıca dalga, bir yerden başka bir yere enerji transferi sağlayan bir dağıtımdır. Titreşimler periyodik olabileceği gibi, periyodik olmayabilir. Bir dalganın salınımının şiddetine genlik, salınımının sıklığına frekans, dalganın ardışık iki tepe ya da çukur noktası arasındaki uzaklığa da dalga boyu denir (Şekil 1.2). Ses dalgaları, su dalgaları, elektromanyetik dalgalar gibi birçok dalga tipi vardır.



Şekil 1.2 Periyodik dalga

Tanım 1.2. $n-$boyutlu uzayın bir noktası $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve t zaman olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

kısmi türevli diferansiyel denklemine V hızıyla yayılan $n-$boyutlu dalga denklemi denir. Dalga denklemi akustik, akışkanlar mekaniği, elastisite, kuantum teorisi gibi konularla fizikte, mühendislikte ve uygulamalı matematikte birçok uygulama alanına sahiptir.

Örnek 1.2. En basit 1-boyutlu dalga denklemi $u(x,t)$ dalganın genliği ve V dalganın hızı olmak üzere,

$$u_{tt} = V^2 u_{xx} \tag{1.4}$$

şeklinde verilir.

Tanım 1.3. $u(x)$ ve $v(x)$ adi veya kısmi türevli lineer bir diferansiyel denklemin çözümü olsunlar. Bu durumda α ve β keyfi sabitler olmak üzere $\alpha u(x) + \beta v(x)$ de bu diferansiyel denklemin bir çözümüdür. Buna süperposizyon prensibi denir.

(1.4) dalga denkleminin $f(x - Vt)$ ve $g(x + Vt)$ gibi iki çözümü vardır. Dalga denklemi lineer olduğundan süperposizyon prensibine göre iki çözüm birbirine eklenebilir ve

$$u(x,t) = f(x - Vt) + g(x + Vt) \tag{1.5}$$

şeklinde d'Alembert çözüm adı verilen bir çözüme sahip olur. Burada f ve g sırasıyla sağa ve sola yayılan dalgaları gösteren keyfi fonksiyonlardır. Farklı f ve g dalgaları özelliklerini değiştirmeden yayılırlar. Bu fonksiyonlar $u(x,0)$ ve $u_t(x,0)$ başlangıç değerleri yardımıyla belirlenirler. $g = 0$ yazıldığında sadece sağa doğru hareket eden bir dalga ve $u_t + u_x = 0$ şeklinde bir denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü de $u(x,t) = f(x - t)$ olacaktır ki bu durumda $V = 1$ dir.

Tanım 1.4. Kaynağından uzağa enerji taşıyan veya bulunduğu ortam da kendisi ile beraber yayılma yönünde hareket eden dalgalara hareketli dalga denir. Hareketli dalga çözümleri ise $u(x,t) = U(\xi)$, $\xi = kx - \lambda t$ formunda olan çözümlerdir. λ/k dalganın yayılma hızını göstermekte olup $\lambda = 0$ olduğunda dalga durağan dalga adını alır. $k > 0$ ve $\lambda > 0$ için hareketli dalga x ekseninde sağa doğru hareket eder.

Başka bir ifade ile hareketli dalgalar nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemlerden çözümleri $u(x,t) = f(x - Vt)$ formunda olan dalgalardır ve bu çözümlere de hareketli dalga çözümü (travelling wave solution) denir. Burada $u(x,t)$, pozitif ya da negatif x yönünde hareket eden dalgayı simgelemektedir. $V > 0$ ise pozitif yönde $V < 0$ ise negatif yönde bir hareketi simgelemektedir.

Tanım 1.5. Eğer $u(x,t)$ çözümü sadece kısmi türevli diferansiyel denklemin iki koordinatı arasındaki farka bağlı ise bu durumda çözüm, dalganın şeklini olduğu gibi korur ve bu durumda soliter dalga olarak adlandırılır. Bir soliter dalga öyle bir hareketli dalgadır ki $\xi \to -\infty$ asimptotik durumundan $\xi \to +\infty$ asimptotik durumuna geçerken daima $\xi = x - Vt$ bağıntısı mevcuttur. Daha önce de belirtildiği gibi V dalga hızı olarak tanımlanır. Hereman, soliter dalgayı, durumunu belirli bir şekilde sürdüren, sonlu genlikte, sabit bir hızda ve sabit bir şekilde hareket eden lokalize yerçekimi dalgası olarak tanımlar [3].

Soliton dalgalar ile birçok fiziksel olayda karşılaşılmış, bu dalgalar çeşitli fiziksel sistemleri tanımlayan zayıf nonlineer dispersif kısmi türevli diferansiyel denklemlerin bir çözümü olarak görülmüştür. Solitonlar elastik dağılım gösteren bir tür soliter dalgalardır. Öyle ki, birbirlerinin içlerinden geçtikten sonra şekil ve hızlarını korurlar. Daha önce de ifade edildiği gibi, KdV denklemleri soliton dalgaların doğmasına öncülük eden denklemlerdir. Soliton dalgalar ortamdaki nonlineer ve dispersif etkiler arasında bir etkileşime maruz kalırlar. Soliton dalgalar sech^2 tipinde ve kink tipinde görülürler. Parçacık türü karaktere sahip olduklarından çarpışmalarda özelliklerini korurlar. Soliton kelimesinin tam bir karşılığını bulmak zordur. Bununla beraber, Drazin ve çalışma arkadaşları soliton dalgayı aşağıdaki şartları sağlayan nonlineer denklemlerin ve sistemlerin çözümü olarak tanımlamışlardır [4] :

a) Sürekli formdaki soliter dalgadır;
b) Sınırlıdır, öyle ki, azalır veya sonsuzda bir sabite yaklaşır;
c) Diğer soliton dalgalarla kuvvetli olarak etkileşir ve özelliğini korur;
d) Nonlineer ve dispersif etkiler arasındaki hassas dengenin etkisi altındadırlar.

Fiziksel literatürde, soliter dalga ve soliton arasındaki fark belirsizdir. Soliter dalgalar, disipatif ve dispersif ortamdaki dalga sürecini tanımlayan nonlineer evolüsyon denklemlerin soliton türü çözümleri olarak tanımlanır. Genellikle, tek soliton çözüm soliter dalga olarak ifade edilir [4]. Fakat bir çözümde birden fazla soliton görüldüğünde bu çözüm soliton olarak isimlendirilir. KdV denkleminden başka denklemlerde soliter dalga çözümü sech^2 fonksiyonu yerine sech veya $\arctan(e^{\alpha x})$ fonksiyonları cinsindendir.

Tanım 1.6. Sabit fonksiyonların, cisim işlemleri olan toplama, çarpma, bölme ve kök alma işlemlerinin, cebirsel, üstel ve logaritmik fonksiyonların (dolayısıyla hiperbolik fonksiyonların) ve bunların terslerinin, trigonometrik ve ters trigonometrik fonksiyonların ve güç fonksiyonlarının (power function) sonlu sayıdaki kombinasyonlarından oluşan fonksiyonlara elemanter fonksiyonlar denir. Eğer bir matematiksel ifadenin terimleri sonlu sayıda elemanter fonksiyonun analitik ifadesi ise bu ifadeye kapalı-form ifade (closed-form expression) denir. Bir problemin kapalı-form çözümü bazen analitik çözüm olarak ta adlandırılmaktadır.

1.2.1. Dispersiyon ve disipasyon

$$u_t + u_x = 0 \tag{1.6}$$

denklemi ele alınsın. Kolayca görülebileceği gibi bu denklemin çözümü

$$u(x,t) = f(x-t) \tag{1.7}$$

formunda olan bir fonksiyondur. $f(x-t)$ fonksiyonu $\sin(x-t)$, e^{x-t} gibi birçok fonksiyonun yerini tutmaktadır. Bunun yanında denklemin lineer olmasından dolayı süperpozisyon özelliği gereği bu çözümler birleştirilebilir.

Bununla beraber, (1.6) denklemine bir üçüncü mertebeden terim, dispersiyon terim, eklendiğinde en basit formdaki dispersiyon denklemi

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.8}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Farz edilsin ki bu denklemin dalga çözümü k dalga sayısını, ω dalganın frekansını göstermek üzere

$$u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} \quad \textbf{(1.9)}$$

şeklinde olsun. (1.9) çözümü (1.8) dispersiyon dalga denkleminde yazılıp reel veya imajiner kısımlar kullanılırsa dispersiyon ilişki denilen

$$\omega = k - k^2 \quad \textbf{(1.10)}$$

şeklinde bir eşitlik ve bunun yanında dalganın yayılma hızı

$$V = \frac{\omega}{k} = 1 - k \quad \textbf{(1.11)}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Elde edilen bu eşitlik dalganın yayılma hızının (1.9) da verilen k dalga sayısına göre değiştiğini göstermektedir. Dispersif etkiler genellikle frekans ve dalga hızı arasında bir ilişki verirler.

Diğer taraftan (1.6) denklemine çift mertebeden bir uzaysal türev, disipatif terim, eklendiğinde disipatif denklem denilen

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0 \quad \textbf{(1.12)}$$

denklemi elde edilir. (1.9) varsayımı (1.12) denkleminde de kullanılırsa

$$\omega = k(1 - ik) \quad \textbf{(1.13)}$$

bağıntısını ve bu da

$$u(x,t) = e^{-k^2 t + ik(x-t)} \quad \textbf{(1.14)}$$

çözümünü verir. (1.14) eşitliği açıkça dalganın yayılma hızının tek olduğunu gösterir. Bu disipasyon, (1.14) ün üstel bozunumu, $k \neq 0$ ve $t \to \infty$ için de açıktır. Zamanla enerjisini kaybetmesine bağlı olarak genliğini kaybeden dalga disipatif dalga olarak adlandırılır.

Şimdiye kadar lineer denklemlerden bahsedildi. Eğer, (1.8) ve (1.12) denklemlerindeki u_x terimi nonlineer uu_x terimi ile değiştirilirse

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad \textbf{(1.15)}$$

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0 \qquad \textbf{(1.16)}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler sırası ile çok iyi bilinen KdV ve Burgers denklemleridir. Buradaki ilginç nokta, uu_x teriminin nonlineer etkisi ile u_{xxx} teriminin dispersiyon etkisi arasındaki hassas dengenin solitonlara neden olmasıdır. Bununla beraber (1.16) Burgers denklemi kinklere neden olan nonlineer ve disipasyon etkileri de birleştirir. KdV denklemi, analitik sech^2 fonksiyonu ile ifade edilen ve üstel azalan kanatlara sahip olan soliter dalga çözümlerine sahiptir. Eğer KdV denkleminin iki solitonu çarpışırsa hiçbir değişikliğe uğramadan birbirlerinin içinden geçerler.

Rosenau ve Hyman

$$u_t + a(u)^n{}_x + (u)^n{}_{xxx} = 0,\ n > 1 \qquad \textbf{(1.17)}$$

şeklinde ifade edilen nonlineer dispersif $\mathrm{K}(n, n)$ denklemini keşfettiler [5]. Bu denklem nonlineer konveksiyon $(u)^n{}_x$ terimi ile dispersif $(u)^n{}_{xxx}$ terimini birleştirmektedir. Bu nonlineerlik ve dispersiyon arasındaki hassas denge kompakton kavramının doğmasına yol açmıştır. Kompakton, üstel kanatlardan yoksun soliton demektir. Kompakton yapısının sonsuz uzunlukta kanatlarının olmaması özelliğine ek olarak kompaktonun genişliğinin genliğinden bağımsız olduğu da söylenebilir. Kompaktonlar için, $a > 0$ olduğunda odaklanan kollar oluşurken $a < 0$ olduğunda ise spike, peakon, ve cusp şeklinde odaklanmayan dalga türleri oluşur. Odaklanan ve odaklanmayan kollara sahip dalga türleri farklı fiziksel yapılara ait olan iki farklı modeldir.

Kompaktonlar analitik olmayan çözümler olmasına rağmen solitonlar analitik çözümlerdir. Kompaktonun sınırlarında bulunan analitik olmayan noktalar diferansiyel denklemlerdeki nonlineer olmayla ilişkilidir. Kompaktonlar birbiri ile çarpıştıklarında esnek çarpışma oluşturacak şekilde eski şekillerini korurlar. KdV ve Burgers denklemleri gibi lineer veya zayıf nonlineer denklemler ile $\mathrm{K}(n,n)$ denklemi gibi tamamen nonlineer olan denklemler arasındaki temel fark tam nonlineer modellerin analitik olmayan çözümlere sahip olmasıdır. Bir sonraki başlıkta soliton dalgadan farklı olan diğer önemli hareketli dalga tipleri ele alınacaktır.

1.2.2. Hareketli dalga tipleri

Dalga denklemlerini çalışmak hareketli dalga çözümlerini çalışmayı gerektirir. Hareketli dalga çözümü, sabit bir hızla sürekli hareket eden bir çözüm demektir. Bu dalga tipleri genellikle nonlineer dalga denklemlerinin adi diferansiyel denklemlere indirgenmesi ile elde edilmektedir. Bu da çoğu kez $u(x,t) = u(\xi), \xi = x - Vt$ dönüşümü yardımıyla olur. Daha önce de ifade edildiği gibi V dalganın hızıdır. Bu dönüşüm x ve t ye bağlı bir kısmi türevli diferansiyel denklemi uygun yöntemlerle çözülebilen bir adi türevli diferansiyel denkleme dönüştürür.

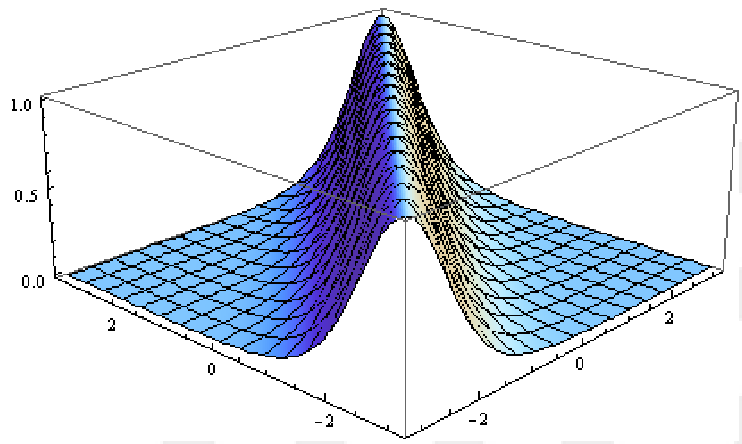
Plazma fiziğinde görülen dalga tiplerinden, sığ sularda görülen dalga tiplerine kadar birçok türde hareketli dalga tipi mevcuttur. Ayrıca bunların sayısı hızla artmaktadır. Bunların önemli olduğu düşünülen bir kaçından bahsedilecektir.

1.2.2.1 Soliter dalgalar ve solitonlar

Soliter dalgalar sınırlandırılmış yani lokalize edilmiş hareketli dalga tipleridir. Bu dalgalar uzun mesafelerde asimptotik olarak sıfırdır. Soliton dalgalar ise daha önce de ifade edildiği gibi soliter dalga tiplerinin özel bir durumudur öyle ki

$$\xi \to \mp\infty \text{ için } u'(\xi), u''(\xi), u'''(\xi) \to 0 \qquad \textbf{(1.18)}$$

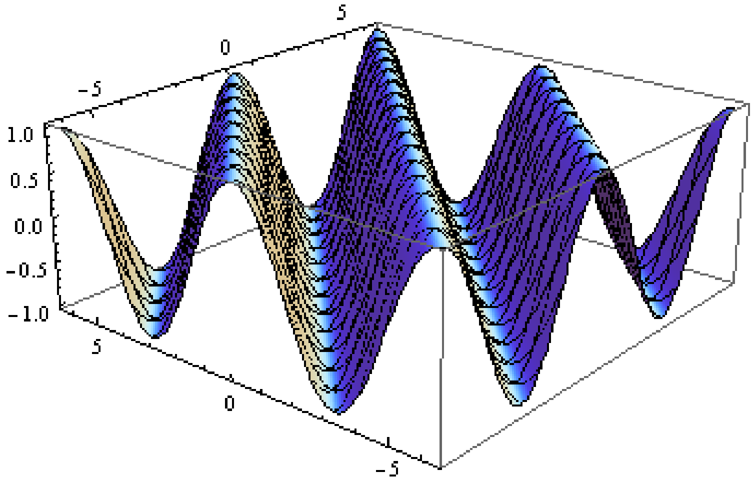
dır. Soliton dalga tiplerinin en önemli özelliği diğer soliton dalga tipleri ile etkileşime girdiklerinde özelliklerini korumalarıdır. Soliton dalga tipine güzel bir örnek olarak KdV denklemi verilebilir. Şekil 1.3'teki gibi sonsuz kanat veya kuyruğa sahip olan eğrilerdir. Şekil 1.3'te sech^2 solitary dalga çözümü gösterilmektedir. Görüldüğü gibi grafik sonsuz iki kanada sahiptir.



Şekil 1.3. $u(x,t) = \text{sech}^2(x-t), -\pi \leq x, t \leq \pi$ soliton çözümünün grafiği

1.2.2.2. Periyodik dalgalar

$\cos(x-t)$ gibi periyodik olan hareketli dalga çeşitleridir. Standart dalga denklemi olan $u_{tt} = u_{xx}$ çözüldüğünde periyodik çözümler elde edilir. Daha önce de belirtildiği gibi bu denklem lineerdir ve bu denklemin bir d'Alambert çözümü mevcuttur. Şekil 1.4'te $u(x,t) = \cos(x-t)$ çözümü verilmiştir. Şekilden dalganın periyodik olduğu rahatlıkla görülebilir.



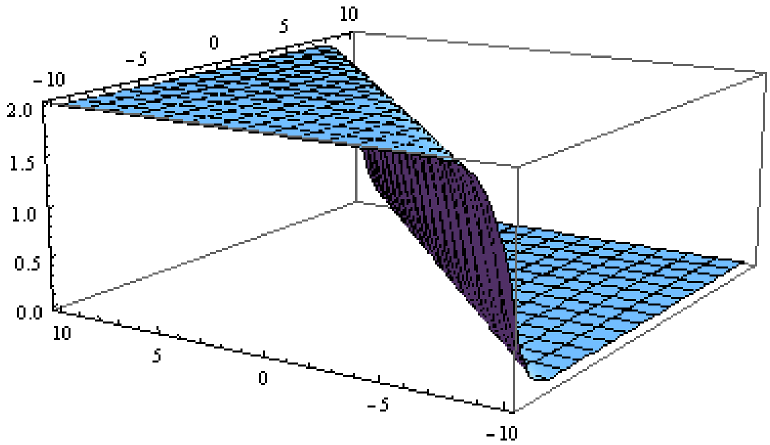
Şekil 1.4. $u(x,t) = \cos(x - t), -3\pi \leq x, t \leq 3\pi$ periyodik çözümü

1.2.2.3. Kink dalgalar

Bir asimptotik durumdan diğerine geçerken azalan veya artan hareketli dalga türlerine denir. Kink çözümler sonsuzda bir sabit değere yaklaşırlar. Standart disipatif

$$u_t + uu_x - vu_{xx} = 0 \tag{1.19}$$

Burgers denklemi kink çözüm vermesi ile bilinen bir denklemdir. Denklemde bulunan v viskozite katsayısıdır. Şekil 1.5'te $v = 1/2$ için Burger denkleminin çözümü olan $u(x,t) = 1 - \tanh(x - t), -10 \leq x, t \leq 10$ çözümü verilmektedir.



Şekil 1.5. $u(x,t) = 1 - \tanh(x - t), -10 \leq x, t \leq 10$ kink çözümü

1.2.2.4. Peakon dalgalar

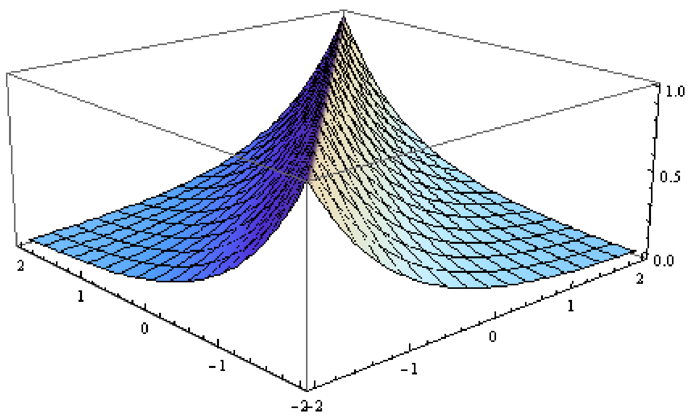
Peakon dalgalar tepeleri olan hareketli dalga tipleridir. Bu durumda, hareketli dalganın tepesi hariç diğer tüm noktaları düzgün (smooth) özellik gösterirler. Ayrıca $u(x,t)$ çözümünün x e bağlı türevleri grafiğin tam tepe noktasının solunda ve sağında farklı işaretlere sahiptir. Bunun anlamı her iki tarafta da türevler mevcuttur ancak tam tepe noktasında bir süreksizliğe sahiptir [6]. [6] ve [7] de peakon çözümler incelenmiş, bu çözümler periyodik peakon çözümler ve üstel azalan peakon çözümler şeklinde sınıflandırılmıştır. İntegrallenebilir Camassa-Holm ve Degasperis-Procesi denklemleri

$$u_t - u_{xxt} + (b+1)uu_x = bu_x u_{xx} uu_{xxx} \qquad \textbf{(1.20)}$$

şeklinde verilmektedir. Bu denklem $b=2$ ve $b=3$ için sırasıyla peakon soliter çözümler vermektedir. CH denklemi

$$u(x,t) = Ve^{-|x-t|} \qquad \textbf{(1.21)}$$

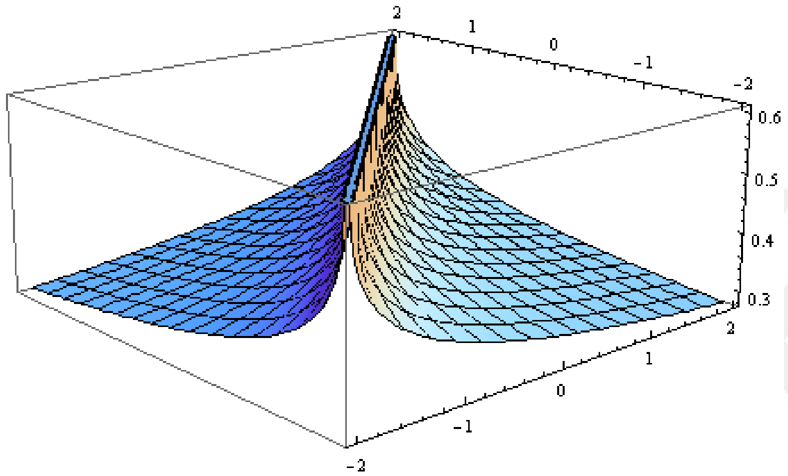
şeklinde bir çözüme sahiptir. Burada V dalga hızını göstermektedir. $V=1$ için elde edilen $u(x,t) = e^{-|x-t|}, -2 \le x,t \le 2$ çözümü Şekil 1.6'da verilmektedir.



Şekil 1.6 $u(x,t) = e^{-|x-t|}, -2 \le x,t \le 2$ peakon çözümü

1.2.2.5. Cuspon dalgalar

Cuspon dalgalar soliton dalgaların başka bir formudur. Bu dalgaların tepe uçlarında zirveler (cusp) mevcuttur. Peakon çözümlerin aksine tepe noktasındaki türevler ıraksaktır. Şekil 1.7'de bir cuspon çözüm görülmektedir. Tepedeki noktada türevin ıraksadığı görülebilir.



Şekil 1.7 $u(x,t) = e^{-|x-t|^{\frac{1}{6}}}, -2 \le x,t \le 2$ cuspon çözümü

Önemli bir not olarak burada şunu belirtmek gerekir : $|x| \to \infty$ için $u(x,t)$ çözümü ve türevleri sıfıra yakınsamaktadır. Maalesef cuspon çözümler için bir açık (expilicit) ifade verilememektedir. Genel olarak cuspon çözümlerin

$$u(x,t) = e^{-|x-ct|^{\frac{1}{n}}}, n > 1 \tag{1.22}$$

şeklinde ifade edilebileceği kabul edilir. Kolayca görülebileceği gibi tepede $u_\xi = \infty$ ve $u_\xi, u_{\xi\xi}, u_{\xi\xi\xi}, \ldots \to 0$ soliton özelliği karakterize etmektedir.

1.2.2.6. Kompakton

Başka bir soliton dalga tipidir. Başka kompaktonlar ile çarpışmalarından sonra özelliklerini korurlar ve aynı eşevreli (cohorent) şekil ile tekrar ortaya çıkarlar [8]. Soliton çarpışmalara benzer esnek çarpışma özelliği gösterirler. Kompakton dalgaların aralıksız yani tıkız dayanaklara sahip hareketli dalgalar oldukları ve ayrıca nonlineer dispersiyon etki tarafından sonlu bir merkezde tutulduğu bulunmuştur. Dispersif nonlineer $K(n,n)$ denklemleri nonlineer KdV türü denklemlerdir ki bunlar

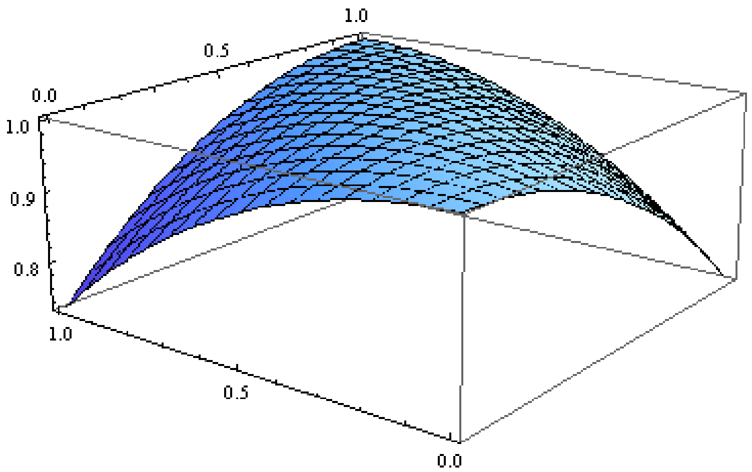
$$u_t + a(u^n)_x + (u^n)_{xxx} = 0, a > 0, n > 1 \qquad \textbf{(1.23)}$$

formundadır. Bu denklemler kompakt soliter dalga özellikleri gösterirler. Kompakton tanımı olarak şimdiye kadar şu tanımlamalar getirilmiştir:

a) Kompaktonlar sonlu dalga uzunluğuna sahip solitonlardır;
b) Kompaktonlar kompakt desteğe sahip olan soliter dalgalarıdır;
c) Kompaktonlar üstel kuyrukları olmayan solitonlardır;
d) Kompaktonlar sonsuz kanatları olmayan solitonlar olarak karakterize edilir;
e) Kompaktonlar solitonlar gibi dirençlidirler.

Kompakton dalgaların iki önemli özelliği gözlenmiştir: Bunlardan ilki, standart KdV soliton dalgaları $\xi \to \infty$ için $u(\xi) \to 0$ olurken, kompakton üstel kuyruk veya kanatlarının olmaması ile karakterize edilir öyle ki, $\xi \to \infty$ için $u(\xi)$, 0 a yakınsamaz. İkincisi ise standart KdV soliton genlik artarken daraldığı halde kompaktonun genişliği genliğinden bağımsızdır.

Burada bahsedilmesi önemli olan başka bir durum da (1.23) te $a > 0$ ise bu denklem odaklanan kol (focusing branch), $a < 0$ için ise odaklanmayan kol (defocusing branch) olarak adlandırılır. (1.23) te $a > 0$ olması kompaktonların özü iken $a < 0$ olması ise spike, peak ve cusp dalgalara özgüdür. Demek ki bunlar odaklanan ve odaklanmayan kollar şeklinde iki farklı fiziksel modeli temsil etmektedirler. Şekil 1.8'de $u(x,t) = \cos^{\frac{1}{2}}(x-t), 0 \le x, t \le 1$ şeklinde bir kompakton dalga görülmektedir. Rahatlıkla görülebileceği gibi kompakton, üstel kanatları olmayan bir soliter dalgadır.



Şekil 1.8 $u(x,t) = cos^{\frac{1}{2}}(x-t), 0 \leq x, t \leq 1$ kompakton çözümü

Son yıllarda kompakton dalgalar üzerinde yoğunlaşan çalışmalar önemli keşiflerin doğmasına yol açmıştır. Kompaktonlar üzerindeki bu çalışmalar birçok fiziksel olgunun daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır. Kararlılık analizi (stability analysis) ile kompakton çözümlerin nonlineerlik parametresinin keyfi değerleri için kararlı olduğu gösterilmiştir. Kompakton çözümlerin kararlılığı lineer kararlılık ve Lyapunov kararlılığı kriterlerine göre incelenmiştir. Bununla beraber, klasik soliton çözümler analitik çözümler olmasına rağmen, kompakton çözümler analitik olmayan çözümlerdir. Özetle, soliton ve kompakton sırasıyla kuyruklu ve kuyruksuz üstel kanatlara sahip dalgalar iken, kelimelerin sonlarında bulunan –on eki phonon ve photon gibi parçacık özellikleri göstermelerine atıftır.

1.2.3. Analitik olmayan hareketli dalga çözümleri

KdV denklemleri gibi bazı denklem türleri analitik olan hareketli dalga çözümleri verirken, K(n,n) gibi denklem türleri de analitik olmayan çözümler verirler. Kompakton, peakon ve cuspon çözümlerin de dahil olduğu analitik çözümler hem integrallenebilen hem de integrallenemeyen denklem türlerinde görülürler [7,9,10].

Analitik olmayan soliter dalga çözümü veren nonlineer dalga denklemlerin genel özellikleri şu şekildedir: Bu denklemler ya K(n,n) denklemleri gibi $(u^n)_{xxx}$ türü bir nonlineer dispersiyon terimi içerirler ya da Camassa-Holm denklemi gibi en yüksek mertebeden türevli terimleri bir fonksiyon ya da bir bağımlı değişkenle çarpılmış, örneğin uu_{xxx} gibi, durumdadırlar [9,10].

BÖLÜM 2. TANH-COTH YÖNTEMİ VE DİĞER HİPERBOLİK YÖNTEMLER

2.1. Giriş

Fiziğin birçok alanında örneğin akışkan dinamiğinde [11], plazma fiziğinde [12], katı-hal fiziğinde [13], kimyada [14], matematiksel biyolojide, populasyon dinamiğinde [15], nonlineer dalga olgusu ile sık sık karşılaşılmaktadır. Nonlineer dalga denklemleri söz konusu olduğunda ilk bakılması gereken şey bu dalganın hareketli bir dalga olup-olmadığıdır. Çünkü genel olarak, bu dalgalar belirli bir dönüşümle kolayca adi deferansiyel denkleme dönüştürülebilirler. Eğer bu adi türevli diferansiyel denkleme bir çözüm getirilebilirse, bahsi geçen kısmi türevli diferansiyel dalga denklemi de çözülmüş olacaktır.

Koruyucu (conservative) sistemlerde çözümler uygun bir dönüşüm veya değişiklikle ya da diğer ad-hoc tekniklerle direkt integral alınarak bulunabilir. Ele alınan kısmi türevli diferansiyel denklem Hirota'nın bilinear yöntemi [16], ters saçılım dönüşümü [17], kesilmiş (truncated) Painleve açılımı [18], direkt cebirsel metodlar [19,20] gibi daha sofistike yöntemlerle de çözülebilir. Ayrıca, çok güçlü bilgisayarlar yardımıyla sayısal hesaplama programları kullanılarak, mevcut hesaplama yöntemleri yardımıyla da bu denklemlerin yaklaşık nümerik çözümleri elde edilebilir. Buna rağmen, bu analitik yöntemleri bir probleme uygulayabilmek için yöntemler hakkında oldukça ayrıntılı bilgi edinmek gerekir. Çoğu kısmi türevli diferansiyel denklem çok sade olmasına rağmen, örneğin KdV-Burger denklemi, kullanışlı dönüşümler olmadığından dolayı bu denklemlerin kapalı çözümlerini elde etmek oldukça zordur.

Hareketli dalga denklemlerini çözme adına geleneksel yöntemlere ilave olarak özellikle son 20 yıl içinde birçok yeni yöntem verilmiştir. Verilen bu yeni yöntemlerden biri de $\tanh - \coth$ yöntemidir. Bu çözüm tekniği ilk kez Huibin ve Kelin [21] tarafından yüksek mertebeden KdV denklemini açık fakat pratik olmayan bir şekilde çözmek için kullanmıştır. Huibin ve Kelin $\tanh$ fonsiyonunu bir seri şeklinde denklemde yazıp kullanmışlardır. Sonuçta, kuvvet serisinin katsayılarına bağlı olarak cebirsel denklemler oluşmakta üstelik hareketli dalganın hızı da belirlenebilmekteydi. Bu yöntemi ele alan Malfliet ve Hereman yöntemi belirli bir sistematiğe oturtarak [22,23] yönteme $\tanh$ yöntem adını vermiştir. Malfliet ve Hereman cebirsel karmaşıklıktan kaçınmak için, $\tanh$ fonksiyonunun tüm türevleri kendi cinsinden olduğundan $\tanh$ fonksiyonunu yeni bir değişken olarak atadılar. Bu sayede yöntemi geniş bir denklem sınıfına direk uygulanabilir hale getirdiler. Ayrıca sınır koşullarınının olması durumunda yöntemin nasıl kullanılacağı hakkında da önemli ipuçları verdiler. Bunlara ek olarak, hareketli dalganın hızı ile ilgili bir priori yani deneysel olarak kanıtlanmamış bir olgu oluşturdular. Malfliet ve Hereman

$$\xi \to \pm\infty \text{ için } U(\xi) \to 0 \text{ ve } \frac{d^{n}U(\xi)}{d\xi^{n}} \to 0 \ (n = 1,2,\dots) \tag{2.1}$$

sınır koşullarına bağlı kalarak, eğer varsa integral sabitlerinin sıfır olması gerektiğini belirttiler. Hareketli dalga çözümlerinin $\tanh(\xi)$ fonksiyonunun terimleri ile gösterilebileceğini kabul ederek bağımlı değişkeni $Y = \tanh(\xi)$ şeklinde tanımladılar ve $Y = \tanh(\xi) = \tanh[c(x - Vt)]$ için

$$u(x,t) = U(\xi) = S(Y) = \sum_{n=0}^{N} a_n Y^n \tag{2.2}$$

şeklindeki sonlu seri çözümlerle ilgilendiler. En büyük derece olan N sayısını , (2.2) eşitliğinin adi türevli diferansiyel denklem içinde yazılması sonucu oluşan en yüksek dereceli Y terimlerinin dengelenmesi ile buldular, buna da dengeleme prosedürü adını verdiler.

Malfliet ayrıca x, y, z ye bağlı nonlineer dalga denklemlerini çözmek için yeni bir koordinatı $\eta = k \cdot r - Vt = kx + ly + mz - Vt$ şeklinde tanımlayarak $\tanh - \coth$

yönteminin daha fazla değişken içeren kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanabileceğini de göstermiştir [23].

Hereman ve çalışma arkadaşları $Y = \tanh(\xi)$ yerine $S = \mathrm{sech}(\xi)$ alarak bir sembolik yazılım paketi geliştirmişlerdir [24]. Bu yazılım paketi bazı türden denklemleri sadece denklemi programa girmek suretiyle kolay bir şekilde çözmekteydi.

Sonraki yıllarda Jakobi eliptik fonksiyonlarına ilginin artmasıyla $S = \mathrm{sn}(\xi)$, $S = \mathrm{cn}(\xi)$, $\mathrm{S} = \mathrm{dn}(\xi)$ Jacobi eliptik fonksiyonları kullanılarak alternatif ansatzlar geliştirildi ve başka çözümler elde edildi [25,26].

Bu yöntemlere ek olarak lineer olmayan denklemlerin tam çözümlerini bulmak için homojenleştirilmiş denge yöntemi [27,28], F-açılım yöntemi [29,30,31], Jacobi eliptik fonksiyon yöntemi [31-35] gibi güçlü yöntemler de geliştirildi.

Otuz yıl öncesine kadar kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözebilmek için Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi geleneksel yöntemler kullanılıyordu. Bu integral dönüşümlerinin denklemlerin çözümlerinde oldukça işe yaramalarının sebebi diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürmelerinde yatıyordu. Bununla beraber bu integral dönüşümleri kullanmak birçok karmaşık işlemi de beraberinde getiriyordu [36]. Bu karmaşık işlemleri çözebilmek için sembolik yazılımlara ihtiyaç duyuluyordu ancak mevcut işlemciler yeterince hızlı değildi. Son yıllarda önceki yıllara kıyasla çok daha güçlü bilgisayarların üretimi, sayısal simülasyon tekniklerinin kullanımında bir devrim yapılmasına ve bunun sonucu olarak ta mevcut hesaplama yöntemlerinde büyük bir aşama kat edilmesine olanak sağladı. Bu hesaplama yöntemlerinin gelişmesine bağlı olarak yeni ve güçlü yöntemlerin keşfine kapı aralandı. Daha önce de belirtildiği gibi bunlardan biri çok etkili bir yöntem olan tanh yöntemdi. Bu yöntem birçok nonlineer denklem türünün çözülmesinde etkili ve basit bir algoritma sunuyordu. Son yıllarda bu yöntem temel alınarak birçok araştırmacı bu yöntemin başka bir versiyonunu tanıttı ve uygulama alanına soktu. Örneğin Fan, genişletilmiş tanh metodu tanıttı ve tanjant hiperbolik yöntemle elde edilemeyen yeni hareketli dalga çözümlerini elde etti [37,38]. Wazwaz bu yöntemi biraz daha geliştirerek yöntemi ilk önce genişletilmiş tanh yöntemi olarak daha sonra da $\tanh - \coth$ yöntemi olarak adlandırdı [39-42]. Yakın bir zamanda El-Wakil [43,44] ve Soliman [45] genişletilmiş $\tanh - \coth$ metodu modifiye ederek bazı nonlineer denklemlerin yeni çözümlerini elde ettiler. Ancak yukarıda bahsedilen yöntemlerin tümü sabit katsayılı diferansiyel denklemleri çözebiliyordu. Lü ve Zhang değişken katsayılı nonlineer denklemlerin çözümünde de kullanılabilecek bir yöntemi further extended tanh yöntem ismi ile tanıttılar [46]. Khuri, yöntemi karmaşık sayılara genişleterek bazı denklemlerin karmaşık çözümlerini de elde etmek için kompleks tanh metodu tanıttı. Bu amaçla Khuri kübik Schrödinger denklemini çözmek için yeni bir ansatz kullandı [47]. Çinli matematikçiler Wang ve çalışma arkadaşları nonlineer evolüsyon denklemlerin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için G'/G açılım yöntemi adında yeni bir yöntemi tanıttılar [48]. Bu yöntem $\tanh - \coth$ yöntemin daha genel haliydi.

Bu yöntemlerden $\tanh - \coth$ yöntem bir sonraki başlıkta ayrıntılı olarak ele alınacak ve sonrasında ise diğer yöntemlerden genel hatları ile bahsedilecektir. Ayrıca dördüncü bölümde $\tanh - \coth$ yöntemin birçok yeni uygulamasına yer verilecektir.

2.2. Tanh-Coth Yöntemi

Wazwaz $\tanh - \coth$ yöntemini şu şekilde tanımlamıştır [48] :

Adım 1.

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \qquad \textbf{(2.3)}$$

şeklinde bir kısmi türevli diferansiyel denklem ele alınsın.

Adım 2. Bu denklemin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için dalga değişkeni adı verilen $\xi = x - Vt$ dönüşümü kullanılarak denklem

$$u(x,t) = U(\mu\xi) \tag{2.4}$$

şeklinde bir adi türevli diferansiyel denkleme dönüşecektir. Bu durumda kısmi türevlerde de

$$\frac{\partial}{\partial t} = -V\frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \mu\frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \mu^2\frac{d^2}{d\xi^2} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} = \mu^3\frac{d^3}{d\xi^3}$$

şeklindeki gibi değişiklikler olacaktır. Bu türevler (2.3) kısmi türevli diferansiyel denkleminde yazıldığında

$$Q(U, U', U'', \dots) = 0 \tag{2.6}$$

adi türevli diferansiyel denklemi elde edilecektir.

Adım 3. Eğer tüm terimler ξ ye bağlı türevler içeriyorsa integral sabiti sıfır kabul edilerek integral alınır.

Adım 4.

$$Y = \tanh(\mu\xi) \tag{2.7}$$

şeklinde yeni bir değişken tanımlanır. Bu değişken yardımıyla

$$\frac{d}{d\xi} = \mu(1-Y^2)\frac{d}{dY}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = -2\mu^2 Y(1-Y^2)\frac{d}{dY} + \mu^2(1-Y^2)^2\frac{d^2}{dY^2}$$

(2.8)

$$\frac{d^3}{d\xi^3} = 2\mu^3(1-Y^2)(3Y^2-1)\frac{d}{dY} - 6\mu^3 Y(1-Y^2)^2\frac{d^2}{dY^2} + \mu^3(1-Y^2)^3\frac{d^3}{dY^3}$$

ve bunlara benzer olarak varsa diğer türevler oluşturulur.

Adım 5. Tanh-coth yöntemi temelde

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k + \sum_{k=1}^{M} b_k Y^{-k} \quad \textbf{(2.9)}$$

şeklindeki çözümlerle ilgilenir. Bu şekilde önceden kabul edilen çözümlere ansatz denir. Bir ansatz, herhangi bir teori veya prensibe dayanmadan önceden kabul edilen matematiksel formu ifade eder. Bu ansatz ve yukarıdaki türevler adi türevli diferansiyel denklemde yazılırsa Y ye bağlı bir polinom elde edilir.

Adım 6. M yi elde etmek için polinomdaki en yüksek mertebeli lineer ve nonlineer terimlerin kuvvetleri birbirine eşitlenir. Buna dengeleme prosedürü denir. Çoğu durumda M sayısı 1 veya 2 olarak bulunacaktır. M elde edilince elde edilen polinom Y nin kuvvetlerine göre düzenlenerek bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenir. Elde edilen bu denklem sistemi çözülerek a_k, b_k, $(k = 0, \ldots, M)$, V, ve μ elde edilir. Bu parametrelerin elde edilmesi ve M nin de bir tamsayı olduğunun bilinmesi ile yukarıdaki ansatz kullanılarak kısmi türevli diferansiyel denklemin kapalı formdaki bir analitik çözümü elde edilmiş olur. Bu çözümler sech^2 den oluşan terimlere bağlı soliton çözümler olabileceği gibi tanh cinsinden elde edilen kink çözümler de olabilir hatta periyodik çözümler de olabilir.

Dengeleme prosedürü ile M nin elde edilmesinde u nun en büyük kuvvetleri dengeleme sırasında

$$u \to M$$

$$u^n \to nM$$

$$u' \to M + 1$$

$$u'' \to M + 2$$

$$u^{(r)} \to M + r \qquad \textbf{(2.10)}$$

$$(u^n)^{(r)} \to nM + r$$

$$\left(u^{(r)}\right)^n \to (M + r)^n$$

şeklinde kullanılır. (2.9) ansatzında M çoğu kez bir pozitif tamsayıdır. M nin pozitif tamsayı olmadığı durumlarda da uygun bir dönüşümle bu zorluğun üstesinden kolayca gelinebilir. Şöyle ki: $M = \frac{k}{l}, (k, l) = 1\ , k, l \in Z$ şeklinde bir rasyonel sayı ise $u = v^{\frac{1}{l}}$ şeklinde bir dönüşüm yapılır. Böylece M yine bir pozitif tamsayı olmuş olur. Diğer taraftan M nin değerinin negatif bir tamsayı olduğu durumlar da olabilir. Böyle durumlarda

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{M} a_k Y^k + \sum_{k=1}^{M} b_k Y^{-k}} \qquad \textbf{(2.11)}$$

şeklinde bir ansatz kullanılır.

2.3. Diğer Hiperbolik Yöntemler

2.3.1. Genişletilmiş tanh-coth yöntemi

$$H(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) \tag{2.12}$$

kısmi türevli diferansiyel denklemi ele alınsın. Birçok nonlineer denklemin çözümleri tanh fonksiyonunun sonlu bir serisi olarak ifade edilebildiğinden bu yönteme göre çözümler

$$u(x,t) = U(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i w^i \tag{2.13}$$

formunda aranır. Burada $w(x,t) = \tanh(kz)$, $z = x + ct$ ve m, en yüksek mertebeli lineer terim ve nonlineer terimin dengelenmesi ile elde edilebilen pozitif bir tamsayıdır. $k, c, a_0, \dots, a_m$ elde edilebilen parametrelerdir. Seri, kısmi türevli diferansiyel denklemde yerine yazıldığında $k, c, a_0, \dots, a_m$ bilinmeyenlerinin oluşturduğu bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Tüm w^i katsayıları sıfır olmak zorunda olduklarından katsayılar sıfıra eşitlenerek bu parametreler elde edilir. Eğer $\tanh(kz)$ fonksiyonu başka bir fonksiyon ile, örneğin $\tan(kz)$ fonksiyonu, değiştirilirse başka tipte hareketli dalga çözümleri elde edilebilir. Ancak bu beraberinde birçok cebirsel işlemi getirir [50,51]. Bu yöntemin temel dayanağı diğer hiperbolik yöntemlerde olduğu gibi Riccati denkleminin çözümleri ve bu çözümlerin $\tanh(kz)$ fonksiyonu ile değiştirilmesidir. Diğer tüm işlemler de $\tanh - \coth$ yöntemi ile benzerdir. Söz konusu Riccati denklemi

$$w' = b + w^2 \tag{2.14}$$

şeklindedir. Burada $' := d/dz$ ve b belirlenmiş bir parametredir. Bu denklem tekrar tekrar kullanılarak w nin tüm türevleri yine w nin türünden yazılabilir. Bu Riccati denkleminin elde edilebilecek çözümleri

$$w = \begin{cases} -\sqrt{-b}\tanh\sqrt{-b}z, & b < 0 \\ -\sqrt{-b}\coth\sqrt{-b}z, & b < 0 \end{cases}$$

$$w = -\frac{1}{z}, \;\; b = 0$$

$$w = \begin{cases} -\sqrt{-b}\tan\sqrt{b}z, & b > 0 \\ -\sqrt{-b}\cot\sqrt{b}z, & b > 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

şeklindedir. Dikkat edilirse $\tanh$ fonksiyonu bunların özel bir durumudur. Bundan dolayı en başta verilen kısmi türevli diferansiyel denklemin yukarıdaki çözümlerde verilen fonksiyon tiplerinde de çözümü olduğu ve dahası bu çözümlerin tek bir fonksiyonda birleştirebileceği düşünülebilir. Bu amaçla Riccati denkleminin çözümlerini tek tek düşünmeden bir cebirsel denklem oluşturup o şekilde çözüme gidilebilir. Böylece tanh yöntemi ve diğer karmaşık yöntemlerle elde edilen hareketli dalga çözümleri elde edilebilir.

Burada bahsedilen yöntem ayrıca elde edilen cebirsel denklem sistemini çözmek adına mekanikleştirilmiş bir yöntem de sunmaktadır. Bu cebirsel denklemi elle çözmek oldukça zahmetli olduğundan Maple ve Mathematica gibi bilgisayar programlarından yararlanılır.

m nin pozitif tamsayı olmadığı duruma tekrar gelinirse, bu yöntemde de $\tanh - \coth$ yönteminde yapıldığı gibi $u = v^{\frac{1}{m}}$ şeklinde yapılan bir dönüşüm, kısmi türevli diferansiyel denklemin v ye bağlı bir denklem olmasının yanında dengeleme sayısı olan m nin pozitif tamsayı olmasını da sağlayacaktır. Böylece bu dönüşüm yukarıda bahsedilen yöntemi kullanılabilir hale getirecektir.

2.3.2. Further extended tanh yöntemi

Zhuosheng Lü ve Hongqing Zhang’nin ortaya attığı bu yöntem [46] a_i katsayıları sabitler ve ω fonksiyonu x_i ve t değişkenlerinin lineer bir kombinasyonu olduğunda Fan’ın önerdiği yöntemle aynıdır. a_i katsayıları ve ω fonksiyonu x in sabit olmayan bir fonksiyonu olarak seçildiğinde $\tanh - \coth$ yöntemi ve genişletilmiş tanh yöntemi ile elde edilemeyen çözümler elde edilebilir. Buna göre, $x = (t, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ bağımsız değişkenine ve u bağımlı değişkenine bağlı olarak verilmiş lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklem verilsin. Bu yöntemle denklemin

$$\phi' = \delta(1 + \mu\phi^2) \qquad \textbf{(2.16)}$$

olmak üzere

$$u = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, \phi^i\big(\omega(x)\big) \qquad \textbf{(2.17)}$$

şeklinde olan çözümleri aranır. Burada δ sıfırdan farklı bir sabit, $\mu = \mp 1$ ve $'$ ise ω ya göre türev alınacağını belirtir. u nun elde edilmesi için aşağıdaki adımlar takip edilir:

Adım 1. n nin oluşturulması için verilen kısmi türevli diferansiyel denklemde en yüksek mertebeli nonlineer kısmi türevli terim ile en yüksek mertebeli lineer terimler dengelenir.

Adım 2. (2.16) ve (2.17) kısmi türevli diferansiyel denklemde yazılır ve ϕ nin kuvvetlerine göre bir polinom oluşturularak bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenir. Böylece a_i $(i = 0,1,2,\dots,n)$ katsayıları ve ω ya bağlı bir cebirsel denklem oluşturulur.

Adım 3. Elde edilen bu denklem sistemi çözülerek a_i $(i = 0,1,2,\dots,n)$ katsayıları ve ω elde edilir.

Adım 4. (2.16) denkleminin genel çözümleri

$$\phi = \begin{cases} \tanh(\delta\omega), & \mu = -1 \\ \coth(\delta\omega), & \mu = -1 \\ \tan(\delta\omega), & \mu = 1 \\ -\cot(\delta\omega), & \mu = 1 \end{cases} \qquad \textbf{(2.18)}$$

şeklinde olduğundan a_i, ω ve (2.18), (2.17) de yazılırsa istenen soliton ve periyodik çözümler elde edilmiş olur.

2.3.4. Kompleks tanh yöntemi

Yöntem kompleks fazlı hareketli dalga denklemlerinin çözümlerini elde etmek için ortaya atılmıştır. Bunu yapmak için iki basit ansatz önerilerek kübik Scrodinger denkleminin hareketli ve durağan dalga çözümleri elde edilmiştir. Temelde diğer hiperbolik yöntemler gibi çalışmasına karşılık, farklı olarak bu yöntemde ele alınan nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemin

$$u(x,t) = u(i\xi) = \sum_{n=0}^{s} a_n \tanh(i\xi) \quad \textbf{(2.19)}$$

şeklindeki çözümleri aranmaktadır. Burada $\xi = kx - \omega t$, k dalga sayısı, ω/k dalga hızı ve $i = \sqrt{-1}$ dir. Ayrıca diğer yöntemlerdeki gibi dengeleme prosedürü ile belirlenen s belirli bir pozitif tamsayı ve $a_0, a_1, \ldots, a_s$ belirlenebilen parametrelerdir.

2.3.5. (G'/G)-açılım metodu

x ve t değişkenlerine bağlı bir $u = u(x,t)$ fonksiyonu için

$$P\big(u, u_t, u_x, u_{tt,} u_{xx}, \ldots\big) = 0 \quad \textbf{(2.20)}$$

lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemi verilsin. P, u nun ve kısmi türevlerinin bir polinomu olsun. (G'/G)-açılım metodunun kullanımındaki temel adımlar şu şekilde verilebilir:

Adım 1. Bağımsız x ve t değişkenleri tek bir değişken olarak $\xi = x - Vt$ şeklinde birleştirilir. $u(x,t) = u(\xi)$ olarak kabul edilip (2.20) denklemi $u = u(\xi)$ için

$$P(u, -Vu', u', V^2u'', \ldots) = 0 \quad \textbf{(2.21)}$$

şeklinde adi türevli diferansiyel denkleme dönüştürülür.

Adım 2. $G = G(\xi)$ foksiyonu ikinci mertebeden lineer

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \tag{2.22}$$

adi türevli diferansiyel denkleminin bir çözümü olmak üzere (2.21) denkleminin çözümleri

$$u(\xi) = \alpha_m \left(\frac{G'}{G}\right)^m + \cdots \tag{2.23}$$

şeklinde verilen G'/G nin bir polinomunu gerçeklesin. Burada $\alpha_m, \ldots, \lambda$ ve μ daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir. m pozitif tamsayısı yine (2.21) denklemindeki en yüksek mertebeden türevli terimler ile nonlineer terimler arasında kurulacak dengeleme prosedürü ile belirlenir.

Adım 3. (2.23) eşitliği (2.21) de yazılıp (2.22) kullanılır ve elde edilen polinom G'/G nin kuvvetlerine göre düzenlenir. Polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek elde edilen denklem sisteminden $\alpha_m, \ldots, \lambda, V$ ve μ elde edilir.

Adım 4. $\alpha_m, \ldots, \lambda, V$ ve μ katsayılarının elde edilebildiğini kabul ederek, (2.22) denklemin genel çözümleri de iyi bilindiğinden $\alpha_m, \ldots, \lambda, V$ ve μ ile (2.22) denkleminin genel çözümleri (2.23) polinomunda yazıldığında (2.20) nonlineer kısmi türevli diferansiyel yayılım denkleminin hareketli dalga çözümleri elde edilmiş olur.

BÖLÜM 3. LİNEER OLMAYAN SOBOLEV TÜRÜ KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Tanım 3.1. Sobolev denklemi terimi Rus literatüründe en büyük mertebeden terimi zamana ve boyuta bağlı olan kısmi türevli diferansiyel denklemler için kullanılmış [52] ve bu denklemler ilk kez Rus matematikçi Sobolev tarafından çalışılmıştır [53].

Örnek 3.1. Pochhammer–Chree denklemi olarak bilinen

$$u_{tt} - u_{xxtt} - (\alpha u + \beta u^3 + \theta u^5)_{xx} = 0 \qquad \textbf{(3.1)}$$

denklemi Sobolev türü denklemdir. Dikkat edilirse denklemin en yüksek mertebeden terimi olan u_{xxtt} zamana ve boyuta bağlı türevleri barındırmaktadır.

Bu denklemler birçok fiziksel olguyu açıklamakta, matematik ve fiziğin birçok alanında ortaya çıkmaktadır. Kil konsolidesini, bazı ortamlardaki ısı transferini, çatlamış bir materyaldeki homojen sıvı akışını ve başka birçok fiziksel modeli açıklamak için kullanılmaktadır [54-59]. Son yıllarda Sobolev türü denklemlerle ilgili hatırı sayılır ölçüde inceleme yapılmış ve bu incelemeler halen devam etmektedir. Bu çalışmalara örnek vermek gerekirse; Yarıgrup (Semigroup) teori Sobolev türden singüler denklemler teorisine uygulanmış [60], bu denklemlerin non-invertible operatörler altında incelemesi yapılmıştır [61]. Dejenere olmuş Sobolev türü denklemler incelenmiş [62], Sobolev türü denklem sistemleri ile ilgili birçok önemli sonuç elde edilmiştir [55]. İçinde bir disipasyon terim barındıran lineer olmayan ve lokal olmayan Sobolev türü denklemler için bir Cauchy problemi ele alınmış, denklemin asimptotik davranışı incelenmiştir [63]. Sobolev türü denklemlerin çözülebilirliği [64] ve iki nonlineerliği olan denklemler incelenmiş [65], monotonik nonlineerliğe sahip denklemler araştırılmıştır [66]. [67] ve [68] de Sobolev tipten denklemlerin sınırlı çözümlerinin global varlığı ispatlanmış ve çözümlerin blow-up etkileri keşfedilmiştir. Birçok konvektiv türden Sobolev denklemin Cauchy probleminin çözümlerinin asimptotik davranışları geniş zamanda incelenmiştir ve önemli bulgular elde edilmiştir [69-80].

Tanım 3.2. Bir kısmi türevli diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevli teriminde zamana bağlı türev sadece bir tane ise bu denkleme pseudoparabolik denklem denir.

Bu tanımdan da anlaşılacağı gibi pseudoparabolik denklemler Sobolev türü denklemlerin özel bir durumudur. Pseudoparabolik denklem tanımı olarak aşağıdaki gibi bir tanım da yapılabilir.

Tanım 3.3 $L[.]$ ile $n.$ mertebeden bir lineer operatör, $M[.]$ ile $m.$ mertebeden bir lineer operatör gösterilsin.

$$L[u] + M[u_t] = 0 \tag{3.2}$$

denkleminde eğer $m < n$ ise denklem metaparabolik, $m \geq n$ ise denklem pseudoparabolik adını alır [81].

Örnek 3.2. Rosenau–Burgers denklemi olarak bilinen

$$u_{xxxxt} + u_t - \alpha u_{xx} + u^p u_x = 0 \tag{3.3}$$

beşinci bertebeden kısmi türevli diferansiyel denkleminde bulunan en yüksek mertebeden u_{xxxxt} terimi sadece bir tane zamana bağlı türev içerdiğinden bu denklem pseudoparabolik denklemdir.

Bu çalışmada tanh-coth yöntemi kullanılarak aşağıdaki denklemler için hareketli dalga çözümleri araştırılacaktır.

3.1. Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine-Burgers (BBMPB) Denklemi

Pseudoparabolik denklem türlerinden biri olan genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) denklemi

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_x + f(u)_x = 0 \qquad \textbf{(3.4)}$$

olarak ifade edilmektedir. Denklemde $u(x,t)$, yatay x yönünde akan sıvının hızını göstermektedir. α pozitif sabit , γ herhangi bir real sabittir. $f(u)$ fonksiyonu ise C^2-düzgün nonlineer fonksiyondur.

Bu denklemde $\alpha = 0$, $\gamma = 1$ ve $f(u)_x = uu_x$ alındığında Peregrine [82] ve Benjamin ve çalışma arkadaşları tarafından önerilen [83] ve oldukça iyi bilinen

$$u_t + u_{xxt} + u_x + uu_x = 0 \qquad \textbf{(3.5)}$$

Korteweg-de Vries (KdV) denklemi oluşur. Eğer denklemde daha genel bir durum olarak $\theta, \beta \neq 0$ olmak üzere $f(u)_x = \theta uu_x + \beta u_{xxx}$ alınırsa

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_x + \theta uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \qquad \textbf{(3.6)}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine-Burgers (BBMPB) denklemi denir.

3.2. Oskolkov-Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (OBBMB) Denklemi

(3.6) denkleminde $\beta = 0$ alınması durumunda elde edilen

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_x + \theta uu_x = 0 \qquad \textbf{(3.7)}$$

denklemi Oskolkov-Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (OBBMB) denklemi olarak bilinir. Bu nonlineer, bir boyutlu pseudoparabolik denklem Ox ekseni boyunca yayılan yüzey dalgalarını tanımlamakla beraber, denklemde bulunan αu_{xx} terimi viskoziti terimi olarak adlandırılmaktadır [84,85]. Literatürde bu denklem ayrıntılı olarak ele alınmış, denklemin katlı (multiple) soliton çözümleri ters saçılım (inverse scattering) yöntemi kullanılarak elde edilmiştir [86-91].

3.3. Bir boyutlu Oskolkov Denklemi

Sıkıştırılamaz vizkoelastik Kelvin-Voight sıvısının dinamiğini açıklayan

$$(1-\lambda\nabla^2)u_t = \alpha\nabla^2 u - (u\cdot\nabla)u - \nabla^2 p + f,\ \ \nabla\cdot u = 0 \tag{3.8}$$

Oskolkov sisteminin tek boyutlu bir analoğu olan bu denklem

$$u_t - \lambda u_{xxt} - \alpha u_{xx} + u u_x = 0 \tag{3.9}$$

şeklinde verilir. Denklemdeki λ pozitif ya da negatif olabilir [92,93].

3.4. Genelleştirilmiş Hyperelastic-Rod Dalga Denklemi

Bu denklem ilk kez Coclite ve çalışma arkadaşları tarafından matematiksel fizikteki birçok önemli fiziksel olguyu ifade etmek maksadıyla verilmiştir [94]. Ayrıca aynı çalışmada disipatif çözümlerin global varlığı da saptanmıştır. Genelleştirilmiş hyperelastic-rod dalga denklemi α, β, θ ve γ sabitler olmak üzere bu çalışmada

$$u_t - u_{xxt} + \alpha u_x + 2\beta u u_x + 3\theta u^2 u_x - \gamma u_x u_{xx} - u u_{xxx} = 0 \tag{3.10}$$

şekli ile ele alınacaktır.

Diğer taraftan bu denklem, birçok çalışmaya konu olan çok önemli denklemleri de içermektedir. Örneğin; $\beta = 3/2\,, \theta = 0, \gamma = 2$ için Camassa-Holm (CH) denklemi olarak bilinen

$$u_t - u_{xxt} + \alpha u_x + 3u u_x - 2u_x u_{xx} - u u_{xxx} = 0 \tag{3.11}$$

denklemi bunlardan biridir. Denklemde u, x yönünde yayılan sıvının hızı ve α bir sabittir. Camassa-Holm denklemi [95-96] da çalışılmış ve bu denklemin açık (explicit) hareketli dalga çözümleri elde edilmiştir [97]. Bunlara ek olarak Wazwaz bu denklemin başka formlarının soliter dalga çözümlerini geliştirmiştir [98].

$\beta = 2, \theta = 0, \gamma = 3$ için denklem Degasperis-Procesi (DP) denklemi denilen

$$u_t - u_{xxt} + \alpha u_x + 4uu_x - 3u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0 \qquad \textbf{(3.12)}$$

denklemine indirgenir. Yapılan yeni çalışmalar göstermiştir ki CH ve DP denklemleri kısa yüzey dalgalarının dinamiğini tanımlamak için kullanılabilir [99-101].

$\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}, \theta = 0, \gamma = 3$ için (3.10) denklemi

$$u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x - 3u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0 \qquad \textbf{(3.13)}$$

şeklinde Fornberg-Whitham (FW) denklemi olarak bilinen nonlineer denkleme dönüşür. FW denklemi dalga kırılmasının kualitatif incelemesini yapmak amacıyla kullanılmıştır. Bu tipteki bir denklemin $u(x,t) = Ae^{-\frac{1}{2}\left|x-\frac{4}{3}t\right|}$ şeklindeki bir peaked soliter dalga çözümü Fornberg ve Whitham tarafından elde edilmiştir [102-103].

3.5. Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) Denklemi

$u = u(x,t), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \geq 0, \eta$ ve α sıfırdan farklı sabitler olmak üzere

$$u_t - \eta \Delta u_t - \alpha \Delta u = f(x, u, \nabla u) \qquad \textbf{(3.14)}$$

formundaki kısmi türevli diferansiyel denklemler matematik ve fiziğin bir çok alanında ortaya çıkmaktadır. Denklemde Δ, x değişkenine bağlı Laplace operatörüdür. Bu denklemin çok önemli bir özel durumu Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) denklemi olarak bilinen

$$-u_{xxt} + u_t - \alpha u_{xx} + (1+u)u_x = 0 \tag{3.15}$$

denklemidir. Bu denklem suda küçük genlikte bulunan tek yönlü uzun dalgaları incelemek için oluşturulan bir modeldir [104]. Bu denklem çok iyi bilinen

$$u_{xxx} + u_t - u_{xx} + uu_x = 0 \tag{3.16}$$

KdV denklemine bir alternatif olarak önerilmiştir. BBMB denklemi birçok bilim insanı tarafından ele alınmış bu denklemlerle ilgili çok önemli sonuçlar elde edilmiştir [105-109].

3.6. Geneleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Denklemi

Genelleştirlmiş Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) denklemi

$$-u_{xxt} + u_t - \alpha u_{xx} + \beta u_x + g(u)_x = 0 \tag{3.17}$$

şeklinde verilir. α pozitif sabit, $\beta \in \mathbb{R}$ ve $g(u)$ ise nonlineer C^2 −düzgün (smooth) bir fonksiyondur. αu_{xx} disipatif terimdir ve denklem yarıklarda oluşan su dalgalarının yayılmasını açıklamaktadır. Ayrıca bu denklem [110] da ele alınmış ve Lie'nın klasik metodu kullanılarak yeni soliton, kink, antikink, kompakton ve Wadati çözümler elde edilmiştir.

Denklem, ilk olarak $g(u)_x = uu_x, \alpha = 0$ ve $\beta = 1$ parametreleri ile Peregrine [111] ve Benjamin, Bona, Mahony [104] tarafından ortaya atılmıştır. Bundan başka olarak, Benjamin, Bona ve Mahony bu denklemi aynı parametrelerle alternatif regüler uzun dalga denklemi olarak önermiştir. Wazwaz, $\sin - \cos$ ve $\tanh - \coth$ yöntemlerini kullanarak denklemin $g(u)_x = uu_x, g(u)_x = (u^n)_x, g(u)_x = (u^{-n})_x$ için soliton ve hareketli dalga çözümlerini elde etmiştir [112].

Khaled, Momani ve Alawneh Adomian'ın ayrıştırma metodu kullanarak BBMB denkleminin açık ve nümerik çözümlerini elde etmişlerdir [113]. Tari ve Ganji varyasyonel iterasyon ve homotopy perturbasyon yöntemlerini kullanarak $g(u) =$

$u^2/2$ için denklemin yaklaşık açık çözümlerini bulmuş [114], aynı denklemin genel soliter ve periyodik çözümlerini El-Wakil, Abdou ve Hendi exp-fonksiyon metodu kullanarak elde etmişlerdir [115].

3.7. Benney-Luke Denklemi

Bu önemli denklem

$$u_{tt} - u_{xx} + au_{xxxx} - bu_{xxtt} + u_t u_{xx} + 2u_x u_{xt} = 0 \quad \textbf{(3.18)}$$

şeklinde ifade edilir. Denklemde bulunan a ve b pozitif tamsayıları $a - b = \sigma - 1/3$ koşulunu sağlayan tamsayılardır. Boyutu olmayan σ parametresi Bond Sayısı olarak adlandırılmaktadır ve yüzey geriliminin olduğu bir ortamda bulunan iki yönlü su dalgasının yayılımı ile ilgili bir parametredir [116]. İlk olarak Benney ve Luke tarafından önerilen bu denklem [117] sonraları Pego ve Quintero tarafından küçük genlikli uzun su dalgalarını çalışırken tekrar ele alınmıştır. Pego ve Quintero yüzey geriliminin olması durumunda oluşan dalgaların yayılımının bu denklemle ifade edilebildiğini göstermiştir [118]. Bu denklemle ilgili birçok çalışma mevcuttur. Örneğin; bu denklemin kararlılık analizi [116, 119], Cauchy problemi [120-122], çözümlerinin varlığı ve analitikliği [123], dinamik sistem metodu ile elde edilen hareketli dalga çözümleri [124] bunlardan bazılarıdır.

3.8. Yüksek Mertebeden Geliştirilmiş Boussinesq Denklemi

Schneider ve Wayne yüzey gerilimin olmadığı durumlarda su dalgası probleminin iki KdV denkleminden oluşan sistemle tanımlanabileceğini gösterdiler [125]. Ayrıca aynı çalışmada Schneider ve Wayne, bir Boussinesq denklem sınıfını yüzey gerilimi olan bir ortam için model olarak kullandılar. Kullandıkları denklem, yüksek mertebeden geliştirilmiş Boussinesq denklemi olarak adlandırılan

$$-u_{xxxxtt} + u_{xxtt} - u_{tt} + u_{xx} + \mu u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0 \quad \textbf{(3.19)}$$

şeklindeki denklemdir. Denklemde $x, t, \mu \in \mathbb{R}$ ve $u(x,t) \in \mathbb{R}$ dir. Duruk ve çalışma arkadaşları

$$-\beta u_{xxxxtt} + u_{xxtt} - u_{tt} + u_{xx} + \big(g(u)\big)_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad \textbf{(3.20)}$$

Cauchy probleminin tanımlılığını araştırmış ve belirli şartlar altında bu Cauchy probleminin global olarak iyi tanımlı olduğunu göstermişlerdir [126]. Bununla birlikte, başka araştırmacılar tarafından (3.19) denkleminden daha düşük mertebeli birçok geliştirilmiş Boussinesq denklem türü araştırılmış ve bu denklemlerin tam çözümleri exp-fonksiyon yöntemi [127], modifiye edilmiş extended tanh-fonksiyon yöntemi [128], sin-cos yöntemi [129], geliştirilmiş G'/G-Açılım yöntemi [129], standart tanh ve geliştirilmiş tanh yöntemi [130] gibi yöntemler kullanılarak elde edilmiştir.

3.9. Sobolev Türü Denklem Sistemleri

f ve g bilinen nonlineer fonksiyonlar, $u(x,t)$ ve $w(x,t)$ bilinmeyen fonksiyonlar ve α bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \alpha^2 u_{xxtt} - u_{xx} = f(u,w)_{xx}, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ &w_{tt} - \alpha^2 w_{xxtt} - w_{xx} = g(u,w)_{xx}, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \end{aligned} \quad \textbf{(3.21)}$$

Sobolev denklem sistemi Toda lattice modelde iki yönlü dalga yayılımını tanımlamak için kullanılmıştır. Godefroy, bu denklem sistemini belirli şartlar altında bir Cauchy problemi olarak ele almış ve sonlu zamanda bu Cauchy problemin blow-up çözümünün olduğunu göstermiştir [131]. Wang ve Li bu sistemi bir Cauchy problemi olarak ele alarak global bir çözümün varlığını ve tekliğini konveks yöntemleri kullanarak göstermiştir [132]. Yine bu sisteme ait bir Cauchy problemi N. Duruk, H. A. Erbay, ve A. Erkip tarafından ele alınmış, $H^s \times H^s$, $s > 1/2$ Sobolev uzayında global sonlu zaman blow-up çözümlerin varlığının koşulları saptanmıştır [133]. Bu sistemle ilgili daha fazla detay için [133] teki referansa bakılabilir.

Chen ve Zhang genelleştirilmiş IMBq denklem sistemi olarak bilinen

$$u_{tt} - Au_{xx} - Bu_{xxtt} = m(w)_{xx}, \qquad 0 < x < l_1, \qquad t > 0,$$
$$w_{tt} - Bw_{xxtt} = n(w)_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, 0 < x < l_1, \qquad t > 0, \tag{3.22}$$

sistemini bir sınır değer problemi olarak ele aldılar. Sistemde $u(x,t)$ ve $w(x,t)$ bilinmeyen fonksiyonlar, $A, B > 0$ sabitler, m ve n ise verilen nonlineer fonksiyonlardır. Yaptıkları çalışmada Chen ve Zhang bu denklem sisteminin global genel bir çözümünün varlık ve tekliğini gösterdiler [134].

3.9.1. Rosenau denklem sistemi

Rosenau yoğun lattice sistemin nasıl tanımlanabileceği problemini

$$u_{tt} = (u + 2\alpha uw)_{xx} + \frac{1}{12}u_{xxtt},$$
$$w_{tt} = (2w + \beta w^2 + \alpha u^2)_{xx} + \frac{1}{12}w_{xxtt}, \tag{3.23}$$

sistemini kullanarak ele aldı. $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere Rosenau bu denklem sisteminin yoğun lattice dinamiklerini çalışmak için uygun bir araç olduğuna da işaret etti [135].

3.9.2. Christiansen denklem sistemi

Christiansen

$$\frac{\rho}{a}u_{tt} = \beta u_{xx} - \frac{\beta^2}{2}(u^2)_{xx} + \frac{\beta}{2}(w^2)_{xx} + \frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}u_{xxtt}$$
$$\frac{\rho}{a}w_{tt} = \beta(uw)_{xx} + \frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}w_{xxtt} \tag{3.24}$$

denklem sistemini kullanarak yeni bir Toda lattice model ileri sürdü. Boyuna ve enine gerilmelerin farklı mertebeleri için (3.24) sistemi ile beraber birçok denklem sistemini continuum limit de dahil olmak üzere birçok durumda elde etti. Yukarıdaki denklem sistemini de bu boyuna ve enine gerilmeleri ifade etmek için kullanıldı. Sistemde l and $1/b$ modelin karakteristiği, β bunların oranı (yani $\beta = lb$), ρ lineer kütle yoğunluğu ve $\alpha > 0$ da bir sabittir. Ayrıca Christiansen, (3.24) denklem sisteminin nümerik ve hareketli dalga çözümlerini de elde etmiştir [136].

3.9.3. Turitzyn denklem sistemi

$$u_{tt} = \beta u_{xx} - \frac{\beta}{2}(u^2)_{xx} + \frac{1}{2}(w^2)_{xx} + \alpha^2 u_{xxtt} ,$$

$$w_{tt} = (uw)_{xx} + \alpha^2 w_{xxtt} \tag{3.25}$$

çift IBq deklem sistemini Turitzyn ele alarak analiz etti ve bu denklem sisteminin çözümünün varlığını ve blow-up çözüme sahip olduğunu gösterdi. Ayrıca Turitzyn, bu modelin çökmesindeki gerekli koşulları da ortaya koydu [137].

3.9.4. Pego-Smereka-Weinstein denklem sistemi

Pego, Smereka ve Weinstein

$$u_{tt} = u_{xx} - \beta(u^2)_{xx} + (w^2)_{xx} + u_{xxtt}$$

$$w_{tt} = w_{xx} + 2(uw)_{xx} + w_{xxtt} , \tag{3.26}$$

Sobolev denklem sisteminin soliter dalga çözümlerinin kararlılığını çalıştılar [138]. Bu denklem sistemi bir kübik kafeste oluşan zayıf nonlineer titremelerin bir modelidir.

3.9.5. Fan-Tian denklem sistemi

Fan ve Tian, Christiansen'in kullandığı modeli geliştirerek,

$$u_{tt} = \beta u_{xx} - \frac{\beta}{2}(u^2)_{xx} + \frac{\beta}{2}(w^2)_{xx} + \alpha^2 u_{xxtt}$$

(3.27)

$$w_{tt} = \gamma(uw)_{xx} + \rho(w^2)_{xx} + \alpha^2 w_{xxtt}$$

denklem sistemi ile ifade edilen ve Toda yoğun lattice modeli olarak adlandırılan modeli ortaya attılar. Ayrıca sistemin kompakton, multi-kompakton çözümlerini $\sin - \cos$ yöntemi kullanarak araştırdırdılar, peakon çözümlerini elde ettiler. Bunlara ek olarak sistemin özel bir durumunun soliter dalga çözümlerini improved $\sin - \cos$ ve improved $\sinh - \cosh$ yöntemlerini kullanarak buldular [139].

BÖLÜM 4. LİNEER OLMAYAN SOBOLEV TÜRÜ KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TANH-COTH YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, 3. bölümde bahsedilen ve genel fiziksel uygulama alanları verilen Sobolev türü denklemlerin tanh-coth yöntemi kullanılarak elde edilen çözümlerine yer verilecektir. Uzun matematiksel işlemlerin üstesinden gelebilmek için Maple ve Scientific Work Place paket programları kullanılmıştır.

4.1. Benjamin – Bona – Mahony – Peregrine - Burgers (BBMPB) Denkleminin Çözümü

Benjamin-Bona-Mahony-Peregrine-Burgers (BBMPB) denklemi α pozitif sabit, θ, γ ve β sıfırdan farklı reel sabitler olmak üzere

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \gamma u_x + \theta u u_x + \beta u_{xxx} = 0 \tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilmektedir. İntegral sabiti sıfır kabul edilerek $\xi = x - Vt$ dalga değişkeni yardımıyla denklem

$$(-V + \gamma)U - \alpha U' + \frac{\theta}{2}U^2 + (V + \beta)U'' = 0 \tag{4.2}$$

şeklinde adi türevli bir diferansiyel denkleme dönüşür. (4.2) de U^2 ile U'' terimleri dengelenirse $M = 2$ olur. Tanh-coth yöntemi $Y = \tanh(\mu\xi)$ olmak üzere

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{2} a_k Y^k + \sum_{k=1}^{2} b_k Y^{-k} \tag{4.3}$$

sonlu seri açılımı şeklindeki çözümleri verir. (4.3), (4.2) de yazılıp denklem Y nin kuvvetlerine göre düzenlendiğinde

Y^8 : ${a_2}^2\theta + 12Va_2\mu^2 + 12a_2\beta\mu^2 = 0$
Y^7 : $2a_1a_2\theta + 4a_2\alpha\mu + 4Va_1\mu^2 + 4a_1\beta\mu^2 = 0$
Y^6 : $2a_2\gamma + {a_1}^2\theta - 2Va_2 + 2a_0a_2\theta + 2a_1\alpha\mu - 16Va_2\mu^2 - 16a_2\beta\mu^2 = 0$
Y^5 : $2a_1\gamma - 2Va_1 + 2b_1a_2\theta + 2a_0a_1\theta - 4a_2\alpha\mu - 4Va_1\mu^2 - 4a_1\beta\mu^2 = 0$
Y^4 : $2a_0\gamma + {a_0}^2\theta - 2Va_0 + 2b_1a_1\theta + 2b_2a_2\theta - 2b_1\alpha\mu - 2a_1\alpha\mu + 4Vb_2\mu^2$
$+ 4Va_2\mu^2 + 4b_2\beta\mu^2 + 4a_2\beta\mu^2 = 0$
Y^3 : $2b_1\gamma - 2Vb_1 + 2b_1a_0\theta + 2b_2a_1\theta - 4b_2\alpha\mu - 4Vb_1\mu^2 - 4b_1\beta\mu^2 = 0$
Y^2 : $2b_2\gamma + {b_1}^2\theta - 2Vb_2 + 2b_2a_0\theta + 2b_1\alpha\mu - 16Vb_2\mu^2 - 16b_2\beta\mu^2 = 0$
Y^1 : $2b_1b_2\theta + 4b_2\alpha\mu + 4Vb_1\mu^2 + 4b_1\beta\mu^2 = 0$
Y^0 : ${b_2}^2\theta + 12Vb_2\mu^2 + 12b_2\beta\mu^2 = 0$

denklem sistemi ele edilir. Maple kullanılırsa aşağıdaki gibi onsekiz adet çözüm bulunur :

$$a_0 = \frac{-\gamma-\beta}{\theta}, a_1 = \frac{\gamma+\beta}{\theta}, a_2 = b_1 = b_2 = 0, V = -\beta, \mu = \frac{-\gamma-\beta}{2\alpha}$$

$$a_0 = a_1 = \frac{-\gamma-\beta}{\theta}, a_2 = b_1 = b_2 = 0, V = -\beta, \mu = \frac{\gamma+\beta}{2\alpha}$$

$$a_0 = \frac{-\gamma-\beta}{\theta}, a_1 = b_1 = \frac{\gamma+\beta}{2\theta}, a_2 = b_2 = 0, V = -\beta, \mu = \frac{-\gamma-\beta}{4\alpha}$$

$$a_0 = \frac{-\gamma-\beta}{\theta}, a_1 = a_2 = b_2 = 0, b_1 = \frac{-\gamma-\beta}{\theta}, V = -\beta, \mu = \frac{\gamma+\beta}{2\alpha}$$

$$a_0 = \frac{-\gamma-\beta}{\theta}, a_1 = \frac{-\gamma-\beta}{2\theta}, a_2 = b_2 = 0, b_1 = -\frac{\gamma+\beta}{2\theta}, V = -\beta,$$
$$\mu = \frac{\gamma+\beta}{4\alpha}$$

$$a_0 = \frac{-\gamma-\beta}{\theta}, a_1 = a_2 = b_2 = 0, b_1 = \frac{\gamma+\beta}{\theta}, V = -\beta, \mu = -\frac{\gamma+\beta}{2\alpha}$$

$$a_0 = \frac{-10\gamma\mu - 10\beta\mu + \alpha}{20\mu\theta}, a_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5\theta}, b_1 = b_2 = 0,$$

$$V = \frac{\frac{\alpha}{10} - \beta\mu}{\mu}, \mu = \frac{5\gamma + 5\beta \pm \sqrt{25\gamma^2 + 50\gamma\beta + 25\beta^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{3(-10\gamma\mu - 10\beta\mu + \alpha)}{20\mu\theta}, a_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5\theta}, b_1 = b_2 = 0,$$

$$V = \frac{\frac{\alpha}{10} - \beta\mu}{\mu}, \mu = \frac{-5\gamma - 5\beta \pm \sqrt{25\gamma^2 + 50\gamma\beta + 25\beta^2 + 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{-10\gamma\mu - 10\beta\mu - \alpha}{20\mu\theta}, a_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = \frac{6\alpha\mu}{5\theta}, b_1 = b_2 = 0,$$

$$V = \frac{-\frac{\alpha}{10} - \beta\mu}{\mu}, \mu = \frac{-5\gamma - 5\beta \pm \sqrt{25\gamma^2 + 50\gamma\beta + 25\beta^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{3(-10\gamma\mu - 10\beta\mu - \alpha)}{20\mu\theta}, a_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = \frac{6\alpha\mu}{5\theta}, b_1 = b_2 = 0,$$

$$V = \frac{-\frac{\alpha}{10} - \beta\mu}{\mu}, \mu = \frac{5\gamma + 5\beta \pm \sqrt{25\gamma^2 + 50\gamma\beta + 25\beta^2 + 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{-10\gamma\mu - 10\beta\mu + \alpha}{20\mu\theta}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, b_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5\theta},$$

$$V = \frac{\frac{\alpha}{10} - \beta\mu}{\mu}, \mu = \frac{5\gamma + 5\beta \pm \sqrt{25\gamma^2 + 50\gamma\beta + 25\beta^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{3(-10\gamma\mu - 10\beta\mu + \alpha)}{20\mu\theta}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, b_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5\theta},$$

$$V = \frac{\frac{\alpha}{10} - \beta\mu}{\mu}, \mu = \frac{-5\gamma - 5\beta \pm \sqrt{25\gamma^2 + 50\gamma\beta + 25\beta^2 + 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{3(-10\gamma\mu - 10\beta\mu - \alpha)}{20\mu\theta}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, b_2 = \frac{6\alpha\mu}{5\theta},$$

$$V = \frac{-\frac{\alpha}{10} - \beta\mu}{\mu}, \mu = \frac{5\gamma + 5\beta \pm \sqrt{25\gamma^2 + 50\gamma\beta + 25\beta^2 + 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{-10\gamma\mu - 10\beta\mu - \alpha}{20\mu\theta}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, b_2 = \frac{6\alpha\mu}{5\theta},$$

$$V = \frac{-\frac{\alpha}{10} - \beta\mu}{\mu}, \mu = \frac{-5\gamma - 5\beta \pm \sqrt{25\gamma^2 + 50\gamma\beta + 25\beta^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{3(-20\gamma\mu - 20\beta\mu - \alpha)}{80\mu\theta}, a_1 = b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = b_2 = \frac{3\alpha\mu}{5\theta},$$

$$V = \frac{-\frac{\alpha}{20} - \beta\mu}{\mu}, \mu = \frac{-5\gamma - 5\beta \pm \sqrt{25\gamma^2 + 50\gamma\beta + 25\beta^2 - 24\alpha^2}}{48\alpha}$$

$$a_0 = \frac{4(-5\gamma\mu - 5\beta\mu - \alpha)}{16\mu\theta}, a_1 = b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = b_2 = \frac{3\alpha\mu}{5\theta},$$

$$V = \frac{-\frac{\alpha}{20} - \beta\mu}{\mu}, \mu = \frac{5\gamma + 5\beta \pm \sqrt{25\gamma^2 + 50\gamma\beta + 25\beta^2 + 24\alpha^2}}{48\alpha}$$

$$a_0 = \frac{3(-20\gamma\mu - 20\beta\mu + \alpha)}{80\mu\theta}, a_1 = b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = b_2 = -\frac{3\alpha\mu}{5\theta},$$

$$V = \frac{\frac{\alpha}{20} - \beta\mu}{\mu}, \mu = \frac{5\gamma + 5\beta \pm \sqrt{25\gamma^2 + 50\gamma\beta + 25\beta^2 - 24\alpha^2}}{48\alpha}$$

$$a_0 = \frac{-20\gamma\mu - 20\beta\mu + \alpha}{16\mu\theta}, a_1 = b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = b_2 = -\frac{3\alpha\mu}{5\theta},$$

$$V = \frac{\frac{\alpha}{20} - \beta\mu}{\mu}, \mu = \frac{-5\gamma - 5\beta \pm \sqrt{25\gamma^2 + 50\gamma\beta + 25\beta^2 + 24\alpha^2}}{48\alpha}$$

Bu elde edilen katsayılara göre denklemin çözümleri sırasıyla

$$u_1(x,t) = \frac{-\gamma - \beta}{\theta} + \frac{\gamma + \beta}{\theta}\tanh\mu(x - Vt)$$

$$u_2(x,t) = \frac{-\gamma-\beta}{\theta} - \frac{\gamma+\beta}{\theta}\tanh\mu(x-Vt)$$

$$u_3(x,t) = \frac{-\gamma-\beta}{\theta} + \frac{\gamma+\beta}{2\theta}\tanh\mu(x-Vt) + \frac{\gamma+\beta}{2\theta}\coth\mu(x-Vt)$$

$$u_4(x,t) = \frac{-\gamma-\beta}{\theta} - \frac{\gamma+\beta}{\theta}\coth\mu(x-Vt)$$

$$u_5(x,t) = \frac{-\gamma-\beta}{\theta} - \frac{\gamma+\beta}{\theta}\tanh\mu(x-Vt) - \frac{\gamma+\beta}{2\theta}\coth\mu(x-Vt)$$

$$u_6(x,t) = \frac{-\gamma-\beta}{\theta} + \frac{\gamma+\beta}{\theta}\coth\mu(x-Vt)$$

$$u_7(x,t) = \frac{-10\gamma\mu-10\beta\mu+\alpha}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x-Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x-Vt)$$

$$u_8(x,t) = \frac{3(-10\gamma\mu-10\beta\mu+\alpha)}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x-Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x-Vt)$$

$$u_9(x,t) = \frac{-10\gamma\mu-10\beta\mu-\alpha}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x-Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x-Vt)$$
$$- \frac{12\alpha\mu}{5}\coth\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5}\coth^2\mu(x-Vt)$$

$$u_{10}(x,t) = \frac{3(-10\gamma\mu-10\beta\mu-\alpha)}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x-Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x-Vt)$$

$$u_{11}(x,t) = \frac{-10\gamma\mu-10\beta\mu+\alpha}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x-Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x-Vt)$$

$$u_{12}(x,t) = \frac{3(-10\gamma\mu-10\beta\mu+\alpha)}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x-Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x-Vt)$$

$$u_{13}(x,t) = \frac{3(-10\gamma\mu-10\beta\mu-\alpha)}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x-Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x-Vt)$$

$$u_{14}(x,t) = \frac{-10\gamma\mu-10\beta\mu-\alpha}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x-Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x-Vt)$$

$$u_{15}(x,t) = \frac{3(-20\gamma\mu-20\beta\mu-\alpha)}{80\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x-Vt) + \frac{3\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x-Vt)$$
$$- \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x-Vt) + \frac{3\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x-Vt)$$

$$u_{16}(x,t) = \frac{4(-5\gamma\mu-5\beta\mu-\alpha)}{16\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x-Vt) + \left(\frac{3\alpha\mu}{5\theta}\right)\tanh^2\mu(x-Vt)$$
$$- \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x-Vt) + \frac{3\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x-Vt)$$

$$u_{17}(x,t)=\frac{3(-20\gamma\mu-20\beta\mu+\alpha)}{80\mu\theta}-\frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x-Vt)-\frac{3\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x-Vt)$$
$$-\frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x-Vt)-\frac{3\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x-Vt)$$
$$u_{18}(x,t)=\frac{-20\gamma\mu-20\beta\mu+\alpha}{16\mu\theta}-\frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x-Vt)-\frac{3\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x-Vt)$$
$$-\frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x-Vt)-\frac{3\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x-Vt)$$

şeklinde elde edilir.

4.2. Oskolkov – Benjamin – Bona – Mahony - Burgers (OBBMB) Denkleminin Çözümü

$$u_t-u_{xxt}-\alpha u_{xx}+\gamma u_x+\theta u u_x=0 \quad \textbf{(4.4)}$$

olarak bilinen Oskolkov-Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (OBBMB) denkleminde α pozitif sabit, θ ise sıfırdan farklı bir reel sabittir. $\xi=x-Vt$ kullanılır ve integral sabitinin sıfır olduğu kabul edilip integral alınırsa bu kısmi türevli diferansiyel denklem

$$(-V+\gamma)U+\left(\frac{\theta}{2}\right)U^2-\alpha U'+VU''=0 \quad \textbf{(4.5)}$$

şeklinde adi türevli bir diferansiyel denkleme dönüşmüş olur. (4.5) denkleminde ikinci ve son terimler dengelenirse $M=2$ elde edilir. Tanh-coth yönteme göre

$$U(\mu\xi)=S(Y)=\sum_{k=0}^{2}a_k\,Y^k+\sum_{k=1}^{2}b_k\,Y^{-k} \quad \textbf{(4.6)}$$

şeklinde çözümler aranacağından $Y=\tanh(\mu\xi)$ olduğu göz önüne alınıp (4.6) serisi (4.5) te yazılıp oluşan denklem Y nin kuvvetlerine göre düzenlenirse

$Y^8:\ a_2{}^2\theta+12Va_2\mu^2=0$

$Y^7:\ 2a_1a_2\theta+4a_2\alpha\mu+4Va_1\mu^2=0$

$Y^6:\ 2a_2\gamma+a_1{}^2\theta-2Va_2+2a_0a_2\theta+2a_1\alpha\mu-16Va_2\mu^2=0$

$$Y^5 : \; 2a_1\gamma - 2Va_1 + 2b_1a_2\theta + 2a_0a_1\theta - 4a_2\alpha\mu - 4Va_1\mu^2 = 0$$

$$Y^4 : \; 2a_0\gamma + {a_0}^2\theta - 2Va_0 + 2b_1a_1\theta + 2b_2a_2\theta - 2b_1\alpha\mu - 2a_1\alpha\mu + 4Vb_2\mu^2 + 4Va_2\mu^2 = 0$$

$$Y^3 : \; 2b_1\gamma - 2Vb_1 + 2b_1a_0\theta + 2b_2a_1\theta - 4b_2\alpha\mu - 4Vb_1\mu^2 = 0$$

$$Y^2 : \; 2b_2\gamma + {b_1}^2\theta - 2Vb_2 + 2b_2a_0\theta + 2b_1\alpha\mu - 16Vb_2\mu^2 = 0$$

$$Y^1 : \; 2b_1b_2\theta + 4b_2\alpha\mu + 4Vb_1\mu^2 = 0$$

$$Y^0 : \; {b_2}^2\theta + 12Vb_2\mu^2 = 0$$

şeklinde cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse katsayılar şu şekilde bulunur :

$$a_0 = \frac{-10\gamma\mu + \alpha}{20\mu\theta}, a_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5\theta}, b_1 = b_2 = 0, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$
$$\mu = \frac{5\gamma \pm \sqrt{25\gamma^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{3(-10\gamma\mu + \alpha)}{20\mu\theta}, a_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5\theta}, b_1 = b_2 = 0,$$
$$V = \frac{\alpha}{10\mu}, \mu = \frac{-5\gamma \pm \sqrt{25\gamma^2 + 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{-10\gamma\mu - \alpha}{20\mu\theta}, a_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = \frac{6\alpha\mu}{5\theta}, b_1 = b_2 = 0, V = -\frac{\alpha}{10\mu},$$
$$\mu = \frac{-5\gamma \pm \sqrt{25\gamma^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{3(-10\gamma\mu - \alpha)}{20\mu\theta}, a_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = \frac{6\alpha\mu}{5\theta}, b_1 = b_2 = 0,$$
$$V = -\frac{\alpha}{10\mu}, \mu = \frac{5\gamma \pm \sqrt{25\gamma^2 + 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{-10\gamma\mu + \alpha}{20\mu\theta}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, b_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5\theta}, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$

$$\mu = \frac{5\gamma \pm \sqrt{25\gamma^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{3(-10\gamma\mu + \alpha)}{20\mu\theta}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, b_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5\theta},$$

$$V = \frac{\alpha}{10\mu}, \mu = \frac{-5\gamma \pm \sqrt{25\gamma^2 + 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{3(-10\gamma\mu - \alpha)}{20\mu\theta}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, b_2 = \frac{6\alpha\mu}{5\theta},$$

$$V = -\frac{\alpha}{10\mu}, \mu = \frac{5\gamma \pm \sqrt{25\gamma^2 + 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{-10\gamma\mu - \alpha}{20\mu\theta}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, b_2 = \frac{6\alpha\mu}{5\theta}, V = -\frac{\alpha}{10\mu},$$

$$\mu = \frac{-5\gamma \pm \sqrt{25\gamma^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{3(-20\gamma\mu - \alpha)}{80\mu\theta}, a_1 = b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = b_2 = \frac{3\alpha\mu}{5\theta},$$

$$V = -\frac{\alpha}{20\mu}, \mu = \frac{-5\gamma \pm \sqrt{25\gamma^2 - 24\alpha^2}}{48\alpha}$$

$$a_0 = \frac{4(-5\gamma\mu - \alpha)}{16\mu\theta}, a_1 = b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = b_2 = \frac{3\alpha\mu}{5\theta}, V = -\frac{\alpha}{20\mu},$$

$$\mu = \frac{5\gamma \pm \sqrt{25\gamma^2 + 24\alpha^2}}{48\alpha}$$

$$a_0 = \frac{3(-20\gamma\mu + \alpha)}{80\mu\theta}, a_1 = b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = b_2 = -\frac{3\alpha\mu}{5\theta},$$

$$V = \frac{\alpha}{20\mu}, \mu = \frac{5\gamma \pm \sqrt{25\gamma^2 - 24\alpha^2}}{48\alpha}$$

$$a^0 = \frac{-20\gamma\mu + \alpha}{16\mu\theta}, a_1 = b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5\theta}, a_2 = b_2 = -\frac{3\alpha\mu}{5\theta}, V = \frac{\alpha}{20\mu},$$

$$\mu = \frac{-5\gamma \pm \sqrt{25\gamma^2 + 24\alpha^2}}{48\alpha}$$

Bulunan bu katsayılara göre denklemin tam çözümleri şu şekildedir:

$$u_1(x,t) = \frac{-10\gamma\mu - 10\beta\mu + \alpha}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x - Vt)$$

$$u_2(x,t) = \frac{3(-10\gamma\mu - 10\beta\mu + \alpha)}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x - Vt)$$

$$u_3(x,t) = \frac{-10\gamma\mu - 10\beta\mu - \alpha}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x - Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x - Vt)$$
$$- \frac{12\alpha\mu}{5}\coth\mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_4(x,t) = \frac{3(-10\gamma\mu - 10\beta\mu - \alpha)}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x - Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x - Vt)$$

$$u_5(x,t) = \frac{-10\gamma\mu - 10\beta\mu + \alpha}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_6(x,t) = \frac{3(-10\gamma\mu - 10\beta\mu + \alpha)}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_7(x,t) = \frac{3(-10\gamma\mu - 10\beta\mu - \alpha)}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x - Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_8(x,t) = \frac{-10\gamma\mu - 10\beta\mu - \alpha}{20\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x - Vt) + \frac{6\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_9(x,t) = \frac{3(-20\gamma\mu - 20\beta\mu - \alpha)}{80\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x - Vt) + \frac{3\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x - Vt)$$
$$- \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x - Vt) + \frac{3\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_{10}(x,t) = \frac{4(-5\gamma\mu - 5\beta\mu - \alpha)}{16\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x - Vt) + \frac{3\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x - Vt)$$
$$- \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x - Vt) + \frac{3\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_{11}(x,t) = \frac{3(-20\gamma\mu - 20\beta\mu + \alpha)}{80\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x - Vt)$$
$$- \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_{12}(x,t) = \frac{-20\gamma\mu - 20\beta\mu + \alpha}{16\mu\theta} - \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5\theta}\tanh^2\mu(x - Vt)$$
$$- \frac{12\alpha\mu}{5\theta}\coth\mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5\theta}\coth^2\mu(x - Vt)$$

4.3. Bir Boyutlu Oskolkov Denkleminin Çözümü

Bu denklem

$$u_t - \lambda u_{xxt} - \alpha u_{xx} + u u_{xx} = 0 \quad \textbf{(4.7)}$$

şeklinde verilen bir pseudoparabolik denklemdir. Denklemde bulunan λ ve α reel sabitlerdir. $\xi = x - Vt$ kullanılarak elde edilen adi diferansiyel denklemde integral sabiti sıfır kabul edilerek integral alınırsa

$$-VU + \lambda U'' - \alpha U' + \frac{1}{2}U^2 = 0 \quad \textbf{(4.8)}$$

adi diferansiyel denklemi oluşur. Denklemde U^2 ile U'' dengelenirse $M = 2$ bulunur. Bu durumda

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{2} a_k Y^k + \sum_{k=1}^{2} b_k Y^{-k} \quad \textbf{(4.9)}$$

şeklindeki çözümler aranmalıdır. $Y = \tanh(\mu\xi)$ olduğu göz önüne alınıp (4.9) serisi (4.8) de yazılırsa Y ye göre bir cebirsel denklem oluşur. Bu denklem Y nin kuvvetlerine göre düzenlenip katsayılar sıfıra eşitlenirse

$Y^8 :\ a_2{}^2 + 12\lambda a_2\mu^2 = 0$
$Y^7 :\ 4a_1\lambda\mu^2 + 4a_2\alpha\mu + 2a_1a_2 = 0$
$Y^6 :\ a_1{}^2 + 2\alpha a_1\mu - 16a_2\lambda\mu^2 - 2Va_2 + 2a_0a_2 = 0$
$Y^5 :\ 2b_1a_2 - 4a_2\alpha\mu - 2Va_1 - 4a_1\lambda\mu^2 + 2a_0a_1 = 0$
$Y^4 :\ 2b_1a_1 - 2Va_0 + 2b_2a_2 + a_0{}^2 - 2b_1\alpha\mu - 2a_1\alpha\mu + 4b_2\lambda\mu^2 + 4a_2\lambda\mu^2 = 0$
$Y^3 :\ 2b_1a_0 - 4b_2\alpha\mu - 2Vb_1 - 4b_1\lambda\mu^2 + 2b_2a_1 = 0$
$Y^2 :\ b_1{}^2 + 2\alpha b_1\mu - 16b_2\lambda\mu^2 - 2Vb_2 + 2b_2a_0 = 0$

$Y^1:\ 4b_1\lambda\mu^2 + 4b_2\alpha\mu + 2b_1b_2 = 0$

$Y^0:\ {b_2}^2 + 12\lambda b_2\mu^2 = 0$

şeklinde bir denklem sistemi oluşur. Bu denklem sistemi Maple yardımıyla çözülürse katsayılar aşağıdaki gibi belirlenmiş olur:

$$a_0 = \frac{9\alpha^2}{25\lambda}, a_1 = -\frac{6\alpha^2}{25\lambda}, a_2 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, b_1 = b_2 = 0, V = \frac{6\alpha^2}{25\lambda}, \mu = \frac{\alpha}{10\lambda}$$

$$a_0 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, a_1 = -\frac{6\alpha^2}{25\lambda}, a_2 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, b_1 = b_2 = 0, V = -\frac{6\alpha^2}{25\lambda}, \mu = \frac{\alpha}{10\lambda}$$

$$a_0 = \frac{9\alpha^2}{25\lambda}, a_1 = \frac{6\alpha^2}{25\lambda}, a_2 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, b_1 = b_2 = 0, V = \frac{6\alpha^2}{25\lambda}, \mu = -\frac{\alpha}{10\lambda}$$

$$a_0 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, a_1 = \frac{6\alpha^2}{25\lambda}, a_2 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, b_1 = b_2 = 0, V = -\frac{6\alpha^2}{25\lambda}, \mu = -\frac{\alpha}{10\lambda}$$

$$a_0 = \frac{9\alpha^2}{25\lambda}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = \frac{6\alpha^2}{25\lambda}, b_2 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, V = \frac{6\alpha^2}{25\lambda}, \mu = -\frac{\alpha}{10\lambda}$$

$$a_0 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = \frac{6\alpha^2}{25\lambda}, b^2 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, V = -\frac{6\alpha^2}{25\lambda}, \mu = -\frac{\alpha}{10\lambda}$$

$$a_0 = \frac{3\alpha^2}{10\lambda}, a_1 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, a_2 = -\frac{3\alpha^2}{100\lambda}, b_1 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, b_2 = -\frac{3\alpha^2}{100\lambda},$$
$$V = \frac{6\alpha^2}{25\lambda}, \mu = \frac{\alpha}{20\lambda}$$

$$a_0 = -\frac{9\alpha^2}{50\lambda}, a_1 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, a_2 = -\frac{3\alpha^2}{100\lambda}, b_1 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, b_2 = -\frac{3\alpha^2}{100\lambda}, V = -\frac{6\alpha^2}{25\lambda},$$
$$\mu = \frac{\alpha}{20\lambda}$$

$$a_0 = \frac{3\alpha^2}{10\lambda}, a_1 = \frac{3\alpha^2}{25\lambda}, a_2 = -\frac{3\alpha^2}{100\lambda}, b_1 = \frac{3\alpha^2}{25\lambda}, b_2 = -\frac{3\alpha^2}{100\lambda}, V = \frac{6\alpha^2}{25\lambda},$$

$$\mu = -\frac{\alpha}{20\lambda}$$

$$a_0 = -\frac{9\alpha^2}{50\lambda}, a_1 = \frac{3\alpha^2}{25\lambda}, a_2 = -\frac{3\alpha^2}{100\lambda}, b_1 = \frac{3\alpha^2}{25\lambda}, b_2 = -\frac{3\alpha^2}{100\lambda}, V = -\frac{6\alpha^2}{25\lambda},$$
$$\mu = -\frac{\alpha}{20\lambda}$$

$$a_0 = \frac{9\alpha^2}{25\lambda}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = -\frac{6\alpha^2}{25\lambda}, b_2 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, V = \frac{6\alpha^2}{25\lambda}, \mu = \frac{\alpha}{10\lambda}$$

$$a_0 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = -\frac{6\alpha^2}{25\lambda}, b_2 = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda}, V = -\frac{6\alpha^2}{25\lambda}, \mu = \frac{\alpha}{10\lambda}$$

Bu katsayılara bağlı olarak denklemin hareketli dalga çözümleri sırası ile şu şekildedir:

$$u_1(x,t) = \frac{9\alpha^2}{25\lambda} - \frac{6\alpha^2}{25\lambda}\tanh\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{25\lambda}\tanh^2\mu(x-Vt)$$
$$u_2(x,t) = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda} - \frac{6\alpha^2}{25\lambda}\tanh\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{25\lambda}\tanh^2\mu(x-Vt)$$
$$u_3(x,t) = \frac{9\alpha^2}{25\lambda} + \frac{6\alpha^2}{25\lambda}\tanh\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{25\lambda}\tanh^2\mu(x-Vt)$$
$$u_4(x,t) = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda} + \frac{6\alpha^2}{25\lambda}\tanh\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{25\lambda}\tanh^2\mu(x-Vt)$$
$$u_5(x,t) = \frac{9\alpha^2}{25\lambda} + \frac{6\alpha^2}{25\lambda}\coth\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{25\lambda}\coth^2\mu(x-Vt)$$
$$u_6(x,t) = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda} + \frac{6\alpha^2}{25\lambda}\coth\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{25\lambda}\coth^2\mu(x-Vt)$$
$$u_7(x,t) = \frac{3\alpha^2}{10\lambda} - \frac{3\alpha^2}{25\lambda}\tanh\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{100\lambda}\tanh^2\mu(x-Vt)$$
$$-\frac{3\alpha^2}{25\lambda}\coth\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{100\lambda}\coth^2\mu(x-Vt)$$
$$u_8(x,t) = -\frac{9\alpha^2}{50\lambda} - \frac{3\alpha^2}{25\lambda}\tanh\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{100\lambda}\tanh^2\mu(x-Vt)$$
$$-\frac{3\alpha^2}{25\lambda}\coth\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{100\lambda}\coth^2\mu(x-Vt)$$

$$u_9(x,t) = \frac{3\alpha^2}{10\lambda} + \frac{3\alpha^2}{25\lambda}\tanh\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{100\lambda}\tanh^2\mu(x-Vt)$$
$$+\frac{3\alpha^2}{25\lambda}\coth\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{100\lambda}\coth^2\mu(x-Vt)$$
$$u_{10}(x,t) = -\frac{9\alpha^2}{50\lambda} + \frac{3\alpha^2}{25\lambda}\tanh\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{100\lambda}\tanh^2\mu(x-Vt)$$
$$+\frac{3\alpha^2}{25\lambda}\coth\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{100\lambda}\coth^2\mu(x-Vt)$$
$$u_{11}(x,t) = \frac{9\alpha^2}{25\lambda} - \frac{6\alpha^2}{25\lambda}\coth\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{25\lambda}\coth^2\mu(x-Vt)$$
$$u_{12}(x,t) = -\frac{3\alpha^2}{25\lambda} - \frac{6\alpha^2}{25\lambda}\coth\mu(x-Vt) - \frac{3\alpha^2}{25\lambda}\coth^2\mu(x-Vt)$$

4.4. Genelleştirilmiş Hyperelastic-Hod Dalga Denkleminin Çözümü

Denklem

$$u_t - u_{xxt} + \alpha u_x + 2\beta u u_x + 3\theta u^2 u_x - \gamma u_x u_{xx} - u u_{xxx} = 0 \qquad \textbf{(4.10)}$$

şeklinde verilen bir pseudoparabolik denklemdir. α, β ve γ sabitler olmakla beraber θ sıfırdan farklı bir sabittir. Daha önce yapıldığı gibi dalga değişkeni olan $\xi = x - Vt$ yardımıyla (4.10) kısmi türevli diferansiyel denklemi

$$-VU' + VU''' + \alpha U' + 2\beta U U' + 3\theta U^2 U' - \gamma U' U'' - U U''' = 0 \qquad \textbf{(4.11)}$$

şeklinde adi türevli bir diferansiyel denkleme dönüşür. İntegral sabitinin sıfır olduğu kabul edilip bir kez integral alınıp düzenlenirse (4.11) adi türevli diferansiyel denklemi

$$(-V+\alpha)U + VU'' + \beta U^2 + \theta U^3 - \tfrac{\gamma-1}{2}(U')^2 - UU'' = 0 \qquad \textbf{(4.12)}$$

denklemine dönüşür. (4.12) denkleminde U^3 ve UU'' terimlerinin dengelenmesi sonucunda $M = 2$ bulunacağından tanh-coth yöntemi gereği

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{2} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} b_k\, Y^{-k} \tag{4.13}$$

şeklindeki sonlu seri çözümler aranır. (4.13) serisi (4.12) denkleminde yazılıp elde edilen polinom Y nin katsayılarına göre düzenlenip katsayılar sıfıra eşitlenirse

$$
\begin{aligned}
Y^{12}:\ & a_2{}^3\theta - 4a_2{}^2\mu^2 - 2a_2{}^2\gamma\mu^2 = 0 \\
Y^{11}:\ & 3a_1a_2{}^2\theta - 6a_1a_2\mu^2 - 2a_1a_2\gamma\mu^2 = 0 \\
Y^{10}:\ & 8a_2{}^2\mu^2 - 3a_1{}^2\mu^2 + 2a_2{}^2\beta - a_1{}^2\gamma\mu^2 + 8a_2{}^2\gamma\mu^2 + 12Va_2\mu^2 + 6a_0a_2{}^2\theta \\
& + 6a_1{}^2a_2\theta - 12a_0a_2\mu^2 = 0 \\
Y^{9}:\ & a_1{}^3\theta + 2a_1a_2\beta + 2Va_1\mu^2 + 3b_1a_2{}^2\theta - 8b_1a_2\mu^2 - 2a_0a_1\mu^2 + 6a_1a_2\mu^2 \\
& + 6a_0a_1a_2\theta + 2b_1a_2\gamma\mu^2 + 4a_1a_2\gamma\mu^2 = 0 \\
Y^{8}:\ & 2a_1{}^2\mu^2 + 2a_2\alpha + 2a_1{}^2\beta - 2Va_2 + 4a_0a_2\beta + 2a_1{}^2\gamma\mu^2 - 4a_2{}^2\gamma\mu^2 - 16Va_2\mu^2 \\
& - 6b_1a_1\mu^2 + 6b_2a_2{}^2\theta - 24b_2a_2\mu^2 + 6a_0a_1{}^2\theta + 6a_0{}^2a_2\theta \\
& + 16a_0a_2\mu^2 + 12b_1a_1a_2\theta + 2b_1a_1\gamma\mu^2 + 8b_2a_2\gamma\mu^2 = 0 \\
Y^{7}:\ & a_1\alpha - Va_1 + 2b_1a_2\beta + 2a_0a_1\beta - 2Va_1\mu^2 + 3b_1a_1{}^2\theta + 14b_1a_2\mu^2 - 6b_2a_1\mu^2 \\
& + 3a_0{}^2a_1\theta + 2a_0a_1\mu^2 + 6b_1a_0a_2\theta + 6b_2a_1a_2\theta - 4b_1a_2\gamma\mu^2 \\
& + 2b_2a_1\gamma\mu^2 - 2a_1a_2\gamma\mu^2 = 0 \\
Y^{6}:\ & b_1{}^2\mu^2 + a_1{}^2\mu^2 + 2a_0\alpha + 2a_0{}^3\theta + 2a_0{}^2\beta - 2Va_0 + 4b_1a_1\beta + 4b_2a_2\beta \\
& - b_1{}^2\gamma\mu^2 - a_1{}^2\gamma\mu^2 + 4Vb_2\mu^2 + 4Va_2\mu^2 + 6b_2a_1{}^2\theta + 6b_1{}^2a_2\theta \\
& + 12b_1a_1\mu^2 - 4b_2a_0\mu^2 + 48b_2a_2\mu^2 - 4a_0a_2\mu^2 + 12b_1a_0a_1\theta \\
& + 12b_2a_0a_2\theta - 4b_1a_1\gamma\mu^2 - 16b_2a_2\gamma\mu^2 = 0 \\
Y^{5}:\ & b_1\alpha - Vb_1 + 2b_1a_0\beta + 2b_2a_1\beta - 2Vb_1\mu^2 + 3b_1a_0{}^2\theta + 3b_1{}^2a_1\theta + 2b_1a_0\mu^2 \\
& - 6b_1a_2\mu^2 + 14b_2a_1\mu^2 + 6b_1b_2a_2\theta + 6b_2a_0a_1\theta - 2b_1b_2\gamma\mu^2 \\
& + 2b_1a_2\gamma\mu^2 - 4b_2a_1\gamma\mu^2 = 0 \\
Y^{4}:\ & 2b_1{}^2\mu^2 + 2b_2\alpha + 2b_1{}^2\beta - 2Vb_2 + 4b_2a_0\beta + 2b_1{}^2\gamma\mu^2 - 4b_2{}^2\gamma\mu^2 - 16Vb_2\mu^2 \\
& + 6b_1{}^2a_0\theta + 6b_2a_0{}^2\theta - 6b_1a_1\mu^2 + 16b_2a_0\mu^2 + 6b_2{}^2a_2\theta \\
& - 24b_2a_2\mu^2 + 12b_1b_2a_1\theta + 2b_1a_1\gamma\mu^2 + 8b_2a_2\gamma\mu^2 = 0 \\
Y^{3}:\ & b_1{}^3\theta + 2b_1b_2\beta + 2Vb_1\mu^2 + 6b_1b_2\mu^2 - 2b_1a_0\mu^2 + 3b_2{}^2a_1\theta - 8b_2a_1\mu^2 \\
& + 6b_1b_2a_0\theta + 4b_1b_2\gamma\mu^2 + 2b_2a_1\gamma\mu^2 = 0 \\
Y^{2}:\ & 8b_2{}^2\mu^2 - 3b_1{}^2\mu^2 + 2b_2{}^2\beta - b_1{}^2\gamma\mu^2 + 8b_2{}^2\gamma\mu^2 + 12Vb_2\mu^2 + 6b_1{}^2b_2\theta \\
& + 6b_2{}^2a_0\theta - 12b_2a_0\mu^2 = 0 \\
Y^{1}:\ & 3b_1b_2{}^2\theta - 6b_1b_2\mu^2 - 2b_1b_2\gamma\mu^2 = 0
\end{aligned}
$$

$Y^0 :\ b_2{}^3\theta - 4b_2{}^2\mu^2 - 2b_2{}^2\gamma\mu^2 = 0$

Elde edilen bu denklem sisteminin üç farklı çözüm kümesi vardır.

Birinci çözüm kümesi:

$$a_0 = (-8\gamma\mu^2 + 12\beta - 8\mu^2 - 40\beta\mu^2 + 50\gamma^3\mu^2 + 18\theta\alpha - 80\mu^2\beta^2 - 16\beta\gamma^2\mu^2 - 88\mu^2\gamma\beta^2 + 24\beta^2 + 32\gamma\beta^2 + 28\gamma\beta + 26\gamma^2\mu^2 + 14\gamma^2\beta^2 + 33\theta\alpha\gamma + 36\beta\theta\alpha + 18\theta\alpha\gamma^2 - 24\beta^2\gamma^2\mu^2 + 20\beta\gamma^3\mu^2 - 68\mu^2\gamma\beta + 23\beta\gamma^2 + 24\mu^2\theta\alpha + 12\mu^2\theta\alpha\gamma + 30\beta\theta\alpha\gamma - 24\mu^2\theta\alpha\gamma^2 + 6\beta\theta\alpha\gamma^2 - 12\gamma^3\mu^2\theta\alpha + 8\beta\gamma^4\mu^2 + 3\theta\alpha\gamma^3 + 30\gamma^4\mu^2 + 2\beta^2\gamma^3 + \beta\gamma^4 + 6\gamma^5\mu^2 + 8\beta\gamma^3)/\{2\theta(-12\gamma^2 - 8\gamma - 2\beta^2 - 3\theta\alpha - 7\beta - 8\gamma^3 - 2\gamma^4 + 24\beta\gamma^2\mu^2 + 4\beta\gamma^3\mu^2 + 44\mu^2\gamma\beta + 24\beta\mu^2 - 2 + 34\gamma^2\mu^2 + 14\gamma^3\mu^2 + 2\gamma^4\mu^2 + 34\gamma\mu^2 + 12\mu^2 - 4\gamma\beta^2 - 2\gamma^2\beta^2 + 3\theta\alpha\gamma^2 - 16\gamma\beta - 13\beta\gamma^2 - 4\beta\gamma^3)\}$$

$a_1 = b_1 = b_2 = 0, a_2 = (2\mu^2(2+\gamma))/\theta$

$$V = -(-8\gamma\mu^2 + 4\beta - 8\mu^2 + 8\beta\mu^2 + 50\gamma^3\mu^2 + 18\theta\alpha + 16\mu^2\beta^2 + 76\beta\gamma^2\mu^2 + 40\mu^2\gamma\beta^2 - 4\beta^2 - 8\beta^3 - 18\gamma\beta^2 + 26\gamma^2\mu^2 - 20\gamma^2\beta^2 - 12\gamma\beta^3 + 33\theta\alpha\gamma + 24\beta\theta\alpha + 18\theta\alpha\gamma^2 + 32\beta^2\gamma^2\mu^2 + 52\beta\gamma^3\mu^2 + 44\mu^2\gamma\beta - 13\beta\gamma^2 + 24\mu^2\theta\alpha + 12\mu^2\theta\alpha\gamma + 36\beta\theta\alpha\gamma - 24\mu^2\theta\alpha\gamma^2 + 12\beta\theta\alpha\gamma^2 - 12\gamma^3\mu^2\theta\alpha + 12\beta\mu^2\gamma^4 + 3\theta\alpha\gamma^3 + 8\gamma^3\mu^2\beta^2 + 30\gamma^4\mu^2 - 6\beta^2\mu^3 - 3\beta\gamma^4 + 6\gamma^5\mu^2 - 12\beta\gamma^3 - 4\gamma^2\beta^3)/\{6\theta(-2\gamma^3 + 2\gamma^3\mu^2 - 6\gamma^2 + 12\gamma^2\mu^2 - 4\beta\gamma^2 + 4\beta\gamma^2\mu^2 - 6\gamma + 3\theta\alpha\gamma - 9\gamma\beta - 2\gamma\beta^2 + 22\gamma\mu^2 + 20\mu^2\mu\beta - 7\beta - 2\beta^2 - 3\theta\alpha + 12\mu^2 + 24\beta\mu^2 - 2)\}$$

$$\mu_1 = \frac{\pm 1}{4(\gamma^2 + 3\gamma + 2)}\left(-(2\gamma^2 + 6\gamma + 4)\left(-2 - \gamma^2 - 4\beta - 3\gamma - 2\gamma\beta + (4 - 16\beta + 12\mu + 16\beta^2 + 13\gamma^2 + 6\gamma^3 + \gamma^4 + 16\gamma\beta^2 - 32\gamma\beta + 4\gamma^2\beta^2 - 20\beta\gamma^2 - 4\beta\gamma^3 - 48\theta\alpha - 72\theta\alpha\gamma - 24\theta\alpha\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mu_2 = \frac{\pm 1}{4(\gamma^2 + 3\gamma + 2)}\Bigg((2\gamma^2 + 6\gamma + 4)\Big(2 + \gamma^2 + 4\beta + 3\gamma + 2\gamma\beta$$
$$+ (4 - 16\beta + 12\mu + 16\beta^2 + 13\gamma^2 + 6\gamma^3 + \gamma^4 + 16\gamma\beta^2 - 32\gamma\beta$$
$$+ 4\gamma^2\beta^2 - 20\beta\gamma^2 - 4\beta\gamma^3 - 48\theta\alpha - 72\theta\alpha\gamma - 24\theta\alpha\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Big)\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

İkinci çözüm kümesi:

$$a_0 = (-8\gamma\mu^2 + 12\beta - 8\mu^2 - 40\beta\mu^2 + 50\gamma^3\mu^2 + 18\theta\alpha - 80\mu^2\beta^2 - 16\beta\gamma^2\mu^2$$
$$- 88\mu^2\gamma\beta^2 + 24\beta^2 + 32\gamma\beta^2 + 28\gamma\beta + 26\gamma^2\mu^2 + 14\gamma^2\beta^2 + 33\theta\alpha\gamma$$
$$+ 36\beta\theta\alpha + 18\theta\alpha\gamma^2 - 24\beta^2\gamma^2\mu^2 + 20\beta\gamma^3\mu^2 - 68\mu^2\gamma\beta + 23\beta\gamma^2$$
$$+ 24\mu^2\theta\alpha + 12\mu^2\theta\alpha\gamma + 30\beta\theta\alpha\gamma - 24\mu^2\theta\alpha\gamma^2 + 6\beta\theta\alpha\gamma^2$$
$$- 12\gamma^3\mu^2\theta\alpha + 8\beta\gamma^4\mu^2 + 3\theta\alpha\gamma^3 + 30\gamma^4\mu^2 + 2\beta^2\gamma^3 + \beta\gamma^4 + 6\gamma^5\mu^2$$
$$+ 8\beta\gamma^3)/\{2\theta(-12\gamma^2 - 8\gamma - 2\beta^2 - 3\theta\alpha - 7\beta - 8\gamma^3 - 2\gamma^4$$
$$+ 24\beta\gamma^2\mu^2 + 4\beta\gamma^3\mu^2 + 44\mu^2\gamma\beta + 24\beta\mu^2 - 2 + 34\gamma^2\mu^2 + 14\gamma^3\mu^2$$
$$+ 2\gamma^4\mu^2 + 34\gamma\mu^2 + 12\mu^2 - 4\gamma\beta^2 - 2\gamma^2\beta^2 + 3\theta\alpha\gamma^2 - 16\gamma\beta$$
$$- 13\beta\gamma^2 - 4\beta\gamma^3)\}$$

$$a_1 = a_2 = b_1 = 0, b_2 = (2\mu^2(2 + \gamma))/\theta$$

$$V = -(-8\gamma\mu^2 + 4\beta - 8\mu^2 + 8\beta\mu^2 + 50\gamma^3\mu^2 + 18\theta\alpha + 16\mu^2\beta^2 + 76\beta\gamma^2\mu^2$$
$$+ 40\mu^2\gamma\beta^2 - 4\beta^2 - 8\beta^3 - 18\gamma\beta^2 + 26\gamma^2\mu^2 - 20\gamma^2\beta^2 - 12\gamma\beta^3$$
$$+ 33\theta\alpha\gamma + 24\beta\theta\alpha + 18\theta\alpha\gamma^2 + 32\beta^2\gamma^2\mu^2 + 52\beta\gamma^3\mu^2 + 44\mu^2\gamma\beta$$
$$- 13\beta\gamma^2 + 24\mu^2\theta\alpha + 12\mu^2\theta\alpha\gamma + 36\beta\theta\alpha\gamma - 24\mu^2\theta\alpha\gamma^2 + 12\beta\theta\alpha\gamma^2$$
$$- 12\gamma^3\mu^2\theta\alpha + 12\beta\mu^2\gamma^4 + 3\theta\alpha\gamma^3 + 8\gamma^3\mu^2\beta^2 + 30\gamma^4\mu^2 - 6\beta^2\mu^3$$
$$- 3\beta\gamma^4 + 6\gamma^5\mu^2 - 12\beta\gamma^3 - 4\gamma^2\beta^3)/\{6\theta(-2\gamma^3 + 2\gamma^3\mu^2 - 6\gamma^2$$
$$+ 12\gamma^2\mu^2 - 4\beta\gamma^2 + 4\beta\gamma^2\mu^2 - 6\gamma + 3\theta\alpha\gamma - 9\gamma\beta - 2\gamma\beta^2 + 22\gamma\mu^2$$
$$+ 20\mu^2\mu\beta - 7\beta - 2\beta^2 - 3\theta\alpha + 12\mu^2 + 24\beta\mu^2 - 2)\}$$

$$\mu_1 = \frac{\pm 1}{4(\gamma^2+3\gamma+2)}\Big(-(2\gamma^2+6\gamma+4)\big(-2-\gamma^2-4\beta-3\gamma-2\gamma\beta + (4-16\beta+12\mu+16\beta^2+13\gamma^2+6\gamma^3+\gamma^4+16\gamma\beta^2-32\gamma\beta + 4\gamma^2\beta^2-20\beta\gamma^2-4\beta\gamma^3-48\theta\alpha-72\theta\alpha\gamma-24\theta\alpha\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\big)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\mu_2 = \frac{\pm 1}{4(\gamma^2+3\gamma+2)}\Big((2\gamma^2+6\gamma+4)\big(2+\gamma^2+4\beta+3\gamma+2\gamma\beta + (4-16\beta+12\mu+16\beta^2+13\gamma^2+6\gamma^3+\gamma^4+16\gamma\beta^2-32\gamma\beta + 4\gamma^2\beta^2-20\beta\gamma^2-4\beta\gamma^3-48\theta\alpha-72\theta\alpha\gamma-24\theta\alpha\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\big)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Üçüncü çözüm kümesi:

$$a_0 = (-8\gamma\mu^2+3\beta-8\mu^2-40\beta\mu^2+50\gamma^3\mu^2+(9/2)\theta\alpha-80\mu^2\beta^2-16\beta\gamma^2\mu^2 - 88\mu^2\gamma\beta^2+6\beta^2+8\gamma\beta^2+7\gamma\beta+26\gamma^2\mu^2+(7/2)\gamma^2\beta^2 + ((33)/4)\theta\alpha\gamma+9\beta\theta\alpha-24\beta^2\gamma^2\mu^2+20\beta\gamma^3\mu^2-68\mu^2\gamma\beta + ((23)/4)\beta\gamma^2+24\mu^2\theta\alpha+12\mu^2\theta\alpha\gamma+((15)/2)\beta\theta\alpha\gamma - 24\mu^2\theta\alpha\gamma^2+(3/2)\beta\theta\alpha\gamma^2-12\gamma^3\mu^2\theta\alpha+8\beta\gamma^4\mu^2+(3/4)\theta\alpha\gamma^3 + 30\gamma^4\mu^2+(1/2)\beta^2\gamma^3+(1/4)\beta\gamma^4+6\gamma^5\mu^2+2\beta\gamma^3)/\{\theta(-2 + 16\beta\gamma^3\mu^2+176\mu^2\gamma\beta-12\gamma^2-8\gamma-3\theta\alpha-2\beta^2-8\gamma^3-2\gamma^4 - 7\beta+48\mu^2+96\beta\gamma^2\mu^2+3\theta\alpha\gamma^2-16\gamma\beta-13\beta\gamma^2-4\beta\gamma^3-4\gamma\beta^2 - 2\gamma^2\beta^2+136\gamma^2\mu^2+56\gamma^3\mu^2+8\gamma^4\mu^2+136\gamma\mu^2+96\beta\mu^2)\}$$

$a_1 = b_1 = 0, a_2 = b_2 = (2\mu^2(2+\gamma)/\theta)$

$$
\begin{aligned}
V = -(&-32\gamma\mu^2 + 4\beta - 32\mu^2 + 32\beta\mu^2 + 200\gamma^3\mu^2 + 18\theta\alpha + 64\mu^2\beta^2 + 304\beta\gamma^2\mu^2 \\
&+ 160\mu^2\gamma\beta^2 - 4\beta^2 - 8\beta^3 - 18\gamma\beta^2 + 104\gamma^2\mu^2 - 20\gamma^2\beta^2 - 12\gamma\beta^3 \\
&+ 33\theta\alpha\gamma + 24\beta\theta\alpha + 18\theta\alpha\gamma^2 + 128\beta^2\gamma^2\mu^2 + 208\beta\gamma^3\mu^2 \\
&+ 176\mu^2\gamma\beta - 13\beta\gamma^2 + 96\mu^2\theta\alpha + 48\mu^2\theta\alpha\gamma + 36\beta\theta\alpha\gamma - 96\mu^2\theta\alpha\gamma^2 \\
&+ 12\beta\theta\alpha\gamma^2 - 48\gamma^3\mu^2\theta\alpha + 48\beta\mu^2\gamma^4 + 3\theta\alpha\gamma^3 + 32\gamma^3\mu^2\beta^2 \\
&+ 120\gamma^4\mu^2 - 6\beta^2\mu^3 - 3\beta\gamma^4 + 24\gamma^5\mu^2 - 12\beta\gamma^3 \\
&- 4\gamma^2\beta^3)/\{(6\theta 8\gamma^3\mu^2 - 2\gamma^3 - 6\gamma^2 + 48\gamma^2\mu^2 - 4\beta\gamma^2 + 16\beta\gamma^2\mu^2 \\
&- 6\gamma + 3\theta\alpha\gamma - 9\gamma\beta - 2\gamma\beta^2 + 88\gamma\mu^2 + 80\mu^2\mu\beta - 7\beta - 2\beta^2 - 3\theta\alpha \\
&+ 48\mu^2 + 96\beta\mu^2 - 2)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_1 = \frac{\pm 1}{8(\gamma^2 + 3\gamma + 2)}\Bigg(&-(2\gamma^2 + 6\gamma + 4)\Big(-2 - \gamma^2 - 4\beta - 3\gamma - 2\gamma\beta \\
&+ (4 - 16\beta + 12\mu + 16\beta^2 + 13\gamma^2 + 6\gamma^3 + \gamma^4 + 16\gamma\beta^2 - 32\gamma\beta \\
&+ 4\gamma^2\beta^2 - 20\beta\gamma^2 - 4\beta\gamma^3 - 48\theta\alpha - 72\theta\alpha\gamma - 24\theta\alpha\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Big)\Bigg)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_2 = \frac{\pm 1}{8(\gamma^2 + 3\gamma + 2)}\Bigg(&(2\gamma^2 + 6\gamma + 4)\Big(2 + \gamma^2 + 4\beta + 3\gamma + 2\gamma\beta \\
&+ (4 - 16\beta + 12\mu + 16\beta^2 + 13\gamma^2 + 6\gamma^3 + \gamma^4 + 16\gamma\beta^2 - 32\gamma\beta \\
&+ 4\gamma^2\beta^2 - 20\beta\gamma^2 - 4\beta\gamma^3 - 48\theta\alpha - 72\theta\alpha\gamma - 24\theta\alpha\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\Big)\Bigg)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Bu katsayılar sırasıyla kullanılırsa denklemin üç adet analitik çözümü

$$
\begin{aligned}
u_1(x,t) &= a_0 + \frac{2\mu^2(2+\gamma)}{\theta}\tanh^2\mu(x - Vt) \\
u_2(x,t) &= a_0 + \frac{2\mu^2(2+\gamma)}{\theta}\coth^2\mu(x - Vt) \\
u_3(x,t) &= a_0 + \frac{2\mu^2(2+\gamma)}{\theta}\tanh^2\mu(x - Vt) + \frac{2\mu^2(2+\gamma)}{\theta}\coth^2\mu(x - Vt)
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilmiş olur.

4.5. Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) Denkleminin Çözümü

α pozitif bir sabit olmak üzere BBMB denklemi

$$-u_{xxt} + u_t - \alpha u_{xx} + (1+u)u_x = 0 \quad \textbf{(4.14)}$$

şeklinde ifade edilmektedir. $\xi = x - Vt$ dalga dönüşümü ile denklem

$$(-V+1)U + VU'' - \alpha U' + \frac{1}{2}U^2 = 0 \quad \textbf{(4.15)}$$

adi türevli diferansiyel denklemine dönüşür. İkinci ve son terimlerin dengelenmesi ile $M = 2$ olarak bulunacağından

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{2} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} b_k\, Y^{-k} \quad \textbf{(4.16)}$$

şeklindeki seri çözümlere odaklanmak gerekir. (4.16), (4.15) te yazılıp Y ye bağlı olarak elde edilen denklemin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde

$Y^8 :\ 12V\mu^2 a_2 + {a_2}^2 = 0$
$Y^7 :\ 4Va_1\mu^2 + 4\alpha a_2\mu + 2a_1a_2 = 0$
$Y^6 :\ -16Va_2\mu^2 + 2\alpha\mu a_1 + {a_1}^2 + 2a_2 - 2Va_2 + 2a_0a_2 = 0$
$Y^5 :\ -4Va_1\mu^2 - 4\alpha a_2\mu + 2a_1 - 2Va_1 + 2b_1a_2 + 2a_0a_1 = 0$
$Y^4 :\ 2a_0 - 2Va_0 + 2b_1a_1 + 2b_2a_2 + {a_0}^2 + 4V\mu^2 b_2 + 4V\mu^2 a_2 - 2\alpha\mu b_1 - 2\alpha\mu a_1 = 0$
$Y^3 :\ -4Vb_1\mu^2 - 4\alpha b_2\mu + 2b_1 - 2Vb_1 + 2b_1a_0 + 2b_2a_1 = 0$
$Y^2 :\ -16Vb_2\mu^2 + 2\alpha\mu b_1 + {b_1}^2 + 2b_2 - 2Vb_2 + 2b_2a_0 = 0$
$Y^1 :\ 4Vb_1\mu^2 + 4\alpha b_2\mu + 2b_1b_2 = 0$
$Y^0 :\ {b_2}^2 + 12V\mu^2 b_2 = 0$

şeklinde bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin Maple yardımıyla elde edilen dokuz adet çözümü

$$a_0 = \frac{3\alpha - 30\mu}{20\mu}, a_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5}, a_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5}, b_1 = 0, b_2 = 0, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$

$$\mu = \frac{-5 + \sqrt{25 + 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{\alpha - 10\mu}{20\mu}, a_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5}, a_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5}, b_1 = 0, b_2 = 0, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$

$$\mu = \frac{5 + \sqrt{25 - 24\alpha^2}}{24\alpha}, \alpha^2 \leq \frac{25}{24}$$

$$a_0 = \frac{\alpha - 20\mu}{16\mu}, a_1 = b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5}, a_2 = b_2 - \frac{3\alpha\mu}{5}, V = \frac{\alpha}{20\mu},$$

$$\mu = \frac{-5 + \sqrt{25 + 24\alpha^2}}{48\alpha}$$

$$a_0 = \frac{3\alpha - 60\mu}{80\mu}, a_1 = b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5}, a_2 = b_2 = -v, V = \frac{\alpha}{20\mu},$$

$$\mu = \frac{5 + \sqrt{25 - 24\alpha^2}}{48\alpha}, \alpha^2 \leq \frac{25}{24}$$

$$a_0 = \frac{3\alpha - 30\mu}{20\mu}, a_1 = b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5}, a_2 = -\frac{3\alpha\mu}{5}, b_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5}, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$

$$\mu = \frac{-5 + \sqrt{25 + 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{\alpha - 10\mu}{20\mu}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5}, b_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5}, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$

$$\mu = \frac{5 + \sqrt{25 - 24\alpha^2}}{24\alpha}, \alpha^2 \leq \frac{25}{24}$$

$$a_0 = \frac{\alpha - 10\mu}{20\mu}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5}, b_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5}, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$

$$\mu = \frac{5 - \sqrt{25 - 24\alpha^2}}{24\alpha}, \alpha^2 \leq \frac{25}{24}$$

$$a_0 = \frac{3\alpha - 60\mu}{80\mu}, a_1 = b_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5}, a_2 = b_2 = -\frac{3\alpha\mu}{5}, V = \frac{\alpha}{20\mu},$$

$$\mu = \frac{5 - \sqrt{25 - 24\alpha^2}}{48\alpha}, \alpha^2 \leq \frac{25}{24}$$

$$a_0 = \frac{\alpha - 10\mu}{20\mu}, a_1 = -\frac{12\alpha\mu}{5}, a_2 = -\frac{6\alpha\mu}{5}, b_1 = b_2 = 0, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$

$$\mu = \frac{5 - \sqrt{25 - 24\alpha^2}}{24\alpha}, \alpha^2 \leq \frac{25}{24}$$

şeklinde bulunur. Bu katsayılar yardımıyla denkleme ait dokuz tam çözüm

$$u_1(x,t) = \frac{3\alpha - 30\mu}{20\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5}\tanh^2\mu(x - Vt)$$

$$u_2(x,t) = \frac{\alpha - 10\mu}{20\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5}\tanh^2\mu(x - Vt)$$

$$u_3(x,t) = \frac{\alpha - 20\mu}{16\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5}\tanh^2\mu(x - Vt) - \frac{12\alpha\mu}{5}\coth\mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_4(x,t) = \frac{3\alpha - 60\mu}{80\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5}\tanh^2\mu(x - Vt) - \frac{12\alpha\mu}{5}\coth\mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5})\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_5(x,t) = \frac{3\alpha - 30\mu}{20\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5}\tanh^2\mu(x - Vt) - \frac{12\alpha\mu}{5}\coth\mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_6(x,t) = \frac{\alpha - 10\mu}{20\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5}\coth\mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_7(x,t) = \frac{\alpha - 10\mu}{20\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5}\coth\mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_8(x,t) = \frac{3\alpha - 60\mu}{80\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5}\tanh^2\mu(x - Vt) - \frac{12\alpha\mu}{5}\coth\mu(x - Vt) - \frac{3\alpha\mu}{5}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_9(x,t) = \frac{\alpha - 10\mu}{20\mu} - \frac{12\alpha\mu}{5}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{6\alpha\mu}{5}\tanh^2\mu(x - Vt)$$

şeklinde bulunmuş olur.

4.6. Geneleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony-Burger Denkleminin Çözümü

$$-u_{xxt} + u_t - \alpha u_{xx} + \beta u_x + \big(g(u)\big)_x = 0 \qquad \textbf{(4.17)}$$

şeklinde verien denkleme Genelleştirilmiş Benjamin-Bona-Mahony-Burger denklemi denir. $g(u)$ için alınan her fonksiyon için yeni bir BBMB denklemi oluşacaktır. Bu çalışmada sırasıyla $g(u) = uu_x$, $g(u) = \frac{u^2}{2}$ ve $g(u) = \frac{u^3}{3}$ için elde edilen BBMB denklemlerinin tanh $-$ coth çözümleri verilecektir.

4.6.1. $g(u) = uu_x$ alındığında oluşan BBMB denklemi

$\xi = x - Vt$ değişkeni yardımıyla kısmi türevli diferansiyel denklem

$$-VU + VU'' - \alpha U' + \beta U + UU' = 0 \qquad \textbf{(4.18)}$$

şeklinde adi türevli denkleme dönüşür. (4.18) de U'' ile UU' terimleri dengelenirse $M = 1$ olarak elde edileceğinden tanh-coth yöntemi gereği

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \textstyle\sum_{k=0}^{1} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{1} b_k\, Y^{-k} \qquad \textbf{(4.19)}$$

şeklindeki sonlu seri çözümler aranmalıdır. (4.19) ansatzı (4.18) adi diferansiyel denkleminde yazılırsa

$Y^6:\ \mu {a_1}^2 - 2V\mu^2 a_1 = 0,$

$Y^5:\ \mu a_1\alpha - \mu a_0 a_1 = 0,$

$Y^4:\ a_1\beta + \mu {a_1}^2 - Va_1 - 2V\mu^2 a_1 = 0,$

$Y^3:\ a_0\beta - Va_0 - \mu a_1\alpha - \mu b_1\alpha + \mu a_0 a_1 + \mu a_0 b_1 = 0,$

$Y^2:\ b_1\beta + \mu {b_1}^2 - Vb_1 - 2V\mu^2 b_1 = 0,$

$Y^1:\ \mu b_1 \alpha - \mu a_0 b_1 = 0,$

$Y^0:\ 2V\mu^2 b_1 - \mu {b_1}^2 = 0,$

şeklinde cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümü μ serbest parametre olmak üzere

$a_0 = \alpha, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = 2\mu\beta, \quad V = \beta,$

$a_0 = \alpha, \quad a_1 = 2\mu\beta, \quad b_1 = 0, \quad V = \beta,$

$a_0 = \alpha, \quad a_1 = 2\mu\beta, \quad b_1 = 2\mu\beta, \quad V = \beta,$

şeklindedir. Bu katsayılara bağlı olarak denklemin tam çözümleri

$u_1(x,t) = \alpha + 2\mu\beta \coth \mu(x - \beta t),$

$u_2(x,t) = \alpha + 2\mu\beta \tanh \mu(x - \beta t),$

$u_3(x,t) = \alpha + 2\mu\beta \tanh \mu(x - \beta t) + 2\mu\beta \coth \mu(x - \beta t),$

şeklinde elde edilmiş olur.

4.6.2. $g(u) = \frac{u^2}{2}$ alındığında oluşan BBMB denklemi

$\xi = x - Vt$ kullanıldığında oluşan adi türevli diferansiyel denklemin integrali integral sabiti sıfır kabul edilerek alınırsa

$$(V-\beta)U - VU'' + \alpha U' + \frac{1}{2}U^2 = 0 \qquad \textbf{(4.20)}$$

denklemi oluşacaktır. İkinci ve son terimlerin dengelenmesi ile $M = 2$ olur. Bu durumda

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{2} a_k Y^k + \sum_{k=1}^{2} b_k Y^{-k} \qquad \textbf{(4.21)}$$

ansatzı yardımıyla

Y^8: $a^{22} - 12V\mu^2 a^2 = 0,$

Y^7 : $4Va_1\mu^2 + 4\alpha a_2\mu - 2a_1a_2 = 0,$

Y^6 : $16Va_2\mu^2 - 2\alpha\mu a_1 + {a_1}^2 + 2Va_2 - 2\beta a_2 + 2a_0a_2 = 0,$

Y^5 : $4Va_1\mu^2 + 4\alpha a_2\mu + 2Va_1 - 2\beta a_1 + 2b_1a_2 + 2a_0a_1 = 0,$

Y^4 : $2Va_0 - 2\beta a_0 + 2b_1a_1 + 2b_2a_2 + {a_0}^2 - 4V\mu^2 b_2 - 4V\mu^2 a_2 + 2\alpha\mu b_1 + 2\alpha\mu a_1 = 0,$

Y^3 : $4Vb_1\mu^2 + 4\alpha b_2\mu + 2Vb_1 - 2\beta b_1 + 2b_1a_0 + 2b_2a_1 = 0,$

Y^2 : $16Vb_2\mu^2 - 2\alpha\mu b_1 + {b_1}^2 + 2Vb_2 - 2\beta b_2 + 2b_2a_0 = 0,$

Y^1 : $4Vb_1\mu^2 + 4\alpha b_2\mu - 2b_1b_2 = 0,$

Y^0 : ${b_2}^2 - 12V\mu^2 b_2 = 0,$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü olarak Maple aşağıdaki gibi dokuz farklı reel çözüm verir:

$$a_0 = \frac{10\mu\beta - \alpha}{20\mu}, a_1 = \frac{12\alpha\mu}{5}, a_2 = \frac{6\alpha\mu}{5}, b_1 = b_2 = 0, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$
$$\mu = \frac{5\beta + \sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha}, \frac{\alpha^2}{\beta^2} \leq \frac{25}{24}$$

$$a_0 = \frac{10\mu\beta - \alpha}{20\mu}, a_1 = \frac{12\alpha\mu}{5}, a_2 = \frac{6\alpha\mu}{5}, b_1 = b_2 = 0, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$
$$\mu = \frac{5\beta - \sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha}, \frac{\alpha^2}{\beta^2} \leq \frac{25}{24}$$

$$a_0 = \frac{30\mu\beta - 3\alpha}{20\mu}, a_1 = \frac{12\alpha\mu}{5}, a_2 = \frac{6\alpha\mu}{5}, b_1 = b_2 = 0, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$
$$\mu = \frac{-5\beta + \sqrt{25\beta^2 + 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{20\mu\beta - \alpha}{16\mu}, a_1 = b_1 = \frac{12\alpha\mu}{5}, a_2 = b_2 = \frac{3\alpha\mu}{5}, V = \frac{\alpha}{20\mu},$$
$$\mu = \frac{-5\beta + \sqrt{25\beta^2 + 24\alpha^2}}{48\alpha}$$

$$a_0 = \frac{60\mu\beta - 3\alpha}{80\mu}, a_1 = b_1 = \frac{12\alpha\mu}{5}, a_2 = b_2 = \frac{3\alpha\mu}{5}, V = \frac{\alpha}{20\mu},$$
$$\mu = \frac{5\beta + \sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{48\alpha}, \frac{\alpha^2}{\beta^2} \leq \frac{25}{24}$$

$$a_0 = \frac{60\mu\beta - 3\alpha}{80\mu}, a_1 = b_1 = \frac{12\alpha\mu}{5}, a_2 = b_2 = \frac{3\alpha\mu}{5}, V = \frac{\alpha}{20\mu},$$
$$\mu = \frac{5\beta - \sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{48\alpha}, \frac{\alpha^2}{\beta^2} \leq \frac{25}{24}$$

$$a_0 = \frac{30\mu\beta - 3\alpha}{20\mu}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = \frac{12\alpha\mu}{5}, b_2 = \frac{6\alpha\mu}{5}, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$
$$\mu = \frac{-5\beta + \sqrt{25\beta^2 + 24\alpha^2}}{24\alpha}$$

$$a_0 = \frac{10\mu\beta - \alpha}{20\mu}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = \frac{12\alpha\mu}{5}, b_2 = \frac{6\alpha\mu}{5}, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$
$$\mu = \frac{5\beta + \sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha}, \frac{\alpha^2}{\beta^2} \leq \frac{25}{24}$$

$$a_0 = \frac{10\mu\beta - \alpha}{20\mu}, a_1 = a_2 = 0, b_1 = \frac{12\alpha\mu}{5}, b_2 = \frac{6\alpha\mu}{5}, V = \frac{\alpha}{10\mu},$$
$$\mu = \frac{5\beta - \sqrt{25\beta^2 - 24\alpha^2}}{24\alpha}, \frac{\alpha^2}{\beta^2} \leq \frac{25}{24}$$

Bu çözümler yardımıyla kısmi türevli diferansiyel denklemin analitik çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_1(x,t) = \frac{10\mu\beta - \alpha}{20\mu} + \frac{12a\mu}{5}\tanh\mu(x - Vt) + \frac{6a\mu}{5}\tanh^2\mu(x - Vt)$$
$$u_2(x,t) = \frac{10\mu\beta - \alpha}{20\mu} + \frac{12a\mu}{5}\tanh\mu(x - Vt) + \frac{6a\mu}{5}\tanh^2\mu(x - Vt)$$
$$u_3(x,t) = \frac{30\mu\beta - 3\alpha}{20\mu} + \frac{12a\mu}{5}\tanh\mu(x - Vt) + \frac{6a\mu}{5}\tanh^2\mu(x - Vt)$$

$$u_4(x,t) = \frac{20\mu\beta - \alpha}{16\mu} + \frac{12a\mu}{5}\tanh\mu(x - Vt) + \frac{3a\mu}{5}\tanh^2\mu(x - Vt)$$
$$+ \frac{12a\mu}{5}\coth\mu(x - Vt) + \frac{3a\mu}{5}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_5(x,t) = \frac{60\mu\beta - 3\alpha}{80\mu} + \frac{12a\mu}{5}\tanh\mu(x - Vt) + \frac{3a\mu}{5}\tanh^2\mu(x - Vt)$$
$$+ \frac{12a\mu}{5}\coth\mu(x - Vt) + \frac{3a\mu}{5}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_6(x,t) = \frac{60\mu\beta - 3\alpha}{80\mu} + \frac{12a\mu}{5}\tanh\mu(x - Vt) + \frac{3a\mu}{5}\tanh^2\mu(x - Vt)$$
$$+ \frac{12a\mu}{5}\coth\mu(x - Vt) + \frac{3a\mu}{5}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_7(x,t) = \frac{30\mu\beta - 3\alpha}{20\mu} + \frac{12a\mu}{5}\coth\mu(x - Vt) + \frac{6a\mu}{5}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_8(x,t) = \frac{10\mu\beta - \alpha}{20\mu} + \frac{12a\mu}{5}\coth\mu(x - Vt) + \frac{6a\mu}{5}\coth^2\mu(x - Vt)$$

$$u_9(x,t) = \frac{10\mu\beta - \alpha}{20\mu} + \frac{12a\mu}{5}\coth\mu(x - Vt) + \frac{6a\mu}{5}\coth^2\mu(x - Vt)$$

4.6.3. $\boldsymbol{g(u) = \frac{u^3}{3}}$ alındığında oluşan BBMB denklemi

$\xi = x - Vt$ dalga değişkeni yardımıyla elde edilen adi türevli diferansiyel denklem

$$-3VU + 3VU'' - 3\alpha U' + 3\beta U + U^3 = 0 \qquad \textbf{(4.22)}$$

şeklindedir. M tamsayısının bulunabilmesi için (4.22) de U'' ve U^3 terimleri dengelenir ve $M = 1$ bulunur. Tanh-coth yönteme göre aranan çözümler $Y = \tanh\mu\xi$ olmak üzere

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{1} a_k Y^k + \sum_{k=1}^{1} b_k Y^{-k} \qquad \textbf{(4.23)}$$

formundadır. (4.23) ansatzı (4.22) denkleminde yazılırsa Y ye göre bir cebirsel denklemi elde edilir. Bu denklemin katsayıları sıfıra eşitlenirse

$Y^6 :\ a_1{}^3 + 6Va_1\mu^2 = 0$

Y^5 : $3a_0{a_1}^2 + 3\alpha\mu a_1 = 0$

Y^4 : $3a_1\beta + 3{a_0}^2a_1 + 3{a_1}^2b_1 - 3Va_1 - 6Va_1\mu^2 = 0$

Y^3 : $3a_0\beta - 3Va_0 + {a_0}^3 - 3a_1\alpha\mu - 3b_1\alpha\mu + 6a_0a_1b_1 = 0$

Y^2 : $3b_1\beta + 3{a_0}^2b_1 + 3a_1{b_1}^2 - 3Vb_1 - 6Vb_1\mu^2 = 0$

Y^1 : $3a_0{b_1}^2 + 3\alpha\mu b_1 = 0$

Y^0 : ${b_1}^3 + 6Vb_1\mu^2 = 0$

şeklinde bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin reel çözümleri $\frac{\alpha^2}{\beta^2} \leq \frac{9}{8}$ için

$$a_0 = \sqrt{\alpha\mu}, a_1 = 0, b_1 = -\sqrt{\alpha\mu}, V = \frac{4\alpha(\beta + \mu\alpha)}{\alpha - 2\mu\beta}, \mu = -\frac{3\beta + \sqrt{9\beta^2 - 8\alpha^2}}{8\alpha},$$

$\mu > 0$

$$a_0 = -\sqrt{\alpha\mu}, a_1 = 0, b_1 = \sqrt{\alpha\mu}, V = \frac{4\alpha(\beta + \mu\alpha)}{\alpha - 2\mu\beta}, \mu = -\frac{3\beta + \sqrt{9\beta^2 - 8\alpha^2}}{8\alpha},$$

$\mu > 0$

$$a_0 = -\sqrt{-\alpha\mu}, a_1 = 0, b_1 = \sqrt{-\alpha\mu}, V = -\frac{4\alpha(-\beta + \mu\alpha)}{3(\alpha + 2\mu\beta)},$$

$$\mu = \frac{3\beta + \sqrt{9\beta^2 - 8\alpha^2}}{8\alpha}, \mu < 0$$

$$a_0 = \sqrt{-\alpha\mu}, a_1 = 0, b_1 = -\sqrt{-\alpha\mu}, V = -\frac{4\alpha(-\beta + \mu\alpha)}{3(\alpha + 2\mu\beta)},$$

$$\mu = \frac{3\beta + \sqrt{9\beta^2 - 8\alpha^2}}{8\alpha}, \mu < 0$$

$$a_0 = -\sqrt{-\alpha\mu}, a_1 = \sqrt{-\alpha\mu}, b_1 = 0, V = -\frac{4\alpha(-\beta + \mu\alpha)}{3(\alpha + 2\mu\beta)},$$

$$\mu = \frac{3\beta + \sqrt{9\beta^2 - 8\alpha^2}}{8\alpha}, \mu < 0$$

$$a_0 = \sqrt{-\alpha\mu}, a_1 = -\sqrt{-\alpha\mu}, b_1 = 0, V = -\frac{4\alpha(-\beta+\mu\alpha)}{3(\alpha+2\mu\beta)},$$

$$\mu = \frac{3\beta+\sqrt{9\beta^2-8\alpha^2}}{8\alpha}, \mu < 0$$

$$a_0 = \sqrt{\alpha\mu}, a_1 = -\sqrt{\alpha\mu}, b_1 = 0, V = \frac{4\alpha(\beta+\mu\alpha)}{3(\alpha-2\mu\beta)}, \mu = -\frac{3\beta+\sqrt{9\beta^2-8\alpha^2}}{8\alpha},$$

$$\mu > 0$$

$$a_0 = -\sqrt{\alpha\mu}, a_1 = \sqrt{\alpha\mu}, b_1 = 0, V = \frac{4\alpha(\beta+\mu\alpha)}{3(\alpha-2\mu\beta)}, \mu = -\frac{3\beta+\sqrt{9\beta^2-8\alpha^2}}{8\alpha},$$

$$\mu > 0$$

$$a_0 = \sqrt{-2\alpha\mu}, a_1 = b_1 = -\frac{\sqrt{-2\alpha\mu}}{2}, V = -\frac{8\alpha^2\mu}{3(\alpha-12\mu\beta)},$$

$$\mu = \frac{3\beta+\sqrt{9\beta^2-8\alpha^2}}{16\alpha}, \mu < 0$$

$$a_0 = -\sqrt{-2\alpha\mu}, a_1 = b_1 = \frac{\sqrt{-2\alpha\mu}}{2}\sqrt{-2\alpha\mu}, V = -\frac{8\alpha^2\mu}{3(\alpha-12\mu\beta)},$$

$$\mu = \frac{3\beta+\sqrt{9\beta^2-8\alpha^2}}{16\alpha}, \mu < 0$$

$$a_0 = \sqrt{2\alpha\mu}, a_1 = b_1 = -\frac{\sqrt{2\alpha\mu}}{2}, V = \frac{8\alpha^2\mu}{3(\alpha+12\mu\beta)},$$

$$\mu = -\frac{3\beta+\sqrt{9\beta^2-8\alpha^2}}{16\alpha}, \mu > 0$$

$$a_0 = -\sqrt{2\alpha\mu}, a_1 = b_1 = \frac{\sqrt{2\alpha\mu}}{2}, V = \frac{8\alpha^2\mu}{3(\alpha+12\mu\beta)},$$

$$\mu = -\frac{3\beta+\sqrt{9\beta^2-8\alpha^2}}{16\alpha}, \mu > 0$$

şeklindedir. Elde edilen bu katsayıların sırası ile kullanılması sonucunda denklemin tanh-coth formdaki tam çözümleri

$$u_1(x,t) = \sqrt{\alpha\mu} - \sqrt{\alpha\mu}\coth\mu(x - Vt)$$
$$u_2(x,t) = -\sqrt{\alpha\mu} + \sqrt{\alpha\mu}\coth\mu(x - Vt)$$
$$u_3(x,t) = -\sqrt{-\alpha\mu} + \sqrt{-\alpha\mu}\coth\mu(x - Vt)$$
$$u_4(x,t) = \sqrt{-\alpha\mu} - \sqrt{-\alpha\mu}\coth\mu(x - Vt)$$
$$u_5(x,t) = -\sqrt{-\alpha\mu} + \sqrt{-\alpha\mu}\tanh\mu(x - Vt)$$
$$u_6(x,t) = \sqrt{-\alpha\mu} - \sqrt{-\alpha\mu}\tanh\mu(x - Vt)$$
$$u_7(x,t) = \sqrt{-\alpha\mu} - \sqrt{-\alpha\mu}\tanh\mu(x - Vt)$$
$$u_8(x,t) = -\sqrt{-\alpha\mu} + \sqrt{-\alpha\mu}\tanh\mu(x - Vt)$$
$$u_9(x,t) = \sqrt{-2\alpha\mu} - \frac{\sqrt{-2\alpha\mu}}{2}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{\sqrt{-2\alpha\mu}}{2}\coth\mu(x - Vt)$$
$$u_{10}(x,t) = -\sqrt{-2\alpha\mu} - \frac{\sqrt{-2\alpha\mu}}{2}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{\sqrt{-2\alpha\mu}}{2}\coth\mu(x - Vt)$$
$$u_{11}(x,t) = \sqrt{2\alpha\mu} - \frac{\sqrt{2\alpha\mu}}{2}\tanh\mu(x - Vt) - \frac{\sqrt{2\alpha\mu}}{2}\coth\mu(x - Vt)$$
$$u_{12}(x,t) = -\sqrt{2\alpha\mu} + \frac{\sqrt{2\alpha\mu}}{2}\tanh\mu(x - Vt) + \frac{\sqrt{2\alpha\mu}}{2}\coth\mu(x - Vt)$$

şeklinde elde edilir.

4.7. Benney-Luke Denkleminin Çözümü

Daha önce de ifade edildiği gibi Benney-Luke denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} + au_{xxxx} - bu_{xxtt} + u_t u_{xx} + 2u_x u_{xt} = 0 \qquad \textbf{(4.24)}$$

şeklindedir. σ parametresi Bond Sayısı olarak adlandırılmakta, a ve b pozitif tamsayıları arasında $a - b = \sigma - 1/3$ ilişkisi vardır. Denklemi $\tanh - \coth$ yöntemi yardımıyla çözmek için daha önce de yapıldığı gibi $u(x,t) = U(\mu\xi)$ için dalga değişkeni $\xi = x - Vt$ yardımıyla (4.24) Benney-Luke denklemi

$$(V^2-1)U''+(a-bV^2)U''''-3VU'U''=0 \tag{4.25}$$

şeklinde adi türevli bir diferansiyel denkleme dönüşür. M nin elde edilebilmesi için (4.25) te U'''' ve $U'U''$ terimleri dengelenirse $M=1$ elde edilir. Yönteme göre aranacak çözümler

$$U(\mu\xi)=S(Y)=\sum_{k=0}^{1}a_k\,Y^k+\sum_{k=1}^{1}b_k\,Y^{-k} \tag{4.26}$$

şeklinde olacaktır. (4.26) sonlu serisi (4.25) te yazıldığında oluşan denklem Y nin kuvvetlerine göre düzenlenirse a_0, a_1, b_1 ve V katsayılarına bağlı aşağıdaki denklem sistemi elde edilecektir:

$Y^{10}:\ -24bV^2a_1\mu^4+24Va_1{}^2\mu^3+24aa_1\mu^4=0$

$Y^9:\ 18Va_0a_1\mu^3=0$

$Y^8:\ -40bV^2a_1\mu^4-2V^2a_1\mu^2+36Va_1{}^2\mu^3-12b_1Va_1\mu^3+40aa_1\mu^4+2a_1\mu^2=0$

$Y^7:\ 24Va_0a_1\mu^3=0$

$Y^6:\ -16bV^2a_1\mu^4-2V^2a_1\mu^2+12Va_1{}^2\mu^3-12b_1Va_1\mu^3+16aa_1\mu^4+2a_1\mu^2=0$

$Y^5:\ 6Va_0a_1\mu^3+6Va_0b_1\mu^3=0$

$Y^4:\ -16bV^2b_1\mu^4-2V^2b_1\mu^2+12Vb_1{}^2\mu^3-12a_1Vb_1\mu^3+16ab_1\mu^4+2b_1\mu^2=0$

$Y^3:\ 24Va_0b_1\mu^3=0$

$Y^2:\ -40bV^2b_1\mu^4-2V^2b_1\mu^2+36Vb_1{}^2\mu^3-12a_1Vb_1\mu^3+40ab_1\mu^4+2b_1\mu^2=0$

$Y^1:\ 18Va_0b_1\mu^3=0$

$Y^0:\ 24Vb_1{}^2\mu^3+24ab_1\mu^4-24V^2bb_1\mu^4\ =0$

Maple yardımıyla bu sistemin çözümü μ serbest parametre olmak üzere

$$a_0=\ b_1=0, a_1=\frac{(-a+b)\mu}{V(2\mu^2b+1)}, V=\pm\sqrt{\frac{2\mu^2a+1}{2\mu^2b+1}}$$

$$a_0=\ a_1=0, b_1=\frac{(-a+b)\mu}{V(2\mu^2b+1)}, V=\pm\sqrt{\frac{2\mu^2a+1}{2\mu^2b+1}}$$

$$a_0 = 0, a_1 = b_1 = \frac{(-a+b)\mu}{V(8\mu^2 b+1)}, V = \pm\sqrt{\frac{8\mu^2 a+1}{8\mu^2 b+1}}$$

şeklindedir. Bu katsayılar yardımıyla Benney-Luke denkleminin hareketli dalga çözümleri

$$u_1(x,t) = \sqrt{\frac{2\mu^2 b+1}{2\mu^2 a+1}}\left(\frac{(-a+b)\mu}{2\mu^2 b+1}\right)\tanh\mu\left(x \mp \sqrt{\frac{2\mu^2 a+1}{2\mu^2 b+1}}t\right)$$

$$u_2(x,t) = \sqrt{\frac{2\mu^2 b+1}{2\mu^2 a+1}}\left(\frac{(-a+b)\mu}{2\mu^2 b+1}\right)\coth\mu\left(x \mp \sqrt{\frac{2\mu^2 a+1}{2\mu^2 b+1}}t\right)$$

$$u_3(x,t) = \sqrt{\frac{8\mu^2 b+1}{8\mu^2 a+1}}\left(\frac{(-a+b)\mu}{2\mu^2 b+1}\right)\tanh\mu\left(x \mp \sqrt{\frac{8\mu^2 a+1}{8\mu^2 b+1}}t\right) + \sqrt{\frac{8\mu^2 b+1}{8\mu^2 a+1}}\left(\frac{(-a+b)\mu}{2\mu^2 b+1}\right)\coth\mu\left(x \mp \sqrt{\frac{8\mu^2 a+1}{8\mu^2 b+1}}t\right)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

4.8. Yüksek Mertebeden Geliştirilmiş Boussinesq Denkleminin Çözümü

$$-\alpha u_{xxxxtt} + \beta u_{xxtt} - u_{tt} + u_{xx} + \mu u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0 \quad \textbf{(4.27)}$$

şeklinde verilen denkleme geliştirilmiş Boussinesq denklemi denir. Denklemde α ve β sıfırdan farklı reel sabitlerdir. $u(x,t) = U(\mu\xi)$ dalga transformasyonu ile beraber $\xi = x - Vt$ dalga değişkeni kullanılırsa yukarıdaki kısmi türevli diferansiyel denklem

$$-\alpha V^2 U'''' + \beta V^2 U'' + (1 - V^2)U + U^2 = 0 \quad \textbf{(4.28)}$$

şeklinde bir adi türevli diferansiyel denkleme dönüşür. (4.28) denkleminde birinci ve son terimlerin dengelenmesi sonucunda $M = 4$ bulunacağından tanh − coth yöntemi gereği

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{4} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{4} b_k\, Y^{-k} \qquad \textbf{(4.29)}$$

şeklindeki sonlu seri çözümlerin aranması gerekir. (4.29) sonlu serisi (4.28) adi türevli diferansiyel denkleminde yazıldığında $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, \mu$ ve V katsayılarına bağlı aşağıdaki cebirsel denklem sistemi elde edilir:

Y^{16}: $a_4{}^2 - 840V^2 a_4 \alpha\mu^4 = 0$

Y^{15}: $2a_4a_3 - 360V^2 a_3\alpha\mu^4 = 0$

Y^{14}: $2a_4a_2 + a_3{}^2 + 20V^2a_4\beta\mu^2 + 2080V^2a_4\alpha\mu^4 - 120V^2a_2\alpha\mu^4 = 0$

Y^{13} : $2a_4a_1 + 2a_3a_2 + 12V^2a_3\beta\mu^2 + 816V^2a_3\alpha\mu^4 - 24V^2a_1\alpha\mu^4 = 0$

Y^{12} : $240\alpha V^2a_2\mu^4 + 6\beta V^2a_2\mu^2 - 1696a_4\alpha V^2\mu^4 - 32a_4\beta V^2\mu^2 - a_4V^2 + a_2{}^2 + a_4 + 2a_4a_0 + 2a_3a_1 = 0$

Y^{11} : $a_3 - V^2a_3 + 2a_4b_1 + 2a_3a_0 + 2a_1a_2 - 18V^2a_3\beta\mu^2 - 576V^2a_3\alpha\mu^4 + 2V^2a_1\beta\mu^2 + 40V^2a_1\alpha\mu^4 = 0$

Y^{10} : $a_2 - V^2a_2 + 2a_4b_2 + 2b_1a_3 + 2a_0a_2 + a_1{}^2 + 12V^2a_4\beta\mu^2 + 480V^2a_4\alpha\mu^4 - 8V^2a_2\beta\mu^2 - 136V^2a_2\alpha\mu^4 = 0$

Y^9 : $a_1 - V^2a_1 + 2a_4b_3 + 2b_2a_3 + 2b_1a_2 + 2a_0a_1 + 6V^2a_3\beta\mu^2 + 120V^2a_3\alpha\mu^4 - 2V^2a_1\beta\mu^2 - 16V^2a_1\alpha\mu^4 = 0$

Y^8 : $a_0 - V^2a_0 + 2a_4b_4 + 2b_3a_3 + 2b_1a_1 + 2b_2a_2 + a_0{}^2 - 24V^2a_4\alpha\mu^4 + 2V^2b_2\beta\mu^2 + 16V^2b_2\alpha\mu^4 - 24V^2b_4\alpha\mu^4 + 2V^2a_2\beta\mu^2 + 16V^2a_2\alpha\mu^4 + 16V^2b_2\alpha\mu^4 - 24V^2b_4\alpha\mu^4 + 2V^2a_2\beta\mu^2 + 16V^2a_2\alpha\mu^4 = 0$

Y^7 : $b_1 - V^2b_1 + 2b_4a_3 + 2b_1a_0 + 2b_2a_1 + 2b_3a_2 - 2V^2b_1\beta\mu^2 - 16V^2b_1\alpha\mu^4 + 6V^2b_3\beta\mu^2 + 120V^2b_3\alpha\mu^4 = 0$

Y^6 : $b_2 - V^2b_2 + 2b_2a_0 + 2b_3a_1 + 2b_4a_2 + b_1{}^2 - 8V^2b_2\beta\mu^2 - 136V^2b_2\alpha\mu^4 + 12V^2b_4\beta\mu^2 + 480V^2b_4\alpha\mu^4 = 0$

Y^5 : $b_3 - V^2b_3 + 2b_1b_2 + 2b_3a_0 + 2b_4a_1 + 2V^2b_1\beta\mu^2 + 40V^2b_1\alpha\mu^4 - 18V^2b_3\beta\mu^2 - 576V^2b_3\alpha\mu^4 = 0$

$$Y^4: \ 240\alpha V^2 b_2\mu^4 + 6\beta V^2 b_2\mu^2 - 1696 b_4\alpha V^2\mu^4 - 32 b_4\beta V^2\mu^2 - b_4V^2 + b_2{}^2 + b_4 + 2b_1b_3 + 2b_4a_0 = 0$$

$$Y^3: \ 2b_1b_4 + 2b_2b_3 - 24V^2b_1\alpha\mu^4 + 12V^2b_3\beta\mu^2 + 816V^2b_3\alpha\mu^4 = 0$$

$$Y^2: \ 2b_2b_4 + b_3{}^2 - 120V^2b_2\alpha\mu^4 + 20V^2b_4\beta\mu^2 + 2080V^2b_4\alpha\mu^4 = 0$$

$$Y^1: \ 2b_3b_4 - 360V^2b_3\alpha\mu^4 = 0$$

$$Y^0: \ b_4{}^2 - 840V^2b_4\alpha\mu^4 = 0$$

Bu sistemin çözümü

$$a_0 = a_4 = \frac{105\beta^2}{2(-36\beta^2 + 169\alpha)}, a_2 = \frac{-105\beta^2}{-36\beta^2 + 169\alpha},$$

$$a_1 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0, V = \pm\frac{13}{\sqrt{-1872\mu^2\beta + 169}}, \mu = \pm\frac{1}{26}\sqrt{\frac{13\beta}{\alpha}}$$

$$a_0 = \frac{33\beta^2}{2(36\beta^2 + 169\alpha)}, a_2 = \frac{-105\beta^2}{36\beta^2 + 169\alpha}, a_4 = \frac{105\beta^2}{2(36\beta^2 + 169\alpha)},$$

$$a_1 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0, V = \pm\frac{13}{\sqrt{1872\mu^2\beta + 169}}, \mu = \pm\frac{1}{26}\sqrt{\frac{13\beta}{\alpha}}$$

$$a_0 = \frac{105\beta^2}{2(-36\beta^2 + 169\alpha)}, b_2 = \frac{-105\beta^2}{-36\beta^2 + 169\alpha}, b_4 = \frac{105\beta^2}{2(-36\beta^2 + 169\alpha)},$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = b_1 = b_3 = 0, V = \pm\frac{13}{\sqrt{-1872\mu^2\beta + 169}}, \mu = \pm\frac{1}{26}\sqrt{\frac{13\beta}{\alpha}}$$

$$a_0 = \frac{33\beta^2}{2(36\beta^2 + 169\alpha)}, b_2 = \frac{-105\beta^2}{36\beta^2 + 169\alpha}, b_4 = \frac{105\beta^2}{2(36\beta^2 + 169\alpha)},$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = b_1 = b_3 = 0, V = \pm\frac{13}{\sqrt{1872\mu^2\beta + 169}}, \mu = \pm\frac{1}{26}\sqrt{\frac{13\beta}{\alpha}}$$

$$a_0 = \frac{315\beta^2}{16(-36\beta^2 + 169\alpha)}, a_2 = b_2 = \frac{-105\beta^2}{8(-36\beta^2 + 169\alpha)},$$

$$a_4 = b_4 = \frac{105\beta^2}{32(-36\beta^2 + 169\alpha)}, a_1 = a_3 = b_1 = b_3 = 0,$$

$$V = \pm\frac{13}{\sqrt{-7488\mu^2\beta + 169}}, \mu = \pm\frac{1}{52}\sqrt{\frac{13\beta}{\alpha}}$$

$$a_0 = \frac{-261\beta^2}{16(36\beta^2 + 169\alpha)}, a_2 = b_2 = \frac{-105\beta^2}{8(36\beta^2 + 169\alpha)},$$

$$a_4 = b_4 = \frac{105\beta^2}{32(36\beta^2 + 169\alpha)},\ a_1 = a_3 = b_1 = b_3 = 0,$$

$$V = \pm\frac{13}{\sqrt{7488\mu^2\beta + 169}}, \mu = \pm\frac{1}{52}\sqrt{\frac{13\beta}{\alpha}}$$

şeklindedir. Bu katsayılar kullanılırsa denklemin tam çözümleri aşağıdaki gibi elde edilmiş olur:

$$u_1(x,t) = \left(\frac{105\beta^2}{2(-36\beta^2 + 169\alpha)}\right) - \left(\frac{105\beta^2}{-36\beta^2 + 169\alpha}\right)\tanh^2\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{-1872\mu^2\beta + 169}}\right)t\right)$$

$$u_2(x,t) = \left(\frac{33\beta^2}{2(36\beta^2 + 169\alpha)}\right) - \left(\frac{105\beta^2}{36\beta^2 + 169\alpha}\right)\tanh^2\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{1872\mu^2\beta + 169}}\right)t\right) + \left(\frac{105\beta^2}{2(36\beta^2 + 169\alpha)}\right)\tanh^4\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{1872\mu^2\beta + 169}}\right)t\right)$$

$$u_3(x,t) = \left(\frac{105\beta^2}{2(-36\beta^2 + 169\alpha)}\right) - \left(\frac{105\beta^2}{-36\beta^2 + 169\alpha}\right)\coth^2\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{-1872\mu^2\beta + 169}}\right)t\right) + \left(\frac{105\beta^2}{2(-36\beta^2 + 169\alpha)}\right)\coth^4\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{-1872\mu^2\beta + 169}}\right)t\right)$$

$$u_4(x,t) = \left(\frac{33\beta^2}{2(36\beta^2+169\alpha)}\right) - \left(\frac{105\beta^2}{36\beta^2+169\alpha}\right)\coth^2\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{1872\mu^2\beta+169}}\right)t\right) + \left(\frac{105\beta^2}{2(36\beta^2+169\alpha)}\right)\coth^4\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{1872\mu^2\beta+169}}\right)t\right)$$

$$u_5(x,t) = \left(\frac{315\beta^2}{16(-36\beta^2+169\alpha)}\right) - \left(\frac{105\beta^2}{8(-36\beta^2+169\alpha)}\right)\tanh^2\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{-7488\mu^2\beta+169}}\right)t\right) - \left(\frac{105\beta^2}{8(-36\beta^2+169\alpha)}\right)\coth^2\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{-7488\mu^2\beta+169}}\right)t\right) + \left(\frac{105\beta^2}{32(-36\beta^2+169\alpha)}\right)\tanh^4\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{-7488\mu^2\beta+169}}\right)t\right) + \left(\frac{105\beta^2}{32(-36\beta^2+169\alpha)}\right)\coth^4\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{-7488\mu^2\beta+169}}\right)t\right)$$

$$u_6(x,t) = -\left(\frac{261\beta^2}{16(36\beta^2+169\alpha)}\right) - \left(\frac{105\beta^2}{8(36\beta^2+169\alpha)}\right)\tanh^2\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{7488\mu^2\beta+169}}\right)t\right) - \left(\frac{105\beta^2}{8(36\beta^2+169\alpha)}\right)\coth^2\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{7488\mu^2\beta+169}}\right)t\right) + \left(\frac{105\beta^2}{32(36\beta^2+169\alpha)}\right)\tanh^4\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{7488\mu^2\beta+169}}\right)t\right) + \left(\frac{105\beta^2}{32(36\beta^2+169\alpha)}\right)\coth^4\mu\left(x \mp \left(\frac{13}{\sqrt{7488\mu^2\beta+169}}\right)t\right)$$

4.9. Sobolev Türü Denklem Sistemlerinin Çözümü

Tanh – coth yöntemi, Sobolev türü denklem sistemlerinin çözümünde de etkin ve kolay bir şekilde kullanılabilir. Çözüm yöntemi diğer denklemlerde olduğu gibi önce bir ansatz belirleme ve sonra da bu ansatzda yer alan tüm katsayıların Maple gibi bir hesaplama programı yardımıyla elde edilmesi mantığına dayanır. Denklem sistemlerinde sistemi oluşturan birden fazla denklem olacaktır. Bu denklemlerin aynı anda tek bir denklem gibi çözümü yapılarak asıl denklemin çözümü elde edilir. Yöntemin Sobolev türü denklem sistemlerinin tam çözümlerini elde etmede nasıl kullanıldığı birkaç tane Sobolev türü denklem sistemi üzerinde anlatılacaktır.

4.9.1. Rosenau denklem sisteminin çözümü

Rosenau tarafından ortaya atılan bu Sobolev türü denklem sistemi, α, β pozitif reel sabitler olmak üzere

$$u_{tt} = (u + 2\alpha uw)_{xx} + \frac{1}{12} u_{xxtt},$$
$$w_{tt} = (2w + \beta w^2 + \alpha u^2)_{xx} + \frac{1}{12} w_{xxtt}, \tag{4.30}$$

şeklinde ifade edilmektedir. $\xi = x - Vt$ dalga değişkeni kullanılır ve her iki denklemde de iki kez integral alınıp denklem düzenlenirse

$$12(V^2 - 1)U - 24\alpha UW - V^2 U'' = 0$$
$$12(V^2 - 2)W - 12\beta W^2 - 12\alpha U^2 - V^2 W'' = 0 \tag{4.31}$$

şeklinde bir adi türevli diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Daha önce de olduğu gibi oluşan integral sabitleri sıfır kabul edilmiştir. (4.31) adi türevli diferansiyel denkleminin

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k + \sum_{k=1}^{M} b_k Y^{-k}$$
$$W(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{N} c_k Y^k + \sum_{k=1}^{N} d_k Y^{-k} \tag{4.32}$$

şeklinde seri çözümleri olduğu kabul edilsin. (4.31) de V^2U'' ile UW ve V^2W'' ile U^2 dengelenirse

$$M+2 = M+N,$$
$$2M = N+2$$

şeklinde bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü $M=N=2$ olduğundan tanh − coth yöntemine göre aranan seri çözümler

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \textstyle\sum_{k=0}^{2} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} b_k\, Y^{-k}$$
$$W(\mu\xi) = S(Y) = \textstyle\sum_{k=0}^{2} c_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} d_k\, Y^{-k} \tag{4.33}$$

şeklindedir. (4.33) deki her iki seri (4.31) denklem sistemindeki her iki denklemde yerine yazılırsa $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, d_1, d_2, V$ ve μ ye bağlı bir denklem elde edilecektir. Bu denklemin çözümü

$$a_0 = -\frac{a^2}{3}, a_2 = \frac{3\sqrt{\alpha\beta(V^4-3V^2+2)}}{4\alpha^2}, c_0 = \frac{\beta+4\alpha}{8\alpha(\alpha-\beta)}, c_2 = \frac{-3\beta}{8\alpha(\alpha-\beta)},$$
$$V = \frac{6}{\sqrt{-6\mu^2+18}}, \mu = \frac{\sqrt{3\beta(-3\beta+4\alpha)}}{-3\beta+4\alpha}, a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0,$$

$$a_0 = -2b^2, a_2 = \frac{9\beta^2(2\alpha-\beta)}{1024\alpha^3 b^2(\alpha-\beta)^2}, b_2 = \frac{3\sqrt{\alpha\beta(V^4-3V^2+2)}}{16\alpha^2}, c_0$$
$$= \frac{-3\beta+8\alpha}{16\alpha(\alpha-\beta)}, c_2 = \left(\frac{3\beta}{32\alpha(\alpha-\beta)}\right), d_2 = c_2,$$
$$V = \frac{6}{\sqrt{24\mu^2+18}}, \mu = \frac{\sqrt{\beta(9\beta-12\alpha)}}{-6\beta+8\alpha}, a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0,$$

$$a_0 = \frac{2b^2}{3}, a_2 = \frac{9\beta^2(2\alpha-\beta)}{1024\alpha^3 b^2(\alpha-\beta)^2}, b_2 = \frac{3\sqrt{\alpha\beta(V^4-3V^2+2)}}{16\alpha^2}, c_0$$
$$= \frac{-\beta+8\alpha}{16\alpha(\alpha-\beta)}, c_2 = \frac{-3\beta}{32\alpha(\alpha-\beta)}, d_2 = c_2,$$
$$V = \frac{6}{\sqrt{-24\mu^2+18}}, \mu = \frac{\sqrt{3\beta(-3\beta+4\alpha)}}{-6\beta+8\alpha}, a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0,$$

$$a_0 = \frac{-9\beta^2(2\alpha-\beta)}{64\alpha^3 a^2(\alpha-\beta)^2}, a_2 = \frac{3\sqrt{\alpha\beta(V^4-3V^2+2)}}{4\alpha^2}, c_0 = \frac{-3\beta+4\alpha}{8\alpha(\alpha-\beta)}, c_2 = \frac{3\beta}{8\alpha(\alpha-\beta)}, V = \frac{6}{\sqrt{6\mu^2+18}},$$

$$\mu = \frac{\sqrt{\beta(9\beta-12\alpha)}}{-3\beta+4\alpha}, a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0$$

şeklindedir. Bu katsayılar yardımıyla (4.30) denklem sisteminin tam çözümleri

$$u_1(x,t) = -\frac{\sqrt{\alpha\beta(V^4-3V^2+2)}}{4\alpha^2} + \frac{3\sqrt{\alpha\beta(V^4-3V^2+2)}}{4\alpha^2}\tanh^2\left(\frac{\sqrt{3\beta(-3\beta+4\alpha)}}{-3\beta+4\alpha}\right)\left(x - \left(\frac{6}{\sqrt{-6\mu^2+18}}\right)t\right),$$

$$w_1(x,t) = \frac{\beta+4\alpha}{8\alpha(\alpha-\beta)} - \frac{3\beta}{8\alpha(\alpha-\beta)}\tanh^2\left(\frac{\sqrt{3\beta(-3\beta+4\alpha)}}{-3\beta+4\alpha}\right)\left(x - \left(\frac{6}{\sqrt{-6\mu^2+18}}\right)t\right)$$

$$u_2(x,t) = -\frac{3\sqrt{\alpha\beta(V^4-3V^2+2)}}{8\alpha^2} + \frac{9\beta^2(2\alpha-\beta)}{1024\alpha^3 b^2(\alpha-\beta)^2}\tanh^2\frac{\sqrt{\beta(9\beta-12\alpha)}}{-6\beta+8\alpha}\left(x - \left(\frac{6}{\sqrt{24\mu^2+18}}\right)t\right) + \frac{3\sqrt{\alpha\beta(V^4-3V^2+2)}}{16\alpha^2}\coth^2\frac{\sqrt{\beta(9\beta-12\alpha)}}{-6\beta+8\alpha}\left(x - \left(\frac{6}{\sqrt{24\mu^2+18}}\right)t\right),$$

$$w_2(x,t) = \frac{-3\beta+8\alpha}{16\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{3\beta}{32\alpha(\alpha-\beta)}\tanh^2\frac{\sqrt{\beta(9\beta-12\alpha)}}{-6\beta+8\alpha}\left(x-\left(\frac{6}{\sqrt{24\mu^2+18}}\right)t\right) + \frac{3\beta}{32\alpha(\alpha-\beta)}\coth^2\frac{\sqrt{\beta(9\beta-12\alpha)}}{-6\beta+8\alpha}\left(x-\left(\frac{6}{\sqrt{24\mu^2+18}}\right)t\right)$$

$$u_3(x,t) = \frac{\sqrt{\alpha\beta(V^4-3V^2+2)}}{8\alpha^2} + \frac{9\beta^2(2\alpha-\beta)}{1024\alpha^3b^2(\alpha-\beta)^2}\tanh^2\frac{\sqrt{3\beta(-3\beta+4\alpha)}}{-6\beta+8\alpha}\left(x-\frac{6t}{\sqrt{-24\mu^2+18}}\right) + \frac{3\sqrt{\alpha\beta(V^4-3V^2+2)}}{16\alpha^2}\coth^2\frac{\sqrt{3\beta(-3\beta+4\alpha)}}{-6\beta+8\alpha}\left(x-\frac{6t}{\sqrt{-24\mu^2+18}}\right),$$

$$w_3(x,t) = \frac{-\beta+8\alpha}{16\alpha(\alpha-\beta)} - \frac{3\beta}{32\alpha(\alpha-\beta)}\tanh^2\frac{\sqrt{3\beta(-3\beta+4\alpha)}}{-6\beta+8\alpha}\left(x-\left(\frac{6}{\sqrt{-24\mu^2+18}}\right)t\right) - \frac{3\beta}{32\alpha(\alpha-\beta)}\coth^2\frac{\sqrt{3\beta(-3\beta+4\alpha)}}{-6\beta+8\alpha}\left(x-\left(\frac{6}{\sqrt{-24\mu^2+18}}\right)t\right)$$

$$u_4(x,t) = \frac{-9\beta^2(2\alpha-\beta)}{64\alpha^3a^2(\alpha-\beta)^2} + \frac{3\sqrt{\alpha\beta(V^4-3V^2+2)}}{4\alpha^2}\tanh^2\frac{\sqrt{\beta(9\beta-12\alpha)}}{-3\beta+4\alpha}\left(x-\frac{6t}{\sqrt{6\mu^2+18}}\right),$$

$$w_4(x,t) = \frac{-3\beta+4\alpha}{8\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{3\beta}{8\alpha(\alpha-\beta)}\tanh^2\frac{\sqrt{\beta(9\beta-12\alpha)}}{-3\beta+4\alpha}\left(x-\left(\frac{6}{\sqrt{6\mu^2+18}}\right)t\right)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

4.9.2. Christiansen denklem sisteminin çözümü

$$\frac{\rho}{a}u_{tt} = \beta u_{xx} - \frac{\beta^2}{2}(u^2)_{xx} + \frac{\beta}{2}(w^2)_{xx} + \frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}u_{xxtt}$$

(4.34)

$$\frac{\rho}{a}w_{tt} = \beta(uw)_{xx} + \frac{\rho}{a}\frac{l^2}{12}w_{xxtt}$$

şeklinde ifade edilen bu denklem sisteminde α ve β pozitif reel sabitlerdir. $\xi = x - Vt$ dalga değişkeni yardımıyla bu kısmi türevli diferansiyel denklemler

$$12(\alpha\beta - \rho V^2)U - 6\alpha\beta^2 U^2 + 6\alpha\beta W^2 + \rho l^2 V^2 U'' = 0,$$

(4.35)

$$12\alpha\beta UW + \rho l^2 V^2 W'' - 12\rho V^2 W = 0$$

şeklinde adi türevli denklemlere dönüşür. Dengeleme prosedürüne göre, $-6\alpha\beta^2U^2$ ile $\rho l^2V^2U''$ ve $12\alpha\beta UW$ ile $\rho l^2V^2W''$ terimleri dengelenirse

$$2M = M + 2,$$
$$2N = M + N$$

denklem sistemi ve bu denklem sisteminin çözümünden de $M = N = 2$ olarak elde edilir. Bu M ve N değerlerine göre

$$U(\mu\xi) = S_1(Y) = \sum_{k=0}^{2} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} b_k\, Y^{-k}$$

(4.36)

$$W(\mu\xi) = S_2(Y) = \sum_{k=0}^{2} c_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} d_k\, Y^{-k}$$

şeklinde sonlu seri çözümler aranmalıdır. (4.36) sonlu serileri (4.35) adi türevli diferansiyel denklem sisteminde yazılırsa Y ye bağlı bir denklem oluşacaktır. Bu denklemin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile elde edilen tüm cebirsel denklemler aynı anda çözülürse katsayılar

$$a_0 = \frac{1}{\beta+1}, a_2 = \frac{-1}{2(\beta+1)}, b_2 = a_2, d_2 = \pm\frac{\sqrt{\beta+2}}{2(\beta+1)}, c_2 = -d_2,$$

$$V = \frac{\sqrt{3\rho\alpha\beta(\beta+1)}}{3\rho(\beta+1)}, \mu = \frac{\sqrt{3}}{l}, a_1 = b_1 = c_0 = c_1 = d_1 = 0,$$

$$a_0 = \frac{1}{\beta+1}, a_2 = \frac{3\beta}{6\beta^2+14\beta+8}, b_2 = a_2, d_2 = \pm\frac{3\beta\sqrt{\beta+2}}{2(3\beta+4)(\beta+1)},$$

$$c_2 = -d_2, V = \frac{\sqrt{15\rho\alpha\beta(2l^2\mu^2+9\beta+15)}}{\rho(2l^2\mu^2+9\beta+15)}, \mu = \frac{\sqrt{-\beta(15\beta+12)}}{(5\beta+4)l},$$

$$a_1 = b_1 = c_0 = c_1 = d_1 = 0,$$

$$a_0 = \frac{4-\beta}{4(\beta+1)}, a_2 = \frac{3\beta}{4\beta+1}, c_0 = \frac{-c^2}{3}, c_2 = \pm\frac{9\beta}{2\sqrt{6l^2\mu^2+36\beta+18}}$$

$$V = \frac{\sqrt{-3\rho\alpha\beta(-3+l^2\mu^2)}}{\rho(-3+l^2\mu^2)}, \mu = \frac{\sqrt{-\beta(3\beta+6)}}{(\beta+2)l}, a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0,$$

$$a_0 = \frac{3\beta+4}{4(\beta+1)}, a_2 = \frac{-3\beta}{4\beta+1}, c_0 = -c_2, c_2 = \pm\frac{9\beta}{2\sqrt{-6l^2\mu^2+36\beta+18}},$$

$$V = \frac{\sqrt{3\rho\alpha\beta(3+l^2\mu^2)}}{\rho(3+l^2\mu^2)}, \mu = \frac{\sqrt{3\beta(\beta+2)}}{(\beta+2)l}, a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0,$$

$$a_0 = \frac{\beta+8}{8(\beta+1)}, a_2 = \frac{3\beta}{16(\beta+1)}, b_2 = a_2, c_0 = \frac{2d_2}{3}, c_2 = d_2,$$

$$d_2 = \pm\frac{9\beta}{8\sqrt{24l^2\mu^2+36\beta+18}}, V = \frac{\sqrt{-3\rho\alpha\beta(-3+4l^2\mu^2)}}{\rho(-3+4l^2\mu^2)},$$

$$\mu = \frac{\sqrt{-\beta(3\beta+6)}}{2(\beta+2)l}, a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0,$$

$$a_0 = \frac{3(\beta+8)}{8(\beta+1)}, a_2 = \frac{-3\beta}{16(\beta+1)}, b_2 = a_2, c_0 = -2d_2, c_2 = d_2,$$

$$d_2 = \pm\frac{9\beta}{8\sqrt{-24l^2\mu^2+36\beta+18}}, V = \frac{\sqrt{3\rho\alpha\beta(3+4l^2\mu^2)}}{\rho(3+4l^2\mu^2)},$$

$$\mu = \frac{\sqrt{\beta(3\beta+6)}}{2(\beta+2)l}, a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$$

şeklinde elde edilecektir. Bu katsayılara bağlı olarak denklem sisteminin tam çözümleri sırası ile aşağıdaki gibi olur:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\beta+1} - \frac{1}{2(\beta+1)}\tanh^2\frac{\sqrt{3}}{l}\left(x - \frac{\sqrt{3\rho\alpha\beta(\beta+1)}}{3\rho(\beta+1)}t\right)$$
$$- \frac{1}{2(\beta+1)}\coth^2\frac{\sqrt{3}}{l}\left(x - \frac{\sqrt{3\rho\alpha\beta(\beta+1)}}{3\rho(\beta+1)}t\right),$$
$$w_1(x,t) = \mp\frac{\sqrt{\beta+2}}{2(\beta+1)}\tanh^2\frac{\sqrt{3}}{l}\left(x - \frac{\sqrt{3\rho\alpha\beta(\beta+1)}}{3\rho(\beta+1)}t\right)$$
$$\pm\frac{\sqrt{\beta+2}}{2(\beta+1)}\coth^2\frac{\sqrt{3}}{l}\left(x - \frac{\sqrt{3\rho\alpha\beta(\beta+1)}}{3\rho(\beta+1)}t\right)$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{\beta+1}$$
$$+ \frac{3\beta}{6\beta^2+14\beta+8}\tanh^2\frac{\sqrt{-\beta(15\beta+12)}}{(5\beta+4)l}\left(x\right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{15\rho\alpha\beta(2l^2\mu^2+9\beta+15)}}{\rho(2l^2\mu^2+9\beta+15)}t\right)$$
$$+ \frac{3\beta}{6\beta^2+14\beta+8}\coth^2\frac{\sqrt{-\beta(15\beta+12)}}{(5\beta+4)l}\left(x\right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{15\rho\alpha\beta(2l^2\mu^2+9\beta+15)}}{\rho(2l^2\mu^2+9\beta+15)}t\right),$$

$$w_2(x,t) = \mp\frac{3\beta\sqrt{\beta+2}}{2(3\beta+4)(\beta+1)}\tanh^2\frac{\sqrt{-\beta(15\beta+12)}}{(5\beta+4)l}\left(x - \frac{\sqrt{15\rho\alpha\beta(2l^2\mu^2+9\beta+15)}}{\rho(2l^2\mu^2+9\beta+15)}t\right) \pm\frac{3\beta\sqrt{\beta+2}}{2(3\beta+4)(\beta+1)}\coth^2\frac{\sqrt{-\beta(15\beta+12)}}{(5\beta+4)l}\left(x - \frac{\sqrt{15\rho\alpha\beta(2l^2\mu^2+9\beta+15)}}{\rho(2l^2\mu^2+9\beta+15)}t\right)$$

$$u_3(x,t) = \frac{4-\beta}{4(\beta+1)} + \frac{3\beta}{4\beta+1}\tanh^2\frac{\sqrt{-\beta(3\beta+6)}}{(\beta+2)l}\left(x - \frac{\sqrt{-3\rho\alpha\beta(-3+l^2\mu^2)}}{\rho(-3+l^2\mu^2)}t\right),$$

$$w_3(x,t) = \mp\frac{3\beta}{2\sqrt{6l^2\mu^2+36\beta+18}} \pm\frac{9\beta}{2\sqrt{6l^2\mu^2+36\beta+18}}\tanh^2\frac{\sqrt{-\beta(3\beta+6)}}{(\beta+2)l}\left(x - \frac{\sqrt{-3\rho\alpha\beta(-3+l^2\mu^2)}}{\rho(-3+l^2\mu^2)}t\right)$$

$$u_4(x,t) = \frac{3\beta+4}{4(\beta+1)} - \frac{3\beta}{4\beta+1}\tanh^2\frac{\sqrt{3\beta(\beta+2)}}{(\beta+2)l}\left(x - \frac{\sqrt{3\rho\alpha\beta(3+l^2\mu^2)}}{\rho(3+l^2\mu^2)}t\right),$$

$$w_4(x,t) = \mp\frac{9\beta}{2\sqrt{-6l^2\mu^2+36\beta+18}} \pm\frac{9\beta}{2\sqrt{-6l^2\mu^2+36\beta+18}}\tanh^2\frac{\sqrt{3\beta(\beta+2)}}{(\beta+2)l}\left(x - \frac{\sqrt{3\rho\alpha\beta(3+l^2\mu^2)}}{\rho(3+l^2\mu^2)}t\right)$$

$$u_5(x,t) = \frac{\beta+8}{8(\beta+1)} + \frac{3\beta}{16(\beta+1)}\tanh^2\frac{\sqrt{-\beta(3\beta+6)}}{2(\beta+2)l}\left(x - \frac{\sqrt{-3\rho\alpha\beta(-3+4l^2\mu^2)}}{\rho(-3+4l^2\mu^2)}t\right) + \frac{3\beta}{16(\beta+1)}\coth^2\frac{\sqrt{-\beta(3\beta+6)}}{2(\beta+2)l}\left(x - \frac{\sqrt{-3\rho\alpha\beta(-3+4l^2\mu^2)}}{\rho(-3+4l^2\mu^2)}t\right)$$

$$w_5(x,t) = \pm\frac{3\beta}{4\sqrt{24l^2\mu^2+36\beta+18}} \pm \frac{9\beta}{8\sqrt{24l^2\mu^2+36\beta+18}}\tanh^2\frac{\sqrt{-\beta(3\beta+6)}}{2(\beta+2)l}\left(x - \frac{\sqrt{-3\rho\alpha\beta(-3+4l^2\mu^2)}}{\rho(-3+4l^2\mu^2)}t\right) \pm \frac{9\beta}{8\sqrt{24l^2\mu^2+36\beta+18}}\coth^2\frac{\sqrt{-\beta(3\beta+6)}}{2(\beta+2)l}\left(x - \frac{\sqrt{-3\rho\alpha\beta(-3+4l^2\mu^2)}}{\rho(-3+4l^2\mu^2)}t\right)$$

$$u_6(x,t) = \frac{3(\beta+8)}{8(\beta+1)} - \frac{3\beta}{16(\beta+1)}\tanh^2\frac{\sqrt{\beta(3\beta+6)}}{2(\beta+2)l}\left(x - \frac{\sqrt{3\rho\alpha\beta(3+4l^2\mu^2)}}{\rho(3+4l^2\mu^2)}t\right) - \frac{3\beta}{16(\beta+1)}\coth^2\frac{\sqrt{\beta(3\beta+6)}}{2(\beta+2)l}\left(x - \frac{\sqrt{3\rho\alpha\beta(3+4l^2\mu^2)}}{\rho(3+4l^2\mu^2)}t\right),$$

$$w_6(x,t) = \mp\frac{9\beta}{4\sqrt{-24l^2\mu^2+36\beta+18}} \pm \frac{9\beta}{8\sqrt{-24l^2\mu^2+36\beta+18}}\tanh^2\frac{\sqrt{\beta(3\beta+6)}}{2(\beta+2)l}\left(x - \frac{\sqrt{3\rho\alpha\beta(3+4l^2\mu^2)}}{\rho(3+4l^2\mu^2)}t\right) \pm \frac{9\beta}{8\sqrt{-24l^2\mu^2+36\beta+18}}\coth^2\frac{\sqrt{\beta(3\beta+6)}}{2(\beta+2)l}\left(x - \frac{\sqrt{3\rho\alpha\beta(3+4l^2\mu^2)}}{\rho(3+4l^2\mu^2)}t\right)$$

4.9.3. Turitzyn denklem sisteminin çözümü

α ve β pozitif sabitler olmak üzere bu denklem sistemi Turitzyn tarafından

$$u_{tt} = \beta u_{xx} - \frac{\beta}{2}(u^2)_{xx} + \frac{1}{2}(w^2)_{xx} + \alpha^2 u_{xxtt}$$

$$w_{tt} = (uw)_{xx} + \alpha^2 w_{xxtt} \tag{4.37}$$

şeklinde verilmiştir. $\xi = x - Vt$ dalga değişkeni ile bu denklem sistemi

$$2(V^2 - \beta)U + \beta U^2 - \beta W^2 - 2\alpha^2 V^2 U'' = 0,$$
$$V^2 W - UW - \alpha^2 V^2 W'' = 0 \tag{4.38}$$

şeklinde adi türevli lineer olmayan bir diferansiyel denklem sistemine dönüşür. (4.38) de βW^2 ile $2\alpha^2 V^2 U''$ ve $V^2 W''$ ile UW arasında dengeleme prosedürü işletilirse çözüm olarak düşünülen iki serinin en büyük üsleri olan N ve M doğal sayıları arasında

$$2N = M + 2,$$
$$2 + N = M + N$$

şeklinde bir denklem sistemi elde edilecektir. Bu denklem sisteminin çözümü $M = N = 2$ olduğundan aranan çözümler

$$U(\mu\xi) = S_1(Y) = \sum_{k=0}^{2} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} b_k\, Y^{-k}$$
$$W(\mu\xi) = S_2(Y) = \sum_{k=0}^{2} c_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} d_k\, Y^{-k} \tag{4.39}$$

şeklindeki sonlu seri çözümlerdir. (4.39) serisi, (4.38) de yazılırsa $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, d_1, d_2, V$ ve μ bilinmeyenlerine bağlı bir cebirsel denklem sistemi oluşur. Bu sistemin tüm çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$a_0 = \frac{\beta(3\beta + 8)}{8(\beta + 1)}, a_2 = \frac{-3\beta^2}{16(\beta + 1)}, b_2 = a_2, c_0 = -2d_2, c_2 = d_2,$$
$$d_2 = \frac{\pm 3\sqrt{-4V^4 - 4V^2 + 2\beta^2 + 4\beta}}{16}, V = \frac{\sqrt{\beta(16\alpha^2\mu^2 + 1)}}{16\alpha^2\mu^2 + 1},$$

$$\mu=\frac{\sqrt{\beta(\beta+2)}}{4\alpha(\beta+2)},a_1=b_1=c_1=d_1=0,$$

$$a_0=\frac{\beta(\beta+8)}{8(\beta+1)},a_2=\frac{3\beta^2}{16(\beta+1)},b_2=a_2,c_0=\frac{2d_2}{3},c_2=d_2,$$

$$d_2=\frac{\pm3\sqrt{-4V^4-4V^2+2\beta^2+4\beta}}{16},V=\frac{\sqrt{-\beta(16\alpha^2\mu^2-1)}}{16\alpha^2\mu^2-1},$$

$$\mu=\frac{\sqrt{-\beta(\beta+2)}}{4\alpha(\beta+2)},a_1=b_1=c_1=d_1=0,$$

$$a_0=\frac{-\beta(\beta-4)}{4(\beta+1)},a_2=\frac{3\beta^2}{4(\beta+1)},c_0=-\frac{c_2}{3},$$

$$c_2=\frac{\pm3\sqrt{-4V^4-4V^2+2\beta^2+4\beta}}{4},V=\frac{\sqrt{-\beta(4\alpha^2\mu^2-1)}}{4\alpha^2\mu^2-1},$$

$$\mu=\frac{\sqrt{-\beta(\beta+2)}}{2\alpha(\beta+2)},a_1=b_1=b_2=c_1=d_1=d_2=0,$$

$$a_0=\frac{\beta(3\beta+4)}{4(\beta+1)},a_2=\frac{-3\beta^2}{4(\beta+1)},c_0=-c_2,$$

$$c_2=\frac{\pm3\sqrt{-4V^4-4V^2+2\beta^2+4\beta}}{4},V=\frac{\sqrt{\beta(4\alpha^2\mu^2+1)}}{4\alpha^2\mu^2+1},$$

$$\mu=\frac{\sqrt{\beta(\beta+2)}}{2\alpha(\beta+2)},a_1=b_1=b_2=c_1=d_1=d_2=0,$$

$$a_0=\frac{\beta}{\beta+1},a_2=\frac{3\beta^2}{2(3\beta^2+7\beta+4)},b_2=a_2,c_2=-d_2,$$

$$d_2=\left(\frac{\pm3\sqrt{-42V^4\beta-58V^4-2V^2\beta-120V^2+120\beta}}{8}\right),$$

$$V=\frac{\sqrt{5\beta(8\alpha^2\mu^2+3\beta+5)}}{8\alpha^2\mu^2+3\beta+5},\mu=\frac{\sqrt{-\beta(5\beta+4)}}{2\alpha(5\beta+4)},a_1=b_1=c_0=c_1=d_1=0,$$

$$a_0=\frac{\beta}{\beta+1},a_2=\frac{-\beta}{2(\beta+1)},b_2=a_2,c_2=-d_2,d_2=\frac{\pm\sqrt{9V^2+6}}{2},$$

$$V=\frac{\sqrt{3\beta(\beta+1)}}{3(\beta+1)},\mu=\frac{-1}{2\alpha},a_1=b_1=c_0=c_1=d_1=0$$

Bu katsayılar (4.39) sonlu serilerinde yerine yazılırsa denklemin tam çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_1(x,t)=\frac{\beta(3\beta+8)}{8(\beta+1)}-\frac{3\beta^2}{16(\beta+1)}\tanh^2\frac{\sqrt{\beta(\beta+2)}}{4\alpha(\beta+2)}\left(x-\frac{\sqrt{\beta(16\alpha^2\mu^2+1)}}{16\alpha^2\mu^2+1}t\right)$$
$$-\frac{3\beta^2}{16(\beta+1)}\coth^2\frac{\sqrt{\beta(\beta+2)}}{4\alpha(\beta+2)}\left(x-\frac{\sqrt{\beta(16\alpha^2\mu^2+1)}}{16\alpha^2\mu^2+1}t\right),$$

$$w_1(x,t)=\frac{\mp3\sqrt{-4V^4-4V^2+2\beta^2+4\beta}}{8}$$
$$\pm\frac{3\sqrt{-4V^4-4V^2+2\beta^2+4\beta}}{16}\tanh^2\frac{\sqrt{\beta(\beta+2)}}{4\alpha(\beta+2)}\left(x-\frac{\sqrt{\beta(16\alpha^2\mu^2+1)}}{16\alpha^2\mu^2+1}t\right)$$
$$\pm\frac{3\sqrt{-4V^4-4V^2+2\beta^2+4\beta}}{16}\coth^2\frac{\sqrt{\beta(\beta+2)}}{4\alpha(\beta+2)}\left(x-\frac{\sqrt{\beta(16\alpha^2\mu^2+1)}}{16\alpha^2\mu^2+1}t\right),$$

$$u_2(x,t)=\frac{\beta(\beta+8)}{8(\beta+1)}+\frac{3\beta^2}{16(\beta+1)}\tanh^2\frac{\sqrt{-\beta(\beta+2)}}{4\alpha(\beta+2)}\left(x-\frac{\sqrt{-\beta(16\alpha^2\mu^2-1)}}{16\alpha^2\mu^2-1}t\right)$$
$$+\frac{3\beta^2}{16(\beta+1)}\coth^2\frac{\sqrt{-\beta(\beta+2)}}{4\alpha(\beta+2)}\left(x-\frac{\sqrt{-\beta(16\alpha^2\mu^2-1)}}{16\alpha^2\mu^2-1}t\right),$$

$$w_2(x,t)=\pm\frac{\sqrt{-4V^4-4V^2+2\beta^2+4\beta}}{8}$$
$$\pm\frac{3\sqrt{-4V^4-4V^2+2\beta^2+4\beta}}{16}\tanh^2\frac{\sqrt{-\beta(\beta+2)}}{4\alpha(\beta+2)}\left(x-\frac{\sqrt{-\beta(16\alpha^2\mu^2-1)}}{16\alpha^2\mu^2-1}t\right)$$
$$\pm\frac{3\sqrt{-4V^4-4V^2+2\beta^2+4\beta}}{16}\coth^2\frac{\sqrt{-\beta(\beta+2)}}{4\alpha(\beta+2)}\left(x-\frac{\sqrt{-\beta(16\alpha^2\mu^2-1)}}{16\alpha^2\mu^2-1}t\right),$$

$$u_3(x,t)=\frac{-\beta(\beta-4)}{4(\beta+1)}+\frac{3\beta^2}{4(\beta+1)}\tanh^2\frac{\sqrt{-\beta(\beta+2)}}{2\alpha(\beta+2)}\left(x-\frac{\sqrt{-\beta(4\alpha^2\mu^2-1)}}{4\alpha^2\mu^2-1}t\right)$$

$$w_3(x,t)=\mp\frac{\sqrt{-4V^4-4V^2+2\beta^2+4\beta}}{4}$$
$$\pm\frac{3\sqrt{-4V^4-4V^2+2\beta^2+4\beta}}{4}\tanh\frac{\sqrt{-\beta(\beta+2)}}{2\alpha(\beta+2)}\left(x-\frac{\sqrt{-\beta(4\alpha^2\mu^2-1)}}{4\alpha^2\mu^2-1}t\right)$$

$$u_4(x,t)=\frac{\beta(3\beta+4)}{4(\beta+1)}-\frac{3\beta^2}{4(\beta+1)}\tanh^2\frac{\sqrt{\beta(\beta+2)}}{2\alpha(\beta+2)}\left(x-\frac{\sqrt{\beta(4\alpha^2\mu^2+1)}}{4\alpha^2\mu^2+1}t\right)$$

$$w_4(x,t)=\mp\frac{3\sqrt{-4V^4-4V^2+2\beta^2+4\beta}}{4}$$

$$\pm\frac{3\sqrt{-4V^4-4V^2+2\beta^2+4\beta}}{4}\tanh^2\frac{\sqrt{\beta(\beta+2)}}{2\alpha(\beta+2)}\left(x-\frac{\sqrt{\beta(4\alpha^2\mu^2+1)}}{4\alpha^2\mu^2+1}t\right)$$

$$u_5(x,t)=\frac{\beta}{\beta+1}$$

$$+\frac{3\beta^2}{2(3\beta^2+7\beta+4)}\tanh^2\frac{\sqrt{-\beta(5\beta+4)}}{2\alpha(5\beta+4)}\left(x-\frac{\sqrt{5\beta(8\alpha^2\mu^2+3\beta+5)}}{8\alpha^2\mu^2+3\beta+5}t\right)$$

$$+\frac{3\beta^2}{2(3\beta^2+7\beta+4)}\coth^2\frac{\sqrt{-\beta(5\beta+4)}}{2\alpha(5\beta+4)}\left(x-\frac{\sqrt{5\beta(8\alpha^2\mu^2+3\beta+5)}}{8\alpha^2\mu^2+3\beta+5}t\right),$$

$$w_5(x,t)$$

$$=\mp\frac{3\sqrt{-42V^4\beta-58V^4-2V^2\beta-120V^2+120\beta}}{8}\tanh^2\frac{\sqrt{-\beta(5\beta+4)}}{2\alpha(5\beta+4)}\Bigg(x$$

$$-\frac{\sqrt{5\beta(8\alpha^2\mu^2+3\beta+5)}}{8\alpha^2\mu^2+3\beta+5}t\Bigg)$$

$$\pm\frac{3\sqrt{-42V^4\beta-58V^4-2V^2\beta-120V^2+120\beta}}{8}\coth^2\frac{\sqrt{-\beta(5\beta+4)}}{2\alpha(5\beta+4)}\Bigg(x$$

$$-\frac{\sqrt{5\beta(8\alpha^2\mu^2+3\beta+5)}}{8\alpha^2\mu^2+3\beta+5}t\Bigg),$$

$$u_6(x,t)=\frac{\beta}{\beta+1}-\frac{\beta}{2(\beta+1)}\tanh^2\left(\frac{-1}{2\alpha}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3\beta(\beta+1)}}{3(\beta+1)}t\right)$$

$$-\frac{\beta}{2(\beta+1)}\coth^2\left(\frac{-1}{2\alpha}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3\beta(\beta+1)}}{3(\beta+1)}t\right),$$

$$w_6(x,t)=\mp\frac{\sqrt{9V^2+6}}{2}\tanh^2\left(\frac{-1}{2\alpha}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3\beta(\beta+1)}}{3(\beta+1)}t\right)$$

$$\pm\frac{\sqrt{9V^2+6}}{2}\coth^2\left(\frac{-1}{2\alpha}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3\beta(\beta+1)}}{3(\beta+1)}t\right).$$

4.9.4. Pego-Smereka-Weinstein denklem sisteminin çözümü

Bu denklem sistemi β pozitif reel sabit olmak üzere

$$u_{tt} = u_{xx} - \beta(u^2)_{xx} + (w^2)_{xx} + u_{xxtt}$$

$$w_{tt} = w_{xx} + 2(uw)_{xx} + w_{xxtt} \qquad \textbf{(4.40)}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu kısmi türevli diferansiyel denklem sistemini adi türevli bir denklem sistemine dönüştürmek için $\xi = x - Vt$ dalga değişkeni kullanılırsa

$$(V^2 - 1)U + \beta U^2 - W^2 - V^2 U'' = 0$$

$$(V^2 - 1)W - 2UW - V^2 W'' = 0 \qquad \textbf{(4.41)}$$

şeklindeki adi türevli denklem sistemi oluşacaktır. Sistemde W^2 ile U'' ve UW ile W'' dengelenirse çözüm olarak düşünülen serilerin en büyük kuvvetlerinden oluşan

$$2N = M + 2$$
$$M + N = N + 2$$

iki bilinmeyenli denklem sistemi ve sistemin çözümü olarak ta $M = N = 2$ elde edilecektir. Tanh $-$ coth yöntemine göre aranan çözümler

$$U(\mu\xi) = S_1(Y) = \sum_{k=0}^{2} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} b_k\, Y^{-k}$$

$$W(\mu\xi) = S_2(Y) = \sum_{k=0}^{2} c_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} d_k\, Y^{-k} \qquad \textbf{(4.42)}$$

şeklinde olmalıdır. Bu sonlu seriler (4.41) adi türevli diferansiyel denklem sisteminde yazılıp oluşan ifade Y nin terimlerine göre düzenlenip katsayılar sıfıra eşitlenirse cebirsel bir denklem sistemi elde edilecektir. Bu sistemin çözümü

$$a_0 = \frac{-2\mu^2}{16\mu^2+1}, a_2 = \frac{-3\mu^2}{16\mu^2+1}, a_2 = b_2, c_0 = \frac{2d_2}{3}, c_2 = d_2,$$

$$d_2 = \frac{\pm 3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{16}, V = \frac{1}{\sqrt{16\mu^2+1}}, a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0,$$

$$a_0 = \frac{-6\mu^2}{16\mu^2-1}, a_2 = \frac{3\mu^2}{16\mu^2-1}, a_2 = b_2, c_0 = -2d_2, c_2 = d_2,$$

$$d_2 = \frac{\pm 3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{16}, V = \frac{1}{\sqrt{-16\mu^2+1}}, a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0,$$

$$a_0 = \frac{\mu^2}{4\mu^2+1}, a_2 = \frac{-3\mu^2}{4\mu^2+1}, c_0 = \frac{-c_2}{3}, V = \frac{1}{\sqrt{4\mu^2+1}},$$

$$c_2 = \frac{\pm 3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{4}, a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0$$

$$a_0 = \frac{-3\mu^2}{4\mu^2-1}, a_2 = \frac{3\mu^2}{4\mu^2-1}, c_0 = -c_2, V = \frac{1}{\sqrt{-4\mu^2+1}},$$

$$c_2 = \frac{\pm 3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{4}, a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0$$

$$a_0 = \frac{-3\mu^2}{4\mu^2-1}, b_2 = \frac{3\mu^2}{4\mu^2-1}, c_0 = -d_2, V = \frac{1}{\sqrt{-4\mu^2+1}},$$

$$d_2 = \frac{\pm 3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{4}, a_1 = a_2 = b_1 = c_1 = c_2 = d_1 = 0$$

şeklindedir. Bu katsayılara bağlı olarak kısmi türevli diferansiyel denklem sisteminin tam çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$u_1(x,t) = -\frac{2\mu^2}{16\mu^2+1} - \frac{3\mu^2}{16\mu^2+1}\tanh^2\mu\left(x - \frac{1}{\sqrt{16\mu^2+1}}t\right)$$
$$-\frac{3\mu^2}{16\mu^2+1}\coth^2\mu\left(x - \frac{1}{\sqrt{16\mu^2+1}}t\right),$$

$$w_1(x,t) = \pm\frac{(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{8}$$
$$\pm\frac{3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{16}\tanh^2\mu\left(x-\frac{1}{\sqrt{16\mu^2+1}}t\right)$$
$$\pm\frac{3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{16}\coth^2\mu\left(x-\frac{1}{\sqrt{16\mu^2+1}}t\right)$$

$$u_2(x,t) = -\frac{6\mu^2}{16\mu^2-1}+\frac{3\mu^2}{16\mu^2-1}\tanh^2\mu\left(x-\frac{1}{\sqrt{-16\mu^2+1}}t\right)$$
$$+\frac{3\mu^2}{16\mu^2-1}\coth^2\mu\left(x-\frac{1}{\sqrt{-16\mu^2+1}}t\right),$$
$$w_2(x,t) = \mp\frac{3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{8}$$
$$\pm\frac{3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{16}\tanh^2\mu\left(x-\frac{1}{\sqrt{-16\mu^2+1}}t\right)$$
$$\pm\frac{3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{16}\coth^2\mu\left(x-\frac{1}{\sqrt{-16\mu^2+1}}t\right)$$

$$u_3(x,t) = \frac{\mu^2}{4\mu^2+1}-\frac{3\mu^2}{4\mu^2+1}\tanh^2\mu\left(x-\frac{1}{\sqrt{4\mu^2+1}}t\right),$$
$$w_3(x,t) = \mp\frac{(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{4}$$
$$\pm\frac{3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{4}\tanh^2\mu\left(x-\frac{1}{\sqrt{4\mu^2+1}}t\right)$$

$$u_4(x,t) = -\frac{3\mu^2}{4\mu^2-1}+\frac{3\mu^2}{4\mu^2-1}\tanh^2\mu\left(x-\frac{1}{\sqrt{-4\mu^2+1}}t\right),$$
$$w_4(x,t) = \mp\frac{3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{4}$$
$$\pm\frac{3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{4}\tanh^2\mu\left(x-\frac{1}{\sqrt{-4\mu^2+1}}t\right)$$

$$u_5(x,t) = -\frac{3\mu^2}{4\mu^2-1} + \frac{3\mu^2}{4\mu^2-1}\coth^2\mu\left(x - \frac{1}{\sqrt{-4\mu^2+1}}t\right),$$

$$w_5(x,t) = \mp\frac{3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{4}$$
$$\pm\frac{3(V+1)(V-1)\sqrt{\beta+2}}{4}\coth^2\mu\left(x - \frac{1}{\sqrt{-4\mu^2+1}}t\right)$$

4.9.5. Fan-Tian denklem sisteminin çözümü

Fan ve Tian tarafından kullanılan bu model,

$$u_{tt} = \beta u_{xx} - \frac{\beta}{2}(u^2)_{xx} + \frac{\beta}{2}(w^2)_{xx} + \alpha^2 u_{xxtt}$$

$$w_{tt} = \gamma(uw)_{xx} + \rho(w^2)_{xx} + \alpha^2 w_{xxtt} \qquad \textbf{(4.43)}$$

şeklindedir. Sistemde α, β, γ ve ρ pozitif sabitlerdir. Daha önce de yapıldığı gibi $\xi = x - Vt$ dalga değişkeni bu kısmi türevli diferansiyel denklem sistemini

$$(2V^2 - 2\beta)U + \beta U^2 - \beta W^2 - 2\alpha^2 V^2 U'' = 0$$

$$V^2 W - \gamma UW - \rho W^2 - \alpha^2 V^2 W'' = 0 \qquad \textbf{(4.44)}$$

adi türevli denklem sistemine dönüştürür. Dengeleme prosedürü gereği en büyük kuvvetler arasında

$$2M = M + N$$
$$2N = M + N$$

denklem sistemi ve sistemin çözümünden $M = N = 2$ elde edilir. Bunun sonucu olarak

$$U(\mu\xi) = S_1(Y) = \sum_{k=0}^{2} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} b_k\, Y^{-k}$$

$$W(\mu\xi) = S_2(Y) = \sum_{k=0}^{2} c_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} d_k\, Y^{-k} \tag{4.45}$$

şeklindeki seri çözümlerle ilgilenmek gerekir. (4.45) teki sonlu seriler (4.44) teki adi türevli diferansiyel denklem sisteminde yazılıp katsayılar sıfıra eşitlenirse aşağıdaki gibi iki çözüm takımı elde edilir:

$$\begin{aligned}
a_0 = {} & ((-\beta(8\rho c_2\beta^2\gamma - 8\beta\gamma^2\rho c_2 - 18\rho^2\beta^2 + 24\beta\rho^3 c_2 + 12\beta^2\gamma^2 - 16\gamma^3\rho c_2 \\
& + 24\rho^3 c_2\gamma - 3\gamma\beta^3))/(4(-8\beta\rho^3 c_2\gamma - 4\rho^3\gamma^2 c_2 - 4\beta^2\rho^3 c_2 + 3\rho^2\beta^3 \\
& + 3\rho^2\gamma\beta^2 + 4\rho\gamma^4 c_2 + 4\beta^2\gamma^2\rho c_2 + 8\beta\gamma^3\rho c_2 - 3\beta^3\gamma^2 - 3\gamma^3\beta^2))),
\end{aligned}$$

$$a_2 = ((-(4\rho c_2\beta + 4c_2\rho\gamma - 3\beta^2))/(4\gamma(\mu + \beta)))$$

$$\begin{aligned}
c_0 = {} & ((\beta(\rho^2\beta^2 c_2 + \gamma^2 c_2\beta^2 + \beta c_2\gamma^3 + 2\gamma^2\rho^2 c_2 + 3\gamma\rho^2\beta c_2 - (3/2)\rho\beta^2\gamma \\
& - (3/4)\rho\beta^3))/(-8\beta\rho^3 c_2\gamma - 4\rho^3\gamma^2 c_2 - 4\beta^2\rho^3 c_2 + 3\rho^2\beta^3 + 3\rho^2\gamma\beta^2 \\
& + 4\rho\gamma^4 c_2 + 4\beta^2\gamma^2\rho c_2 + 8\beta\gamma^3\rho c_2 - 3\beta^3\gamma^2 - 3\gamma^3\beta^2)),
\end{aligned}$$

$$c_2 = \frac{\pm 3\left(-\beta\rho + \sqrt{-\rho^2\beta^2 + 4\gamma^3\beta - 4\gamma^2V^4 - 4\gamma^3V^2 + 2\beta^2\gamma^2 - 4\rho^2\gamma\beta + 4\rho^2V^4 + 4\rho^2V^2\gamma}\right)}{4(\gamma^2 - \rho^2)}$$

$$V = \frac{\sqrt{-\beta(4\alpha^2\mu^2 - 1)}}{4\alpha^2\mu^2 - 1}, \mu = \frac{\sqrt{-\beta(2\gamma + \beta)}}{2\alpha(2\gamma + \beta)}, a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
a_0 = {} & ((\beta(6\rho c_2\beta^2\gamma + 10\beta\gamma^2\rho c_2 + (3/2)\rho^2\beta^2 + 2\beta\rho^3 c_2 + 3\beta^2\gamma^2 + 4\gamma^3\rho c_2 \\
& + 2\rho^3 c_2\gamma + (9/4)\gamma\beta^3))/(-8\beta\rho^3 c_2\gamma - 4\rho^3\gamma^2 c_2 - 4\beta^2\rho^3 c_2 - 3\rho^2\beta^3 \\
& - 3\rho^2\gamma\beta^2 + 4\rho\gamma^4 c_2 + 4\beta^2\gamma^2\rho c_2 + 8\beta\gamma^3\rho c_2 + 3\beta^3\gamma^2 + 3\gamma^3\beta^2)),
\end{aligned}$$

$$a_2 = ((-(4\rho c_2\beta + 4c_2\rho\gamma + 3\beta^2))/(4\gamma(\mu + \beta))),$$

$$\begin{aligned}
c_0 = {} & ((\beta(-3\rho^2\beta^2 c_2 - 3\gamma^2 c_2\beta^2 - 3\beta c_2\gamma^3 - 6\gamma^2\rho^2 c_2 - 9\gamma\rho^2\beta c_2 - (9/2)\rho\beta^2\gamma \\
& - (9/4)\rho\beta^3))/(-8\beta\rho^3 c_2\gamma - 4\rho^3\gamma^2 c_2 - 4\beta^2\rho^3 c_2 - 3\rho^2\beta^3 - 3\rho^2\gamma\beta^2 \\
& + 4\rho\gamma^4 c_2 + 4\beta^2\gamma^2\rho c_2 + 8\beta\gamma^3\rho c_2 + 3\beta^3\gamma^2 + 3\gamma^3\beta^2)),
\end{aligned}$$

$$c_2 = \frac{\pm 3\left(\beta\rho + \sqrt{-\rho^2\beta^2 + 4\gamma^3\beta - 4\gamma^2V^4 - 4\gamma^3V^2 + 2\beta^2\gamma^2 - 4\rho^2\gamma\beta + 4\rho^2V^4 + 4\rho^2V^2\gamma}\right)}{4(\gamma^2 - \rho^2)},$$

$$V = \frac{\sqrt{\beta(4\alpha^2\mu^2 + 1)}}{4\alpha^2\mu^2 + 1}, \mu = \frac{\sqrt{\beta(2\gamma + \beta)}}{2\alpha(2\gamma + \beta)}, a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0$$

Bu çözüm takımları kullanılarak kısmi türevli diferansiyel denklem sisteminin aranan çözümleri

$$u_1(x,t) = ((-\beta(8\rho c_2\beta^2\gamma - 8\beta\gamma^2\rho c_2 - 18\rho^2\beta^2 + 24\beta\rho^3 c_2 + 12\beta^2\gamma^2 - 16\gamma^3\rho c_2 + 24\rho^3 c_2\gamma - 3\gamma\beta^3))/(4(-8\beta\rho^3 c_2\gamma - 4\rho^3\gamma^2 c_2 - 4\beta^2\rho^3 c_2 + 3\rho^2\beta^3 + 3\rho^2\gamma\beta^2 + 4\rho\gamma^4 c_2 + 4\beta^2\gamma^2\rho c_2 + 8\beta\gamma^3\rho c_2 - 3\beta^3\gamma^2 - 3\gamma^3\beta^2))) - (((4\rho c_2\beta + 4c_2\rho\gamma - 3\beta^2))/(4\gamma(\mu+\beta)))\tanh^2((\sqrt{(-\beta(2\gamma + \beta))}/(2\alpha(2\gamma+\beta)))(x - ((\sqrt{(-\beta(4\alpha^2\mu^2 - 1))})/(4\alpha^2\mu^2 - 1))t),$$

$$w_1(x,t) = ((\beta(\rho^2\beta^2 c_2 + \gamma^2 c_2\beta^2 + \beta c_2\gamma^3 + 2\gamma^2\rho^2 c_2 + 3\gamma\rho^2\beta c_2 - (3/2)\rho\beta^2\gamma - (3/4)\rho\beta^3))/(-8\beta\rho^3 c_2\gamma - 4\rho^3\gamma^2 c_2 - 4\beta^2\rho^3 c_2 + 3\rho^2\beta^3 + 3\rho^2\gamma\beta^2 + 4\rho\gamma^4 c_2 + 4\beta^2\gamma^2\rho c_2 + 8\beta\gamma^3\rho c_2 - 3\beta^3\gamma^2 - 3\gamma^3\beta^2)) \pm ((3(-\beta\rho + \sqrt{(-\rho^2\beta^2 + 4\gamma^3\beta - 4\gamma^2 V^4 - 4\gamma^3 V^2 + 2\beta^2\gamma^2 - 4\rho^2\gamma\beta + 4\rho^2 V^4 + 4\rho^2 V^2\gamma)}))/(4(\gamma^2 - \rho^2)))\tanh^2((\sqrt{(-\beta(2\gamma+\beta))})/(2\alpha(2\gamma + \beta)))(x - ((\sqrt{(-\beta(4\alpha^2\mu^2 - 1))})/(4\alpha^2\mu^2 - 1))t),$$

$$u_2(x,t) = ((\beta(6\rho c_2\beta^2\gamma + 10\beta\gamma^2\rho c_2 + (3/2)\rho^2\beta^2 + 2\beta\rho^3 c_2 + 3\beta^2\gamma^2 + 4\gamma^3\rho c_2 + 2\rho^3 c_2\gamma + (9/4)\gamma\beta^3))/(-8\beta\rho^3 c_2\gamma - 4\rho^3\gamma^2 c_2 - 4\beta^2\rho^3 c_2 - 3\rho^2\beta^3 - 3\rho^2\gamma\beta^2 + 4\rho\gamma^4 c_2 + 4\beta^2\gamma^2\rho c_2 + 8\beta\gamma^3\rho c_2 + 3\beta^3\gamma^2 + 3\gamma^3\beta^2)) - (((4\rho c_2\beta + 4c_2\rho\gamma + 3\beta^2))/(4\gamma(\mu+\beta)))\tanh^2((\sqrt{(\beta(2\gamma + \beta))})/(2\alpha(2\gamma+\beta)))(x - ((\sqrt{(\beta(4\alpha^2\mu^2 + 1))})/(4\alpha^2\mu^2 + 1))t),$$

$$w_2(x,t) = ((\beta(-3\rho^2\beta^2 c_2 - 3\gamma^2 c_2\beta^2 - 3\beta c_2\gamma^3 - 6\gamma^2\rho^2 c_2 - 9\gamma\rho^2\beta c_2 - (9/2)\rho\beta^2\gamma - (9/4)\rho\beta^3))/(-8\beta\rho^3 c_2\gamma - 4\rho^3\gamma^2 c_2 - 4\beta^2\rho^3 c_2 - 3\rho^2\beta^3 - 3\rho^2\gamma\beta^2 + 4\rho\gamma^4 c_2 + 4\beta^2\gamma^2\rho c_2 + 8\beta\gamma^3\rho c_2 + 3\beta^3\gamma^2 + 3\gamma^3\beta^2)) \pm ((3(\beta\rho + \sqrt{(-\rho^2\beta^2 + 4\gamma^3\beta - 4\gamma^2 V^4 - 4\gamma^3 V^2 + 2\beta^2\gamma^2 - 4\rho^2\gamma\beta + 4\rho^2 V^4 + 4\rho^2 V^2\gamma)}))/(4(\gamma^2 - \rho^2)))\tanh^2((\sqrt{(\beta(2\gamma + \beta))})/(2\alpha(2\gamma+\beta)))(x - ((\sqrt{(\beta(4\alpha^2\mu^2 + 1))})/(4\alpha^2\mu^2 + 1))t)$$

olarak elde edilmiş olur.

BÖLÜM 5. MAPLE VE SCIENTIFIC WORK PLACE PROGRAMLARININ SOBOLEV TÜRÜ KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNDE KULLANIMI

$\mathrm{Tanh} - \mathrm{coth}$ yöntemi kullanılırken oldukça karmaşık olan ve çok fazla vakit alan cebirsel işlemlerin üstesinden gelebilmek için Maple ve Mathematica gibi sembolik yazılımlar etkin bir şekilde kullanılmaktadır. Bu programlar gerek birçok bilinmeyenden oluşan denklem sistemlerinin kısa bir sürede tam olarak çözülebilmesinde gerekse çözüm olduğu düşünülen bir fonksiyonun gerçekten çözüm olup-olmadığının anlaşılabilmesinde önemli derecede rol oynar. Bu çalışmada genel olarak Maple ve Scientific Work Place programları beraber kullanıldığından bu programların denklem çözümlerinde nasıl kullanıldığı oldukça iyi bilinen bir denklem ve bir denklem sistemi üzerinden anlatılacaktır. Bu tür işlemler için sıkça başvurulan Mathematica programının kullanımı da benzer şekilde yapılabilir.

5.1. Burgers-Fisher (BF) Denkleminin Çözümü

İyi bilinen bu nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklem

$$u_{xx} + uu_x - u_t = u(1-u) \quad \textbf{(5.1)}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu denklem Maple ve Scientific Work Place programları yardımı ile aşağıdaki adımlar takip edilerek çözülür:

Adım 1. $u(x,t) = u(\xi), \xi = x - Vt$ dalga dönüşümü ile kısmi türevli diferansiyel nonlineer (5.1) Burgers-Fisher (BF) denklemi

$$Vu' + uu' + u'' + u(1-u) = 0 \tag{5.2}$$

şeklinde adi türevli bir diferansiyel denkleme dönüşür. Eğer bu adi türevli denklemin aşikâr olmayan çözümleri elde edilebilirse kısmi türevli diferansiyel denklem de çözülebilir. Bu yüzden öncelikli olarak (5.2) adi türevli denkleminin çözümlerine odaklanmak gerekir.

Adım 2. (5.2) denkleminin

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{M} b_k\, Y^{-k} \tag{5.3}$$

şeklinde bir çözümü olduğu kabul edilsin. (5.3) serisi (5.2) de yazıldığında dengeleme prosedürü gereği en yüksek mertebeden lineer ve nonlineer terimler olan uu' ve u'' terimlerinin eşit olması gerektiğinden bu terimlerin eşitlenmesi ile $M + M + 1 = M + 2$ ve buradan $M = 1$ olur. Demek ki aranan çözümler (eğer varsa)

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{1} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{1} b_k\, Y^{-k} \tag{5.4}$$

şeklindedir.

Adım 3. $u(x,t) = u(\xi) = S(Y), \xi = x - Vt,\ Y = \tanh(\mu\xi)$ olduğundan türevler

$$\begin{aligned} U' &= \frac{dU}{d\xi} = \mu(1-Y^2)\frac{dU}{dY} \\ U'' &= \frac{d^2}{d\xi^2} = \mu^2(1-Y^2)\left(-2Y\frac{dU}{dY} + (1-Y^2)\frac{d^2U}{dY^2}\right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

şeklinde oluşturulur. Denklemde ikinci mertebeden daha yüksek türevler olmadığından bu türevler elde edilmemiştir.

Adım 4. $M = 1$ olduğundan $\tanh - \coth$ yöntemi gereği

$u = \sum_{k=0}^{1} a_k \, Y^k + \sum_{k=1}^{1} b_k \, Y^{-k} = a_0 + a_1 Y + b_1 \frac{1}{Y}$ **(5.6)**

şeklindeki sonlu seri çözümler arandığından, Scientific Work Place programında (5.6) serisi ile beraber (5.5) türevleri (5.2) adi türevli denkleminde yazılarak compute-simplify komutları çalıştırılırsa bir polinom elde edilecektir. Sonrasında sırası ile compute-polynomials-collect seçilir. Bu seçimin ardından program hangi değişkene göre polinomu düzenleyeceğini soracaktır. Polinom Y ye göre düzenlendiğinde Y nin kuvvetlerine göre düzenlenmiş

$(\mu {a_1}^2 - 2\mu^2 a_1) Y^6 + ({a_1}^2 + V\mu a_1 + \mu a_0 a_1)\, Y^5 + (2a_0 a_1 - a_1 - \mu {a_1}^2 + 2\mu^2 a_1) Y^4 + ({a_0}^2 - a_0 + 2a_1 b_1 - V\mu a_1 - V\mu b_1 - \mu a_0 a_1 - \mu a_0 b_1)\, Y^3 + (2a_0 b_1 - b_1 - \mu {b_1}^2 + 2\mu^2 b_1) Y^2 + ({b_1}^2 + V\mu b_1 + \mu a_0 b_1)\, Y + (\mu {b_1}^2 - 2\mu^2 b_1)$

polinomu elde edilecektir. Bu polinomun katsayılarından oluşan denklem sistemi Scientific Work Place, denklem çözümlerinde yeterli olmadığından Maple yardımıyla çözülür. Bunun için Maple programında dsolve komutu kullanılır. Kolaylık olması açısından $a_0 =$ x, a_1=y, b_1=z demek yerinde olacaktır. Bu katsayılar

```
>dsolve({y^2*μ-2*y*μ^2=0,y^2+V*y*μ+x*y*μ=0,2*y*μ^2-y-y^2*μ+2*x*y=0,
2*y*z-x+x^2-V*y*μ-V*z*μ-x*y*μ-x*z*μ=0,2*z*μ^2-z-z^2*μ+2*x*z=0,
z^2+V*z*μ+x*z*μ=0,z^2*μ-2*z*μ^2=0}, [x,y,z,V,μ]);
```

şeklinde yazılır ve Maple çalıştırılırsa aşikâr olmayan çözümler

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{2}, b_1 = 0, V = -\frac{5}{2}, \mu = \frac{1}{4}$$
$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = 0, b_1 = \frac{1}{2}, V = -\frac{5}{2}, \mu = \frac{1}{4}$$
$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{4}, b_1 = \frac{1}{4}, V = -\frac{5}{2}, \mu = \frac{1}{8}$$

şeklinde elde edilir.

Adım 5. Bu katsayılar (5.6) sonlu serisinde yerine yazılırsa Burgers-Fisher (BF) denkleminin aranan tam çözümleri

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\left(\frac{1}{4}\left(x + \frac{5}{2}t\right)\right)\right]$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}\left[1 + \coth\left(\frac{1}{4}\left(x + \frac{5}{2}t\right)\right)\right]$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{4}\left[2 + \tanh\left(\frac{1}{8}\left(x + \frac{5}{2}t\right)\right) + \coth\left(\frac{1}{8}\left(x + \frac{5}{2}t\right)\right)\right]$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Adım 6. Elde edilen fonksiyonların gerçekten (5.1) denklemini sağlayıp-sağlamadıkları kontrol edilmelidir. Bu kontrolü yapmak için Scientific Work Place programının yardımına başvurulur. Bunun için (5.1) denkleminde u yerine bu fonksiyonlar yazılıp compute-simplify komutları sırası ile çalıştırılır. Eğer sıfır bulunuyorsa fonksiyonlar denklemi sağlıyor demektir. Fakat bazı durumlarda fonksiyonlar denklemin çözümü olduğu halde sıfır sonucu elde edilemeyebilir. Bu durumda fonksiyonlar, (5.1) denkleminde yazılıp sıfıra eşitlenir ve check equality komutu çalıştırılır. Eğer sonuç true ise çözüm denkleme aittir, eğer sonuç false ise çözüm denkleme ait değildir. Ancak burada belirtmek gerekir ki, yukarıda bahsedilen adımlar dikkatle yapılmış ve aşikâr olmayan çözümler elde edilebilmiş ise check equality komutu sonrasında sonucun false çıkması düşük bir olasılıktır. Başka bir ifade ile bulunan fonksiyonlar büyük bir olasılıkla çözümleri aranan kısmi türevli diferansiyel denkleme aittir.

5.2. Geliştirilmiş Boussinesq Denklem Sisteminin Çözümü

$$\begin{aligned} &u_{xxtt} - u_{tt} + u_{xx} + (uw)_{xx} = 0 \\ &w_{xxtt} - w_{tt} + w_{xx} + (uw)_{xx} = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(5.7)}$$

kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi Geliştirilmiş Boussinesq denklem sistemi olarak bilinir. Bu denklem sistemi Maple ve Scientific Work Place programları yardımı ile aşağıdaki adımlar takip edilerek çözülür:

Adım 1. $u(x,t) = u(\xi), \xi = x - Vt$ dalga dönüşümü ile (5.7) deki nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemler

$$V^2U'' - V^2U + U + UW = 0$$

(5.8)

$$V^2W'' - V^2W + W + UW = 0$$

şeklinde adi türevli diferansiyel denklemlere dönüşür.

Adım 2. (5.8) denklemlerinin

$$U(\mu\xi) = S_1(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{M} b_k\, Y^{-k}$$

(5.9)

$$W(\mu\xi) = S_2(Y) = \sum_{k=0}^{N} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{N} b_k\, Y^{-k}$$

şeklinde çözümlerinin olduğu kabul edilsin. (5.9) serileri (5.8) de yazıldığında dengeleme prosedürü gereği en yüksek mertebeden lineer ve nonlineer terimler olan V^2U'' ile UW ve V^2W'' ile UW terimlerinin dengelenmesi ile $2M = M + N$, $2N = M + N$ denklem sistemi ve bu denklem sisteminin çözümü olarak $M = N = 2$ bulunur. Demek ki aranan çözümler (eğer varsa)

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{2} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} b_k\, Y^{-k}$$

(5.10)

$$W(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{2} a_k\, Y^k + \sum_{k=1}^{2} b_k\, Y^{-k}$$

şeklindedir.

Adım 3. $u(x,t) = U(\xi), w(x,t) = W(\xi)\ \xi = x - Vt,\ Y = \tanh(\mu\xi)$ olduğundan türevler

$$U' = \frac{dU}{d\xi} = \mu(1 - Y^2)\frac{dU}{dY}$$

$$W' = \frac{dW}{d\xi} = \mu(1 - Y^2)\frac{dW}{dY}$$

(5.11)

$$U'' = \frac{d^2U}{d\xi^2} = \mu^2(1 - Y^2)\left(-2Y\frac{dU}{dY} + (1 - Y^2)\frac{d^2U}{dY^2}\right)$$

$$W'' = \frac{d^2W}{d\xi^2} = \mu^2(1 - Y^2)\left(-2Y\frac{dW}{dY} + (1 - Y^2)\frac{d^2W}{dY^2}\right)$$

şeklinde oluşturulur.

Adım 4. Scientific Work Place programında (5.10) serilerinin her ikisi ile beraber (5.11) türevleri (5.8) adi türevli denklem sisteminde yazılarak bir önceki başlıkta bahsedilen komutlar çalıştırılır. Sonuçta $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, d_1, d_2, V$ ve μ ye bağlı cebirsel bir denklem sistemi elde edilir Maple yardımıyla bu denklem sisteminin çözümleri elde edilir.

Adım 5. Bir önceki adımda elde edilen katsayılar (5.10) da verilen sonlu serilerde yerine yazılırsa (5.7) Geliştirilmiş Boussinesq denklem sisteminin tam çözümleri elde edilmiş olur. Örneğin bu çözümlerden biri

$$u(x,t) = -\frac{4\mu^2}{16\mu^2+1} - \frac{6\mu^2}{16\mu^2+1}\left\{\tanh^2\mu\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{16\mu^2+1}}\right) + \coth^2\mu\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{16\mu^2+1}}\right)\right\}$$

$$w(x,t) = -\frac{4\mu^2}{16\mu^2+1} - \frac{6\mu^2}{16\mu^2+1}\left\{\tanh^2\mu\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{16\mu^2+1}}\right) + \coth^2\mu\left(x \mp \frac{t}{\sqrt{16\mu^2+1}}\right)\right\}$$

şeklindedir.

Adım 6. Elde edilen fonksiyonların gerçekten (5.7) denklem sistemine ait olup-olmadıkları yine bir önceki başlıkta anlatılan şekilde, elde edilen her iki çözüm her iki denklemde yazılmak suretiyle kontrol edilmelidir.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bazı Sobolev türü lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler ele alınmış, ele alınan bu denklemlerin tam çözümleri $\tanh - \coth$ yöntemle elde edilmiştir. Elde edilen çok sayıda çözüm, yöntemin ne kadar etkin olduğunu göstermektedir.

İkinci bölümde bahsedilen diğer hiperbolik yöntemler kullanılarak aynı denklemler tekrar çözülüp burada elde edilen çözümler ile kıyaslama yapılabilir.

Burada ele alınmayan Sobolev türü denklemlerin çözümleri gerek $\tanh - \coth$ yöntem ile gerekse diğer hiperbolik yöntemler kullanılarak araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] RUSSELL, J.S., Report on Waves: 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science. John Murray, London; 311–390, 1844.

[2] ZABUSKY, N.J., KRUSKAL, M.D., Interaction of solitons incollisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. Lett. 15(6): 240–243, 1965.

[3] HEREMAN, W., Shallow Water Waves and Solitary Waves. Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer-Verlag, Heibelberg, 2009.

[4] DRAZIN, P.G., JOHNSON, R.S., Solitons: an Introduction. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[5] ROSENAU, P., HAYMAN, J.M., Compactons: Solitons with finite wavelengths. Phys. Rev. Lett. 70(5):564–567, 1993.

[6] WAZWAZ, A.M., Peakons, kinks, compactons and solitary patterns solutions for a family of Camassa–Holm equations by using new hyperbolic schemes. Appl. Math. Comput. 182(1):412–424, 2006.

[7] PARKES, E.J., VAKHNENKO, V.O., Explicit solutions of the Camassa-Holm equation. Chaos Solitons Fractals. 26(5):1309–1316, 2005.

[8] MIHAILA, B., CARDENAS, A., COOPER, F., SAXENA, A., Stability and dynamical properties of Rosenau-Hyman compactons using Pade approximants. Phys. Rev. E. 81:056708, 2010.

[9] HIROTA, R., The Direct Method in Soliton Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

10] LI, Y.A., OLVER, P.J., Convergence of solitary-wave solutions in a perturbed bi-Hamiltonian dynamical system. I. Compactons, and Peakons. Discr. Contin. Dyn. Syste. 3(3):419–432, 1997.

[11] WHITHAM, G., Linear and Nonlinear Waves, Wiley; New York, 1974.

[12] DAVIDSON, R., Methods in Nonlinear Plasma Theory. Academic Press, New York, 1972.

[13] TODA, M., Studies of a Nonlinear Lattice. Springer, Berlin 1981.

[14] GRAY, P., SCOTT, S., Chemical Oscillations and Instabilities. Clarendon Press, Oxford, 1990.

[15] MURRAY, J., Mathematical Biology, Springer; Berlin, 1989.

[16] BULLOUGH, R., CAUDREY, P., Backlund Transformations. Springer, Berlin, 1157–1175, 1980.

[17] ABLOWITZ, M., KAUP, D., NEWELL, A., SEGUR, H., The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. Stud.Appl.Math. 53:249–315, 1974.

[18] KUDRASHOV, N., On types of nonlinear nonintegrable equations with exact solutions. Phys. Lett. A. 155:269, 1991.

[19] HEREMAN, W., TAKOKA, M., J. , Solitary wave solutions of nonlinear evolution and wave equations using a direct method and MACSYMA. Phys. A: Math. Gen.23:4805, 1990.

[20] COFFEY, M., On Series Expansions Giving Closed-Form Solutions of Korteweg–de Vries-Like Equations. Siam J. Appl. Math., 50(6), 1580–1592.

[21] HUIBIN, L., KELIN, W., Exact solutions for two nonlinear equations: I. J. Phys. A: Math. Gen.23:3923-3928, 1990.

[22] MALFLIET, W., HEREMAN, W., The Tanh Method : I. Exact Solutions of Nonlinear Evolution and Wave Equations. Physica Scripta. 54: 563-568, 1996.

[23] MALFLIET, W., The tanh method: a tool for solving certain classes of nonlinear evolution and wave equations. Journal of Computational and Applied Mathematics. 164–165:529–541, 2004.

[24] BALDWIN, D., GÖKTAŞ, U., HEREMAN, W., Symbolic computation of tanh and sech solutions of NL PDEs and differential-difference equations. J. Symbolic. Comput. 11:1–12, 2000.

[25] FAN, E.G., HONG, Y.C., Double periodic solutions with Jacobi elliptic functions for two generalized Hirota-Satsuma coupled KdV system. Phys.Lett.A. 292:335–340, 2002.

[26] GAO, Y.T., TIAN, B., Generalized hyperbolic-function method with computerized symbolic computation to construct the solitonic solutions to nonlinear equations of mathematical physics. Comput.Phys.Commun. 133(2–3):158–164, 2001.

[27] FAN, E. ve ZHANG, H., A note on the homogeneous balance method. Physics Letters A. 246:403-406, 1998.

[28] FAN, E., Two new applications of the homogeneous balance method. Physics Letters A. 265:353-357, 2000.

[29] ABDOU, M. A., The extended F-expansion method and its application for a class of nonlinear evolution equations. Chaos, Solitons and Fractals. 31:95-104, 2007.

[30] REN, Y. J., ZHANG, H. Q., A generalized F-expansion method to find abundant families of Jacobi elliptic function solutions of the (2+1)-dimensional Nizhnik-Novikov-Veselov equation. Chaos, Solitons and Fractals. 27:959-979, 2006.

[31] ZHANG, J. L., WANG, M. L., WANG, Y. M. ve FANG, Z. D., The improved F-expansion method and its applications. Phys. Lett A. 350:103, 2006.

[32] DAI, C. Q., ZHANG, J. F., Jacobian elliptic function method for nonlinear differential-difference equations. Chaos, Solitons and Fractals. 27: 1042-1049, 2006.

[33] FANG, E. ve ZHANG, J., Applications of the Jacobi elliptic function method to specialtype nonlinear equations. Physics Letters A. 305: 383-392, 2002.

[34] LIU, S., FU, Z., LIU, S., Zhao, Q., Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. Physics Letters A. 289:69, 2001.

[35] ZHAO, X. Q., ZHI, H. Y., ZHANG, H. Q., Improved Jacobi-function method with symbolic computation to construct new double-periodic solutions for the generalized to system. Chaos, Solitons and Fractals. 28:112-126, 2006.

[36] LIN, B., Li, K., The (1 + 3)-dimensional Burgers equation and its comparative solution. Computers and Mathematics with Applications. 60:3082–3087, 2010.

[37] FAN, E.G., ZHANG, H.Q., A note on the homogeneous balance method. Phys Lett A. 246:403–406, 1998.

[38] FAN, E.G., Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations. Phys Lett A. 277:212–218, 2000.

[39] WAZWAZ, A.M., The tanh method for travelling wave solutions to the Zhiber–Shabat equation and other related equation. Commun Nonlinear Sci Numer. Simul. 13:584–92, 2008.

[40] WAZWAZ, A.M., New travelling wave solutions to the Boussinesq and the Klein–Gordon equations. Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul. 13:889–901, 2008.

[41] WAZWAZ, A.M., The extended tanh method for the Zakharov–Kuznetsov (ZK) equation, the modified ZK equation, and its generalized forms. Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul. 13:1039–47, 2008.

[42] WAZWAZ, A.M., The tanh–coth method for solitons and kink solutions for nonlinear parabolic equations. Appl. Math. Comput. 188:1467–75, 2007.

[43] EL-WAKIL, S.A., EL-LABANY, S.K., ZAHRAN, M.A., SABRY, R., Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations. Phys Lett A. 299:179–88, 2002.

[44] EL-WAKIL, S.A., EL-LABANY, S.K., ZAHRAN, M.A., SABRY, R., Modified extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations. Appl Math. Comput. 161:403–12, 2005.

[45] SOLIMAN, A.A., The modified extended tanh-function method for solving Burgers-type equations. Physics A.361:394–404, 2006.

[46] LÜ, Z., ZHANG, H., On a further extended tanh method. Physics Letters A. 307:269–273, 2003.

[47] KHURI, S.A., A complex tanh-function method applied to nonlinear equations of Schrödinger. Chaos, Solitons and Fractals. 20:1037–1040, 2004.

[48] WANG, M., LI, X., ZHANG, J. , The (G’/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. Physics Letters A. 372:417–423, 2008.

[49] WAZWAZ, A.M., Two reliable methods for solving variants of the KdV equation with compact and non compact structures. Chaos, Solitons and Fractals. 28-2:454-462, 2006.

[50] ZHANG, J.F., Exact and explicit solitary wave solutions to some nonlinear equations. Int. J. Theor. Phys. 35:1793, 1996.

[51] FAN, E.G., ZHANG, H.Q., A note on the homogeneous balance method. Phys. Lett. A. 246:403, 1998.

[52] CARROLL, R. W. and SHUWALTER, R. E., Singular and Degenerate Cauchy Problem. Academic Press, New York, San Francisco, London, 1976.

[53] SOBOLEV, S. L., Some new problems in mathematical physics. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 4,18:3-5, 1950.

[54] GABOV, S. A., New problems of the mathematical theory of waves. Fizmatlit, Moscow, 1998.

[55] YU DOBROKHOTOV, S., Nonlocal analogs of the nonlinear Boussinesq equation for surface waves over a rough bottom, and their asymptotic solutions. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 292(1):63–67,1987.

[56] KORPUSOV, M. O., PLETNER, Y. D., SVEHNIKOV, A. G., Unsteady waves in anisotropic dispersive media. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 39:1006–1022, 1999.

[57] KORPUSOV, M. O., SVEHNIKOV, A.G., Three-dimensional nonlinear evolutionary pseudoparabolic equations in mathematical physics. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 43:1835–1869, 2003.

[58] NAUMKIN, P. I., SHISHMAREV, I. A., Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves (Translations of Mathematical Monographs). Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994

[59] KORPUSOV, M.O., SVEHNIKOV, A.G., Three-dimensional nonlinear evolutionary pseudoparabolic equations in mathematical physics. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 43:1835–1869, 2003.

[60] SVIRIDYUK, G. A., FEDEROV, V. E., Analytic semigroups with kernel and linear equations of Sobolev type. Sibirsk. Mat. Zh. 36:1130–1145, 1995.

[61] EGEROV, I. E., PYATKOV, S. G., POPOV, S. V., Non-classical differential-operator equations. Nauka, Novosibirsk, 2000.

[62] FAVINI, A., YAGI, A., Degenerate differential equations in Banach spaces. Marcel Dekker, New York, 1999.

[63] KAIKINA, E. I., NAUMKIN, P. I., SHISHMAREV, I. A. , The Cauchy problem for an equation of Sobolev type with power non-linearity. Izvestiya: Mathematics. 69(1):59–111, 2005.

[64] GAJEWSKI, H., GROEGER, K., ZACHARIAS, K., Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator differential gleichungen. Mathematische Lehrbucher und Monographien, Band 38, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

[65] STEFANELLI, U., On a class of doubly nonlinear nonlocal evolution equations. J. Differential Integral Equations. 15:897–922, 2002.

[66] SHOWALTER, R. E., Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations, Mathematical Surveys and Monographs. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[67] KOZHANOV, A. I., Parabolic equations with nonlocal nonlinear source. Sibirsk. Mat. Zh. 35:1062–1073, 1994.

[68] KOZHANOV, A. I., Initial boundary value problem for generalized Boussinesq type equations with nonlinear source. Mat. Zametki. 65(1):70–75, 1999.

[69] AMICK, C. J. , BONA, J. L., SCHONBECK, M. E., Decay of solutions of some nonlinear wave equations. J. Differential Equations. 81:1–49, 1989.

[70] BISOGNIN, V., On the asympototic behavior of the solutions of a nonlinear dispersive system of Benjamin–Bona–Mahony's type. Boll. Un. Mat. Ital. B. 10:99–128, 1996.

[71] BONA, J. L., LUO, L., Decay of solutions to nonlinear, dispersive wave equations, J. Differential Integral Equations. 6:961–980, 1993.

[72] BONA, J. L., LUO, L., More results on the decay of solutions to nonlinear, dispersive wave equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems. 1:151–193, 1995.

[73] DIX, D. B., The dissipation of nonlinear dispersive waves: The case of asymptotically weak nonlinearity. Comm. Partial Differential Equations. 17:1665–1693, 1992.

[74] KARCH, G., Asymptotic behaviour of solutions to some pseudoparabolic equations. Math. Methods Appl. Sci. 20:271–289, 1997.

[75] KARCH, G., Large-time behavior of solutions to nonlinear wave equations: higher-order asymptotics. Math. Methods Appl. Sci. 22, 1671–1697, 1999.

[76] MEI, M., Lq-decay rates of solutions for Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations. J. Diff. Eq.; 158:314–340, 1999.

[77] MEI, M., SCHMEISER, C., Asymptotic profiles of solutions for the BBM–Burgers equations. Funkcial. Ekvac. 44:151–170, 2001.

[78] MITIDIERI, E., POKHOZHAEV, S. I., A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities. Trudy Mat. Inst. Steklov. 234:1–383, 2001.

[79] ZHANG, L., Decay of solutions of generalized Benjamin–Bona–Mahony equations. Acta Math. Sinica (N.S.). 10:428–438, 1994.

[80] ZHANG, L., Decay of solutions of generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations in n-space dimensions. Nonlinear Anal. 25:1343–1369, 1995.

[81] ZWILLINGER, D., Handbook of Differential Equations, 3rd edition, Academic Press, 1997.

[82] PEREGRINE, D.H., Calculations of the development of an undular bore. J. Fluid Mech. 25:321-330, 1996.

[83] BENJAMIN, T. B., BONA, J. L. , MAHONY, J. J., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 272:47-78,1972.

[84] OSKOLKOV, A. P., Nonlocal problems for one class of nonlinear operator equations that arise in the theory of Sobolev-type equations. Zap. Nauchn. Sem. POMI. 198:3148, 1991.

[85] OSKOLKOV, A. P., On stability theory for solutions of semilinear dissipative equations of the Sobolev type. Zap. Nauchn. Sem. 200: 139-148, 1992.

[86] CAMASSA, R., HOLM, D. D., An integrable shallow water equation with peaked solitons. Phys. Rev. Lett. 71(11):1661-1664, 1993.

[87] CAMASSA, R., HOLM, D. D., HYMAN, J., A new integrable shallow water equation. Adv. Appl. Mech. 31:1-33, 1994.

[88] PARKES, E.J., VAKHNENKO, V.O., Explicit solutions of the Camassa-Holm equation. Chaos Solitons Fractals. 26(5):1309-1316, 2005.

[89] WAZWAZ, A.M., New solitary wave solutions to the modified forms of Degasperis-Procesi and Camassa-Holm equations. Appl. Math. Comput. 186:130-41, 2007.

[90] JOHNSON, R.S., Camassa–Holm, Korteweg–de Vries and related models for water waves. J. Fluid Mech. 455:63, 2002.

[91] JOHNSON, R.S., The classical problem of water waves: a reservoir of integrable and nearly-integrable equations. J. Nonlinear Math. Phys. 10 (Suppl. 1):72, 2003.

[92] AMFILOKHIEV, V.B.,VOITKUNSKII, Y.I., MAZAEVA, N.P., KHODORKOVSKII, Y.S., Trudy Leningr.Korablestr. Inst. 96:3-9, 1975.

[93] SVIRIDYUK, G. A., YAKUPOV, M. M., The phase space of Cauchy-Dirichlet problem for a nonclassical equation. Differentsial'nye Uravneniya. 39(11):1556-1561, 2003.

[94] COCLITE, G.M., HOLDEN, H., KARLSEN, K.H., Global weak solutions to a generalized hyperelastic-rod wave equation. Siam J. Math. Anal. 37(4):1044-1069, 2005.

[95] CONSTANTIN, A., On the Cauchy problem for the periodic Camassa–Holm equation. J. Differential Equations. 141(2):218–235, 1997.

[96] CONSTANTIN, A., On the scattering problem for the Camassa–Holm equation. R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 457: 953–970, 2001.

[97] PARKES, E.J., VAKHNENKO, V.O., Explicit solutions of the Camassa-Holm equation. Chaos Solitons Fractals. 26(5):1309-1316, 2005.

[98] WAZWAZ, A.M., New solitary wave solutions to the modi.ed forms of Degasperis-Procesi and Camassa-Holm equations. Appl. Math. Comput. 186:130-41, 2007.

[99] BOUTET DE MONVEL, A., KOSTENKO, A., SHEPELSKY, D. , TESCHL, G., Long-Time Asymptotics for the Camassa–Holm Equation. SIAM J. Math. Anal. 41 (4):1559–1588, 2009.

[100] IVANOV, R. Water waves and integrability. Phil. Trans. R. Soc. 365:2267–2280, 2007.

[101] DULIN, H.R., GOTTWALD, G.A., HOLM, D.D., On asymptotically equivalent shallow water wave equations. Physica D. 190:1-14, 2004.

[102] WHITHAM, G.B., Variational methods and applications to water wave. Proc. R. Soc. Lond. A. 299:625, 1967.

[103] FORNBERG, B., WHITHAM, G.B., A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 289:373-404. 1978.

[104] BENJAMIN, T. B., BONA, J. L., MAHONY, J. J., Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 272:47-78. 1972.

[105] RAUPP, M. A., Galerkin methods applied to the Benjamin-Bona-Mahony equation. Bol. Soc. Brazileira de Mat. 6:65-77, 1975.

[106] WAHLBIN, L., Error estimates for a Galerkin method for a class of model equations for long waves. Numerische Math.289-303, 1975.

[107] EWING, R. E., Time-stepping Galerkin methods for nonlinear Sobolev partial differential equation. Siam J. Numer. Anal. 15:1125-1150, 1978.

[108] ARNOLD, D. N., DOUGLAS, J.,THOMEE, V., Superconvergence of fininite element approximation to the solution of a Sobolev equation in a single space variable. Math. Comput. 27:737-743, 1981.

[109] MANICKAM, S. A. V., PANI, A. K., CHANG, S. K., A second-order splitting combined with orthogonal cubic spline collocation method for the Roseneau equation. Numer. Methods Partial Diff. Equat. 14:695-716, 1998.

[110] BRUZON, M.S., GANDARIAS, M.L., Travelling wave solutions for a generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation. Inter. J. Math. Models and Methods in Appl. Sci. 103-108, 2008.

[111] PEREGRINE, D.H., Calculations of the development of an undular bore. J. Fluid Mech. 25:321-330, 1996.

[112] WAZWAZ, A.M., HELAL, M.A., Nonlinear variants of the BBM equation with compact and noncompact physical structures. Chaos, Solitons and Fractals. 26(3):767-776, 2005.

[113] AL-KHALED, K., MAMONI, S., ALAWNEH, A., Approximate wave solutions for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equations. Appl. Math. Comput. 171:281-292, 2005.

[114] TARI, H., GANJI, D.D., Approximate explicit solutions of nonlinear BBMB equations by He’s methods and comparison with the exact solution. Phys. Lett. A. 367:95-101, 2007.

[115] EL-WAKIL, S.A., ABDOU, M.A., HENDI, A., New periodic wave solutions via Exp-function method. Phys. Lett. A. Preprint.; 6:830-840, 2008.

[116] QUINTERO, J. R., GRAJALES, J. C. M., Instability of solitary waves for a generalized Benney-Luke equation. Journal of Nonlinear Analysis. 68:3009-3033, 2008.

[117] BENNEY, D. J., LUKE, J. C., Interactions of permanent waves of .nite amplitude. J. Math. Phys. 43:309-313, 1964.

[118] PEGO, R. L., QUINTERO, J. R., Two dimensional solitary waves for a Benney-Luke equation. Physica D: Nonlinear Phenomena. 132:476-496, 1999.

[119] QUINTERO, J. R., Nonlinear stability of solitary waves for a 2-d Benney-Luke equation. Discrete and Continuous Dynamical Systems. 13:203-218, 2005.

[120] GONZALES, A., The Cauchy problem for Benney-Luke and generalized Benney-Luke equations, Differential and Integral Equations. 20:1341-1362, 2007.

[121] QUINTERO, J. R., A Remark on the Cauchy Problem for the Generalized Benney-Luke Equation. Journal of Differential and Integral Equations. 21:9-10, 2008.

[122] WANG, S., XU, G., CHEN, G., Cauchy problem for the generalized Benney-Luke equation. Journal of Mathematical Physics. 48:073521, 2007.

[123] QUINTERO, J. R., Existence and analyticity of lump solutions for generalized Benney-Luke equations. Revista Colombiana Mathematicas. 36:71-95, 2002.

[124] JI-BIN, L., Exact traveling wave solutions to 2D-generalized Benney-Luke equation. Applied Mathematics and Mechanics. 29:1391-1398, 2008.

[125] SCHNEIDER, G., EUGENE WAYNE, C., Kawahara dynamics in dispersive media. Physica D. 152-153:384-394, 2001.

[126] DURUK, N., ERKİP, A., ERBAY, H. A., A higher-order Boussinesq equation in locally nonlinear theory of one-dimensional nonlocal elasticity. IMA Journal of Applied Mathematics.74:97-106, 2009.

[127] ABDOU, M.A., SOLIMAN, A.A., EL-BASYONY, S.T., New application of Exp-function method for improved Boussinesq equation. Physics Letters A. 369:469-475, 2007.

[128] EL-WAKIL, S.A., EL-LABANY, S.K., ZAHRAN, M.A.,SABRY, R., Modified extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation. 161:403-412, 2005.

[129] BIAZAR, J., AYATI, Z., Improved G’/G-Expansion Method and Comparing with Tanh-Coth Method. Appl. Appl. Math. 6(1):240-250, 2011.

[130] WAZWAZ, A.M., Nonlinear Variants of the Improved Boussinesq Equation with Compact and Noncompact Structures. Computers and Mathematics with Applications. 49:565-574, 2005.

[131] GODEFROY, A. D., Blow up of solutions of a generalized Boussinesq equation. IMA Journal of Applied Mathematics. 60:123-138, 1998.

[132] WANG, S., LI, M., The Cauchy problem for coupled IMBq equations. IMA Journal of Applied Mathematics. 74:726-740, 2009.

[133] DURUK, N., ERBAY, H. A., ERKİP, A., Blow-up and global existence for a general class of nonlocal nonlinear coupled wave equations. J. Differential Equations. 250:1448-1459, 2011.

[134] CHEN, G., ZHANG, H., Initial boundary value problem for a system of generalized IMBq equations. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 27:497-518, 2004.

[135] ROSENAU, D., Dynamics of dense lattice. Phys. Rev. B. 36:5868-5876, 1987.

[136] CHRISTIANSEN, P. L., LOMDAHL, P. S., MUTO, V., On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom. Nonlinearity. 4:477-501, 1991.

[137] TURTZYN, S. K., On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom. Sufficient criterion of blow-up in the continuum limit. Phys. Lett. A. 173:267-269, 1993.

[138] PEGO, R. L., SMEREKA, P., WEINSTEIN, M.I., Oscillatory instability of solitary waves in a continuum model of lattice vibrations. Nonlinearity. 8:921-941, 1995.

[139] FAN, X., TIAN, L., Compaction solutions and multiple compaction solutions for a continuum Toda lattice model. Chaos Solitons Fractals. 29:882-894, 2006.

ÖZGEÇMİŞ

Şamil Akçağıl, Erzurumda'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. 1995 yılında Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümüne girdi ve bu bölümden 2000 yılında mezun oldu. Yüksek lisansını aynı Üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde 2005 yılında tamamladı. İngilizce bilen Şamil Akçağıl, 2009 yılından beri Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi'nde Öğretim Görevlisi olarak görev yapmaktadır.