T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E_v^{n+1}, $(n+1)-$BOYUTLU YARI ÖKLİD UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI REGLE YÜZEYLERİN KESİT EĞRİLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Mahmut AKYİĞİT

Enstitü Anabilim Dalı	**: MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**: Prof. Dr. Murat TOSUN**
Ortak Tez Danışmanı	**: Yrd. Doç. Dr. Soley ERSOY**

Nisan 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E_{ν}^{n+1}, $(n+1)-$BOYUTLU YARI ÖKLİD UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI REGLE YÜZEYLERİN KESİT EĞRİLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Mahmut AKYİĞİT

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 20 / 04 / 2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yusuf YAYLI **Jüri Başkanı**	**Prof. Dr. İbrahim OKUR** **Üye**	**Prof. Dr. Murat TOSUN** **Üye**
Doç. Dr. Nejat EKMEKÇİ **Üye**		**Doç. Dr. Levent KULA** **Üye**
Doç.Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR **Üye**		**Yrd.Doç.Dr. Soley ERSOY** **Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında değerli zamanını ayıran, her aşamasını titizlikle değerlendirip, önerileriyle yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Murat TOSUN'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmam süresince bana vakit ayıran, özenle çalışmalarımı takip eden, her zaman ve her konuda desteğini gördüğüm, ikinci danışmanım olan hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Soley ERSOY'a teşekkürü bir borç bilirim.

Doktora aşamasında engin bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen ve değerli katkılar sağlayan Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Bölümü Öğretim Üyesi hocam Sayın Prof. Dr. Muhamet Emin ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam sırasında ellerinden gelen her türlü desteği ve sabrı gösteren aileme en derin duygularla teşekkür ederim.

2010-50-02-018 nolu proje ile çalışmama destek veren SAÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonuna da teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

E_v^{n+1}	: Yarı Öklid uzayı
g_{ab}	: Birinci temel form
g	: Birinci temel formun determinantı
D	: Koneksiyon
Γ_{ij}^{k}	: Christoffel sembolleri
R_{jkl}^{i}	: Riemann eğrilik tensörü katsayıları
R_{ijkl}	: Riemann-Christoffel eğrilik tensörü
Π	: Teğet kesiti
K	: Kesit eğrilik fonksiyonu
$E_k\left(t\right)$	: Regle yüzeyin doğrultman uzayı
$E_{k,\mu}\left(t\right)$	: Yarı regle yüzeyin doğrultman uzayı
$A\left(t\right)$	: Asimptotik demet
$T\left(t\right)$	: Teğetsel demet
$K_{k-m}\left(t\right)$	: Regle yüzeyin sırt uzayı
$K_{k-m,r}\left(t\right)$	: Yarı regle yüzeyin sırt uzayı
$Z_{k-m}\left(t\right)$	: Regle yüzeyin merkez uzayı
$Z_{k-m,r}\left(t\right)$	: Yarı regle yüzeyin merkez uzayı
Ω	: Regle yüzeyin merkez regle yüzeyi
P_i	: Regle yüzeyin $i.$ asli dağılma parametresi
P	: Regle yüzeyin dağılma parametresi

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Yarı Öklid uzayı, Regle yüzey, Kesit eğriliği, Yarı Öklidiyen Beltrami-Euler formülü, Yarı Öklidiyen Lamarle formülü, Yarı Öklidiyen Beltrami-Meusnier formülü.

Dört bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın birinci bölümü giriş kısmı olup, literatür hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde yarı Öklid uzayı, yarı Riemann manifoldu, eğrilikler ve kesit eğrilikleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi. Ayrıca, yarı Öklid uzayında yarı regle yüzeyler tanıtıldı.

Üçüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında genelleştirilmiş yarı regle yüzeylerin kesit eğrilikleri incelendi. Böylece yarı regle yüzeylerin I. ve II. tip yarı Öklidiyen Beltrami-Euler formülü, yarı Öklidiyen Lamarle formülü ve yarı Öklidiyen Beltrami-Meusnier formülleri elde edildi.

Son bölümde ise tüm çalışmanın geniş bir özeti yapıldı ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunuldu.

ON THE SECTIONAL CURVATURES OF GENERALIZED SEMI RULED SURFACES IN $(n+1)-$DIMENSIONAL SEMI EUCLIDEAN SPACE, E_v^{n+1}

SUMMARY

KEY WORDS: Semi Euclidean Space, Ruled Surface, Semi Euclidean Beltrami-Euler Formula, Semi Euclidean Lamarle Formula, Semi Euclidean Beltrami Meusnier Formula.

This study consists of four parts. The first part is an introduction devoted to the literature knowledge. In the second part of this study fundamental definitions and theorems related to semi Euclidean space, semi Riemannian manifold, curvatures and sectional curvature are given. Moreover, in semi Euclidean space semi ruled surfaces are introduced.

The third part is original part of this study. In this part the sectional curvatures of generalized semi ruled surfaces in $(n+1)-$dimensional semi Euclidean space are investigated. Therefore, type I and type II semi Euclidean Beltrami Euler formula, semi Euclidean Lamarle formula and semi Euclidean Beltrami Meusnier formula of semi ruled surfaces are obtained.

In the forth chapter of this thesis, a brief summary of the study is given and a suggestion is proposed for investigations on the realm of sectional curvature of semi ruled surface.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Geometriye ait bilgileri ve yöntemlerini bilimsel bir anlayış içinde sistemleştiren Euclides'dir (M.Ö. 330-275). Euclides bildiklerini M.Ö. 300 yıllarında Elementler adlı kitabında toplamıştır. Daha sonraki yıllarda, bu eserdeki konulara esas olan geometriye Öklid geometrisi denilmiştir. 17. yy. başlarına kadar, geometri daha çok cebirsel olmayan bir tarzda, yani Euclides'in sentetik yöntemi denilen bir yöntem olarak biliniyordu. Geometri, bu yöntem içinde, geometrik şekillerin metrik özellikleri denen uzunluk, açı, alan, hacim v.b. gibi özellikleriyle ilgili olarak, çok sınırlı bir şekilde kalmıştır. Euclides'e ait temel geometri bilgileri, 19. yy. başlarına kadar, Öklid dışı geometrilerin kurulmasına kadar önemini korumuştur. 1854'te C. F. Gauss'un öğrencisi olan B. Riemann, yüzeylerin esas geometrisi ile ilgili çalışmasında analiz metodlarını uyguladı ve böylece Öklid olmayan farklı bir geometri buldu. Sonra, Riemann'ın bu çalışması Einstien'ın izafiyet teorisi için temel teşkil etti.

Diferensiyel geometride yarı Riemann manifoldu, Riemann manifoldunun bir genelleştirilmişidir. Ayrıca, Riemann'dan sonra adlandırılan bir çok matematiksel objeden birisidir. Riemann manifoldu ve yarı Riemann manifoldu arasındaki önemli fark metrik tensörün yarı Riemann manifoldu üzerinde pozitif tanımlı olmamasıdır. Riemann geometrisinde kesit eğriliği, Riemann manifoldlarının eğriliğini tanımlayabilmenin yollarından birisidir. $K(\Pi)$ kesit eğriliği, tanjant uzayının p noktasındaki $2-$boyutlu Π alt düzlemine bağlıdır. Yüzeyin kesit eğriliği, yüzeyin p noktasındaki tanjant düzleminin $2-$boyutlu Π alt düzleminin gauss eğriliğidir. Kısacası, eğrilik kavramı keyfi metrik uzayının yerel yapısını tanımlamanın bir yoludur. Ancak, matematikçiler önceleri bunun farkında olmamalarına rağmen, eğriliği çalışıyorlardı. Bir yüzeyin Gauss anlamında eğrilik kavramı F. Gauss tarafından çalışılırken, diferensiyellenebilir manifoldlardaki eğriliğin kesin olarak tanımlanması ve daha genel anlamda tartışılması Riemann'ın tezi ile başladı.

Riemann ve yarı Riemann manifoldları teorisinde, kovaryant türev terimi sıklıkla Levi-Civita koneksiyonu olarak kullanılır. Yerel koordinatlar sistemine göre bu koneksiyonun bileşenleri Christoffel sembolleri olarak adlandırılır. Aslında Levi-Civita koneksiyonu E. B. Christoffel tarafından bulunmasına rağmen, T. Levi-Civita'dan sonra adlandırıldı.

L. Euler, yüzey ile yüzeyin normalini içeren düzlemin (normal düzlem) arakesiti olan normal eğrisini göz önüne almış ve böylece normal eğrilik ile asli eğrilikler arasındaki bağıntı olan Euler Teoremi (Euler eğrilik formülü) literatüre girmiştir.

Daha sonra Meusnier, yüzeyin normal düzlemi olmak zorunda olmayan (yüzeyin belli bir noktasından geçen ve bu noktada yüzeyin normali ile bir açı yapan) düzlemler ile yüzeyin arakesit eğrilerinin normal eğriliklerini hesaplamış ve böylece önemli sonuçları ile bilinen Meusnier teoremi ilk olarak 1776 da J. B. Meusnier tarafından açıklanmıştır. Meusnier teoremi, verilen bir p noktasında aynı teğete (asimptotik doğrultu olmayan) sahip olan bütün eğrilerin, p noktasında eğrilik çemberleri bir küre üzerinde bulunurlar. Euler formülü, Lamarle formülü ve Meusnier formülü klasik yüzey teorisinden gelmektedir. Teğet kesit eğrilikleri için Beltrami formülü, teğet kesitinin kesit eğriliğine uygulanmış olmasına rağmen Euler formülü uygulanmamıştır. 1976 yılında H. Frank ve O. Giering "Verallgemeinerte Regelflachen" başlıklı çalışmasında E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş regle yüzeyler için Euler formülünü her bir merkez noktada teğet kesitlerin kesit eğriliği için uygulamış ve bu formül Beltrami Euler formülü adını almıştır. Ayrıca regle yüzeyin, teğet kesitinin dağılma parametresi ile bağımlı olduğuna işaret eden Lamarle formülü tanımlanmıştır. Bu formüller kullanılarak herhangi teğet kesit düzleminin kesit eğriliği için Beltrami Meusnier formülü verilmiştir.

Regle yüzeyler konusu, diferensiyel geometri ve kinematik teori tekniklerinin en uygun şekilde kullanılabildiği araştırma konulardan biri olduğundan, matematikçilerin her zaman ilgi odağı olmuştur. Bu yüzden, literatürde bu konu ile ilgili çok sayıda kaynak bulmak mümkündür. Regle yüzeylerin sınıflandırılması, dayanak eğrisiyle ilgili özelliklere göre, regle yüzey ve yüzeyin üzerindeki eğrilik çizgileri, geodezikleri, striksiyon çizgileri ve yüzeyin şekil operatörü ve bunun cebirsel invaryantlarının incelenmesi, regle yüzeylerin açılabilirliği, açılım uzunlukları, kapalı regle yüzeylerin incelenmesi gibi konular regle yüzeyler üzerine yapılan çalışmaların başında gelmektedir.

M. Juza 1962 yılında genelleştirilmiş regle yüzeyleri çalışmıştır. Daha sonra bu çalışmaları H. Frank ve O. Giering'in çalışmaları izlemiştir. Ülkemizde ise 1982 yılında A. Sabuncuoğlu ve 1983 yılında M. Ergüt doktora tezlerinde genelleştirilmiş regle yüzeyleri çalıştılar. 1983 yılında S. Keleş ve N. Kuruoğlu bu yapılan çalışmalar doğrultusunda $n-$ boyutlu Öklid uzayında regle yüzeylerin özelliklerini ve Massey Teoremini ifade etti. Yine, 1984'te A. Altın "Yüksek mertebeden regle yüzeyler" adlı doktora teziyle regle yüzeyler konusunu ele aldı. İlerleyen yıllarda regle yüzeyler konusu Lorentz uzayında da sık bir şekilde çalışılmaya başlandı. A. Turgut 1995'de $3-$boyutlu Minkowski uzayında timelike ve spacelike regle yüzeyleri inceledi. Daha sonra, regle yüzeyler $n-$boyutlu Lorentz uzayına genelleştirildi. 1995 yılında M. Tosun "IR_1^n, Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyler" ve İ. Aydemir "IR_1^n, Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı genelleştirilmiş timelike regle yüzeyler" başlıklı doktora tezleriyle genelleştirilmiş regle yüzeyleri incelediler. Bu çalışmaların devamında 1998 yılında da C. Ekici "Yarı Öklidiyen uzaylarda genelleştirilmiş yarı regle yüzeyler" adlı doktora tezini yapmıştır.

Çalışmamızda, E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında genelleştirilmiş yarı regle yüzeyin birinci temel formu ve metrik katsayıları hesaplanmış ve bunlara bağlı olarak Christoffel sembolleri ve Riemann-Christoffel eğrilikleri elde edilmiştir. Böylece yarı regle yüzeyin kesit eğrilikleri hesap edilmiştir. Bu yarı regle yüzeyin her bir noktasında nondejenere asli teğet kesitlerinin kesit eğrilikleri birinci temel formun matrisinin determinantı cinsinden elde edilmiştir. Buna ek olarak her bir merkez noktada da nondejenere asli teğet kesitlerinin kesit eğrilikleri incelenmiş ve böylece genelleştirilmiş yarı regle yüzeyin asli kesit eğriliği ile asli dağılma parametresi arasında bağıntı elde edilmiştir. Ayrıca nondejenere asli ışın yüzeyi göz önüne alınarak bu yüzeyin kesit eğriliği ile asli dağılma parametresi arasındaki bağıntı ortaya konmuştur. Genelleştirilmiş yarı regle yüzeyin merkez noktasında normal kesit eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Ayrıca doğrultman uzaylı genelleştirilmiş yarı regle yüzeyin herhangi teğet kesitlerinin eğriliği araştırılmıştır.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2. 1. Yarı Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. V, sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

$i)$ $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

$ii)$ $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

$\langle \vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

özelliklerini sağlıyor ise $\langle\ ,\ \rangle$ ya V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer ($2-$lineer) form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.2. V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle\ ,\ \rangle$ olsun. Bu durumda,

$i)$ $\forall \vec{u} \in V$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ için $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle > 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ bilineer formu pozitif tanımlı,

$ii)$ $\forall \vec{u} \in V$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ için $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle < 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ bilineer formu negatif tanımlı,

$iii)$ $\forall \vec{u} \in V$ için $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ bilineer formu pozitif yarı tanımlı,

$iv)$ $\forall \vec{u} \in V$ için $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \leq 0$ ise $\langle\ ,\ \rangle$ bilineer formu negatif yarı tanımlı,

$v)\ \forall \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0$ iken $\vec{u} = \vec{0} \in V$ oluyorsa $\langle\ ,\ \rangle$ bilineer formuna nondejenere aksi halde dejeneredir denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.3. Bir $\langle\ ,\ \rangle$ simetrik bilineer formu nondejeneredir gerek ve yeter şart $\langle\ ,\ \rangle$ nın herhangi bir baza göre ters matrisi vardır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.4. Bir V vektör uzayı üzerinde $\langle\ ,\ \rangle$ nondejenere simetrik bilineer formuna V vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma ve $\left(V, \langle\ ,\ \rangle\right)$ ikilisine de skalar çarpımlı uzay denir (Ekici, 1998).

Tanım 2.1.5. V, vektör uzayının bir alt uzayı W olmak üzere $W^{\perp} = \left\{ \vec{v} \in V \,\middle|\, \vec{v} \perp W \right\}$ olsun. $W^{\perp}$ altuzayına V vektör uzayının dik altuzayı denir (O'Neill, 1983).

Burada $W^{\perp}$ altuzayına W uzayının ortogonal komplemanı diyemeyiz. Çünkü $W + W^{\perp}$ genellikle V vektör uzayının tamamı değildir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.6. V skalar çarpım altuzayının bir alt uzayı W olmak üzere

$$i)\, boyW + boyW^{\perp} = boyV$$

$$ii)\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$$

dır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.7. $\left(V, \langle\ ,\ \rangle\right)$ bir skalar çarpım uzayı ve W da V nin bir altuzayı olsun. Eğer W üzerinde $\langle\ ,\ \rangle$ nondejenere ise W altuzayına nondejenere altuzay aksi halde W altuzayına dejenere altuzay denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.8. V bir skalar çarpım uzayı ve W da V vektör uzayının bir altuzayı olsun. W bir nondejenere altuzaydır gerek ve yeter şart $V = W + W^{\perp}$ dır (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.9. Bir $V \neq \{\vec{0}\}$ skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.10. $\langle \, , \rangle$, V üzerinde simetrik bilineer form ve W uzayı da V vektör uzayının bir altuzayı olsun. $\langle \, , \rangle$ dönüşümünün W üzerinde kısıtlanmışı $\langle \, , \rangle|_W$ olmak üzere

$$\langle \, , \rangle|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna, $\langle \, , \rangle$ simetrik bilineer formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir. Bu durumda $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.11. M, C^{∞} sınıfından manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$\begin{aligned} \langle \, , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) &\to C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \\ (\vec{X}, \vec{Y}) \quad &\to \langle \, , \rangle(\vec{X}, \vec{Y}) = \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle \end{aligned}$$

şeklinde bir skalar çarpım fonksiyonu tanımlı ise M manifolduna Riemann manifoldu ve $\langle \, , \rangle$ ye de M üzerinde bir metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksine M manifoldunun indeksi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.12. M, C^{∞} sınıfından bir manifold olmak üzere sabit indeksli $\langle \, , \rangle$ tensörü

$i)$ $2-$lineer

$ii)$ Simetrik

$iii)$ $\forall \vec{X} \in \chi(M)$ için $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{Y} = 0$

ise $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ ikilisine bir yarı Riemann manifoldu denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.13. Bir M yarı Riemann manifoldu üzerinde $\langle\ ,\ \rangle$ metrik tensörünün indeksine yarı Riemann manifoldunun indeksi denir (O'Neill, 1983).

M, yarı Riemann manifoldunun indeksi ν olmak üzere $0 \leq \nu \leq n = \text{boy}M$ dir. Özel olarak $\nu = 0$ ise M, bir Riemann manifoldu, $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ ise M, bir Minkowski manifoldu adını alır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.14. E^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Öklid uzayı verilsin. $0 \leq \nu \leq n$ olmak üzere

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} x_i y_i$$

metrik tensör ile birlikte seçilen uzay yarı Öklid uzayı olarak isimlendirilir ve E_ν^{n+1} ile gösterilir. Özel olarak $\nu = 0$, $n \geq 2$ ise $E_0^{n+1} = E^{n+1}$, $(n+1)-$boyutlu Öklid uzayı ve $\nu = 1$, $n \geq 2$ ise E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayı adını alır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.15. $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in E_\nu^{n+1}$ olsun. Eğer

$i)$ $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle > 0$ veya $\vec{X} = \vec{0}$ ise $\vec{X}$ vektörüne spacelike vektör,

$ii)$ $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle < 0$ ise $\vec{X}$ vektörüne timelike vektör,

$iii)\ \left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle = 0$ ve $\vec{X} \neq \vec{0}$ ise $\vec{X}$ vektörüne null vektör

denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.16. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayı olsun. $\forall \vec{X} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, $\vec{Y} = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) \in E_v^{n+1}$ için

$$\left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle = 0 \tag{2.1}$$

ise $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörleri yarı Öklid anlamda diktirler denir.

Tanım 2.1.17. V, vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma $\langle\ ,\ \rangle$ olsun. $\overrightarrow{X} \in V$ vektörünün normu

$$\left\| \overrightarrow{X} \right\| = \sqrt{\left| \left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} \right\rangle \right|} \tag{2.2}$$

ile tanımlanır (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.18. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayı ve $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in E_v^{n+1}$ olmak üzere

$i)\ \left\| \vec{X} \right\| > 0$ dır,

$ii)\ \left\| \vec{X} \right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{X}$ bir null vektördür,

$iii)\ \vec{X}$ bir timelike vektör ise $\left\| \vec{X} \right\|^2 = -\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle$ dir,

$iv)\ \vec{X}$ bir spacelike vektör ise $\left\| \vec{X} \right\|^2 = \left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle$ dir

(O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.19. $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ bir yarı Öklid uzayı ve $W\subset V$ bir altuzay olsun. $\langle\ ,\ \rangle|_W$, W altuzayı üzerine indirgenmiş metrik tensör olmak üzere

i) $\langle\ ,\ \rangle|_W : W\times W\to\mathbb{R}$ pozitif tanımlı ise W ya spacelike altuzay,

ii) $\langle\ ,\ \rangle|_W : W\times W\to\mathbb{R}$ $1-$indeksli ve nondejenere ise W ya timelike altuzay,

iii) $\langle\ ,\ \rangle|_W : W\times W\to\mathbb{R}$ dejenere ise W ya null altuzay denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.20. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında, $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ pozitif (negatif) timelike vektörler olsun. Bu durumda

$$\left\langle \vec{X},\vec{Y}\right\rangle \leq \left\|\vec{X}\right\|\left\|\vec{Y}\right\| \tag{2.3}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır (Ratcliffe, 1994).

Teorem 2.1.21. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında, $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ pozitif (negatif) timelike vektörler olsun. Böylece

$$\left\langle \vec{X},\vec{Y}\right\rangle = -\left\|\vec{X}\right\|\left\|\vec{Y}\right\|\cosh\theta \tag{2.4}$$

olacak şekilde bir tek $\theta\geq 0$ reel sayısı vardır. θ reel sayısı $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır (Ratcliffe, 1994).

Teorem 2.1.22. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında, iki lineer bağımsız spacelike vektör $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir

i) $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörleri $\left|\left\langle \vec{X},\vec{Y}\right\rangle\right| > \left\|\vec{X}\right\|\left\|\vec{Y}\right\|$ denklemini sağlar,

ii) $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ spacelike vektörleri tarafından gerilen V altuzayı timelikedır, *iii*) Sırasıyla, $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ ye Lorentz anlamda ortogonal olan H^n nin, P ve Q hiperdüzlemleri ayrıktır (Ratcliffe, 1994).

Teorem 2.1.23. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında, $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ spacelike vektörlerinin gerdikleri altuzay timelike ise $\left|\left\langle \vec{X},\vec{Y}\right\rangle\right| > \|\vec{X}\|\|\vec{Y}\|$ eşitsizliği vardır. Böylece,

$$\left\langle \vec{X},\vec{Y}\right\rangle = \|\vec{X}\|\|\vec{Y}\|\cosh\theta \tag{2.5}$$

olacak şekilde bir tek $\theta > 0$ reel sayısı vardır. θ reel sayısı $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ spacelike vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır (Ratcliffe, 1994).

Teorem 2.1.24. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında, $\vec{X}$ bir spacelike vektör ve $\vec{Y}$ timelike vektör ise

$$\left\langle \vec{X},\vec{Y}\right\rangle = \|\vec{X}\|\|\vec{Y}\|\sinh\theta \tag{2.6}$$

olacak şekilde bir tek $\theta > 0$ reel sayısı vardır. Burada, θ reel sayısı $\vec{X}$ spacelike vektörü ile $\vec{Y}$ timelike vektörü arasındaki hiperbolik açıdır (Ratcliffe, 1994).

Tanım 2.1.25. E_v^{n+1} yarı Öklid uzayı ve α da E_v^{n+1} de bir eğri olsun. α eğrisinin hız vektörü $\dot{\vec{\alpha}}$ olmak üzere

i) $\left\langle \dot{\vec{\alpha}},\dot{\vec{\alpha}}\right\rangle < 0$ ise α timelike eğri,

ii) $\left\langle \dot{\vec{\alpha}},\dot{\vec{\alpha}}\right\rangle > 0$ veya $\dot{\vec{\alpha}} = \vec{0}$ ise α spacelike eğri,

iii) $\left\langle \dot{\vec{\alpha}},\dot{\vec{\alpha}}\right\rangle = 0$ ve $\dot{\vec{\alpha}} \neq \vec{0}$ ise α null eğri olarak isimlendirilir (O’Neill, 1983).

2.2. Koneksiyonlar ve Eğrilik

Tanım 2.2.1. M, bir yarı Riemann manifoldu ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. $\forall$ $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z} \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (\vec{X},\vec{Y}) \quad &\to D(\vec{X},\vec{Y}) = D_{\vec{X}}\vec{Y} \end{aligned}$$

operatörü,

D1) $D_{\vec{X}}(\vec{Y}+\vec{Z}) = D_{\vec{X}}\vec{Y} + D_{\vec{X}}\vec{Z}$

D2) $D_{\vec{X}+\vec{Y}}\vec{Z} = D_{\vec{X}}\vec{Z} + D_{\vec{Y}}\vec{Z}$

D3) $D_{f\vec{X}}\vec{Y} = f D_{\vec{X}}\vec{Y}$

D4) $D_{\vec{X}}(f\vec{Y}) = \vec{X}[f]\vec{Y} + f D_{\vec{X}}\vec{Y}$

özeliklerini sağlıyorsa D ye M üzerinde koneksiyon $D_{\vec{X}}\vec{Y}$ ye de $\vec{Y}$ vektör alanının $\vec{X}$ vektör alanına göre kovaryant türevi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.2. M, bir yarı Riemann manifoldu ve M üzerindeki koneksiyon D olmak üzere $\forall$ $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z} \in \chi(M)$ için

D5) $[\vec{X},\vec{Y}] = D_{\vec{X}}\vec{Y} - D_{\vec{Y}}\vec{X}$

D6) $\vec{X}\langle \vec{Y},\vec{Z} \rangle = \langle D_{\vec{X}}\vec{Y},\vec{Z} \rangle + \langle \vec{Y}, D_{\vec{X}}\vec{Z} \rangle$

özelikleri sağlanıyorsa D koneksiyonuna M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2.3. M, bir yarı Riemann manifoldu ve M nin her bir U koordinat komşuluğu üzerinde yerel koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve tanjant uzayının bazı $\{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n\}$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$, olsun.

$$D_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \qquad , \qquad 1 \le i, j \le n \tag{2.7}$$

olmak üzere

$$\Gamma_{ij}^k : U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$$

Γ_{ij}^k fonksiyonları D koneksiyonun Christoffel sembolleri olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

$[\partial_i, \partial_j] = 0$ ve (D5) den $D_{\partial_i}(\partial_j) = D_{\partial_j}(\partial_i)$ dir. Böylece,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \tag{2.8}$$

dir (O'Neill, 1983).

Önerme 2.2.4. U üzerinde yerel koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve tanjant uzayının bazı $\{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n\}$, öyle ki $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$, olsun. $\overrightarrow{W} = \sum_j W_j \partial_j$ olmak üzere

$$D_{\partial_i}\left(\sum_j W_j \partial_j\right) = \sum_k \left(\frac{\partial W_k}{\partial x_i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W_j\right)\partial_k \tag{2.9}$$

dır. Burada Γ_{ij}^k Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{m} g^{km}\left[\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\right] \quad \text{(Koszul eşitliği)} \tag{2.10}$$

ile verilir. Ayrıca D_{∂_i} , ∂_i yönündeki yarı Öklid anlamda kovaryant türev ve g^{km} ise g_{km} matrisinin ters matrisidir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.5. M, bir yarı Riemann manifoldu ve M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu D olsun.

$$\begin{aligned} R : \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) &\to \chi(M) \\ \left(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}\right) &\to R\left(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}\right) = R_{\vec{X}\vec{Y}}\vec{Z} \end{aligned}$$

$$R_{\vec{X}\vec{Y}}\vec{Z} = D_{\vec{X}}D_{\vec{Y}}\vec{Z} - D_{\vec{Y}}D_{\vec{X}}\vec{Z} - D_{\left[\vec{X},\vec{Y}\right]}\vec{Z} \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon M üzerinde 3. mertebeden bir kovaryant tensör alanıdır ve M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü olarak isimlendirilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Ayrıca $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in T_P(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R_{\vec{x}\vec{y}} : T_P(M) &\to T_P(M) \\ \vec{z} &\to R_{\vec{x}\vec{y}}\vec{z} \end{aligned}$$

operatörüne eğrilik operatörü adı verilir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.6. Eğer $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in T_P(M)$ ise

$$\begin{aligned} &1)\ R_{\vec{x}\vec{y}} = -R_{\vec{y}\vec{x}} \\ &2)\ \left\langle R_{\vec{x}\vec{y}}\vec{v},\vec{w}\right\rangle = -\left\langle R_{\vec{x}\vec{y}}\vec{w},\vec{v}\right\rangle \\ &3)\ R_{\vec{x}\vec{y}}\vec{z} + R_{\vec{y}\vec{z}}\vec{x} + R_{\vec{z}\vec{x}}\vec{y} = 0 \\ &4)\ \left\langle R_{\vec{x}\vec{y}}\vec{v},\vec{w}\right\rangle = \left\langle R_{\vec{v}\vec{w}}\vec{x},\vec{y}\right\rangle \end{aligned} \tag{2.12}$$

dır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.7. M, yarı Riemann manifoldunun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinat sisteminin koordinat komşuluğunda tanjant uzayının bazı $\{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n\}$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \le i \le n$, olmak üzere M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü

$$R_{\partial_k \partial_l}\left(\partial_j\right) = \sum_{i=1}^{n} R^i_{jkl} \partial_i \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitlikteki R^i_{jkl} fonksiyonlarına M nin Riemann eğrilik tensörü katsayıları adı verilir (Beem, 1981).

Teorem 2.2.8. M, yarı Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü

$$R_{\partial_k \partial_l}\left(\partial_j\right) = \sum_{i=1}^{n} R^i_{jkl} \partial_i$$

olmak üzere R^i_{jkl} Riemann eğrilik tensörü katsayıları

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x_k}\Gamma^i_{lj} - \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^i_{kj} + \sum_{m=1}^{n}\left(\Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj}\right) \tag{2.14}$$

dir (Beem, 1981).

Tanım 2.2.9. M, $n-$boyutlu $(n \ge 4)$ yarı Riemann manifoldu olsun. $\forall\, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}, \vec{W} \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R : \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) &\to C^\infty(M, IR) \\ \left(\vec{W}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\right) &\to R\left(\vec{W}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\right) = \left\langle \vec{W}, R_{\vec{X}\vec{Y}}\vec{Z} \right\rangle \end{aligned} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanan 4. mertebeden bir kovaryant tensöre, M üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.2.10. M, yarı Riemann manifoldunun Riemann-Christoffel eğrilik tensörü

$$R_{ijkl} = \sum_{r=1}^{n} g_{ir} R^{r}_{jkl} \tag{2.16}$$

dir (Beem, 1981).

Tanım 2.2.11. M, bir yarı Riemann manifoldu ve $P \in M$ noktasındaki $T_P(M)$ tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı Π olsun. Π ye M nin P noktasındaki teğet kesiti denir (O'Neill, 1983).

$\vec{v}, \vec{w} \in T_P(M)$ tanjant vektörleri, Π teğet kesitinin bir bazını oluştursunlar. Bu takdirde

$$Q(\vec{v},\vec{w}) = \langle \vec{v},\vec{v}\rangle\langle \vec{w},\vec{w}\rangle - \langle \vec{v},\vec{w}\rangle^2 \tag{2.17}$$

olmak üzere Π teğet kesiti nondejeneredir ancak ve ancak $Q(\vec{v},\vec{w}) \neq 0$ dır (O'Neill, 1983).

$|Q(\vec{v},\vec{w})|$ mutlak değeri $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ ile oluşturulan olan paralelkenarın alanının karesine eşittir. Eğer $\langle\ ,\ \rangle|_{\Pi}$ definit ise $Q(\vec{v},\vec{w})$ pozitif, $\langle\ ,\ \rangle|_{\Pi}$ indefinit ise $Q(\vec{v},\vec{w})$ negatiftir (O'Neill, 1983).

M yarı Riemann manifoldunun P noktasındaki Π nondejenere teğet kesitinin bir bazı $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ olsun. Bu takdirde M manifoldunun teğet kesitleri

$$\langle \vec{v},\vec{v}\rangle\langle \vec{w},\vec{w}\rangle - \langle \vec{v},\vec{w}\rangle^2 < 0 \qquad \text{(timelike düzlem)}$$

$$\langle \vec{v},\vec{v}\rangle\langle \vec{w},\vec{w}\rangle-\langle \vec{v},\vec{w}\rangle^2=0 \qquad \text{(dejenere düzlem)}$$

$$\langle \vec{v},\vec{v}\rangle\langle \vec{w},\vec{w}\rangle-\langle \vec{v},\vec{w}\rangle^2>0 \qquad \text{(spacelike düzlem)}$$

olacak şekilde sınıflandırılır (Beem, 1981).

Tanım 2.2.12. M , bir yarı Riemann manifoldu ve $P\in M$ noktasındaki nondejenere teğet kesiti Π olsun. Bu düzlem üzerinde $\forall \vec{v},\vec{w}\in \Pi$ için

$$K(\vec{v},\vec{w})=\frac{\langle R_{\vec{v}\vec{w}}\vec{v},\vec{w}\rangle}{\langle \vec{v},\vec{v}\rangle\langle \vec{w},\vec{w}\rangle-\langle \vec{v},\vec{w}\rangle^2} \tag{2.18}$$

şeklinde verilen K reel değerli fonksiyonuna M nin P noktasındaki kesit eğrilik fonksiyonu ve $K(\vec{v},\vec{w})$ reel değerine de M manifoldunun P noktasındaki kesit eğriliği denir (Beem, 1981).

$\{\vec{v},\vec{w}\}$ bazı ile verilen Π teğet kesitinin kesit eğriliği, $\vec{v}=\sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $\vec{w}=\sum w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ olmak üzere

$$K(\vec{v},\vec{w})=\frac{\sum R_{ijkm} w_i v_j w_k v_m}{\sum g_{ij} v_i v_j g_{km} w_k w_m-\left[\sum g_{ij} v_i w_j\right]^2} \tag{2.19}$$

dir (Beem, 1981).

Tanım 2.2.13. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında M, $(k+1)-$boyutlu yarı regle yüzeyin $\xi\in T_M(\xi)$ noktasında tanjant uzayının iki boyutlu altuzayının bir bazı $\{\vec{b},\vec{c}\}$ olsun. $Sp\{\vec{b},\vec{c}\}$ teğet kesiti nondejenere olmak üzere

$$K_\xi(\vec{b},\vec{c})=\frac{\langle \vec{b},R(\vec{b},\vec{c})\vec{c}\rangle}{\langle \vec{b},\vec{b}\rangle\langle \vec{c},\vec{c}\rangle-\langle \vec{b},\vec{c}\rangle^2} \tag{2.20}$$

olarak tanımlanan $K_{\xi}\left(\vec{b},\vec{c}\right)$ reel değerine M yarı regle yüzeyinin ξ noktasındaki kesit eğriliği denir.

M nin lineer bağımsız teğet vektörleri $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ nin koordinatları sırasıyla $\left(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k\right)$ ve $\left(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_k\right)$ olmak üzere $\xi\in T_M\left(\xi\right)$ noktasında M regle yüzeyinin kesit eğriliği, bileşenleri cinsinden

$$K_{\xi}\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\frac{\sum\limits_{i,j,r,s=0}^{k} R_{ijrs}\beta_i\beta_r\gamma_j\gamma_s}{\left\langle\vec{b},\vec{b}\right\rangle\left\langle\vec{c},\vec{c}\right\rangle-\left\langle\vec{b},\vec{c}\right\rangle^2} \tag{2.21}$$

dır.

2. 3. E_v^{n+1}, Yarı Öklid Uzayında Genelleştirilmiş Yarı Regle Yüzeyler

E_v^{n+1}, $\left(n+1\right)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, $\left\{0\right\}\subset I\subset R$ olmak üzere diferensiyellenebilir bir nonnull eğri

$$\begin{aligned}\alpha : I &\rightarrow E_v^{n+1}\\ t &\rightarrow \alpha\left(t\right)=\left(\alpha_1\left(t\right), \ldots ,\alpha_{n+1}\left(t\right)\right)\end{aligned}$$

verilmiş olsun. Her $\alpha\left(t\right)$ noktasında tanımlanan $\left\{e_1\left(t\right),e_2\left(t\right),\ldots,e_k\left(t\right)\right\}$ ortonormal baz vektör alan sistemi, $\alpha\left(t\right)\in E_v^{n+1}$ noktasındaki $T_{E_v^{n+1}}\left(\alpha\left(t\right)\right)$ tanjant uzayının bir alt uzayını gerer. Bu alt uzay $E_{k,\mu}\left(t\right)$ ile gösterilirse

$$E_{k,\mu}\left(t\right)=Sp\left\{e_1\left(t\right),e_2\left(t\right),\ldots,e_k\left(t\right)\right\}\subset E_v^{n+1} \quad , \quad 0\leq\mu\leq v$$

şeklinde $k-$boyutlu bir altuzaydır.

$$\langle e_i(t), e_j(t)\rangle = \varepsilon_i \delta_{ij} \quad , \qquad \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & , \quad 1 \le i \le k-\mu \\ -1 & , \; k-\mu+1 \le i \le k \end{cases}$$

olmak üzere $E_{k,\mu}(t)$, $\mu \ge 1$, altuzayına yarı altuzay denir. $E_{k,\mu}(t)$, $\mu \ge 1$, yarı altuzayında μ tane timelike vektör vardır. Eğer $\mu = 0$ ise $E_{k,0}(t)$ altuzayında timelike vektör alanı olmayacağından $E_{k,0}(t) = E_k(t)$ dır. Yani, bir Öklid altuzaydır. Eğer $\mu = 1$ ise $E_{k,1}(t)$ bir altuzayında bir tane timelike vektör alanı olacağından $E_{k,1}(t)$ timelike altuzay olacaktır (Ekici, 1998).

Bundan sonra, $E_{k,\mu}(t)$, $\mu \ge 1$, yarı altuzay olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.3.1. $E_{k,\mu}(t)$ yarı altuzayı E_v^{n+1} yarı Öklid uzayının α nonnull eğrisi boyunca hareket ederken E_v^{n+1} yarı Öklid uzayında $(k+1)-$boyutlu bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında $(k+1)-$boyutlu genelleştirilmiş yarı regle yüzey denir ve bu regle yüzeyi M ile gösterilir (Ekici, 1998).

Tanım 2.3.2. $E_{k,\mu}(t)$ yarı altuzayına, M genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultman uzayı ve α nonnull eğrisine de M genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin dayanak eğrisi denir (Ekici, 1998).

Böylece, M, $(k+1)-$boyutlu yarı regle yüzeyi için bir parametrizasyon

$$\varphi(t, u_1, u_2, \ldots, u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i e_i(t), \quad (t, u_1, u_2, \ldots, u_k) \in I \,\mathrm{x}\, \mathbb{R}^k \qquad (2.22)$$

ile verilir. Eğer φ nin t ve u_i, $1 \le i \le k$ parametrelerine göre türevleri alınırsa

$$\varphi_t = \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i \dot{e}_i(t)$$
$$\varphi_{u_i} = e_i(t) \qquad , \qquad 1 \le i \le k$$

bulunur. Bu çalışma boyuca aksi söylenmedikçe

$$\left\{ \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i \dot{e}_i(t),\ e_1, e_2, \ldots, e_k \right\} \tag{2.23}$$

sistemi daima lineer bağımsız olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.3.3. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, $(k+1)-$boyutlu bir yarı regle yüzey M ve yarı regle yüzeyin doğrultman uzayı da $E_{k,\mu}(t) = Sp\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ olmak üzere

$$Sp\left\{ e_1, e_2, \ldots, e_k, \dot{e}_1, \dot{e}_2, \ldots, \dot{e}_k \right\} \tag{2.24}$$

altuzayına, M yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına göre asimptotik demeti denir ve $A(t)$ ile gösterilir (Ekici, 1998).

$boy\, A(t) = k+m,\ 0 \le m \le k,$ olmak üzere $A(t)$ asimptotik demetinin $E_{k,\mu}(t)$ yarı alt uzayını ihtiva eden

$$\{ e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+m} \}$$

şeklinde bir ortonormal baz bulunabilir. $E_{k,\mu}(t)$ bir yarı altuzay olduğundan $e_i(t),\ 1 \le i \le k,$ vektörleri için

$$\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij} \quad , \quad 1 \le i, j \le k$$

bağıntıları sağlanır öyle ki burada

$$\left\langle e_i(t), e_i(t)\right\rangle = \varepsilon_i \quad , \qquad \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & , \quad 1 \le i \le k-\mu \\ -1 & , \quad k-\mu+1 \le i \le k \end{cases}$$

dır. E_v^{n+1} yarı Öklid uzayının bir ortonormal bazında v tane timelike vektör olduğundan $E_{k,\mu}(t)$ yarı altuzayını ihtiva eden $A(t)$ asimptotik demetinin bir

$$\left\{e_1, e_2, ..., e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_{k+m}\right\}$$

bazında da en az μ tane timelike vektör vardır. Bu ifade eder ki

$$A(t) = Sp\left\{e_1, e_2, ..., e_k, \dot{e}_1, \dot{e}_2, ..., \dot{e}_k\right\}$$

bir yarı altuzaydır.

Tanım 2.3.4. E_v^{n+1} yarı Öklid uzayında $(k+1)-$boyutlu yarı regle yüzey M ve M nin doğrultman uzayı ve dayanak eğrisi sırasıyla $E_{k,\mu}(t)$ ve α olsun.

$$Sp\left\{e_1, e_2, ..., e_k, \dot{e}_1, \dot{e}_2, ..., \dot{e}_k, \dot{\alpha}\right\} \tag{2.25}$$

altuzayına, M yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına göre teğetsel demeti denir ve $T(t)$ ile gösterilir (Ekici, 1998).

M yarı regle yüzeyinin asimptotik demeti için $boy\, A(t) = k+m,\ 0 \le m \le k,$ olmak üzere

$$k+m \le boy\, T(t) \le k+m+1$$

dir.

Kabul edelim ki $boy\, T(t) = k + m,\ 0 \leq m \leq k,$ olsun. Bu takdirde

$$\{e_1, e_2, ..., e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_{k+m}\}$$

hem $A(t)$ asimptotik demetinin hem de $T(t)$ teğetsel demetinin bir ortonormal bazıdır. Bu durumda $A(t) = T(t)$ dir. $A(t)$ asimptotik demeti yarı altuzay olduğundan dolayı $T(t)$ teğetsel demeti de yarı altuzaydır.

Kabul edelim ki $0 \leq m \leq k$ için $boy\, T(t) = k + m + 1$ olsun. Bu takdirde $\dot{\alpha} \notin A(t)$ olacağından $T(t)$ teğetsel demetinin

$$\{e_1, e_2, ..., e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$$

şeklindeki bir ortonormal bazı bulunabilir. E_v^{n+1} yarı Öklid uzay olduğundan v tane timelike vektör var olup, μ tanesi $E_{k,\mu}(t)$ yarı altuzayı içinde kalır. Bu durumda da $T(t)$ teğetsel demetinin içinde en az μ tane timelike vektör bulunur. O halde, $T(t)$ bir yarı altuzaydır.

Teorem 2.3.5. E_v^{n+1} de $(k+1)-$boyutlu yarı regle yüzey M, M nin doğrultman uzayı $E_{k,\mu}(t)$, asimptotik demeti $A(t)$ ve $E_{k,\mu}(t)$ nin ortonormal bazı $\{e_1(t), ..., e_m(t), e_{m+1}(t), ..., e_k(t)\}$ olmak üzere $boy\, A(t) = k + m$ olsun. Bu takdirde $\{e_1(t), ..., e_m(t)\}$ ortonormal sistemi, $J \subset I$ açık aralığında

$$\overset{\circ}{e}_i = \dot{e}_i - \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \left\langle \dot{e}_i, e_j \right\rangle e_j\ ,\ 1 \leq i \leq m \tag{2.26}$$

olmak üzere

$$\left\langle \overset{\circ}{e}_i(t), \overset{\circ}{e}_j(t) \right\rangle = 0 \quad , \quad 1 \le i, j \le m \quad , \quad i \ne j,$$

$$\left\| \overset{\circ}{e}_1(t) \right\|^2 > \ldots > \left\| \overset{\circ}{e}_{m-\mu-1}(t) \right\|^2 > \left\| \overset{\circ}{e}_{m-\mu}(t) \right\|^2 > 0$$

ve

$$\left\| \overset{\circ}{e}_{m-\mu+1}(t) \right\|^2 < \left\| \overset{\circ}{e}_{m-\mu+2}(t) \right\|^2 < \ldots < \left\| \overset{\circ}{e}_m(t) \right\|^2 < 0$$

olacak şekilde bulunabilir (Ekici, 1998).

Teorem 2.3.6. M , E_v^{n+1} yarı Öklid uzayında $(k+1)-$boyutlu yarı regle yüzey, bu yüzeyin doğrultman uzayı $E_{k,\mu}(t)$ ve asimptotik demeti $A(t)$ olsun. $boy\, A(t) = k+m,\ 0 \le m \le k,$ ise $E_{k,\mu}(t)$ nin $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ ortonormal bazı

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j + \varepsilon_{k+i} \kappa_i a_{k+i} \quad , \qquad 1 \le i \le m, \\ \dot{e}_h &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_{hj} e_h \qquad\qquad\qquad , \quad m+1 \le h \le k, \end{aligned} \tag{2.27}$$

bağıntıları sağlanacak şekilde seçilebilir, öyle ki burada

$$\varepsilon_{ij} \alpha_{ij} = -\alpha_{ji} \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j \quad , \quad \varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle \quad , \quad 1 \le i, j \le k$$

ve

$$\begin{aligned} &\kappa_1 > \kappa_2 > \ldots > \kappa_{m-r} > 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \qquad r \le \mu \\ &\kappa_{m-r+1} < \kappa_{m-r+2} < \ldots < \kappa_m < 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

dir (Ekici, 1998).

M , E_v^{n+1} yarı Öklid uzayında $(k+1)-$boyutlu yarı regle yüzey olmak üzere bu yüzeyin $T(t)$ teğetsel demeti için

$$k+m \leq boy\, T(t) \leq k+m+1$$

olduğunu biliyoruz. O halde, ilk olarak kabul edelim ki $boy\, T(t)=k+m,\ 0 \leq m \leq k,$ olsun. Bu durumda M yarı regle yüzeyinin α dayanak eğrisinin hız vektörü $A(t)$ asimptotik demetinin içindedir. Yani

$$\dot{\alpha} \in A(t)=Sp\{e_1,e_2,...,e_k,a_{k+1},a_{k+2},...,a_{k+m}\}$$

dir. Bu durumda

$$\dot{\alpha}=\sum_{i=1}^{k}\zeta_i e_i+\sum_{h=1}^{m}\eta_h a_{k+h} \tag{2.29}$$

yazılabilir. Ayrıca, M yarı regle yüzeyinin herhangi bir $P(t)$ dayanak eğrisi için

$$P(t)=\alpha(t)+\sum_{i=1}^{k}u_i(t)e_i(t) \tag{2.30}$$

yazılabilir. Bu son ifadenin türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\dot{P}(t)&=\dot{\alpha}(t)+\sum_{i=1}^{k}\left(\dot{u}_i(t)e_i(t)+u_i(t)\dot{e}_i(t)\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}\zeta_i e_i+\sum_{h=1}^{m}\eta_h a_{k+h}+\sum_{i=1}^{k}\left(\dot{u}_i\, e_i+u_i\, \dot{e}_i\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\dot{e}_i(t)$ türev vektörlerinin (2.27) denkleminde verilen değerleri yerine yazılırsa

$$\dot{P}(t)=\sum_{j=1}^{k}\left(\zeta_j+\dot{u}_j+\sum_{i=1}^{m}u_i\alpha_{ij}+\sum_{i=m+1}^{k}u_i\alpha_{ij}\right)e_j+\sum_{h=1}^{m}(\eta_h+\varepsilon_{k+h}u_h\kappa_h)a_{k+h} \qquad (2.31)$$

bulunur. O halde

$$\eta_h+\varepsilon_{k+h}u_h\kappa_h=0, \quad 1\leq h\leq m \qquad (2.32)$$

şartını sağlayan $P(t)$ noktaları için $\dot{P}(t)$ türev vektörleri $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayı içinde kalacaktır. $\varepsilon_{k+h}\kappa_h>0,\ 1\leq h\leq m,$ olduğundan dolayı son denklem sisteminin çözümü tektir, yani m tane u_h değişkenleri tek olarak hesaplanabilir. Geriye kalan $k-m$ tane u_i ise keyfi olarak seçilebilir.

Tanım 2.3.7. $\eta_h+\varepsilon_{k+h}u_h\kappa_h=0,\ 1\leq h\leq m,$ denklemini sağlayan $P(t)$ noktalarının cümlesi $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayı içinde $(k-m)-$boyutlu altuzayı oluştururlar. Bu alt uzaya M yarı regle yüzeyinin sırt (edge) uzayı denir ve $K_{k-m}(t)$ ile gösterilir. Öyle ki

$$K_{k-m}(t)=\left\{P(t)\middle|\ \dot{\alpha}(t)\in A(t) \text{ ve } \eta_h+\varepsilon_{k+h}u_h\kappa_h=0,\ 1\leq h\leq m\right\} \qquad (2.33)$$

şeklinde ifade edilir (Ekici, 1998).

$E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayı bir yarı alt uzay olduğundan baz vektörlerinin μ tanesi timelike vektördür. Bu μ tane timelike vektörlerden $r\leq\mu$ tanesi $K_{k-m}(t)$ sırt uzayı içinde ise $K_{k-m,\,r}(t)$ sırt uzayı da bir yarı altuzay olur. Özel olarak, $r=1$ ise

$K_{k-m,\,1}(t)$ sırt uzayı bir timelike altuzay, $r=0$ ise $K_{k-m,\,0}(t)=K_{k-m}(t)$ sırt uzayı bir spacelike altuzaydır.

Tanım 2.3.8. $K_{k-m,r}(t)$ sırt uzayı, doğrultman uzayı ve M yarı regle yüzeyinin dayanak eğrisi α da, bir dayanak eğrisi olarak alınırsa $K_{k-m,r}(t)$ sırt uzayı, α eğrisi boyunca hareket ederken E_v^{n+1} yarı Öklid uzayında $(k-m+1)-$boyutlu bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye M yarı regle yüzeyinin sırt regle yüzeyi denir (Ekici, 1998).

$K_{k-m,r}(t)$ sırt uzayı yarı altuzay olduğundan dolayı sırt regle yüzeyi yarı regle yüzeydir.

Kabul edelim ki $boy\,T(t)=k+m+1,\ 0\leq m\leq k,$ olsun. Bu durumda M yarı regle yüzeyinin α dayanak eğrisinin $\dot{\alpha}$ hız vektörü için

$$\dot{\alpha}\notin A(t)=Sp\{e_1,e_2,...,e_k,a_{k+1},a_{k+2},...,a_{k+m}\}$$

dir. Bu durumda $T(t)$ teğetsel demetinin bir ortonormal bazı olarak,

$$\{e_1,e_2,...,e_k,a_{k+1},a_{k+2},...,a_{k+m},a_{k+m+1}\}$$

olur. Bu durumda, $\eta_{m+1}\neq 0$ olmak üzere

$$\dot{\alpha}=\sum_{i=1}^{k}\zeta_i e_i+\sum_{h=1}^{m}\eta_h a_{k+h}+\eta_{m+1}a_{k+m+1} \tag{2.34}$$

yazılabilir. Herhangi bir $P(t)$ dayanak eğrisi için

$$P(t)=\alpha(t)+\sum_{i=1}^{k}u_i(t)e_i(t) \tag{2.35}$$

yazılabileceğinden (2.27) denklemindeki $\dot{e}_i(t)$ türev vektörlerinin değerleri yerlerine yazılırsa

$$\dot{P}(t)=\sum_{j=1}^{k}\left(\zeta_j+\dot{u}_j+\sum_{i=1}^{k}u_i\alpha_{ij}\right)e_j+\sum_{h=1}^{m}\left(\eta_h+\varepsilon_{k+h}u_h\kappa_h\right)a_{k+h}+\eta_{m+1}a_{k+m+1} \tag{2.36}$$

bulunur. O halde

$$\eta_h+\varepsilon_{k+h}u_h\kappa_h=0,\quad 1\le h\le m \tag{2.37}$$

olacak biçimdeki $P(t)$ noktaları için $\dot{P}(t)$ türev vektörleri $Sp\left\{e_1,e_2,...,e_k,\dot{\alpha}\right\}$ uzayında bulunur. $1\le h\le m$ için $\varepsilon_{k+h}\kappa_h>0$ olduğundan dolayı (2.37) denklem sisteminin çözümü tektir, yani m tane u_h değişkenleri tek olarak hesaplanabilir. Geriye kalan $k-m$ tane u_i ise keyfi olarak seçilebilir (Ekici, 1998).

Tanım 2.3.9. (2.37) denklemindeki $\eta_h+\varepsilon_{k+h}u_h\kappa_h=0$, $1\le h\le m$, şartını sağlayan $P(t)$ noktalarının cümlesi $Sp\left\{e_1,e_2,...,e_k,\dot{\alpha}\right\}$ uzayı içinde $(k-m)-$boyutlu bir altuzay oluşturur. Bu alt uzaya M yarı regle yüzeyinin merkez uzayı denir ve $Z_{k-m}(t)$ ile gösterilir, öyle ki

$$Z_{k-m}(t)=\left\{P(t)\,\middle|\,\dot{\alpha}(t)\notin A(t)\text{ ve }\eta_h+\varepsilon_{k+h}u_h\kappa_h=0,\,1\le h\le m\right\}$$

dir (Ekici, 1998).

$E_{k,\mu}(t)$ bir yarı altuzay olduğundan μ tane baz vektörü timelike vektördür. Bu timelike vektörlerden $r \leq \mu$ tanesi $Z_{k-m,\,r}(t)$ içinde ise merkez uzay bir yarı altuzaydır. Özel olarak, $r=1$ ise $Z_{k-m,\,1}(t)$ bir timelike altuzay, $r=0$ ise $Z_{k-m,\,0}(t)=Z_{k-m}(t)$ bir spacelike altuzaydır.

Tanım 2.3.10. $Z_{k-m,\,r}(t)$ merkez uzayı, doğrultman uzayı olarak alınırsa ve M yarı regle yüzeyinin α dayanak eğrisi de dayanak eğrisi olarak seçilirse, $Z_{k-m,\,r}(t)$ uzayı α eğrisi boyunca hareket ederken E_v^{n+1} yarı Öklid uzayında $(k-m+1)-$boyutlu bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeye M yarı regle yüzeyinin merkez regle yüzeyi denir ve Ω ile gösterilir (Ekici, 1998).

$Z_{k-m,\,r}(t)$ merkez uzayı bir yarı altuzay olduğundan Ω merkez regle yüzeyi de bir yarı regle yüzeydir.

Tanım 2.3.11. M, E_v^{n+1} yarı Öklid uzayında $(k+1)-$boyutlu bir yarı regle yüzey ve Ω, M yarı regle yüzeyinin merkez regle yüzeyi olsun. Ω merkez regle yüzeyinin doğrultman uzayına total olarak dik olan bir altuzay $F_{m,h}(t)$, $h \leq r$, ve Ω merkez regle yüzeyinin ortogonal yörüngesi de β olsun. $F_{m,h}(t)$ doğrultman uzayı β eğrisi boyunca hareket ederken bir $(m+1)-$boyutlu regle yüzey meydana getirir. Bu yüzeye M yarı regle yüzeyinin, $(m+1)-$boyutlu asli regle yüzeyi denir ve Λ ile gösterilir (Ekici, 1998).

M, E_v^{n+1} yarı Öklid uzayında $(k+1)-$boyutlu bir yarı regle yüzey ve Ω, M yarı regle yüzeyinin merkez regle yüzeyi olsun. Bu takdirde, M yarı regle yüzeyinin $(m+1)-$boyutlu asli regle yüzeyi de bir yarı regle yüzeydir.

Ayrıca burada

$$E_{k,\mu}(t) = Sp\{e_1, e_2, ..., e_k\} \quad , \quad \mu \leq v$$

olduğundan

$$F_{m,h}(t) = Sp\{e_1, e_2, ..., e_m\} \quad , \quad h \leq \mu$$

ve

$$Z_{k-m,\, r}(t) = Sp\{e_{m+1}, e_{m+2}, ..., e_k\} \quad , \quad r \leq \mu$$

dir. Buradan

$$boy\, F_{m,h}(t) + boy\, Z_{k-m,\, r}(t) = boy\, E_{k,\mu}(t) \quad , \quad r + h = \mu$$

bulunur.

Tanım 2.3.12. M, $(k+1)-$boyutlu genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin α dayanak eğrisi ve $\{e_1, e_2, ..., e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$ için

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^{k} \zeta_i e_i + \sum_{h=1}^{m} \eta_h a_{k+h} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

olmak üzere

$$P_i = \frac{\eta_{m+1}}{\kappa_i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \tag{2.38}$$

değerine M yarı regle yüzeyinin $i-$yinci dağılma parametresi ve

$$P = \sqrt[m]{\left|P_1 P_2 ... P_m\right|}$$

ifadesine de M yarı regle yüzeyinin dağılma parametresi denir.

BÖLÜM 3. E_ν^{n+1}, $(n+1)-$BOYUTLU YARI ÖKLİD UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI REGLE YÜZEYLERİN KESİT EĞRİLİKLERİ

E_ν^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, α diferensiyellenebilir nonnull bir eğri ve M genelleştirilmiş yarı regle yüzey, Ω da M yarı regle yüzeyinin $m>0$ olacak şekilde $(k-m+1)-$boyutlu merkez regle yüzeyi olsun. M yarı regle yüzeyinin, doğrultman uzayı $E_{k,\mu}(t)=Sp\{e_1(t),...,e_k(t)\}$, $\mu\leq\nu$, ve $\alpha(t)$ dayanak eğrisi, Ω merkez regle yüzeyinin dayanak eğrisi olsun. O halde M yarı regle yüzeyinin asimptotik ve teğetsel demetleri çakışmaz. Bu durumda M yarı regle yüzeyinin α dayanak eğrisinin hız vektörü $\dot{\alpha}$ olmak üzere

$$\dot{\alpha}\in Sp\{e_1,e_2,...,e_k,a_{k+m+1}\} \tag{3.1}$$

şeklindedir. Böylece, $\eta_{m+1}\neq 0$ olmak üzere

$$\dot{\alpha}(t)=\sum_{i=1}^{k}\zeta_i e_i+\eta_{m+1}a_{k+m+1} \tag{3.2}$$

yazılabilir.

Merkez uzayın noktalarında M yarı regle yüzeyinin tanjant uzayları $A(t)$ asimptotik demetine diktir. M yarı regle yüzey için bir parametrizasyon

$$\varphi(t,u_1,\ldots,u_k)=\alpha(t)+\sum_{i=1}^{k}u_ie_i(t),\ (t,u_1,...,u_k)\in I\times\mathbb{R}^k \tag{3.3}$$

olarak verilir. (3.3) denklemi ile verilen parametrik gösterimde, $\Omega \subset M$ merkez yarı regle yüzeyinin merkez noktası olarak adlandırılan noktalarda

$$u_\sigma = 0 \qquad , \qquad 1 \leq \sigma \leq m \tag{3.4}$$

dır.

E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, genelleştirilmiş yarı regle yüzeyi için Teorem 2.3.6. ve (3.2) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i \dot{e}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji} \right) e_i + \sum_{\sigma=1}^{m} \varepsilon_{k+\sigma} u_\sigma \kappa_\sigma a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \end{aligned} \tag{3.5}$$

ve

$$\varphi_{u_i} = e_i(t) \qquad , \qquad 1 \leq i \leq k \tag{3.6}$$

bulunur. Burada $\varepsilon_{k+\sigma} = \langle a_{k+\sigma}, a_{k+\sigma} \rangle$ dır. Böylece, M yarı regle yüzeyinin teğetsel demetinin kanonik bazı

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji} \right) e_i + \sum_{\sigma=1}^{m} \varepsilon_{k+\sigma} u_\sigma \kappa_\sigma a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}, e_1, e_2, \ldots, e_k \right\} \tag{3.7}$$

olur. Bu kanonik baza göre M yarı regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$g_{00} = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle \quad , \quad g_{i0} = \langle \varphi_{u_i}, \varphi_t \rangle \quad , \quad g_{ij} = \langle \varphi_{u_i}, \varphi_{u_j} \rangle \quad , \quad 1 \leq i, j \leq k$$

olup, (3.5) ve (3.6) denklemleri yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= \langle \varphi_t , \varphi_t \rangle = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji} \right)^2 + \sum_{\sigma=1}^{m} \varepsilon_{k+\sigma} \left(u_\sigma \kappa_\sigma \right)^2 + \varepsilon_{k+m+1} \left(\eta_{m+1} \right)^2 \\
g_{i0} &= \langle \varphi_{u_i} , \varphi_t \rangle = \varepsilon_i \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji} \right) && 1 \le i \le k \\
g_{ij} &= \langle \varphi_{u_j} , \varphi_{u_j} \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij} && 1 \le i, j \le k
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

bulunur. Burada

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_i &= \langle e_i , e_i \rangle = \mp 1 &&, \quad 1 \le i \le k \\
\varepsilon_{k+\sigma} &= \langle a_{k+\sigma} , a_{k+\sigma} \rangle = \mp 1 &&, \quad 1 \le \sigma \le m \\
\varepsilon_{k+m+1} &= \langle a_{k+m+1} , a_{k+m+1} \rangle = \mp 1 \\
\delta_{ij} &= \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \ne j \end{cases}
\end{aligned}
$$

dır. M yarı regle yüzeyinin birinci temel formunun matris formu

$$
\left[g_{ab} \right] = \begin{bmatrix}
g_{00} & g_{01} & g_{02} & \cdots & g_{0k} \\
g_{10} & g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\
g_{20} & g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\
g_{k0} & g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kk}
\end{bmatrix}
$$

olmak üzere (3.8) denklemi yardımıyla

$$
[g_{ab}] = \begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji} \right)^2 + \sum_{\sigma=1}^{m} \varepsilon_{k+\sigma} \left(u_\sigma \kappa_\sigma \right)^2 + \varepsilon_{k+m+1} \left(\eta_{m+1} \right)^2 & \varepsilon_1 \left(\zeta_1 + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j1} \right) & \varepsilon_2 \left(\zeta_2 + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j2} \right) & \varepsilon_3 \left(\zeta_3 + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j3} \right) & \cdots & \varepsilon_k \left(\zeta_k + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{jk} \right) \\
\varepsilon_1 \left(\zeta_1 + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j1} \right) & \varepsilon_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\varepsilon_2 \left(\zeta_2 + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j2} \right) & 0 & \varepsilon_2 & 0 & \cdots & 0 \\
\varepsilon_3 \left(\zeta_3 + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j3} \right) & 0 & 0 & \varepsilon_3 & \cdots & 0 \\
. & . & . & . & \cdots & . \\
. & . & . & . & \cdots & . \\
. & . & . & . & \cdots & . \\
\varepsilon_k \left(\zeta_k + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{jk} \right) & 0 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_k
\end{bmatrix}
\tag{3.9}
$$

elde edilir. Buradan, $\varepsilon = \varepsilon_1.\varepsilon_2.\varepsilon_3. \ldots .\varepsilon_k$ olmak üzere, bu matrisin determinantı

$$g = \det\left[g_{ab}\right] = \varepsilon\left(\sum_{\sigma=1}^{m} \varepsilon_{k+\sigma}\left(u_\sigma \kappa_\sigma\right)^2 + \varepsilon_{k+m+1}\left(\eta_{m+1}\right)^2\right) \quad , \quad 1 \le a,b \le k \qquad (3.10)$$

dir. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, $\langle\ ,\ \rangle$ fonksiyonunun nondejenere olmasından dolayı $\left[g_{ab}\right]$ matrisi tersinirdir (O'Neill, 1983). Böylece, $\left[g_{ab}\right]$ regüler matris olduğundan

$$\sum_{\sigma=1}^{m} \varepsilon_{k+\sigma}\left(u_\sigma \kappa_\sigma\right)^2 + \varepsilon_{k+m+1}\left(\eta_{m+1}\right)^2 \neq 0$$

dır. $\left[g_{ab}\right]$ matrisi bir kare matris olduğundan dolayı bu matrisin kendisi ile tersinin çarpımı aynı tipten birim matrisi verecektir. Yani, $\left[g^{ab}\right]$, $\left[g_{ab}\right]$ matrisinin tersi olmak üzere

$$\left[g_{ab}\right]\left[g^{ab}\right] = I \qquad , \qquad 0 \le a,b \le k$$

dir. O halde, $\left[g^{ab}\right]$ ters matrisi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$
\left[g^{ab}\right]=\begin{bmatrix}
\varepsilon g^{-1} & -\varepsilon g^{-1}\left(\zeta_1+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j1}\right) & -\varepsilon g^{-1}\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right) & -\varepsilon g^{-1}\left(\zeta_3+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j3}\right) & \cdots & -\varepsilon g^{-1}\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right) \\
-\varepsilon g^{-1}\left(\zeta_1+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j1}\right) & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_1+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j1}\right)\left(\zeta_1+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j1}\right)+\delta_{11}\varepsilon_1 g\right] & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right)\left(\zeta_1+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j1}\right)+\delta_{21}\varepsilon_1 g\right] & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_3+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j3}\right)\left(\zeta_1+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j1}\right)+\delta_{13}\varepsilon_1 g\right] & \cdots & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right)\left(\zeta_1+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j1}\right)+\delta_{1k}\varepsilon_1 g\right] \\
-\varepsilon g^{-1}\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right) & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_1+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j1}\right)\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right)+\delta_{12}\varepsilon_2 g\right] & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right)\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right)+\delta_{22}\varepsilon_2 g\right] & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_3+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j3}\right)\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right)+\delta_{23}\varepsilon_2 g\right] & \cdots & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right)\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right)+\delta_{2k}\varepsilon_2 g\right] \\
-\varepsilon g^{-1}\left(\zeta_3+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j3}\right) & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_1+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j1}\right)\left(\zeta_3+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j3}\right)+\delta_{13}\varepsilon_3 g\right] & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right)\left(\zeta_3+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j3}\right)+\delta_{23}\varepsilon_3 g\right] & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_3+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j3}\right)\left(\zeta_3+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j3}\right)+\delta_{33}\varepsilon_3 g\right] & \cdots & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right)\left(\zeta_3+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j3}\right)+\delta_{3k}\varepsilon_3 g\right] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-\varepsilon g^{-1}\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right) & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_1+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j1}\right)\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right)+\delta_{1k}\varepsilon_k g\right] & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right)\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right)+\delta_{2k}\varepsilon_k g\right] & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_3+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j3}\right)\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right)+\delta_{3k}\varepsilon_k g\right] & \cdots & g^{-1}\left[\varepsilon\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right)\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right)+\delta_{kk}\varepsilon_k g\right]
\end{bmatrix}
\tag{3.11}
$$

(3.11) denkleminden $\left[g^{ab}\right]$ ters matrisinin elemanlarının

$$
\begin{aligned}
& g^{00} = \varepsilon g^{-1} \\
& g^{i0} = -\varepsilon g^{-1}\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji}\right) \qquad , \quad 1 \le i \le k \qquad (3.12) \\
& g^{i\lambda} = g^{-1}\left(\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji}\right)\left(\zeta_\lambda + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j\lambda}\right)\varepsilon + \delta_{i\lambda}\varepsilon_i g\right) \qquad , \quad 1 \le i, \lambda \le k
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Burada $\varepsilon = \varepsilon_1.\varepsilon_2.\varepsilon_3. \ldots .\varepsilon_k$ ve $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$, $1 \le i \le k$ dır.

Riemann eğrilik tensörü katsayılarını hesaplayabilmek için Christoffel sembollerini hesaplamak gerekir. O halde (3.8) ve (3.12) denklemleri (2.10) denkleminde yerine yazılırsa $1 \le i, j, \lambda \le k$ için Γ^0_{00}, Γ^λ_{00}, Γ^0_{ij}, Γ^0_{ji}, Γ^λ_{ij}, Γ^λ_{ji}, $\Gamma^0_{\lambda 0}$, $\Gamma^0_{0\lambda}$, Γ^λ_{i0}, Γ^λ_{0i} hesaplanabilir.

İlk olarak, Γ^0_{00} ifadesinin değerini hesaplamak için

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} g^{0r}\left[\frac{\partial g_{r0}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{r0}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_r}\right] \\
&= \frac{1}{2} g^{00}\left[\frac{\partial g_{00}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_0}\right] + \frac{1}{2} g^{01}\left[\frac{\partial g_{10}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_1}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{02}\left[\frac{\partial g_{20}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{20}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_2}\right] + \ldots + \frac{1}{2} g^{0k}\left[\frac{\partial g_{k0}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial u_0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial u_k}\right]
\end{aligned}
$$

ile verilen Koszul eşitliğinde (3.8) ve (3.12) denklemleri yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \varepsilon \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left[\varepsilon \frac{\partial g}{\partial u_0} + 2\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji}\right)\left(\dot{\zeta}_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \dot{\alpha}_{ji}\right)\right] \\
& -\varepsilon \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_1 + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j1}\right)\left[2\varepsilon_1\left(\dot{\zeta}_1 + \sum_{j=1}^{k} u_j \dot{\alpha}_{j1}\right) - \varepsilon \frac{\partial g}{\partial u_1} - 2\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji}\right)\alpha_{1i}\right]
\end{aligned}
$$

$$-\varepsilon\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right)\left[2\varepsilon_2\left(\dot{\zeta}_2+\sum_{j=1}^{k}u_2\dot{\alpha}_{j2}\right)-\varepsilon\frac{\partial g}{\partial u_2}-2\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{2i}\right]$$
$$\vdots$$
$$-\varepsilon\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right)\left[2\varepsilon_k\left(\dot{\zeta}_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{jk}\right)-\varepsilon\frac{\partial g}{\partial u_k}-2\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{ki}\right]$$

elde edilir. Son denklemde $\varepsilon_i\alpha_{ji}=-\varepsilon_j\alpha_{ij}$ eşitliği göz önünde bulundurulur ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{00}&=\varepsilon^2\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_0}+\varepsilon\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\left(\dot{\zeta}_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{ji}\right)\\&-\varepsilon\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\left(\dot{\zeta}_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{ji}\right)\\&+\varepsilon^2\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}+\varepsilon\frac{1}{g}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)^2\alpha_{ii}\end{aligned}$$

bulunur. Bu son denklemde $\alpha_{ii}=0$ ve $\varepsilon^2=1$ olduğu dikkate alınır ve denklem düzenlenirse, Γ^0_{00} Christoffel sembolü

$$\Gamma^0_{00}=\frac{1}{2g}\left[\frac{\partial g}{\partial u_0}+\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\right] \tag{3.13}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde Γ^λ_{00}, $1\le\lambda\le k$, için Koszul eşitliği

$$\Gamma^\lambda_{00}=\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k}g^{\lambda r}\left[\frac{\partial g_{r0}}{\partial u_0}+\frac{\partial g_{r0}}{\partial u_0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial u_r}\right]$$

$$
=\frac{1}{2}g^{\lambda 0}\left[\frac{\partial g_{00}}{\partial u_0}+\frac{\partial g_{00}}{\partial u_0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial u_0}\right]+\frac{1}{2}g^{\lambda 1}\left[\frac{\partial g_{10}}{\partial u_0}+\frac{\partial g_{10}}{\partial u_0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial u_1}\right]+\frac{1}{2}g^{\lambda 2}\left[\frac{\partial g_{20}}{\partial u_0}+\frac{\partial g_{20}}{\partial u_0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial u_2}\right]
$$
$$
+\ldots+\frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}\left[\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_0}+\frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial u_\lambda}\right]+\ldots+\frac{1}{2}g^{\lambda k}\left[\frac{\partial g_{k0}}{\partial u_0}+\frac{\partial g_{k0}}{\partial u_0}-\frac{\partial g_{00}}{\partial u_k}\right]
$$

dır. Eğer (3.8) ve (3.12) eşitlikleri son denklemde yerine yazılırsa

$$
\Gamma_{00}^{\lambda}=\frac{1}{2}\left\{-\varepsilon\frac{1}{g}\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\right\}\left[\varepsilon\frac{\partial g}{\partial u_0}+2\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\left(\dot{\zeta}_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{ji}\right)\right]
$$
$$
+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_1\delta_{1\lambda}g+\varepsilon\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\left(\zeta_1+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j1}\right)\right)\left[2\varepsilon_1\left(\dot{\zeta}_1+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{j1}\right)-\varepsilon\frac{\partial g}{\partial u_1}-2\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{1i}\right]
$$
$$
+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_2\delta_{2\lambda}g+\varepsilon\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right)\right)\left[2\varepsilon_2\left(\dot{\zeta}_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{j2}\right)-\varepsilon\frac{\partial g}{\partial u_2}-2\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{2i}\right]
$$
$$
\vdots
$$
$$
+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_\lambda\delta_{\lambda\lambda}g+\varepsilon\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\right)\left[2\varepsilon_\lambda\left(\dot{\zeta}_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{j\lambda}\right)-\varepsilon\frac{\partial g}{\partial u_\lambda}-2\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{\lambda i}\right]
$$
$$
\vdots
$$
$$
+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_k\delta_{k\lambda}g+\varepsilon\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right)\right)\left[2\varepsilon_k\left(\dot{\zeta}_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{jk}\right)-\varepsilon\frac{\partial g}{\partial u_k}-2\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{ki}\right]
$$

bulunur. $\varepsilon_i\alpha_{ji}=-\varepsilon_j\alpha_{ij}$ olduğundan gerekli sadeleştirmeler sonucu

$$
\Gamma_{00}^{\lambda}=-\varepsilon^2\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_0}\left(\zeta_\lambda+\sum_{y=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)-\varepsilon\frac{1}{g}\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\left(\dot{\zeta}_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{ji}\right)
$$
$$
+\delta_{\lambda\lambda}\varepsilon_\lambda^2\frac{1}{g}g\left(\dot{\zeta}_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{j\lambda}\right)+\varepsilon\frac{1}{g}\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\left(\dot{\zeta}_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{ji}\right)
$$
$$
-\delta_{\lambda\lambda}\varepsilon\varepsilon_\lambda\frac{1}{2g}g\frac{\partial g}{\partial u_\lambda}-\varepsilon^2\frac{1}{2g}\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}
$$
$$
-\delta_{\lambda\lambda}\varepsilon_\lambda\frac{1}{2g}2g\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{\lambda i}-\varepsilon\frac{1}{g}\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)^2\alpha_{ii}
$$

elde edilir. Ayrıca $\varepsilon^2=\varepsilon_\lambda^2=1$ ve $\alpha_{ii}=0$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\Gamma_{00}^{\lambda}=\frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u_0}+\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\right)\right.$$
$$\left.+2g\left(\left(\dot{\zeta}_{\lambda}+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{j\lambda}\right)-\varepsilon_{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{\lambda i}-\varepsilon\varepsilon_{\lambda}\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u_{\lambda}}\right)\right]$$

olur. Bu son denklemde $-\varepsilon_{\lambda}\varepsilon_i\alpha_{\lambda i}=\alpha_{i\lambda}$ olduğundan

$$\Gamma_{00}^{\lambda}=\frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_{\lambda}+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u_0}+\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\right)\right.$$
$$\left.+2g\left(\left(\dot{\zeta}_{\lambda}+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{j\lambda}\right)+\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{i\lambda}-\varepsilon\varepsilon_{\lambda}\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u_{\lambda}}\right)\right] \tag{3.14}$$

elde edilir.

Koszul eşitliği, Γ_{ij}^{0} , $1\leq i,j\leq k$, için

$$\Gamma_{ij}^{0}=\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k}g^{0r}\left[\frac{\partial g_{ri}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{rj}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_r}\right]$$
$$=\frac{1}{2}g^{00}\left[\frac{\partial g_{0i}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{0j}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_0}\right]+\frac{1}{2}g^{01}\left[\frac{\partial g_{1i}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{1j}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1}\right]$$
$$+\frac{1}{2}g^{02}\left[\frac{\partial g_{2i}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{2j}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2}\right]+\ldots+\frac{1}{2}g^{0k}\left[\frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right]$$

şeklindedir. Eğer (3.8) ve (3.12) eşitlikleri bu son denklemde yerine yazılırsa

$$\Gamma_{ij}^{0}=\varepsilon\frac{1}{2g}\left[\varepsilon_i\alpha_{ji}+\varepsilon_j\alpha_{ij}-0\right]-\varepsilon\frac{1}{2g}\left(\zeta_1+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j1}\right)[0+0-0]$$
$$-\varepsilon\frac{1}{2g}\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right)[0+0-0]-\ldots-\varepsilon\frac{1}{2g}\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right)[0+0-0]$$

elde edilir. Burada $\varepsilon_i\alpha_{ji}=-\varepsilon_j\alpha_{ij}$ olduğundan

$$\Gamma_{ij}^{0} = 0\,, \qquad 1 \le i, j \le k$$

elde edilir. Ayrıca, $\Gamma_{ij}^{0} = \Gamma_{ji}^{0}$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\Gamma_{ij}^{0} = \Gamma_{ji}^{0} = 0 \quad , \qquad 1 \le i, j \le k \tag{3.15}$$

bulunur.

Koszul eşitliği, Γ_{ij}^{λ} , $1 \le i, j, \lambda \le k$, değeri için,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^{\lambda} &= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} g^{\lambda r}\left[\frac{\partial g_{ri}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{rj}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_r}\right] \\
&= \frac{1}{2} g^{\lambda 0}\left[\frac{\partial g_{0i}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_0}\right] + \frac{1}{2} g^{\lambda 1}\left[\frac{\partial g_{1i}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{1j}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_1}\right] + \frac{1}{2} g^{\lambda 2}\left[\frac{\partial g_{2i}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{2j}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_2}\right] \\
&\quad + \ldots + \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda}\left[\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{\lambda j}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_\lambda}\right] + \ldots + \frac{1}{2} g^{\lambda k}\left[\frac{\partial g_{ki}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right]
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada (3.8) ve (3.12) eşitlikleri yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^{\lambda} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{g}\varepsilon\left(\zeta_\lambda + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j\lambda}\right)\left[\varepsilon_i \alpha_{ji} + \varepsilon_j \alpha_{ij} - 0\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_1 \delta_{\lambda 1} g + \varepsilon\left(\zeta_\lambda + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j\lambda}\right)\left(\zeta_1 + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j1}\right)\right)\left[0 + 0 - 0\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_2 \delta_{\lambda 2} g + \varepsilon\left(\zeta_\lambda + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j\lambda}\right)\left(\zeta_2 + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j2}\right)\right)\left[0 + 0 - 0\right] \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_\lambda \delta_{\lambda\lambda} g + \varepsilon\left(\zeta_\lambda + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j\lambda}\right)\left(\zeta_\lambda + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j\lambda}\right)\right)\left[0 + 0 - 0\right] \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_k \delta_{\lambda k} g + \varepsilon\left(\zeta_\lambda + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j\lambda}\right)\left(\zeta_k + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{jk}\right)\right)\left[0 + 0 - 0\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\varepsilon_i \alpha_{ji} = -\varepsilon_j \alpha_{ij}$ eşitliği göz önünde bulundurulursa

$$\Gamma^{\lambda}_{ij} = 0 \qquad , \qquad 1 \le i, j, \lambda \le k$$

olduğu görülür. Ayrıca, $\Gamma^{\lambda}_{ij} = \Gamma^{\lambda}_{ji}$ eşitliğinden

$$\Gamma^{\lambda}_{ij} = \Gamma^{\lambda}_{ji} = 0 \qquad , \qquad 1 \le i, j, \lambda \le k \tag{3.16}$$

dir.

$\Gamma^{0}_{\lambda 0}$ ve $\Gamma^{0}_{0\lambda}$, $1 \le \lambda \le k$, değerlerini hesaplamak üzere

$$\begin{aligned}
\Gamma^{0}_{\lambda 0} &= \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} g^{0r}\left[\frac{\partial g_{r\lambda}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{r0}}{\partial u_\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_r}\right] \\
&= \frac{1}{2} g^{00}\left[\frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial u_\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_0}\right] + \frac{1}{2} g^{01}\left[\frac{\partial g_{1\lambda}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial u_\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_1}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{02}\left[\frac{\partial g_{2\lambda}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{20}}{\partial u_\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_2}\right] + \ldots + \frac{1}{2} g^{0k}\left[\frac{\partial g_{k\lambda}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial u_\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_k}\right]
\end{aligned}$$

Koszul eşitliğinde (3.8) ve (3.12) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Gamma^{0}_{\lambda 0} &= \varepsilon \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left[\varepsilon \frac{\partial g}{\partial u_\lambda} + 2\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji}\right)\alpha_{\lambda i}\right] \\
&\quad - \varepsilon \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_1 + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j1}\right)\left[0 + \varepsilon_1 \alpha_{\lambda 1} - \varepsilon_\lambda \alpha_{1\lambda}\right] \\
&\quad - \varepsilon \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_2 + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j2}\right)\left[0 + \varepsilon_2 \alpha_{\lambda 2} - \varepsilon_\lambda \alpha_{2\lambda}\right] \\
&\quad - \ldots - \varepsilon \frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_k + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{jk}\right)\left[0 + \varepsilon_k \alpha_{\lambda k} - \varepsilon_\lambda \alpha_{k\lambda}\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son denklemde $\varepsilon_i \alpha_{\lambda i} - \varepsilon_\lambda \alpha_{i\lambda} = 2\varepsilon_i \alpha_{\lambda i}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\Gamma^0_{\lambda 0} = \varepsilon^2 \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_\lambda} + \varepsilon \frac{1}{2g} 2\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji} \right) \alpha_{\lambda i}$$
$$- \varepsilon \frac{1}{2g} \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji} \right) 2\varepsilon_i \alpha_{\lambda i} \right]$$

elde edilir. $\varepsilon^2 = 1$ ve $\Gamma^0_{\lambda 0} = \Gamma^0_{0\lambda}$ olduğundan dolayı yukarıdaki ifade yeniden düzenlenirse

$$\Gamma^0_{\lambda 0} = \Gamma^0_{0\lambda} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_\lambda} \quad , \qquad 1 \le \lambda \le k \tag{3.17}$$

bulunur.

Son olarak, Γ^λ_{i0} ve Γ^λ_{0i}, $1 \le i, \lambda \le k$, değerlerini hesaplamak için

$$\Gamma^\lambda_{i0} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k} g^{\lambda r} \left[\frac{\partial g_{ri}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{r0}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial u_r} \right]$$
$$= \frac{1}{2} g^{\lambda 0} \left[\frac{\partial g_{0i}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial u_0} \right] + \frac{1}{2} g^{\lambda 1} \left[\frac{\partial g_{1i}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial u_1} \right]$$
$$+ \frac{1}{2} g^{\lambda 2} \left[\frac{\partial g_{2i}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{20}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial u_2} \right] + \ldots + \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} \left[\frac{\partial g_{\lambda i}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial u_\lambda} \right]$$
$$+ \ldots + \frac{1}{2} g^{\lambda k} \left[\frac{\partial g_{ki}}{\partial u_0} + \frac{\partial g_{k0}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial u_k} \right]$$

eşitliğinde (3.8) ve (3.12) denklemleri yerine yazılırsa

$$\Gamma^\lambda_{i0} = -\varepsilon \frac{1}{2}\frac{1}{g} \left(\zeta_\lambda + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j\lambda} \right) \left[\varepsilon \frac{\partial g}{\partial u_i} + 2\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji} \right) \alpha_{ii} \right]$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{1}{g} \left(\varepsilon_1 \delta_{1\lambda} g + \varepsilon \left(\zeta_\lambda + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j\lambda} \right) \left(\zeta_1 + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j1} \right) \right) [0 + \varepsilon_1 \alpha_{i1} - \varepsilon_i \alpha_{1i}]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_2\delta_{2\lambda}g+\varepsilon\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\left(\zeta_2+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j2}\right)\right)\left[0+\varepsilon_2\alpha_{i2}-\varepsilon_i\alpha_{2i}\right]$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_\lambda\delta_{\lambda\lambda}g+\varepsilon\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\right)\left[0+\varepsilon_\lambda\alpha_{i\lambda}-\varepsilon_i\alpha_{\lambda i}\right]$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\varepsilon_k\delta_{k\lambda}g+\varepsilon\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\left(\zeta_k+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jk}\right)\right)\left[0+\varepsilon_k\alpha_{ik}-\varepsilon_i\alpha_{ki}\right]$$

bulunur. Son denklemde $\varepsilon_\lambda\alpha_{i\lambda}-\varepsilon_i\alpha_{\lambda i}=2\varepsilon_\lambda\alpha_{i\lambda}$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}\Gamma_{i0}^{\lambda}=&-\varepsilon^2\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\\&-\varepsilon\frac{1}{2}\frac{1}{g}2\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{ii}\\&+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\left(2\varepsilon_i\alpha_{ii}\right)\\&+\frac{1}{2}\frac{1}{g}\varepsilon_\lambda 2g\varepsilon_\lambda\alpha_{i\lambda}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\alpha_{ii}=0$ ve $\varepsilon^2=\varepsilon_\lambda^2=1$ eşitlikleri göz önünde bulundurularak denklem yeniden düzenlenir ve $\Gamma_{i0}^{\lambda}=\Gamma_{0i}^{\lambda}$ olduğu dikkate alınırsa, $1\le i,\lambda\le k$ için

$$\Gamma_{i0}^{\lambda}=\Gamma_{0i}^{\lambda}=\frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_\lambda+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{j\lambda}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}+2g\left(\alpha_{i\lambda}\right)\right] \tag{3.18}$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak, $1\le i,j,\lambda\le k$ olmak üzere (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17) ve (3.18) denklemlerinde bulunan Christoffel sembolleri, aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^{0} &= \frac{1}{2g}\left[\frac{\partial g}{\partial u_0} + \sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\right],\\
\Gamma_{00}^{\lambda} &= -\frac{1}{2g}\left(\zeta_\lambda + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j\lambda}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u_0} + \sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\right)\\
&\quad + \left(\left(\dot{\zeta}_\lambda + \sum_{j=1}^{k} u_j \dot{\alpha}_{j\lambda}\right) + \sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{ji}\right)\alpha_{i\lambda} - \varepsilon\varepsilon_\lambda \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u_\lambda}\right),\\
\Gamma_{ij}^{0} &= \Gamma_{ji}^{0} = 0, \qquad\qquad (3.19)\\
\Gamma_{ij}^{\lambda} &= \Gamma_{ji}^{\lambda} = 0,\\
\Gamma_{\lambda 0}^{0} &= \Gamma_{0\lambda}^{0} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_\lambda},\\
\Gamma_{i0}^{\lambda} &= \Gamma_{0i}^{\lambda} = \frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_\lambda + \sum_{j=1}^{k} u_j \alpha_{j\lambda}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i} + 2g\left(\alpha_{i\lambda}\right)\right].
\end{aligned}$$

Burada $\varepsilon = \varepsilon_1.\varepsilon_2.\varepsilon_3. \ldots .\varepsilon_k$ ve $1 \le i \le k$ için $\varepsilon_i = \mp 1$ dir.

M yarı regle yüzeyinin $\{u_0, u_1, \ldots, u_k\}$ koordinat sisteminin koordinat komşuluğunda tanjant uzayının bazı $\{\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_k\}$ ($\frac{\partial}{\partial u_i} = \partial_i$, $0 \le i \le k$) olmak üzere bu yarı regle yüzeyin R_{lij}^{r} Riemann eğrilik tensörü katsayıları

$$R_{lij}^{r} = \frac{\partial}{\partial u_i}\Gamma_{jl}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma_{il}^{r} - \sum_{s=0}^{k}\Gamma_{il}^{s}\Gamma_{js}^{r} + \sum_{s=0}^{k}\Gamma_{jl}^{s}\Gamma_{is}^{r}$$

şeklindedir. R_{lij}^{r} Riemann eğrilik tensörü katsayıları göz önüne alınarak M yarı regle yüzeyinin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü

$$R_{hlij} = \sum_{r=0}^{k} g_{rh}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\Gamma_{jl}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma_{il}^{r} - \sum_{s=0}^{k}\Gamma_{il}^{s}\Gamma_{js}^{r} + \sum_{s=0}^{k}\Gamma_{jl}^{s}\Gamma_{is}^{r}\right) \qquad (3.20)$$

dir. Ayrıca Teorem 2.2.8. den dolayı eğrilik tensörü için

$$R_{ijhl}=-R_{jihl}$$
$$R_{ijhl}=-R_{ijlh} \tag{3.21}$$
$$R_{ijhl}=R_{hlij}$$

bağıntıları vardır.

Şimdi (3.8) ve (3.19) denklemleri yardımıyla Riemann-Christoffel eğriliklerini bulalım.

(3.20) denkleminde (3.8) ve (3.19) denklemlerinde bulunan değerler yerlerine yazılırsa, R_{0000} eğriliği

$$R_{0000}=\sum_{r=0}^{k} g_{r0}\left(\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma_{00}^{r}-\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma_{00}^{r}-\sum_{s=0}^{k}\Gamma_{00}^{s}\Gamma_{0s}^{r}+\sum_{s=0}^{k}\Gamma_{00}^{s}\Gamma_{0s}^{r}\right)=0$$

olarak bulunur. Benzer şekilde, R_{i000}, $1\le i\le k$, eğriliği

$$R_{i000}=\sum_{r=0}^{k} g_{ri}\left(\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma_{00}^{r}-\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma_{00}^{r}-\sum_{s=0}^{k}\Gamma_{00}^{s}\Gamma_{0s}^{r}+\sum_{s=0}^{k}\Gamma_{00}^{s}\Gamma_{0s}^{r}\right)=0$$

elde edilir. Ayrıca $1\le i,j\le k$ olmak üzere R_{ij00} eğriliği

$$R_{ij00}=\sum_{r=0}^{k} g_{ri}\left(\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma_{0j}^{r}-\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma_{0j}^{r}-\sum_{s=0}^{k}\Gamma_{0j}^{s}\Gamma_{0s}^{r}+\sum_{s=0}^{k}\Gamma_{0j}^{s}\Gamma_{0s}^{r}\right)=0$$

bulunur. O halde son üç denklemden

$$R_{0000}=R_{i000}=R_{ij00}=0 \quad , \quad 1\le i,j\le k \tag{3.22}$$

dir.

Ayrıca (3.20) denkleminden R_{0hij} , $1 \le i, j, h \le k$, eğriliği

$$\begin{aligned} R_{0hij} &= \sum_{r=0}^{k} g_{r0} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \Gamma_{jh}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{ih}^{r} - \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{ih}^{s} \Gamma_{js}^{r} + \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{jh}^{s} \Gamma_{is}^{r} \right) \\ &= g_{00} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \Gamma_{jh}^{0} - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{ih}^{0} - \Gamma_{ih}^{0} \Gamma_{j0}^{0} + \Gamma_{jh}^{0} \Gamma_{i0}^{0} - \sum_{s=1}^{k} \Gamma_{ih}^{s} \Gamma_{js}^{0} + \sum_{s=1}^{k} \Gamma_{jh}^{s} \Gamma_{is}^{0} \right) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k} g_{r0} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \Gamma_{jh}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{ih}^{r} - \Gamma_{ih}^{0} \Gamma_{j0}^{r} + \Gamma_{jh}^{0} \Gamma_{i0}^{r} - \sum_{s=1}^{k} \Gamma_{ih}^{s} \Gamma_{js}^{r} + \sum_{s=1}^{k} \Gamma_{jh}^{s} \Gamma_{is}^{r} \right) \end{aligned}$$

dir. Son denklemde (3.8) ve (3.19) denklemlerindeki değerler yerine yazılırsa

$$R_{0hij} = 0 \qquad , \qquad 1 \le i, j, h \le k \tag{3.23}$$

bulunur. Benzer şekilde R_{lhij} , $1 \le i, j, h, l \le k$, eğriliği için (3.20) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} R_{lhij} &= \sum_{r=0}^{k} g_{rl} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \Gamma_{jh}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{ih}^{r} - \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{ih}^{s} \Gamma_{js}^{r} + \sum_{s=0}^{k} \Gamma_{jh}^{s} \Gamma_{is}^{r} \right) \\ &= g_{0l} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \Gamma_{jh}^{0} - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{ih}^{0} - \Gamma_{ih}^{0} \Gamma_{j0}^{0} + \Gamma_{jh}^{0} \Gamma_{i0}^{0} - \sum_{s=1}^{k} \Gamma_{ih}^{s} \Gamma_{js}^{0} + \sum_{s=1}^{k} \Gamma_{jh}^{s} \Gamma_{is}^{0} \right) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k} g_{rl} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \Gamma_{jh}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_j} \Gamma_{ih}^{r} - \Gamma_{ih}^{0} \Gamma_{j0}^{r} + \Gamma_{jh}^{0} \Gamma_{i0}^{r} - \sum_{s=1}^{k} \Gamma_{ih}^{s} \Gamma_{js}^{r} + \sum_{s=1}^{k} \Gamma_{jh}^{s} \Gamma_{is}^{r} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.8) ve (3.19) denklemlerindeki değerler göz önünde bulundurulursa

$$R_{lhij} = 0 \qquad , \qquad 1 \le i, j, h, l \le k \tag{3.24}$$

elde edilir.

Son olarak R_{i0j0} , $1 \le i, j \le k$, eğriliği için (3.20) denklemi yeniden düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
R_{i0j0} &= \sum_{r=0}^{k} g_{ri}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma_{00}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma_{j0}^{r} - \sum_{s=0}^{k}\Gamma_{j0}^{s}\Gamma_{0s}^{r} + \sum_{s=0}^{k}\Gamma_{00}^{s}\Gamma_{js}^{r}\right) \\
&= g_{0i}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma_{00}^{0} - \frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma_{j0}^{0} - \Gamma_{j0}^{0}\Gamma_{00}^{0} + \Gamma_{00}^{0}\Gamma_{j0}^{0} - \sum_{s=1}^{k}\Gamma_{j0}^{s}\Gamma_{0s}^{0} + \sum_{s=1}^{k}\Gamma_{00}^{s}\Gamma_{js}^{0}\right) \\
&\quad + \sum_{r=1}^{k} g_{ri}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma_{00}^{r} - \frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma_{j0}^{r} - \Gamma_{j0}^{0}\Gamma_{00}^{r} + \Gamma_{00}^{0}\Gamma_{j0}^{r} - \sum_{s=1}^{k}\Gamma_{j0}^{s}\Gamma_{0s}^{r} + \sum_{s=1}^{k}\Gamma_{00}^{s}\Gamma_{js}^{r}\right)
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

olur. Bu son denklemin değerini hesaplayabilmek için, (3.19) denkleminde elde edilen verilerin kısmi türevleri

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma_{00}^{0} &= -\frac{1}{2g^2}\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_0} + \frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_j \partial u_0} - \frac{1}{2g^2}\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_i} \\
&\quad + \frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ji}\frac{\partial g}{\partial u_i} + \frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_j \partial u_i},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma_{j0}^{0} = -\frac{1}{2g^2}\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_0} + \frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_j \partial u_0} \ ,
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{k}\Gamma_{j0}^{s}\Gamma_{0s}^{0} &= \sum_{s=1}^{k}\left(\frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_s + \sum_{j=1}^{k} u_j\alpha_{js}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j} + 2g\alpha_{js}\right]\right)\left(\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_s}\right) \\
&= -\frac{1}{4g^2}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s + \sum_{j=1}^{k} u_j\alpha_{js}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_s} + \frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\alpha_{js}\frac{\partial g}{\partial u_s} \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial u_j}\Gamma_{00}^{r} = \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{1}{2g}\left[\begin{array}{l} -\left(\zeta_r + \sum_{j=1}^{k} u_j\alpha_{jr}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u_0} + \sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\right) \\ +2g\left(\left(\dot{\zeta}_r + \sum_{j=1}^{k} u_j\dot{\alpha}_{jr}\right) + \sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{k} u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{ir} - \varepsilon\varepsilon_r\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u_r}\right) \end{array}\right]\right)
$$

$$=\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_j}-\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_0}\alpha_{jr}-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_j}$$
$$+\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial g}{\partial u_j}-\frac{1}{2g}\alpha_{jr}\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}$$
$$-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ji}\frac{\partial g}{\partial u_i}-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial g}{\partial u_j}$$
$$+\dot{\alpha}_{jr}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ji}\alpha_{ir}-\varepsilon\varepsilon_r\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_r\partial u_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial u_0}\Gamma^r_{j0}=\frac{\partial}{\partial u_0}\left(\frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}+2g\alpha_{jr}\right]\right)$$
$$=\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_0}-\frac{1}{2g}\left(\dot{\zeta}_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\,\dot{\alpha}_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}$$
$$-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_j\partial u_0}+\dot{\alpha}_{jr},$$

$$\Gamma^0_{j0}\Gamma^r_{00}=\left(\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_j}\right)\left(\frac{1}{2g}\left[\begin{array}{l}-\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u_0}+\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\right)\\+2g\left(\left(\dot{\zeta}_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\,\dot{\alpha}_{jr}\right)-\sum_{x=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{ir}-\varepsilon\varepsilon_r\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u_r}\right)\end{array}\right]\right)$$
$$=-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_0\partial u_j}-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_i\partial u_j}$$
$$+\frac{1}{2g}\left(\dot{\zeta}_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\,\dot{\alpha}_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}+\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{ir}\frac{\partial g}{\partial u_j}-\frac{1}{4g}\varepsilon\varepsilon_r\frac{\partial g}{\partial u_r}\frac{\partial g}{\partial u_j},$$

$$\Gamma^0_{00}\Gamma^r_{j0}=\left(\frac{1}{2g}\left[\frac{\partial g}{\partial u_0}+\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\right]\right)\left(\frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}+2g\left(\alpha_{jr}\right)\right]\right)$$
$$=-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_0}-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial g}{\partial u_j}$$
$$+\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{jr}\frac{\partial g}{\partial u_i}+\frac{1}{2g}\alpha_{jr}\frac{\partial g}{\partial u_0},$$

$$\sum_{s=1}^{k}\Gamma_{j0}^{s}\Gamma_{0s}^{r}=\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_s+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{js}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}+2g\left(\alpha_{js}\right)\right]\right)\left(\frac{1}{2g}\left[-\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}+2g\left(\alpha_{sr}\right)\right]\right)$$
$$=\frac{1}{4g^2}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{js}\right)\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_s}+\sum_{s=1}^{k}\alpha_{sr}\alpha_{js}$$
$$-\frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\alpha_{js}-\frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{js}\right)\frac{\partial g}{\partial u_s}\alpha_{sr}$$

olarak elde edilir. Bu son denklemler ile birlikte (3.8) denklemindeki eşitlikler (3.25) denkleminde yerine yazılırsa

$$R_{i0j0}=\varepsilon_i\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\left[-\frac{1}{2g^2}\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_0}+\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_j\partial u_0}-\frac{1}{2g^2}\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_i}\right.$$
$$+\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ji}\frac{\partial g}{\partial u_i}+\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_j\partial u_i}+\frac{1}{2g^2}\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_0}-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_j\partial u_0}$$
$$\left.+\frac{1}{4g^2}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{js}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_s}-\frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\alpha_{js}\frac{\partial g}{\partial u_s}\right]$$
$$+\sum_{r=1}^{k}\varepsilon_r\delta_{ri}\left[\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_j}-\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u_0}\alpha_{jr}-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_0}\frac{\partial g}{\partial u_j}\right.$$
$$+\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial g}{\partial u_j}-\frac{1}{2g}\alpha_{jr}\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}$$
$$-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ji}\frac{\partial g}{\partial u_i}-\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial g}{\partial u_j}$$
$$+\dot{\alpha}_{jr}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ji}\alpha_{ir}-\varepsilon\varepsilon_r\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_r\partial u_j}-\frac{1}{2g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_0}$$
$$+\frac{1}{2g}\left(\dot{\zeta}_r+\sum_{i=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}+\frac{1}{2g}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_j\partial u_0}-\dot{\alpha}_{jr}+\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_0\partial u_j}$$
$$+\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u_i\partial u_j}-\frac{1}{2g}\left(\dot{\zeta}_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\dot{\alpha}_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}$$
$$-\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{ir}\frac{\partial g}{\partial u_j}+\frac{1}{4g}\varepsilon\varepsilon_r\frac{\partial g}{\partial u_r}\frac{\partial g}{\partial u_j}-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_0}$$

$$-\frac{1}{4g^2}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial g}{\partial u_j}+\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{k}\left(\zeta_i+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{ji}\right)\alpha_{jr}\frac{\partial g}{\partial u_i}$$
$$+\frac{1}{2g}\alpha_{jr}\frac{\partial g}{\partial u_0}-\frac{1}{4g^2}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{js}\right)\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{\partial g}{\partial u_s}-\sum_{s=1}^{k}\alpha_{sr}\alpha_{js}$$
$$\left.+\frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_r+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{jr}\right)\alpha_{js}\frac{\partial g}{\partial u_s}+\frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{k}\left(\zeta_s+\sum_{j=1}^{k}u_j\alpha_{js}\right)\alpha_{sr}\frac{\partial g}{\partial u_s}\right]$$

bulunur. Son denklemde $\varepsilon_i^2=1$ ve $\varepsilon_r\delta_{ri}=\begin{cases}0, & r\neq i\\ \varepsilon_i, & r=i\end{cases}$ olduğu göz önüne alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, R_{i0j0}, $1\leq i,j\leq k$, eğriliği

$$R_{i0j0}=\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_i\partial u_j}+\frac{1}{4g}\frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial g}{\partial u_j}\right) \tag{3.26}$$

olarak elde edilir.

Çalışmamızın bundan sonraki kısmında (3.22), (3.23), (3.24) ve (3.26) denklemleriyle verilen Riemann-Christoffel eğrilikleri yardımıyla kesit eğrilikleri hesaplanacaktır.

E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M yarı regle yüzeyinin dayanak eğrisi aynı zamanda Ω merkez regle yüzeyinin de dayanak eğrisi olsun. M yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ ye ortogonal olan bir n normal teğet vektörü $\forall\xi(t,u_v)$ noktasında $(\eta_{m+1}\neq 0)$ olmak üzere

$$n=\sum_{\sigma=1}^{m}\varepsilon_{k+\sigma}u_\sigma\kappa_\sigma(t)\,a_{k+\sigma}(t)+\eta_{m+1}a_{k+m+1}(t) \tag{3.27}$$

şeklindedir. Bu n normal teğet vektör alanı timelike veya spacelike olsun.

(2.21) ile birlikte (3.26) ve (3.27) denklemleri göz önüne alınırsa, $\xi \in M$ noktasında asli kesit eğriliği ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzey M olsun. M yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan nonnull (spacelike ya da timelike) normal teğet vektörü n olmak üzere, $\forall \xi \in M$ noktasında (e_i, n), $1 \le i \le k$, nondejenere $i.$ asli kesitinin eğriliği

$$K_\xi(e_i, n) = \varepsilon_i \left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_i^2} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_i}\right)^2 \right), \quad 1 \le i \le k \tag{3.28}$$

dır.

İspat. M, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzey ve bu yarı regle yüzeyin teğetsel demetinin (3.7) denkleminde verilen kanonik bazına göre (e_i, n), $1 \le i \le k$, asli kesitinin bazını oluşturan e_i, $1 \le i \le k$, ve n normal teğet vektörünün koordinatları sırasıyla $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ olsun. O halde (2.21) denkleminden $(e_i, n), 1 \le i \le k,$ $i.$ asli kesitinin eğriliği

$$K_\xi(e_i, n) = \frac{\beta_i \beta_i \gamma_0 \gamma_0 R_{i0i0}}{\langle e_i, e_i \rangle \langle n, n \rangle - \langle e_i, n \rangle^2}$$

şeklindedir. Bu eşitlikte (3.26) ve (3.27) denklemlerindeki ifadeler yerine yazılırsa

$$K_\xi(e_i, n) = \frac{\varepsilon \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_i^2} + \frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_i}\right)^2 \right)}{\langle e_i, e_i \rangle \left\langle \sum_{\sigma=1}^{m} \varepsilon_{k+\sigma} u_\sigma \kappa_\sigma a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}, \sum_{\sigma=1}^{m} \varepsilon_{k+\sigma} u_\sigma \kappa_\sigma a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \right\rangle - \left\langle e_i, \sum_{\sigma=1}^{m} \varepsilon_{k+\sigma} u_\sigma \kappa_\sigma a_{k+\sigma} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \right\rangle^2}$$

elde edilir. Burada $1 \leq i \leq k$ ve $1 \leq \sigma \leq m$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\langle e_i, e_i \rangle = \varepsilon_i \\
&\langle a_{k+\sigma}, a_{k+\sigma} \rangle = \varepsilon_{k+\sigma} \\
&\langle a_{k+m+1}, a_{k+m+1} \rangle = \varepsilon_{k+m+1} \\
&\langle e_i, a_{k+\sigma} \rangle = \langle e_i, a_{k+m+1} \rangle = \langle a_{k+\sigma}, a_{k+m+1} \rangle = 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri göz önünde bulundurulursa $i.$ asli kesitin eğriliği

$$K_\xi(e_i, n) = \frac{\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_i^2} + \frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_i}\right)^2\right)}{\varepsilon_i\left(\sum_{\sigma=1}^{m} \varepsilon_{k+\sigma}(u_\sigma \kappa_\sigma)^2 + \varepsilon_{k+m+1}(\eta_{m+1})^2\right)}, \qquad 1 \leq i \leq k,$$

olur. Bu son denklemde (3.10) denklemi ile verilen

$$g = \varepsilon\left(\sum_{\sigma=1}^{m} \varepsilon_{k+\sigma}(u_\sigma \kappa_\sigma)^2 + \varepsilon_{k+m+1}(\eta_{m+1})^2\right)$$

eşitliği de göz önüne alınırsa

$$K_\xi(e_i, n) = \frac{\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_i^2} + \frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_i}\right)^2\right)}{\varepsilon_i . \varepsilon g}$$

elde edilir. Burada da gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (3.28) denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

E_v^{n+1}, yarı Öklid uzayında $v = 0$ ise $E_0^{n+1} = E^{n+1}$, $(n+1)-$boyutlu Öklid uzayı olur. Ayrıca $v = 1$ ise E_1^{n+1}, $(n+1)-$ boyutlu Minkowski uzayı adını alır.

Özel Durumlar:

1- $v=0$ durumu

$E_0^{n+1}=E^{n+1}$, $(n+1)-$boyutlu Öklid uzayında merkez regle yüzeyli M, $(k+1)-$ boyutlu regle yüzeyin her ξ noktasında $i.$ asli kesit eğriliği

$$K_\xi(e_i,n)=-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_i^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_i}\right)^2, \quad 1\leq i\leq k$$

dır (Frank, 1979).

2- $v=1$ ve $\mu=0$ durumu

E_1^{n+1}, Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli timelike M regle yüzeyinin her ξ noktasında $i.$ asli kesit eğriliği

$$K_\xi(e_i,n)=-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_i^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_i}\right)^2 \quad , \quad 1\leq i\leq k$$

dir (Ersoy, 2007, Sonuç 4.1.4.)

3- $v=1$ ve $\mu=1$ durumu

E_1^{n+1}, Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli timelike regle yüzeyinin her ξ noktasında $i.$ asli kesit eğriliği

$$K_\xi(e_i,n)=\varepsilon_i\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_i^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_i}\right)^2\right) \quad , \quad 1\leq i\leq k$$

dır (Ersoy, 2007, Sonuç. 4.2.3.).

Teorem 3.2. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin nonnull normal teğet vektörü n olsun. $\forall \xi \in M$ noktasında M yarı regle yüzeyinin σ. asli kesit eğriliği ve $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği sırasıyla

$$K_{\xi}\left(e_{\sigma},n\right)=\varepsilon_{\sigma}\kappa_{\sigma}^{2}\left(\frac{\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}-\varepsilon_{k+\sigma}\left(\sum_{\sigma=1}^{m}\varepsilon_{k+\sigma}\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}+\varepsilon_{k+m+1}\left(\eta_{m+1}\right)^{2}\right)}{\left(\sum_{\sigma=1}^{m}\varepsilon_{k+\sigma}\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}+\varepsilon_{k+m+1}\left(\eta_{m+1}\right)^{2}\right)^{2}}\right),\ 1\leq\sigma\leq m \quad (3.29)$$

ve

$$K_{\xi}\left(e_{m+\rho},n\right)=0 \qquad , \qquad 1\leq\rho\leq k-m \quad (3.30)$$

dır, öyle ki $\varepsilon_{\sigma}=\langle e_{\sigma},e_{\sigma}\rangle$, $\varepsilon_{k+\sigma}=\langle a_{k+\sigma},a_{k+\sigma}\rangle$, $\varepsilon_{k+m+1}=\langle a_{k+m+1},a_{k+m+1}\rangle$ dir.

İspat. M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzey ve $[g_{ab}]$, M yarı regle yüzeyinin birinci temel formunun matris formu olsun. Bu takdirde $[g_{ab}]$ matrisinin determinantının u_{σ} ve $u_{(m+\rho)}$ ya göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned}&\frac{\partial g}{\partial u_{\sigma}}=2\varepsilon\varepsilon_{k+\sigma}u_{\sigma}\kappa_{\sigma}^{2} \quad , \quad \frac{\partial^{2} g}{\partial u_{\sigma}^{2}}=2\varepsilon\varepsilon_{k+\sigma}\kappa_{\sigma}^{2}\ ,\\ &\left(\frac{\partial g}{\partial u_{\sigma}}\right)^{2}=4\varepsilon^{2}\varepsilon_{k+\sigma}^{2}\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}\kappa_{\sigma}^{2} \quad , \quad 1\leq\sigma\leq m\end{aligned} \quad (3.31)$$

ve

$$\frac{\partial g}{\partial u_{m+\rho}}=\frac{\partial^{2} g}{\partial u_{m+\rho}^{2}}=\left(\frac{\partial g}{\partial u_{m+\rho}}\right)^{2}=0 \quad , \quad 1\leq\rho\leq k-m \quad (3.32)$$

olur. (3.31) denklemindeki eşitlikler (3.28) denkleminde yerine yazılırsa $1 \le \sigma \le m$ için nondejenere σ. asli kesitinin eğriliği

$$K_{\xi}\left(e_{\sigma},n\right)=\varepsilon_{\sigma}\left(\frac{1}{4g^{2}}\left(2\varepsilon\varepsilon_{k+\sigma}u_{\sigma}\kappa_{\sigma}^{2}\right)^{2}-\frac{1}{2g}2\varepsilon\varepsilon_{k+\sigma}\kappa_{\sigma}^{2}\right)$$

olur. Burada $\varepsilon=\varepsilon_{1}.\varepsilon_{2}.\varepsilon_{3}. \ldots .\varepsilon_{k}$ dır. $\varepsilon^{2}=\varepsilon_{k+\sigma}^{2}=1$ olduğu göz önüne alınarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$K_{\xi}\left(e_{\sigma},n\right)=\varepsilon_{\sigma}\kappa_{\sigma}^{2}\left(\frac{\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}}{g^{2}}-\frac{\varepsilon\varepsilon_{k+\sigma}}{g}\right)$$

bulunur. Son denklemde (3.10) eşitliği göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned}
K_{\xi}\left(e_{\sigma},n\right)&=\varepsilon_{\sigma}\kappa_{\sigma}^{2}\left(\frac{\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}-\varepsilon\varepsilon_{k+\sigma}\varepsilon\left(\sum_{\sigma=1}^{m}\varepsilon_{k+\sigma}\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}+\varepsilon_{k+m+1}\left(\eta_{m+1}\right)^{2}\right)}{\left[\varepsilon\left(\sum_{\sigma=1}^{m}\varepsilon_{k+\sigma}\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}+\varepsilon_{k+m+1}\left(\eta_{m+1}\right)^{2}\right)\right]^{2}}\right)\\
&=\varepsilon_{\sigma}\kappa_{\sigma}^{2}\left(\frac{\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}-\varepsilon_{k+\sigma}\left(\sum_{\sigma=1}^{m}\varepsilon_{k+\sigma}\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}+\varepsilon_{k+m+1}\left(\eta_{m+1}\right)^{2}\right)}{\left(\sum_{\sigma=1}^{m}\varepsilon_{k+\sigma}\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}+\varepsilon_{k+m+1}\left(\eta_{m+1}\right)^{2}\right)^{2}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon^{2}=1$, $\varepsilon_{\sigma}=\left\langle e_{\sigma},e_{\sigma}\right\rangle=\pm 1$, $\varepsilon_{k+m+1}=\left\langle a_{k+m+1},a_{k+m+1}\right\rangle=\pm 1$ ve $\varepsilon_{k+\sigma}=\left\langle a_{k+\sigma},a_{k+\sigma}\right\rangle=\pm 1$ dir.

Benzer şekilde, (3.32) denklemi (3.28) eşitliğinde yerine yazılırsa, $1\le\rho\le k-m$ için $\left(m+\rho\right)$. asli kesit eğriliği

$$K_{\xi}\left(e_{m+\rho},n\right)=0 \quad , \quad 1\le\rho\le k-m$$

bulunur.

Böylece (3.32) denklemi göz önüne alınarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.3. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzey M olsun. $\forall \xi \in M$ noktasında $1 \leq \rho \leq k-m$ için M nin $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği sıfırdır.

Özel Durumlar:

1- $v=0$ durumu

E^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Öklid uzayında, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş M regle yüzeyin normal teğet vektörü n olsun. Her ξ noktasında regle yüzeyin σ. asli kesit eğriliği ve $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği, sırasıyla,

$$K_\xi\left(e_\sigma, n\right) = -\kappa_\sigma^2 \left(\frac{\sum\limits_{\sigma=1}^{m}\left(u_\sigma \kappa_\sigma\right)^2 + \left(\eta_{m+1}\right)^2 - \left(u_\sigma \kappa_\sigma\right)^2}{\left(\sum\limits_{\sigma=1}^{m}\left(u_\sigma \kappa_\sigma\right)^2 + \left(\eta_{m+1}\right)^2\right)^2} \right), \; 1 \leq \sigma \leq m$$

ve

$$K_\xi\left(e_{m+\rho}, n\right) = 0 \quad , \qquad 1 \leq \rho \leq k-m$$

elde edilir (Frank, 1979).

2- $v=1$ ve $\mu=0$ durumu

E_1^{n+1}, Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli,

$(k+1)-$boyutlu M timelike regle yüzeyinin nonnull (spacelike veya timelike) normal teğet vektörü n olmak üzere bu regle yüzeyin her ξ noktasında σ. asli kesit eğriliği ve $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği, sırasıyla,

$$K_{\xi}\left(e_{\sigma},n\right)=-\frac{\left(\kappa_{\sigma}\right)^{2}\left[\sum_{\iota=1}^{m}\left(u_{\iota}\kappa_{\iota}\right)^{2}-\eta_{m+1}^{2}-\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}\right]}{\left(\sum_{\iota=1}^{m}\left(u_{\iota}\kappa_{\iota}\right)^{2}-\eta_{m+1}^{2}\right)^{2}} \quad , \quad 1\leq\sigma\leq m$$

ve

$$K_{\xi}\left(e_{m+\rho},n\right)=0 \quad , \quad 1\leq\rho\leq k-m$$

elde edilir (Ersoy, 2007, Teorem 4.1.5.).

3- $v=1$ ve $\mu=1$ durumu

E_1^{n+1}, Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı merkez regle yüzeyli, $(k+1)-$boyutlu M timelike regle yüzeyinin spacelike normal teğet vektörü n olsun. Bu takdirde M nin her ξ noktasında σ. asli kesit eğriliği ve $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği, sırasıyla,

$$K_{\xi}\left(e_{\sigma},n\right)=-\frac{\varepsilon_{\sigma}\left(\kappa_{\sigma}\right)^{2}\left[\sum_{\iota=1}^{m}\left(u_{\iota}\kappa_{\iota}\right)^{2}+\eta_{m+1}^{2}-\left(u_{\sigma}\kappa_{\sigma}\right)^{2}\right]}{\left(\sum_{\iota=1}^{m}\left(u_{\iota}\kappa_{\iota}\right)^{2}+\eta_{m+1}^{2}\right)^{2}} \quad , \quad 1\leq\sigma\leq m$$

ve

$$K_{\xi}\left(e_{m+\rho},n\right)=0 \quad , \quad 1\leq\rho\leq k-m$$

dır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.4.).

Teorem 3.4. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzey ve M yarı regle yüzeyinin σ. asli dağılma parametresi P_σ, $1 \leq \sigma \leq m$ olsun. $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında M nin σ. asli kesit eğriliği ve $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği sırasıyla

$$K_\zeta(e_\sigma, n) = -\varepsilon_\sigma \varepsilon_{k+\sigma}\,\varepsilon_{k+m+1}\frac{1}{P_\sigma^2} \qquad , \qquad 1 \leq \sigma \leq m \tag{3.33}$$

ve

$$K_\varsigma(e_{m+\rho}, n) = 0 \qquad , \qquad 1 \leq \rho \leq k-m \tag{3.34}$$

dır.

İspat. M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzey ve $\zeta \in \Omega$ ve P_σ, $1 \leq \sigma \leq m$, sırasıyla M nin merkez noktası ve σ. asli dağılma parametresi olsun.

İlk olarak $1 \leq \sigma \leq m$ için (3.4) eşitliği (3.29) denkleminde yerine yazılırsa M yarı regle yüzeyinin σ. kesit eğriliği

$$K_\zeta(e_\sigma, n) = \varepsilon_\sigma \kappa_\sigma^2 \left(\frac{-\varepsilon_{k+\sigma}\,\varepsilon_{k+m+1}(\eta_{m+1})^2}{\left(\varepsilon_{k+m+1}(\eta_{m+1})^2\right)^2} \right)$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapılır, $\varepsilon_\sigma = \langle e_\sigma, e_\sigma \rangle = \pm 1$, $\varepsilon_{k+\sigma} = \langle a_{k+\sigma}, a_{k+\sigma} \rangle = \pm 1$, $\varepsilon_{k+m+1} = \langle a_{k+m+1}, a_{k+m+1} \rangle = \pm 1$ eşitlikleri göz önüne alınır ve denklem yeniden düzenlenirse

$$K_\zeta(e_\sigma, n) = -\varepsilon_\sigma \varepsilon_{k+\sigma}\,\varepsilon_{k+m+1}\left(\frac{\kappa_\sigma}{\eta_{m+1}}\right)^2 \quad , \qquad 1 \leq \sigma \leq m$$

elde edilir. Bu son denklem ile birlikte (2.38) denklemi göz önüne alınırsa (3.33) denklemi elde edilir.

Ayrıca Sonuç 3.3. den dolayı $1 \leq \rho \leq k-m$ için M yarı regle yüzeyinin $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği sıfırdır.

Özel Durumlar:

1- $\nu = 0$ durumu

E^{n+1}, Öklid uzayında M regle yüzeyin σ. asli dağılma parametresi P_σ, $1 \leq \sigma \leq m$, olmak üzere $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında σ. asli kesit eğriliği ve $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği sırasıyla

$$K_\zeta\left(e_\sigma, n\right) = -\frac{1}{P_\sigma^2} \qquad , \qquad 1 \leq \sigma \leq m$$

ve

$$K_\zeta\left(e_{m+\rho}, n\right) = 0 \qquad , \qquad 1 \leq \rho \leq k-m$$

dir (Frank, 1979).

2- $\nu = 1$ ve $\mu = 0$ durumu

E_1^{n+1}, Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli M timelike regle yüzeyinin σ. asli dağılma parametresi P_σ, $1 \leq \sigma \leq m$, olmak üzere $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında M nin σ. asli kesit eğriliği ve $(m+\rho)$. asli kesit eğriliği sırasıyla

$$K_{\zeta}\left(e_{\sigma},n\right)=\frac{1}{P_{\sigma}^{2}} \qquad , \qquad 1\leq\sigma\leq m$$

ve

$$K_{\zeta}\left(e_{m+\rho},n\right)=0 \qquad , \qquad 1\leq\rho\leq k-m$$

dir (Ersoy, 2007, Teorem 4.1.7.).

3- $v=1$ ve $\mu=1$ durumu

E_{1}^{n+1}, Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş M timelike regle yüzeyinin σ. asli dağılma parametresi P_{σ} olmak üzere $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında M nin σ. ve $(m+\rho)$. asli kesit eğrilikleri sırasıyla

$$K_{\zeta}\left(e_{\sigma},n\right)=-\varepsilon_{\sigma}\frac{1}{P_{\sigma}^{2}} \qquad , \qquad 1\leq\sigma\leq m$$

ve

$$K_{\varsigma}\left(e_{m+\rho},n\right)=0 \qquad , \qquad 1\leq\rho\leq k-m$$

dir (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.6.).

E_{v}^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyin $2-$boyutlu σ. asli ışın yüzeyi M_{σ}, $1\leq\sigma\leq m$, olsun. M_{σ} asli ışın yüzeyinin $1-$boyutlu doğrultmanı $h_{\sigma}=Sp\{e_{\sigma}\}$, $1\leq\sigma\leq m$, $F_{m,h}(t)$ yarı altuzayı içindedir.

Teorem 3.5. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $\sigma.$ asli dağılma parametresi P_σ ve $2-$boyutlu nondejenere $\sigma.$ asli ışın yüzeyi M_σ olsun. $\zeta \in \Omega \subset M$, $u \in \mathbb{R}$ için $\zeta + ue_\sigma$ noktasında M_σ, $\sigma.$ asli ışın yüzeyinin kesit eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, n) = -\varepsilon\varepsilon_\sigma\varepsilon_{k+\sigma}\varepsilon_{k+m+1}\frac{P_\sigma^2}{\left(u^2+\varepsilon_{k+\sigma}\varepsilon_{k+m+1}P_\sigma^2\right)^2}, \qquad 1 \leq \sigma \leq m \quad (3.35)$$

dır. Burada $\varepsilon_\sigma = \langle e_\sigma, e_\sigma \rangle$, $\varepsilon_{k+\sigma} = \langle a_{k+\sigma}, a_{k+\sigma} \rangle$, $\varepsilon_{k+m+1} = \langle a_{k+m+1}, a_{k+m+1} \rangle$ dir.

İspat. E_v^{n+1} de M yarı regle yüzeyinin nonnull ortogonal yörüngesi boyunca $h_\sigma = Sp\{e_\sigma\}$, $1 \leq \sigma \leq m$, nondejenere asli ışınının oluşturduğu M_σ, $2-$boyutlu $\sigma.$ asli ışın yüzeyi

$$\varphi_\sigma(t,u) = \alpha(t) + ue_\sigma(t) \qquad , \qquad 1 \leq \sigma \leq m$$

parametrizasyonu ile verilir. Böylece M_σ asli ışın yüzeyinin birinci temel formunun matrisinin determinantı

$$g = \varepsilon\left(\varepsilon_{k+\sigma}(u\kappa_\sigma)^2 + \varepsilon_{k+m+1}(\eta_{m+1})^2\right) \quad (3.36)$$

dır. O halde (3.36) denkleminin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 2\varepsilon\varepsilon_{k+\sigma}u\kappa_\sigma^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 2\varepsilon\varepsilon_{k+\sigma}\kappa_\sigma^2 \quad , \quad \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 = 4(u\kappa_\sigma)^2\kappa_\sigma^2 \quad (3.37)$$

olur. $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\zeta \in \Omega \subset M$ için $\zeta + ue_\sigma$ noktasında (e_σ, n) nondejenere kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma,n)=\frac{R_{\sigma0\sigma0}}{\langle e_\sigma,e_\sigma\rangle\langle n,n\rangle-\langle e_\sigma,n\rangle^2}$$

şeklindedir. Bu son denklemde (3.26) denkleminin değeri yerine yazılır ve (3.36) ve (3.37) denklemleri göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma,n)&=\varepsilon_\sigma\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2\right)\\
&=\varepsilon_\sigma\left(-\frac{2\varepsilon\varepsilon_{k+\sigma}(\kappa_\sigma)^2}{2\varepsilon\left(\varepsilon_{k+\sigma}(u\kappa_\sigma)^2+\varepsilon_{k+m+1}(\eta_{m+1})^2\right)}+\frac{4(u\kappa_\sigma)^2(\kappa_\sigma)^2}{4\left[\varepsilon\left(\varepsilon_{k+\sigma}(u\kappa_\sigma)^2+\varepsilon_{k+m+1}(\eta_{m+1})^2\right)\right]^2}\right)\\
&=\varepsilon_\sigma\left(\frac{-\varepsilon\varepsilon_{k+\sigma}(\kappa_\sigma)^2\left[\varepsilon\left(\varepsilon_{k+\sigma}(u\kappa_\sigma)^2+\varepsilon_{k+m+1}(\eta_{m+1})^2\right)\right]+(u\kappa_\sigma)^2(\kappa_\sigma)^2}{\left[\varepsilon\left(\varepsilon_{k+\sigma}(u\kappa_\sigma)^2+\varepsilon_{k+m+1}(\eta_{m+1})^2\right)\right]^2}\right)\\
&=\varepsilon_\sigma\left(\frac{-\varepsilon^2\varepsilon_{k+\sigma}^2(u\kappa_\sigma)^2(\kappa_\sigma)^2-\varepsilon\varepsilon_{k+\sigma}\varepsilon_{k+m+1}(\kappa_\sigma)^2(\eta_{m+1})^2+(u\kappa_\sigma)^2(\kappa_\sigma)^2}{\left[\varepsilon\left(\varepsilon_{k+\sigma}(u\kappa_\sigma)^2+\varepsilon_{k+m+1}(\eta_{m+1})^2\right)\right]^2}\right)\\
&=\varepsilon_\sigma\left(\frac{-\varepsilon\varepsilon_{k+\sigma}\varepsilon_{k+m+1}(\kappa_\sigma)^2(\eta_{m+1})^2}{\varepsilon^2\varepsilon_{k+\sigma}^2(u\kappa_\sigma)^4+2\varepsilon^2\varepsilon_{k+\sigma}\varepsilon_{k+m+1}(u\kappa_\sigma)^2(\eta_{m+1})^2+\varepsilon^2\varepsilon_{k+m+1}^2(\eta_{m+1})^4}\right)\\
&=-\varepsilon\varepsilon_\sigma\varepsilon_{k+\sigma}\varepsilon_{k+m+1}\left(\frac{(\eta_{m+1})^2}{(u\kappa_\sigma)^4+2\varepsilon_{k+\sigma}\varepsilon_{k+m+1}(u\kappa_\sigma)^2(\eta_{m+1})^2+(\eta_{m+1})^4}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Pay ve payda κ_σ^4 ile sadeleştirildiğinde

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma,n)=-\varepsilon\varepsilon_\sigma\varepsilon_{k+\sigma}\varepsilon_{k+m+1}\left(\frac{\left(\frac{\eta_{m+1}}{\kappa_\sigma}\right)^2}{u^4+2\varepsilon_{k+\sigma}\varepsilon_{k+m+1}u^2\left(\frac{\eta_{m+1}}{\kappa_\sigma}\right)^2+\left(\frac{\eta_{m+1}}{\kappa_\sigma}\right)^4}\right) \tag{3.38}$$

bulunur. (3.38) ile birlikte (2.38) denklemi göz alınırsa (3.35) denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Özel Durumlar:

1- $v=0$ durumu

E_0^{n+1}, Öklid uzayında merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $1 \leq \sigma \leq m$ için σ. asli dağılma parametresi P_σ olsun. $2-$boyutlu σ. asli ışın yüzeyi M_σ olmak üzere $\zeta \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$ için $h_\sigma = Sp\{e_\sigma\}$ doğrultmanı üzerinde $\zeta + ue_\sigma$ noktasında M_σ, σ. asli ışın yüzeyinin kesit eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, n) = -\frac{P_\sigma^2}{\left(u^2 + P_\sigma^2\right)^2} \quad , \qquad 1 \leq \sigma \leq m$$

elde edilir (Frank, 1979).

2- $v=1$ ve $\mu=0$ durumu

E_1^{n+1}, Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyin, $2-$boyutlu σ. asli ışın yüzeyi M_σ olsun. $\zeta \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$ için $\zeta + ue_\sigma$ noktasında M_σ nın kesit eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, n) = \frac{P_\sigma^2}{\left(u^2 - P_\sigma^2\right)^2} \quad , \qquad 1 \leq \sigma \leq m$$

dır (Ersoy, 2007, Teorem 4.1.8.).

3- $v=1$ ve $\mu=1$ durumu

E_1^{n+1}, Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş M timelike regle yüzeyinin $2-$boyutlu σ. asli ışın yüzeyi M_σ spacelike veya timelike dır.

a) M_σ, σ. asli ışın yüzeyi spacelike ve $\zeta \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere $h_\sigma = Sp\{e_\sigma\}$ spacelike doğrultmanı üzerinde $\zeta + ue_\sigma$ noktasında σ. spacelike asli ışın yüzeyinin kesit eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, n) = -\frac{P_\sigma^2}{\left(u^2 + P_\sigma^2\right)^2} \quad , \quad 1 \le \sigma \le m$$

dır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.7.).

b) M_σ, σ. asli ışın yüzeyi timelike ve $\zeta \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}$ için $h_\sigma = Sp\{e_\sigma\}$ doğrultmanı üzerinde $\zeta + ue_\sigma$ noktasında σ. timelike asli ışın yüzeyinin kesit eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, n) = \frac{P_\sigma^2}{\left(u^2 + P_\sigma^2\right)^2} \quad , \quad 1 \le \sigma \le m$$

dır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.8.).

Şimdi M, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin doğrultman uzayı $E_{k,\mu}(t)$ içinde bir birim nondejenere vektör e ve M yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ yarı alt uzayına ortogonal olan nondejenere normal teğet vektörü n için (e, n) teğet kesitinin eğriliğini bulalım.

$E_{k,\mu}(t)$ içinde bir $e(t)$ birim vektörü

$$e(t) \in Sp\{e_1(t), \ldots, e_m(t), e_{m+1}(t), \ldots, e_k(t)\}$$

olmak üzere

$$e(t)=\sum_{x=1}^{s}\lambda_x e_x(t)+\sum_{y=s+1}^{m}\lambda_y e_y(t)+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\lambda_z e_z(t)+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\lambda_w e_w(t) \quad , \quad \|e(t)\|=1$$

olacak şekilde yazılabilir. Ayrıca doğrultman uzayı $E_{k,\mu}(t)=Sp\{e_1(t),\dots,e_k(t)\}$ olduğundan $F_{m,s}(t)=Sp\{e_1(t),\dots,e_m(t)\}$ ve $Z_{k-m,\mu-s}(t)=Sp\{e_{m+1}(t),\dots,e_k(t)\}$ dır, öyle ki M yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayı içinde $k-\mu$ tane spacelike ve μ tane timelike vektör vardır. Farzedelim ki $F_{m,s}(t)$ içerisinde herhangi s tane vektör ve $Z_{k-m,\mu-s}(t)$ içerisinde herhangi $\mu-s$ tane vektör timelike olsun. Bu durumda hem $F_{m,s}(t)$ uzayı hem de $Z_{k-m,\mu-s}(t)$ uzayı yarı altuzaydır. Ayrıca $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayı içerisinde $e(t)$ birim vektörü nondejeneredir. $e(t)$ vektörünün spacelike ve timelike olma durumlarını göz önünde bulundurarak aşağıdaki iki durum verebilir.

1. Durum $e(t)$ birim vektörü spacelike olsun.

E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin doğrultman uzayı içinde, e spacelike birim vektörü

$$e=\sum_{x=1}^{s}\sinh\theta_x e_x+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh\theta_y e_y+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\sinh\theta_z e_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\cosh\theta_w e_w \qquad (3.39)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$-\sum_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y-\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\sinh^2\theta_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\cosh^2\theta_w=1 \qquad (3.40)$$

dır. Öyle ki burada e spacelike birim vektörü ile $e_1,e_2,\dots,e_s,e_{s+1},\dots,e_m,e_{m+1},\dots,e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılar $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_s,\theta_{s+1},\dots,\theta_m,\theta_{m+1},\dots,\theta_k$ dır.

2. Durum $e(t)$ birim vektörü timelike olsun.

E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin doğrultman uzayı içinde, e birim timelike vektörü

$$e=\sum_{x=1}^{s}\cosh\theta_x e_x+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh\theta_y e_y+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\cosh\theta_z e_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\sinh\theta_w e_w \qquad (3.41)$$

şeklinde verilebilir, öyle ki

$$-\sum_{x=1}^{s}\cosh^2\theta_x+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh^2\theta_y-\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\cosh^2\theta_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\sinh^2\theta_w=-1 \qquad (3.42)$$

dir. Sırasıyla $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s,\theta_{s+1},\ldots,\theta_m,\theta_{m+1},\ldots,\theta_k$ açıları, e timelike birim vektörü ile $e_1,e_2,\ldots,e_s,e_{s+1},\ldots,e_m,e_{m+1},\ldots,e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır.

Böylece 1. ve 2. durumlar göz önüne alınırsa (e,n) nondejenere teğet kesitinin eğriliği ile ilgili sırasıyla aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.6. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzey M ve $E_{k,\mu}(t)$ içinde spacelike birim vektör e olsun. M yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ ye ortogonal olan nonnull normal teğet vektörü n olmak üzere $\zeta\in\Omega\subset M$ noktasında (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasında

$$K_\zeta(e,n)=-\sum_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x K_\zeta(e_x,n)+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y K_\zeta(e_y,n) \qquad (3.43)$$

bağıntısı vardır. Burada $F_{m,s}(t)$ alt uzayındaki timelike vektörler e_s, $1 \leq s \leq m$, olmak üzere e spacelike birim vektörü ile $e_1, e_2, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılar sırasıyla $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s, \theta_{s+1}, \ldots, \theta_m, \theta_{m+1}, \ldots, \theta_k$ dır.

İspat. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin doğrultman uzayı içinde e spacelike birim vektörü ve doğrultman uzayına ortogonal olan n nonnull normal teğet vektörünün koordinatları sırasıyla $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \langle e, e_0 \rangle = 0, \\
\beta_x &= \langle e, e_x \rangle = \sinh \theta_x \quad , \quad 1 \leq x \leq s \\
\beta_y &= \langle e, e_y \rangle = \cosh \theta_y \quad , \quad s+1 \leq y \leq m \\
\beta_z &= \langle e, e_z \rangle = \sinh \theta_z \quad , \quad m+1 \leq z \leq m+\mu-s \\
\beta_w &= \langle e, e_w \rangle = \cosh \theta_w \quad , \quad m+1+\mu-s \leq w \leq k
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \langle n, e_0 \rangle = 1 \quad , \\
\gamma_\nu &= \langle n, e_\nu \rangle = 0 \quad , \quad 1 \leq \nu \leq k
\end{aligned}$$

dır.

O halde $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında yukarıdaki eşitlikler (2.21) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,n) = \frac{\sum_{x=1}^{s} \sinh^2 \theta_x R_{x0x0} + \sum_{y=s+1}^{m} \cosh^2 \theta_y R_{y0y0}}{\langle e,e \rangle \langle n,n \rangle - \langle e,n \rangle^2}$$

elde edilir. Böylece son denklem ve (3.26) dan dolayı

$$K_\zeta(e,n)=\sum_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_x{}^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right)+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_x{}^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right)$$

bulunur. $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında (3.28) denklemi ile verilen (e_σ,n), $1\le\sigma\le m$, nondejenere asli kesitinin eğriliği göz önüne alınırsa M yarı regle yüzeyinin (e,n) kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,n)=\sum_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x\varepsilon_x K_\zeta(e_x,n)+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y\varepsilon_y K_\zeta(e_y,n)$$

olur. Burada ε_x ve ε_y değerleri göz önünde bulundurulursa (3.43) denklemi elde edilir.

Bu bağıntı, M yarı regle yüzeyinin $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında nondejenere kesitinin eğriliği için I. tip yarı Öklidiyen Beltrami-Euler formülü olarak adlandırılır.

Özel Durum:

1- $v=1$ ve $\mu=1$ durumu

E_1^{n+1}, Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş M timelike regle yüzeyinin doğrultman uzayı $E_k(t)$ içinde spacelike birim vektör e olsun. Bu regle yüzeyin $E_k(t)$ye ortogonal olan normal teğet vektörü n olmak üzere $\zeta\in\Omega$ noktasında (e,n) spacelike kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasında bağıntı

$$K_\zeta(e,n)=\sum_{\substack{\sigma=1\\ \sigma\neq s}}^{m}\cosh^2\theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma,n)-\sinh^2\theta_s K_\zeta(e_s,n)$$

dır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.9.).

Teorem 3.7. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzey M ve $E_{k,\mu}(t)$ içinde timelike birim vektör e olsun. M yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ye ortogonal olan nonnull normal teğet vektörü n olmak üzere $\zeta \in \Omega \subset M$ noktasında (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasında

$$K_\zeta(e,n) = \sum_{x=1}^{s} \cosh^2 \theta_x K_\zeta(e_x,n) - \sum_{y=s+1}^{m} \sinh^2 \theta_y K_\zeta(e_y,n) \tag{3.44}$$

bağıntısı vardır. Burada e_s, $1 \le s \le m$, $F_{m,s}(t)$ alt uzayı içinde timelike vektörlerdir ve sırasıyla $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s,\theta_{s+1},\ldots,\theta_m,\theta_{m+1},\ldots,\theta_k$ açıları, e timelike birim vektörü ile $e_1,e_2,\ldots,e_s,e_{s+1},\ldots,e_m,e_{m+1},\ldots,e_k$ baz vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır.

İspat. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin doğrultman uzayı içinde e timelike birim vektörü ve doğrultman uzayına ortogonal olan n nonnull normal teğet vektörünün koordinatları sırasıyla $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_k)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \langle e,e_0\rangle = 0, \\
\beta_x &= \langle e,e_x\rangle = \cosh\theta_x \quad , \quad 1 \le x \le s \\
\beta_y &= \langle e,e_y\rangle = \sinh\theta_y \quad , \quad s+1 \le y \le m \\
\beta_z &= \langle e,e_z\rangle = \cosh\theta_z \quad , \quad m+1 \le z \le m+\mu-s \\
\beta_w &= \langle e,e_w\rangle = \sinh\theta_w \quad , \quad m+1+\mu-s \le w \le k
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \langle n,e_0\rangle = 1 \quad , \\
\gamma_\nu &= \langle n,e_\nu\rangle = 0 \quad , \quad 1 \le \nu \le k
\end{aligned}$$

dır. (2.21) denklemi $\zeta \in \Omega$ merkez noktası için yeniden düzenlenirse

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=\frac{\sum_{x=1}^{s}\cosh^{2}\theta_{x}R_{x0x0}+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh^{2}\theta_{y}R_{y0y0}}{\left\langle e,e\right\rangle\left\langle n,n\right\rangle-\left\langle e,n\right\rangle^{2}}$$

olur. Bu son denklem (3.36) denklemi ile birlikte göz önüne alınırsa

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=-\left(\sum_{x=1}^{s}\cosh^{2}\theta_{x}\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^{2}g}{\partial u_{x}^{2}}+\frac{1}{4g^{2}}\left(\frac{\partial g}{\partial u_{x}}\right)^{2}\right)+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh^{2}\theta_{y}\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^{2}g}{\partial u_{x}^{2}}+\frac{1}{4g^{2}}\left(\frac{\partial g}{\partial u_{x}}\right)^{2}\right)\right)$$

elde edilir. $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında (3.28) denklemi ile verilen $\left(e_{\sigma},n\right)$, $1\leq\sigma\leq m$, nondejenere asli kesitinin eğriliği göz önüne alınırsa M yarı regle yüzeyini $\left(e,n\right)$ kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=-\sum_{x=1}^{s}\cosh^{2}\theta_{x}\varepsilon_{x}K_{\zeta}\left(e_{x},n\right)-\sum_{y=s+1}^{m}\sinh^{2}\theta_{y}\varepsilon_{y}K_{\zeta}\left(e_{y},n\right)$$

olur. Burada ε_{x} ve ε_{y} değerleri göz önünde bulundurulursa (3.44) denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Bu bağıntı, M yarı regle yüzeyinin $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında nondejenere kesitinin eğriliği için II. tip yarı Öklidiyen Beltrami-Euler formülü olarak adlandırılır.

Özel Durum:

1- $v=1$ ve $\mu=1$ durumu

E_{1}^{n+1}, Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş M timelike regle yüzeyinin doğrultman uzayı $E_{k}\left(t\right)$ içinde timelike birim vektör e olsun. M nin $E_{k}\left(t\right)$ ye ortogonal olan normal teğet vektörü

n olmak üzere, $\zeta \in \Omega$ noktasında (e,n) kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasında bağıntı

$$K_\zeta(e,n) = -\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq s}}^{m} \sinh^2 \theta_\sigma K_\zeta(e_\sigma, n) + \cosh^2 \theta_s K_\zeta(e_s, n)$$

dır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.10).

Teorem 3.8. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, Ω merkez regle yüzeyinin ζ merkez noktasında, doğrultmanı $h_\zeta(e) \subset E_{k,\mu}(t)$ olan $2-$boyutlu M yarı regle yüzeyinin dağılma parametresi P olsun. e spacelike vektör olmak üzere $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında M yarı regle yüzeyinin (e,n) kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,n) = -\varepsilon\, \varepsilon_{k+m+1} \frac{1}{P^2} \tag{3.45}$$

dır. Burada $\varepsilon = \varepsilon_1 . \varepsilon_2 . \dots . \varepsilon_k$ ve $\varepsilon_{k+m+1} = \langle a_{k+m+1}, a_{k+m+1} \rangle$ dir.

İspat. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, e birim vektörü spacelike olduğu için $2-$boyutlu yarı regle yüzeyin doğrultmanı (3.39) denkleminde verildiği gibidir. Böylece (3.39) denkleminden

$$\dot{e} = \sum_{x=1}^{s} \sinh\theta_x \dot{e}_x + \sum_{y=s+1}^{m} \cosh\theta_y \dot{e}_y + \sum_{z=m+1}^{m+\mu-s} \sinh\theta_z \dot{e}_z + \sum_{w=m+1+\mu-s}^{k} \cosh\theta_w \dot{e}_w$$

bulunur. Son denklemdeki eşitlik (2.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$\overset{\circ}{e}=\dot{e}-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_{\mu}\left\langle \dot{e},e_{\mu}\right\rangle e_{\mu}$$

$$=\sum_{x=1}^{s}\sinh\theta_x\,\dot{e}_x+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh\theta_y\,\dot{e}_y+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\sinh\theta_z\,\dot{e}_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\cosh\theta_w\,\dot{e}_w$$

$$-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_{\mu}\left\langle \sum_{x=1}^{s}\sinh\theta_x\,\dot{e}_x+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh\theta_y\,\dot{e}_y+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\sinh\theta_z\,\dot{e}_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\cosh\theta_w\,\dot{e}_w,e_{\mu}\right\rangle e_{\mu}$$

$$=\sum_{x=1}^{s}\sinh\theta_x\left(\dot{e}_x-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_{\mu}\left\langle \dot{e}_x,e_{\mu}\right\rangle e_{\mu}\right)+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh\theta_y\left(\dot{e}_y-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_{\mu}\left\langle \dot{e}_y,e_{\mu}\right\rangle e_{\mu}\right)$$

$$+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\sinh\theta_z\left(\dot{e}_z-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_{\mu}\left\langle \dot{e}_z,e_{\mu}\right\rangle e_{\mu}\right)+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\cosh\theta_w\left(\dot{e}_w-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_{\mu}\left\langle \dot{e}_w,e_{\mu}\right\rangle e_{\mu}\right)$$

elde edilir. $A(t)=Sp\left\{e_1(t),\ldots,e_k(t),\dot{e}_1(t),\ldots\dot{e}_k(t)\right\}$ asimptotik demetinin bir ortogonal bazı $\left\{e_1(t),\ldots,e_k(t),\overset{\circ}{e}_1(t),\ldots\overset{\circ}{e}_m(t)\right\}$ olduğundan

$$\overset{\circ}{e}=\sum_{x=1}^{s}\sinh\theta_x\,\overset{\circ}{e}_x+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh\theta_y\,\overset{\circ}{e}_y \quad , \quad 1\le s\le m$$

dır. Böylece

$$\left\langle \overset{\circ}{e},\overset{\circ}{e}\right\rangle=\sum_{x=1}^{s}\sinh\theta_x\left\langle \overset{\circ}{e}_x,\overset{\circ}{e}_x\right\rangle+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh\theta_y\left\langle \overset{\circ}{e}_y,\overset{\circ}{e}_y\right\rangle$$

elde edilir. Burada $\left\langle \overset{\circ}{e},\overset{\circ}{e}\right\rangle=\varepsilon\left\|\overset{\circ}{e}\right\|^2$, $\left\langle \overset{\circ}{e}_x,\overset{\circ}{e}_x\right\rangle=\varepsilon_{k+x}\left\|\overset{\circ}{e}_x\right\|^2$ ve $\left\langle \overset{\circ}{e}_y,\overset{\circ}{e}_y\right\rangle=\varepsilon_{k+y}\left\|\overset{\circ}{e}_y\right\|^2$ olduğundan

$$\varepsilon\left\|\overset{\circ}{e}\right\|^2=\sum_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x\varepsilon_{k+x}\left\|\overset{\circ}{e}_x\right\|^2+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y\varepsilon_{k+y}\left\|\overset{\circ}{e}_y\right\|^2$$

bulunur. $\left\|\overset{\circ}{e}\right\|=\kappa$, $\left\|\overset{\circ}{e}_x\right\|=\kappa_x$ ve $\left\|\overset{\circ}{e}_y\right\|=\kappa_y$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\varepsilon\,\kappa^2=\sum_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x\,\varepsilon_{k+x}\kappa_x^2+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y\varepsilon_{k+y}\,\kappa_y^2 \tag{3.46}$$

elde edilir. Ayrıca $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında $u_\sigma=0$, $1\leq\sigma\leq m$, şartı da göz önüne alınarak (3.43) denkleminde (3.33) ifadesi yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,n)=-\sum_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x\left[-\varepsilon_x\varepsilon_{k+x}\,\varepsilon_{k+m+1}\left(\frac{\kappa_x}{\eta_{m+1}}\right)^2\right]+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y\left[-\varepsilon_y\varepsilon_{k+y}\,\varepsilon_{k+m+1}\left(\frac{\kappa_y}{\eta_{m+1}}\right)^2\right]$$

elde edilir. Son denklemde $\varepsilon_{k+m+1}=\left\langle a_{k+m+1},a_{k+m+1}\right\rangle=\pm1$, $\varepsilon_x=\left\langle e_x,e_x\right\rangle=-1$ ve $\varepsilon_y=\left\langle e_y,e_y\right\rangle=1$ olduğu göz önüne alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$K_\zeta(e,n)=-\varepsilon_{k+m+1}\frac{\sum\limits_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x\,\varepsilon_{k+x}\,\kappa_x^2+\sum\limits_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y\,\varepsilon_{k+y}\,\kappa_y^2}{\eta_{m+1}^2}$$

bulunur. (3.46) denklemiyle verilen eşitlik yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,n)=-\varepsilon\,\varepsilon_{k+m+1}\frac{\kappa^2}{\eta_{m+1}^2}$$

elde edilir. (2.38) denklemiyle verilen M yarı regle yüzeyinin dağılma parametresi dikkate alınırsa (3.45) ifadesi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Bu bağıntı $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında e spacelike doğrultmanlı $2-$boyutlu yüzeyin (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği için yarı Öklidiyen Lamarle formülü olarak adlandırılır.

Özel Durum:

1- $v=0$ durumu

E^{n+1}, Öklid uzayında $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında doğrultmanı $h_\zeta(e) \subset E_k(t)$ olan $2-$boyutlu regle yüzeyin dağılma parametresi P olsun. $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında bu regle yüzeyin (e,n) kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,n) = -\frac{1}{P^2}$$

dir (Frank, 1979).

2- $v=1$ ve $\mu=0$ durumu

E_1^{n+1}, Minkowski uzayında, $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında spacelike doğrultmanı $h_\zeta(e) \subset E_k(t)$ olan $2-$boyutlu timelike regle yüzey M ve M nin dağılma parametresi P olsun. $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında M nin (e,n) nonnull kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,n) = \frac{1}{P^2}$$

dir (Ersoy, 2007, Teorem 4.1.10).

3- $v=1$ ve $\mu=1$ durumu

E_1^{n+1}, Minkowski uzayında Ω spacelike merkez regle yüzeyinin ζ merkez noktasında, spacelike doğrultmanı $h_\zeta(e) \subset E_k(t)$ olan $2-$boyutlu spacelike regle yüzeyinin dağılma parametresi P olsun. $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında bu regle yüzeyin (e,n) spacelike kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=-\frac{1}{P^{2}}$$

dır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.13.).

Teorem 3.9. E_{v}^{n+1}, $\left(n+1\right)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, Ω merkez regle yüzeyin ζ noktasında doğrultmanı $h_{\zeta}\left(e\right)\subset E_{k}\left(t\right)$ olan $2-$boyutlu M yarı regle yüzeyinin dağılma parametresi P olsun. e timelike vektör olmak üzere $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında M yarı regle yüzeyinin $\left(e,n\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta}\left(e,n\right)=\varepsilon\,\varepsilon_{k+m+1}\frac{1}{P^{2}} \tag{3.47}$$

dır. Burada $\varepsilon=\varepsilon_{1}.\varepsilon_{2}.\,\ldots\,.\varepsilon_{k}$ ve $\varepsilon_{k+m+1}=\left\langle a_{k+m+1},a_{k+m+1}\right\rangle$ dir.

İspat. E_{v}^{n+1}, $\left(n+1\right)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, doğrultmanı $h_{\zeta}\left(e\right)\subset E_{k,\mu}\left(t\right)$ olan $2-$boyutlu yarı regle yüzeyi parametrik olarak

$$\varphi\left(t,u\right)=\alpha\left(t\right)+ue\left(t\right)$$

ile verilir. O halde (3.40) denklemiyle verilen e timelike birim vektörü için

$$\dot{e}=\sum_{x=1}^{s}\cosh\theta_{x}\,\dot{e}_{x}+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh\theta_{y}\,\dot{e}_{y}+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\cosh\theta_{z}\,\dot{e}_{z}+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\sinh\theta_{w}\,\dot{e}_{w}$$

yazılabilir. Son denklem ile birlikte (2.26) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{e}&=\dot{e}-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_{\mu}\left\langle\dot{e},e_{\mu}\right\rangle e_{\mu}\\&=\sum_{x=1}^{s}\cosh\theta_{x}\,\dot{e}_{x}+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh\theta_{y}\,\dot{e}_{y}+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\cosh\theta_{z}\,\dot{e}_{z}+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\sinh\theta_{w}\,\dot{e}_{w}\end{aligned}$$

$$-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle\sum_{x=1}^{s}\cosh\theta_x\,\dot{e}_x+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh\theta_y\,\dot{e}_y+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\cosh\theta_z\,\dot{e}_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\sinh\theta_w\,\dot{e}_w,e_\mu\right\rangle e_\mu$$

$$=\sum_{x=1}^{s}\cosh\theta_x\left(\dot{e}_x-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle\dot{e}_x,e_\mu\right\rangle e_\mu\right)+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh\theta_y\left(\dot{e}_y-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle\dot{e}_y,e_\mu\right\rangle e_\mu\right)$$

$$+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\cosh\theta_z\left(\dot{e}_z-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle\dot{e}_z,e_\mu\right\rangle e_\mu\right)+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\sinh\theta_w\left(\dot{e}_w-\sum_{\mu=1}^{k}\varepsilon_\mu\left\langle\dot{e}_w,e_\mu\right\rangle e_\mu\right)$$

elde edilir. $A(t)=Sp\left\{e_1(t),\ldots,e_k(t),\dot{e}_1(t),\ldots\dot{e}_k(t)\right\}$ asimptotik demetinin bir ortogonal bazı $\left\{e_1(t),\ldots,e_k(t),\overset{\circ}{e}_1(t),\ldots\overset{\circ}{e}_m(t)\right\}$ olduğundan

$$\overset{\circ}{e}=\sum_{x=1}^{s}\cosh\theta_x\,\overset{\circ}{e}_x+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh\theta_y\,\overset{\circ}{e}_y$$

elde edilir. Bu vektörün kendisiyle iç çarpımından

$$\left\langle\overset{\circ}{e},\overset{\circ}{e}\right\rangle=\sum_{x=1}^{s}\cosh^2\theta_x\left\langle\overset{\circ}{e}_x,\overset{\circ}{e}_x\right\rangle+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh^2\theta_y\left\langle\overset{\circ}{e}_y,\overset{\circ}{e}_y\right\rangle$$

bulunur. Burada $\left\langle\overset{\circ}{e},\overset{\circ}{e}\right\rangle=\varepsilon\left\|\overset{\circ}{e}\right\|^2$, $\left\langle\overset{\circ}{e}_x,\overset{\circ}{e}_x\right\rangle=\varepsilon_{k+x}\left\|\overset{\circ}{e}_x\right\|^2$ ve $\left\langle\overset{\circ}{e}_y,\overset{\circ}{e}_y\right\rangle=\varepsilon_{k+y}\left\|\overset{\circ}{e}_y\right\|^2$ dir ve

$$\varepsilon\left\|\overset{\circ}{e}\right\|^2=\sum_{x=1}^{s}\cosh\theta_x\varepsilon_{k+x}\left\|\overset{\circ}{e}_x\right\|^2+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh\theta_y\varepsilon_{k+y}\left\|\overset{\circ}{e}_y\right\|^2$$

elde edilir. $\left\|\overset{\circ}{e}\right\|=\kappa$, $\left\|\overset{\circ}{e}_x\right\|=\kappa_x$ ve $\left\|\overset{\circ}{e}_y\right\|=\kappa_y$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\varepsilon\kappa^2=\sum_{x=1}^{s}\cosh\theta_x\,\varepsilon_{k+x}\kappa_x^2+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh\theta_y\,\varepsilon_{k+y}\kappa_y^2 \qquad (3.48)$$

dır. Ayrıca $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (3.33) denkleminden dolayı $\left(e_\sigma, n\right)$, $1 \leq \sigma \leq m$, nondejenere asli kesitinin eğriliği

$$K_\zeta\left(e_\sigma, n\right) = -\varepsilon_\sigma \varepsilon_{k+\sigma}\, \varepsilon_{k+m+1} \left(\frac{\kappa_\sigma}{\eta_{m+1}}\right)^2$$

dır. Bu son eşitlik, (3.44) de verilen $\left(e, n\right)$ kesitinin eğriliği ile asli kesit eğrilikler arasındaki bağıntıda yerine yazılırsa

$$K_\zeta\left(e, n\right) = \sum_{x=1}^{s} \cosh^2 \theta_x \left[-\varepsilon_x \varepsilon_{k+x}\, \varepsilon_{k+m+1} \left(\frac{\kappa_x}{\left(\eta_{m+1}\right)}\right)^2\right] - \sum_{y=s+1}^{m} \sinh^2 \theta_y \left[-\varepsilon_y \varepsilon_{k+y}\, \varepsilon_{k+m+1} \left(\frac{\kappa_y}{\left(\eta_{m+1}\right)}\right)^2\right]$$

bulunur. Burada, $\varepsilon_x = \left\langle e_x, e_x \right\rangle = -1$, $\varepsilon_y = \left\langle e_y, e_y \right\rangle = 1$, $\varepsilon_{k+m+1} = \left\langle a_{k+m+1}, a_{k+m+1} \right\rangle = \pm 1$ dir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$K_\zeta\left(e, n\right) = \varepsilon_{k+m+1} \frac{\sum_{x=1}^{s} \cosh^2 \theta_x \varepsilon_{k+x} \kappa_x^2 + \sum_{y=s+1}^{m} \sinh^2 \theta_y\, \varepsilon_{k+y}\, \kappa_y^2}{\eta_{m+1}^2}$$

olur. Bu son denklemde (3.48) denklemiyle verilen eşitlik yerine yazılırsa

$$K_\zeta\left(e, n\right) = \varepsilon\, \varepsilon_{k+m+1} \frac{\kappa^2}{\eta_{m+1}^2}$$

bulunur. (2.38) denklemiyle verilen M yarı regle yüzeyinin dağılma parametresi son denklemde yerine yazılırsa (3.47) ifadesi bulunur ve ispat tamamlanır.

Bu bağıntı $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında, e timelike doğrultmanlı $2-$boyutlu yüzeyin $\left(e, n\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği için yarı Öklidiyen Lamarle formülü olarak adlandırıldı.

Özel Durum:

1- $\nu = 1$ ve $\mu = 1$ durumu

E_1^{n+1}, Minkowski uzayında Ω spacelike merkez regle yüzeyinin ζ noktasında, timelike doğrultmanı $h_\zeta(e) \subset E_k(t)$ olan $2-$boyutlu timelike regle yüzeyinin dağılma parametresi P olsun. $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında regle yüzeyin (e,n) timelike kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,n) = \frac{1}{P^2}$$

dır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.14.).

Böylece, Teorem 3.8. ve Teorem 3.9. dan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.10. M yarı regle yüzeyinin ortogonal yörüngesi boyunca $h_\zeta(e) \subset E_{k,\mu}(t)$, doğrultmanın hareketiyle oluşan $2-$boyutlu yarı regle yüzeyin kesit eğriliği, IR_1^3 Minkowski uzayında nonnull regle yüzeylerin Gauss eğriliğine dejenere olur.

E_ν^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin merkez regle yüzeyi Ω olmak üzere $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında e_σ, $1 \le \sigma \le m$, ile lineer bağımsız herhangi a birim vektörü

$$\begin{aligned} a = {} & \lambda_0 \frac{n}{\|n\|} + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{s-1} e_{s-1} + \lambda_s e_s + \lambda_{s+1} e_{s+1} + \ldots + \lambda_m e_m \\ & + \lambda_{m+1} e_{m+1} + \ldots + \lambda_{m+\mu-s} e_{m+\mu-s} + \lambda_{m+1+\mu-s} e_{m+1+\mu-s} + \ldots + \lambda_k e_k \end{aligned} \quad , \quad \|a\| = 1$$

olarak yazılabilir. $F_{m,s}(t)$ içinde herhangi s tane vektör ve $Z_{k-m,\mu-s}(t)$ içerisinde herhangi $\mu - s$ tane vektör timelike olsun. Bu durumda hem $F_{m,s}(t)$ uzayı hem de

$Z_{k-m,\mu-s}(t)$ uzayı yarı altuzay dır. Bu yarı altuzayların içinde bulunan vektörlerin durumlarına göre

$$\langle a,a\rangle = \lambda_0^2 + \sum_{x=1}^{s}\lambda_x^2 + \sum_{y=s+1}^{m}\lambda_y^2 + \sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\lambda_z^2 + \sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\lambda_w^2 = \pm 1$$

dir. Yani, a birim vektörü spacelike veya timelike vektördür. Böylece M yarı regle yüzeyinin Ω merkez regle yüzeyi nondejeneredir.

a birim vektörünün ve n birim normal vektörünün spacelike veya timelike olma durumlarını göz önünde bulundurarak aşağıdaki sınıflandırmayı yapabiliriz.

1) a birim vektörü spacelike ve n birim normal vektörü spacelike,

2) a birim vektörü spacelike ve n birim normal vektörü timelike,

3) a birim vektörü timelike ve n birim normal vektörü spacelike,

4) a birim vektörü timelike ve n birim normal vektörü timelike,

olabilir. Şimdi söz konusu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

1) a birim vektörü spacelike ve n birim normal vektörü spacelike olsun.

E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzey olsun. M yarı regle yüzeyinin asli çatısı $\{e_1,\ldots,e_s,\ldots,e_m,\ldots,e_k\}$ ve $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan normal teğet vektörü n olmak üzere $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi a spacelike birim vektörü için

$$a=\cosh\psi_0\frac{n}{\|n\|}+\sum_{x=1}^{s}\sinh\psi_x e_x+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh\psi_y e_y+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\sinh\psi_z e_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\cosh\psi_w e_w \quad (3.49)$$

ve

$$-\sum_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y-\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\sinh^2\theta_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\cosh^2\theta_w=1$$

olarak yazılabilir. Burada e_s, $1\le s\le m$, $F_{m,s}(t)$ altuzayı içinde timelike vektörler olmak üzere $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_s,\ldots,\psi_k$ açıları sırasıyla a spacelike birim vektörü ile $n,e_1,\ldots,e_s,\ldots,e_k$ vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır.

2) a birim vektörü spacelike ve n birim normal vektörü timelike olsun.

E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin asli çatısı $\{e_1,\ldots,e_s,\ldots,e_m,\ldots,e_k\}$ ve $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan normal teğet vektörü n olsun. $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında, a herhangi spacelike birim vektörü olmak üzere

$$a=\sinh\psi_0\frac{n}{\|n\|}+\sum_{x=1}^{s}\sinh\psi_x e_x+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh\psi_y e_y+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\sinh\psi_z e_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\cosh\psi_w e_w \quad (3.50)$$

ve

$$-\sum_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y-\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\sinh^2\theta_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\cosh^2\theta_w=1$$

dir. Öyle ki e_s, $1\le s\le m$, $F_{m,s}(t)$ altuzayı içinde timelike vektörler olmak üzere $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_s,\ldots,\psi_k$ açıları sırasıyla a spacelike birim vektörü ile $n,e_1,\ldots,e_s,\ldots,e_k$ vektörleri arasındaki hiperbolik açılardır.

3) a birim vektörü timelike ve n birim normal vektörü spacelike olsun.

E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzey olsun. M yarı regle yüzeyinin asli çatısı

$\{e_1,\ldots,e_s,\ldots,e_m,\ldots,e_k\}$ ve $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan normal teğet vektörü n olmak üzere $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi a timelike birim vektörü için

$$a=\sinh\psi_0\frac{n}{\|n\|}+\sum_{x=1}^{s}\cosh\psi_x e_x+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh\psi_y e_y+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\cosh\psi_z e_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\sinh\psi_w e_w \quad (3.51)$$

ve

$$-\sum_{x=1}^{s}\cosh^2\theta_x+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh^2\theta_y-\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\cosh^2\theta_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\sinh^2\theta_w=-1$$

şeklindedir, öyle ki burada a timelike birim vektörü ile $n,e_1,\ldots,e_s,\ldots,e_k$ vektörleri arasındaki hiperbolik açılar sırasıyla $\psi_0,\psi_1,\ldots,\psi_s,\ldots,\psi_k$ ve e_s, $1\le s\le m$, vektörleri $F_{m,s}(t)$ altuzayı içinde timelike vektörlerdir.

4) a birim vektörü timelike ve n birim normal vektörü timelike olsun.

E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzey olsun. M yarı regle yüzeyinin asli çatısı $\{e_1,\ldots,e_s,\ldots,e_m,\ldots,e_k\}$ ve $E_k(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan normal teğet vektörü n olsun. $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi a timelike birim vektörü için

$$a=\cosh\psi_0\frac{n}{\|n\|}+\sum_{x=1}^{s}\cosh\psi_x e_x+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh\psi_y e_y+\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\cosh\psi_z e_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\sinh\psi_w e_w \quad (3.52)$$

ve

$$-\sum_{x=1}^{s}\cosh^2\theta_x+\sum_{y=s+1}^{m}\sinh^2\theta_y-\sum_{z=m+1}^{m+\mu-s}\cosh^2\theta_z+\sum_{w=m+1+\mu-s}^{k}\sinh^2\theta_w=-1$$

şeklindedir. Burada e_s, $1 \le s \le m$, $F_{m,s}(t)$ altuzayı içinde bir timelike vektörler olmak üzere a timelike birim vektörü ile $n, e_1, \ldots, e_s, \ldots, e_k$ vektörleri arasındaki hiperbolik açılar sırasıyla $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_s, \ldots, \psi_k$ dır.

(2.21) denklemini göz önünde bulundurarak $1 \le \sigma \le m$ için $(\zeta + ue_\sigma) \in M$ noktasında (e_σ, a) nondejenere kesitinin eğriliği

$$K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, a) = \frac{\beta_\sigma \beta_\sigma \lambda_0 \lambda_0 R_{\sigma 0 \sigma 0}}{\langle e_\sigma, e_\sigma \rangle \langle a, a \rangle - \langle e_\sigma, a \rangle^2} \tag{3.53}$$

dır. Dolayısıyla son denklemle birlikte yukarıda verilmiş olan (1), (2), (3) ve (4) durumları göz önüne alınırsa $1 \le \sigma \le m$ için (e_σ, a) kesitinin eğriliği ile (e_σ, n) σ. asli kesitinin eğriliği arasında bağıntı ile ilgili teoremler sırasıyla verilebilir.

Teorem 3.11. E_v^{n+1} de M, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan spacelike normal teğet vektörü n olsun. Böylece $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında e_x, $1 \le x \le s$, timelike vektörleri ile ayrı ayrı lineer bağımsız olan herhangi bir a spacelike birim vektörü verildiğinde, $(\zeta + ue_x) \in M$ noktasında (e_x, a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e_x, n) nondejenere x. asli kesitinin eğriliği arasında bağıntı

$$\left(1 + \sinh^2 \psi_x\right) K_{\zeta+ue_x}(e_x, a) = \cosh^2 \psi_0 K_{\zeta+ue_x}(e_x, n) \tag{3.54}$$

dır. Burada ψ_0 ve ψ_x sırasıyla a ile n ve a ile e_x arasındaki hiperbolik açılardır.

İspat. $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s, \ldots, \gamma_k)$, sırasıyla e_i, $1 \le i \le k$, i. baz vektörünün ve a spacelike birim vektörünün koordinatları olmak üzere

$$\beta_0 = \langle e_i, e_0 \rangle = 0 \quad , \quad \beta_i = \langle e_i, e_i \rangle = \varepsilon_i \quad , \quad 1 \le i \le k$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0 \rangle = \frac{\cosh \psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_x = \langle a, e_x \rangle = \sinh \psi_x \quad , \quad 1 \le x \le s$$
$$\gamma_y = \langle a, e_y \rangle = \cosh \psi_y \quad , \quad s+1 \le y \le m$$

eşitlikleri vardır. Bu eşitlikler ve (3.26) denklemi (3.53) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_{\zeta+ue_x}(e_x, a) = \frac{\varepsilon_x^2 \dfrac{\cosh^2 \psi_0}{\|n\|^2} \varepsilon \left(-\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 g}{\partial u_x^2} + \dfrac{1}{4g} \left(\dfrac{\partial g}{\partial u_x} \right)^2 \right)}{\varepsilon_x - \sinh^2 \psi_x}$$

bulunur. Burada $\varepsilon = \varepsilon_1.\varepsilon_2. \ldots .\varepsilon_k$ ve $\varepsilon_x = \langle e_x, e_x \rangle$ dir. Son denklemde $\|n\|^2 = \varepsilon g$ ve e_x vektörünün timelike olduğu göz önüne alınırsa

$$\left(1 + \sinh^2 \psi_x\right) K_{\zeta+ue_x}(e_x, a) = -\cosh^2 \psi_0 \left(-\frac{1}{2g} \frac{\partial^2 g}{\partial u_x^2} + \frac{1}{4g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial u_x} \right)^2 \right)$$

elde edilir. Son denklem ve (3.28) den

$$\left(1 + \sinh^2 \psi_x\right) K_{\zeta+ue_x}(e_x, a) = -\cosh^2 \psi_0 \varepsilon_x K_{\zeta+ue_x}(e_x, n)$$

bulunur. Burada e_x vektörünün timelike olduğu göz önüne bulundurulursa (e_x, n), $1 \le x \le s$, nondejenere x. asli kesitinin eğriliği ile (e_x, a) nondejenere kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı olan (3.54) denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.12. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan spacelike normal teğet vektörü n ve $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektörü a olsun. Bu takdirde e_y, $s+1 \le y \le m$, spacelike vektörleri ile lineer bağımsız olan herhangi bir a spacelike birim vektörü verildiğinde, $\left(\zeta+ue_y\right)\in M$ noktasında $\left(e_y,a\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği ile $\left(e_y,n\right)$ nondejenere y. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1-\cosh^2\psi_y\right)K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,a\right)=\cosh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,n\right) \qquad (3.55)$$

bağıntısı vardır, öyle ki ψ_0 ve ψ_y sırasıyla a ile n ve a ile e_y arasındaki hiperbolik açılardır.

İspat. e_i, $1\leq i\leq k$, vektörünün ve (3.49) denklemi ile verilen a spacelike birim vektörünün koordinatları sırasıyla $\left(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_i,\ldots,\beta_k\right)$ ve $\left(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_s,\ldots,\gamma_k\right)$ olmak üzere

$$\beta_0=\left\langle e_i,e_0\right\rangle=0 \quad , \quad \beta_i=\left\langle e_i,e_i\right\rangle=\varepsilon_i \quad , \quad 1\leq i\leq k$$

ve

$$\gamma_0=\left\langle a,e_0\right\rangle=\frac{\cosh\psi_0}{\left\|n\right\|} \quad , \quad \gamma_x=\left\langle a,e_x\right\rangle=\sinh\psi_x \quad , \quad 1\leq x\leq s$$
$$\gamma_y=\left\langle a,e_y\right\rangle=\cosh\psi_y \quad , \quad s+1\leq y\leq m$$

vardır. Bu eşitlikler ve (3.26) denklemi $s+1\leq y\leq m$ için $\left(\zeta+ue_y\right)\in M$ noktasında $\left(e_y,a\right)$ nondejenere kesitinin eğriliğini veren (3.53) denkleminde yerine yazılır, $\left\|n\right\|^2=\varepsilon g$ ve e_y vektörünün spacelike olduğu göz önüne alınırsa

$$\left(1-\cosh^2\psi_y\right)K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,a\right)=\cosh^2\psi_0\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_y^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_y}\right)^2\right)$$

elde edilir. (3.28) denklemi son denklemde yerine yazılırsa

$$\left(1-\cosh^2\psi_y\right)K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,a\right)=\cosh^2\psi_0\varepsilon_y K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,n\right)$$

bulunur. Burada e_y vektörünün spacelike olduğundan $\left(e_y,n\right)$, $s+1\le y\le m$, nondejenere y. asli kesitinin eğriliği ile $\left(e_y,a\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı olan (3.55) denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.13. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan timelike normal teğet vektörü n ve $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi a spacelike birim vektörü olsun. e_x, $1\le x\le s$, timelike vektörleri ile lineer bağımsız olan bir a spacelike birim vektörü olmak üzere $\left(\zeta+ue_x\right)\in M$ noktasında $\left(e_x,a\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği ile $\left(e_x,n\right)$ nondejenere x. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1+\sinh^2\psi_x\right)K_{\zeta+ue_x}\left(e_x,a\right)=-\sinh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_x}\left(e_x,n\right) \qquad (3.56)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 ve ψ_x sırasıyla a ile n ve a ile e_x arasındaki hiperbolik açılardır.

İspat. e_i, $1\le i\le k$, vektörünün ve a spacelike birim vektörünün koordinatları, sırasıyla, $\left(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_i,\ldots,\beta_k\right)$ ve $\left(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_s,\ldots,\gamma_k\right)$ olmak üzere

$$\beta_0=\left\langle e_i,e_0\right\rangle=0 \quad , \quad \beta_i=\left\langle e_i,e_i\right\rangle=\varepsilon_i \quad , \quad 1\le i\le k$$

ve

$$\gamma_0=\left\langle a,e_0\right\rangle=\frac{\sinh\psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_x=\left\langle a,e_x\right\rangle=\sinh\psi_x \quad , \quad 1\le x\le s$$

$$\gamma_y=\left\langle a,e_y\right\rangle=\cosh\psi_y \quad , \quad s+1\le y\le m$$

yazılabilir. Bu eşitlikler ve (3.26) denklemi (3.53) de yerine yazılır ve $\varepsilon_\sigma^2 = 1$ olduğu düşünülürse

$$K_{\zeta + ue_x}(e_x, a) = \frac{\dfrac{\sinh^2 \psi_0}{\|n\|^2}\varepsilon\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_x^2} + \dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right)}{\varepsilon_x - \sinh^2 \psi_x}, \quad \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_1.\varepsilon_2. \dots .\varepsilon_k \\ \varepsilon_x = \langle e_x, e_x \rangle \end{array}$$

elde edilir. Bu son denklemde $\|n\|^2 = -\varepsilon g$ ve e_x vektörünün timelike olduğu göz önüne alınırsa

$$\left(1 + \sinh^2 \psi_x\right) K_{\zeta + ue_x}(e_x, a) = \sinh^2 \psi_0 \left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_x^2} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right)$$

bulunur. (3.28) denklemi son denklemde yerine yazılırsa

$$\left(1 + \sinh^2 \psi_x\right) K_{\zeta + ue_x}(e_x, a) = \sinh^2 \psi_0 \varepsilon_x K_{\zeta + ue_x}(e_x, n)$$

bulunur. Böylece (e_x, n), $1 \le x \le s$, nondejenere x. asli kesitinin eğriliği ile (e_x, a) nondejenere kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı olan (3.56) denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.14. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan timelike normal teğet vektörü n ve $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında herhangi a spacelike birim vektörü, e_y, $s+1 \le y \le m$, spacelike vektörleri ile lineer bağımsız olsun. Bu durumda $(\zeta + ue_y) \in M$ noktasında (e_y, a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e_y, n) nondejenere y. asli kesitinin eğriliği arasında aşağıdaki bağıntı vardır;

$$\left(1-\cosh^2\psi_y\right)K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,a\right)=-\sinh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,n\right). \tag{3.57}$$

Burada ψ_0 ve ψ_y sırasıyla a ile n ve a ile e_y arasındaki hiperbolik açılardır.

İspat. e_i, $1\le i\le k$, vektörünün ve a spacelike birim vektörünün koordinatları sırasıyla $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_i,\ldots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_s,\ldots,\gamma_k)$ ise

$$\beta_0=\left\langle e_i,e_0\right\rangle=0 \quad , \quad \beta_i=\left\langle e_i,e_i\right\rangle=\varepsilon_i \quad , \quad 1\le i\le k$$

ve

$$\gamma_0=\left\langle a,e_0\right\rangle=\frac{\sinh\psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_x=\left\langle a,e_x\right\rangle=\sinh\psi_x \quad , \quad 1\le x\le s$$
$$\gamma_y=\left\langle a,e_y\right\rangle=\sinh\psi_y \quad , \quad s+1\le y\le m$$

dır. Bu eşitlikler ve (3.26) denklemi, $1\le y\le m$ için $\left(\zeta+ue_y\right)\in M$ noktasında $\left(e_y,a\right)$ nondejenere kesitinin eğriliğini veren (3.53) denkleminde yerine yazılır, $\|n\|^2=-\varepsilon g$ ve e_y vektörünün spacelike olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\left(1-\cosh^2\psi_y\right)K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,a\right)=-\sinh^2\psi_0\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_y^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_y}\right)^2\right)$$

elde edilir. (3.28) denklemi son denklemde yerine yazılırsa

$$\left(1-\cosh^2\psi_y\right)K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,a\right)=-\sinh^2\psi_0\varepsilon_y K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,n\right)$$

bulunur. Burada e_y vektörünün spacelike olduğu göz önüne bulundurulursa $\left(e_y,n\right)$, $s+1\le y\le m$, nondejenere y. asli kesitinin eğriliği ile $\left(e_y,a\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı olan (3.57) denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.15. E_ν^{n+1} de M, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan spacelike normal teğet vektörü n ve $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi bir timelike birim vektör a olsun. Ayrıca a vektörü ile e_x, $1\le x\le s$, timelike vektörleri lineer bağımsız olsun. Bu durumda $(\zeta+ue_x)\in M$ noktasında (e_x,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e_x,n) nondejenere x. asli kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı

$$\left(1-\cosh^2\psi_x\right)K_{\zeta+ue_x}(e_x,a)=-\sinh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_x}(e_x,n) \tag{3.58}$$

dir, öyle ki ψ_0 ve ψ_x sırasıyla a ile n ve a ile e_x arasındaki hiperbolik açılardır.

İspat. $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_i,\ldots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_s,\ldots,\gamma_k)$ sırasıyla e_i, $1\le i\le k$, vektörünün ve a timelike birim vektörünün koordinatları olmak üzere

$$\beta_0=\langle e_i,e_0\rangle=0 \quad , \quad \beta_i=\langle e_i,e_i\rangle=\varepsilon_i \quad , \quad 1\le i\le k$$

ve

$$\gamma_0=\langle a,e_0\rangle=\frac{\sinh\psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_x=\langle a,e_x\rangle=\cosh\psi_x \quad , \quad 1\le x\le s$$
$$\gamma_y=\langle a,e_y\rangle=\sinh\psi_y \quad , \quad s+1\le y\le m$$

dır. Bu eşitlikler ve (3.26) denklemi (3.53) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_{\zeta+ue_x}(e_x,a)=\frac{\varepsilon_x^2\dfrac{\sinh^2\psi_0}{\|n\|^2}\varepsilon\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_x^2}+\dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right)}{-\varepsilon_x-\cosh^2\psi_x}$$

bulunur. Öyle ki $\varepsilon = \varepsilon_1.\varepsilon_2. ... .\varepsilon_k$ ve $\varepsilon_x = \langle e_x, e_x \rangle$ dir. Bu son denklemde $\|n\|^2 = \varepsilon g$, $\varepsilon_x^2 = 1$ ve e_x vektörü timelike olduğundan

$$\left(1-\cosh^2\psi_x\right)K_{\zeta+ue_x}\left(e_x,a\right) = \sinh^2\psi_0\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_x^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right)$$

elde edilir. Bu son denklemde (3.28) yerine yazılırsa

$$\left(1-\cosh^2\psi_x\right)K_{\zeta+ue_x}\left(e_x,a\right) = \sinh^2\psi_0\varepsilon_x K_{\zeta+ue_x}\left(e_x,n\right)$$

bulunur. Böylece

$$\left(1-\cosh^2\psi_x\right)K_{\zeta+ue_x}\left(e_x,a\right) = -\sinh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_x}\left(e_x,n\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.16. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan spacelike normal teğet vektörü n ve $\forall\zeta \in \Omega$ merkez noktasında herhangi a timelike birim vektörü olmak üzere a vektörü ile e_y, $s+1 \le y \le m$, spacelike vektörleri lineer bağımsız olsun. Bu durumda $\left(\zeta + ue_y\right) \in M$ noktasında $\left(e_y, a\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği ile $\left(e_y, n\right)$ nondejenere y. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1+\sinh^2\psi_y\right)K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,a\right) = -\sinh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,n\right) \qquad (3.59)$$

bağıntısı vardır, öyle ki ψ_0 ve ψ_y sırasıyla a ile n ve a ile e_y arasındaki hiperbolik açılardır ve a timelike vektörü e_y, $s+1\leq y\leq m$, spacelike vektörleri ayrı ayrı lineer bağımsızdır.

İspat. a timelike birim vektörü ile e_i, $1\leq i\leq k$, vektörünün koordinatları sırasıyla $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_s,\ldots,\gamma_k)$ ve $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_i,\ldots,\beta_k)$ olsun. Bu takdirde

$$\beta_0=\langle e_i,e_0\rangle=0 \qquad , \quad \beta_i=\langle e_i,e_i\rangle=\varepsilon_i \qquad , \quad 1\leq i\leq k$$

ve

$$\gamma_0=\langle a,e_0\rangle=\frac{\sinh\psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_x=\langle a,e_x\rangle=\sinh\psi_x \quad , \quad 1\leq x\leq s$$
$$\gamma_y=\langle a,e_y\rangle=\cosh\psi_y \quad , \quad s+1\leq y\leq m$$

dır. Bu eşitlikler ve (3.26) denklemi (3.53) denkleminde yerine yazılır , $\|n\|^2=\varepsilon g$ ve e_y vektörünün spacelike olduğu göz önüne alınırsa

$$\left(1+\sinh^2\psi_y\right)K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,a\right)=-\sinh^2\psi_0\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_y^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_y}\right)^2\right)$$

elde edilir. O halde (3.28) denklemi bu son denklemde yerine yazılırsa

$$\left(1+\sinh^2\psi_y\right)K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,a\right)=-\sinh^2\psi_0\varepsilon_y K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,n\right)$$

bulunur. Böylece $\left(e_y,n\right)$, $s+1\leq y\leq m$, nondejenere y. asli kesitinin eğriliği ile $\left(e_y,a\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı olan (3.59) denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.17. E_v^{n+1} de M, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan timelike normal teğet vektörü n olmak üzere $\forall\zeta \in \Omega$ merkez noktasında herhangi a timelike birim vektörü ile lineer bağımsız e_x, $1 \le x \le s$, timelike vektörleri verilsin. Bu takdirde $(\zeta + ue_x) \in M$ noktasında (e_x, a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e_x, n) nondejenere x. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1-\cosh^2\psi_x\right)K_{\zeta+ue_x}(e_x,a)=\cosh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_x}(e_x,n) \tag{3.60}$$

bağıntısı vardır. Burada a ile n ve a ile e_x arasındaki hiperbolik açılar sırasıyla ψ_0 ve ψ_x dır.

İspat. e_i, $1 \le i \le k$, vektörünün ve (3.52) denklemi ile verilen a timelike birim vektörünün koordinatları sırasıyla $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s, \ldots, \gamma_k)$ olmak üzere

$$\beta_0 = \langle e_i, e_0\rangle = 0 \quad , \quad \beta_i = \langle e_i, e_i\rangle = \varepsilon_i \quad , \quad 1 \le i \le k$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0\rangle = \frac{\cosh\psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_x = \langle a, e_x\rangle = \cosh\psi_x \quad , \quad 1 \le x \le s$$
$$\gamma_y = \langle a, e_y\rangle = \sinh\psi_y \quad , \quad s+1 \le y \le m$$

dır. Bu eşitlikler ve $\|n\|^2 = -\varepsilon g$ ve e_x vektörünün timelike olduğu göz önünde bulundurularak bu son denklemler ve (3.26) denklemi (3.53) de yerine yazılırsa

$$\left(1-\cosh^2\psi_x\right)K_{\zeta+ue_x}(e_x,a) = -\cosh^2\psi_0\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_x^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right)$$

elde edilir. Burada $\varepsilon_x = \langle e_x, e_x \rangle$ olduğundan dolayı istenen denklem elde edilir.

Teorem 3.18. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan timelike normal teğet vektörü n ve $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında herhangi a timelike birim vektörü olsun. Bu durumda e_y, $1 \le y \le m$, spacelike vektörleri ile ayrı ayrı lineer bağımsız olan herhangi bir a timelike birim vektörü verildiğinde, $(\zeta + ue_y) \in M$ noktasında (e_y, a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e_y, n) nondejenere y. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1+\sinh^2 \psi_\sigma\right) K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, a\right) = \cosh^2 \psi_0 K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma, n\right) \qquad (3.61)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 ve ψ_y sırasıyla a ile n ve a ile e_y arasındaki hiperbolik açılardır.

İspat. e_i, $1 \le i \le k$, vektörünün ve (3.52) denklemi ile verilen a timelike birim vektörünün koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_i, \dots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_s, \dots, \gamma_k)$ ise

$$\beta_0 = \langle e_i, e_0 \rangle = 0 \qquad , \quad \beta_i = \langle e_i, e_i \rangle = \varepsilon_i \qquad , \quad 1 \le i \le k$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0 \rangle = \frac{\cosh \psi_0}{\|n\|} \quad , \quad \gamma_x = \langle a, e_x \rangle = \cosh \psi_x \quad , \quad 1 \le x \le s$$
$$\gamma_y = \langle a, e_y \rangle = \sinh \psi_y \quad , \quad s+1 \le y \le m$$

dır. Bu son eşitlikler ve (3.26) denklemi (3.53) de yerine yazılır, $\|n\|^2 = -\varepsilon g$ ve e_y vektörünün spacelike olduğu dikkate alınırsa

$$\left(1+\sinh^2\psi_y\right)K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,a\right)=\cosh^2\psi_0\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_y^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_y}\right)^2\right)$$

elde edilir. $s+1\leq y\leq m$ için $\left(\zeta+ue_y\right)\in M$ noktasında $\left(e_y,a\right)$ nondejenere y. asli kesitinin eğriliğiyle verilen (3.28) denklemindeki ifade son denklemde yerine yazılırsa

$$\left(1+\sinh^2\psi_y\right)K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,a\right)=\cosh^2\psi_0\varepsilon_y K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,n\right)$$

bulunur. Burada e_y vektörünün spacelike olduğu göz önüne bulundurulursa

$$\left(1+\sinh^2\psi_y\right)K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,a\right)=\cosh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_y}\left(e_y,n\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Özel Durumlar:

1. $v=1$ ve $\mu=0$ durumu.

1.1. E_1^{n+1}, $\left(n+1\right)-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M ve M nin $E_k\left(t\right)$ ye ortogonal olan timelike normal teğet vektörü n olsun. e_σ, $1\leq\sigma\leq m$, ile lineer bağımsız herhangi a spacelike birim vektörü verildiğinde $\left(\zeta+ue_\sigma\right)\in M$ noktasında $\left(e_\sigma,a\right)$ timelike kesitinin eğriliği ile $\left(e_\sigma,n\right)$ timelike σ. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1-\cosh^2\psi_\sigma\right)K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma,a\right)=-\sinh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma,n\right)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 açısı a spacelike birim vektörü ile n timelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır ve ψ_σ, $1 \le \sigma \le m$, a spacelike birim vektörü ile e_σ, $1 \le \sigma \le m$, baz vektörleri arasındaki açılardır (Ersoy, 2007, Teorem 4.1.12.).

1.2. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M ve M nin $E_k(t)$ ye ortogonal olan timelike normal teğet vektörü n olsun. e_σ, $1 \le \sigma \le m$, ile lineer bağımsız herhangi a timelike birim vektörü verildiğinde $(\zeta + ue_\sigma) \in M$ noktasında (e_σ, a) timelike kesitinin eğriliği ile (e_σ, n) timelike σ. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1+\sinh^2\psi_\sigma\right)K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, a) = \cosh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_\sigma}(e_\sigma, n)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 açısı a timelike birim vektörü ile n timelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır ve ψ_σ, $1 \le \sigma \le m$, a timelike birim vektörü ile e_σ, $1 \le \sigma \le m$, baz vektörleri arasındaki açılardır (Ersoy, 2007, Teorem 4.1.13.).

2. $v=1$ ve $\mu=1$ durumu

2.1. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyi M nin herhangi spacelike birim vektörü a ve $F_m(t)$ altuzayı içinde timelike vektör e_s, $1 \le s \le m$, olsun.

2.1.1. e_σ, $1 \le \sigma \le m$, ($\sigma \ne s$), spacelike vektörü ile lineer bağımsız herhangi a spacelike birim vektörü verildiğinde $(\zeta + ue_\sigma) \in M$ noktasında (e_σ, a) timelike kesitinin eğriliği ile (e_σ, n) spacelike σ. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1-\cosh^2\psi_\sigma\right)K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma,a\right)=\cosh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma,n\right)$$

bağıntısı vardır. Burada a ile n arasındaki hiperbolik açı ψ_0 ve a ile e_σ, $1\le\sigma\le m$, ($\sigma\neq s$), arasındaki hiperbolik açı ψ_σ dır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.19-i.).

2.1.2. e_s, $1\le s\le m$, timelike vektörü ile lineer bağımsız herhangi a spacelike birim vektörü verildiğinde $(\zeta+ue_s)\in M$ noktasında (e_s,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e_s,n) timelike s. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1+\sinh^2\psi_s\right)K_{\zeta+ue_s}\left(e_s,a\right)=\cosh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_s}\left(e_s,n\right)$$

bağıntısı vardır. Burada a ile n arasındaki hiperbolik açı ψ_0 ve a ile e_s arasındaki hiperbolik açı ψ_s dır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.19-ii.).

2.2. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzeyi M nin herhangi timelike birim vektör a ve $F_m(t)$ altuzayı içinde timelike vektör e_s, $1\le s\le m$, olsun. e_σ, $1\le\sigma\le m$, $\sigma\neq s$, spacelike vektörleri ile ayrı ayrı lineer bağımsız olan herhangi bir a timelike birim vektörü verildiğinde, $(\zeta+ue_\sigma)\in M$ noktasında (e_σ,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e_σ,n) spacelike σ. asli kesitinin eğriliği arasında

$$\left(1+\sinh^2\psi_\sigma\right)K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma,a\right)=-\sinh^2\psi_0 K_{\zeta+ue_\sigma}\left(e_\sigma,n\right)$$

bağıntısı vardır, öyle ki ψ_0 ve ψ_σ, sırasıyla, a ile n ve a ile e_σ arasındaki hiperbolik açılardır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.20).

2.3. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M nin herhangi spacelike birim vektörü a ve e_{m+s}, $1 \leq s \leq k-m$, de $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı içinde bir timelike vektör olsun. e_{σ}, $1 \leq \sigma \leq m$, spacelike vektörleri ile ayrı ayrı lineer bağımsız herhangi a timelike birim vektörü verildiğinde $(\zeta + ue_{\sigma}) \in M$ noktasında (e_{σ}, a) timelike kesitinin eğriliği ile (e_{σ}, n) spacelike σ. asli kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı

$$\left(1-\cosh^2 \psi_{\sigma}\right) K_{\zeta+ue_{\sigma}}\left(e_{\sigma}, a\right) = \cosh^2 \psi_0 K_{\zeta+ue_{\sigma}}\left(e_{\sigma}, n\right)$$

dır. Burada a vektörünün ile n ve e_{σ} arasındaki hiperbolik açılar, sırasıyla, ψ_0 ve ψ_{σ} dır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.21).

2.4. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M ve M nin herhangi bir timelike birim vektörü a, $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı içinde timelike vektör e_{m+s}, $1 \leq s \leq k-m$, olsun. e_{σ}, $1 \leq \sigma \leq m$, spacelike vektörü ile lineer bağımsız herhangi a timelike birim vektörü verildiğinde $(\zeta + ue_{\sigma}) \in M$ noktasında (e_{σ}, a), $1 \leq \sigma \leq m$, timelike kesitinin eğriliği ile (e_{σ}, n), $1 \leq \sigma \leq m$, spacelike σ. asli kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı

$$\left(1+\sinh^2 \psi_{\sigma}\right) K_{\zeta+ue_{\sigma}}\left(e_{\sigma}, a\right) = -\sinh^2 \psi_0 K_{\zeta+ue_{\sigma}}\left(e_{\sigma}, n\right)$$

dır. Burada ψ_0 ve ψ_{σ}, $1 \leq \sigma \leq m$, sırasıyla, a ile n ve a ile e_{σ}, $1 \leq \sigma \leq m$, arasındaki hiperbolik açılardır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.22).

Şimdi de (3.39) ve (3.41) denklemleri ile verilen $E_{k,\mu}(t)$ içinde bir e birim vektörü ve (3.49), (3.50), (3.51), (3.52) denklemleri ile verilen $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında a

birim vektör olmak üzere M yarı regle yüzeyinin (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\sum_{x=1}^{s}\beta_x\beta_x\lambda_0\lambda_0 R_{x0x0}+\sum_{y=s+1}^{m}\beta_y\beta_y\lambda_0\lambda_0 R_{y0y0}}{\langle e,e\rangle\langle a,a\rangle-\langle e,a\rangle^2} \tag{3.62}$$

şeklindedir. Böylece (e,a) nondejenere kesitinin eğriliğiyle ilgili aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.19. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan spacelike normal teğet vektörü n olsun. M yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayı içinde e spacelike birim vektörü ile lineer bağımsız olan $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektör a olmak üzere (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\cosh^2\psi_0}{1-\langle e,a\rangle^2}K_\zeta(e,n) \tag{3.63}$$

dır. Burada a spacelike birim vektörü ile n spacelike normal teğet vektörü arasındaki açı ψ_0 dır.

İspat. (3.39) denklemiyle verilen e birim spacelike vektörü ve (3.49) denklemiyle verilen a birim spacelike vektörünün koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_s,\ldots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_s,\ldots,\gamma_k)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \langle e,e_0\rangle = 0, \\
\beta_x &= \langle e,e_x\rangle = \sinh\theta_x \quad , \quad 1\le x\le s \\
\beta_y &= \langle e,e_y\rangle = \cosh\theta_y \quad , \quad s+1\le y\le m
\end{aligned}$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0 \rangle = \frac{\cosh \psi_0}{\|n\|},$$
$$\gamma_x = \langle a, e_x \rangle = \sinh \psi_x \quad , \quad 1 \le x \le s$$
$$\gamma_y = \langle a, e_y \rangle = \cosh \psi_y \quad , \quad s+1 \le y \le m$$

dir. Bu eşitlikler ve (3.26) denklemi (3.62) de yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\dfrac{\cosh^2 \psi_0}{\|n\|^2}\left(\sum\limits_{x=1}^{s} \sinh^2 \theta_x \left[\varepsilon \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_x^2} + \frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2 \right) \right] + \sum\limits_{y=s+1}^{m} \cosh^2 \theta_y \left[\varepsilon \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_y^2} + \frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_y}\right)^2 \right) \right] \right)}{1 - \langle e, a \rangle^2}$$

bulunur. Burada $\varepsilon = \varepsilon_1 . \varepsilon_2 . \dots . \varepsilon_k$ dır. Eğer $\|n\|^2 = \varepsilon g$ olduğu göz önüne alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, son denklem

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\cosh^2 \psi_0 \left(\sum\limits_{x=1}^{s} \sinh^2 \theta_x \left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_x^2} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2 \right) + \sum\limits_{y=s+1}^{m} \cosh^2 \theta_y \left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_y^2} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_y}\right)^2 \right) \right)}{1 - \langle e, a \rangle^2}$$

halini alır. $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (3.28) denklemi ile verilen (e_x, n), $1 \le x \le s$, x. asli kesitinin eğriliği ve (e_y, n), $s+1 \le y \le m$, y. asli kesitinin eğriliği göz önüne alınırsa

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\cosh^2 \psi_0 \left(\sum\limits_{x=1}^{s} \sinh^2 \theta_x \varepsilon_x K_\zeta(e_x, n) + \sum\limits_{y=s+1}^{m} \cosh^2 \theta_y \varepsilon_y K_\zeta(e_y, n) \right)}{1 - \langle e, a \rangle^2}$$

bulunur. Burada $\varepsilon_x = -1$, $\varepsilon_y = 1$ olduğu düşünülürek Teorem 3.6. da verilen I. tip yarı Öklidiyen Beltrami-Euler formülü göz önüne alınırsa (3.63) denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.20. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan spacelike normal teğet vektörü n ve $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayı içinde timelike birim vektör e ile lineer bağımsız olan $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektör a olsun. Bu takdirde M nin (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\cosh^2\psi_0}{1+\langle e,a\rangle^2}K_\zeta(e,n) \tag{3.64}$$

bağıntısı vardır. Burada a spacelike birim vektörü ile n spacelike normal teğet vektörü arasındaki açı ψ_0 dır.

İspat. (3.41) ve (3.49) denklemlerinden e ve a teğet vektörlerinin koordinatları, sırasıyla, $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_s,\ldots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_s,\ldots,\gamma_k)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\beta_0=\langle e,e_0\rangle=0,\\
&\beta_x=\langle e,e_x\rangle=\cosh\theta_x \quad , \quad 1\le x\le s\\
&\beta_y=\langle e,e_y\rangle=\sinh\theta_y \quad , \quad s+1\le y\le m
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\gamma_0=\langle a,e_0\rangle=\frac{\cosh\psi_0}{\|n\|},\\
&\gamma_x=\langle a,e_x\rangle=\sinh\psi_x \quad , \quad 1\le x\le s\\
&\gamma_y=\langle a,e_y\rangle=\cosh\psi_y \quad , \quad s+1\le y\le m
\end{aligned}$$

dır. Bu eşitlikler ile (3.26) denklemi M yarı regle yüzeyinin (e,a) kesitinin eğriliğini veren (3.62) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\frac{\cosh^2\psi_0}{\|n\|^2}\left(\sum\limits_{x=1}^{s}\cosh^2\theta_x\left[\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_x^2}+\frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right)\right]+\sum\limits_{y=s+1}^{m}\sinh^2\theta_y\left[\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_y^2}+\frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_y}\right)^2\right)\right]\right)}{-\left(1+\langle e,a\rangle^2\right)}$$

bulunur, öyle ki $\varepsilon=\varepsilon_1.\varepsilon_2. \ldots .\varepsilon_k$ dır. Son denklemde $\|n\|^2=\varepsilon g$ olduğu göz önüne alınır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\cosh^2\psi_0\left(\sum\limits_{x=1}^{s}\cosh^2\theta_x\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_x^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right)+\sum\limits_{y=s+1}^{m}\sinh^2\theta_y\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_y^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_y}\right)^2\right)\right)}{-\left(1+\langle e,a\rangle^2\right)}$$

elde edilir. $\zeta\in\Omega$ merkez noktasında (3.28) denklemi ile verilen (e_x,n), $1\le x\le s$, x. asli kesitinin eğriliği ve (e_y,n), $s+1\le y\le m$ y. asli kesitinin eğriliği göz önüne alınırsa

$$K_\zeta(e,a)=-\frac{\cosh^2\psi_0\left(\sum\limits_{x=1}^{s}\cosh^2\theta_x\varepsilon_x K_\zeta(e_x,n)+\sum\limits_{y=s+1}^{m}\sinh^2\theta_y\varepsilon_y K_\zeta(e_y,n)\right)}{1+\langle e,a\rangle^2}$$

bulunur. Burada $\varepsilon_x=-1$, $\varepsilon_y=1$ olup Teorem 3.7. de verilen II. tip yarı Öklidiyen Beltrami-Euler formülü göz önüne alınırsa (3.64) denklemi elde edilir ki bu da ispatı tamamlanır.

Teorem 3.21. E_v^{n+1} de M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan timelike normal teğet vektörü n olsun. $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayı içinde spacelike birim vektör e ile lineer bağımsız olan a

vektörü, $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında spacelike birim vektör olmak üzere M nin (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a) = -\frac{\sinh^2 \psi_0}{1-\langle e,a\rangle^2} K_\zeta(e,n) \tag{3.65}$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0, a spacelike vektörü ve n timelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır.

İspat. (3.39) ve (3.49) denklemleriyle verilen e ve a teğet vektörlerinin koordinatları, sırasıyla $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_s, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s, \ldots, \gamma_k)$ olsunlar. Böylece

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \langle e, e_0\rangle = 0, \\ \beta_x &= \langle e, e_x\rangle = \sinh\theta_x \quad , \quad 1 \le x \le s \\ \beta_y &= \langle e, e_y\rangle = \cosh\theta_y \quad , \quad s+1 \le y \le m \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \langle a, e_0\rangle = \frac{\sinh\psi_0}{\|n\|}, \\ \gamma_x &= \langle a, e_x\rangle = \sinh\psi_x \quad , \quad 1 \le x \le s \\ \gamma_y &= \langle a, e_y\rangle = \cosh\psi_y \quad , \quad s+1 \le y \le m \end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikler ile birlikte (3.26) denklemi (3.62) denkleminde yerine yazılırsa ve $\|n\|^2 = -\varepsilon g$ olduğu göz önünde bulundurulup gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$K_\zeta(e,a) = \frac{-\sinh^2\psi_0\left(\sum_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_x^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right)+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_y^2}+\frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_y}\right)^2\right)\right)}{1-\langle e,a\rangle^2}$$

elde edilir. Böylece $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında $\left(e_x, n\right)$, $1 \leq x \leq s$, x. asli kesitinin eğriliği ve $\left(e_y, n\right)$, $s+1 \leq y \leq m$, y. asli kesitinin eğriliği dikkate alınırsa

$$K_\zeta\left(e, a\right) = \frac{-\sinh^2 \psi_0 \left(\sum_{x=1}^{s} \sinh^2 \theta_x \varepsilon_x K_\zeta\left(e_x, n\right) + \sum_{y=s+1}^{m} \cosh^2 \theta_y \varepsilon_y K_\zeta\left(e_y, n\right) \right)}{1 - \left\langle e, a \right\rangle^2}$$

bulunur. Burada $\varepsilon_x = -1$, $\varepsilon_y = 1$ olmasından dolayı Teorem 3.6. da verilen I. tip yarı Öklidiyen Beltrami-Euler formülü göz önüne alınırsa (3.65) denklemi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.22. E_v^{n+1}, $\left(n+1\right)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}\left(t\right)$ doğrultman uzayına ortogonal olan timelike normal teğet vektörü n ve M yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}\left(t\right)$ doğrultman uzayı içinde timelike birim vektör e ile lineer bağımsız olan $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektör a olsun. M yarı regle yüzeyinin $\left(e, a\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği ile $\left(e, n\right)$ nondejenere kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı

$$K_\zeta\left(e, a\right) = -\frac{\sinh^2 \psi_0}{1 + \left\langle e, a \right\rangle^2} K_\zeta\left(e, n\right) \tag{3.66}$$

dır. Burada a spacelike birim vektörü ile n timelike normal teğet vektörü arasındaki açı ψ_0 dır.

İspat. (3.41) denklemiyle verilen e birim timelike vektör ve (3.50) denklemiyle verilen a birim spacelike vektörünün koordinatları, sırasıyla $\left(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_s, \ldots, \beta_k\right)$ ve $\left(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s, \ldots, \gamma_k\right)$ olmak üzere

$$\beta_0 = \langle e, e_0 \rangle = 0,$$
$$\beta_x = \langle e, e_x \rangle = \cosh\theta_x \quad , \quad 1 \le x \le s$$
$$\beta_y = \langle e, e_y \rangle = \sinh\theta_y \quad , \quad s+1 \le y \le m$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0 \rangle = \frac{\sinh\psi_0}{\|n\|},$$
$$\gamma_x = \langle a, e_x \rangle = \sinh\psi_x \quad , \quad 1 \le x \le s$$
$$\gamma_y = \langle a, e_y \rangle = \cosh\psi_y \quad , \quad s+1 \le y \le m$$

dır. Bu eşitlikler ile birlikte (3.26) denklemindeki ifade (3.62) denkleminde yerine yazılır ve $\|n\|^2 = -\varepsilon g$ olduğu dikkate alınırsa

$$K_\zeta(e,a) = \frac{-\sinh^2\psi_0\left(\sum_{x=1}^{s}\cosh^2\theta_x\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_x^2} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right) + \sum_{y=s+1}^{m}\sinh^2\theta_y\left(-\frac{1}{2g}\frac{\partial^2 g}{\partial u_y^2} + \frac{1}{4g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_y}\right)^2\right)\right)}{-\left(1+\langle e,a\rangle^2\right)}$$

elde edilir. Böylece $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (e_x, n), $1 \le x \le s$, x. asli kesitinin eğriliği ve (e_y, n), $s+1 \le y \le m$, y. asli kesitinin eğriliği göz önüne alınarak

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\sinh^2\psi_0\left(\sum_{x=1}^{s}\cosh^2\theta_x\varepsilon_x K_\zeta(e_x,n) + \sum_{y=s+1}^{m}\sinh^2\theta_y\varepsilon_y K_\zeta(e_y,n)\right)}{1+\langle e,a\rangle^2}$$

bulunur. Bu son denklemde $\varepsilon_x = -1$, $\varepsilon_y = 1$ olduğu dikkate alınır ve Teorem 3.7. de verilen II. tip yarı Öklidiyen Beltrami-Euler formülünün değeri yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.23. E_v^{n+1} de merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan spacelike normal teğet vektörü n olsun.

M yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayı içinde spacelike birim vektör e ile lineer bağımsız olan $\forall\zeta \in \Omega$ merkez noktasında herhangi timelike birim vektör a olmak üzere (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a) = -\frac{\sinh^2 \psi_0}{1+\langle e,a\rangle^2} K_\zeta(e,n) \qquad (3.67)$$

bağıntısı vardır. Burada a timelike birim vektörü ile n spacelike normal teğet vektörü arasındaki açı ψ_0 dır.

İspat. (3.39) ve (3.49) denklemlerinden e ve a vektörlerinin koordinatları, sırasıyla $(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_s,\ldots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_s,\ldots,\gamma_k)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = \langle e,e_0\rangle = 0, \\
&\beta_x = \langle e,e_x\rangle = \sinh\theta_x \quad , \quad 1 \le x \le s \\
&\beta_y = \langle e,e_y\rangle = \cosh\theta_y \quad , \quad s+1 \le y \le m
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = \langle a,e_0\rangle = \frac{\sinh\psi_0}{\|n\|}, \\
&\gamma_s = \langle a,e_x\rangle = \cosh\psi_x \quad , \quad 1 \le x \le s \\
&\gamma_y = \langle a,e_y\rangle = \sinh\psi_y \quad , \quad s+1 \le y \le m
\end{aligned}$$

dır. $\|n\|^2 = \varepsilon g$ olduğu göz önünde bulundurularak, bu eşitlikler ile birlikte (3.26) denklemi (3.62) de yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\sinh^2\psi_0\left(\sum_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x\varepsilon_x K_\zeta(e_x,n)+\sum_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y\varepsilon_y K_\zeta(e_y,n)\right)}{-\left(1+\langle e,a\rangle^2\right)}$$

elde edilir. Böylece $\varepsilon_x=-1$, $\varepsilon_y=1$ olduğundan Teorem 3.6. da verilen I. tip yarı Öklidiyen Beltrami-Euler formülü göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.24. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan spacelike normal teğet vektörü n ve $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayı içinde timelike birim vektör e ile lineer bağımsız olan $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi timelike birim vektör a olsun. (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı

$$K_\zeta(e,a)=-\frac{\sinh^2\psi_0}{1-\langle e,a\rangle^2}K_\zeta(e,n) \tag{3.68}$$

dır. Burada ψ_0, timelike birim vektörü a ile spacelike normal teğet vektörü n arasındaki açıdır.

İspat. e ve a birim timelike vektörlerinin koordinatları sırasıyla $(\beta_0,\beta_1,...,\beta_s,$ $\ldots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_s,\ldots,\gamma_k)$ olsunlar. Böylece

$$\begin{aligned}
&\beta_0=\langle e,e_0\rangle=0,\\
&\beta_x=\langle e,e_x\rangle=\cosh\theta_x \quad , \quad 1\le x\le s\\
&\beta_y=\langle e,e_y\rangle=\sinh\theta_y \quad , \quad s+1\le y\le m
\end{aligned}$$

ve

$$\gamma_0 = \left\langle a, e_0 \right\rangle = \frac{\sinh \psi_0}{\|n\|},$$
$$\gamma_x = \left\langle a, e_x \right\rangle = \cosh \psi_x \qquad , \quad 1 \le x \le s$$
$$\gamma_y = \left\langle a, e_y \right\rangle = \sinh \psi_y \qquad , \quad s+1 \le y \le m$$

dır. Bu eşitlikler ile birlikte (3.26) denklemi (3.62) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta\left(e,a\right) = \frac{\dfrac{\sinh^2 \psi_0}{\|n\|^2}\left(\sum\limits_{x=1}^{s} \cosh^2 \theta_x \left[\varepsilon\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_x^2} + \dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right)\right] + \sum\limits_{y=s+1}^{m} \sinh^2 \theta_y \left[\varepsilon\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_y^2} + \dfrac{1}{4g}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_y}\right)^2\right)\right]\right)}{1-\left\langle e,a\right\rangle^2}$$

bulunur. Burada $\varepsilon = \varepsilon_1.\varepsilon_2. \ldots .\varepsilon_k$ dır. Bu son denklemde $\|n\|^2 = \varepsilon g$ göz önüne alınırsa

$$K_\zeta\left(e,a\right) = \frac{\sinh^2 \psi_0 \left(\sum\limits_{x=1}^{s} \cosh^2 \theta_x \left(-\dfrac{1}{2g}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_x^2} + \dfrac{1}{4g^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right) + \sum\limits_{y=s+1}^{m} \sinh^2 \theta_y \left(-\dfrac{1}{2g}\dfrac{\partial^2 g}{\partial u_y^2} + \dfrac{1}{4g^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial u_y}\right)^2\right)\right)}{1-\left\langle e,a\right\rangle^2}$$

elde edilir. $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (3.28) denklemi ile verilen $\left(e_x, n\right)$, $1 \le x \le s$, x. asli kesitinin eğriliği ve $\left(e_y, n\right)$, $s+1 \le y \le m$, y. asli kesitinin eğriliği göz önüne alınırsa

$$K_\zeta\left(e,a\right) = \frac{\sinh^2 \psi_0 \left(\sum\limits_{x=1}^{s} \cosh^2 \theta_x \varepsilon_x K_\zeta\left(e_x, n\right) + \sum\limits_{y=s+1}^{m} \sinh^2 \theta_y \varepsilon_y K_\zeta\left(e_y, n\right)\right)}{1-\left\langle e,a\right\rangle^2}$$

bulunur. Burada $\varepsilon_x = -1$, $\varepsilon_y = 1$ olduğu Teorem 3.7. de verilen II. tip yarı Öklidiyen Beltrami-Euler formülü göz önüne alınırsa (3.68) denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.25. E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında, M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan timelike normal teğet vektörü n olsun. M yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayı içinde spacelike birim vektör e ile lineer bağımsız olan a vektörü $\forall \zeta \in \Omega$ merkez noktasında herhangi timelike birim vektör olmak üzere M yarı regle yüzeyinin (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı

$$K_\zeta(e,a) = \frac{\cosh^2 \psi_0}{1+\langle e,a\rangle^2} K_\zeta(e,n) \tag{3.69}$$

dır. Burada a timelike birim vektörü ile n timelike normal teğet vektörü arasındaki açı ψ_0 dır.

İspat. (3.39) ve (3.52) denklemlerinden e ve a teğet vektörlerinin koordinatları sırasıyla $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_s, \ldots, \beta_k)$ ve $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_s, \ldots, \gamma_k)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \langle e, e_0\rangle = 0, \\
\beta_x &= \langle e, e_x\rangle = \sinh\theta_x \quad , \quad 1 \le x \le s \\
\beta_y &= \langle e, e_y\rangle = \cosh\theta_y \quad , \quad s+1 \le y \le m
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \langle a, e_0\rangle = \frac{\cosh\psi_0}{\|n\|}, \\
\gamma_x &= \langle a, e_x\rangle = \cosh\psi_x \quad , \quad 1 \le x \le s \\
\gamma_y &= \langle a, e_y\rangle = \sinh\psi_y \quad , \quad s+1 \le y \le m
\end{aligned}$$

dır. Bu eşitlikler ile (3.26) denklemi (3.62) denkleminde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\frac{\cosh^2\psi_0}{\|n\|^2}\left(\sum\limits_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x\left[\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_x^2}+\frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_x}\right)^2\right)\right]+\sum\limits_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y\left[\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial u_y^2}+\frac{1}{4g}\left(\frac{\partial g}{\partial u_y}\right)^2\right)\right]\right)}{-1-\langle e,a\rangle^2}$$

bulunur. Böylece $\varepsilon=\varepsilon_1.\varepsilon_2.\dots.\varepsilon_k$ ve $\|n\|^2=-\varepsilon g$ olduğu dikkate alınır gerekli sadeleştirmeler yapılır ve (3.28) denklemindeki ifade son denklemde yerine yazılırsa

$$K_\zeta(e,a)=-\frac{\cosh^2\psi_0\left(\sum\limits_{x=1}^{s}\sinh^2\theta_x\varepsilon_x K_\zeta(e_x,a)+\sum\limits_{y=s+1}^{m}\cosh^2\theta_y\varepsilon_y K_\zeta(e_y,a)\right)}{-\left(1+\langle e,a\rangle^2\right)}$$

elde edilir. O halde $\varepsilon_x=-1$, $\varepsilon_y=1$ olduğundan düşünülerek Teorem 3.6. da verilen I. tip yarı Öklidiyen Beltrami-Euler formülü göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.26. E_v^{n+1} de M merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyinin $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayına ortogonal olan timelike normal teğet vektörü n olsun. $E_{k,\mu}(t)$ doğrultman uzayı içinde timelike birim vektör e ile lineer bağımsız olan $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi timelike birim vektör a olmak üzere (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\cosh^2\psi_0}{1-\langle e,a\rangle^2}K_\zeta(e,n) \tag{3.70}$$

bağıntısı vardır. Burada a timelike birim vektörü ile n timelike normal teğet vektörü arasındaki açı ψ_0 dır.

İspat. (3.41) ve (3.52) denklemlerinden e ve a teğet vektörlerinin koordinatları sırasıyla $(\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_s,\dots,\beta_k)$ ve $(\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_s,\dots,\gamma_k)$ olmak üzere

$$\beta_0 = \langle e, e_0 \rangle = 0,$$
$$\beta_x = \langle e, e_x \rangle = \cosh \theta_x \quad , \quad 1 \le x \le s$$
$$\beta_y = \langle e, e_y \rangle = \sinh \theta_y \quad , \quad s+1 \le y \le m$$

ve

$$\gamma_0 = \langle a, e_0 \rangle = \frac{\cosh \psi_0}{\|n\|},$$
$$\gamma_x = \langle a, e_x \rangle = \cosh \psi_x \quad , \quad 1 \le x \le s$$
$$\gamma_y = \langle a, e_y \rangle = \sinh \psi_y \quad , \quad s+1 \le y \le m$$

dır. Bu eşitlikler ile (3.26) denklemi (3.62) denkleminde yerine yazılır ve $\varepsilon = \varepsilon_1.\varepsilon_2. \ldots .\varepsilon_k$, $\|n\|^2 = -\varepsilon g$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$K_\zeta(e,a) = \frac{-\cosh^2 \psi_0 \left(\sum_{x=1}^{s} \cosh^2 \theta_x \left(-\frac{1}{2g} \frac{\partial^2 g}{\partial u_x^2} + \frac{1}{4g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial u_x} \right)^2 \right) + \sum_{y=s+1}^{m} \sinh^2 \theta_y \left(-\frac{1}{2g} \frac{\partial^2 g}{\partial u_y^2} + \frac{1}{4g^2} \left(\frac{\partial g}{\partial u_y} \right)^2 \right) \right)}{1 - \langle e, a \rangle^2}$$

elde edilir. Böylece $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında (3.28) denklemi ile verilen (e_x, n), $1 \le x \le s$, x. asli kesitinin eğriliği ve (e_y, n), $s+1 \le y \le m$, y. asli kesitinin eğriliğinden

$$K_\zeta(e,a) = -\frac{\cosh^2 \psi_0 \left(\sum_{x=1}^{s} \cosh^2 \theta_x \varepsilon_x K_\zeta(e_x, n) + \sum_{y=s+1}^{m} \sinh^2 \theta_y \varepsilon_y K_\zeta(e_y, n) \right)}{1 - \langle e, a \rangle^2}$$

dir. Burada $\varepsilon_x = -1$, $\varepsilon_y = 1$ olduğu için Teorem 3.7. de verilen II. tip yarı Öklidiyen Beltrami-Euler formülü göz önüne alınırsa (3.70) denklemi elde edilir ve ispat tamamlanır.

E_v^{n+1} yarı Öklid uzayında genelleştirilmiş regle yüzeyin merkez noktasında (3.63)-(3.70) denklemleri ile verilen (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) nondejenere kesitinin eğriliği arasındaki bağıntılar yarı Öklidiyen Beltrami-Meusnier formülü olarak adlandırılır.

Özel Durumlar:

1. $v=1$ ve $\mu=0$ durumu

1.1. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. e, $E_k(t)$ içinde bir birim vektör ve n, $E_k(t)$ ye ortogonal olan spacelike normal teğet vektör olmak üzere $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında e ile lineer bağımsız herhangi a spacelike birim vektörü verildiğinde (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) spacelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\cos^2\psi_0}{1-\langle e,a\rangle^2}K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 açısı a spacelike birim vektörü ile n spacelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır (Ersoy, 2007, Teorem 4.1.14.).

1.2. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. e, $E_k(t)$ içinde bir birim vektör ve n, M nin $E_k(t)$ ye ortogonal olan timelike normal teğet vektör olmak üzere $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında e ile lineer bağımsız herhangi a spacelike birim vektörü verildiğinde (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) timelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_{\zeta}\left(e,a\right)=\frac{\sinh^{2}\psi_{0}}{1-\left\langle e,a\right\rangle^{2}}K_{\zeta}\left(e,n\right)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 açısı a spacelike birim vektörü ile n timelike normal teğet vektörü arasındaki hiperbolik açıdır (Ersoy, 2007, Teorem 4.1.15.).

1.3. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında spacelike doğrultman uzaylı, merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. e, $E_k(t)$ içinde bir birim vektör ve n, M nin $E_k(t)$ ye ortogonal olan timelike normal teğet vektör olmak üzere $\zeta \in \Omega$ merkez noktasında e ile lineer bağımsız herhangi a timelike birim vektörü verildiğinde (e,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e,n) timelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_{\zeta}\left(e,a\right)=-\frac{\cosh^{2}\psi_{0}}{1+\left\langle e,a\right\rangle^{2}}K_{\zeta}\left(e,n\right)$$

bağıntısı vardır, burada ψ_0 açısı a timelike birim vektörü ile n timelike normal teğet vektörü arasındaki hiperbolik açıdır (Ersoy, 2007, Teorem 4.1.16.).

2. $v=1$ ve $\mu=1$ durumu

2.1. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. M nin $E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde spacelike birim vektör e ile lineer bağımsız olan a vektörü $\forall\zeta \in \Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektör olmak üzere M nin (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) spacelike kesitinin eğriliği arasındaki bağıntı

$$K_{\zeta}\left(e,a\right)=\frac{\cosh^{2}\psi_{0}}{1-\left\langle e,a\right\rangle^{2}}K_{\zeta}\left(e,n\right)$$

dır. Burada a, spacelike birim vektörü ile n, spacelike normal teğet vektörü arasındaki açı ψ_0 dır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.23.).

2.2. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. M nin $E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde spacelike birim vektör e ile lineer bağımsız olan bir a birim vektörü, $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi timelike birim vektör olmak üzere M nin (e,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e,n) spacelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_{\zeta}\left(e,a\right)=-\frac{\sinh^{2}\psi_{0}}{1+\left\langle e,a\right\rangle^{2}}K_{\zeta}\left(e,n\right)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 açısı, a timelike birim vektörü ile n, spacelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.24.).

2.3. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, spacelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. $E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde timelike birim vektör e ile lineer bağımsız olan a vektörü $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektör olmak üzere M nin (e,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e,n) timelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_{\zeta}\left(e,a\right)=\frac{\cosh^{2}\psi_{0}}{1+\left\langle e,a\right\rangle^{2}}K_{\zeta}\left(e,n\right)$$

bağıntısı vardır. Burada a, spacelike birim vektörü ile n, spacelike normal teğet vektörü arasındaki açı ψ_0 dır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.25.).

2.4. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. $E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde spacelike birim vektör e ile lineer bağımsız a vektörü $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektör olmak üzere M nin (e,a) nondejenere kesitinin eğriliği ile (e,n) spacelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a)=\frac{\cosh^2\psi_0}{1-\langle e,a\rangle^2}K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır, öyle ki ψ_0 açısı a, spacelike birim vektörü ile n, spacelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.26.).

2.5. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. M nin $E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde spacelike birim vektör e ile lineer bağımsız a vektörü $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi timelike birim vektör olmak üzere M nin (e,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e,n) spacelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_\zeta(e,a)=-\frac{\sinh^2\psi_0}{1+\langle e,a\rangle^2}K_\zeta(e,n)$$

bağıntısı vardır. Burada ψ_0 açısı a, timelike birim vektörü ile n, spacelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.27.).

2.6. E_1^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu Minkowski uzayında timelike doğrultman uzaylı, timelike merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş timelike regle yüzey M olsun. M nin $E_k(t)$ doğrultman uzayı içinde timelike birim vektör e ile lineer bağımsız a vektörü $\forall\zeta\in\Omega$ merkez noktasında herhangi spacelike birim vektör olmak üzere M nin (e,a) timelike kesitinin eğriliği ile (e,n) timelike kesitinin eğriliği arasında

$$K_{\zeta}\left(e,a\right)=\frac{\cosh^{2}\psi_{0}}{1+\left\langle e,a\right\rangle^{2}}K_{\zeta}\left(e,n\right)$$

bağıntısı vardır, öyle ki ψ_0 açısı a, spacelike birim vektörü ile n, spacelike normal teğet vektörü arasındaki açıdır (Ersoy, 2007, Teorem 4.2.28.).

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde çalışmanın orijinal kısmı olan üçüncü bölüm özetlenecek ve bir öneride bulunulacaktır.

E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında genelleştirilmiş yarı regle yüzeyin birinci temel formu ve metrik katsayıları hesaplanarak sırasıyla Christoffel sembolleri, Riemann eğrilik tensörü katsayıları ve Riemann-Christoffel eğrilikleri bulundu. Merkez regle yüzeyli genelleştirilmiş yarı regle yüzeyin her noktasında nondejenere asli kesitinin eğriliği Riemann-Christoffel eğrilikleri yardımıyla hesaplandı. Ayrıca her bir merkez noktada da nondejenere asli teğet kesitlerinin kesit eğrilikleri incelendi. Böylece, genelleştirilmiş yarı regle yüzeyin asli kesit eğriliği ile asli dağılma parametresi arasında bağıntı bulundu. Daha sonra asli ışın yüzeyi göz önüne alınarak bu yüzeyin kesit eğriliği ile asli dağılma parametresi arasındaki bağıntı elde edildi. Ayrıca, genelleştirilmiş yarı regle yüzeyin merkez noktasında normal kesit eğriliği ile asli kesit eğrilikleri arasındaki bağıntı elde edildi ve bu bağıntı genelleştirilmiş yarı regle yüzeyin teğet kesiti için I. ve II. tip yarı Öklidiyen Beltrami-Euler formülü olarak adlandırıldı. Üstelik yarı regle yüzeyin merkez noktasında nonnull doğrultmanlı $2-$boyutlu yüzeyin nondejenere kesitinin eğriliği bulundu ve bunlar yarı Öklidiyen Lamarle formülü olarak adlandırıldı. Bu bölümde son olarak, genelleştirilmiş yarı regle yüzeyin herhangi nondejenere teğet kesitlerinin eğriliği araştırıldı. Bu yarı regle yüzeyin kesit eğriliği için bağıntılar elde edildi ve bunlar yarı Öklidiyen Beltrami-Meusnier formülü olarak adlandırıldı.

Bu çalışmada E_v^{n+1}, $(n+1)-$boyutlu yarı Öklid uzayında genelleştirilmiş yarı regle yüzeylerin kesit eğrilikleri için elde edilen teorem ve sonuçlar E_1^{n+1} ve E_v^{n+1} de genelleştirilmiş null scrolların kesit eğrilikleri için de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

ALTIN, A., Yüksek Mertebeden Regle Yüzeyler Üzerine, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1994.

AYDEMİR, İ., Minkowski Uzayında Timelike Doğrultman Uzaylı Genelleştirilmiş Timelike Regle Yüzeyler, Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 1995.

BEEM, J. K., EHRLICH, P. E., Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker Inc. New York, 1981.

ERGÜT, M., Genelleştirilmiş Regle Yüzeylere Dair, Doktora tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Elazığ, 1983.

ERGÜT, M., The Drall and Scalar Normal Curvature of $(k+1)-$Dimensional Generalized Ruled Surfaces, Commun. Fac. Sci. Ank. Series A_1, 38, 115-125, 1989.

EKİCİ, C., Yarı Öklidiyen Uzaylarda Genelleştirilmiş Yarı Regle Yüzeyler, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 1998.

EKİCİ, C., On the curvatures of $(k+1)-$dimensional semi ruled surfaces in E_v^{n+1}, Mathematical and Computational Applications, 5 (3), 139-148, 2000.

ERSOY, S., IR_1^n, $n-$boyutlu Minkowski Uzayında Genelleştirilmiş Regle Yüzeylerin Kesit Eğrilikleri, Doktora Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya, 2007.

ERSOY, S., Tosun M., Lorentzian Beltrami-Euler formula and generalized Lorentzian Lamarle formula in IR_1^n, Le Matematiche, Vol. LXIV –Fasc. I, 25–45, 2009.

ERSOY, S., Tosun M., Sectional Cuvature of Timelike Ruled Surface Part I: Lorentzian Beltrami-Euler Formula, Iranian Journal of Science and Technology, 34 A3, 2010.

FRANK, H., GIERING, O., Verallgemeinerte Regelflachen, Math. Z. 150, 261-271, 1976.

FRANK, H., GIERING, O., Regelflachen mit Zentralchen, Math. Öster. Akad. Wiss., Wien Math-Naturwiss. K1. Abt.II, 187, 139-163, 1978.

FRANK, H., GIERING, O., Zur Schnittkrümmung Verallgemeinerter Regelflachen, Archiv Der Mathematik, Fasc.1, 32 , 86-90, 1979.

FRANK, H., GIERING, O., Verallgemeinerte Regelflachen im Grassen II, Journal of Geometry, 23 (1), 128-140, 1984.

HACISALİHOĞLU, H. H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 2, 1983.

JUZA, M., Ligne de Striction Sur une Generalisetion a Plusreurs Dimensiona d’une Surface Réglée, Czechosl. Math. J., 12 (87), 243–250, 1962.

KELEŞ, S., KURUOĞLU, N., Properties of 2-dimensional Ruled Surfaces in the Euclidean n-Space E^n and Massey’s Theorem, Communications, Faculty of Sciences, University of Ankara, 151-158, 1984.

O’NEILL, B., Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 1983.

RATCLIFFE, J. G., Foundations of Hyperbolic Manifolds, Department Mathematics, Vanderbilt University, 1994.

SABUNCUOĞLU, A., Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler, Doçentlik Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Ankara, 1982.

THAS, C., Properties of Ruled Surfaces in the Euclidean space E^n, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 6 (1), 133-142, 1978.

TOSUN, M., KURUOĞLU, N., Minkowski Uzayında Spacelike Doğrultman Uzaylı Genelleştirilmiş Timelike Regle Yüzeyler, Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 1995.

TOSUN, M., KURUOĞLU, N., On (k+1)-dimensional time-like ruled surface in the Minkowski space IR_1^n, Institute of Mathematics and Computer Sciences, 11 (1), 1-9, 1998.

TOSUN, M., AYDEMİR, I., On 2-dimensional time-like ruled surface in the Minkowski space IR_1^n, Bulletin of Pure and Applied Sciences, Sec. Math. and Statistics, 17, 247-256, 1998.

TOSUN, M., AYDEMİR, I., Properties of 2- dimensional space-like ruled surface in the Minkowski space IR_1^n, J. Indian Acad. Math., 21 (2), 169-180, 1999.

TOSUN, M., AYDEMİR, İ., KURUOGLU, N., On (k+1)-dimensional space-like ruled surface in the Minkowski space, Acta Mathematica Vietnamica, 24, 63-74, 1999.

TURGUT, A., IR_1^3 Lorentz uzayında Regle Yüzeyler, Doktora tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1995.

ÖZGEÇMİŞ

Mahmut AKYİĞİT, 05.06.1983 tarihinde Konya'nın Çeltik ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Konya'nın Akşehir ilçesinde tamamladı. 2001 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde başladığı lisans eğitimini 2005 yılında tamamladı. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Eğitimi Anabilim Dalında bütünleştirilmiş doktora programına girmeye hak kazandı. 2005–2006 öğretim yılında bilimsel hazırlık, 2006-2007 öğretim yılında İngilizce hazırlık okudu. 2008-2009 öğretim yılı Bahar döneminde Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Anabilim Dalına yatay geçiş yaptı. Ocak 2009'da Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünden görevlendirme ile Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.