T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAM KONİK METRİK VE *G*-KONİK METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Mahpeyker ÖZTÜRK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Metin BAŞARIR**

Şubat 2011

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAM KONİK METRİK VE *G*-KONİK METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Mahpeyker ÖZTÜRK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 11/02/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah YILDIZ **Jüri Başkanı**	**Prof. Dr. Metin BAŞARIR** **Üye**	**Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ** **Üye**

Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI **Üye**	**Doç. Dr. Vatan KARAKAYA** **Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca bilgisini, deneyimini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Metin BAŞARIR'a teşekkür ederim.

Tüm Matematik bölümündeki öğretim üyelerine ve çalışmalarım boyunca desteğini ve yardımını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini gördüğüm kardeşlerime, annem Melek ÖZTÜRK ve babam Hüseyin ÖZTÜRK'e gösterdikleri sabır ve anlayıştan ötürü teşekkür ederim.

Bu çalışma SAÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından 2010-50-02-027 nolu proje ile desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$C([a,b])$	: $[a,b]$ kapalı Aralığında Tanımlı Sürekli Fonksiyonlar Kümesi
$L^p(J)$	: J Üzerinde Lebesque Anlamında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
(X,G)	: $G-$Konik Metrik Uzay
B	: Reel Banach Uzayı
K	: Koni
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\overset{\circ}{K}, \operatorname{int} K$	: K Kümesinin İçi
$\overline{K}$	: K Kümesinin Kapanışı
$\leq$	: Kısmi Sıralama Bağıntısı
$x \ll y$	: $y-x \in \operatorname{int} K$
$B_G(x,c)$	: $G-$Konik Metrik Uzayında x Merkezli c Yarıçaplı Yuvar
T^n	: T Dönüşümünün n inci İterasyonu
$F(T)$	: T Dönüşümünün Sabit Noktaları Kümesi
P Özelliği	: $F(T)=F(T^n)$
Q Özelliği	: $F(T)\cap F(S)=F(T^n)\cap F(S^n)$
$T(X)$	: X Kümesinin T Dönüşümü Altındaki Görüntü Kümesi
Tx	: x noktasının T Dönüşümü Altındaki Görüntüsü
ST	: $S \circ T$

ÖZET

Anahtar kelimeler: Sabit Nokta, Daralma Dönüşümü, Metrik Uzay, Konik Metrik Uzay, *G*-Konik Metrik Uzay.

Altı bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın birinci bölümünde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, koniklerin bazı özellikleri incelendi. Konik yapısı kullanılarak tanımlanan konik metrik fonksiyonu ve konik metrik uzay kavramları çalışıldı. Bu uzaylarda yakınsaklık, Cauchy dizisi gibi topolojik kavramlar ve bunlarla ilgili teoremler verildi. Daha sonra konik metrik ve *G*-metrik kavramlarından daha genel olan *G*-konik metrik yapısı çalışıldı. Bu uzay için de çeşitli topolojik kavramlar incelendi ve bu uzayın bir topolojik uzay olduğu ispatlandı.

Üçüncü bölümde, konik metrik uzaylarda bir tane dönüşüm için çalışılan $f-$daralma dönüşümleri ile ilgili teoremler iki tane dönüşüm için genelleştirilerek bazı sabit nokta teoremleri, konik ve *G*-konik metrik uzaylarda ispatlandı. Konik metrik uzaylarda verilen $f-$Hardy-Rogers tipi dönüşümler *G*-konik metrik uzaylarda çalışıldı.

Dördüncü bölümde, $\varphi-$fonksiyonları ve genelleştirilmiş $\varphi-$fonksiyonları kullanılarak dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve tekliği, yine konik ve *G*-konik metrik uzaylarda çalışıldı.

G-konik metrik uzaylarda çeşitli dönüşümler için sabit nokta teoremleri ve P özelliğine sahip olan dönüşümler beşinci bölümde incelendi.

Son bölümde ise, bazı genel sonuçlar ve problemler verildi.

FIXED POINT THEOREMS ON COMPLETE CONE METRIC AND COMPLETE *G*-CONE METRIC SPACES AND APPLICATIONS

SUMMARY

Key Words: Fixed Points, Contraction Mapping, Metric Space, Cone Metric Space, *G*-Cone Metric Space.

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, literature notices, some fundamental definitions and theorems which will be used in the later chapters were given.

In the second chapter, some properties of cones are examined. By using the structure of a cone, the concept of the cone metric function and the cone metric space were investigated. Some topological properties of these spaces such as convergence, Cauchy sequence, being a topological space and the theorems related with these concepts were given. *G*- cone metric space, which is more general than a cone metric space and a *G*- metric space, were examined and some topological properties were given. Also we proved that this space is a topological space.

The theorems which are related to $f-$contraction mappings for a self-mapping were extended to the two self-mappings and were proved on cone metric spaces and *G*-cone metric spaces in the third chapter. $f-$Hardy-Roger contraction was examined in *G*-cone metric space, too.

In the fourth chapter, the existence and the uniqueness of the fixed points of mappings were examined by using $\varphi-$mappings and generalized $\varphi-$mappings in cone metric spaces and *G*-cone metric spaces.

Some fixed point theorems for several mappings and the mappings which have property P were given in the fifth chapter.

In the last chapter, the main results which were obtained summarized.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1 Temel Tanımlar Ve Teoremler

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.1.1. X boş kümeden farklı bir küme olsun. Bu küme üzerinde tanımlı, reel değerli, negatif olmayan bir

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to \mathbb{R}^{+} \\ (x,y) &\to d(x,y) \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdakileri sağlasın:

d1. Her $x,y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$,

d2. Her $x,y \in X$ için $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

d3. Her $x,y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$, (simetri özelliği)

d4. Her $x,y,z \in X$ için $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, (üçgen eşitsizliği).

Bu durumda d fonksiyonuna X uzayında bir metrik, (X,d) ikilisine ise bir metrik uzay denir (Şuhubi, 2001).

Metrik uzay kavramı Frechet tarafından 1906 da ortaya atılmıştır. Ancak metrik uzay ifadesini ilk kullanan Hausdorff olmuştur.

Örnek 1.1.2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x,y) = |x-y|$ şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe mutlak değer (alışılmış, doğal, salt değer) metriği denir (Şuhubi, 2001).

Örnek 1.1.3. $\mathbb{R}^2$ de $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ fonksiyonu bir metriktir. Bu metrik dikdörtgen bloklara ayrılmış Manhattan adasındaki ulaşım yolunu çağrıştırması nedeniyle bazen Manhattan metriği olarak da adlandırılır. Yine $\mathbb{R}^2$ de

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

metriğine ise Euclid metriği denir (Şuhubi, 2001).

Örnek 1.1.4. X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \text{ ise} \\ 1, & x \neq y \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı d fonksiyonu ise ayrık (diskre) metriktir (Maddox, 1970).

Örnek 1.1.5. $l_\infty = \left\{ x = (x_n) : \sup_n |x_n| < \infty \right\}$ sınırlı diziler uzayı olmak üzere bu uzay üzerinde tanımlı $d_\infty(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$ fonksiyonu bir metriktir (Şuhubi, 2001).

Örnek 1.1.6. $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı, sürekli, reel veya kompleks değerli fonksiyonların kümesi $C[a,b]$ olsun. Bu uzay $f, g \in C[a,b]$ olmak üzere

$d(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ metriği ile bir metrik uzaydır (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.7. (x_n), X metrik uzayında bir dizi olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve $\exists n_0\in\mathbb{N}$ için, $n>n_0$ olduğunda $d(x_n,x)<\varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ var ise (x_n) dizisi $x\in X$ noktasına yakınsaktır denir (Maddox, 1970).

Örnek 1.1.8. $X=\mathbb{R}$ uzayı üzerinde tanımlanan alışılmış metriğe göre $(x_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi $n\to\infty$ için $0\in X$ noktasına yakınsar.

$X=(0,1)$ uzayında alışılmış metriğe göre bu dizinin limiti $0\notin X$ noktasıdır. Bu durumda dizi yakınsak değildir. Dolayısıyla bir dizinin yakınsaklığı dizinin bulunduğu uzaya bağlıdır.

$C[0,1]$ uzayı üzerinde $d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|\,dt,\ t\in[0,1]$ metriği tanımlansın ve $x_n=e^{-nt}$, $(n\in\mathbb{N})$ dizisi verilsin. Bu dizi için

$$d(x_n,0)=\int_0^1 e^{-nt}dt=\frac{1}{n}\left(1-e^{-n}\right)\to 0,\ (n\to\infty)$$

olur. Aynı dizi için

$$d_\infty(x_n,0)=\max_{t\in[0,1]}\left|e^{-nt}\right|=1,\ (n\to\infty)$$

dır. Buradan ise yakınsaklığın uzayda tanımlanan metriğe bağlı olduğu görülür (Jain, 2009).

Tanım 1.1.9. Bir (X,d) metrik uzayında (x_n) bir dizi olmak üzere, $\forall\varepsilon>0$ sayısı için bir $N(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı; $m,n\geq N$ eşitsizliğini sağlayan bütün m ve n tamsayıları için $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa bu dizi bir Cauchy dizisi adını alır.

Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir. Ancak bu ifadenin tersi doğru değildir. Metrik uzayda alınan bir Cauchy dizisi sınırlıdır ve bu dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa kendisi de yakınsaktır (Şuhubi, 2001).

Tanım 1.1.10. Bir (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzay tam metrik uzay olarak adlandırılır (Kreyszig, 1978).

Örnek 1.1.11. $C[a,b]$ fonksiyon uzayı $d(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ metriğine göre tam uzaydır (Kreyszig, 1978).

Örnek 1.1.12. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış metriğe göre tam değildir (Şuhubi, 2001).

Tanım 1.1.13. (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ ve $x\in X$ için en az bir $\delta>0$ sayısı için $d(x,x_0)<\delta$ iken $\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon,x)>0$ varsa $f:X\to Y$ fonksiyonu $x_0\in X$ noktasında süreklidir denir. Yani $x\in B(x_0,\delta)$ iken $f(x)\in B(f(x_0),\varepsilon)$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu bu noktada süreklidir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.14. (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar olmak üzere bir $T:X\to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için $d(x,x_0)<\delta$ olduğunda $\rho(Tx,Tx_0)<\varepsilon$ olacak şekilde sadece ε a bağlı bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa T fonksiyonu x_0 noktasında düzgün süreklidir denir (Maddox, 1970).

Örnek 1.1.15. $\mathbb{R}$ de $d(x,y)=|x-y|$ alışılmış metriği için

$$\begin{aligned} T:&\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ &x\to Tx=\sin x \end{aligned}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ de düzgün süreklidir.

Örnek 1.1.16. $\mathbb{R}$ de $d(x,y)=|x-y|$ alışılmış metriği için

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to Tx = x^3 \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir, fakat düzgün sürekli değildir.

Teorem 1.1.17. (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0),\ (n \to \infty)$$

olmasıdır. Sürekli bir fonksiyon için $f(x_n) \to f(x_0)$ iken $x_n \to x_0$ ifadesi her zaman doğru olmayabilir. Örneğin; d mutlak değer metriği olmak üzere $f:(\mathbb{R},d) \to (\mathbb{R},d)$, fonksiyonu $f(x)=x^2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = (-1)^n$ biçiminde verilsin. Bu durumda

$$f(x_n)=1 \to f(1), (n \to \infty)$$

fakat (x_n) dizisi 1 noktasına yakınsak değildir (Jain, 2009).

Tanım 1.1.18. X boş olmayan bir küme ve τ, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer,

i. $X, \varnothing \in \tau$,
ii. τ ya ait sonlu sayıda kümenin kesişimi yine τ ya ait,
iii. τ daki herhangi sayıda kümenin birleşimi yine τ ya ait,

şartları sağlanıyorsa τ ya X için bir topoloji ve (X,τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir (Maddox, 1970).

Sürekli fonksiyonlar için başka bir karakterizasyon da aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 1.1.19. (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart Y uzayında alınan her G açığının ters görüntüsü $f^{-1}(G)$ nin X uzayında açık olmasıdır (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.20. X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. X in bir K_x alt kümesi, U_x topolojinin elemanı olmak üzere $x \in U_x \subseteq K_x$ olacak biçimde varsa x noktasının bir komşuluğu adını alır. x noktasının bir açık komşuluğu ise bu noktayı içine alan bir açık kümeden ibarettir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.21. (X,τ) topolojik uzayında $A \subset X$ olsun. Bir $a \in A$ noktası için $a \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa a noktasına A kümesinin bir iç noktası denir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.22. X topolojik uzayında $A \subseteq X$ kümesinin iç noktalarının oluşturduğu kümeye bu kümenin içi denir ve $\overset{\circ}{A}$ ile ya da $\operatorname{int} A$ ile gösterilir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.23. X topolojik uzayının bir $A \subseteq X$ kümesini içine alan tüm kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir (Maddox, 1970).

Teorem 1.1.24. (X,τ) topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart $A = \overline{A}$ olmasıdır (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.25. X bir topolojik uzay ve $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in \mathbb{R}$ için, $f^{-1}(-\infty, t)$ kümesi X de açık ise, f fonksiyonuna X üzerinde üstten yarı sürekli fonksiyon denir. Eğer $(-f)$ fonksiyonu üstten yarı sürekli ise, bu durumda f fonksiyonuna alttan yarı sürekli bir fonksiyon denir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.26. $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in X$ için $x < y$ iken $f(x) \geq f(y)$ $\left(f(x) \leq f(y)\right)$ ise f fonksiyonuna X artmayan (nonincreasing), (azalmayan (nondecreasing)) fonksiyon denir (Maddox, 1970).

Tanım 1.1.27. X boş kümeden farklı bir küme ve $\mathbb{F}$ bir cisim olsun.

$$\begin{aligned} +: X \times X &\to X \\ (x, y) &\to x + y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot: \mathbb{F} \times X &\to X \\ (\lambda, x) &\to \lambda.x \end{aligned}$$

ikili işlemleri $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $\forall x, y, z \in X$ için

i. $x + y = y + x$

ii. $x + (y + z) = (x + y) + z$

iii. $\forall x \in X$ için $x + e = e + x = x$ olan bir $e \in X$ vardır.

iv. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = e$ olan bir $(-x) \in X$ vardır.

v. $1.x = x$

vi. $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$

vii. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$

viii. $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$

şartlarını sağlıyorsa $(X, +, \cdot)$ üçlüsüne $\mathbb{F}$ cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir (Maddox, 1970).

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise X ' e reel vektör uzayı, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise X ' e kompleks vektör uzayı adı verilir.

Tanım 1.1.28. X, $\mathbb{F}$ cismi ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\begin{aligned} \|.\|: X &\to \mathbb{R}^{+} \\ x &\to \|x\| \end{aligned}$$

fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ için,

i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde norm, $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir (Maddox, 1970).

X üzerindeki bir norm, X üzerinde $x, y \in X$ olmak üzere

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

ile verilen bir d metriği tanımlar ve bu metrik norm tarafından üretilen metrik olarak adlandırılır. Bir vektör uzayı üzerindeki her metrik bir normdan elde edilmez. s uzayı (tüm sınırlı veya sınırsız kompleks terimli diziler uzayı) bir vektör uzayıdır. $x = (\varsigma_j)$ ve $y = (\eta_j)$ olmak üzere

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\varsigma_j - \eta_j|}{1 + |\varsigma_j - \eta_j|}$$

ile tanımlanan metrik, normdan elde edilemez. Bir normdan elde edilen d metriği $\forall x, y, a \in X$ ve $\forall \alpha$ skaleri için

$$d(x + a, y + a) = d(x, y) \text{ ve } d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$$

özelliklerini gerçekler (Kreyszig, 1978).

Tanım 1.1.29. Bir normlu lineer uzayda alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Banach uzayı denir (Maddox, 1970).

X uzayının reel veya kompleks oluşuna göre Banach uzayı reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır.

Örnek 1.1.30. $\mathbb{R}^n$ Euclid uzayı $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\varsigma_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ normu ile bir Banach uzayıdır (Kreyszig, 1978).

Örnek 1.1.31. $C[a,b] = \{x \,|\, x:[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon$\}$ uzayı; $j=[a,b]$ olmak üzere, $\|x\| = \max_{t\in j} |x(t)|$ normu ile Banach uzayıdır. Fakat $j=[0,1]$ alındığında $C[0,1]$ uzayı $\|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt$ ile tanımlanan norm altında tam uzay değildir, dolayısıyla bir Banach uzayı değildir (Kreyszig, 1978).

Tanım 1.1.32. X, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlanan bir vektör uzayı olsun ve X üzerinde bir topoloji τ ile verilsin. (X,τ) topolojik uzayına göre lineer uzay işlemleri sürekli ise yani $\alpha \in \mathbb{F}$ ve her $x, y \in X$ için

i. skalerle çarpma işlemi, yani $(\alpha, x) \to \alpha.x$ sürekli,

ii. vektörlerin toplama işlemi, yani $(x, y) \to x + y$ sürekli

ise X uzayına bir topolojik vektör uzayı ya da lineer topolojik uzay adı verilir (Şuhubi 2001).

1.2. Banach Daralma Dönüşüm Prensibi Ve Sabit Nokta Kavramı

Metrik uzayların en ilgi çekici uygulamalarından birisi bazen Banach daralma dönüşüm prensibi olarak da adlandırılan Banach sabit nokta teoremidir. Bu teorem tamlık kavramının $Tx = x$ denkleminin çözümünün varlığındaki önemini gösterir. Ayrıca bu teorem çözümün varlığını garanti eden bir metot sağlar. Bu teorem reel analiz, sayısal analiz, adi diferansiyel denklemler ve integral denklemlere uygulamaları olması bakımından fonksiyonel analizde önemli bir yere sahiptir.

Tanım 1.2.1. X boş kümeden farklı bir küme ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun.

$$Tx = x$$

eşitliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T nin bir sabit noktası denir (Granas, Dugundji, 2002).

Bu durumda $x \in X$ olmak üzere $Tx = x$ denkleminin çözümü, T nin bir sabit noktasıdır ve T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi

$$F(T) = \{x \in X : Tx = x\}$$

ile gösterilir (Granas, Dugundji, 2002).

$T: X \to X$ ile tanımlanan bir T fonksiyonunun herhangi bir sabit noktası olmayabilir veya bir sabit noktası olabilir ya da birden çok sabit noktası olabilir.

Örnek 1.2.2.

i. $X = \mathbb{R}$ olsun. $a \neq 0$ olmak üzere $Tx = a + x$ ile tanımlanan $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ öteleme (translation) fonksiyonunun sabit noktası yoktur.
ii. $0 < \theta < 2\pi$ için

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ile verilen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönme (rotation) fonksiyonunun yalnız bir sabit noktası vardır ve bu $(0,0)$ noktasıdır.

iii. $\mathbb{R}^2$ den $x-$eksenine tanımlı $(x, y) \to x$ izdüşüm (projection) dönüşümü sonsuz çoklukta sabit noktaya sahiptir (Kreyszig, 1978).

Banach sabit nokta teoremi, belirli dönüşümlerin sabit noktaları için varlık ve teklik teoremi olup, uygulamaya yönelik problemlerin çözümünde sabit noktaya en iyi yaklaşımı elde etmek için inşa esasına dayanan bir işlem yöntemidir. Bu işleme iterasyon adı verilir. İterasyon işlemleri, uygulamalı matematiğin hemen hemen tüm dallarında kullanılır ve yakınsaklık ispatları ve hata tahminleri, genellikle Banach sabit nokta teoreminin uygulaması yardımıyla elde edilir.

Tanım 1.2.3. X herhangi bir küme ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için

$$T^{n+1}(x) = T\left(T^n(x)\right)$$

olarak $T^n(x)$ tanımlandığında buna, T altındaki x in n. iterasyonu denir (Granas, Dugundji, 2002).

Tanım 1.2.4. (X, d) bir metrik uzay olsun. Bir $T : X \to X$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \tag{1.2.1}$$

olacak şekilde $\alpha \geq 0$ sabiti varsa, T dönüşümüne X üzerinde bir Lipschitzian dönüşüm adı verilir. (1.2.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük α değerine Lipschitz sabiti denir (Granas, Dugundji, 2002).

T Lipschitzian dönüşümü, $\forall \varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$ ise $\alpha d(x, y) < \varepsilon$ olduğundan $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) < \alpha \dfrac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$ olur. Bu nedenle T Lipschitzian dönüşümü, tanımlı olduğu küme üzerinde düzgün süreklidir.

Örnek 1.2.5. $X = \mathbb{R},\ d(x, y) = |x - y|$ ve $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ Tx = \dfrac{3}{2}x$ olsun. Bu durumda

$$d(Tx,Ty)=\left|\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y\right|=\frac{3}{2}d(x,y)\leq kd(x,y)$$

$k\geq\frac{3}{2}$ için Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 1.2.6. (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer (1.2.1) eşitsizliği $\alpha\in[0,1)$ olması durumunda sağlanıyorsa T ye daralma veya büzülme (contraction) dönüşümü denir (Granas, Dugundji, 2002).

Teorem 1.2.7. (Banach Sabit Nokta Teoremi) X bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir (Kreyszig, 1978).

Bu teoremin ispatı için öncelikle bir (x_n) dizisi oluşturulup bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilir. Bu dizi X tam uzayında yakınsak olacaktır ve daha sonra bu dizinin limiti olan noktanın T nin bir sabit noktası olduğunu ve bu noktanın tek olduğu gösterilir. Burada (x_n) dizisi, bir $x_0\in X$ noktası seçilip

$$x_0,\ x_1=Tx_0,\ x_2=Tx_1=T^2x_0,\dots,x_n=T^nx_0,\dots \tag{1.2.2}$$

şeklinde oluşturulur.

Örnek 1.2.7. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dönüşümü $f(x)=f((x_1,x_2))=\left(\frac{1}{2}\cos x_2,\frac{1}{2}\sin x_1+1\right)$ ile tanımlansın. $\mathbb{R}^2$ üzerindeki alışılmış metriğe göre her bir $x=(x_1,x_2)$ ve $y=(y_1,y_2)$ için $d(f(x),f(y))\leq\frac{1}{2}d(x,y)$ sağlanır. Yani $f,\mathbb{R}^2$ de bir daralma dönüşümüdür.

Örnek 1.2.8. $X=\{x\in\mathbb{Q}:x\geq1\}$ kümesi üzerinde $f:X\to X$ fonksiyonu $f(x)=(2/x)+(1/x)$ ile verilsin. $\mathbb{R}$ deki alışılmış metriğe göre $\forall x,y\in X$ için

$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq \frac{1}{2} d\left(x, y\right)$ sağlanır, yani f bir daralma dönüşümüdür fakat hiçbir sabit noktası yoktur.

Örnek 1.2.9. $Tx = x$ ile tanımlı $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$|Tx - Ty| \leq |x - y|$$

eşitsizliği sağlanır. Bütün $x \in \mathbb{R}$ noktaları T dönüşümünün sabit noktalarıdır.

Buradan şu sonuçları çıkarabiliriz,

i. Her daralma dönüşümünün sabit noktası olması gerekmez.
ii. Örnek 1.2.9. de olduğu gibi bir dönüşümün birden fazla sabit noktası olabilir (Soykan,2008).

Banach sabit nokta teoreminde uzayın tam olma şartı kaldırılamaz.

Örnek 1.2.10. $X = \left(0,1\right)$ uzayı mutlak değer metriği ile donatılmış olsun. Bu uzayın tam metrik uzay olmadığı açıktır.

$$\begin{aligned} T : X &\to X \\ x &\to Tx = x^2 \end{aligned}$$

dönüşümü bir daralma dönüşümüdür. Fakat sabit noktası yoktur (Jain, 2009).

Banach sabit nokta teoreminin uygulanması istenen durumlarda T dönüşümü bir $\left(X,d\right)$ tam metrik uzayının tamamı üzerinde bir daralma olmayabilir; fakat sadece X in bir Y alt kümesi üzerinde daralma olabilir. Eğer Y alt kümesi kapalı ise $\left(Y,d_{|Y}\right)$ tamdır. Bu nedenle T , Y den Y içine tanımlı bir dönüşüm ise Banach sabit nokta teoremini uygulayabiliriz. Bununla ilgili olarak pratik bir sonucu verelim.

Teorem 1.2.11. (Bir Yuvar Üzerinde Daralma) T, bir X tam metrik uzayından kendi içine bir dönüşüm olsun. T nin kapalı bir $Y=\{x\in X: d(x,x_0)\leq r\}$ yuvarı üzerinde bir daralma olduğunu kabul edelim. Ayrıca, $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $d(x_0,Tx_0)<(1-\alpha)r$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (1.2.2) de tanımlanan iterasyon dizisi, bir $x\in Y$ noktasına yakınsar. Bu nokta T dönüşümünün Y deki tek sabit noktasıdır (Agarwal, Meehan, O'Regan, 2001).

Teorem 1.2.12. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T{:}X\to X$ bir dönüşüm olmak üzere bir $m\in\mathbb{Z}$ için

$$T^m=T\circ T\circ\ldots\circ T\ \ (m\text{ defa})$$

bir daralma dönüşümü ise, T, X uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir (Soykan, 2008).

1.3. Daralma Dönüşüm Çeşitleri Ve Özellikleri

Tanım 1.3.1. (X,d) bir metrik uzay ve $T{:}X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ ve $x\neq y$ için

$$d(Tx,Ty)<d(x,y) \tag{1.3.1}$$

ise T ye kesin daralma (contractive) dönüşümü denir (Granas, Dugundji, 2002)

Örnek 1.3.2. $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı $Tx=x+1-\dfrac{x}{1+|x|}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $|T'(x)|=1-(1+|x|)^{-2}<1$ dir ve dolayısıyla her $x<y$ için

$$|Ty-Tx|=\left|\int_x^y T'(t)\,dt\right|\leq\int_x^y |T'(t)|\,dt<\int_x^y dt=|y-x|$$

olur. $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriğine göre T kesin daralma dönüşümüdür ve sabit noktası yoktur.

Tanım 1.3.3. (X,d) bir metrik uzay ve $T{:}X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y) \tag{1.3.2}$$

ise T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir (Granas, Dugundji, 2002).

Örnek 1.3.4. $X = \mathbb{R}$ ve X mutlak değer metriği ile donatılmış olsun.

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to Tx = x+1 \end{aligned}$$

olarak alalım.

$$d(Tx,Ty) = |x+1-y-1| = |x-y| = d(x,y)$$

sağlanmış olur. Böylece T bir genişlemeyen dönüşümdür fakat daralma ya da kesin daralma dönüşümü değildir.

Bu ifadelerden aşağıdaki genelleştirme yapılabilir:

T daralma $\Rightarrow T$ kesin daralma $\Rightarrow T$ genişlemeyen $\Rightarrow T$ Lipschitzian

(Jain, 2009).

Fakat ters gerektirmeler her zaman doğru değildir.

Tanım 1.3.5. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $\alpha > 1$ için

$$d(Tx,Ty) \geq \alpha d(x,y) \tag{1.3.3}$$

ise T ye genişleyen (expansive) dönüşüm denir (Granas, Dugundji, 2002).

1.4. Dönüşüm Çiftlerinin Özellikleri

Tanım 1.4.1. (X,d) bir metrik uzay ve $T,S : X \to X$ tanımlı iki dönüşüm olsun. $Sx = Tx = w$ olacak şekilde $x, w \in X$ noktaları varsa x noktasına S ve T dönüşümlerinin çakışma (coincidence) noktası denir (Jungck, Rhoades, 1998).

Tanım 1.4.2. $T,S : X \to X$ dönüşümleri X metrik uzayından kendi üzerine tanımlı dönüşümler olsun. Her $x \in X$ için $d(TSx, STx) = 0$ şartı sağlanıyorsa S ve T dönüşümlerine değişmeli (commuting) dönüşümler denir (Jungck, 1976).

Tanım 1.4.3. (X,d) metrik uzayında $T,S : X \to X$ şeklinde tanımlanan dönüşümler $\forall x \in X$ için

$$d(TSx, STx) \leq d(Sx, Tx)$$

şartını sağlasın. Bu durumda T ve S dönüşümlerine zayıf değişmeli (weakly commuting) dönüşümler denir (Sessa, 1982).

Tanım 1.4.4. X metrik uzayında $T,S : X \to X$ dönüşümleri tanımlanmış olsun. (x_n), X uzayında bazı $t \in X$ noktaları için $\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t$ şartını sağlayan bir dizi olmak üzere $\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, STx_n) = 0$ sağlanıyorsa T ve S dönüşümlerine uyumlu (compatible) dönüşümler denir (Jungck, Rhoades, 1998).

Tanım 1.4.5. (X,d) bir metrik uzay ve $T,S : X \to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer bu dönüşümler çakışma noktalarında değişmeli ise bu dönüşümlere zayıf uyumlu (weakly compatible) dönüşümler denir. Yani, bazı $u \in X$ noktaları için $Tu = Su$ iken $TSu = STu$ ifadesi sağlanır (Jungck, Rhoades, 1998).

Tanım 1.4.6. (X,d) metrik uzay ve $T,S : X \to X$ dönüşümleri tanımlanmış olsun. Bazı $t \in X$ noktaları için $\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = t$ olacak şekilde X de en az bir (x_n) dizisi var fakat $\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, STx_n)$ limiti sıfırdan farklı ya da bu limit yoksa T ve S dönüşümlerine uyumlu olmayan (noncompatible) dönüşümler denir (Aamri, El Moutawakil, 2002).

Tanım 1.4.7. X metrik uzayında $T,S : X \to X$ dönüşümleri tanımlanmış olsun. Eğer bazı $t \in X$ noktaları için $\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = t$ sağlanıyorsa T ve S dönüşümleri $(E.A.)$ özelliğine sahip dönüşümler olarak adlandırılır (Aamri, El Moutawakil, 2002).

Uyumlu olmayan iki dönüşümün $(E.A)$ özelliğine sahip olduğu açıktır. Ayrıca verilen tanımlardan, verilen iki dönüşüm için aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilir:

Değişmeli dönüşüm$\Rightarrow$Zayıf değişmeli dönüşüm$\Rightarrow$Uyumlu dönüşüm.

Örnek 1.4.8. $X = [0,1]$ kümesi mutlak değer metriği ile donatılmış olsun. Her $x \in X$ için

$$T : X \to X \qquad\qquad S : X \to X$$

$$x \to Tx = \frac{x}{2} \qquad\qquad x \to Sx = \frac{x}{2+x}$$

dönüşümleri verilsin. Buradan $S(X) = [0,1/3]$ ve $T(X) = [0,1/2]$ dir. Her $x \in X$ için

$$d(STx, TSx) = \left| \frac{x}{x+4} - \frac{x}{4+2x} \right| = \frac{x^2}{(x+4)(4+2x)}$$

$$\leq \frac{x^2}{4+2x} = \frac{x}{2} - \frac{x}{2+x} = d\left(Tx, Sx\right)$$

dir. Buradan T ve S zayıf değişmeli dönüşümlerdir. Fakat

$$STx = \frac{x}{4+x} > \frac{x}{4+2x} = TSx$$

olduğundan değişmeli dönüşüm değildirler (Sessa, 1982).

Örnek 1.4.9. $X = \left[0,3\right]$ ve $d\left(x,y\right) = \left|x-y\right|$ ve

$$T : X \to X \qquad\qquad S : X \to X$$

$$x \to Tx = \begin{cases} x, & x \in \left[0,1\right) \\ 3, & x \in \left[1,3\right] \end{cases} \qquad\qquad x \to Sx = \begin{cases} 3-x, & x \in \left[0,1\right) \\ 3, & x \in \left[1,3\right] \end{cases}$$

olsun. $x = 3 \in \left[1,3\right]$ ve bu aralıkta $TSx = STx$ olduğundan T ve S dönüşümleri $X = \left[0,3\right]$ kümesi üzerinde zayıf uyumlu dönüşümlerdir (Chugh, Kumar, 2001).

Örnek 1.4.10. $X = \mathbb{R}$ üzerinde

$$T : X \to X \qquad\qquad S : X \to X$$

$$x \to Tx = \frac{x}{3} \qquad\qquad x \to Sx = x^2$$

olsun. $x = 0$ ve $x = \frac{1}{3}$ noktaları birer çakışma noktasıdır.

$$TS\left(0\right) = ST\left(0\right) = 0$$

olduğundan 0 noktasında değişmelidir dolayısıyla bu noktada zayıf uyumludurlar.

$$TS\left(1/3\right) = T\left(1/9\right) = 1/27 \text{ ve } ST\left(1/3\right) = S\left(1/9\right) = 1/81$$

dır. Buradan $x=\frac{1}{3}$ noktasında değişmeli olmadığı ve sonuçta da zayıf uyumlu olmadığı görülür (Chugh, Kumar, 2001).

Örnek 1.4.11. $X=[0,\infty)$ olsun. $T,S: X\to X$ dönüşümleri $\forall x\in X$ için $Tx=\frac{x^2}{4}$ ve $Sx=\frac{5x}{4}$ şeklinde tanımlansın. $x_n=\frac{1}{n}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} Tx_n=\lim_{n\to\infty} Sx_n=0$ dir. Buradan T ve S nin $(E.A)$ özelliğine sahip olduğu açıktır.

Örnek 1.4.12. $X=[2,\infty)$ üzerinde $\forall x\in X$ için

$$
\begin{array}{ll}
T: X\to X & S: X\to X \\
\quad x\to Tx=x+1 & \quad x\to Sx=2x+1
\end{array}
$$

dönüşümleri tanımlansın. T ve S dönüşümleri X üzerinde $(E.A)$ özelliğine sahip değildir. Bunu gösterelim. Bazı $t\in X$ noktaları için $\lim_{n\to\infty} Tx_n=\lim_{n\to\infty} Sx_n=t$ şartını sağlayan bir (x_n) dizisi X uzayında mevcuttur. Böylece $\lim_{n\to\infty} x_n=t-1$, $\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{t-1}{2}$ ve buradan $t=1$ bulunur. Fakat $1\notin X$ olduğundan bu durum, T ve S dönüşümlerinin $(E.A)$ özelliğine sahip olması kabulü ile çelişir. Dolayısıyla bu dönüşümler X üzerinde $(E.A)$ özelliğine sahip değildirler.

Tanım 1.4.13. $T: X\to X$ tanımlı bir dönüşüm ve $F(T)$, T dönüşümünün sabit noktaları kümesi olmak üzere $\forall n\in\mathbb{N}$ için $F(T)=F(T^n)$ şartı sağlanıyorsa bu dönüşüm P özelliğine sahiptir denir (Jeong, Rhoades, 2005).

Tanım 1.4.14. $T,S: X\to X$ tanımlı bir dönüşüm çifti $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$F(T)\cap F(S)=F(T^n)\cap F(S^n)$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşümlere Q özelliğine sahip dönüşümler denir (Jeong, Rhoades, 2005).

1.5. f – Daralma Dönüşümleri

Tanım 1.5.1. (X,d) bir metrik uzay ve $f,T:X\to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer $\forall x,y\in X$ için $0\le k<1$ olmak üzere $d(fTx,fTy)\le kd(fx,fy)$ eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne bir $f-$daralma dönüşümü adı verilir (Beiranvand, Moradi, Omid Pazandeh, 2009).

$f=I$ (I birim dönüşüm) alınırsa daralma ve $f-$daralma dönüşümleri denk olur. $f-$daralma dönüşümünün daralma dönüşümü olması gerekmez. Bununla ilgili bir örnek verelim.

Örnek 1.5.2. $X=(0,\infty)$ uzayı mutlak değer metriği ile donatılmış olsun.

$$T:X\to X \qquad\qquad f:X\to X$$

$$x\to Tx=\beta x,\quad (\beta>1) \qquad\qquad x\to fx=\frac{\alpha}{x^2},\quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

ile tanımlansın.

$$d(fTx,\,fTy)=\left|\frac{\alpha}{\beta^2x^2}-\frac{\alpha}{\beta^2y^2}\right|\le\frac{1}{\beta^2}|fx-fy|,\ \left(\frac{1}{\beta^2}<1\right)$$

olduğundan T dönüşümü bir $f-$daralma dönüşümüdür fakat

$$d(Tx,Ty)=|\beta x-\beta y|=\beta|x-y|,\quad (\beta>1)$$

daralma dönüşümü değildir.

Örnek 1.5.3. $X = [0,\infty)$ uzayı mutlak değer metriği ile donatılmış olsun.

$$\begin{aligned} &T : X \to X && f : X \to X \\ &\quad x \to Tx = 2x+1, && \quad x \to fx = e^{-x}, \end{aligned}$$

ile tanımlansın.

$$d\left(fTx,\ fTy\right) = \left|e^{-2x-1} - e^{-2y-1}\right| = \frac{1}{e}\left|e^{-x} + e^{-y}\right|\left|e^{-x} - e^{-y}\right| \leq \frac{2}{e}\left|e^{-x} - e^{-y}\right| = \frac{2}{e}\left| fx - fy\right|,$$

olduğundan T dönüşümü bir $f -$daralma dönüşümüdür (Beiranvand, Moradi, Omid Pazandeh, 2009).

Tanım 1.5.4. (X,d) bir metrik uzay ve $f,T : X \to X$ iki dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d\left(fTx, fTy\right) < d\left(fx, fy\right)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne bir $f -$ kesin daralma dönüşümü adı verilir (Beiranvand, Moradi, Omid Pazandeh, 2009).

Her $f -$daralma dönüşümü bir $f -$kesin daralma dönüşümüdür fakat tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 1.5.5. $X = [1,\infty)$ kümesi üzerinde $d\left(x, y\right) = |x - y|$ metriği verilsin.

$$\begin{aligned} &T : X \to X && f : X \to X \\ &\quad x \to Tx = \sqrt{x}, && \quad x \to fx = x, \end{aligned}$$

dönüşümleri verilsin. T bir $f -$daralma dönüşümü değildir fakat $f -$kesin daralma dönüşümüdür.

$$d\left(fTx, fTy\right) = \left|fTx - fTy\right| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| < \left|x - y\right| = \left|fx - fy\right|$$

olduğundan T, $f-$kesin daralma dönüşümüdür (Beiranvand, Moradi, Omid Pazandeh, 2009).

Tanım 1.5.6. (X,d) bir metrik uzay ve $f:X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her (y_n) dizisi için, (fy_n) yakınsak iken (y_n) yakınsak bir alt diziye sahipse , $f-$ dönüşümüne alt dizisel yakınsaktır denir (Beiranvand, Moradi, Omid Pazandeh, 2009).

Teorem 1.5.7. (X,d) bir metrik uzay ve $f:X \to X$ dönüşümü bire-bir, sürekli ve alt dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $T:X \to X$ sürekli ve $f-$ daralma dönüşümü, X içinde tek bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, f dizisel yakınsak ise her bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar (Beiranvand, Moradi, Omid Pazandeh, 2009).

Tanım 1.5.8. X bir normlu uzay ve $f:X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ ve bazı $k \geq 0$ değeri için

$$\left\| f^2 x - fx \right\| \leq k \left\| fx - x \right\|$$

oluyorsa $f-$dönüşümüne k tipinden bir Banach operatörü denir (Sumitra, Uthariaraj, Hemavathy, 2010).

Tanım 1.5.9. X bir normlu uzay ve $\varnothing \neq M \subset X$ olsun. $T, f:X \to X$ dönüşümleri verilsin. Aşağıdaki şartlardan herhangi biri sağlanıyorsa (f,T) ikilisine Banach operatör çifti denir (Sumitra, Uthariaraj, Hemavathy, 2010).

i. $f\left[F(T)\right] \subseteq F(T)$,

ii. Her bir $x \in F(T)$ için $Tfx = fx$ dir,

iii. Her bir $x \in F(T)$ için $Tfx = fTx$ dir,

iv. Bazı $k \geq 0$ değerleri için $\| fTx - Tx \| \leq k \| Tx - x \|$ dir.

BÖLÜM 2. KONİK METRİK VE *G*-KONİK METRİK UZAYLAR

Bu bölümde konik yapısı ve konik metrik uzaylarla ilgili tanımlar verilecektir. Ayrıca konik metrik ve $G-$metrik uzaydan daha genel olan İ. Beg, T. Nazir ve M. Abbas tarafından tanıtılan $G-$konik metrik uzaylar incelenecektir.

2.1. Konikler Ve Yapıları

Tanım 2.1.1. B bir reel Banach uzayı ve $K \subset B$ olsun. Eğer K kümesi

i. K boş olmayan kapalı bir küme ve $K \neq \{\theta\}$;

ii. $a, b \in \mathbb{R},\ a, b \geq 0$, $x, y \in K$ iken $ax + by \in K$;

iii. $x \in K$ ve $-x \in K$ iken $x = \theta$

şartlarını sağlıyorsa K kümesine B uzayında bir konik denir.

Örnek 2.1.2. $B = \mathbb{R}$ Banach uzayını alalım. $[0,1]$ kapalı aralığı $\mathbb{R}$ de bir koniktir (Deimling, 1985).

Örnek 2.1.3. $B = \mathbb{R}^2$ için ise $K = \{(x, y) \in B : x, y \geq 0\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ için bir koniktir (Rezapour, Hamlbarani, 2008).

Tanım 2.1.4. B bir Banach uzayı ve K, B nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda B üzerinde $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K$ olacak şekilde bir kısmi sıralama bağıntısı ve $x \ll y$ ifadesi ile de $y - x \in \operatorname{int} K$ tanımlanır (Guang, Xian, 2007).

Önerme 2.1.5. B bir reel Banach uzayı, $K \subset B$ bir konik ve $\lambda > 0$ reel sayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır:

i. $\operatorname{int} K + \operatorname{int} K \subset \operatorname{int} K$,

ii. $\lambda \operatorname{int} K \subset \operatorname{int} K$.

(Kadelburg, 2009).

Tanım 2.1.6. B bir reel Banach uzayı ve K, B nin bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in B$ ve $\theta \le x \le y$ için

$$\|x\| \le M \|y\|$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa K konisine normal koni, bu eşitsizliği sağlayan en küçük M değerine de K konisinin normal sabiti denir (Guang, Xian, 2007).

Önerme 2.1.7. B bir reel Banach uzayı ve $K \subset B$ normal konik olsun. $x \in K, a \in \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha < 1$ için $x \le ax$ ise $x = \theta$ dır.

İspat. $x \le ax \Rightarrow ax - x \in K$ olur. $x - ax \le \theta \Rightarrow |1-a|\|x\| \le M \|\theta\|$ ve sonuçta da $x = \theta$ olduğu görülür.

Tanım 2.1.8. B reel Banach uzayında K bir koni ve $(x_n), (y_n) \subset K$ olsun. Eğer $0 \le x_n \le x_n + y_n$ iken $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0,$ fakat $\lim_{n\to\infty} x_n \ne 0$ ise K konisine normal olmayan (non normal) koni denir (Radenovic, Rhoades, 2009).

Önerme 2.1.7. de eğer koni normal olmayan bir koni ise ispatı aşağıdaki şekilde verilebilir:

$x \le ax \Rightarrow ax - x \in K$ yani $-(1-a)x \in K$ olur. $x \in K$ ve $(1-a) > 0$ olduğundan $(1-a)x \in K$ olur. Buradan $(1-a)x \in K \cap (-K)$ dır. Bu ise konik tanımından $x = \theta$ olmasını gerektirir (Ilic, Rakocevic, 2009).

Örnek 2.1.9. $C_{\mathbb{R}}^{2}([0,1]) = \{x \mid x:[0,1] \to \mathbb{R},$ ikinci mertebeden türevi var ve sürekli$\}$ reel Banach uzayı

$$\|f\| = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \|f''\|_{\infty}$$

normu ile verilmiş olsun. Bu durumda $K = \{f \in B : f \geq \theta\}$ konisi normal olmayan bir konidir. Bunu göstermek için $\forall k \geq 1$ için $fx = x$ ve $gx = x^{2k}$ fonksiyonları alınsın. Bu durumda $x \in [0,1]$ olduğundan $\theta \leq g \leq f$, $\|f\| = 2$ ve $\|g\| = 2k+1$ olur. Aynı zamanda,

$$2 = \|fx\| < \|gx\| = 2k+1$$

elde edilir ve böylece,

$$2k = k\|fx\| < \|gx\| = 2k+1$$

olduğundan k, K konisinin normal sabiti değildir. Bu durumda da K normal koni değildir (Rezapour, Hamlbarani, 2008).

En fazla kullanılan koniler $M = 1$ normal sabitine sahip olan konilerdir. $M < 1$ normal sabitine sahip normal koni yoktur (Rezapour, Hamlbarani, 2008).

Önerme 2.1.10. Her bir $k > 1$ için, $M > k$ normal sabitine sahip normal koni vardır (Rezapour, Hamlbarani, 2008).

Tanım 2.1.11. B Banach uzayında K bir koni olsun. K konisi içinde üstten sınırlı her artan dizi yakınsak ise, K regüler bir koni olarak adlandırılır. Yani K regüler koni ise K da bazı $y \in B$ noktaları için

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq y$$

olacak şekilde (x_n) dizisi varsa, bu durumda $n \to \infty$ iken $\|x_n - x\| \to 0$ ifadesini sağlayan bir $x \in B$ vardır. Benzer şekilde alttan sınırlı her azalan dizi yakınsak ise K konisine regüler koni denir (Huang, Zhang, 2007).

Önerme 2.1.12. Her regüler koni normaldir (Rezapour, Hamlbarani, 2008).

Ancak normal bir koni regüler olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.1.13. $B = C[0,1]$ uzayı supremum normu ile donatılmış olsun ve

$$K = \{ f \in B : f \geq 0 \}$$

konisi göz önüne alınsın. Bu durumda K, $M = 1$ normal katsayısına sahip bir normal konidir. B nin elemanlarının bir dizisi

$$x \geq x^2 \geq x^3 \geq ... \geq 0$$

şeklinde olsun. Bu dizi azalan ve alttan sınırlı bir dizidir fakat yakınsak değildir. Dolayısıyla K konisi regüler değildir (Rezapour, Hamlbarani, 2008).

Tanım 2.1.14. B bir reel Banach uzayı ve K, B de bir koni olsun. Eğer $\forall x, y \in B$ için $\theta \leq x \leq y$ olması $\|x\| \leq \|y\|$ olmasını gerektiriyorsa B üzerindeki norma monotoniktir denir (Deimling, 1985).

Bazı reel Banach uzaylarında bulunan konikler için $\operatorname{int} K = \varnothing$ olabilir. Örneğin, Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonlar uzayındaki

$$L_+^p(J) = \{ x \in L^p(J) : x(t) \geq 0 \}, \ (1 \leq p < \infty)$$

konisinin içi boş kümedir. Aynı zamanda,

$$l_+^p = \left\{x \in l^p : x_i \geq 0\right\},\ \left(1 \leq p < \infty\right)$$

konisi içinde $\operatorname{int} l_+^p = \varnothing$ dir. Ayrıca $\mathbb{R}^2$ de $K = \left\{\left(x,0\right) : x \geq 0\right\}$ koniğinin de içi boştur. Diğer taraftan

$$\mathbb{R}_+^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ \forall i \text{ için}\right\} \text{ ve } C_{\mathbb{R}}^+\left(J\right) = \left\{x \in C_{\mathbb{R}}\left(J\right) : J \text{ üzerinde } x\left(t\right) \geq 0\right\}$$

koniklerinin içi boştan farklıdır (Deimling,1985).

2.2. Konik Metrik Uzaylar Ve Topolojik Yapıları

Bu tez boyunca B daima bir Banach uzayı, $\operatorname{int} K \neq \varnothing$ olmak üzere K, B içinde bir koni ve $\leq$, K üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olarak kullanılacaktır.

Tanım 2.2.1. X boş kümeden farklı bir küme olsun. $d : X \times X \to B$ fonksiyonu

d1. $\forall x, y \in X$ için $\theta \leq d\left(x,y\right)$ ve $d\left(x,y\right) = \theta \Leftrightarrow x = y$,

d2. $\forall x, y \in X$ için $d\left(x,y\right) = d\left(y,x\right)$,

d3. $\forall x, y, z \in X$ için $d\left(x,y\right) \leq d\left(x,z\right) + d\left(z,y\right)$; (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlasın. Bu durumda d fonksiyonuna konik metrik, $\left(X,d\right)$ ikilisine de konik metrik uzay denir (Guang, Xian, 2007).

Örnek 2.2.2. $B = \mathbb{R}^2$, $K = \left\{\left(x,y\right) \in B :\ x \geq 0,\ \ y \geq 0\right\} \subset \mathbb{R}^2$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to B \\ &\quad \left(x,y\right) \to d\left(x,y\right) = \left(\left|x-y\right|, \alpha\left|x-y\right|\right) \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda $\left(\mathbb{R},d\right)$ B üzerinde bir konik metrik uzaydır. Gerçekten;

(d1): $d(x,y)=(|x-y|,\alpha|x-y|)>\theta$,

$\Rightarrow)$ $d(x,y)=\theta$ ise $|x-y|=\theta,\ \alpha|x-y|=\theta \Rightarrow x=y.$

$\Leftarrow)$ $x=y \Rightarrow d(x,y)=(|x-y|,\alpha|x-y|)=(0,0)\Rightarrow d(x,y)=\theta.$

(d2): $d(x,y)=(|x-y|,\alpha|x-y|)=(|y-x|,\alpha|y-x|)=d(y,x)$.

(d3):
$$
\begin{aligned}
d(x,y)&=(|x-y|,\alpha|x-y|)\\
&\le(|x-z|+|z-y|,\alpha|x-z|+\alpha|z-y|)\\
&=d(x,z)+d(z,y).
\end{aligned}
$$

Örnek 2.2.3.

$B=C^1_{\mathbb{R}}([0,1])=\{x|\ x:[0,1]\to\mathbb{R},$ birinci mertebeden türevi var ve sürekli$\}$,

$K=\{\varphi:\ \varphi(t)\ge 0,\ t\in[0,1]\}$ olsun. $X=[0,2]$ olmak üzere K da bulunan bazı sabit birinci mertebeden türevli ve sürekli $\varphi(t)$ fonksiyonları için,

$$
\begin{aligned}
&d:X\times X\to B\\
&\quad (x,y)\to d(x,y)=|x-y|\varphi(t)
\end{aligned}
$$

ile tanımlı d fonksiyonu bir metriktir. $\varphi(t)=2^t$ olsun. d nin konik metrik aksiyomlarını sağladığı açıktır.

Tanım 2.24. (X,d) bir konik metrik uzay, (x_n), X içinde bir dizi ve $x\in X$ olsun. $\theta\ll c$ olan $\forall c\in B$ için $\exists N\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n>N$ için $d(x_n,x)\ll c$ oluyorsa (x_n) dizisine yakınsak dizi denir ve $n\to\infty$ için $x_n\to x$ ya da $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ şeklinde gösterilir (Guang, Xian, 2007).

Lemma 2.2.5. (X,d) bir konik metrik uzay ve K, M normal sabiti ile bir normal konik ve (x_n), X içinde bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisinin X uzayında yakınsak olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ iken $d(x_n, x) \to \theta$ olmasıdır (Guang, Xian, 2007).

Lemma 2.2.6. (X, d) bir konik metrik uzay ve K, M normal sabiti ile bir normal konik, (x_n) ve (y_n), X içinde iki dizi ve $n \to \infty$ iken $x_n \to x$, $y_n \to y$ olsun. Bu durumda $n \to \infty$ iken $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ olur (Guang, Xian, 2007).

Lemma 2.2.7. (X, d) bir konik metrik uzay ve K, M normal sabiti ile bir normal konik ve (x_n), X içinde bir dizi olsun. $(x_n) \to x$ ve $(x_n) \to y$ ise $x = y$ dir. Yani (x_n) dizisinin limiti tektir (Guang, Xian, 2007).

Tanım 2.2.8. (X, d) bir konik metrik uzay, X içinde bir dizi (x_n) olsun. $\theta \ll c$ olan $\forall c \in B$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m, n > N$ için $d(x_m, x_n) \ll c$ ise (x_n) dizisine X içinde bir Cauchy dizisi denir (Guang, Xian, 2007).

Lemma 2.2.9. (X, d) bir konik metrik uzay ve K, M normal sabiti ile bir normal konik ve (x_n) içinde bir dizi olsun. (x_n) dizisinin X içinde bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $m, n \to \infty$ iken $d(x_n, x_m) \to \theta$ olmasıdır (Guang, Xian, 2007).

Lemma 2.2.10. (X, d) bir konik metrik uzay (x_n), X içinde bir dizi olsun. (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsıyorsa (x_n), X içinde bir Cauchy dizisidir (Guang, Xian, 2007).

Tanım 2.2.11. Bir (X, d) konik metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir noktaya yakınsak ise (X, d) ikilisine tam konik metrik uzay denir (Guang, Xian, 2007).

Tanım 2.2.12. (X,d) bir konik metrik uzay olsun.

i. $N(a,p)=\{y\in X : d(y,a)\ll p\}$

olmak üzere, $N(a,p)\subseteq A$ sağlanacak şekilde bir $\theta\ll p$ varsa a ye A kümesinin bir iç noktası denir.

ii. Eğer A kümesinin her elemanı A kümesinin bir iç noktası ise A ya açık küme denir.

iii. Her $a\in A$ için $d(a,x_0)\ll c$ olacak şekilde $c\in B$ ve $x_0\in X$ varsa A kümesine sınırlıdır denir.

iv. Eğer A kümesinin her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse $A\subseteq X$ kompakt küme olarak adlandırılır.

(Rezapour, Hamlbarani, 2008).

Tanım 2.2.13. (X,d) bir konik metrik uzay olsun. Eğer X deki herhangi bir (x_n) dizisinin X içinde yakınsak olan bir (x_{n_k}) alt dizisi varsa X uzayına dizisel kompakt konik metrik uzay denir (Guang, Xian, 2007).

Tanım 2.2.14. (X,d) bir konik metrik uzay, $f:X\to X$ bir fonksiyon ve $x_0\in X$ olsun. Eğer X deki her (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} fx_n = fx_0$ ise f fonksiyonuna $x_0\in X$ noktasında süreklidir denir (Ilic, Rakocevic, 2008).

Teorem 2.2.15. Her (X,d) konik metrik uzay bir topolojik uzaydır (Abuloha, 2009).

Önerme 2.2.16. (X,d) bir konik metrik uzay ve $A\subset X$ olsun. Her dizisel kompakt konik metrik uzay kompakttır (Rezapour, Hamlbarani, 2008).

Tanım 2.2.17. (X,d) konik metrik uzayının boştan farklı iki alt kümesi A ve C olsun. A ile C arasındaki uzaklık $d(A,C)$ ile gösterilir ve

$$d\left(A,C\right)=\inf\left\{d\left(x,y\right):\ x\in A,\ y\in C\right\}$$

ile tanımlanır. Eğer $A=\{a\}$ ise bu durumda da $d\left(a,C\right)$ kullanılır (Abuloha, 2009).

Örnek 2.2.18. $B=\mathbb{R}^2$, $K=\left\{\left(x,y\right)\in B:\ x,y\geq 0\right\}$ olsun. $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to B$ fonksiyonu

$$d\left(\left(x_1,x_2\right),\left(y_1,y_2\right)\right)=\left(\left|x_1-y_1\right|,\left|x_2-y_2\right|\right)$$

ile tanımlansın.

$A=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2:0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\right\}$, $C=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2:2\leq x\leq 3,\ 0\leq y\leq 1\right\}$ ve $D=\left\{\left(0,0\right)\right\}$

kümeleri verilsin. Bu durumda

$$d\left(A,C\right)=d\left(\left(1,1\right),\left(2,1\right)\right)=d\left(\left(1,0\right),\left(2,0\right)\right)=\left(1,0\right)$$

bulunur. Benzer şekilde $d\left(A,D\right)=d\left(A,0\right)=\left(0,0\right)$ ve

$$d\left(D,C\right)=d\left(0,C\right)=d\left(\left(0,0\right),\left(2,0\right)\right)=\left(\left|0-2\right|,\left|0-0\right|\right)=\left(2,0\right)$$

olarak elde edilir (Abuloha, 2009).

Lemma 2.2.19. $\left(X,d\right)$ konik metrik uzay ve $u,\ v,\ w\in X$ olsun. X uzayında aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. $u\ll v$ ve $v\ll w$ ise $u\ll w$ dir.
ii. $u\leq v$ ve $v\ll w$ ise $u\ll w$ dir.
iii. Her $c\in \operatorname{int}K$ için $0\leq u\ll c$ ise $u=0$ dır.
iv. Her $c\in \operatorname{int}K$ için $u\leq v+c$ ise $u\leq v$ dir.

v. Eğer $0 \leq u \leq v$ ve $k \geq 0$ ise $0 \leq ku \leq kv$ dir.

vi. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq x_n \leq y_n$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y$ ise $0 \leq x \leq y$ dir.

vii. Eğer $0 \leq d\left(x_n, x\right) \leq y_n$ ve $y_n \to 0$ ise $x_n \to x$ dir.

viii. Eğer $c \in \operatorname{int} K$, $0 \leq x_n$ ve $n \to \infty$ için $x_n \to 0$ ise en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için $x_n \ll c$ dir.

(Kadelburg, 2009).

Lemma 2.2.20. $\left(X, d\right)$ konik metrik uzayında aşağıdaki özellikler sağlanır

i. Her bir $\delta > 0$ ve $x \in \operatorname{int} K$ için, $\|\gamma x\| < \delta$ olan bir $0 < \gamma < 1$ sayısı vardır.

ii. Her bir $0 \ll c_1$ ve $c_2 \in K$ için, $c_1 \ll d$, $c_2 \ll d$ olacak şekilde $0 \ll d$ elemanı vardır.

iii. Her bir $0 \ll c_1$ ve $0 \ll c_2$ için, $e \ll c_1$, $e \ll c_2$ sağlanacak şekilde $0 \ll e$ elemanı vardır.

(Rezapour, Hamlbarani, 2008).

2.3. *G*-Konik Metrik Uzaylar

Metrik uzaylarda sabit nokta teorisi matematik ve uygulamalı bilimlerde önemli bir yere sahip olduğundan matematikçiler için geçen yirmi yıl içinde geniş bir çalışma alanı olmuştur. Bu yüzden bilinen metrik uzay kavramı farklı yazarlar tarafından genelleştirilmiştir (Gahler, 1963, 1966; Dhage, 1992, 1994, 2000; Mustafa, Sıms, 2006, 2008, 2009).

X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere, $G-$ metrik $G : X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ ile tanımlı bir fonksiyondur (Mustafa, 2005). Burada $\mathbb{R}^+$ yerine sıralı reel bir Banach uzayı alarak $G-$ konik metrik fonksiyonu tanımlanmıştır (Beg, Abbas, Nazır, 2010).

Tanım 2.3.1. $X \neq \varnothing$, B bir reel Banach uzayı ve $K \subset B$ bir konik olsun. $G : X \times X \times X \to B$ fonksiyonu

G1. $G(x,y,z) = 0 \Rightarrow x = y = z$,

G2. Her $x, y \in X$ için $x \neq y$ iken $0 < G(x,x,y)$,

G3. $y \neq z$ iken $G(x,x,y) \leq G(x,y,z)$,

G4. $G(x,y,z) = G(x,z,y) = G(y,z,x) = \ldots$ (Her üç değer için simetrik),

G5. Her $x, y, z, w \in X$ için $G(x,y,z) \leq G(x,w,w) + G(w,y,z)$

özelliklerini sağlasın. Bu durumda $G-$ fonksiyonuna X üzerinde bir $G-$konik metrik, X uzayına da genelleştirilmiş konik metrik uzay veya $G-$konik metrik uzay denir (Beg, Abbas, Nazır, 2010).

$G-$konik metrik uzay kavramı, $G-$metrik ve konik metrik kavramlarından daha geneldir.

Örnek 2.3.2. (X,d) bir konik metrik uzay olsun. $G : X \times X \times X \to B$ fonksiyonu

$$G(x,y,z) = d(x,y) + d(y,z) + d(z,x)$$

ile tanımlansın.

G1. $G(x,y,z) = 0 \Rightarrow d(x,y) + d(y,z) + d(z,x) = 0$ ve d konik metrik olduğundan $x = y = z$ olmalıdır.

G2. $G(x,x,y) = d(x,x) + d(x,y) + d(y,x) = 2d(y,x) > 0$ dır.

G3.
$$\begin{aligned} G(x,x,y) &= d(x,x) + d(x,y) + d(y,x) \\ &= d(x,y) + d(y,x) \\ &\leq \left[d(x,z) + d(z,y) \right] + d(y,x) \\ &= G(x,y,z). \end{aligned}$$

G4. $G(x,y,z)=d(x,y)+d(y,z)+d(z,x)$

$$=d(x,z)+d(z,y)+d(y,x)=G(x,z,y)=...$$

G5. $G(x,y,z)=d(x,y)+d(y,z)+d(z,x)$

$$\leq d(x,w)+d(w,w)+d(w,y)+d(y,z)+d(z,w)+d(w,x)$$

$$=\underbrace{d(x,w)+d(w,w)+d(w,x)}_{G(x,w,w)}+\underbrace{d(w,y)+d(y,z)++d(z,w)}_{G(w,y,z)}$$

$$G(x,y,z)\leq G(x,w,w)+G(w,y,z)$$

G fonksiyonu bir $G-$ konik metriktir.

Tanım 2.3.3. Her $x,y\in X$ için

$$G(x,y,y)=G(y,y,x)$$

ise, (X,G) uzayına simetriktir denir (Beg, Abbas, Nazır, 2010).

Örnek 2.3.4. $X=\{a,b\}$, $B=\mathbb{R}^3$, $K=\{(x,y,z)\in B: x,y,z\geq 0\}$ olsun. $G: X\times X\times X\to B$ fonksiyonu

$$G(a,a,a)=G(0,0,0)=G(b,b,b),$$

$$G(a,b,b)=G(0,1,1)=G(b,a,b)=G(b,b,a)$$

$$G(b,a,a)=G(0,1,0)=G(a,b,a)=G(a,a,b)$$

ile tanımlansın. $G(a,a,b)\neq G(a,b,b)$ olduğundan X simetrik olmayan bir $G-$konik metrik uzaydır (Beg, Abbas, Nazır, 2010).

Önerme 2.3.5. X bir $G-$konik metrik uzay ve

$$d_G : X \times X \to B$$
$$(x, y) \to d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(y, y, x)$$

olsun. (X, d_G) bir konik metrik uzaydır. Ayrıca aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

i. $G(x, y, y) \leq \frac{2}{3} d_G(x, y)$,

ii. Eğer X simetrik bir $G-$konik metrik uzay ise, $\forall x, y \in X$ için

$d_G(x, y) = 2G(x, y, y)$

dir (Beg, Abbas, Nazır, 2010).

Tanım 2.3.6. X bir $G-$konik metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. $\theta \ll c$ olan $\forall c \in B$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m, n > N$ ve X de bulunan bazı sabit x elemanları için, $G(x_n, x_m, x) \ll c$ oluyorsa (x_n) dizisine yakınsak dizi denir ve $n \to \infty$ için $x_n \to x$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir (Beg, Abbas, Nazır, 2010).

Tanım 2.3.7. (X, G) bir $G-$konik metrik uzay, X içinde bir dizi (x_n) olsun. $\theta \ll c$ olan $\forall c \in B$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m, n, p > N$ için $G(x_m, x_n, x_p) \ll c$ ise (x_n) dizisine X içinde bir Cauchy dizisi denir (Beg, Abbas, Nazır, 2010).

Tanım 2.3.8. X deki her Cauchy dizisi yine X uzayının bir elemanına yakınsıyorsa bu uzaya tam $G-$ konik metrik uzay denir (Beg, Abbas,Nazir, 2010).

Önerme 2.3.9. X bir $G-$ konik metrik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

i. (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır,

ii. $n \to \infty$ için $G(x_n, x_n, x) \to 0$ dır.

iii. $n \to \infty$ için $G(x_n, x, x) \to 0$ dır.

iv. $m,n\to\infty$ için $G(x_n,x_m,x)\to 0$ dır,

(Beg, Abbas, Nazir, 2010).

Lemma 2.3.10. X bir $G-$ konik metrik uzay ve (x_m), (y_n), (z_l) bu uzayda birer dizi olsun. Eğer $(x_m)\to x$, $(y_n)\to y, (z_l)\to z$ ise, $m,n,l\to\infty$ iken

$$G(x_m, y_n, z_l)\to G(x,y,z)$$

dir (Beg, Abbas, Nazir, 2010).

Lemma 2.3.11. (x_n), $G-$konik metrik uzayında bir dizi ve $x\in X$ olsun. Eğer (x_n) dizisi x e yakınsak ve aynı zamanda (x_n), y noktasına yakınsaksa bu durumda $x=y$ dir. Yani limit varsa tektir (Beg, Abbas, Nazir, 2010).

Lemma 2.3.12. (x_n), $G-$konik metrik uzayında bir dizi ve $x\in X$ noktasına yakınsak olsun. $m,n\to\infty$ için $G(x_m, x_n, x)\to 0$ dır (Beg, Abbas, Nazir, 2010).

Lemma 2.3.13. X bir $G-$konik metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $m,n,l\to\infty$ için $G(x_m, x_n, x_l)\to 0$ dır. (Beg, Abbas, Nazir, 2010).

Tanım 2.3.14. X bir $G-$konik metrik uzay olsun. $x\in X$ ve $\theta\ll c$ için

$$B_G(x,c)=\{y\in X : G(x,y,y)\ll c\}$$

kümesine X de bir açık yuvar denir.

Önerme 2.3.15. X bir $G-$konik metrik uzay olsun. Herhangi bir $x_0 \in X$ ve $c \gg \theta$ için,

$G(x_0, x, y) \ll c$ ise $x,\ y \in B_G(x_0, c)$ dir.

İspat. $G(x_0, x, y) \ll c$ olsun. $G-$metrik fonksiyonunun üçüncü özelliğinden $x \neq y \neq x_0$ olmak üzere

$$G(x, x, x_0) \leq G(x, x_0, y) = G(x_0, x, y) \ll c$$

dir. Lemma 2.2.19 (ii) den $G(x_0, x, x) \ll c$ olur. Bu ise

$$B_G(x_0, c) = \{x \in X : G(x_0, x, x) \ll c\}$$

olması demektir. Benzer şekilde

$$G(y, y, x_0) \leq G(y, x_0, x) = G(x_0, x, y) \ll c$$

olur. Bu da

$$B_G(x_0, c) = \{y \in X : G(x_0, y, y) \ll c\}$$

sonucunu verir.

Önerme 2.3.16. X bir $G-$konik metrik uzay olsun. Herhangi bir $x_0 \in X$ ve $c \gg \theta$ için, $y \in B_G(x_0, c)$ ise $B_G(y, r) \subseteq B_G(x_0, c)$ olacak şekilde $r \gg \theta$ vardır.

İspat. $y \in B_G(x_0, c)$ olsun. $G(x_0, y, y) \ll c$ olur. $G(x_0, y, y) = c - r$ diyelim. $x \in B_G(y, r)$ olsun bu durumda $G(y, x, x) \ll r$ dir. $x \in B_G(x_0, c)$ midir?

$$G(x_0,x,x) \le G(x_0,y,y) + G(y,x,x)$$
$$\ll c - r + r = c$$

yani $x \in B_G(x_0,c)$ olur. Dolayısıyla $B_G(y,r) \subseteq B_G(x_0,c)$ dir.

Teorem 2.3.17. Her (X,G) konik metrik uzayı bir topolojik uzaydır.

İspat. $\theta \ll c$ olmak üzere $c \in B$ için

$B_G(x,c) = \{y \in X : G(x,y,y) \ll c\}$ ve $\beta = \{B_G(x,c) : x \in X, c \gg \theta\}$

olsun. $\tau_G^c = \{U \subset X : \forall x \in U \text{ için } \exists V \in \beta \text{ öyle ki } x \in V \subset U\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. Topoloji özelliklerinin sağlandığını gösterelim:

i. $\varnothing,\ X \in \tau_G^c$

ii. $U,\ V \in \tau_G^c$ olsun. $x \in U \cap V$ alalım. $x \in U$ ve $x \in V$ dir. $x \in B_G(x,c_1) \subset U$ ve $x \in B_G(x,c_2) \subset V$ sağlanacak şekilde $c_1, c_2 \gg \theta$ bulunabilir. Lemma 2.2.20 (iii) den $c \ll c_1$ ve $c \ll c_2$ olan $c \gg \theta$ vardır. $\theta \ll c \ll c_1$, $\theta \ll c \ll c_2$, $G(x,x,x) \ll c \ll c_1, G(x,x,x) \ll c \ll c_2$;

$$\left.\begin{array}{l} x \in B_G(x,c) \subset B_G(x,c_1) \\ \\ x \in B_G(x,c) \subset B_G(x,c_2) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in B_G(x,c) \subset B_G(x,c_1) \cap B_G(x,c_2) \subset U \cap V.$$

Dolayısıyla $U \cap V \in \tau_G^c$ dir.

iii. Her $i \in I$ için $U_i \in \tau_G^c$ ve $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ olsun. Bu durumda en az bir $i_0 \in I$ için $x \in U_{i_0}$ dır. $x \in B_G(x,c) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ olacak şekilde bir $c \gg \theta$ bulunabilir. Buradan ise $\bigcup_{i \in I} U_i \subset \tau_G^c$ elde edilir.

Yani (X,G) bir topolojik uzaydır.

2.4. $\varphi -$ Dönüşümleri Ve Genelleştirilmiş $\varphi -$ Dönüşümleri

Tanım 2.4.1. K sıralı bir koni olsun. $\varphi : K \to K$ azalmayan fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlasın.

i. $\varphi(\theta) = \theta$,

ii. $\omega \in K - \{\theta\}$ için $\theta < \varphi(\omega) < \omega$,

iii. $\omega \in \operatorname{int} K$ ise $\omega - \varphi(\omega) \in \operatorname{int} K$,

iv. Her $\omega \in K - \{\theta\}$ için $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi^n(\omega) = \theta$

Bu durumda bu fonksiyon $\varphi -$ dönüşümü olarak adlandırılır (Di Bari, Vetro, 2008).

Örnek 2.4.2. $B = \mathbb{R}$ ve $K = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ normal koni olsun.

$$\begin{aligned} &\varphi : K \to K \\ &\quad \omega \to \varphi(\omega) = (2/3)\omega \end{aligned}$$

ile tanımlı fonksiyon $\varphi -$ dönüşümüdür.

i. $\varphi(\theta) = (2/3)\theta = \theta$,

ii. $\omega \in K - \{\theta\}$ olmak üzere $\varphi(\omega) = (2/3)\omega < \omega$

iii. $\omega \in \operatorname{int} K$ olmak üzere, $\omega - (2/3)\omega = (1/3)\omega \in \operatorname{int} K$,

iv. $\omega \in K - \{\theta\}$ olmak üzere

$$\varphi(\omega) = (2/3)\omega$$

$$\varphi^2(\omega) = \varphi(\varphi(\omega)) = (2/3)\varphi(\omega) = \frac{2}{3}\frac{2}{3}\omega$$

$$\vdots$$

$$\varphi^n(\omega) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \omega$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^n(\omega)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\omega=\theta .$$

Örnek 2.4.3. $B=\mathbb{R}^2$ ve $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\geq 0\}$ normal konik olsun.

$$\varphi:K\to K$$
$$(\omega_1,\omega_2)\to\varphi(\omega_1,\omega_2)=((1/2)\omega_1,(1/3)\omega_2)$$

dönüşümü bir $\varphi-$dönüşümüdür.

Tanım 2.4.4. K bir koni ve $F:K\to K$ azalmayan bir fonksiyon olsun ve F

i'. $F(\omega)=\theta\Leftrightarrow\omega=\theta$,

ii'. Her $\omega_n\in K$ için, $\omega_n\to\theta\Leftrightarrow F(\omega_n)\to\theta$,

iii'. Her $\omega_1,\omega_2\in K$ için, $F(\omega_1+\omega_2)\leq F(\omega_1)+F(\omega_2)$

özelliklerini sağlasın.

$f,g:X\to X$ dönüşümler olsun. $\varphi-$dönüşümü, F dönüşümü ve $\forall x,y\in X$ için

$$F(d(fx,fy))\leq\varphi(F(gx,gy))$$

şartını sağlasın. Bu durumda f ve g dönüşümlerine genelleştirilmiş $\varphi-$ dönüşüm çifti denir (Sabetghadam, Masiha, 2010).

Örnek 2.4.5. $B=\mathbb{R}$ ve $K=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 0\}$ normal koni olsun. $X=\mathbb{R}$ ve $d(x,y)=|x-y|$ ile tanımlansın.

$$F:K\to K$$

$$\omega \to F(\omega) = (1/2)\omega$$

ile tanımlı fonksiyon (i', ii', iii') özelliklerini sağlar.

i'. $\Rightarrow)$ $F(\omega) = \theta \Rightarrow (1/2)\omega = \theta$ yani $\omega = \theta$ dır.

$\Leftarrow)$ $\omega = \theta \Rightarrow F(\omega) = (1/2)\theta = \theta$ olur.

ii'. $\omega_n \in K$ olsun.

$\Rightarrow)$

$\omega_n \to \theta \Rightarrow \forall c \gg \theta$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için $d(\omega_n, \theta) \ll 2c$ sağlanır. $|\omega_n| \ll 2c$ dir. Buna göre

$$\forall n > n_0 \text{ için } d\left((1/2)\omega_n, \theta\right) = \left|\frac{1}{2}\omega_n - \theta\right| = \frac{1}{2}|\omega_n| \ll \frac{1}{2}2c = c$$

olur. Yani $F(\omega_n) = (1/2)\omega_n \to \theta$ dır.

$\Leftarrow)$ $(1/2)\omega_n \to \theta \Rightarrow \forall c \gg \theta$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$\left|\frac{1}{2}\omega_n - \theta\right| \ll \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}|\omega_n - \theta| \ll \frac{c}{2} \Rightarrow d(\omega_n, \theta) \ll c$$

olur. Bu da $\omega_n \to \theta$ olması demektir.

iii'. $F(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 = F(\omega_1) + F(\omega_2)$ dir.

Örnek 2.4.6. $B = \mathbb{R}^2$ ve $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ normal koni olsun. $X = \mathbb{R}^2$ ve $d(x, y) = (|x - y|, (1/2)|x - y|)$ ile tanımlansın.

$$F : K \to K$$

$$(\omega_1, \omega_2) \to F(\omega_1, \omega_2) = (\omega_2, \omega_1 + \omega_2)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon (i', ii', iii') şartlarını sağlar (Sabetghadam, Masiha, 2010).

BÖLÜM 3. KONİK METRİK VE *G*-KONİK METRİK UZAYLARDA $f-$DARALMA DÖNÜŞÜMLERİ

Sabit nokta teorisinde Banach daralma dönüşümünün kullanıldığı birçok çalışma bulunmaktadır. Bu daralma dönüşümü başka bir fonksiyona bağlı olarak $f-$ daralma dönüşümü adıyla 2009 yılında Beiranvand tarafından genelleştirilmiştir. Daha sonra bu dönüşümler 2009 da Morales, Rojas, 2010 yılında ise, Sumitra, Uthariaraj ve Hemavathy tarafından çeşitli sabit nokta teoremlerinde kullanılmıştır. Biz ise bu daralma dönüşümleri ile konik ve $G-$konik metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremlerini verdik.

3.1. Konik Metrik Uzaylarda $f-$Daralma Dönüşümleri

Teorem 3.1.1. (X,d) tam konik metrik uzayında $f,S,T:X\to X$ dönüşümleri sürekli dönüşümler ve f dönüşümü bire-bir olsun. f,S ve T dönüşümleri her $x,y\in X$ ve $\alpha+2\beta<1$ özelliğini sağlayan $\alpha,\beta\in[0,1)$ için

$$d(fSx,fTy)\le \alpha d(fx,fy)+\beta\left[d(fx,fTy)+d(fy,fSx)\right] \tag{3.1.1}$$

ifadesini sağlasın. Bu takdirde T ve S bir tek ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca (f,S) ve (f,T) birer Banach çifti ise f,S ve T dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. x_0 noktası X uzayında keyfi bir eleman olsun. Her bir $n\ge 0$ için $x_{2n+1}=Sx_{2n}$ ve $x_{2n+2}=Tx_{2n+1}$ dizileri tanımlansın. (3.1.1) ifadesi ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$d(fx_{2n+1},fx_{2n})=d(fSx_{2n},fTx_{2n-1})\le \alpha d(fx_{2n},fx_{2n-1})$

$$+\beta\left[d\left(fx_{2n}, fTx_{2n-1}\right)+d\left(fx_{2n-1}, fSx_{2n}\right)\right]$$

$$=\alpha d\left(fx_{2n}, fx_{2n-1}\right)$$

$$+\beta\left[d\left(fx_{2n}, fx_{2n}\right)+d\left(fx_{2n-1}, fx_{2n+1}\right)\right]$$

$$\leq \alpha d\left(fx_{2n}, fx_{2n-1}\right)$$

$$+\beta\left[d\left(fx_{2n-1}, fx_{2n}\right)+d\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}\right)\right]$$

yani,

$$d\left(fx_{2n+1}, fx_{2n}\right) \leq \frac{\alpha+\beta}{1-\beta} d\left(fx_{2n}, fx_{2n-1}\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$d\left(fx_{2n+3}, fx_{2n+2}\right)=d\left(fSx_{2n+2}, fTx_{2n+1}\right) \leq \alpha d\left(fx_{2n+2}, fx_{2n+1}\right)$$

$$+\beta\left[d\left(fx_{2n+2}, fTx_{2n+1}\right)+d\left(fx_{2n+1}, fSx_{2n+2}\right)\right]$$

$$=\alpha d\left(fx_{2n+2}, fx_{2n+1}\right)$$

$$+\beta\left[d\left(fx_{2n+2}, fx_{2n+2}\right)+d\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+3}\right)\right]$$

$$\leq \alpha d\left(fx_{2n+2}, fx_{2n+1}\right)$$

$$+\beta\left[d\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}\right)+d\left(fx_{2n+2}, fx_{2n+3}\right)\right]$$

ve buradan da

$$d\left(fx_{2n+3}, fx_{2n+2}\right) \leq \frac{\alpha+\beta}{1-\beta} d\left(fx_{2n+2}, fx_{2n+1}\right)$$

bulunur. Böylece, her $n \geq 0$ için $\lambda=\dfrac{\alpha+\beta}{1-\beta}<1$ olmak üzere

$$d\left(fx_{n+1}, fx_{n}\right) \leq \lambda d\left(fx_{n}, fx_{n-1}\right) \leq \ldots \leq \lambda^{n} d\left(fx_{1}, fx_{0}\right)$$

olur. $\forall n>m$ için ise

$$d\left(fx_n, fx_m\right) \le d\left(fx_n, fx_{n-1}\right) + d\left(fx_{n-1}, fx_{n-2}\right) + \ldots + d\left(fx_{m+1}, fx_m\right)$$
$$\le \left(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \ldots + \lambda^m\right) d\left(fx_1, fx_0\right)$$
$$\le \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d\left(fx_1, fx_0\right)$$

elde edilir. X uzayında $\left(fx_n\right)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. Bunun için $c \in \operatorname{int} K$ verilsin. $N_\delta\left(\theta\right) = \left\{y \in B : \left\|y\right\| < \delta\right\}$ şeklinde tanımlı bir küme olmak üzere $c + N_\delta\left(\theta\right) \subset K$ ifadesini sağlayan $\delta > 0$ seçelim. Ayrıca $\forall m \ge N_1$ için $\frac{\lambda^m}{1-\lambda} d\left(fx_1, fx_0\right) \in N_\delta\left(\theta\right)$ olacak şekilde bir N_1 doğal sayısı seçelim. $\forall m \ge N_1$ için $\frac{\lambda^m}{1-\lambda} d\left(fx_1, fx_0\right) \ll c$ olur. Buradan $\forall n > m$ için

$$d\left(fx_n, fx_m\right) \le \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d\left(fx_1, fx_0\right) \ll c$$

yazılabilir. Bu ise $\left(fx_n\right)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam uzay olduğundan $\left(fx_n\right)$ dizisinin yakınsadığı bir $z \in X$ noktası vardır. f dönüşümü alt dizisel yakınsak olduğundan $\left(x_n\right)$ dizisi $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = u$ olan bir $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisine sahiptir. f sürekli bir dönüşüm olduğundan $\lim_{k\to\infty} fx_{n_k} = fu$ ifadesi doğrudur. Konik metrik uzaylarda bir dizinin limitinin tek olmasından $z = fu$ olmalıdır. S ve T dönüşümleri de sürekli birer dönüşüm olduklarından $\lim_{k\to\infty} Sx_{n_k} = Su$ ve $\lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = Tu$ olduğu açıktır. f nin sürekliliğini tekrar kullanarak $\lim_{k\to\infty} fTx_{n_k} = fTu$ ve $\lim_{k\to\infty} fSx_{n_k} = fSu$ ifadelerini elde ederiz. Dolayısıyla, eğer n_k tek ise $\lim_{m\to\infty} fTx_{2m+1} = fTu$ dur. Her $m \ge N_2$ için

$$d\left(fx_{2m}, fu\right) \ll \left[\frac{c}{2}\left(\frac{1-\beta}{\alpha+\beta}\right)\right] \text{ ve } d\left(fx_{2m+1}, fu\right) \ll \left[\frac{c}{2}\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\right]$$

olan $N_2 \in \mathbb{N}$ seçelim. $u = Tu$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
d(fu, fTu) &\le d(fu, fx_{2m+1}) + d(fx_{2m+1}, fTu) \\
&= d(fu, fSx_{2m}) + d(fSx_{2m}, fTu) \\
&\le d(fu, fSx_{2m}) + \alpha d(fx_{2m}, fu) + \beta\left[d(fx_{2m}, fTu) + d(fu, fSx_{2m})\right] \\
&\le d(fu, fx_{2m+1}) + \alpha d(fx_{2m}, fu) \\
&\quad + \beta\left[d(fx_{2m}, fu) + d(fu, fTu) + d(fu, fx_{2m+1})\right] \\
&= (\alpha+\beta) d(fx_{2m}, fu) + (1+\beta) d(fu, fx_{2m+1}) + \beta d(fu, fTu)
\end{aligned}$$

dur. Böylece $\forall m \ge N_2$ için

$$d(fu, fTu) \le \frac{\alpha+\beta}{1-\beta} d(fx_{2m}, fu) + \frac{1+\beta}{1-\beta} d(fu, fx_{2m+1}) \ll c$$

bulunur. Buradan her $i \ge 1$ için $d(fu, fTu) \ll \frac{c}{i}$ yani, $\frac{c}{i} - d(fu, fTu) \in \operatorname{int} K \subset K$ dır. K kapalı olduğundan $-d(fu, fTu) \in K$ ve dolayısıyla $d(fu, fTu) = \theta$ ve $fu = fTu$ bulunur. f bire-bir dönüşüm olduğundan $u = Tu$ olur, bu ise u noktasının T dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu gösterir.

Şimdi n_k çift olsun. $\lim_{m\to\infty} fSx_{2m} = fSu$ dir. (3.1.1) ifadesini ve üçgen eşitsizliğini kullanarak $u = Su$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
d(fSu, fu) &\le d(fSu, fx_{2m+2}) + d(fx_{2m+2}, fu) \\
&= d(fSu, fTx_{2m+1}) + d(fx_{2m+2}, fu) \\
&\le \alpha d(fu, fx_{2m+1}) + \beta\left[d(fu, fTx_{2m+1}) + d(fx_{2m+1}, fSu)\right] + d(fx_{2m+2}, fu) \\
&\le \alpha d(fu, fx_{2m+1}) + \beta\left[d(fu, fx_{2m+2}) + d(fx_{2m+1}, fu) + d(fu, fSu)\right] \\
&\quad + d(fx_{2m+2}, fu)
\end{aligned}$$

$$=(\alpha+\beta)d\left(fx_{2m+1},\, fu\right)+(1+\beta)d\left(fu,\, fx_{2m+2}\right)+\beta d\left(fu,\, fSu\right)$$

dur. Buradan $\forall m \geq N_2$ için

$$d\left(fSu,\, fu\right) \leq \frac{\alpha+\beta}{1-\beta} d\left(fx_{2m+1},\, fu\right)+\frac{1+\beta}{1-\beta} d\left(fu,\, fx_{2m+2}\right) \ll c$$

ve T dönüşümü için uygulanan işlemlerin benzerleri uygulandığında u noktasının S dönüşümü için de bir sabit nokta olduğu görülür. Bu noktanın tek olduğunu göstermek için bir u^* noktasını sabit nokta olarak alalım.

$$\begin{aligned} d\left(fu,\, fu^*\right)=d\left(fSu,\, fTu^*\right) &\leq \alpha d\left(fu,\, fu^*\right)+\beta\left[d\left(fu,\, fTu^*\right)+d\left(fu^*,\, fSu\right)\right] \\ &=(\alpha+2\beta)d\left(fu,\, fu^*\right) \end{aligned}$$

ve $\alpha+2\beta<1$ olduğundan $d\left(fu,\, fu^*\right)=0$ dır. Bu ise $fu=fu^*$ olmasını gerektirir. f dönüşümünün bire-bir olmasından $u=u^*$ olduğu elde edilir. Yani sabit nokta bir tektir.

(f,S) ve (f,T) ikililerini hipotezden Banach çifti olarak kabul edelim. Bu durumda (f,S) ve (f,T) sırasıyla S ve T dönüşümlerinin sabit noktasında değişmelidirler. Bu da $u \in F(S)$ için $fSu=Sfu$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $fu=fSu$ olur ki bu da fu noktasının da S dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterir. Fakat biz bu dönüşümün sabit noktasının tek olduğunu biliyoruz. Bu da $fu=u$ olması anlamına gelir. Bu durum T dönüşümü için de aynıdır. Böylece $u=fu=Tu=Su$, yani u noktası X uzayında f,S ve T dönüşümleri için bir tek ortak sabit noktadır.

Sonuç 3.1.2. (X,d) tam konik metrik uzayında $f,S,T:X\to X$ dönüşümleri sürekli dönüşümler ve f dönüşümü bire-bir olsun. f,S ve T dönüşümleri her $x,y\in X$ ve $\alpha+\beta<1$ özelliğini sağlayan $\alpha,\beta\in[0,1)$ için

$$d(fSx,fTy)\leq \alpha d(fx,fy)+\beta d(fy,fSx) \tag{3.1.2}$$

ifadesini sağlasın. Bu takdirde T ve S bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Üstelik, (f,S) ve (f,T) ikilileri birer Banach çifti ise f,S ve T dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 3.1.1 de uygulanan benzer metotla ispat elde edilir.

Sonuç 3.1.3. (X,d) tam konik metrik uzayında $f,T:X\to X$ dönüşümleri sürekli dönüşümler ve f dönüşümü bire-bir olsun. f ve T dönüşümleri her $x,y\in X$ ve $\alpha+\beta+\gamma<1$ özelliğini sağlayan $\alpha,\beta,\gamma\in[0,1)$ için

$$d(fTx,fTy)\leq \alpha d(fx,fy)+\beta d(fx,fTy)+\gamma d(fy,fTx) \tag{3.1.3}$$

ifadesini sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve ayrıca, (f,T) ikilisi Banach çifti ise bu durumda f ve T dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 3.1.1 de $S=T$ ve $\gamma=\beta$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

3.2. $G-$Konik Metrik Uzaylarda $f-$Daralma Dönüşümleri

Tanım 3.2.1. X herhangi bir metrik uzay olsun. $f,T:X\to X$ iki sürekli dönüşüm ve f dönüşümü bire-bir bir dönüşüm olsun. f ve T dönüşümleri $\forall x,y\in X$ için

$a_i, (i=1,...,5)$ negatif olmayan sabitler ve $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5<1$ olmak üzere

$$d(fTx, fTy) \leq a_1 d(fx, fy) + a_2 d(fx, fTx) + a_3 d(fy, fTy)$$
$$+ a_4 d(fx, fTy) + a_5 d(fTx, fy) \qquad (3.2.1)$$

eşitsizliğinine $f-$Hardy-Rogers daralma dönüşümü denir

Şimdi de $G-$konik metrik uzaylarda $f-$Hardy-Rogers daralma dönüşümleri için ortak sabit nokta teoremlerini verelim.

Teorem 3.2.2. X simetrik, tam $G-$konik metrik uzay ve $K \subset B$, B Banach uzayının normal olmayan bir konisi ve $\operatorname{int} K \neq \varnothing$ olsun. $f, T : X \to X$ iki sürekli dönüşüm ve ayrıca f dönüşümü bire-bir bir dönüşüm olsun. f ve T dönüşümleri, $\forall x, y \in X$ için a, b, c, d, e non negatif sabitler ve $a+b+c+d+e<1$ olmak üzere

$$G(fTx, fTy, fTz) \leq aG(fx, fy, fz) + bG(fx, fTx, fTx) + cG(fy, fTy, fTy)$$
$$+ dG(fx, fTy, fTz) + eG(fTx, fy, fz). \qquad (3.2.2)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir. Eğer (f, T) bir Banach çifti ise bu taktirde f ve T, X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. X uzayında keyfi bir x_0 elemanı alalım. Her bir $n=0,1,2,...$ için $x_{n+1}=Tx_n$ dizisini tanımlayalım. f ve T dönüşümleri (3.2.2) eşitsizliğini sağladığından

$$G(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) = G(fTx_{n-1}, fTx_n, fTx_n) \leq aG(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) + bG(fx_{n-1}, fTx_{n-1}, fTx_{n-1})$$
$$+ cG(fx_n, fTx_n, fTx_n) + dG(fx_{n-1}, fTx_n, fTx_n) + eG(fTx_{n-1}, fx_n, fx_n)$$
$$\leq aG(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) + bG(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) + cG(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1})$$

$$+dG\left(fx_{n-1,} fx_{n+1}, fx_{n+1}\right) + eG\left(fx_{n,} fx_{n}, fx_{n}\right),$$

buradan

$$G\left(fx_{n,} fx_{n+1}, fx_{n+1}\right) \leq \left(a+b+d\right) G\left(fx_{n-1,} fx_{n}, fx_{n}\right) + \left(c+d\right) G\left(fx_{n,} fx_{n+1}, fx_{n+1}\right) \qquad (3.2.3)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$G\left(fx_{n+1,} fx_{n}, fx_{n}\right) = G\left(fTx_{n,} fTx_{n-1}, fTx_{n-1}\right) \leq aG\left(fx_{n,} fx_{n-1}, fx_{n-1}\right) + bG\left(fx_{n,} fTx_{n}, fTx_{n}\right)$$

$$+cG\left(fx_{n-1,} fTx_{n-1}, fTx_{n-1}\right) + dG\left(fx_{n,} fTx_{n-1}, fTx_{n-1}\right) + eG\left(fTx_{n,} fx_{n-1}, fx_{n-1}\right)$$

$$\leq aG\left(fx_{n,} fx_{n-1}, fx_{n-1}\right) + bG\left(fx_{n,} fx_{n+1}, fx_{n+1}\right) + cG\left(fx_{n-1,} fx_{n}, fx_{n}\right)$$

$$+dG\left(fx_{n,} fx_{n}, fx_{n}\right) + eG\left(fx_{n-1,} fx_{n+1}, fx_{n+1}\right)$$

olur ve burada da $G-$metrik fonksiyonunun beşinci özelliğini kullanarak

$$G\left(fx_{n+1,} fx_{n}, fx_{n}\right) \leq \left(a+c+e\right) G\left(fx_{n,} fx_{n-1}, fx_{n-1}\right) + \left(b+e\right) G\left(fx_{n+1,} fx_{n}, fx_{n}\right) \qquad (3.2.4)$$

elde edilir. X uzayının simetrik olmasından $G\left(fx_{n+1,} fx_{n}, fx_{n}\right) = G\left(fx_{n,} fx_{n+1}, fx_{n+1}\right)$ ve $G\left(fx_{n,} fx_{n-1}, fx_{n-1}\right) = G\left(fx_{n-1,} fx_{n}, fx_{n}\right)$ dir. (3.2.3) ve (3.2.4) eşitsizliklerini toplarsak $\lambda = \left(\dfrac{2a+b+c+d+e}{2-\left(b+c+d+e\right)} \right) < 1$ olmak üzere

$$G\left(fx_{n,} fx_{n+1}, fx_{n+1}\right) \leq \lambda G\left(fx_{n-1,} fx_{n}, fx_{n}\right)$$

olur. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$G\left(fx_{n,} fx_{n+1}, fx_{n+1}\right) \leq \lambda G\left(fx_{n-1,} fx_{n}, fx_{n}\right) \leq ... \leq \lambda^{n} G\left(fx_{0,} fx_{1}, fx_{1}\right) \qquad (3.2.5)$$

ifadesi doğru olur. $\left(fx_{n}\right)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstermeliyiz.

Her $m > n$ doğal sayıları için (3.2.5) ifadesini kullanarak

$$
\begin{aligned}
G\left(fx_{n,}\, fx_m,\, fx_m\right) &\leq G\left(fx_{n,}\, fx_{n+1},\, fx_{n+1}\right) + G\left(fx_{n+1,}\, fx_{n+2},\, fx_{n+2}\right) + \ldots + G\left(fx_{m-1,}\, fx_m,\, fx_m\right) \\
&= \left(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots + \lambda^{m-1}\right) G\left(fx_{0,}\, fx_1,\, fx_1\right) \\
&\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} G\left(fx_{0,}\, fx_1,\, fx_1\right)
\end{aligned}
$$

bulunur.

$\theta \ll \varepsilon$ verilsin. $N_\delta(\theta) = \left\{ y \in B : \|y\| < \delta \right\}$ şeklinde tanımlı bir küme olmak üzere $\varepsilon + N_\delta(\theta) \subset K$ ifadesini sağlayan $\delta > 0$ seçelim. Ayrıca $\forall n \geq N_1$ için $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} G\left(fx_0,\, fx_1,\, fx_1\right) \in N_\delta(\theta)$ olacak şekilde bir N_1 doğal sayısı seçelim. $\forall n \geq N_1$ için $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} G\left(fx_0,\, fx_1,\, fx_1\right) \ll \varepsilon$ olur. Buradan $\forall m > n$ için

$$
G\left(fx_n,\, fx_m,\, fx_m\right) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} G\left(fx_0,\, fx_1,\, fx_1\right) \ll \varepsilon
$$

yazılabilir. Bu ise $\left(fx_n\right)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. X tam uzay olduğundan bu uzayda $\left(fx_n\right)$ dizisinin yakınsadığı bir $z \in X$ noktası vardır. f dönüşümü alt dizisel yakınsak olduğundan $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = u$ olacak biçimde $\left(x_n\right)$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. f sürekli olduğundan $\lim\limits_{k\to\infty} fx_{n_k} = fu$ olur. Limitin bir tek olmasından $fu = z$ olur. T dönüşümü de sürekli olduğundan $\lim\limits_{k\to\infty} Tx_{n_k} = Tu$ ve f nin sürekliliğini tekrar kullanarak $\lim\limits_{k\to\infty} fTx_{n_k} = fTu$ bulunur. Böylece $\lim\limits_{k\to\infty} fx_{n_k+1} = fTu$ olur. Her $n_k \geq N_2$ için

$$
G\left(fu,\, fx_{n_k},\, fx_{n_k}\right) \ll \left[\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1-b-e}{a+d+e+1}\right)\right] \text{ ve } G\left(fx_{n_k-1},\, fx_{n_k-1},\, fx_{n_k}\right) \ll \left[\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1-b-e}{a+c+e}\right)\right]
$$

olan $N_2 \in \mathbb{N}$ seçelim. Göstermemiz gereken $u = Tu$ olduğudur. Bunun için (3.2.3) eşitsizliğini ve metriğin beşinci özelliğini kullanacağız.

$$\begin{aligned}
G(fTu, fu, fu) &\leq G\left(fTu, fx_{n_k}, fx_{n_k}\right) + G\left(fx_{n_k}, fu, fu\right) \\
&= G\left(fTu, fTx_{n_k-1}, fTx_{n_k-1}\right) + G\left(fx_{n_k}, fu, fu\right) \\
&\leq aG\left(fu, fx_{n_k-1}, fx_{n_k-1}\right) + bG(fu, fTu, fTu) + cG\left(fx_{n_k-1}, fTx_{n_k-1}, fTx_{n_k-1}\right) \\
&\quad + dG\left(fu, fTx_{n_k-1}, fTx_{n_k-1}\right) + eG\left(fTu, fx_{n_k-1}, fx_{n_k-1}\right) + G\left(fx_{n_k}, fu, fu\right) \\
&\leq aG\left(fu, fx_{n_k-1}, fx_{n_k-1}\right) + bG(fu, fTu, fTu) + cG\left(fx_{n_k-1}, fx_{n_k}, fx_{n_k}\right) \\
&\quad + dG\left(fu, fx_{n_k}, fx_{n_k}\right) + eG\left(fTu, fx_{n_k-1}, fx_{n_k-1}\right) + G\left(fx_{n_k}, fu, fu\right)
\end{aligned}$$

dur. Bu ifadeden bazı hesaplamalar yaparak aşağıdaki sonucu $\forall n_k \geq N_2$ için elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{e}{1-b}\right) G(fTu, fu, fu) &\leq \left(\frac{a+d+e+1}{1-b}\right) G\left(fu, fx_{n_k}, fx_{n_k}\right) \\
&\quad + \left(\frac{a+c+e}{1-b}\right) G\left(fx_{n_k-1}, fx_{n_k-1}, fx_{n_k}\right) \\
&\ll \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $\forall i \geq 1$ tamsayısı için $G(fTu, fu, fu) \ll \frac{\varepsilon}{i}$ yani

$$\frac{\varepsilon}{i} - G(fTu, fu, fu) \in \operatorname{int} K \subset K$$

olur. $i \to \infty$ iken $\frac{\varepsilon}{i} \to 0$ ve K kapalı olduğundan $-G(fTu, fu, fu) \in K$ dır. Koninin $K \cap -K = \varnothing$ özelliğinden $G(fTu, fu, fu) = \theta$ olur bu da $fu = fTu$ demektir. f bire-bir olduğundan $u = Tu$ yani $u \in X$ noktası T dönüşümü için bir sabit noktadır. Bu noktanın bir tek olduğunu gösterelim. $u^* \in X$ noktası T dönüşümünün başka bir sabit noktası olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
G\left(fu, fu^{*}, fu^{*}\right) = G\left(fTu, fTu^{*}, fTu^{*}\right) \\
&\leq aG\left(fu, fu^{*}, fu^{*}\right) + bG\left(fu, fTu, fTu\right) + cG\left(fu^{*}, fTu^{*}, fTu^{*}\right) \\
&+ dG\left(fu, fTu^{*}, fTu^{*}\right) + eG\left(fTu, fu^{*}, fu^{*}\right)
\end{aligned}
$$

$$
G\left(fu, fu^{*}, fu^{*}\right) \leq \left(a+d+e\right)G\left(fu, fu^{*}, fu^{*}\right)
$$

olur ki bu ise $\left(a+d+e\right)<1$ olduğundan $G\left(fu, fu^{*}, fu^{*}\right)=0$ dolayısıyla $fu = fu^{*}$ ve f dönüşümünün bire-bir olmasından $u=u^{*}$ elde edilir. Yani sabit nokta bir tektir.

$\left(f,T\right)$ ikilisinin bir Banach çifti olması durumunda ise dönüşümlerin bir tek ortak sabit noktaya sahip olduklarını gösterelim. $\left(f,T\right)$ bir Banach çifti ise T dönüşümünün sabit noktasında f ile değişmeli dönüşümlerdir. Bu da $u \in F\left(T\right)$ için $fTu = Tfu$ olmasını gerektirir. Buradan $Tfu = fu$ olur dolayısıyla fu noktası T için bir sabit noktadır. Halbuki sabit noktanın bir tek olduğunu biliyoruz. Bu taktirde $fu = u$ olmalıdır. Böylece $fu = u = Tu$ yani f ve T dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptirler.

Sonuç 3.2.3 X simetrik, tam $G-$konik metrik uzay ve $K \subset B$, B Banach uzayının non normal bir konisi ve $\operatorname{int} K \neq \varnothing$ olsun. $f,T : X \to X$ iki sürekli dönüşüm ve ayrıca f dönüşümü bire-bir bir dönüşüm olsun. f ve T dönüşümleri, $\forall x, y \in X$ ve $k<1$ bir sabit olmak üzere

$$
G\left(fTx, fTy, fTz\right) \leq kG\left(fx, fy, fz\right). \tag{3.2.6}
$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Bir önceki teoremde $k = a$ ve $b = c = d = e = 0$ alındığında istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.4. X simetrik, tam $G-$konik metrik uzay ve $K \subset B$, B Banach uzayının non normal bir konisi ve $\operatorname{int} K \neq \varnothing$ olsun. $T : X \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. T dönüşümü a,b,c,d,e non negatif sabitler ve $a+b+c+d+e<1$ olmak üzere

$$G(Tx,Ty,Tz) \leq aG(x,y,z) + bG(x,Tx,Tx) + cG(y,Ty,Ty) + dG(x,Ty,Tz) + eG(Tx,y,z). \tag{3.2.7}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. İlk teoremde I birim dönüşüm olmak üzere $f = I$ alındığında ispat elde edilir.

BÖLÜM 4. KONİK METRİK VE $G-$KONİK METRİK UZAYLARDA $\varphi-$DÖNÜŞÜMLERİ

4.1. $G-$Konik Metrik Uzaylarda $\varphi-$Dönüşümleri

Bu bölümde $G-$ konik metrik uzaylarda $\varphi-$dönüşümlerini inceleyeceğiz. Bu dönüşümler konik metrik uzaylarda Di Bari ve Vetro tarafından 2008 yılında, $G-$ metrik uzaylar için Shatanawi tarafından 2010 yılında çalışılmıştır. Biz de ilk olarak $G-$konik metrik uzaylarda $\varphi-$dönüşümlerini inceleyeceğiz.

Teorem 4.1.1. X bir $G-$konik metrik uzay ve her $x, y, z \in X$ için $T,S : X \to X$ dönüşümleri

$$G\left(Tx,Ty,Tz\right) \leq \varphi\left(G\left(Sx,Sy,Sz\right)\right) \tag{4.1.1}$$

eşitsizliğini sağlasın. $TX \subset SX$ olmak üzere T ile S birer zayıf uyumlu dönüşümler iken eğer TX veya SX, X uzayının tam alt uzayı ise, bu durumda T ve S dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. x_0, X uzayında keyfi bir nokta olsun. $Tx_0 = Sx_1$ olacak şekilde x_1 elemanı seçilsin. $TX \subset SX$ olduğundan böyle bir seçim yapılabilir. Bu şekilde devam edilerek, herhangi bir $x_n \in X$ alındığında her $n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n = Sx_{n+1}$ olacak şekilde $x_{n+1} \in X$ seçilebilir. Bazı n doğal sayıları için $Tx_n = Tx_{n-1}$ ise, $m > n$ olan her $m \in \mathbb{N}$ için $Tx_m = Tx_n$ dir ve böylece $\left(Tx_n\right)$ dizisi bir Cauchy dizisi olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n \neq Tx_{n-1}$ olduğunu kabul edelim. (4.1.1) ifadesinden,

$$G\left(Tx_{n+1},Tx_{n+1},Tx_n\right) \leq \varphi\left(G\left(Sx_{n+1},Sx_{n+1},Sx_n\right)\right)$$

$$= \varphi\left(G\left(Tx_n, Tx_n, Tx_{n-1}\right)\right)$$

$$\leq \varphi^2\left(G\left(Sx_n, Sx_n, Sx_{n-1}\right)\right)$$

$$= \varphi^2\left(G\left(Tx_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_{n-2}\right)\right)$$
$$\vdots$$
$$= \varphi^n\left(G\left(Tx_1, Tx_1, Tx_0\right)\right)$$

elde edilir. $\theta \ll c \in B$ verilsin. $N(\theta + \delta) = \{y \in B : \|y\| < \delta\}$ olmak üzere,

$$c - \varphi(c) + N(\theta + \delta) \subset \operatorname{int} K$$

sağlanacak biçimde δ pozitif reel sayısı seçilsin. Ayrıca, her $m \geq N$ için

$$G\left(Tx_{m+1}, Tx_{m+1}, Tx_m\right) \leq \varphi^m\left(G\left(Tx_1, Tx_1, Tx_0\right)\right) \ll c$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ alınsın. Sonuçta, her $m \geq N$ için

$$G\left(Tx_{m+1}, Tx_{m+1}, Tx_m\right) \ll c$$

olur. $m \geq N$ sabitlensin ve $\forall n \geq m$ için

$$G\left(Tx_m, Tx_{n+1}, Tx_{n+1}\right) \ll c \tag{4.1.2}$$

olduğunu ispatlayalım. $n = m$ iken (4.1.2) sağlansın. Bazı $n \geq m$ doğal sayıları için sağlandığını gösterelim. $G5$ özelliği kullanılırsa

$$G\left(Tx_m, Tx_{n+2}, Tx_{n+2}\right) \leq G\left(Tx_m, Tx_{m+1}, Tx_{m+1}\right) + G\left(Tx_{m+1}, Tx_{n+2}, Tx_{n+2}\right)$$
$$\ll c - \varphi(c) + \varphi\left(G\left(Sx_{m+1}, Sx_{n+2}, Sx_{n+2}\right)\right)$$

$$\leq c-\varphi(c)+\varphi\left(G\left(Tx_m,Tx_{n+1},Tx_{n+1}\right)\right)$$

$$\ll c-\varphi(c)+\varphi(c)=c$$

elde edilir. Buradan $m=n+1$ olduğunda (4.1.2) sağlanır. Tümevarım yolu ile, $\forall m,n\in\mathbb{N}$ için (4.1.2) ifadesinin sağlandığı görülür. Böylece (Tx_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. Kabul edelim ki; TX, X uzayının tam alt uzayı olsun, bu durumda $Tx_n\to w$ ve ayrıca $Sx_n\to w$ olacak şekilde $w\in TX\subset SX$ vardır. X uzayında $Sv=w$ olan bir v elemanı vardır. $Sv=Tv$ olduğunu gösterelim.

$\theta\ll c$ sabitlenip $G(w,Tx_n,Tx_n)\ll\frac{c}{2}$ ve $G(Sx_n,Sv,Sv)\ll\frac{c}{2}$ olan $N\in\mathbb{N}$ seçilsin. $G5$ özelliği ve φ fonksiyonunun birinci özelliği kullanılarak

$$G(w,Tv,Tv)\leq G(w,Tx_n,Tx_n)+G(Tx_n,Tv,Tv)$$

$$\leq G(w,Tx_n,Tx_n)+\varphi\left(G(Sx_n,Sv,Sv)\right)$$

$$<G(w,Tx_n,Tx_n)+G(Sx_n,Sv,Sv)$$

$$\ll\frac{c}{2}+\frac{c}{2}=c.$$

olduğu elde edilir. Buradan, her $i\geq 1$ için $G(w,Tv,Tv)\ll\frac{c}{i}$ dir. $\frac{c}{i}-G(w,Tv,Tv)\in\operatorname{int}K\subset K$ olduğundan her i için, $i\to\infty$ iken $-G(w,Tv,Tv)\in K$ dır. Aynı zamanda $G(w,Tv,Tv)\in K$ idi. Bu ise $G(w,Tv,Tv)=\theta$ olduğunu gösterir ki bu da $Sv=Tv=w$ olmasını gerektirir, yani w, T ve S dönüşümlerinin bir çakışma noktasıdır. w noktasının T ve S dönüşümlerinin ortak bir sabit noktası olduğunu göstermek için dönüşümlerin zayıf uyumluluk özelliklerini kullanmalıyız. $Sv=Tv$ olduğundan, T ve S nin zayıf uyumlu olmasından

$$Tw=TSv=STv=Sw$$

dir. $Sw=Tw=w$ olduğu gösterilmelidir. Eğer $Sw\neq w$ ise, bu durumda (4.1.1) ifadesinden aşağıdaki sonuç bulunur;

$$
\begin{aligned}
G(Tw,Tw,Tv) &\le \varphi\big(G(Sw,Sw,Sv)\big) \\
&< G(Sw,Sw,Sv) \\
&= G(Tw,Tw,Tv)
\end{aligned}
$$

yani, $Tw = w = Sw$; w, T ve S için ortak sabit noktadır.

Son olarak bu sabit noktanın tekliğini göstermek için kabul edelim ki; z noktası T ve S için bir başka sabit nokta olsun. İspat için (4.1.1) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
G(w,w,z) &= G(Tw,Tw,Tz) \\
&\le \varphi\big(G(Sw,Sw,Sz)\big) \\
&< G(Sw,Sw,Sz) = G(w,w,z)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür ki bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla T ve S bir tek ortak sabit noktaya sahip dönüşümlerdir.

Şimdi bu teoremi bir örnek üzerinde görelim.

Örnek 4.1.2. $B = \mathbb{R}$ ve $K = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$ konisini alalım. $X = [1,\infty)$ üzerinde

$$G(x,y,z) = d(x,y) + d(y,z) + d(z,x)$$

$d(x,y) = |x - y|$ alışılmış metrik olmak üzere $\forall x \in X$ için $T,S : X \to X$ dönüşümleri sırasıyla $Tx = x$ ve $Sx = 2x - 1$ olarak ve ayrıca $\forall t \in K$ için $\varphi : K \to K$ dönüşümü ise $\varphi(t) = \frac{2}{3}t$ olarak tanımlansın. Buradan aşağıdaki ifadeleri elde edebiliriz:

1. $T(X) \subset S(X)$,
2. T ve S zayıf uyumlu dönüşümlerdir,

3. (4.1.1) eşitsizliği sağlanır;

$$
\begin{aligned}
G(Tx,Ty,Tz) &= d(Tx,Ty)+d(Ty,Tz)+d(Tx,Tz) \\
&= |Tx-Ty|+|Ty-Tz|+|Tx-Tz| \\
&= |x-y|+|y-z|+|x-z| \\
&\leq \frac{4}{3}\left(|x-y|+|y-z|+|x-z|\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(|2x-2y|+|2y-2z|+|2x-2z|\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(|2x-1-2y+1|+|2y-1-2z+1|+|2x-1-2z+1|\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(|Sx-Sy|+|Sy-Sz|+|Sx-Sz|\right) \\
&= \frac{2}{3}G(Sx,Sy,Sz)
\end{aligned}
$$

$$G(Tx,Ty,Tz) \leq \varphi\big(G(Sx,Sy,Sz)\big).$$

4. $T1 = S1 = 1$.

Böylece yukarıdaki teoremin şartlarının sağlandığı ve ayrıca $x=1$ noktasının T ve S dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası olduğu görülür.

Şimdi Teorem 4.1.1'i, $t_0 > 0$ ve $g:[0,t_0]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere;

$$
\begin{cases}
u'(t) = g\big(t,u(t)\big), & t\in[0,t_0], \\
u(0) = u(t_0).
\end{cases}
\tag{4.1.3}
$$

ile verilen birinci mertebeden periyodik sınır değer problemine uygulayalım.

Örnek 4.1.3. Her $x,y\in\mathbb{R}$ için $\mu < \frac{1}{3}\lambda$ olan $\lambda,\mu>0$ sayıları

$$\left|g(t,y)+\lambda y-\left[g(t,x)-\lambda x\right]\right|\leq \mu\left|y-x\right| \tag{4.1.4}$$

ifadesi sağlanacak şekilde var olsun. Bu durumda (4.1.3) denkleminin bir tek çözümü vardır.

Çözüm. (4.1.3) den

$$\begin{cases} u'(t)+\lambda u(t)=g\left(t,u(t)\right)+\lambda u(t), & t\in\left[0,t_0\right], \\ u(0)=u(t_0) \end{cases}$$

ifadesini yazabiliriz. Bu sınır değer problemi

$$F(t,s)=\begin{cases} \dfrac{e^{\lambda(t_0+s-t)}}{e^{\lambda t_0}-1}, & \left(0\leq s\leq t\leq t_0\right), \\ \dfrac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda t_0}-1}, & \left(0\leq t\leq s\leq t_0\right), \end{cases}$$

olmak üzere,

$$u(t)=\int_0^{t_0}F(t,s)\left[g\left(s,u(s)\right)+\lambda u(s)\right]ds$$

integral denklemine denktir.

$T:C_{\mathbb{R}}^1\left(\left[0,1\right]\right)\to C_{\mathbb{R}}^1\left(\left[0,1\right]\right)$ fonksiyonunu $t\in\left[0,t_0\right]$ iken

$$(Tu)(t)=\int_0^{t_0}F(t,s)\left[g\left(s,u(s)\right)+\lambda u(s)\right]ds$$

ile tanımlayalım. Eğer $u\in C_{\mathbb{R}}^1\left(\left[0,1\right]\right)$, T nin bir sabit noktası ise bu durumda $u\in C_{\mathbb{R}}^1\left(\left[0,1\right]\right)$, (4.1.3) ün bir çözümüdür.

$X=B=C^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ uzayı üzerinde $\|u\|=\|u\|_\infty+\|u'\|_\infty$ normu verilsin ve $K=\{u\in B: u\geq 0\}$ olsun. X üzerinde $f:[0,t_0]\to\mathbb{R}$, $f(t)=e^t$ olacak biçimde

$$d:X\times X\to B,\ d(x,y)=\left(\sup_{t\in[0,t_0]}|x(t)-y(t)|\right)f(t),$$

olmak üzere $G(x,y,z)=d(x,y)+d(y,z)+d(z,x)$ metriği tanımlansın. X bir $G-$ konik metrik uzaydır. Her $\omega\in K$ için $\varphi:K\to K$ fonksiyonu $\varphi(\omega)=\frac{\mu}{\lambda}\omega$ olarak tanımlansın. Bu durumda S birim dönüşüm olmak üzere Teorem 4.1.1 deki $TX\subset SX$, SX uzayının X in tam alt uzayı olması ve T ile S nin zayıf uyumlu olma şartları sağlanır. (4.1.1) daralma şartı da sağlanırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur. Herhangi $u,v,w\in X$ için

$$\begin{aligned}
G(Tu,Tv,Tw)&=d(Tu,Tv)+d(Tv,Tw)+d(Tw,Tu)\\
&=\left(\sup_{t\in[0,t_0]}|(Tu)(t)-(Tv)(t)|\right)e^t+\left(\sup_{t\in[0,t_0]}|(Tv)(t)-(Tw)(t)|\right)e^t\\
&+\left(\sup_{t\in[0,t_0]}|(Tw)(t)-(Tu)(t)|\right)e^t\\
&\leq\left(\sup_{t\in[0,t_0]}\int_0^{t_0}F(t,s)\left|\left[g(s,u(s))+\lambda u(s)-g(s,v(s))+\lambda v(s)\right]\right|ds\right)e^t\\
&+\left(\sup_{t\in[0,t_0]}\int_0^{t_0}F(t,s)\left|\left[g(s,v(s))+\lambda v(s)-g(s,w(s))+\lambda w(s)\right]\right|ds\right)e^t\\
&+\left(\sup_{t\in[0,t_0]}\int_0^{t_0}F(t,s)\left|\left[g(s,w(s))+\lambda w(s)-g(s,u(s))+\lambda u(s)\right]\right|ds\right)e^t\\
&\leq\left(\sup_{t\in[0,t_0]}\int_0^{t_0}F(t,s)\mu|u(s)-v(s)|ds\right)e^t\\
&+\left(\sup_{t\in[0,t_0]}\int_0^{t_0}F(t,s)\mu|v(s)-w(s)|ds\right)e^t
\end{aligned}$$

$$+\left(\sup_{t\in[0,t_0]}\int_0^{t_0} F(t,s)\mu\left|w(s)-u(s)\right|ds\right)e^t$$

$$\leq \mu\left[\left(\sup_{s\in[0,t_0]}\left|u(s)-v(s)\right|\right)e^t+\left(\sup_{s\in[0,t_0]}\left|v(s)-w(s)\right|\right)e^t\right.$$

$$\left.+\left(\sup_{s\in[0,t_0]}\left|w(s)-u(s)\right|\right)e^t\right]\sup_{t\in[0,t_0]}\int_0^{t_0} F(t,s)ds$$

$$=\mu\big(d(u,v)+d(v,w)+d(w,u)\big)\sup_{t\in[0,t_0]}\frac{1}{e^{\lambda t_0}-1}\left(\frac{1}{\lambda}e^{\lambda(t_0+s-t)}\Big|_0^t+\frac{1}{\lambda}e^{\lambda(s-t)}\Big|_t^{t_0}\right)$$

$$=\mu\big(d(u,v)+d(v,w)+d(w,u)\big)\frac{1}{\lambda\left(e^{\lambda t_0}-1\right)}\left(e^{\lambda t_0}-1\right)$$

$$=\frac{\mu}{\lambda}\big(d(Su,Sv)+d(Sv,Sw)+d(Sw,Su)\big)$$

$$=\frac{\mu}{\lambda}G(Su,Sv,Sw)$$

dir. Yani;

$$G(Tu,Tv,Tw)\leq\varphi\big(G(Su,Sv,Sw)\big)$$

olur. Böylece Teorem 4.1.1 in tüm şartları sağlanır. Böylece T ve S bir tek ortak sabit noktaya sahiptirler ve $u\in C^1_{\mathbb{R}}([0,1])$, T bir tek sabit noktasıdır ve (4.1.3) ün tek çözümüdür.

Teorem 4.1.1'de $k\in[0,1)$ olmak üzere $\varphi(t)=kt$ dönüşümünü alarak simetrik bir $G-$konik metrik uzayda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.3. X uzayı simetrik $G-$konik metrik uzay olsun. $T,S:X\to X$ dönüşümleri ise $k\in[0,1)$ olmak üzere $\forall x,y,z\in X$ için

$$G(Tx,Ty,Tz)\leq kG(Sx,Sy,Sz) \tag{4.1.5}$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer $T(X) \subset S(X)$ ve $S(X)$, X uzayının bir tam alt uzayı ise, bu durumda bu dönüşümler X uzayında bir tek çakışma noktasına sahiptir. Ayrıca, eğer T ve S zayıf uyumlu dönüşümler ise, T ve S bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. T ve S dönüşümleri (4.1.5) eşitsizliğini sağlasınlar. $\forall x, y \in X$ için

$$G(Tx, Ty, Ty) \leq kG(Sx, Sy, Sy) \tag{4.1.6}$$

ve

$$G(Ty, Tx, Tx) \leq kG(Sy, Sx, Sx) \tag{4.1.7}$$

sağlanır. X simetrik bir $G-$konik metrik uzay olduğundan (4.1.6) ve (4.1.7) eşitsizliklerini topladığımızda $\forall x, y \in X$ için

$$d_G(Tx, Ty) \leq kd_G(Sx, Sy) \tag{4.1.8}$$

ifadesini elde ederiz. Buradan sonra da bilinen metotlarla ispat elde edilir.

Sonuç 4.1.5. X uzayı simetrik, tam $G-$konik metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü ise $k \in [0,1)$ olmak üzere $\forall x, y, z \in X$ için

$$G(Tx, Ty, Tz) \leq kG(x, y, z) \tag{4.1.9}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Bir önceki teoremde I birim dönüşüm olmak üzere $S = I$ alındığında ispat elde edilir.

Teorem 4.1.6. X uzayı tam $G-$konik metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü

$$G(Tx,Ty,Tz) \le \varphi\big(M(x,y,z)\big) \tag{4.1.10}$$

ifadesini sağlasın. $\forall x,y,z \in X$ için

$$M(x,y,z) \in \{G(x,y,z), G(x,Tx,Tx), G(y,Ty,Ty), G(Tx,y,z)\}$$

alalım. Bu durumda T dönüşümü bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. X uzayında bir x_0 noktası seçelim. $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = Tx_{n-1}$ olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \ne x_{n-1}$ alalım. Böylece aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = G(Tx_{n-1}, Tx_n, Tx_n) \le \varphi\big(M(x_{n-1}, x_n, x_n)\big).$$

Burada

$$\begin{aligned} M(x_{n-1}, x_n, x_n) &\in \{G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(x_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_{n-1}), G(x_n, Tx_n, Tx_n), G(Tx_{n-1}, x_n, x_n)\} \\ &= \{G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(x_{n-1}, x_n, x_n), \quad G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G(x_n, x_n, x_n)\} \\ &= \{G(x_{n-1}, x_n, x_n), G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), \theta\} \end{aligned}$$

dir. Eğer $M(x_{n-1}, x_n, x_n) = G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$ ise

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \le \varphi\big(G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\big)$$

φ fonksiyonunun özelliği kullanılarak
$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) < G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$

yazılabilir ki bu ise doğru değildir. Eğer $M(x_{n-1}, x_n, x_n) = \theta$ ise $G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \le \varphi(\theta) < \theta$ olur bu da bir çelişkidir. Ve son olarak eğer

$M\left(x_{n-1},x_n,x_n\right)=G\left(x_{n-1},x_n,x_n\right)$ alırsak $G\left(x_n,x_{n+1},x_{n+1}\right)\le\varphi\left(G\left(x_{n-1},x_n,x_n\right)\right)$ elde ederiz. Teorem 4.1.1 deki tekniği kullanarak $\left(x_n\right)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu görürüz. X tam olduğundan $\left(x_n\right)$ bu uzayda bir x noktasına yakınsar. Şimdi $u=Tu$ olduğunu göstereceğiz. $n\in\mathbb{N}$ için, $G-$konik metrik fonksiyonunun beşinci özelliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}G\left(u,u,Tu\right)&\le G\left(u,u,x_n\right)+G\left(x_n,x_n,Tu\right)\\&=G\left(u,u,x_n\right)+G\left(Tx_{n-1},Tx_{n-1},Tu\right)\\&\le G\left(u,u,x_n\right)+\varphi\left(M\left(x_{n-1},x_{n-1},u\right)\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}M\left(x_{n-1},x_{n-1},u\right)\in&\left\{G\left(x_{n-1},x_{n-1},u\right),G\left(x_{n-1},Tx_{n-1},Tx_{n-1}\right),G\left(x_{n-1},Tx_{n-1},Tx_{n-1}\right),\right.\\&\left.G\left(Tx_{n-1},x_{n-1},u\right)\right\}\\=&\left\{G\left(x_{n-1},x_{n-1},u\right),G\left(x_{n-1},x_n,x_n\right),G\left(x_{n-1},x_n,u\right)\right\}\end{aligned}$$

olur. $\forall n\ge N_1$ için $G\left(u,u,x_n\right)\ll\frac{c}{2}$ olan bir N_1 doğal sayısı vardır. $M\left(x_{n-1},x_{n-1},u\right)\in\left\{G\left(x_{n-1},x_{n-1},u\right),G\left(x_{n-1},x_n,x_n\right),G\left(x_{n-1},x_n,u\right)\right\}$ ifadesini inceleyelim:

1. Durum. $M\left(x_{n-1},x_{n-1},u\right)=G\left(x_{n-1},x_{n-1},u\right)$

$$\begin{aligned}G\left(u,u,Tu\right)&\le G\left(u,u,x_n\right)+\varphi\left(G\left(x_{n-1},x_{n-1},u\right)\right)\\&<G\left(u,u,x_n\right)+G\left(x_{n-1},x_{n-1},u\right)\\&\ll\frac{c}{2}+\frac{c}{2}=c.\end{aligned}$$

2. Durum. $M\left(x_{n-1},x_{n-1},u\right)=G\left(x_{n-1},x_n,x_n\right)$

$$
\begin{aligned}
G(u,u,Tu) &\leq G(u,u,x_n)+\varphi\big(G(x_{n-1},x_n,x_n)\big)\\
&< G(u,u,x_n)+G(x_{n-1},x_n,x_n)\\
&\ll \frac{c}{2}+\frac{c}{2}=c.
\end{aligned}
$$

3. $M(x_{n-1},x_{n-1},u)=G(x_{n-1},x_n,x_n)$

$$
\begin{aligned}
G(u,u,Tu) &\leq G(u,u,x_n)+\varphi\big(G(x_n,x_{n-1},u)\big)\\
&< G(u,u,x_n)+G(x_n,x_{n-1},u)\\
&\leq G(u,u,x_n)+G(x_n,x_{n-1},x_{n-1})+G(x_n,x_n,u)\\
&\ll c.
\end{aligned}
$$

Bu üç durum için de her $i \geq 1$ için $G(u,u,Tu) \ll \frac{c}{i}$ olur. Yani, $\frac{c}{i}-G(u,u,Tu) \in K$ dır. $i \to \infty$ iken $\frac{c}{i} \to 0$ ve K konisi kapalı olduğundan $-G(u,u,Tu) \in K$, buradan $G(u,u,Tu)=\theta$ ve sonuç olarak $u=Tu$ bulunur. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.7. X bir tam $G-$konik metrik uzay ve T dönüşümü $\forall x,y,z \in X$ için

$$
G(Tx,Ty,Tz) \leq kM(x,y,z) \tag{4.1.11}
$$

ifadesini sağlayan X uzayından kendi üzerine tanımlı bir dönüşüm olsun. Burada

$$
\begin{aligned}
M(x,y,z) \in \big\{&G(x,y,z), G(x,Tx,Tx), G(y,Ty,Ty), G(z,Tz,Tz),\\
&\big[G(x,Ty,Ty)+G(z,Tx,Tx)\big]/2, \big[G(x,Ty,Ty)+G(y,Tx,Tx)\big]/2,\\
&\big[G(y,Tz,Tz)+G(z,Ty,Ty)\big]/2, \big[G(x,Tz,Tz)+G(z,Tx,Tx)\big]/2\big\}
\end{aligned}
$$

ve $0 \leq k < 1$ olan bir sabittir. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. $0 \leq k < 1$ olmak üzere $\varphi(x) = kx$ alınıp, bir önceki teoremdeki metot uygulanırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.8. X simetrik, tam $G-$konik metrik uzay ve T dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ ve $k \in [0,1)$ için

$$m(x,y,z) \in \{G(x,y,z), G(x,Tx,Tx), G(y,Ty,Ty), \\ G(x,Ty,Ty), G(y,Tx,Tx), G(z,Tz,Tz)\} \tag{4.1.12}$$

veya

$$m^*(x,y,z) \in \{G(x,y,z), G(x,x,Tx), G(y,y,Ty), \\ G(x,x,Ty), G(y,y,Tx), G(z,z,Tz)\} \tag{4.1.13}$$

olmak üzere

$$G(Tx,Ty,Tz) \leq k m_\alpha(x,y,z) \tag{4.1.14}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. (4.1.14) eşitsizliğinde $z = y$ alırsak

$$G(Tx,Ty,Ty) \leq k m_\alpha(x,y,y)$$

elde ederiz. Burada

$$m_\alpha(x,y,y) \in \{G(x,y,y), G(x,Tx,Tx), G(y,Ty,Ty), G(x,Ty,Ty), G(y,Tx,Tx)\}$$

veya

$$m_\beta(x,y,y) \in \{G(x,y,y), G(x,x,Tx), G(y,y,Ty), G(x,x,Ty), G(y,y,Tx)\}$$

dır. $d_G(x,y)=2G(x,x,y)$ olduğu kullanılırsa X uzayı konik metrik uzaya dönüşür ve

$$m_\alpha(x,y)\in\{d_G(x,y),d_G(x,Tx),d_G(y,Ty),d_G(x,Ty),d_G(y,Tx)\}$$

dir. $x_0\in X$ ve $x_n=Tx_{n-1}$ olsun. $x_n\neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim.

$$d_G(x_n,x_{n+1})=d_G(Tx_{n-1},Tx_n)\leq km^{**}(x_{n-1},x_n)$$

ve

$$\begin{aligned} m^{**}(x_{n-1},x_n) &\in\{d_G(x_{n-1},x_n),d_G(x_{n-1},Tx_{n-1}),d_G(x_n,Tx_n),d_G(x_{n-1},Tx_n),d_G(x_n,Tx_{n-1})\} \\ &\in\{d_G(x_{n-1},x_n),d_G(x_n,x_{n+1}),d_G(x_{n-1},x_{n+1}),\theta\}. \end{aligned}$$

olur. Buradaki olasılıkları inceleyelim.

1. Durum. $m^{**}(x_{n-1},x_n)=d_G(x_{n-1},x_{n+1})$ ise

$$\begin{aligned} d_G(x_n,x_{n+1}) &\leq kd_G(x_{n-1},x_{n+1}) \\ &\leq k\left[d_G(x_{n-1},x_n)+d_G(x_n,x_{n+1})\right] \\ &\leq \frac{k}{1-k}d_G(x_{n-1},x_n)\leq kd_G(x_{n-1},x_n). \end{aligned}$$

2. Durum. $m^{**}(x_{n-1},x_n)=d_G(x_n,x_{n+1})$ ise $d_G(x_n,x_{n+1})\leq kd_G(x_n,x_{n+1})$ dır ve buradan $d_G(x_n,x_{n+1})(1-k)\leq\theta$ elde edilir ki $k\in[0,1)$ olduğundan bu bir çelişkidir.
3. Durum. $m^{**}(x_{n-1},x_n)=\theta$ ise bu durumda $d_G(x_n,x_{n+1})\leq k\theta$ olur. $x_n\neq x_{n+1}$ olması kabulümüz ile çelişir.

Son olarak

4. Durum. $m^{**}(x_{n-1},x_n)=d_G(x_{n-1},x_n)$ olması durumunu inceleyelim.

$$d_G(x_n, x_{n+1}) \leq k d_G(x_{n-1}, x_n) \leq k^2 d_G(x_{n-2}, x_{n-1})$$
$$\leq \ldots \leq k^n d_G(x_0, x_1).$$

Birinci ve dördüncü durum göz önüne alınırsa (x_n) dizisi bir Cauchy dizisi olarak bulunur. İspatın devamında Teorem 4.1.1 deki metot kullanılırsa istenen sonuç elde edilir. Böylece T dönüşümünün bir tek sabit noktaya sahip olduğu görülür.

4.2. $G-$Konik Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş $\varphi-$Dönüşümleri

Teorem 4.2.1. X bir $G-$konik metrik uzay ve $\{T,S\}$ ikilisi X uzayından kendi üzerine tanımlı genelleştirilmiş $\varphi-$ dönüşümü olsun. $\forall x, y, z \in X$ için

$$u(x,y,z) \in \{G(Sx,Sy,Sz), G(Sx,Tx,Tx), G(Sy,Ty,Ty)\}$$

olmak üzere

$$F(G(Tx,Ty,Tz)) \leq \varphi(F(u(x,y,z))) \tag{4.2.1}$$

sağlansın. $T(X) \subset S(X)$ özelliğini sağlayan T,S zayıf uyumlu dönüşümleri için eğer $T(X)$ veya $S(X)$, X uzayının tam alt uzayı ise, T ve S bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. x_0, X uzayında keyfi bir nokta olsun. $Tx_0 = Sx_1$ olacak şekilde x_1 elemanı seçilsin. $TX \subset SX$ olduğundan böyle bir seçim yapılabilir. Bu şekilde devam edilerek, herhangi bir $x_n \in X$ alındığında her $n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n = Sx_{n+1}$ olacak şekilde $x_{n+1} \in X$ seçilebilir. Bazı n doğal sayıları için $Tx_n = Tx_{n+1}$ ise, $m > n$ olan her $m \in \mathbb{N}$ için $Tx_m = Tx_n$ dir ve böylece (Tx_n) dizisi bir Cauchy dizisi olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n \neq Tx_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. (4.2.1) ifadesinden,

$$F\left(G\left(Sx_{n+1},Sx_{n+2},Sx_{n+2}\right)\right)=F\left(G\left(Tx_n,Tx_{n+1},Tx_{n+1}\right)\right)$$
$$\leq\varphi\Big(F\left(u\left(x_n,x_{n+1},x_{n+1}\right)\right)\Big)$$

dir. Burada

$$u\left(x_n,x_{n+1},x_{n+1}\right)\in\left\{G\left(Sx_n,Sx_{n+1},Sx_{n+1}\right),G\left(Sx_n,Tx_n,Tx_n\right),G\left(Sx_{n+1},Tx_{n+1},Tx_{n+1}\right)\right\}$$
$$=\left\{G\left(Tx_{n-1},Tx_n,Tx_n\right),G\left(Tx_{n-1},Tx_n,Tx_n\right),G\left(Tx_n,Tx_{n+1},Tx_{n+1}\right)\right\}$$
$$=\left\{G\left(Tx_{n-1},Tx_n,Tx_n\right),G\left(Tx_n,Tx_{n+1},Tx_{n+1}\right)\right\}$$

dir. Eğer $u\left(x_n,x_{n+1},x_{n+1}\right)=G\left(Tx_n,Tx_{n+1},Tx_{n+1}\right)$ ise φ fonksiyonunun özelliğinden

$$F\left(G\left(Tx_n,Tx_{n+1},Tx_{n+1}\right)\right)\leq\varphi\Big(F\left(G\left(Tx_n,Tx_{n+1},Tx_{n+1}\right)\right)\Big)$$
$$<F\left(G\left(Tx_n,Tx_{n+1},Tx_{n+1}\right)\right)$$

olur, bu ise doğru değildir. Böylece

$$F\left(G\left(Tx_n,Tx_{n+1},Tx_{n+1}\right)\right)\leq\varphi\Big(F\left(G\left(Tx_{n-1},Tx_n,Tx_n\right)\right)\Big)$$
$$\leq\varphi^2\Big(F\left(G\left(Tx_{n-2},Tx_{n-1},Tx_{n-1}\right)\right)\Big)$$
$$\vdots$$
$$\leq\varphi^n\Big(F\left(G\left(Tx_0,Tx_1,Tx_1\right)\right)\Big)$$

bulunur. Teorem 4.1.1 de kullanılan metotla $\left(Tx_n\right)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna varırız. $T\left(X\right)$ uzayı X in tam alt uzayı olsun. Bu durumda bir $y\in T\left(X\right)\subset S\left(X\right)$, $Tx_n\to y$ ve $Sx_n\to y$ olacak biçimde vardır. X uzayında $Sz=y$ ifadesini sağlayan z elemanı alınsın. $Tz=Sz$ olduğu gösterilmelidir. F fonksiyonunun ikinci özelliği uygulanarak $\varepsilon\gg\theta$ için bir N doğal sayısı $\forall n\geq N$ için

$$F\left(G\left(y,Tx_n,Tx_n\right)\right) \ll \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad F\left(G\left(Sx_n,Sx_n,Sz\right)\right) \ll \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde seçilebilir.

$$F\left(G\left(Tz,y,y\right)\right) \leq F\left(G\left(Tz,Tx_n,Tx_n\right)+G\left(Tx_n,y,y\right)\right) = F\left(G\left(Tx_n,Tx_n,Tz\right)+G\left(Tx_n,y,y\right)\right)$$

(4.2.1) eşitsizliğini uygulayalım:

$$F\left(G\left(Tz,y,y\right)\right) \leq F\left(G\left(Tx_n,y,y\right)\right)+\varphi\left(F\left(u\left(x_n,x_n,z\right)\right)\right).$$

Burada

$$\begin{aligned} u\left(x_n,x_n,z\right) &\in \left\{G\left(Sx_n,Sx_n,Sz\right),G\left(Sx_n,Tx_n,Tx_n\right),G\left(Sx_n,Tx_n,Tx_n\right)\right\} \\ &= \left\{G\left(Tx_{n-1},Tx_{n-1},y\right),G\left(Tx_{n-1},Tx_n,Tx_n\right)\right\} \end{aligned}$$

olur. $Tz=y$ olduğunu göstermek için bu durumları inceleyeceğiz.

1. Durum. Eğer

$u\left(x_n,x_n,z\right)=G\left(Tx_{n-1},Tx_{n-1},y\right)$ ise,

$$\begin{aligned} F\left(G\left(Tz,y,y\right)\right) &\leq F\left(G\left(Tx_n,y,y\right)\right)+\varphi\left(F\left(G\left(Tx_{n-1},Tx_{n-1},y\right)\right)\right) \\ &< F\left(G\left(Tx_n,y,y\right)\right)+F\left(G\left(Tx_{n-1},Tx_{n-1},y\right)\right) \\ &\ll \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \end{aligned}$$

olur.

2. Durum. Eğer

$u\left(x_n,x_n,z\right)=G\left(Tx_{n-1},Tx_n,Tx_n\right)$ ise $\left(Tx_n\right)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu kullanırsak,

$$F\left(G\left(Tz,y,y\right)\right) \leq F\left(G\left(Tx_n,y,y\right)\right)+\varphi\left(F\left(G\left(Tx_{n-1},Tx_n,Tx_n\right)\right)\right)$$

$$< F\left(G\left(Tx_n, y, y\right)\right) + F\left(G\left(Tx_{n-1}, Tx_n, Tx_n\right)\right)$$

$$\ll \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\forall i \geq 1$ için $\frac{\varepsilon}{i} - F\left(G\left(Tz, y, y\right)\right) \in \operatorname{int} K \subset K$ dır. Bu da $i \to \infty$ iken $-F\left(G\left(Tz, y, y\right)\right) \in K$ olmasını gerektirir, buradan da $F\left(G\left(Tz, y, y\right)\right) = \theta$ dır. F in birinci özelliğinden $G\left(Tz, y, y\right) = \theta$, $Tz = y$ bulunur. Buradan da $y = Tz = Sz$ olur. Dolayısıyla y, T ve S dönüşümlerinin bir çakışma noktasıdır. T ve S zayıf uyumlu olduklarından

$$Ty = TSz = STz = Sy$$

dir. Eğer $Sy \neq y$ ise, $F\left(G\left(Ty, Ty, Tz\right)\right) \leq \varphi\left(F\left(u^*\left(y, y, z\right)\right)\right)$ ve

$$u^*\left(y, y, z\right) \in \left\{G\left(Sy, Sy, Sz\right), G\left(Sy, Ty, Ty\right), G\left(Sy, Ty, Ty\right)\right\}$$
$$= \left\{G\left(Ty, Ty, Tz\right)\right\},$$

buradan

$$F\left(G\left(Ty, Ty, Tz\right)\right) \leq \varphi\left(F\left(G\left(Ty, Ty, Tz\right)\right)\right) < F\left(G\left(Ty, Ty, Tz\right)\right)$$

elde edilir bu ise kabulümüz ile çelişir. Böylece $Sy = y = Ty$ olur. O halde y, T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır. Bu noktanın tekliği ise kolaylıkla elde edilir.

Teorem 4.2.2. $\left(X, G\right)$ tam $G-$konik metrik uzayında $f : X \to X$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

$$u(x,y,z) \in \{G(x,y,z), G(x, fx, fx), G(y, fy, fy), G(fx, y, z)\}$$

olmak üzere

$$F\left(G(Tx,Ty,Tz)\right) \leq \varphi\left(F\left(u(x,y,z)\right)\right) \tag{4.2.2}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu taktirde f fonksiyonu X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Bir önceki teoremde I birim fonksiyon olmak üzere $S = I$ alındığında ispat kolaylıkla elde edilir.

4.3. Konik Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş $\varphi -$ Dönüşümleri

Genelleştirilmiş $\varphi -$ dönüşümlerinin tanımında verilen bazı özellikleri teoremlerimizde aşağıdaki şekilde kullanacağız.

i. $\forall \omega \in K - \{\theta\}$ için $\theta < \varphi(\omega) < \omega$ özelliğinin yerine $k \in [0, 1/2)$ olmak üzere $\varphi(\omega) \leq k\omega$ ifadesini kullanacağız.

ii. $\forall \omega_1, \omega_2 \in K$ için $F(\omega_1 + \omega_2) \leq F(\omega_1) + F(\omega_2)$ ifadesi yerine ise $\forall w_1,\ w_2 \in K$ ve $a, b \in (0,1]$ için $F(aw_1 + bw_2) \leq aF(w_1) + bF(w_2)$ özelliğini kullanacağız. Bu özelliği $(F_3)'$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.3.1. (X, d) tam konik metrik uzayında $T,\ S: X \to X$ dönüşümleri her $x, y \in X$ ve $\alpha + 2\beta < 1$ eşitsizliğini sağlayan $\alpha, \beta \in [0,1)$ için

$$F\left(d(Sx,Ty)\right) \leq k\left(F\left(\alpha d(x,y) + \beta\left[d(x,Ty) + d(y,Sx)\right]\right)\right) \tag{4.3.1}$$

eşitsizliğini sağlasın. Ayrıca $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olsun. Bu durumda S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: X uzayında keyfi bir x_0 elemanı alıp $x_{2n+1} = Sx_{2n}$, $x_{2n+2} = Tx_{2n+1}$ dizilerini tanımlayalım. (4.3.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} F\left(d\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right) &= F\left(d\left(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}\right)\right) \\ &\leq kF\left(\alpha d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right) + \beta\left[d\left(x_{2n}, Tx_{2n+1}\right) + d\left(x_{2n+1}, Sx_{2n}\right)\right]\right) \\ &= kF\left(\alpha d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right) + \beta\left[d\left(x_{2n}, x_{2n+2}\right) + d\left(x_{2n+1}, x_{2n+1}\right)\right]\right) \\ &\leq kF\left(\alpha d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right) + \beta\left[d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right) + d\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right]\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\left(F_3\right)'$ özelliğini kullanırsak $\lambda = \dfrac{k\left(\alpha + \beta\right)}{1 - k\beta} < 1$ olmak üzere

$$F\left(d\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right) \leq k\alpha F\left(d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right)\right) + k\beta F\left(d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right) + d\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right)$$

$$F\left(d\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right) \leq k\alpha F\left(d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right)\right) + k\beta\left[F\left(d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right)\right) + F\left(d\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right)\right]$$

$$F\left(d\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right) \leq k\left(\alpha + \beta\right)F\left(d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right)\right) + k\beta F\left(d\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right)$$

$$F\left(d\left(x_{2n+1}, x_{2n+2}\right)\right) \leq \lambda F\left(d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right)\right)$$

olur. Benzer şekilde

$$F\left(d\left(x_{2n+2}, x_{2n+3}\right)\right) \leq \lambda F\left(d\left(x_{2n+1}, x_{2n+3}\right)\right)$$

olduğu da gösterilebilir. Böylece her $n \geq 0$ için

$$F\left(d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right) \leq \lambda^n F\left(d\left(x_0, x_1\right)\right)$$

bulunur. Her $m > n$ için

$$
\begin{aligned}
F\left(d\left(x_n,x_m\right)\right) &\leq F\left(d\left(x_n,x_{n+1}\right)+d\left(x_{n+1},x_{n+2}\right)+\ldots+d\left(x_{m-1},x_m\right)\right)\\
&\leq F\left(d\left(x_n,x_{n+1}\right)\right)+F\left(d\left(x_{n+1},x_{n+2}\right)\right)+\ldots+F\left(d\left(x_{m-1},x_m\right)\right)\\
&\leq\left(\lambda^n+\lambda^{n+1}+\ldots+\lambda^{m-1}\right)F\left(d\left(x_0,x_1\right)\right)\\
&\leq\frac{\lambda^n}{1-\lambda}F\left(d\left(x_0,x_1\right)\right)
\end{aligned}
$$

dir. $\theta \ll c$ verilsin. $N_\delta\left(\theta\right)=\left\{y\in E:\|y\|<\delta\right\}$. olmak üzere $c+N_\delta\left(\theta\right)\subset K$ olan $\delta>0$ sayısını seçelim. Ayrıca her $n\geq N_1$ için $\frac{\lambda^n}{1-\lambda}F\left(d\left(x_0,x_1\right)\right)\in N_\delta\left(\theta\right)$ olan N_1 doğal sayısını seçelim. Buradan her $n\geq N_1$ için $\frac{\lambda^n}{1-\lambda}F\left(d\left(x_0,x_1\right)\right)\ll c$ dir. Böylece her $m>n$ için

$$
F\left(d\left(x_n,x_m\right)\right)\leq\frac{\lambda^n}{1-\lambda}F\left(d\left(x_0,x_1\right)\right)\ll c
$$

bulunur. F in ikinci özelliğinden $n\to\infty$ için $F\left(d\left(x_n,x_m\right)\right)\to\theta$, yani $\left(x_n\right)$ dizisi X uzayında bir Cauchy dizisidir. X uzayının tam olmasından $x_n\to z$ olan bir $z\in X$ noktası vardır. Her $n\geq N_2$ için $F\left(d\left(z,x_{2n}\right)\right)\ll\frac{c}{2}\left[\frac{1-k\beta}{1+k\beta}\right]$ olacak şekilde bir N_2 doğal sayısı seçelim. $z=Tz$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için $\left(F_3\right)'$ özelliğini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
F\left(d\left(z,Tz\right)\right) &\leq F\left(d\left(x_{2n+1},z\right)+d\left(x_{2n+1},Tz\right)\right)\\
&\leq F\left(d\left(x_{2n+1},z\right)\right)+F\left(d\left(Sx_{2n},Tz\right)\right)
\end{aligned}
$$

ve ayrıca (4.3.1) eşitsizliği ile F in ikinci özelliğinden

$$
F\left(d\left(z,Tz\right)\right)\leq F\left(d\left(x_{2n+1},z\right)\right)+kF\left(\alpha d\left(x_{2n},z\right)+\beta\left[d\left(x_{2n},Tz\right)+d\left(z,Sx_{2n}\right)\right]\right)
$$

$$\leq F\left(d\left(x_{2n+1},z\right)\right)+k\alpha F\left(d\left(x_{2n},z\right)\right)+k\beta F\left(d\left(x_{2n+1},z\right)\right)$$
$$+k\beta F\left(d\left(x_{2n},z\right)\right)+k\beta F\left(d\left(z,Tz\right)\right)$$

$$F\left(d\left(z,Tz\right)\right)\leq\frac{1+k\beta}{1-k\beta}F\left(d\left(x_{2n+1},z\right)\right)+\frac{k\left(\alpha+\beta\right)}{1-k\beta}F\left(d\left(x_{2n},z\right)\right)$$

$$F\left(d\left(z,Tz\right)\right)\leq\frac{1+k\beta}{1-k\beta}F\left(d\left(x_{2n+1},z\right)\right)+\frac{1+k\beta}{1-k\beta}F\left(d\left(x_{2n},z\right)\right)$$

elde edilir. $d\left(z,x_{2n}\right)\to\theta$ olması için gerek ve yeter şartın $F\left(d\left(z,x_{2n}\right)\right)\to\theta$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle her $n\geq N_2$ için

$$F\left(d\left(z,x_{2n}\right)\right)\ll\frac{c}{2}\left[\frac{1-k\beta}{1+k\beta}\right]$$

dır. Her $n\geq N_2$ için $F\left(d\left(z,Tz\right)\right)\leq\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\ll c$ sonucunu elde ederiz. Her $m\geq 1$ için $F\left(d\left(z,Tz\right)\right)\ll\frac{c}{m}$, yani $\frac{c}{m}-F\left(d\left(z,Tz\right)\right)\in K$, bulunur. $m\to\infty$ iken limit alınırsa $\frac{c}{m}\to 0$ ve K kapalı olduğundan, $-F\left(d\left(z,Tz\right)\right)\in K$ olur. Ayrıca $F\left(d\left(z,Tz\right)\right)\in K$ dır. Böylece $F\left(d\left(z,Tz\right)\right)=\theta$ ve F fonksiyonunun birinci özelliğinden $d\left(z,Tz\right)=\theta$ olur ki bu da $z=Tz$ olmasını gerektirir. Aynı yolla $z=Sz$ olduğu da gösterilebilir.

Bu noktanın tekliğini göstermek z^* noktasını T ve S dönüşümlerinin başka bir ortak sabit noktası olarak alalım. $Tz^*=z^*=Sz^*$ olsun. $z=z^*$ mıdır?

$$F\left(d\left(z,z^*\right)\right)=F\left(d\left(Sz,Tz^*\right)\right)$$
$$\leq kF\left(\alpha d\left(z,z^*\right)+\beta\left[d\left(z,Tz^*\right)+d\left(z^*,Sz\right)\right]\right)$$

ve buradan da $\left(F_3\right)'$ özelliğini kullanarak

$$F\left(d\left(z,z^*\right)\right)\leq k\left(\alpha+2\beta\right)F\left(d\left(z,z^*\right)\right)$$

bulunur. $k\left(\alpha+2\beta\right)<1$ olduğundan $F\left(d\left(z,z^*\right)\right)=\theta$ olur. F fonksiyonunun birinci özelliğinden $d\left(z,z^*\right)=\theta$ ve sonuçta $z=z^*$ bulunur. Bu da istenilen sonuçtur.

Sonuç 4.3.2. $\left(X,d\right)$ tam konik metrik uzayında $T:X\to X$ dönüşümü her $x,y\in X$ ve $a+b+c<1$ eşitsizliğini sağlayan $a,b,c\in\left[0,1\right)$ için

$$F\left(d\left(Tx,Ty\right)\right)\leq k\left(F\left(a\,d\left(x,y\right)+b\,d\left(x,Ty\right)+c\,d\left(y,Tx\right)\right)\right) \tag{4.3.2}$$

eşitsizliğini sağlasın ve $k\in\left[0,\tfrac{1}{2}\right)$ olsun. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Bir önceki teoremde $S=T$ ve $\beta=\dfrac{b+c}{2}<1$ alındığında istenen sonuç elde edilir.

Örnek 4.3.3. $X=B=C\left(\left[0,1\right]\right)$ ve $K=\left\{u\in B:u\geq 0\right\}$ olsun.

$$\rho:\left[0,1\right]\to\mathbb{R},\ \rho\left(x\right)=e^{-x}$$

olmak üzere

$$d:X\times X\to B$$

$$\left(f,g\right)\to d\left(f,g\right)=\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\right)\rho\left(x\right)$$

ile tanımlansın. Bu durumda Sonuç 4.3.2 deki şartları sağlayan yalnız bir $f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ sürekli bir $f\left(x\right)=\cos x+\int_0^1\dfrac{f\left(y\right)}{e^{x+y+1}}dy$ fonksiyonu vardır.

Çözüm. $T:C([0,1])\to C([0,1])$ dönüşümünü

$$(Tf)(x)=\cos x+\int_0^1 \frac{f(y)}{e^{x+y+1}}dy$$

ile tanımlayalım. $F:K\to K$ fonksiyonu da $F(\omega)=(1/2)\omega$ ile verilsin. $f,g\in C([0,1])$ için

$$\begin{aligned}
F\left(d\left(T(f),T(g)\right)\right)&=\frac{1}{2}d\left(T(f),T(g)\right)\\
&\le \frac{1}{2}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left[\int_0^1 \frac{|f(y)-g(y)|}{e^{x+y+1}}dy\right]\right)\rho(x)\\
&\le \frac{1}{2}\sup_{x\in[0,1]}\left[|f(x)-g(x)|\right]\rho(x)e^{-x}\int_0^1\frac{dy}{e^{y+1}}\\
&\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)d(f,g),\quad \left(0<ka=\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)<1,\, b=c=0\right)\\
&\le kF\left(ad(f,g)+bd\left(f,T(g)\right)+cd\left(g,T(f)\right)\right)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde Sonuç 4.3.2 den $T(f)=f$ olacak biçimde bir tek $f\in C([0,1])$ vardır.

Teorem 4.3.4. (X,d) tam konik metrik uzayında $T,\ S:X\to X$ dönüşümleri her $x,y\in X$ ve $\alpha+2\beta<1$ eşitsizliğini sağlayan $\alpha,\beta\in[0,1)$ ve $k\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ için

$$F\left(d(Sx,Ty)\right)\le k\left(F\left(\alpha d(x,y)+\beta\left[d(x,Sx)+d(y,Ty)\right]\right)\right) \tag{4.3.3}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 4.3.1 deki benzer metot uygulanırsa ispat elde edilir.

Bundan sonra, bu kısımda verilecek olan teoremlerde dönüşümler zayıf uyumlu dönüşümler olarak alınacak ve X uzayının tamlık özelliğine sahip olması kullanılmayacaktır.

Teorem 4.3.5. (X,d) konik metrik uzayında $T,\ S:X\to X$ dönüşümleri her $x,y\in X$ ve $\alpha+2\beta<1$ eşitsizliğini sağlayan $\alpha,\beta\in[0,1)$ ve $k\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ için

$$F\left(d\left(Tx,Ty\right)\right)\le k\left(F\left(\alpha\left[d\left(Sx,Ty\right)+d\left(Sy,Tx\right)\right]+\beta d\left(Sx,Sy\right)\right)\right) \tag{4.3.4}$$

eşitsizliğini sağlasın. Ayrıca, $TX\subset SX$ ve SX, X uzayının tam alt uzayı olsun. Bu durumda T ve S dönüşümleri çakışma noktasına sahiptir. Üstelik bu dönüşümler zayıf uyumlu bir dönüşüm çifti ise bu durumda S ve T dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktası vardır.

İspat. x_0 noktası X uzayında keyfi bir nokta olsun. $TX\subset SX$ olduğundan $Tx_0=Sx_1$ olacak şekilde $x_1\in X$ seçilsin. Bu yolla devam ederek $x_n\in X$ için $Tx_n=Sx_{n+1}$ olan $x_{n+1}\in X$ seçilebilir. (Sx_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
F\left(d\left(Sx_n,Sx_{n+1}\right)\right)&=F\left(d\left(Tx_{n-1},Tx_n\right)\right)\\
&\le kF\left(\alpha\left[d\left(Sx_{n-1},Tx_n\right)+d\left(Sx_n,Tx_{n-1}\right)\right]+\beta d\left(Sx_{n-1},Sx_n\right)\right)\\
&=kF\left(\alpha\left[d\left(Sx_{n-1},Sx_{n+1}\right)+d\left(Sx_n,Sx_n\right)\right]+\beta d\left(Sx_{n-1},Sx_n\right)\right)\\
&\le kF\left(\alpha\left[d\left(Sx_{n-1},Sx_n\right)+d\left(Sx_n,Sx_{n+1}\right)\right]+\beta d\left(Sx_{n-1},Sx_n\right)\right)\\
&\le k\left(\alpha+\beta\right)F\left(d\left(Sx_{n-1},Sx_n\right)\right)+k\alpha F\left(d\left(Sx_n,Sx_{n+1}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$F\left(d\left(Sx_n,Sx_{n+1}\right)\right)\le\lambda F\left(d\left(Sx_{n-1},Sx_n\right)\right)$$

burada $\lambda=\dfrac{k\left(\alpha+\beta\right)}{1-k\alpha}<1$ dir. Böylece $\forall n\ge 0$ için

$$F\left(d\left(Sx_n, Sx_{n+1}\right)\right) \leq \lambda^n F\left(d\left(Sx_0, Sx_1\right)\right)$$

olur. Her $m > n$ için

$$\begin{aligned} F\left(d\left(Sx_n, Sx_m\right)\right) &\leq F\left(d\left(Sx_n, Sx_{n+1}\right) + d\left(Sx_{n+1}, Sx_{n+2}\right) + \ldots + d\left(Sx_{m-1}, Sx_m\right)\right) \\ &\leq F\left(d\left(Sx_n, Sx_{n+1}\right)\right) + F\left(d\left(Sx_{n+1}, Sx_{n+2}\right)\right) + \ldots + F\left(d\left(Sx_{m-1}, Sx_m\right)\right) \\ &\leq \left(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots + \lambda^{m-1}\right) F\left(d\left(Sx_0, Sx_1\right)\right) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} F\left(d\left(Sx_0, Sx_1\right)\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. $\theta \ll c$ verilsin. $N_\delta(\theta) = \{y \in E : \|y\| < \delta\}$. olmak üzere $c + N_\delta(\theta) \subset K$ olan $\delta > 0$ sayısını seçelim. Ayrıca her $n \geq n_1$ için $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} F\left(d\left(Sx_0, Sx_1\right)\right) \in N_\delta(\theta)$ olan n_1 doğal sayısını seçelim. Buradan her $n \geq n_1$ için $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} F\left(d\left(Sx_0, Sx_1\right)\right) \ll c$ dir. Böylece her $m > n$ için

$$F\left(d\left(Sx_n, Sx_m\right)\right) \leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda} F\left(d\left(Sx_0, Sx_1\right)\right) \ll c$$

bulunur. F in ikinci özelliğinden $n \to \infty$ için $F\left(d\left(Sx_n, Sx_m\right)\right) \to \theta$, yani $\left(Sx_n\right)$, X uzayında bir Cauchy dizisidir. SX, X uzayının tam alt uzayı olduğundan $Sx_n \to v = Su$ olan u ve v elemanları X uzayının elemanı olarak vardır. $Su = Tu$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall n \geq N$ için

$$F\left(d\left(v, Tx_n\right)\right) \ll \frac{c}{2}\left[\frac{1-k\alpha}{(1+k\alpha)}\right] \text{ ve } F\left(d\left(Sx_n, Su\right)\right) \ll \frac{c}{2}\left[\frac{1-k\alpha}{k(\alpha+\beta)}\right]$$

olacak biçimde bir N doğal sayısı $c \gg \theta$ için F fonksiyonunun ikinci özelliğinden seçilebilir. Üçgen eşitsizliğini, (4.3.4) ifadesini ve $(F_3)'$ özelliğini kullanırsak her $n \geq N$ için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz;

$$
\begin{aligned}
F\left(d\left(v,Tu\right)\right) &\leq F\left(d\left(v,Tx_n\right)+d\left(Tx_n,Tu\right)\right) \\
&\leq F\left(d\left(v,Tx_n\right)\right)+F\left(d\left(Tx_n,Tu\right)\right) \\
&\leq F\left(d\left(v,Tx_n\right)\right)+kF\left(\alpha\left[d\left(Sx_n,Tu\right)+d\left(Su,Tx_n\right)\right]+\beta d\left(Sx_n,Su\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$F\left(d\left(v,Tu\right)\right) \leq \frac{\left(1+k\alpha\right)}{1-k\alpha}F\left(d\left(v,Tx_n\right)\right)+\frac{k\left(\alpha+\beta\right)}{1-k\alpha}F\left(d\left(Sx_n,Su\right)\right)$$

$$F\left(d\left(v,Tu\right)\right) \ll \frac{\left(1+k\alpha\right)}{1-k\alpha}\frac{c}{2}\left[\frac{1-k\alpha}{\left(1+k\alpha\right)}\right]+\frac{k\left(\alpha+\beta\right)}{1-k\alpha}\frac{c}{2}\left[\frac{1-k\alpha}{k\left(\alpha+\beta\right)}\right] \ll \frac{c}{2}+\frac{c}{2}=c\,.$$

Her $i \geq 1$ için $F\left(d\left(v,Tu\right)\right) \ll \frac{c}{i}$ dir. Buradan $\frac{c}{i}-F\left(d\left(v,Tu\right)\right) \in \operatorname{int} K \subset K$ ve $i \to \infty$ için $\frac{c}{i} \to 0$, ayrıca K kapalı olduğundan $-F\left(d\left(v,Tu\right)\right) \in K$ olur. Aynı zamanda $F\left(d\left(v,Tu\right)\right) \in K$ da olduğundan $F\left(d\left(v,Tu\right)\right)=\theta$ olur. F in birinci özelliğinden $d\left(v,Tu\right)=\theta$ ve dolayısıyla $v=Tu$ olur. $Su=v=Tu$ elde ederiz ki bu da $v \in X$ noktasının bu dönüşümler için bir çakışma noktası olduğunu sonucunu verir. Bu dönüşümlerin zayıf uyumlu olma hipotezini kullanarak v noktasının tek ortak sabit nokta olduğunu göstereceğiz.

$Tv = TSu = STu = Sv$

olduğu dönüşümlerin zayıf uyumluluk özelliğine sahip olmalarından elde edilir.

$Tv = v$ midir? (4.3.4) ifadesinden

$$
\begin{aligned}
F\left(d\left(Tv,v\right)\right)=F\left(d\left(Tv,Tu\right)\right) &\leq k\left(F\left(\alpha\left[d\left(Sv,Tu\right)+d\left(Su,Tv\right)\right]+\beta d\left(Sv,Su\right)\right)\right) \\
&= k\left(F\left(\alpha\left[d\left(Tv,v\right)+d\left(v,Tv\right)\right]+\beta d\left(Tv,v\right)\right)\right) \\
&= k\left(2\alpha+\beta\right)F\left(d\left(Tv,v\right)\right)
\end{aligned}
$$

olur. $k(2\alpha+\beta)<1$ olduğundan $F(d(v,Tv))=\theta$ olmalıdır. Tekrar F in birinci özelliğinden $d(v,Tv)=\theta$, yani $v=Tv$ olur. Buradan $v=Tv=Sv$ dir. v noktası ortak sabit noktadır. Bu noktanın tek olduğunu göstermek için başka bir noktanın v^* noktasının da sabit nokta olduğunu kabul edelim. $Tv^*=v^*=Sv^*$ olsun.

$$\begin{aligned}F\left(d\left(v^*,v\right)\right)=F\left(d\left(Tv^*,Tv\right)\right)&\leq k\left(F\left(\alpha\left[d\left(Sv^*,Tv\right)+d\left(Sv,Tv^*\right)\right]+\beta d\left(Sv^*,Sv\right)\right)\right)\\&=k\left(F\left(\alpha\left[d\left(v^*,v\right)+d\left(v,v^*\right)\right]+\beta d\left(v^*,v\right)\right)\right)\\&=k(2\alpha+\beta)F\left(d\left(v^*,v\right)\right)\end{aligned}$$

dir. Yine $F\left(d\left(v^*,v\right)\right)=\theta$ ve dolayısıyla $v^*=v$ bulunur. Böylece (4.3.4) eşitsizliğini sağlayan bu dönüşümlerin bir tek ortak sabit noktaya sahip oldukları gösterilmiş olur.

Örnek 4.3.6. $X=B=C([0,1])$ ve $K=\{u\in B:u\geq 0\}$ olsun.

$$\rho:[0,1]\to\mathbb{R},\ \rho(x)=e^x$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}&d:X\times X\to B\\&\quad(f,h)\to d(f,h)=\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|f(x)-h(x)\right|\right)\rho(x),\end{aligned}$$

ile tanımlansın. Bu durumda $g,[0,1]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere Teorem 4.3.5 daki şartları sağlayan yalnız bir $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ sürekli $f(x)=g(x)+\int_0^x f(x-t)e^{-t^2}dt$ fonksiyonu vardır.

Çözüm. $T:C([0,1])\to C([0,1])$ dönüşümünü $(Tf)(x)=g(x)+\int_0^x f(x-t)e^{-t^2}dt$

ile tanımlayalım. $F:K\to K$ fonksiyonu da $F(\omega)=(1/2)\omega$ ile verilsin. $f,h\in C([0,1])$ için

$$F\left(d\left(T(f),T(h)\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(T(f),T(h)\right)$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left[\int_0^x\left|f(x-t)-h(x-t)\right|e^{-t^2}dt\right]\right)\rho(x)$$

$$\leq\frac{1}{2}d(f,h)\sup_{x\in[0,1]}\int_0^x e^{-t^2}$$

$$\leq\frac{1}{2}(0.8)d(f,g),\quad \left(0<k\beta=(0.8)<1,\alpha=0\right)$$

$$\leq kF\left(\beta d\left(S(f),S(g)\right)+\alpha\left[d\left(S(f),T(g)\right)+d\left(S(g),T(f)\right)\right]\right)$$

bulunur. Burada S birim dönüşüm, $TX\subset SX$ ve T ile S zayıf uyumlu dönüşümlerdir O halde Teorem 4.3.5 den $T(f)=f$ olacak biçimde bir tek $f\in C([0,1])$ vardır.

Sonuç 4.3.7. (X,d) konik metrik uzayında T, $S:X\to X$ dönüşümleri her $x,y\in X$ ve $\alpha+\beta+\gamma<1$ eşitsizliğini sağlayan $\alpha,\beta,\gamma\in[0,1)$ ve $k\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ için

$$F\left(d(Tx,Ty)\right)\leq k\left(F\left(\alpha d(Sx,Ty)+\beta d(Sy,Tx)+\gamma d(Sx,Sy)\right)\right)\qquad(4.3.5)$$

eşitsizliğini sağlasın. Ayrıca, $TX\subset SX$ ve SX, X uzayının tam alt uzayı olsun. Bu durumda T ve S dönüşümlerinin bir çakışma noktası vardır. Üstelik bu dönüşümler zayıf uyumlu bir dönüşüm çifti ise bu durumda S ve T dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teoremde verilen ispat metodu kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.8. (X,d) konik metrik uzayında $T,\ S, f : X \to X$ dönüşümleri her $x, y \in X$ ve $\alpha+\beta+\gamma<1$ eşitsizliğini sağlayan $\alpha,\beta,\gamma \in [0,1)$ için

$$F\left(d\left(Sx,Ty\right)\right) \le k\left(F\left(\alpha d\left(fx,Ty\right)+\beta d\left(fy,Sx\right)+\gamma d\left(fx,fy\right)\right)\right) \tag{4.3.6}$$

eşitsizliğini sağlasın ve ayrıca $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olsun. Aynı zamanda, $TX \cup SX \subset fX$ ve fX, X uzayının tam alt uzayı olsun. Bu durumda T,S ve f dönüşümleri bir tek çakışma noktasına sahiptir. Üstelik eğer (f,T) ve (f,S) dönüşüm çiftleri zayıf uyumlu ise bu durumda T,S ve f dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. x_0 noktası X uzayının keyfi bir noktası olsun. $x_1 \in X$ noktasını ise $fx_1 = Sx_0$ ve $fx_2 = Tx_1$ olacak şekilde seçelim. Bu şekilde devam ederek seçilen bir $x_n \in X$ noktası için x_{n+1} noktasını

$$fx_{2n+1} = Sx_{2n}$$
$$fx_{2n+2} = Tx_{2n+1}$$

sağlanacak şekilde seçelim. Sonrasında ise (4.3.6) eşitsizliği ile $(F_3)'$ özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
F\left(d\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}\right)\right) &= F\left(d\left(Sx_{2n},Tx_{2n+1}\right)\right)\\
&\le kF\left(\alpha d\left(fx_{2n},Tx_{2n+1}\right)+\beta d\left(fx_{2n+1},Sx_{2n}\right)\right.\\
&\left.+\gamma d\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}\right)\right)\\
&\le k\alpha F\left(d\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}\right)\right)+k\alpha F\left(d\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}\right)\right)\\
&+k\gamma F\left(d\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$F\left(d\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}\right)\right) \le \left[\frac{k(\alpha+\gamma)}{1-k\alpha}\right] F\left(d\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}\right)\right)$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$
\begin{aligned}
F\left(d\left(fx_{2n+2}, fx_{2n+3}\right)\right) &= F\left(d\left(Sx_{2n+2}, Tx_{2n+1}\right)\right) \\
&\leq kF\left(\alpha d\left(fx_{2n+2}, Tx_{2n+1}\right) + \beta d\left(fx_{2n+1}, Sx_{2n+2}\right)\right. \\
&\quad \left. + \gamma d\left(fx_{2n+2}, fx_{2n+1}\right)\right) \\
&\leq k\beta F\left(d\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}\right)\right) + k\beta F\left(d\left(fx_{2n+2}, fx_{2n+3}\right)\right) \\
&\quad + k\gamma F\left(d\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
F\left(d\left(fx_{2n+2}, fx_{2n+3}\right)\right) \leq \left[\frac{k\left(\beta+\gamma\right)}{1-k\beta}\right] F\left(d\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}\right)\right)
$$

olduğu da görülür. Buradan indüksiyonla her bir $n \geq 0$ için

$$
\begin{aligned}
F\left(d\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}\right)\right) &\leq \left[\frac{k\left(\alpha+\gamma\right)}{1-k\alpha}\right] F\left(d\left(fx_{2n}, fx_{2n+1}\right)\right) \\
&\leq \left[\frac{k\left(\alpha+\gamma\right)}{1-k\alpha}\right]\left[\frac{k\left(\beta+\gamma\right)}{1-k\beta}\right] F\left(d\left(fx_{2n-1}, fx_{2n}\right)\right) \\
&\leq \left[\frac{k\left(\alpha+\gamma\right)}{1-k\alpha}\right]\left[\frac{k\left(\beta+\gamma\right)}{1-k\beta}\right]\left[\frac{k\left(\alpha+\gamma\right)}{1-k\alpha}\right] F\left(d\left(fx_{2n-2}, fx_{2n-1}\right)\right) \\
&\leq \ldots \leq \left[\frac{k\left(\alpha+\gamma\right)}{1-k\alpha}\right]\left(\left[\frac{k\left(\beta+\gamma\right)}{1-k\beta}\right]\left[\frac{k\left(\alpha+\gamma\right)}{1-k\alpha}\right]\right)^{n} F\left(d\left(fx_0, fx_1\right)\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
F\left(d\left(fx_{2n+2}, fx_{2n+3}\right)\right) &\leq \left[\frac{k\left(\beta+\gamma\right)}{1-k\beta}\right] F\left(d\left(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}\right)\right) \\
&\leq \ldots \leq \left(\left[\frac{k\left(\beta+\gamma\right)}{1-k\beta}\right]\left[\frac{k\left(\alpha+\gamma\right)}{1-k\alpha}\right]\right)^{n+1} F\left(d\left(fx_0, fx_1\right)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\left[\dfrac{k(\alpha+\gamma)}{1-k\alpha}\right]=\lambda$ ve $\left[\dfrac{k(\beta+\gamma)}{1-k\beta}\right]=\mu$ olsun. $\lambda\mu<1$ olduğu açıktır. $r<s$ için aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir;

$$F\left(d\left(fx_{2r},fx_{2s+1}\right)\right)\leq(1+\lambda)\left[\frac{(\lambda\mu)^r}{1-\lambda\mu}\right]F\left(d\left(fx_0,fx_1\right)\right),$$

$$F\left(d\left(fx_{2r},fx_{2s}\right)\right)\leq(1+\lambda)\left[\frac{(\lambda\mu)^r}{1-\lambda\mu}\right]F\left(d\left(fx_0,fx_1\right)\right),$$

$$F\left(d\left(fx_{2r+1},fx_{2s}\right)\right)\leq(1+\mu)\left[\frac{\lambda(\lambda\mu)^r}{1-\lambda\mu}\right]F\left(d\left(fx_0,fx_1\right)\right).$$

Böylece, $0<p<q$ için $p\to\infty$ iken $r\to\infty$ olan $r<p<q$ vardır ve

$$F\left(d\left(fx_p,fx_q\right)\right)\leq\max\left\{(1+\mu)\left[\frac{\lambda(\lambda\mu)^r}{1-\lambda\mu}\right],(1+\lambda)\left[\frac{(\lambda\mu)^r}{1-\lambda\mu}\right]\right\}F\left(d\left(fx_0,fx_1\right)\right)$$

olur. Buradan eğer $p,q\to\infty$ ise bu durumda

$$\max\left\{(1+\mu)\left[\frac{\lambda(\lambda\mu)^r}{1-\lambda\mu}\right],(1+\lambda)\left[\frac{(\lambda\mu)^r}{1-\lambda\mu}\right]\right\}\to 0$$

ve sonuçta da $p,q\to\infty$ için $F\left(d\left(fx_p,fx_q\right)\right)\to\theta$ olur. F_2 özelliği kullanılırsa (fx_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu sonucunu elde ederiz. fX , X uzayının tam alt uzayı olduğundan $fx_n\to y=fz$ olan $y,z\in X$ vardır. $fz=Sz$ olduğunu göstereceğiz. F_2 özelliğinden $c\gg\theta$ için $F\left(d\left(y,fx_{2n}\right)\right)\ll\dfrac{c}{2}\left[\dfrac{1-k\beta}{1+k\alpha}\right]$ ifadesini sağlayan bir N doğal sayısı $\forall n\geq N$ için seçilsin. Üçgen eşitsizliği, (4.3.6) eşitsizliği ve $(F_3)'$ özelliğinden $\forall n\geq N$ için

$$
\begin{aligned}
F\left(d\left(fz,Sz\right)\right) &\leq F\left(d\left(fz,fx_{2n}\right)+d\left(fx_{2n},Sz\right)\right) \\
&\leq F\left(d\left(fz,fx_{2n}\right)\right)+F\left(d\left(fx_{2n},Sz\right)\right) \\
&\leq F\left(d\left(fz,fx_{2n}\right)\right)+F\left(d\left(Tx_{2n-1},Sz\right)\right) \\
&\leq F\left(d\left(y,fx_{2n}\right)\right)+kF\left(\alpha d\left(y,fx_{2n}\right)\right. \\
&\quad \left.+\beta\left[d\left(fx_{2n-1},y\right)+d\left(fz,Sz\right)\right]+\gamma d\left(y,fx_{2n-1}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F\left(d\left(fz,Sz\right)\right) &\leq \frac{1+k\alpha}{1-k\beta}F\left(d\left(y,fx_{2n}\right)\right)+\frac{k\left(\beta+\gamma\right)}{1-k\beta}F\left(d\left(y,fx_{2n-1}\right)\right) \\
&\leq \frac{1+k\alpha}{1-k\beta}\left(F\left(d\left(y,fx_{2n}\right)\right)+F\left(d\left(y,fx_{2n-1}\right)\right)\right) \\
&\ll c
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $\forall i \geq 1$ için $F\left(d\left(fz,Sz\right)\right) \ll \frac{c}{i}$ dir. Buradan $\frac{c}{i}-F\left(d\left(fz,Sz\right)\right) \in \operatorname{int} K \subset K$ ve $i \to \infty$ için $\frac{c}{i} \to 0$, ayrıca K kapalı olduğundan $-F\left(d\left(fz,Sz\right)\right) \in K$ olur. Aynı zamanda $F\left(d\left(fz,Sz\right)\right) \in K$ da olduğundan $F\left(d\left(fz,Sz\right)\right)=\theta$ olur. F_1 özelliğinden $d\left(fz,Sz\right)=\theta$ ve sonuçta $fz=Sz$ olur. Aynı metotla $F\left(d\left(fz,Tz\right)\right) \leq F\left(d\left(fz,fx_{2n+1}\right)\right)+F\left(d\left(fx_{2n+1},Tz\right)\right)$ ifadesini kullanarak $fz=Tz$ olduğu gösterilir. Bu ise $y=fz=Sz=Tz$ olduğunu yani $y \in X$ noktasının f,T ve S dönüşümleri için bir çakışma noktası olduğu sonucunu verir. f,T ve S dönüşümlerinin çakışma noktasının tek olduğunu göstereceğiz. Bunun için X uzayından başka bir y^* noktasını da bu dönüşümlerin çakışma noktası olarak alalım. Bazı z^* elemanları için

$$y^*=Sz^*=fz^*=Tz^*$$

olsun. Buradan

$$F\left(d\left(y,y^*\right)\right)=F\left(d\left(Sz,Tz^*\right)\right)$$

$$\leq kF\left(\alpha d\left(fz, Tz^*\right) + \beta\left(d\left(fz^*, Sz\right)\right) + \gamma\left(d\left(fz, fz^*\right)\right)\right)$$
$$= kF\left(\left(\alpha+\beta+\gamma\right)d\left(y, y^*\right)\right)$$

ve $(F_3)'$ özelliğini kullanırsak $F\left(d\left(y,y^*\right)\right) \leq k\left(\alpha+\beta+\gamma\right)F\left(d\left(y,y^*\right)\right)$ ifadesini elde ederiz. $k\left(\alpha+\beta+\gamma\right)<1$ olduğundan $F\left(d\left(y,y^*\right)\right)=\theta$ ve F_1 kullanılarak da $y=y^*$ olduğunu görürüz. (f,T) ve (f,S) dönüşüm çiftlerinin zayıf uyumlu oldukları hipotezini kullanarak

$$Ty = Tfz = fTz = fy,$$
$$Sy = Sfz = fSz = fy$$

olur, bu ise $Ty = fy = Sy = w$ olmasını gerektirir. Yani w noktası bir çakışma noktasıdır. Çakışma noktasının tekliğinden $w=y$ olmalıdır. Bu da f,T ve S dönüşümlerinin bir tek ortak sabit noktaya sahip olduklarını gösterir.

BÖLÜM 5. ÇEŞİTLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE DÖNÜŞÜMLERİN P ÖZELLİĞİ

Bu bölümde daha önce A. Azam, M. Arshad (2009), M. Abbas, B. E. Rhoades (2009) ve M. Abbas, G. Jungck (2008), tarafından konik ve $G-$metrik uzaylarda verilen dönüşümleri $G-$konik metrik uzaylara genelleştirerek çeşitli daralma dönüşümleri ile sabit nokta teoremleri elde ettik. Ayrıca bazı dönüşümlerin P özelliğine sahip olduklarını gösterdik.

5.1. $G-$ Konik Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 5.1.1. (X,G) uzayı bir $G-$konik metrik uzay olsun. f,g ve $T:X\to X$ dönüşümleri aşağıdaki şartları sağlasın:

1. $\forall x,y,z\in X$ için $a+b+c+d<1$ olduğunda

$$G(Tx,fy,fz)\leq aG(gx,gy,gz)+bG(gx,Tx,Tx)$$
$$+cG(gy,fy,fy)+dG(gz,fz,fz) \quad (5.1.1)$$

2. $T(X)\cup f(X)\subset g(X)$ ve
3. $g(X)$, X uzayının tam alt uzayı olsun.

Bu durumda f,g ve T dönüşümleri bir tek ortak çakışma noktasına sahiptir.

Ayrıca;

4. $\{f,g\}$ ve $\{T,g\}$ dönüşüm çiftleri zayıf uyumlu dönüşümler ise bu taktirde f,g ve T dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. x_0 noktası X uzayında keyfi bir nokta olmak üzere $gx_1 = Tx_0$ olacak şekilde X uzayından bir x_1 elemanı seçelim. Benzer olarak, $gx_2 = fx_1$ olan $x_2 \in X$ seçelim. Bu şekilde devam ederek X uzayında seçilen bir x_n noktasına karşılık x_{n+1} noktasını (2) özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned} gx_{2k+1} &= Tx_{2k} \\ gx_{2k+2} &= fx_{2k+1} \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

olacak şekilde seçebiliriz. (5.1.1) eşitsizliği sağlandığından

$$\begin{aligned} G\left(gx_{2k+1}, gx_{2k+2}, gx_{2k+2}\right) = G\left(Tx_{2k}, fx_{2k+1}, fx_{2k+1}\right) \\ &\leq aG\left(gx_{2k}, gx_{2k+1}, gx_{2k+1}\right) + bG\left(gx_{2k}, Tx_{2k}, Tx_{2k}\right) \\ &+ cG\left(gx_{2k+1}, fx_{2k+1}, fx_{2k+1}\right) + dG\left(gx_{2k+1}, fx_{2k+1}, fx_{2k+1}\right) \end{aligned}$$

yani;

$$\begin{aligned} G\left(gx_{2k+1}, gx_{2k+2}, gx_{2k+2}\right) &\leq aG\left(gx_{2k}, gx_{2k+1}, gx_{2k+1}\right) + bG\left(gx_{2k}, gx_{2k+1}, gx_{2k+1}\right) \\ &+ cG\left(gx_{2k+1}, gx_{2k+2}, gx_{2k+2}\right) + dG\left(gx_{2k+1}, gx_{2k+2}, gx_{2k+2}\right) \\ &\leq \lambda G\left(gx_{2k}, gx_{2k+1}, gx_{2k+1}\right). \end{aligned}$$

olur. Burada $0 \leq \lambda = \dfrac{a+b}{1-(c+d)} < 1$ dir. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$G\left(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}\right) \leq \lambda G\left(gx_{n-1}, gx_n, gx_n\right) \leq \ldots \leq \lambda^n G\left(gx_0, gx_1, gx_1\right)$$

yazılabilir. $m > n$ iken

$$G\left(gx_n, gx_m, gx_m\right) \leq G\left(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}\right) + G\left(gx_{n+1}, gx_{n+2}, gx_{n+2}\right) + \ldots + G\left(gx_{m-1}, gx_m, gx_m\right)$$

$$=\left(\lambda^{n}+\lambda^{n+1}+\ldots+\lambda^{m-1}\right)G\left(gx_{0},gx_{1},gx_{1}\right)$$
$$\leq\frac{\lambda^{n}}{1-\lambda}G\left(gx_{0},gx_{1},gx_{1}\right)$$

olur. $0\ll\varepsilon$ verildiğinde $\forall n\geq n_{0}$ için $\frac{\lambda^{n}}{1-\lambda}G\left(gx_{0},gx_{1},gx_{1}\right)\ll\varepsilon$ olacak şekilde bir n_{0} doğal sayısı seçelim. Böylece, $m>n>n_{0}$ için $G\left(gx_{n},gx_{m},gx_{m}\right)\ll\varepsilon$ dir. Buradan $\left(gx_{n}\right)$ bir Cauchy dizisidir. Üçüncü şarttan $g\left(X\right)$ in X uzayının tam alt uzayı olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $g\left(X\right)$ de $n\rightarrow\infty$ iken $gx_{n}\rightarrow v$ olan bir v elemanı vardır. Sonuçta X uzayında ise $gu=v$ olacak şekilde bir u noktası vardır. $fu=gu$ olduğunu göstermeliyiz. $\forall n\geq n_{1}$ için bir $n_{1}\in\mathbb{N}$ sayısını aşağıdakiler sağlanacak biçimde seçelim.

$$G\left(gu,gx_{2n+1},gx_{2n+1}\right)\ll\frac{\varepsilon}{3}\left(1-\left(c+d\right)\right),$$
$$G\left(gx_{2n},gu,gu\right)\ll\frac{\varepsilon}{3a}\left(1-\left(c+d\right)\right),$$
$$G\left(gx_{2n},gx_{2n+1},gx_{2n+1}\right)\ll\frac{\varepsilon}{3b}\left(1-\left(c+d\right)\right).$$

Buradan

$$G\left(gu,fu,fu\right)\leq G\left(gu,gx_{2n+1},gx_{2n+1}\right)+G\left(gx_{2n+1},fu,fu\right)$$
$$=G\left(gu,gx_{2n+1},gx_{2n+1}\right)+G\left(Tx_{2n},fu,fu\right)$$

ve (5.1.1) eşitsizliğini kullanırsak

$$G\left(gu,fu,fu\right)\leq G\left(gu,gx_{2n+1},gx_{2n+1}\right)+aG\left(gx_{2n},gu,gu\right)+bG\left(gx_{2n},Tx_{2n},Tx_{2n}\right)$$
$$+cG\left(gu,fu,fu\right)+dG\left(gu,fu,fu\right)$$
$$\leq G\left(gu,gx_{2n+1},gx_{2n+1}\right)+aG\left(gx_{2n},gu,gu\right)+bG\left(gx_{n},gx_{2n+1},gx_{2n+1}\right)$$

$$+(c+d)G(gu, fu, fu)$$

olur. Bu ise $\forall n \geq n_1$ için

$$G(gu, fu, fu) \leq \frac{1}{1-(c+d)}G(gu, gx_{2n+1}, gx_{2n+1}) + \frac{a}{1-(c+d)}G(gx_{2n}, gu, gu)$$
$$+\frac{b}{1-(c+d)}G(gx_{2n}, gx_{2n+1}, gx_{n+1})$$
$$\ll \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

olmasını gerektirir. Bunun sonucu olarak $\forall m \geq 1$ doğal sayısı için $G(gu, fu, fu) \ll \frac{\varepsilon}{m}$ olur. Dolayısıyla $\forall m \geq 1$ için $\frac{\varepsilon}{m} - G(gu, fu, fu) \in \operatorname{int} K \subset K$ olur. $m \to \infty$ iken $\frac{\varepsilon}{m} \to 0$ ve K konisi kapalı olduğundan, $-G(gu, fu, fu) \in K$ olur. $G(gu, fu, fu) \in K$ olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı, $G(gu, fu, fu) = \theta$, yani $gu = fu = v$ dir. Benzer şekilde $gu = Tu$ olduğunu göstermek için (5.1.1) eşitsizliğini ve $G(Tu, gu, gu) = G(Tu, fu, fu)$ olduğunu kullanacağız.

$$G(Tu, gu, gu) = G(Tu, fu, fu) \leq aG(gu, gu, gu) + bG(gu, Tu, Tu)$$
$$+cG(gu, fu, fu) + dG(gu, fu, fu)$$
$$\leq bG(fu, Tu, Tu) = bG(Tu, Tu, fu)$$
$$\leq b\left[G(Tu, fu, fu) + G(fu, Tu, fu)\right]$$
$$(1-2b)G(Tu, fu, fu) \leq \theta$$

olur. Bu ise $G(Tu, fu, fu) = \theta$ olmasını gerektirir. Yani, $fu = Tu$ dur. Buradan $gu = fu = Tu = v$ dir ki bu f, g ve T dönüşümlerinin X uzayında ortak bir çakışma noktasına sahip olduklarını gösterir. Bu dönüşümlerin X içindeki çakışma noktalarının bir tek olduğunu göstermeliyiz. Bunun için bazı $u^* \in X$ için X de başka bir çakışma noktası v^* elemanını

$$gu^* = fu^* = Tu^* = v^*$$

olacak şekilde seçelim. Buradan

$$G\left(v^*, v, v\right) = G\left(Tv^*, fv, fv\right) \leq aG\left(gv^*, gv, gv\right) + bG\left(gv^*, Tv, Tv\right) + \left(c+d\right)G\left(gv, fv, fv\right)$$

olur. Bundan dolayı $v = v^*$ olduğu kolaylıkla görülür. $\{T, g\}$ ve $\{f, g\}$ dördüncü şarttan birer zayıf uyumlu dönüşümlerdir. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$gv = gfu = fgu = fv$$
$$Tv = Tgu = gTu = gv\,.$$

Bu $gv = fv = Tv = w$ olmasını gerektirir. Bu yüzden w noktası f, g ve T dönüşümlerinin çakışma noktasıdır. Ancak çakışma noktasının tekliğinden $v = w$ dir. “f, g zayıf uyumlu dönüşümler iken bir tek çakışma noktasına sahipseler bu takdirde bu nokta bu dönüşümlerin tek ortak sabit noktası olur” önermesinden v noktasının f, g ve T dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası olduğunu elde ederiz.

Teorem 5.1.2. X bir $G-$konik metrik uzay ve f ve g aşağıdaki şartları sağlayan $f, g : X \to X$ birer dönüşüm olsun:

1. $\forall x, y, z \in X$ için $a \in \left[0, 1/4\right)$ bir sabit olmak üzere

$$G\left(fx, fy, fz\right) \leq a\left\{G\left(fx, gy, gz\right) + G\left(gx, fy, fz\right) + G\left(fx, gx, gx\right) + G\left(fy, gy, gy\right)\right\} \tag{5.1.3}$$

olsun.

2. $f\left(X\right) \subset g\left(X\right)$ ve

3. $g(X)$, X uzayının tam alt uzayı olsun.

Bu durumda f ve g bir tek çakışma noktasına sahiptir. Ayrıca,

4. $\{f,g\}$ zayıf uyumlu bir dönüşüm çifti ise f ve g bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 5.1.1 de kullanılan metotla ispat elde edilir.

Bu teoremle ilgili bir örnek verelim.

Örnek 5.1.3. $B=\mathbb{R}$ ve $K=\{x\in B : x\geq 0\}$ bir koni olsun. $X=[0,1]$ ve $G: X\times X\times X \to B$ fonksiyonu $d(x,y)=|x-y|$ olmak üzere

$$G(x,y,z)=d(x,y)+d(y,z)+d(z,x)$$

ile tanımlansın. (X,G) bir $G-$konik metrik uzaydır. $\forall x\in X$ için

$$f: X\to X \qquad\qquad g: X\to X$$
$$x\to fx=\frac{x}{16} \qquad\qquad x\to gx=\frac{x}{2}$$

olsun. Buradan

1. f,g zayıf uyumlu dönüşümlerdir,
2. $f(X)\subset g(X)$ ve $g(X)$, X uzayının tam alt uzayıdır,
3. $G(fx,fy,fz)=d(fx,fy)+d(fy,fz)+d(fz,fx)$
$$=\frac{1}{16}\{|x-y|+|y-z|+|z-x|\}.$$

Bu eşitlikten

$$\frac{1}{16}\{|x-y|+|y-z|+|z-x|\}=\frac{1}{8}\left\{\left|\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right|+\left|\frac{y}{2}-\frac{z}{2}\right|+\left|\frac{z}{2}-\frac{x}{2}\right|\right\}$$

$$\leq \frac{1}{8}\left\{\left|\frac{x}{2}-\frac{y}{8}\right|+\left|\frac{y}{8}-\frac{y}{2}\right|+\left|\frac{y}{2}-\frac{z}{2}\right|+\left|\frac{z}{2}-\frac{x}{8}\right|\right.$$

$$+\left|\frac{x}{8}-\frac{x}{2}\right|+\left|\frac{x}{2}-\frac{x}{8}\right|+\left|\frac{x}{8}-\frac{y}{2}\right|+\left|\frac{y}{2}-\frac{y}{2}\right|$$

$$\left.+\left|\frac{y}{2}-\frac{y}{8}\right|+\left|\frac{y}{8}-\frac{z}{8}\right|+\left|\frac{z}{8}-\frac{x}{2}\right|+\left|\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right|\right\}$$

yani,

$$G\left(fx, fy, fz\right) \leq \frac{1}{8}\left\{G\left(fx, gy, gz\right)+G\left(gx, fy, fz\right)+G\left(fx, gx, gx\right)+G\left(fy, gy, gy\right)\right\},$$

4. $f0 = g0 = 0$

bulunur.

Yukarıdaki teoremin şartları sağlandığından, f ve g dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir ve bu nokta 0 noktasıdır.

Teorem 5.1.4. (X,G) bir $G-$konik metrik uzay ve $f,g,T : X \to X$ dönüşümleri $\forall x,y,z \in X$ için $a \in [0,1/4)$ olmak üzere

$$G\left(Tx, fy, fz\right) \leq a\left\{G\left(Tx, gy, gz\right)+G\left(gx, fy, fz\right)+G\left(Tx, gx, gx\right)+G\left(fy, gy, gy\right)\right\} \qquad (5.1.4)$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer $T(X) \cup f(X) \subset g(X)$ ve $g(X)$, X uzayının tam alt uzayı ise f,g ve T bir tek çakışma noktasına sahiptir. Ayrıca, $\{f,g\}$ ve $\{T,g\}$ zayıf uyumlu dönüşüm çiftleri ise f,g ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 5.1.1 deki aynı teknikle ispat elde edilir.

Teorem 5.1.5. (X,G) bir $G-$konik metrik uzay ve $f,g,T : X \to X$ dönüşümleri $\forall x,y,z \in X$ için $a \in [0,1/2)$ olmak üzere

$$G(Tx, fy, fy) \leq a\{G(gx, fy, fy) + G(gy, Tx, Tx)\} \tag{5.1.5}$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer $T(X) \cup f(X) \subset g(X)$ ve $g(X)$, X uzayının tam alt uzayı ise f, g ve T bir tek çakışma noktasına sahiptir. Ayrıca, $\{f, g\}$ ve $\{T, g\}$ zayıf uyumlu dönüşüm çiftleri ise f, g ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 5.1.1 deki benzer ispatla istenen sonuç elde edilir.

Örnek. $B = \mathbb{R}^2$ ve $K = \{(x, y) \in B : x, y \geq 0\}$ bir koni olsun. $X = [0,1]$ ve $G : X \times X \times X \to B$ fonksiyonu $d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$ olmak üzere

$$G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$$

ile tanımlansın. (X, G) bir $G-$konik metrik uzaydır. $\forall x \in X$ için

$$\begin{array}{lll} f : X \to X & g : X \to X & T : X \to X \\ \quad x \to fx = \dfrac{x}{8} & \quad x \to gx = \dfrac{x}{2} & \quad x \to Tx = \dfrac{x}{4} \end{array}$$

olsun. Buradan

1. f, g zayıf uyumlu dönüşümlerdir,
2. $T(X) \cup f(X) \subset g(X)$ ve $g(X)$; X uzayının tam alt uzayıdır,
3. $G(Tx, fy, fy) = d(Tx, fy) + d(fy, fy) + d(fy, Tx)$

$$= (2|Tx - fy|, 2\alpha|Tx - fy|)$$

$$= \frac{1}{4}(|2x - y|, \alpha|2x - y|),$$

ve

$$G(gx, fy, fy) = d(gx, fy) + d(fy, fy) + d(fy, gx)$$

$$=\left(2\left|gx-fy\right|,2\alpha\left|gx-fy\right|\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left|4x-y\right|,\alpha\left|4x-y\right|\right),$$

$$G\left(gy,Tx,Tx\right)=d\left(gy,Tx\right)+d\left(Tx,Tx\right)+d\left(Tx,gy\right)$$

$$=\left(2\left|gy-Tx\right|,2\alpha\left|gy-Tx\right|\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left|4y-2x\right|,\alpha\left|4y-2x\right|\right).$$

$$G\left(gx,fy,fy\right)+G\left(gy,Tx,Tx\right)=\frac{1}{4}\left(\left(\left|4x-y\right|+\left|4y-2x\right|\right),\alpha\left(\left|4x-y\right|+\left|4y-2x\right|\right)\right).$$

Buradan,

$$G\left(Tx,fy,fy\right)=\frac{1}{4}\left(\left|2x-y\right|,\alpha\left|2x-y\right|\right)$$

$$\leq\frac{1}{4}\left(\left|6x-y\right|,\alpha\left|6x-y\right|\right)$$

$$\leq\frac{1}{4}\left(\left|y-2x-4x+4y\right|,\alpha\left|y-2x-4x+4y\right|\right)$$

$$\leq\frac{1}{4}\left(\left|4x-y\right|+\left|4y-2x\right|,\alpha\left|4x-y\right|+\left|4y-2x\right|\right)$$

$$G\left(Tx,fy,fy\right)\leq\frac{1}{4}\left(G\left(gx,fy,fy\right)+G\left(gy,Tx,Tx\right)\right)$$

olur. $a=\frac{1}{4}\in\left[0,1/2\right)$ dir.

4. $T0=f0=g0=0$.

Teoremin tüm şartları sağlandığından f,g ve T dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir ve bu nokta 0 noktasıdır.

Teorem 5.1.6. X bir tam $G-$konik metrik uzay olsun. $f:X\rightarrow X$ dönüşümü $\forall x,y,z\in X$ için ve $a,b,c,d\in\left[0,1\right)$, $a+b+c+d<1$ olmak üzere

$$G(fx, fy, fz) \le aG(x,y,z) + bG(x, fx, fx) + cG(y, fy, fy) + dG(z, fz, fz) \tag{5.1.6}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda f bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. x_0, X de keyfi bir nokta olsun.

$$x_n = fx_{n-1} \tag{5.1.7}$$

şeklinde bir dizi tanımlansın. $G-$metriğinin özelliklerini ve (5.1.6) ifadesini kullanarak aşağıdaki sonuçları elde ederiz;

$$\begin{aligned} G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) &= G(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) \\ &\le aG(x_{n-1}, x_n, x_n) + bG(x_{n-1}, x_n, x_n) \\ &+ cG(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + dG(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &= (a+b)G(x_{n-1}, x_n, x_n) + (c+d)G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \end{aligned}$$

ve $\lambda = \dfrac{a+b}{1-(c+d)} < 1$ olmak üzere

$$G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \le \lambda G(x_{n-1}, x_n, x_n) \le \lambda^2 G(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}) \le \ldots \le \lambda^n G(x_0, x_1, x_1)$$

elde edilir. $m > n$ için

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_m) &\le G(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + G(x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+3}) \\ &+ \ldots + G(x_{m-1}, x_m, x_m) \\ &\le (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \ldots + \lambda^{m-1}) G(x_0, x_1, x_1) \\ &\le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} G(x_0, x_1, x_1) \end{aligned}$$

olur. X uzayında $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\theta \ll c$ verilsin. $N_\delta(\theta) = \{y \in B : \|y\| < \delta\}$ şeklinde tanımlı bir küme olmak üzere $c + N_\delta(\theta) \subset K$ ifadesini sağlayan $\delta > 0$ seçelim. Ayrıca $\forall n \geq N_1$ için $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} G(x_0, x_1, x_1) \in N_\delta(\theta)$ olacak şekilde bir N_1 doğal sayısı seçelim. $\forall n \geq N_1$ için $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} G(x_0, x_1, x_1) \ll c$ olur. Buradan $\forall m > n$ için

$$G(x_n, x_m, x_m) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} G(x_0, x_1, x_1) \ll c$$

yazılabilir. Bu ise (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam uzay olduğundan bu dizinin yakınsadığı bir $u \in X$ noktası vardır. Bu noktanın f dönüşümünün sabit noktası olduğunu göstermeliyiz. $fu = u$ eşitliği sağlanır mı? (5.1.6) eşitsizliği ve metriğin beşinci özelliklerini kullanarak bu sonucu elde edeceğiz. $0 \ll \varepsilon$ olan $\varepsilon \in B$ verilsin ve $\forall n \geq n_1$ için bir n_1 doğal sayısını aşağıdaki ifadeler sağlanacak şekilde seçelim.

$$G(u, x_n, x_n) \ll \frac{\varepsilon}{3}\left(1-(c+d)\right), \quad G(x_{n-1}, u, u) \ll \frac{\varepsilon}{3a}\left(1-(c+d)\right),$$
$$G(x_{n-1}, x_n, x_n) \ll \frac{\varepsilon}{3b}\left(1-(c+d)\right).$$

Buradan

$$\begin{aligned} G(u, fu, fu) &\leq G(u, x_n, x_n) + G(x_n, fu, fu) \\ &= G(u, x_n, x_n) + G(fx_{n-1}, fu, fu) \end{aligned}$$

ve (5.1.6) eşitsizliğinden

$$G(u, fu, fu) \leq G(u, x_n, x_n) + aG(x_{n-1}, u, u) + bG(x_{n-1}, fx_{n-1}, fx_{n-1})$$

$$+(c+d)G(u, fu, fu)$$

olur. Bu ise $\forall n \geq n_1$ için

$$G(u, fu, fu) \leq \frac{1}{1-(c+d)}G(u, x_n, x_n) + \frac{a}{1-(c+d)}G(x_{n-1}, u, u)$$
$$+\frac{b}{1-(c+d)}G(x_{n-1}, x_n, x_n)$$
$$\ll \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

demektir. Bu sonuçtan hareketle her $k \geq 1$ doğal sayısı için $G(u, fu, fu) \ll \frac{\varepsilon}{k}$ dır. Dolayısıyla, $\forall k \geq 1$ için $\frac{\varepsilon}{k} - G(u, fu, fu) \in \operatorname{int} K \subset K$ olur. K kapalı olduğundan $k \to \infty$ için $-G(u, fu, fu) \in K$ olur. $G(u, fu, fu) \in K$ ifadesi de doğru olduğundan $G(u, fu, fu) = \theta$ ve metriğin birinci özelliğinden $u = fu$ elde ederiz. Yani $u \in X$ noktası f dönüşümünün sabit noktasıdır. Bu noktanın tekliğini göstermek için $v \in X$ noktasının da f in başka bir sabit noktası olduğunu kabul edelim. (5.1.6) eşitsizliğinden

$$G(v, u, u) = G(fv, fu, fu)$$
$$\leq aG(v, u, u) + bG(v, fv, fv) + (c+d)G(u, fu, fu)$$
$$= (1-a)G(v, u, u)$$

dır. Bu da $u = v$ olması yani u nun tek bir sabit nokta olması demektir. Böylece istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 5.1.7. X bir tam $G-$konik metrik uzay olsun. $f: X \to X$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ için $a \in [0, 1/4)$ olmak üzere

$$G(fx, fy, fz) \le a\{G(fx, y, z) + G(x, fy, fz) + G(x, fx, fx) + G(y, fy, fy)\} \quad (5.1.8)$$

eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda f dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 5.1.6 da kullanılan metotla ispat kolaylıkla elde edilir.

5.2. P **Özelliğine Sahip Dönüşümler**

Önceki teoremlerde dönüşümlerin sabit noktalarının var ve tek olduğunu göstermiştik. Burada ise bu dönüşümlerin P özelliğine sahip olup olmadıklarını araştıracağız.

Teorem 5.2.1 X bir tam $G-$konik metrik uzay ve $f : X \to X$ dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ için ve $a, b, c, d \in [0,1)$, $a + b + c + d < 1$ olmak üzere (5.1.6) eşitsizliğini sağlasın. Bu takdirde f, P özelliğine sahip bir dönüşümdür.

İspat. Teorem 5.1.6 dan $F(f) \ne \varnothing$ dir. Yani f dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir. $F(f) = F(f^n)$ olduğunu, f dönüşümünün P özelliğine sahip olduğunu göstereceğiz. $u \in F(f)$ ise $u \in F(f^n)$ olduğunu biliyoruz. Şimdi f dönüşümü için $u \in F(f^n)$ iken $u \in F(f)$ midir? sorusunu cevaplayacağız. Kabul edelim ki $u \in F(f^n)$ olsun. (5.1.6) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} G(u, fu, fu) = G(f^n u, f^{n+1} u, f^{n+1} u) &= G(f(f^{n-1} u), f(f^n u), f(f^n u)) \\ &\le aG(f^{n-1} u, f^n u, f^n u) + bG(f^{n-1} u, f^n u, f^n u) \\ &\quad + (c+d) G(f^n u, f^{n+1} u, f^{n+1} u) \end{aligned}$$

$$G(f^n u, f^{n+1} u, f^{n+1} u) \le \frac{a+b}{1-(c+d)} G(f^{n-1} u, f^n u, f^n u)$$

olur. $\lambda = \dfrac{a+b}{1-(c+d)} < 1$ denirse

$$G(u, fu, fu) = G\left(f^n u, f^{n+1}u, f^{n+1}u\right) \leq \lambda G\left(f^{n-1}u, f^n u, f^n u\right)$$
$$\leq \lambda^2 G\left(f^{n-2}u, f^{n-1}u, f^{n-1}u\right) \leq \ldots \leq \lambda^n G(u, fu, fu)$$

bulunur. $0 \ll \varepsilon \in B$ verilsin. $n \to \infty$ iken $\lambda^n \to 0$ olduğundan $G(u, fu, fu) \ll \varepsilon$ elde ederiz. $\forall k \geq 1$ doğal sayısı için $G(u, fu, fu) \ll \dfrac{\varepsilon}{k}$, yani $\dfrac{\varepsilon}{k} - G(u, fu, fu) \in \operatorname{int} K \subset K$ dır. $k \to \infty$ için $\dfrac{\varepsilon}{k} \to 0$ ve K kapalı olduğundan $-G(u, fu, fu) \in K$ olur. Aynı zamanda $G(u, fu, fu) \in K$ olduğu da bilindiğinden K konisinin özelliğinden $G(u, fu, fu) = 0$ ve sonuçta da $u = fu$ dur. Yani f dönüşümü P özelliğine sahiptir.

Teorem 5.2.2. X bir tam $G-$konik metrik uzay olsun. $f : X \to X$ dönüşümü de $\forall x, y, z \in X$ için $a \in [0, 1/4)$ olmak üzere (5.1.8) eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda f dönüşümü P özelliğine sahiptir.

İspat. Teorem 5.2.1 de uygulanan metot kullanılarak ispat elde edilir.

Konik metrik uzayda $f-$daralma dönüşümleri için P özelliğinin sağlandığını gösterelim.

Teorem 5.2.3. (X, d) tam konik metrik uzayında $f, T : X \to X$ dönüşümleri sürekli dönüşümler ve f dönüşümü bire-bir olsun. f ve T dönüşümleri $\forall x, y \in X$ ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ özelliğini sağlayan $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1)$ için

$$d\left(fTx, fTy\right) \leq \alpha d\left(fx, fy\right) + \beta d\left(fx, fTy\right) + \gamma d\left(fy, fTx\right) \tag{5.2.1}$$

ifadesini sağlasınlar. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

İspat. $u \in F\left(T^n\right)$ olsun. $u \in F\left(T\right)$ olduğunu göstereceğiz.

$$
\begin{aligned}
d\left(fTu,\, fu\right) &= d\left(fT^{n+1}u,\, fT^{n}u\right) = d\left(fT\left(T^{n}u\right),\, fT\left(T^{n-1}u\right)\right) \\
&\leq \alpha d\left(fT^{n}u,\, fT^{n-1}u\right) + \beta d\left(fT^{n}u,\, fT^{n}u\right) + \gamma d\left(fT^{n-1}u,\, fT^{n+1}u\right) \\
&\leq \alpha d\left(fT^{n}u,\, fT^{n-1}u\right) + \gamma d\left(fT^{n}u,\, fT^{n-1}u\right) + \gamma d\left(fT^{n}u,\, fT^{n+1}u\right)
\end{aligned}
$$

$$
d\left(fT^{n+1}u,\, fT^{n}u\right) \leq \frac{\alpha+\gamma}{1-\gamma} d\left(fT^{n}u,\, fT^{n-1}u\right)
$$

dir. $\lambda = \dfrac{\alpha+\gamma}{1-\gamma} < 1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
d\left(fTu,\, fu\right) &= d\left(fT^{n+1}u,\, fT^{n}u\right) \leq \lambda d\left(fT^{n}u,\, fT^{n-1}u\right) \leq \lambda^{2} d\left(fT^{n-1}u,\, fT^{n-2}u\right) \\
&\leq \ldots \leq \lambda^{n} d\left(fTu,\, fu\right)
\end{aligned}
$$

sağlanır. Teorem 5.2.1. deki benzer ifadelerden $d\left(fTu,\, fu\right) = 0$ yani $fTu = fu$ sonucu elde edilir. f bire-bir dönüşüm olduğundan $Tu = u$ dur. Bu da T dönüşümünün P özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Teorem 5.2.4. X tam konik metrik uzayında $f, T : X \to X$ dönüşümleri sürekli ve f bire-bir olsun. f ve T dönüşümleri $\forall x, y \in X$ için $a_i,\, i = 1,\ldots,5$ negatif olmayan sabitler $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 1$ olmak üzere

$$
d\left(fTx,\, fTy\right) \leq a_1 d\left(fx,\, fy\right) + a_2 d\left(fx,\, fTx\right) + a_3 d\left(fy,\, fTy\right) + a_4 d\left(fx,\, fTy\right) + a_5 d\left(fy,\, fTx\right) \quad (5.2.2)
$$

ifadesini sağlasınlar. Bu durumda T dönüşümü P özelliğine sahiptir.

İspat. T dönüşümünün bir tek sabit noktası olduğu (Sumitra, Uthariaraj, Hemavathy, 2010) gösterilmiştir. $u \in F\left(T^n\right)$ olsun. $u \in F\left(T\right)$ olduğunu göstereceğiz.

$$
\begin{aligned}
d\left(fTu, fu\right) = d\left(fT\left(T^{n}u\right), fT\left(T^{n-1}u\right)\right) &\leq a_1 d\left(fT^{n}u, fT^{n-1}u\right) + a_2 d\left(fT^{n}u, fTT^{n}u\right) \\
&+ a_3 d\left(fT^{n-1}u, fTT^{n-1}u\right) + a_4 d\left(fT^{n}u, fTT^{n-1}u\right) + a_5 d\left(fT^{n-1}u, fTT^{n}u\right) \\
&= \left(a_1 + a_3 + a_5\right) d\left(fT^{n}u, fT^{n-1}u\right) + \left(a_2 + a_5\right) d\left(fT^{n+1}u, fT^{n}u\right) \qquad (5.2.3)
\end{aligned}
$$

Benzer biçimde

$$
\begin{aligned}
d\left(fu, fTu\right) = d\left(fT\left(T^{n-1}u\right), fT\left(T^{n}u\right)\right) &\leq a_1 d\left(fT^{n-1}u, fT^{n}u\right) + a_2 d\left(fT^{n-1}u, fT^{n}u\right) \\
&+ a_3 d\left(fT^{n}u, fT^{n+1}u\right) + a_4 d\left(fT^{n-1}u, fT^{n+1}u\right) + a_5 d\left(fT^{n}u, fT^{n}u\right) \\
&= \left(a_1 + a_2 + a_4\right) d\left(fT^{n}u, fT^{n-1}u\right) + \left(a_3 + a_4\right) d\left(fT^{n+1}u, fT^{n}u\right) \qquad (5.2.4)
\end{aligned}
$$

olur. (5.2.3) ve (5.2.4) eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$
\lambda = \frac{2a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2 - \left(a_2 + a_3 + a_4 + a_5\right)} < 1
$$

olmak üzere

$$
d\left(fTu, fu\right) = d\left(fT^{n+1}u, fT^{n}u\right) \leq \lambda d\left(fT^{n}u, fT^{n-1}u\right) \leq \ldots \leq \lambda^{n} d\left(fTu, fu\right)
$$

elde edilir. Teorem 5.2.4 deki benzer ifadelerle $d\left(fTu, fu\right) = 0$ ve dolayısıyla $fTu = fu$ bulunur. Buradan da f nin bire-bir olmasından $Tu = u$ olur. Yani T dönüşümü P özelliğine sahip bir dönüşümdür.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, tezde elde edilen önceki bölümlerdeki sonuçlar özetlenecektir. Tezin üç, dört, beş ve altıncı bölümleri orijinal çalışmaları bulundurmaktadır.

Üçüncü bölümde, Beiranvand tarafından tanımlanan $f-$daralma dönüşümleri konik ve $G-$konik metrik uzaylara genelleştirilerek bu uzaylarda dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ve tekliği araştırılmıştır. Burada $\{f,T\}$ ve $\{f,S\}$ ikililerinin Banach çifti olma özellikleri kullanılarak tam konik metrik uzayda bir tek ortak sabit noktaya sahip oldukları gösterilmiştir. Tam $G-$konik metrik uzayda ise $f-$Hardy-Rogers daralma dönüşümleri incelenmiştir.

Bölüm 4 ün ilk kısmında $G-$konik metrik uzaylarda $\varphi-$dönüşümleri kullanılarak zayıf uyumluluk özelliğine sahip olan iki dönüşüm için sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. İkinci kısımda da yine $G-$konik metrik uzaylarda Sabetghadam ve Masiha tarafından tanımlanan genelleştirilmiş $\varphi-$dönüşümleri kullanılarak dönüşümlerin zayıf uyumlu olma hipotezi altında bir tek ortak sabit noktaya sahip oldukları gösterilmiştir. Bu bölümün son kısmında ise genelleştirilmiş $\varphi-$dönüşümleri konik metrik uzaylarda da çalışılmıştır.

Beşinci bölüm daha önce Azam, Arshad, Abbas, Rhoades ve Jungck tarafından konik ve $G-$metrik uzaylarda çalışılan dönüşümlerin $G-$konik metrik uzaylara genişletilmesinden oluşmaktadır. Ayrıca bu bölümde teoremleri doğrulayan örnekler verilmiş olup bölümün ikinci kısmında da P özelliğine sahip olan dönüşümler incelenmiştir.

Bu çalışmaların devamında ise birçok matematikçi tarafından D, D^* ve T metrik uzay olarak tanımlanan yapılarla konik yapısı birleştirilerek daha genel uzaylar elde edilip bu uzayların topolojik yapısı incelenerek farklı dönüşümlerle sabit nokta teoremleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

ABBAS, M., RHOADES, B.E., Fixed and Periodic Point Results in Cone Metric Spaces, Applied Math. Letters, 22(4): 511-515, 2009.

ABBAS, M., JUNGCK, G., Common Fixed Point Results for Noncommuting Mappings Without Continuity in Cone Metric Spaces, J.Math. Anal. Appl., 341: 416-420, 2008.

ABULOHA, M., Konik Metrik Uzaylar ve Bazı Sabit Nokta Teoremleri, Doktora Tezi, Gazi Üniv., 2009.

AGARWAL, R. P., MEEHAN, M., DONAL, O., Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press, 2001.

AAMRI, M., EL MOUTAWAKIL, D., Some New Common Fixed Point Theorems Under Strict Contractive Conditions, J. Math. Anal. Applications, 270: 181-188, 2002.

AZAM, A., ARSHAD, M., Common Fixed Points of Generalized Contractive Maps in Cone Metric Spaces, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 35(2): 255-264, 2009.

BEIRANVAND, A., MORADI, S., OMID, M., PAZANDEH,, H. Two Fixed Point Theorems For Special Mappings, arxiv: 0903.1504v1 math. FA, 2009.

BEG, I., AZAM, A., ARSHAD, M., Common Fixed Points For Maps On Topological Vector Space Valued Cone Metric Spaces, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2009: 1-8, 2009.

BEG, I., ABBAS, M., NAZIR, T., Generalized Cone Metric Spaces, The Journal of Nonlinear Science And Applications, 1: 21-31, 2010.

CHUGH, R., KAIAN, T., RANI, A., RHOADES, B.E., Property P in $G-$Metric Spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2010: 1-12, 2010.

CHUGH, R., KUMAR, S., Common Fixed Points for Weakly Compatible Maps, Proc. Indian Acad. Sci., 111(2): 241-247, 2001.

ÇAKALLI, H., SÖNMEZ, A., GENÇ, Ç., Metrizability of Topological Vector Space Valued Cone Metric Spaces, arXiv:10073123v2, 2010.

DEIMLING, K., Nonlinear Functional Analysis, Springer Verlag, 1985.

DHAGE, B.C., Generalized Metric Space and Mapping with Fixed Point, Bull. Calcutta. Math. Soc., 84: 329-336, 1992.

DI BARI, C., VETRO, P., $\varphi-$ Pairs and Common Fixed Points in Cone Metric Spaces, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 57: 279-285, 2008.

GAHLER, S., 2- Metrische Raume and Ihre Topologische Struktur, Mathematische Nachrichten, 26: 115-148, 1963.

GOEBEL, K., KIRK, W.A., Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge University Press, 1990.

GRANAS, A., DUGUNDJI, J., Fixed Point Theory, Springer Monographs in Mathematics, 2002.

GUANG, H., XIAN,. Z., Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive mappings, J. Math. Anal. Appl., 332: 1468-1476, 2007.

ILIC, D., RAKOCEVIC, V., Common Fixed Points for Maps on Cone Metric Space, J. Math. Anal. Appl., 341: 876-882, 2008.

JAIN, P. K., Metric Spaces, Narosa Publishing House, New Delhi, 2009.

JEONG, G.S., RHOADES, B.E., Maps For Which $F(T)=F(T^n)$, Fixed Point Theory and Applications, 6: 71-105, 2005.

JUNGCK, G., Compatible Mappings and Common Fixed Points, International Journal of Mathematics Sciences, 9(4): 771-779, 1986.

JUNGCK, G., Commuting Mappings and Fixed Points, Amer. Math. Monthly, 83: 261-263, 1976.

JUNGCK, G., RHOADES, B.E., Fixed Point for Set Valued Functions Without Continuity, Indian J. Pure Applied Math., 29(3): 227-238, 1998.

KADELBURG, Z., Remarks on Quasi Contraction on a Cone Metric Spaces, Applied Math. Letters, 22: 1674-1679, 2009.

KREYSZIG, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York, 1978.

MADDOX, I. J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press., 1970.

MORALES. J., ROJAS, R., Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems For T-Kannan contractive Mappings, arxiv:0907.3949v1.math.FA, 2009.

MUSTAFA, Z., A New Structure for Generalized Metric Spaces with Applications to Fixed Point Theory, PhD Thesis, The University of New Castle, Australia 2005.

MUSTAFA, Z., SIMS, B., Some Remarks Concerning D-Metric Spaces, Proceedings of the Int. Conference on Fixed Point Theory and Applications Yokohama, 189-198, 2004.

MUSTAFA, Z., HAMED, O., AWAWDEH, F., Some Fixed Point Theorem for Mappings on Complete G-Metric Spaces, Fixed Point Theory and Applications 2008: 1-12, 2008.

RADENOVIC, S., RHOADES, B.E., Fixed Point Theorems for Two Nonself Mappings in Cone Metric Spaces, Computers and Mathematics with Applications, 57: 1701-1707, 2009.

REZAPOUR, S., HAMLBARANI, R., Some Notes on the Paper “Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings”, J. Math. Anal. Appl., 345: 719-724, 2008.

SABETGHADAM, F., MASIHA, H.P., Common Fixed Points for Generalized $\varphi-$ Pair Mappings on Cone Metric Spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2010: Article ID 718340, 2010.

SESSA, S., On a Weak Commutativity Condition of Mappings in Fixed Point Considerations, Publ. Inst. Math., 32: 149-153, 1982.

SHATANAWI, S., Fixed Point Theory for Contractive Mappings Satisfying $\varphi-$ Maps in G-Metric Spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2010: 1-9, 2010.

SOYKAN, Y., Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2008.

SÖNMEZ, A., ÇAKALLI, H., Cone Normed Spaces and Weighted Means, Mathematical and Computer Modelling, 52, 1660-1666, 2010.

SÖNMEZ, A., On Paracompactness in Cone Metric Spaces, Applied Mathematics Letters, 23, 494-497, 2010.

SUMITRA, V.R., UTHARIARAJ, R., HEMAVATHY, R., Common Fixed Point Theorem For T- Hardy-Rogers Contraction Mapping in a Cone Metric Space, International Mathematical Forum, 5: 1495-1506, 2010.

ŞUHUBİ, E. Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, 2001.

ÖZGEÇMİŞ

Mahpeyker ÖZTÜRK, 25.02.1982 yılında Kayseri’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Sakarya’da tamamladı. 2000 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümüne başlayıp, 2004 yılında mezun oldu. 2005-2006 Öğretim yılında Özel Sakarya Kültür Dershanesinde Matematik öğretmenliği yaptı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında başladığı yüksek lisans eğitimini 2006-2007 Öğretim yılında tamamladı. 2007 yılında doktora öğrenimine başladı. Mart 2006 yılından beri Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.