T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOMOTETİK HAREKETLER İÇİN CAYLEY FORMÜLÜ, EULER PARAMETRELERİ ve UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Doğan ÜNAL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Murat TOSUN

Mayıs 2016

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOMOTETİK HAREKETLER İÇİN CAYLEY FORMÜLÜ, EULER PARAMETRELERİ ve UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

Doğan ÜNAL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 20 / 05 / 2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN Jüri Başkanı	**Prof. Dr. Levent KULA Üye**	**Prof. Dr. Murat TOSUN Üye**
Prof. Dr. İbrahim OKUR Üye		**Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Doğan ÜNAL

20.05.2016

TEŞEKKÜR

Bu çalışmaya beni yönlendirip, bilgi ve tecrübesi ile destek veren, yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Murat TOSUN'a saygı ve teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Tez çalışmam boyunca, çalışmamın her safhasına emeği geçmiş, bilgi ve tecrübeleriyle bana desteğini ve vaktini hiç esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım esnasında; bana destek olan ve bu süreçte yaşadığım her zorluğu ve mutluluğu benimle paylaşan değerli aileme ve mesai arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

A	: Cayley matrisi
B	: Homotetik Cayley matrisi
B^{-1}	: B matrisinin inversi
B^{t}	: B matrisinin transpozu
$\mathbb{E}^{n}$	: $n-$ boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}_{1}^{n}$	: $n-$ boyutlu Lorentz uzayı
$h(t)$	: Homotetik sabiti
$\dot{h}(t)$	: Homotetik sabitinin t parametresine göre türevi
H	: Öklid uzayda hareketli uzay
H'	: Öklid uzayda sabit uzay
$\mathbf{H}(M)$	: Homotetik dönüşümler cümlesi
$\mathbb{H}(M)$	: Homotetik matrisler cümlesi
$k_{i}(s)$	: α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $i-$ yinci eğriliği
M	: C^{∞} sınıfından manifold
M_{v}^{n}	: $n \geq 3$ için yarı Riemann manifoldu
R	: Lorentz uzayda hareketli uzay
R'	: Lorentz uzayda sabit uzay
$so(n)$	: $n \times n$ tipinde antisimetrik matrisler cümlesi
$so(n,1)$	: $n \times n$ tipinde Lorentz anlamda antisimetrik matrisler cümlesi
$SO(n)$	: $n \times n$ tipinde pozitif ortogonal matrislerin cümlesi
$SO(n,1)$	: $n \times n$ tipinde pozitif semiortogonal matrislerin cümlesi
α	: Öklid ve Lorentz uzayda diferensiyellenebilir eğri

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Homotetik Cayley Dönüşümü, Homotetik Cayley Formülü, Homotetik Hareketler İçin Rodrigues-Euler Parametreleri, Homotetik Dönme Matrisleri.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, literatür araştırması verilip çalışmanın amacından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, ilk olarak $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu ve $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzaya; sonrasında $\mathbb{E}_1^n$, $n-$boyutlu ve $\mathbb{E}_1^3$, $3-$boyutlu Lorentz uzaya ait temel kavramlara yer verilmiştir. Ayrıca bu uzaylara göre, genel ve homotetik hareketler için temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Öklid ve Lorentz uzayda genel hareketler için verilen Cayley formülü, Euler-Rodrigues parametreleri ve hareketin dönme eksenleri ile ilgili çalışmalardan bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm ve sonrası, çalışmamızın orijinal kısımlarını teşkil etmektedir. Bu bölümde, $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayda Cayley formülü ve $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayda Cayley dönüşümü, Euler-Rodrigues parametreleri, hareketin dönme eksenleri homotetik hareketler için elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, bir önceki bölümde elde edilen bulgular Lorentz uzay için verilmiştir. Ayrıca spacelike ve timelike ayrımı detaylı incelenmiş, bu ayrımdan doğan farklı sonuçlar, tanım ve teoremler karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Altıncı ve son bölümde, çalışmamızdan elde edilen sonuçlar ve önerilere yer verilmiştir.

CAYLEY FORMULA, EULER PARAMETERS and APPLICATIONS FOR HOMOTHETIC MOTIONS

SUMMARY

Keywords: Homothetic Cayley Mapping, Homothetic Cayley Formula, Rodrigues-Euler Parameters for Homothetic Motions, Homothetic Rotation Matrices.

This study consists of six sections. In the first section, literature review and the aim of the study are given.

In the second section, basic concepts firstly for $\mathbb{E}^n$, $n-$dimensional, $\mathbb{E}^3$, $3-$dimensional Euclidean spaces and then for $\mathbb{E}_1^n$, $n-$dimensional and $\mathbb{E}_1^3$, $3-$dimensional Lorentzian spaces are given. Besides some definitions and theorems which belongs to these spaces are presented for general and homothetic motions.

In the third section, some studies and indications about Cayley formula, Euler – Rodrigues parameters and rotation axes of motions are given for general motions in Euclidean and Lorentzian spaces.

The fourth section and the rest of this study constitute original parts of the thesis. In this section, Cayley formula is obtained in $\mathbb{E}^n$, $n-$dimensional Euclidean space and Cayley transformation, Euler – Rodrigues parameters, rotation axises of motions are obtained in $\mathbb{E}^3$, $3-$dimensional Euclidean space for homothetic motions.

In the fifth section, indications which are obtained in fourth section are given for Lorentzian space. Additionally, distinctions which occurs from the differences of notions of spacelike and timelike are detailed reviewed. Then the definitions and the theorems are presented comparatively.

In the sixth and last section, the conclusions which are obtained in this study and suggestions for the next studies are given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Kinematik, kuvvet ve kütle kavramını içermeyen bir daldır. Yani kinematik, nokta sisteminin (cismin), belirlenen bir noktaya göre, zamana bağlı olarak yer değiştirmesini inceler. Bu yer değiştirmeler içinde en geneli, homotetik hareketler olarak anılır. Homotetik hareketler, genel hareketlerden farklı olarak, uzaklığı değil açıyı koruyan dönüşümlerle tanımlanır. Dolayısıyla homotetik hareketler, genel hareketlerin bir genellemesi olarak ele alınır. Öte yandan kinematikte, dönme ve buna bağlı olarak dönme ekseninin bulunması önemli yere sahiptir. Bu konuya ilişkin Matematik ve Mekanik'te önemli bir yere sahip olan Euler - Rodrigues formülü, üç boyutlu uzayda bir vektörün dönmesini tanımlar. Bu formül, Euler' in 1775 yılında kendi adını verdiği dört parametreyle ifade ettiği, bir eksen etrafındaki dönme tanımını baz alır. Sonrasında Rodrigues, bu formülü 1840 yılında, dönme ekseninin bileşenleriyle dönme açısının yarısının tanjantını birleştirerek elde ettiği Rodrigues parametreleri ile ifade etmiştir. Öte yandan Cayley, 1846 yılında antisimetrik ve pozitif ortogonal matrisler arasında, kendi adıyla anılan bir dönüşüm tanımlamıştır. Bu dönüşüm sayesinde, belli bir eksen etrafında yapılan her dönmeye karşılık bir pozitif ortogonal matris elde edilir.

Bu konularla ilgili olarak; Müller, Öklid uzayda $1-$parametreli hareketler ve bunlarla ilgili temel kavramlar üzerine detaylı bir şekilde çalışmıştır [1,2]. Chong, Öklid uzayda Cayley formülü yardımıyla dönme matrislerinin elde edilmesi üzerine çalışmıştır [3]. n-boyutlu Öklid uzayda hareketler, ve ani vida ekseni ile ilgili Hacısalihoğlu'nun çalışmaları bulunmaktadır [4,5]. Hacısalihoğlu ve Arslan, homotetik dönüşümler uzayını tanımlamıştır [6]. Birman, Bottema ve Ergin Lorentz uzayda $1-$parametreli hareketler ve Lorentz uzaya ait temel kavramlar üzerine çalışmışlardır [7-9]. Bükcü, Öklid ve Lorentz uzayda Cayley dönüşümünü vermiş, Öklid uzayda bir dönme hareketi için Rodrigues ve Euler parametrelerini tanımlamıştır [10-12]. Lorentz uzayda bir dönme hareketi için Rodrigues ve Euler parametreleri, Keçilioğlu ve

Özkaldı tarafından verilmiştir [13,14]. Güngör ve Tosun, $3-$boyutlu Lorentz uzayda $1-$parametreli hareketler üzerine çalışmışlardır [15]. Öte yandan Tosun, Küçük ve Güngör 3-boyutlu Lorentz uzayda homotetik hareketler üzerine bir çalışma yapmışlardır [16].

Bu bilgiler ışığında; çalışmamızda, bahsi geçen konuların, homotetik hareketler için genelleştirilmesi hedeflenmiştir. Bu hedef doğrultusunda Öklid ve Lorentz uzayda homotetik hareketler için Cayley formülü ve dönüşümü tanımlanarak literatüre katılmıştır. Öte yandan yine Öklid ve Lorentz uzayda Rodrigues ve Euler parametreleri homotetik hareketler için genelleştirilmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar uygulamalar ve şekillerle desteklenmiştir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Öklid ve Lorentz Uzaya ait temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Öklid Uzayda Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. A, boştan farklı bir cümle ve V'de bir K cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \to V$$

fonksiyonu varsa A'ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir. Burada

i) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$
ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için $f(P,Q) = \vec{\alpha}$

olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [17].

Tanım 2.1.2. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V'de Öklid iç çarpım işlemi

$$\begin{aligned} &\langle \;,\; \rangle : V \times V \to \mathbb{R} \\ &(\vec{x}, \vec{y}) \to \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \vec{x} = (x_i), \;\; \vec{y} = (y_i), \;\; 1 \leq i \leq n \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu işlem yardımı ile A 'da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı, Öklid Uzayı adını alır. Özel olarak $A=\mathbb{R}^n$ noktalar cümlesi ve $V=\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu standart vektör uzayı olarak alınırsa, Öklid iç çarpımı ile birlikte A cümlesine, $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleştirilmiş $n-$boyutlu Standart Öklid Uzayı denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir [17].

Tanım 2.1.3.

$$d:\mathbb{E}^n\times\mathbb{E}^n\to\mathbb{R}$$
$$(X,Y)\to d(X,Y)=\left\|\overrightarrow{XY}\right\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayda uzaklık fonksiyonu ve $d(X,Y)$ reel sayısına da $X,Y\in\mathbb{E}^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir [17].

Teorem 2.1.1. $\mathbb{E}^n$ 'de uzaklık fonksiyonu bir metriktir [17].

Tanım 2.1.4.

$$d:\mathbb{E}^n\times\mathbb{E}^n\to\mathbb{R}$$
$$(X,Y)\to d(X,Y)=\left\|\overrightarrow{XY}\right\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{E}^n$ 'de Öklid metriği denir.

Öklid iç çarpımının $\mathbb{R}^n$ 'de bir diğer ifadesi, $\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathbb{R}^n$ için

$$\left\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\right\rangle=\left\|\vec{\alpha}\right\|\left\|\vec{\beta}\right\|\cos\theta$$

biçiminde verilebilir. Burada θ açısı, $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\beta}$ vektörleri arasındaki açı olup pozitif yönde ölçülür. Buradan

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle}{\|\vec{\alpha}\| \|\vec{\beta}\|}$$

yazılır. Böylece $\forall X, Y, Z \in \mathbb{E}^n$ için $X\hat{Y}Z$ açısının ölçüsü

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{YZ} \rangle}{\|\overrightarrow{XY}\| \|\overrightarrow{YZ}\|} \tag{2.2}$$

denkleminden hesaplanan θ reel sayısıdır [17].

Tanım 2.1.5. $\mathbb{E}^n$ ' de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, ..., P_n\}$ nokta $(n+1)$-lisine $\mathbb{R}^n$ 'de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, ..., \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n-lisi $\mathbb{R}^n$ için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, ..., P_n\}$ sistemine $\mathbb{E}^n$ 'in bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir [17].

Tanım 2.1.6. $\mathbb{E}^n$ 'de $E_0 = (0,0,...,0), E_1 = (1,0,...,0), ..., E_n = (0,0,...,1)$ olmak üzere $\{E_0, E_1, ..., E_n\}$ çatısına Standart Öklid çatısı denir [17].

Tanım 2.1.7. Bir iç çarpım uzayında herhangi bir $\vec{x}$ vektörünün normu (uzunluğu);

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır [18].

Tanım 2.1.8. Normu 1 olan vektöre birim vektör denir. Eğer $\vec{x} \neq 0$ ve $\vec{y} \neq 0$ iken $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ise bu iki vektör birbirine ortogonaldir denir. Sıfırdan farklı vektörlerin bir S cümlesinde, herhangi iki vektör birbirine dik ise bu S cümlesine de ortogonaldir denir [18].

Tanım 2.1.9. A^T , A matrisinin transpozu olmak üzere,

$$A = -A^T \tag{2.4}$$

eşitliğini sağlayan matrise, antisimetrik matris denir [18].

Teorem 2.1.2. (Cayley – Hamilton): Her kare matris, kendi karakteristik denkleminin bir köküdür. Yani,

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

karakteristik denklemi için

$$P(A) = 0$$

dır [18].

Tanım 2.1.10. $\mathbb{E}^n$, $n-$ boyutlu Öklid uzayda bir cismin $1-$parametreli hareketi,

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $A \in SO(n)$ pozitif ortogonal bir matris, $c \in \mathbb{R}_1^n$ bir sütun matrisi, $A = A(t)$ ve $c = c(t)$ t zaman parametresinin C^∞ fonksiyonlarıdır. x ve y aynı bir P noktasının, sırasıyla, H hareketli ve H' sabit uzaylarının ortonormal koordinat sistemlerine göre yer vektörleridir. $t = t_0$ anında H've H nin koordinat sistemleri çakışık olarak ele alınacaktır. Bu çalışmada, yukarıdaki $1-$parametreli hareket H/H' ile gösterilecektir. Bu hareketin orijin etrafında bir dönme belirten kısmı $y = Ax$ dir [4].

Tanım 2.1.11. A, $n\times n$ tipinde ortogonal bir matris ve $h=kI_n$, $k\in\mathbb{R}$ şeklinde bir skaler matris olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{H}=hA \tag{2.6}$$

matrisine bir homotetik matris denir. Homotetik dönüşümlerin cümlesi $\mathbf{H}(M)$, fonksiyonların bileşkesi işlemine göre bir gruptur. $\mathbf{H}(M)$ homotetik dönüşümler cümlesine karşılık gelen, $\mathbb{H}(M)$ homotetik matrislerin cümlesi de matris çarpımı işlemine göre bir gruptur. Böylece $\mathbb{H}(M)$ cümlesine karşılık gelen $\mathbf{H}(M)$ cümlesi, grup izomorfizmidir. Ayrıca homotetik matrisler cümlesi $\mathbb{H}(M)$, bir matris Lie grubudur.

$\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu $C^\infty-$manifold ve (U,ϕ) bir koordinat komşuluğu olsun. Bu durumda aşağıdaki fonksiyonlar vardır:

$$f_x=\left\{h_1\big|_x, h_2\big|_x, \ldots, h_n\big|_x ; x\right\}, \forall x\in\phi(U), f_x\in\mathbb{H}\ \mathbb{B}(\mathbb{E}^n),$$
$$h_i\big|_x=\sum_{k=1}^{n} ca_{ki}\frac{\partial}{\partial k}\bigg|_x .$$

(f_x) lineer dönüşümü, $\mathbb{E}^n$ 'de bir homotetik dönüşüm olarak adlandırılır [6].

Teorem 2.1.3. $\left\{\mathbb{B}\left(\mathbb{E}^n\right)\left(\mathbb{E}^n,\ \mathrm{GL}\left(n,\mathbb{R}\right)\right)\right\}$ cümlesi verilsin. O halde

$$V\subset\mathbb{E}^n,\ \psi:\pi^{-1}\left(V\right)\to V\times\mathrm{GL}\left(n,\mathbb{R}\right)$$

dönüşümü vardır. Bu ifade eder ki; her homotetik matris, bir homotetik dönüşüm belirtir [6].

Tanım 2.1.12. $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)},\ k > r$ için

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$$

olmak üzere, ψ 'den elde edilen $\{V_1, ..., V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet $r-$ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), ..., V_r(m)\}$'ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet $r-$ayaklısı denir. Burada $1 \le i \le r$ olmak üzere Her bir V_i'ye Serret-Frenet vektör alanı denir [17].

Tanım 2.1.13. $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet $r-$ayaklısı $\{V_1(s), ..., V_r(s)\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} k_i &: I \to \mathbb{R},\ 1 \le i < r \\ &s \to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin $i-$yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M 'nin $i-$yinci eğriliği denir [17].

Teorem 2.1.4. $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasında $i-$yinci eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet $r-$ayaklısı $\{V_1(s), ..., V_r(s)\}$ ise

i) $V_1'(s) = k_1(s) V_2(s)$

ii) $V_i'(s) = -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s),\ 1 < i < r$ (2.7)

iii) $V_r'(s) = -k_{r-1}(s) V_{r-1}(s)$

eşitlikleri vardır [17].

Tanım 2.1.14. (2.7) denklemleri ile verilen denklemlerin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_{r-2}' \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

şeklindedir. (2.8) eşitliklerine Frenet formülleri denir. Özel olarak $n=3$ için

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

eşitliği elde edilir. Burada $1-$inci eğrilik olan $k_1(s)$ değeri sadece eğrilik ve $2-$nci eğrilik olan $k_2(s)$ değeri de burulma (torsiyon) olarak adlandırılır [17].

Teorem 2.1.5. Bir S reel antisimetrik dönüşümünün tüm öz değerleri imajiner eksen üzerindedir [3].

Teorem 2.1.6. $B\vec{u}=\lambda\vec{u}$ $\left(\vec{u}\neq 0\right)$ olacak şekilde bir B matrisinin bir öz değeri λ ise bu taktirde $B^n\vec{u}=\lambda^n\vec{u}$'dur [30].

Teorem 2.1.7. f reel değişkenli, reel katsayılı bir polinom ve B bir kare matris olmak üzere

$$B\vec{u}=\lambda\vec{u} \quad \Rightarrow \quad f(B)\vec{u}=f(\lambda)\vec{u}$$

eşitlikleri elde edilir [3].

2.2. Lorentz Uzayda Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. V , sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle \ , \ \rangle_L : V \times V \to \mathbb{R}$$

2-lineer fonksiyonu her $\vec{v}, \vec{w} \in V$ vektörü için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_L = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle_L$ özeliğini sağlıyor ise, $\langle \ , \ \rangle_L$ 'ye V üzerinde bir simetrik $2-$lineer form denir [19].

Tanım 2.2.2. V, vektör uzayı üzerinde bir simetrik $2-$lineer form $\langle \ , \ \rangle_L$ olsun. Bu takdirde,

i) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_L > 0$ ise $\langle \ , \ \rangle_L$ simetrik $2-$lineer formu, pozitif tanımlı,

ii) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_L < 0$ ise $\langle \ , \ \rangle_L$ simetrik $2-$lineer formu, negatif tanımlı,

iii) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_L \geq 0$ ise $\langle \ , \ \rangle_L$ simetrik $2-$lineer formu, yarı-pozitif tanımlı,

iv) $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_L \leq 0$ ise $\langle \ , \ \rangle_L$ simetrik $2-$lineer formu, yarı-negatif tanımlı,

v) $\forall \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_L = 0$ için $\vec{v} = \vec{0}$ oluyorsa $\langle \ , \ \rangle_L$ simetrik $2-$lineer formuna nondejenere, aksi halde dejenere adı verilir [19].

Tanım 2.2.3. $\langle \ , \ \rangle_L$, V üzerinde simetrik $2-$lineer form ve W 'da V 'nin bir altuzayı olsun. $\langle \ , \ \rangle_L$ 'nin W üzerinde kısıtlanmışı $\langle \ , \ \rangle_L \big|_W$ olmak üzere,

$$\langle \ , \ \rangle_L \big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna, $\langle\ ,\ \rangle_L$ simetrik 2-lineer formun indeksi denir. Eğer $\langle\ ,\ \rangle_L$ 'nin indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ 'dir [19].

Tanım 2.2.4. M , türevlenebilir (C^∞ sınıfından) manifold olsun.

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle_L : \chi(M)\times\chi(M) &\rightarrow C^\infty(M,\mathbb{R}) \\ (\vec{x},\vec{y}) &\rightarrow \langle\vec{x},\vec{y}\rangle_L \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan simetrik, 2-lineer ve nondejenere metrik fonksiyona M üzerinde bir metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksi M manifoldunun indeksi olarak ifade edilir. M bir C^∞ sınıfından manifold olmak üzere, $\chi(M)$ 'de tanımlı $\langle\ ,\ \rangle_L$ iç çarpım fonksiyonu, M 'nin her bir tanjant uzayına bir iç çarpım indirger, öyle ki $\vec{x},\vec{y}\in\chi(M)$ ve $P\in M$ için $\vec{x}_P,\vec{y}_P\in T_M(P)$ dir. Böylece,

$$\langle\ ,\ \rangle_L\big|_P : T_M(P)\times T_M(P)\rightarrow\mathbb{R}$$

simetrik, $2-$lineer ve nondejenere dönüşüm tanımlayan $\langle\ ,\ \rangle_L\big|_P$ fonksiyonuna $T_M(P)$ üzerinde bir metrik tensör denir [19].

Tanım 2.2.5. M bir C^∞ sınıfından manifold ve $\langle\ ,\ \rangle_L$ 'de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere $\left(M,\langle\ ,\ \rangle_L\right)$ ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir. M 'nin indeksi ν olmak üzere $0\leq\nu\leq n=\text{boy}M$ için, eğer $\nu=0$ ise M bir Riemann manifoldu, $\nu=1$ ve $n\geq 2$ durumunda ise M bir Lorentz manifoldu adını alır [20].

Tanım 2.2.6. $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayı verilsin. $0\leq\nu\leq n$ olmak üzere,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{j=\nu+1}^{n} x_j y_j$$

şeklinde bir metrik tensör tanımlanırsa, seçilen uzay yarı-Öklid uzay olarak isimlendirilir ve $\mathbb{R}_\nu^n$ ile gösterilir. Özel olarak $\nu = 1$, $n \geq 2$ durumunda ise $\mathbb{R}_1^n$, $n-$ boyutlu Lorentz uzay adını alır. Metrik tensör, Lorentz metriği olarak adlandırılır [20].

Tanım 2.2.7. $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_1^n$ olsun. Eğer

i) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L < 0$ ise $\vec{x}$ 'e timelike vektör,

ii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L > 0$ veya $\vec{x} = \vec{0}$ ise $\vec{x}$ 'e spacelike vektör,

iii) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_L = 0$ ve $\vec{x} \neq \vec{0}$ ise $\vec{x}$ 'e null (lightlike) vektör adı verilir [19].

Tanım 2.2.8. $\mathbb{R}_1^n$, $n-$ boyutlu Lorentz uzayı olsun. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_1^n$ için

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = 0$$

ise $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri Lorentz anlamda ortogonaldir [19].

Tanım 2.2.9. $\mathbb{R}_1^n$, $n-$ boyutlu Lorentz uzayın bütün timelike vektörlerinin cümlesi τ olsun. Böylece $\forall \vec{u} \in \tau$ için

$$C(\vec{u}) = \left\{ x \in \tau \mid \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle_L < 0 \right\}$$

biçiminde tanımlanan $C(\vec{u})$ cümlesine $\vec{u}$ vektörünü içeren $\mathbb{R}_1^n$ 'in bir time-konisi denir [19].

Teorem 2.2.1. $\vec{u},\vec{w}$ Lorentz uzayda iki timelike vektör aynı konidedir ancak ve ancak $\langle \vec{u},\vec{w}\rangle_L < 0$ 'dır [19].

Tanım 2.2.10. $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}_1^n$ için $\vec{x}$ vektörünün normu

$$\|\vec{x}\|_L=\sqrt{\left|\langle \vec{x},\vec{x}\rangle_L\right|} \tag{2.10}$$

ile tanımlanır [19].

Tanım 2.2.11. $\vec{u}$ ve $\vec{w}$, $3-$boyutlu Lorentz uzayda iki vektör olmak üzere, bu iki vektör arasındaki açı;

i) $\vec{u}$ ve $\vec{w}$ timelike iki vektör ise

$$\begin{aligned}\langle \vec{u},\vec{w}\rangle_L &= -\|\vec{u}\|_L\|\vec{w}\|_L\cosh\phi,\\ \|\vec{u}\wedge\vec{w}\|_L &= \|\vec{u}\|_L\|\vec{w}\|_L\sinh\phi,\end{aligned} \tag{2.11}$$

ii) $\vec{u}$ spacelike ve $\vec{w}$ pozitif timelike vektörler ise

$$\begin{aligned}\left|\langle \vec{u},\vec{w}\rangle_L\right| &= \|\vec{u}\|_L\|\vec{w}\|_L\sinh\phi,\\ \|\vec{u}\wedge\vec{w}\|_L &= \|\vec{u}\|_L\|\vec{w}\|_L\cosh\phi,\end{aligned} \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanır [14,19].

Teorem 2.2.2. $\varepsilon=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ işaret matrisi olmak üzere, $n\times n$ tipinde bir A matrisi için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) A semiortogonal bir matristir.

ii) $A^T = \varepsilon A^{-1}\varepsilon$

iii) A' nın sütunları $\mathbb{R}_v^n$'in bir ortonormal bazını oluşturur (ilk v tanesi timelike vektör).

iv) A, $\mathbb{R}_v^n$'in herhangi bir ortonormal bazını, ortonormal bir baza taşır [19].

Teorem 2.2.3. $M_v^n \ (n \geq 3)$ bir yarı-Riemann manifoldu ve $\alpha : \mathbb{R} \to M_v^n$ diferensiyellenebilir null olmayan bir eğri olsun. Bu eğrinin herhangi bir noktasındaki Frenet vektörleri, $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ ve $\varepsilon_{i-1} = \langle V_i, V \rangle$ olmak üzere, Frenet vektörleri arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır [21]:

i) $D_{V_1}V_1 = k_1 V_2$

ii) $D_{V_1}V_i = -\varepsilon_{i-2}\varepsilon_{i-1}k_{i-1}V_{i-1} + k_i V_{i+1}, \ \ 1 < i < n$ (2.13)

iii) $D_{V_1}V_r = -\varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-1}k_{r-1}V_{r-1}$.

Bu denklemlerin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} D_{V_1}V_1 \\ D_{V_1}V_2 \\ D_{V_1}V_3 \\ \vdots \\ D_{V_1}V_{r-2} \\ D_{V_1}V_{r-1} \\ D_{V_1}V_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0\varepsilon_1 k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\varepsilon_{r-3}\varepsilon_{r-2}k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-1}k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

şeklindedir. Burada $v = 1$ için Lorentz manifoldu elde edilir ve $n = 3$ için bu Lorentz manifoldunda bir eğrinin Frenet denklemleri incelenebilir:

i) α timelike bir eğri olmak üzere;

V_1 timelike, V_2 ve V_3 spacelike vektör alanlarıdır. O halde $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$'dir. Bu durumda Teorem 2.2.3 gereğince

$$\begin{bmatrix} D_{V_1}V_1 \\ D_{V_1}V_2 \\ D_{V_1}V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

elde edilir.

ii) α spacelike bir eğri olmak üzere;

a) V_1 spacelike, V_2 timelike ve V_3 spacelike vektör alanları olsun. Bu durumda $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$'dir. O halde Teorem 2.2.3 gereğince

$$\begin{bmatrix} D_{V_1}V_1 \\ D_{V_1}V_2 \\ D_{V_1}V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

elde edilir.

b) V_1 spacelike, V_2 spacelike ve V_3 timelike vektör alanları olsun. Bu durumda $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$'dir. O halde Teorem 2.2.3 gereğince

$$\begin{bmatrix} D_{V_1}V_1 \\ D_{V_1}V_2 \\ D_{V_1}V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.12. $\mathbb{R}_1^3$, $3-$boyutlu Lorentz uzayda $S^T = -\varepsilon S \varepsilon$ eşitliğinin sağlayan S matrisine Lorentz anlamda antisimetrik matris denir [19].

Teorem 2.2.4. $\vec{v} = (x, y, z)$ ve $\vec{s} = (a, b, c)$ gibi iki vektörün, Lorentz anlamda vektörel çarpımı,

$$\vec{s} \wedge_L \vec{v} = \det \begin{bmatrix} -\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

ve

$$\vec{s} \wedge_L \vec{v} = (yc - bz, xc - az, ay - bx)$$

biçiminde tanımlanır. $\vec{s}$ vektörüne karşılık gelen matris

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

ise $Sv = \vec{s} \wedge_L \vec{v}$ eşitliği vardır. Burada

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklindedir [10].

Teorem 2.2.5. $\mathbb{R}_1^3$, $3-$boyutlu Lorentz uzayda dört vektör $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{w} = (p, q, r)$ ve $\vec{t} = (k, l, m)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur [10].

i) $\langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{w} \rangle_L = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

ii) $\vec{u} \wedge_L (\vec{v} \wedge_L \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L \vec{w} - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle_L \vec{v}$

iii) $\langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{u} \rangle_L = 0, \langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{v} \rangle_L = 0$

iv) $\langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{w} \wedge_L \vec{t} \rangle_L = -\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle_L \langle \vec{v}, \vec{t} \rangle_L + \langle \vec{u}, \vec{t} \rangle_L \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_L$

v) $\langle \vec{u} \wedge_L \vec{v}, \vec{u} \wedge_L \vec{v} \rangle_L = -\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_L \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_L + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_L \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle_L$.

Teorem 2.2.6. 3×3 tipinde Lorentz anlamda antisimetrik bir matris S ve bu matrise karşılık gelen vektör $\vec{s}$ olsun. Bu durumda

i) $\vec{s}$, timelike bir vektör ise S matrisinin tüm öz değerleri imajiner eksen üzerinde bulunur [12].

ii) $\vec{s}$, spacelike bir vektör ise S matrisinin tüm öz değerleri reel eksen üzerinde bulunur [12].

Teorem 2.2.7. $\mathbb{R}^3_1$, $3-$boyutlu Lorentz uzayda, A semiortogonal dönme matrisi, timelike vektörleri timelike vektörlere, spacelike vektörleri spacelike vektörlere ve null vektörleri null vektörlere dönüştürür [14].

BÖLÜM 3. CAYLEY FORMÜLÜ ve UYGULAMALARI

Bu bölümde daha önce çalışılmış olan; $\mathbb{E}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayda $1-$parametreli hareketler için Cayley formülü; $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayda ve $\mathbb{E}_1^3$, $3-$boyutlu Lorentz uzayda $1-$parametreli hareketler için Rodrigues ve Euler parametreleri, Cayley dönüşümü tanıtılacaktır. Alternatif yöntemlerle Cayley formülünün elde edilişi ve geometrik olarak yorumu verilecektir.

3.1. Öklid Uzayda 1-Parametreli Hareketler için Cayley Formülü, Euler - Rodrigues Parametreleri ve Cayley Dönüşümü

$y = Ax$ orijin etrafında bir dönme hareketi, $\vec{f} = \vec{y} - \vec{x}$ ve $\vec{g} = \vec{y} + \vec{x}$, $\mathbb{E}^n, n-$boyutlu Öklid uzayda iki vektör olmak üzere,

$$\left\langle \vec{f}, \vec{g} \right\rangle = 0 \tag{3.1}$$

olduğu görülür. Yani $\vec{f}$ ve $\vec{g}$ vektörleri ortogonadir. $y = Ax$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\vec{f} = (A - I_n)\vec{x} \text{ ve } \vec{g} = (A + I_n)\vec{x} \tag{3.2}$$

olur. λ, A matrisinin öz değerlerini göstermek üzere, A'nın karakteristik denklemi $\det(A - \lambda I_n) = 0$'dır. Burada $\lambda = -1$ öz değerini hariç tutarsak $\det(A + I_n) \neq 0$'dır. Bu ifade eder ki $A + I_n$ regülerdir. (3.2) ile verilen denklemlerin ikincisinden $\vec{x}$ elde edilip, birincide yerine yazılırsa,

$$\vec{f} = (A - I_n)(A + I_n)^{-1}\vec{g} \tag{3.3}$$

elde edilir. Burada

$$C = (A - I_n)(A + I_n)^{-1} \tag{3.4}$$

alınırsa

$$\vec{f} = C\vec{g} \tag{3.5}$$

olur. Buradaki $n \times n$ tipindeki C matrisi, antisimetriktir [10].

(3.4) denklemi göz önüne alınırsa,

$$(I_n + C) = (I_n - C)A \tag{3.6}$$

olduğu görülebilir. Burada C antisimetrik matrisinin karakteristik denklemi $\det(C - \lambda I_n) = 0$'dır. Diğer taraftan bir kare matrisin determinantı, öz değerleri çarpımı ve bir reel antisimetrik matrisin sıfırdan hariç öz değerleri imajiner eksen üzerinde olduğundan dolayı $\det C \geq 0$'dır. Bu ifade eder ki karakteristik denklem, katsayıları negatif olmayan bir polinom denklemidir. Yani karakteristik denklemin sıfıra eşit olması, tüm reel öz değerlerin sıfır olması ile mümkündür. O halde, C matrisinin öz değeri 1 olamaz. Bu durumda da $(I_n - C)$ regülerdir ve tersi vardır. Böylece (3.6) denkleminde verilen öz değerlerinden biri -1 olmayan A pozitif ortogonal matrislerinin cümlesi,

$$A = (I_n - C)^{-1}(I_n + C) \tag{3.7}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeye **Cayley formülü** denir.

Her reel antisimetrik matrise, (3.7) denklemi ile verilen bir Cayley matrisi ve her Cayley matrisine (3.4) ile verilen bir reel antisimetrik matris karşılık gelir. Burada dikkat edilmesi gereken husus; her A ortogonal matrisinin, antisimetrik bir matris ile elde edilemeyeceğidir. Bunun için $A+I_n$ matrisi regüler olmalıdır. Bu durumun aksini belirten bir örneğe aşağıda yer verilmiştir [10].

Örnek 3.1.1. $n=3$ için $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayda

$$A=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{bmatrix} a^2-b^2-c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ba & -a^2+b^2-c^2 & 2bc \\ 2ca & 2cb & -a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix}$$

matrisi ortogonal bir matris olduğu halde $\det\left(A+I_3\right)=0$ olduğundan $A+I_3$ regüler değildir [10].

Şimdi $n=3$ için $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayda, $A+I_3$ matrisinin regüler olmadığı durumları inceleyelim:

-1, A pozitif ortogonal matrisinin bir öz değeri olarak alınırsa $\det\left(A+I_3\right)=0$ olur. $\det A=1$ olduğundan, A nın öz değerleri $1,-1,-1$ olduğu kolaylıkla görülür. Bu durumda $1,-1$ öz değerleri için $As=s,\ Au=-u$ şartını sağlayan $\vec{s}$ ve $\vec{u}$ birim vektörleri bulmak mümkündür. O halde gerekli hesaplamalar yapılarak,

i) $A^T s=s$

ii) $-A^T u=u$

iii) $\left\langle \vec{s},\vec{\mathrm{u}}\right\rangle=\left\langle A\vec{s},A\vec{\mathrm{u}}\right\rangle$

elde edilir. Burada **i)** ve **ii)** önermelerinden $\left\langle \vec{s},\vec{\mathrm{u}}\right\rangle=0$ elde edilir. $\vec{v}=\vec{s}\wedge\vec{\mathrm{u}}$ olmak üzere

$$\left\langle A\vec{v}, \vec{\mathrm{u}} \right\rangle = 0$$

olur ve bundan dolayı $Av = \lambda v$ 'dir. Burada λ, A 'nın bir öz değeri olup, $\lambda = -1$ 'dir. Bu durumda $Av = \lambda v$ ve $\vec{s}, \vec{u}, \vec{v}$ vektörleri, $As = s, -Au = u, Av = \lambda v$ olacak şekilde $\mathbb{R}^3$ 'ün ortonormal bir bazı elde edilir [3].

Tanım 3.1.1. (Rodrigues Parametreleri): $\vec{f} = \vec{y} - \vec{x}$ ve $\vec{g} = \vec{y} + \vec{x}$, $\mathbb{E}^n, n-$boyutlu Öklid uzayda iki ortogonal vektör ve C, 3×3 tipinde antisimetrik bir matris olmak üzere

$$\vec{y} - \vec{x} = C\left(\vec{y} + \vec{x}\right) \tag{3.8}$$

olduğu görülmüştü. Bu denklem, dönen cismin noktalarının hareketli ve sabit çatıdaki koordinatları arasındaki ilişkiyi belirtir. (3.8) denklemi $n = 3$ için C matrisine karşılık gelen vektör $\vec{c}$ olmak üzere,

$$\vec{y} - \vec{x} = \vec{c} \wedge \left(\vec{y} + \vec{x}\right) \tag{3.9}$$

şeklinde verilebilir. (3.9) denklemi dönmeler için Rodrigues denklemi ve $\vec{c}$ vektörü de Rodrigues vektörü olarak adlandırılır. $\vec{y}$ ve $\vec{x}$ arasındaki bağıntılar, $\vec{y}$ ve $\vec{x}$ 'in düzleme dik izdüşümleri olan $\overrightarrow{y^*}$ ve $\overrightarrow{x^*}$ arasında da vardır. Bu durumda

$$Ax^* = y^* \tag{3.10}$$

elde edilir. $Ax = y$ dönmesinden elde edilen $\vec{y} - \vec{x} = \vec{c} \wedge \left(\vec{y} + \vec{x}\right)$ denkleminin düzlemdeki karşılığı (3.10) dönme denklemi yardımıyla

$$\overrightarrow{y^*}-\overrightarrow{x^*}=\vec{c}\wedge\left(\overrightarrow{y^*}+\overrightarrow{x^*}\right)$$

şeklindedir. O halde $\sin\left(\vec{c},\overrightarrow{y^*}+\overrightarrow{x^*}\right)=1$ olduğundan

$$\left\|\overrightarrow{y^*}-\overrightarrow{x^*}\right\|=\left\|\vec{c}\right\|\left\|\overrightarrow{y^*}+\overrightarrow{x^*}\right\| \tag{3.11}$$

olduğu göz önünde bulundurulur ve $k\neq 0\in\mathbb{R}^+$ için $\left\|\overrightarrow{x^*}\right\|=\left\|\overrightarrow{y^*}\right\|=k$ denirse

$$\left\|\overrightarrow{y^*}-\overrightarrow{x^*}\right\|=2k\sin\phi/2 \tag{3.12}$$

ve

$$\left\|\overrightarrow{y^*}+\overrightarrow{x^*}\right\|=2k\cos\phi/2 \tag{3.13}$$

ifadeleri elde edilir. (3.12) ve (3.13) denklemleri oranlanırsa,

$$\frac{\left\|\overrightarrow{y^*}-\overrightarrow{x^*}\right\|}{\left\|\overrightarrow{y^*}+\overrightarrow{x^*}\right\|}=\tan\phi/2 \tag{3.14}$$

olduğu görülür. (3.11) ve (3.14) denklemleri göz önünde bulundurulursa,

$$\left\|\vec{c}\right\|=\tan\phi/2 \tag{3.15}$$

elde edilir. $\vec{c}$ yönündeki birim vektör $\vec{s}=(a,b,c)$ ise $\vec{c}$ vektörünün bileşenleri

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \tan(\phi/2)\,a \\
c_2 &= \tan(\phi/2)\,b \\
c_3 &= \tan(\phi/2)\,c
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

şeklindedir ve Rodrigues parametreleri olarak adlandırılır [10].

Tanım 3.1.2. (Euler Parametreleri): A pozitif ortogonal matrisi; ϕ dönme açısı olmak üzere, (3.15) denkleminden elde edilen $C = \tan(\phi/2)S$ ifadesi ile verilen $\vec{s}$ birim vektörünün terimleri cinsinden ifade edilebilir. Öyle ki (3.7) denkleminden $n = 3$ için

$$
\begin{aligned}
A &= (I_3 - C)^{-1}(I_3 + C) \\
&= \left[I_3 - S\tan(\phi/2)\right]^{-1}\left[I_3 + S\tan(\phi/2)\right]
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$
A = \left[I_3\cos(\phi/2) - S\sin(\phi/2)\right]^{-1}\left[I_3\cos(\phi/2) + S\sin(\phi/2)\right] \tag{3.17}
$$

olur. Burada

$$
F = \left[I_3\cos(\phi/2) + S\sin(\phi/2)\right] \tag{3.18}
$$

alınırsa, bu matris içindeki

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \cos(\phi/2) \\
f_1 &= a\sin(\phi/2) \\
f_2 &= b\sin(\phi/2) \\
f_3 &= c\sin(\phi/2)
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

sabitlerine A matrisinin Euler parametreleri denir [10].

Tanım 3.1.3. (Cayley Dönüşümü): S**,** öz değeri -1'den farklı, 3×3 tipinde bir antisimetrik matris olsun.

$$\begin{aligned} & f: so(3) \to SO(3) \\ & \qquad S \to f(S) = A = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S) \end{aligned} \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlanan f dönüşümü, S matrisinin Cayley dönüşümü olarak adlandırılır. Burada $so(3)$ ve $SO(3)$, sırasıyla, 3×3 tipinde antisimetrik ve ortogonal matrisler cümlesidir[10].

3.2. Öklid Uzayda Dönme Matrisleri Yardımıyla Cayley Dönüşümü

$0 \leq \phi \leq \pi$ olmak üzere, $R(\vec{s},\phi)$ ve $R^{-1}(\vec{s},\phi) = R(-\vec{s},\phi)$ ifadeleri, sırasıyla, $\mathbb{R}^3$'te bir $\vec{s}$ birim vektörü etrafında ϕ açısı kadar pozitif ve $-\phi$ açısı kadar negatif dönmeler belirtsin. Bu durumda $A \in SO(3)$ olmak üzere, bir dönme altında $\vec{r} \to \overrightarrow{r^*}$ oluyorsa $R(\vec{s},\phi) r = r^* = Ar$ yazılabilir. Burada orijin noktasından geçen bir ξ düzlemini ve $\vec{s}$ birim vektörüne dik olan $\vec{\xi} \in \xi$ vektörünü ele alalım. Öte yandan $\vec{s} = (a,b,c)$ birim vektörüne karşılık gelen bir antisimetrik matris

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

olmak üzere, $Sr = \vec{s} \wedge \vec{r}$ ve $Ss = \vec{s} \wedge \vec{s}$'dir. Bu durumda $S\xi = \vec{s} \wedge \vec{\xi}$ eşitliği de sağlanır. Bu ifade eder ki; S antisimetrik matrisi $\vec{\xi}$ vektörünü, $\vec{s}$ ekseni etrafında $\dfrac{\pi}{2}$ açısı kadar döndürür [3].

Teorem 3.2.1. $R(\vec{s},\phi) r = Ar$ eşitliği göz önünde bulundurularak, $A \in SO(3)$ matrisi

$$A = I_3 + (\sin\phi) S + (1-\cos\phi) S^2 = f(S) \tag{3.22}$$

olarak elde edilir [3].

Sonuç. 3.2.1. $A \in SO(3)$ matrisine karşılık gelen dönme ekseni

$$A - A^T = 2(\sin\phi) S \tag{3.23}$$

denklemi ile elde edilir [3].

Sonuç. 3.2.2. $A \in SO(3)$ matrisine karşılık gelen dönme açısı

$$IzA = 1 + 2\cos\phi \tag{3.24}$$

denklemi ile elde edilir [3].

Teorem 3.2.2. S, 3×3 tipinde bir antisimetrik matris olmak üzere,

$$A = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S)$$

ise A matrisi pozitif ortogonal bir dönme belirtir. Ayrıca burada

$$\vec{s} = (a,b,c),\ \tan\frac{\phi}{2} = \|\vec{s}\| = s \neq 1,\ \bar{s} = \frac{\vec{s}}{s} \quad \text{ve} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir [3].

Teorem 3.2.3. $A \in SO(3)$ ve $S = (I_3 - A)(I_3 + A)^{-1}$ ise S antisimetrik bir matris ve S'nin Cayley dönüşümü A'dır [3].

Teorem 3.2.4. $(I_3 - S)^{-1}$ ve $(I_3 + S)$ matrislerinin çarpımı değişmelidir [3].

3.3. Genelleme Yoluyla Cayley Formülü ve Geometrik Yorumu

Genelleştirilmiş Cayley dönüşümünü elde etmek için gerekli teoremler aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 3.3.1. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \le i \le n$ reel değerli bir polinom ve 3×3 tipindeki S matrisi antisimetrik olmak üzere, $f(S)$ regülerdir [3].

Teorem 3.3.2. $A \in SO(3)$, 3×3 tipindeki S antisimetrik bir matris ve $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \le i \le n$ olmak üzere,

$$A = \left[f\left(S^T\right) \right]^{-1} f(S) \tag{3.25}$$

olsun. Bu taktirde, $f\left(S^T\right)$ve $f(S)$ matrisleri değişmelidir [3].

Teorem 3.3.3. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \le i \le n$ ve 3×3 tipindeki S antisimetrik bir matris olmak üzere,

$$A = \left[f\left(S^T\right) \right]^{-1} f(S)$$

ise $A \in SO(3)$ olarak elde edilir [3].

Teorem 3.3.4. $A = \left[f\left(S^T\right) \right]^{-1} f(S)$ şartını sağlayan A matrisi pozitif ortogonal bir matris ise $\left[f\left(S^T\right) \right]^{-1} f(S) = f(S) \left[f\left(S^T\right) \right]^{-1}$'dir [3].

Son olarak $f(S)$'nin farklı durumlarını ele alalım:

i) $f(S)=I_3+S$ seçilir ve (3.25) denklemi göz önünde bulundurulursa,

$$A=(I_3-S)^{-1}(I_3+S) \tag{3.26}$$

elde edilir. Böylece f'ye en basit Cayley dönüşümü denir [3].

ii) $f(S)=I_3-mS+nS^2$ seçilir ve (3.25) denklemi göz önünde bulundurulursa,

$$A=\left(I_3+mS+nS^2\right)^{-1}\left(I_3-mS+nS^2\right) \tag{3.27}$$

bulunur. Böylece f'ye genelleştirilmiş Cayley dönüşümü denir. Burada

$$f(S)=a_nS^n+a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_1S+a_0\,\mathrm{I},\quad a_i\in\mathbb{R}, a_0\neq 0,\ 0\leq i\leq n$$

olduğundan ve $S^{2n+1}=(-1)^nS$, $S^{2n+2}=(-1)^nS^2$, $n=0,1,2,\ldots$, olduğundan, A Cayley formülünün yukarıda verilen iki formdan farklı bir halde olması mümkün değildir [3].

Öte yandan S matrisinin öz denklemi $\lambda^3+s^2\lambda=0$ olmak üzere, öz değerleri $0,is,-is$ şeklinde elde edilir. O halde A matrisinin öz değerleri $1,(p+iq)(p-iq)$ ve $(p-iq)(p+iq)$ olarak bulunur. $z=p+iq=re^{i\phi}$ seçilirse, $z(\overline{z})^{-1}=(\overline{z})^{-1}z=e^{-2i\phi}$ ve $Ss=0,\ As=s$ olduğundan, $A\in SO(3)$ genelleştirilmiş Cayley matrisi geometrik olarak $R(\vec{s},2\phi)$ dönme hareketini temsil eder [3].

3.4. Lorentz Uzayda 1-Parametreli Hareketler için Cayley Formülü, Euler - Rodrigues Parametreleri ve Cayley Dönüşümü

Tanım 3.4.1. $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}_1^3$ spacelike (timelike) vektörler ve $A\in SO(3,1)$ olmak üzere, Lorentz uzayda orijin etrafında bir dönme hareketi

$$y = Ax \tag{3.28}$$

şeklindedir. $\vec{f}$ ve $\vec{g}$, $3-$boyutlu Lorentz uzayda $\vec{f}=\vec{y}-\vec{x}$ ve $\vec{g}=\vec{y}+\vec{x}$ şeklinde iki vektör olarak seçilirse $\left\langle \vec{f},\vec{g}\right\rangle_L = 0$'dır. Böylece, A matrisinin öz değerinin -1'den farklı olduğu durumlarda $(A+I_3)$ matrisi regülerdir ve

$$f = (A-I_3)(A+I_3)^{-1}\, g$$

dir. Burada C matrisi

$$C = (A-I_3)(A+I_3)^{-1} \tag{3.29}$$

olarak seçilirse

$$f = Cg \tag{3.30}$$

bulunur. Ayrıca (3.29) ile verilen C matrisi Lorentz anlamda antisimetriktir. Bu eşitlikten elde edilen A semiortogonal matrisi, C Lorentz anlamda antisimetrik matrisi için Cayley formülü olarak adlandırılır [10].

Tanım 3.4.2. (Rodrigues Parametreleri): $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}_1^3$ spacelike vektörler olmak üzere $\vec{f}=\vec{y}-\vec{x}$ ve $\vec{g}=\vec{y}+\vec{x}$ olduğundan bir A semiortogonal matrisi için (3.30) ifadesi

$$\vec{y}-\vec{x}=\vec{c}\wedge_L\left(\vec{y}+\vec{x}\right)$$

halini alır. Bu son denklem Lorentz uzayda dönmeler için Rodrigues denklemi ve $\vec{c}$ vektörü de spacelike Rodrigues vektörü olarak adlandırılır. Ayrıca $\vec{y}$ ve $\vec{x}$ arasındaki ilişki, $\vec{y}$ ve $\vec{x}$'in düzleme dik izdüşümleri olan $\overrightarrow{y^*}$ ve $\overrightarrow{x^*}$ arasında da geçerlidir. Böylece

$$\frac{\left\|\overrightarrow{y^*}-\overrightarrow{x^*}\right\|_L}{\left\|\overrightarrow{y^*}+\overrightarrow{x^*}\right\|_L}=\tanh\phi/2$$

ve

$$\left\|\vec{c}\right\|_L=\tanh\phi/2 \tag{3.31}$$

dir. $\vec{c}$ yönündeki spacelike birim vektör $\vec{s}=\left(a,b,c\right)$ ise $\vec{c}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} c_1&=\tanh\left(\phi/2\right)a\\ c_2&=\tanh\left(\phi/2\right)b\\ c_3&=\tanh\left(\phi/2\right)c \end{aligned} \tag{3.32}$$

şeklindedir. Burada a,b ve c sabitlerine Lorentz uzayda Rodrigues parametreleri denir [14]. Öte yandan $\vec{c}$ vektörü timelike bir vektör olarak alınırsa, $\vec{c}$ yönündeki timelike birim vektör $\vec{s}=\left(a,b,c\right)$ olmak üzere $\vec{c}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} c_1&=\tan\left(\phi/2\right)a\\ c_2&=\tan\left(\phi/2\right)b\\ c_3&=\tan\left(\phi/2\right)c \end{aligned} \tag{3.33}$$

dir [13].

Tanım 3.4.3. (Euler Parametreleri): A semiortogonal matrisi için Cayley formülü; ϕ dönme açısı olmak üzere, (3.31) denkleminden elde edilen $C=\tanh(\phi/2)S$ ile belirlenen $\vec{s}$ spacelike birim vektörünün terimleri cinsinden verilebilir. Öyle ki

$$\begin{aligned} A &= (I_3 - C)^{-1}(I_3 + C) \\ &= \left[I_3 - S\tanh(\phi/2)\right]^{-1}\left[I_3 + S\tanh(\phi/2)\right] \end{aligned}$$

şeklindedir ve buradan da

$$A=\left[I_3\cosh(\phi/2)-S\sinh(\phi/2)\right]^{-1}\left[I_3\cosh(\phi/2)+S\sinh(\phi/2)\right]$$

elde edilir. Eğer

$$F=\left[I_3\cosh(\phi/2)+S\sinh(\phi/2)\right] \tag{3.34}$$

seçilirse, bu matris içindeki

$$\begin{aligned} f_0 &= \cosh(\phi/2) \\ f_1 &= a\sinh(\phi/2) \\ f_2 &= b\sinh(\phi/2) \\ f_3 &= c\sinh(\phi/2) \end{aligned} \tag{3.35}$$

sabitlerine, A matrisinin Lorentz uzayda spacelike bir eksen için Euler parametreleri denir [14].

Öte yandan $\vec{s}$ vektörü timelike bir vektör olarak seçilirse, Euler parametreleri

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \cos(\phi/2) \\
f_1 &= a\sin(\phi/2) \\
f_2 &= b\sin(\phi/2) \\
f_3 &= c\sin(\phi/2)
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

olur [13].

Teorem 3.4.1. Lorentz anlamda antisimetrik bir S matrisi ve bu matrise karşılık gelen vektör $\vec{s}=(a,b,c)$ olmak üzere, $\vec{s}$ vektörü spacelike bir vektör ise S matrisinin öz değerleri $0,-1,1$'dir. Eğer $\vec{s}=(a,b,c)$ vektörü timelike olarak seçilirse öz değerleri $0,-i,i$ olur [10].

Tanım 3.4.4. (Cayley Dönüşümü): S matrisi, öz değeri -1'den farklı ve 3×3 tipinde Lorentz anlamda antisimetrik bir matris olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&f : so(3,1) \rightarrow SO(3,1) \\
&\qquad S \rightarrow f(S) = A = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S)
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

şeklinde tanımlanan f dönüşümüne S matrisinin Cayley dönüşümü denir. Burada $so(3,1)$ ve $SO(3,1)$, sırasıyla, 3×3 tipinde Lorentz anlamda antisimetrik ve semiortogonal matrisler cümlesidir [10].

Teorem 3.4.2. S Lorentz anlamda antisimetrik matrisi

$$
S = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}
$$

olmak üzere, bu matrise karşılık gelen $\vec{s}$ ekseni timelike veya spacelike (birim olma durumu hariç) seçildiğinde A semiortogonal matrisi

$$A=\frac{1}{1+a^2-b^2-c^2}\begin{bmatrix}1+a^2+b^2+c^2 & 2(c-ab) & -2(ac+b)\\ 2(ab+c) & 1-a^2-b^2+c^2 & -2(bc+a)\\ 2(ac-b) & 2(a-bc) & 1-a^2+b^2-c^2\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $\vec{s}=(a,b,c)$ olmak üzere, $A\vec{s}=\vec{s}$ 'dir [10].

3.5. Lorentz Uzayda Dönme Matrisleri Yardımıyla Cayley Dönüşümü

$\vec{s}$ spacelike bir eksen ve $\vec{\xi}$ timelike bir vektör olmak üzere, $\vec{\xi}$ vektörünü kendisine dik bir $\vec{s}$ ekseni etrafında ϕ açısı kadar döndürülerek elde edilen $A\in SO(3,1)$ matrisi;

$$A=S^0+(\sinh\phi)S+(\cosh\phi-1)S^2=f(S)=R(\vec{s},\phi) \tag{3.38}$$

şeklinde elde edilir [10].

Sonuç. 3.5.1. $A\in SO(3,1)$ matrisine karşılık gelen dönme ekseni

$$A-A^{-1}=2(\sinh\phi)S \tag{3.39}$$

dir [10].

Sonuç. 3.5.2. $A\in SO(3,1)$ matrisine karşılık gelen dönme açısı

$$IzA=1+2\cosh\phi \tag{3.40}$$

dir [10].

Şimdi $\mathbb{E}_1^n$ Lorentz uzayda $n=2$ ve $n=3$ özel durumları için dönme matrislerini inceleyelim:

i) Eğer $n=2$ ise

$$S=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Lorentz anlamda antisimetrik bir matris ve bu matrise karşılık gelen spacelike birim vektör $\vec{s}=(0,1)$ için üstel form

$$e^{\phi S}=(\cosh\phi)I_2+(\sinh\phi)S \tag{3.41}$$

dir [10].

ii) Eğer $n=3$ ise

$$S=\begin{bmatrix}0 & c & -b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}$$

Lorentz anlamda antisimetrik bir matris ve bu matrise karşılık gelen spacelike birim vektör $\vec{s}=(a,b,c)$ için üstel form

$$e^{\phi S}=I_3+(\sinh\phi)S+(\cosh\phi-1)S^2 \tag{3.42}$$

dir. Eğer $\vec{s}=(a,b,c)$ timelike bir vektör seçilir ve benzer işlemler tekrarlanırsa üstel form,

$$e^{\phi S}=I_3+(\sin\phi)S+(1-\cos\phi)S^2 \tag{3.43}$$

olur [10].

BÖLÜM 4. ÖKLİD UZAYDA 1-PARAMETRELİ HOMOTETİK HAREKETLER İÇİN CAYLEY FORMÜLÜ, EULER PARAMETRELERİ ve UYGULAMALARI

Çalışmamızın orijinal kısmının başlangıcı olan bu bölümde, $\mathbb{E}^n$, n-boyutlu Öklid uzayda, $1-$parametreli homotetik hareketler için Cayley formülü verilecektir. Buradan hareketle $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayda homotetik hareketler için Rodrigues – Euler parametreleri tanımlanıp, homotetik Cayley dönüşümü literatüre katılacak ve örneklerle desteklenecektir. Ayrıca homotetik dönme matrisleri tanımlanacak ve genelleme yoluyla Cayley formülü elde edilerek geometrik olarak yorumlanacaktır.

4.1. $\mathbb{E}^n$, $n-$Boyutlu Öklid Uzayda, $1-$Parametreli Homotetik Hareketler için Cayley Formülü

$\mathbb{E}^n$, n – boyutlu Öklid uzayda bir cismin $1-$parametreli homotetik hareketi,

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hA & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $A \in SO(n)$ pozitif ortogonal bir matris, $c \in \mathbb{R}_1^n$ bir sütun matrisi ve $A = A(t)$, $h = h(t)$ ve $c = c(t)$, t zaman parametresinin C^∞ fonksiyonlarıdır. x ve y aynı bir P noktasının, sırasıyla, R hareketli ve R' sabit uzayının ortonormal koordinat sistemlerine göre yer vektörleridir. $t = t_0$ anında R' ve R'nin koordinat sistemleri çakışık olarak ele alınacaktır. Bu çalışmada yukarıdaki $1-$parametreli homotetik hareket R / R' ile gösterilecektir. Bu hareketin orijin etrafında bir homotetik dönme hareketi belirten kısmı, h homotetik sabiti olmak üzere,

$$y = hAx,\ h = h(t) \neq 0 \tag{4.2}$$

ile verilir. (4.2) eşitliğinde $hA = B$ olarak alınırsa,

$$y = Bx \tag{4.3}$$

olur. Öte yandan $\vec{f} = \vec{y} - h\vec{x}$ ve $\vec{g} = \vec{y} + h\vec{x}$, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayda iki vektör olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{f}, \vec{g} \right\rangle &= \left\langle \vec{y} - h\vec{x}, \vec{y} + h\vec{x} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{y}, \vec{y} \right\rangle - h\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle + h\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle - h^2\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle \\
&= \left\langle B\vec{x}, B\vec{x} \right\rangle - h^2\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle \\
&= (Bx)^T (Bx) - h^2\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle \\
&= x^T B^T Bx - h^2\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle \\
&= x^T (hA)^T (hA)x - h^2\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle \\
&= x^T A^T h^T hAx - h^2\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle \\
&= x^T h^2 A^T Ax - h^2\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle \\
&= h^2 x^T x - h^2\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle \\
&= h^2\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle - h^2\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle = 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür ki bu da $\vec{f}$ ve $\vec{g}$ vektörlerinin ortogonal olduğunu gösterir. $y = Bx$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\vec{f} &= B\vec{x} - h\vec{x} \\
&= (B - hI_n)\vec{x}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

ve

$$\begin{aligned}\vec{g} &= B\vec{x} + h\vec{x} \\ &= \left(B + hI_n\right)\vec{x}\end{aligned} \tag{4.5}$$

bulunur. Öte yandan Teorem 2.1.2'den,

$$P(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_n\right)$$

karakteristik denklemi için

$$P(A) = 0$$

dır. O halde λ, B matrisinin öz değerlerini göstermek üzere, B'nin karakteristik denklemi $\det\left(B - \lambda I_n\right) = 0$'dır. Burada $\lambda = -h$ öz değerini hariç tutarsak $\det\left(B + hI_n\right) \neq 0$ olacaktır. Bu durumda $B + hI_n$ matrisi regülerdir. (4.5) denkleminden $\vec{x}$ elde edilip, (4.4) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \left(B + hI_n\right)\vec{x} \\ \vec{x} &= \left(B + hI_n\right)^{-1}\vec{g}\end{aligned}$$

ve

$$\vec{f} = \left(B - hI_n\right)\left(B + hI_n\right)^{-1}\vec{g} \tag{4.6}$$

elde edilir. Burada

$$C = \left(B - hI_n\right)\left(B + hI_n\right)^{-1} \tag{4.7}$$

seçilirse

$$\vec{f} = C\vec{g} \tag{4.8}$$

olur.

Teorem 4.1.1. (4.7) denklemi ile belirlenen $n \times n$ tipindeki C matrisi antisimetriktir.

İspat. (4.8) denkleminden

$$\left\langle \vec{f}, \vec{g} \right\rangle = \left\langle C\vec{g}, \vec{g} \right\rangle = \left(Cg \right)^T g = 0$$

yazılabilir. O halde

$$Cg = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & . & . & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & . & . & . & c_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & . & . & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ . \\ . \\ . \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}g_1 + c_{12}g_2 + . \quad . \quad . + c_{1n}g_n \\ c_{21}g_1 + c_{22}g_2 + . \quad . \quad . + c_{2n}g_n \\ . \\ . \\ . \\ c_{n1}g_1 + c_{n2}g_2 + . \quad . \quad . + c_{nn}g_n \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\left(Cg \right)^T g = \begin{bmatrix} c_{11}g_1 + c_{12}g_2 + . \quad . \quad . + c_{1n}g_n & c_{21}g_1 + c_{22}g_2 + . \quad . \quad . \\ + c_{2n}g_n \quad . \quad . \quad . & c_{n1}g_1 + c_{n2}g_2 + . \quad . \quad . + c_{nn}g_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ . \\ . \\ . \\ g_n \end{bmatrix} = 0$$

dır ve buradan da

$$\begin{aligned} \left(Cg \right)^T g = {} & c_{11}g_1g_1 + c_{12}g_2g_1 + . \quad . \quad . + c_{1n}g_ng_1 + c_{21}g_1g_2 + c_{22}g_2g_2 + . \quad . \quad . \\ & + c_{2n}g_ng_2 + c_{n1}g_1g_n + c_{n2}g_2g_n + . \quad . \quad . + c_{nn}g_ng_n = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{i\neq j}^{n}\left(c_{ij}+c_{ji}\right)g_i g_j+\sum_{i=j}^{n}c_{ij}g_i g_j=0 \tag{4.9}$$

elde edilir. Bu ifadenin sıfıra eşit olabilmesi için

$c_{ij}+c_{ji}=0$ ve $c_{ii}=0$

olmalıdır. Bu ifade eder ki C matrisi, antisimetriktir.

Öte yandan (4.7) denkleminden,

$$\begin{aligned} C\left(B+hI_n\right)&=\left(B-hI_n\right)\\ CB+Ch&=B-hI_n\\ Ch+hI_n&=B-CB \end{aligned}$$

olup,

$$h\left(I_n+C\right)=\left(I_n-C\right)B \tag{4.10}$$

bulunur. Burada C antisimetrik matrisinin karakteristik denklemi $\det\left(C-\lambda I_n\right)=0$ olur. Diğer taraftan bir kare matrisin determinantı, öz değerleri çarpımıdır ve Teorem 2.1.5 gereğince bir reel antisimetrik matrisin sıfırdan farklı öz değerleri imajiner eksen üzerindedir. Bu bilgiler ışığında $\det\left(C-\lambda I_n\right)=0$ ifadesinin köklerinin sayısı tek ise biri sıfır, diğerleri $\mp ia,\ a\in\mathbb{R}$ şeklinde birbirinin eşleniği; köklerinin sayısı çift ise $\mp ia,\ a\in\mathbb{R}$ şeklinde birbirinin eşleniği ifadelerdir. Sıfırdan farklı eşlenik kompleks ifadelerin çarpımı pozitif olduğundan $\det C\geq 0$'dır. Bu durumda karakteristik denklem, katsayıları negatif olmayan bir polinom denklemidir. Öyle ki karakteristik denklemin sıfıra eşit olması, tüm reel öz değerlerin sıfır olması ile mümkündür. O halde 1 öz değer olamaz. Bu durumda da I_n-C matrisi regülerdir. O halde (4.10) denklemi ile verilen öz değerlerinden biri $-h$ olmayan B homotetik matrislerinin cümlesi,

$$B = h\left(I_n - C\right)^{-1}\left(I_n + C\right) \tag{4.11}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeye $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayda **homotetik Cayley formülü** denir. Böylece $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayda her reel antisimetrik matrise, (4.11) ile ifade edilen bir homotetik Cayley matrisi ve her homotetik Cayley matrisine, (4.7) ile ifade edilen bir antisimetrik matris karşılık gelir.

Teorem 4.1.2. (4.11) denklemi ile verilen B matrisi, bir homotetik Cayley matrisi ise

$$B + hI_n = 2h\left(I_n - C\right)^{-1} \tag{4.12}$$

olarak elde edilir.

İspat. (4.11) denkleminden

$$\begin{aligned}
B &= h\left(I_n - C\right)^{-1}\left(I_n + C\right) \\
B + hI_n &= h\left(I_n - C\right)^{-1}\left(I_n + C\right) + hI_n \\
&= h\left(I_n - C\right)^{-1}\left[\left(C - I_n\right) + 2I_n\right] + hI_n \\
&= -h\left(I_n - C\right)^{-1}\left(I_n - C\right) + 2h\left(I_n - C\right)^{-1} + hI_n \\
&= -hI_n + 2hI_n\left(I_n - C\right)^{-1} + hI_n
\end{aligned}$$

olup

$$B + hI_n = 2h\left(I_n - C\right)^{-1}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.1. Özel olarak (4.12) denkleminde $h=1$ alınırsa, C antisimetrik bir matris olmak üzere,

$$B=\left(I_n-C\right)^{-1}\left(I_n+C\right) \tag{4.13}$$

Cayley matrisi elde edilir [10].

4.2. Öklid Uzayda Homotetik Hareketler için Rodrigues Denklemi

Rodrigues denklemi, $3-$boyutlu uzayda, bir vektörün dönmesini inceler ve bu dönmeye karşılık gelen pozitif ortogonal dönme matrisini hesaplar. Bu bölümde 170 yılı aşkın bir maziye sahip Rodrigues denklemi, Öklid uzayda homotetik hareketler için genelleştirilmiştir. Ayrıca Rodrigues formülü günümüzde, döndürülmüş bir noktanın pozisyonunu hesaplamak için, uçuş simülatörleri ve bilgisayar oyunları gibi bazı yazılım uygulamalarında kullanılmaktadır.

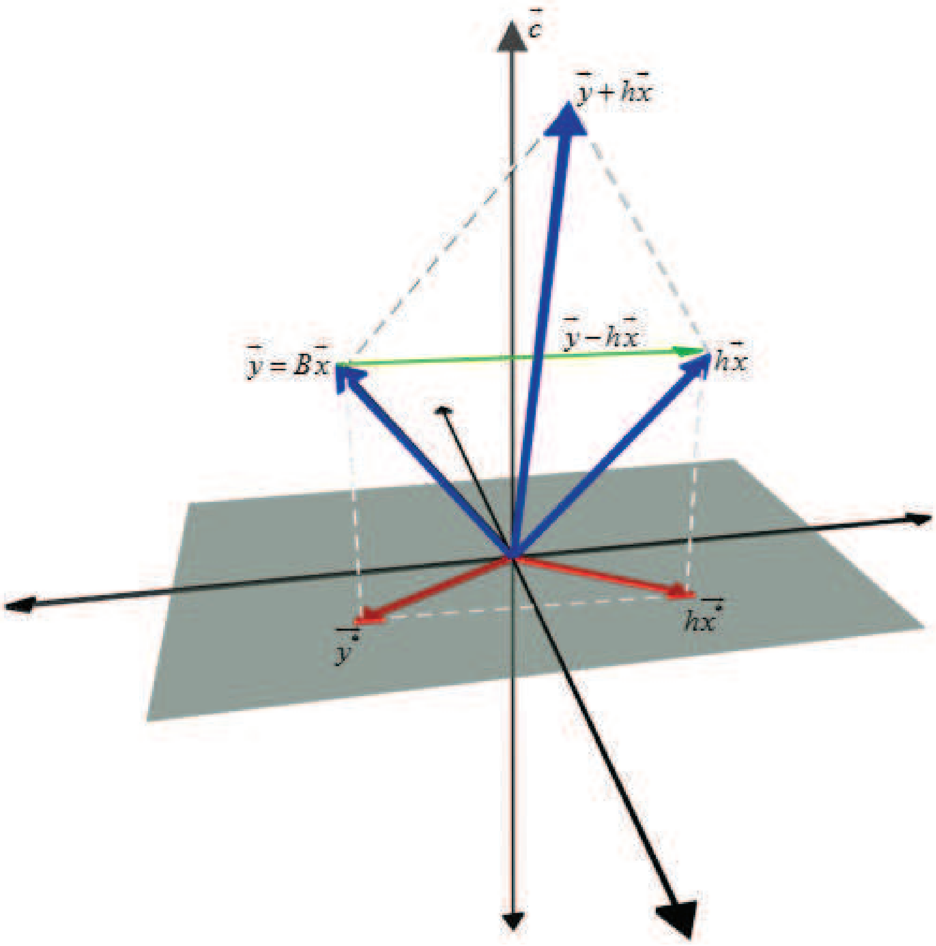
(4.8) denkleminden bir A pozitif ortogonal matrisi için $h\neq 0$ ve $hA=B$ olmak üzere,

$$\vec{y}-h\vec{x}=C\left(\vec{y}+h\vec{x}\right)$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklem, dönme hareketi yapan cismin belli noktalarının hareketli ve sabit uzayların çatılarına göre koordinatları arasındaki ilişkiyi verir. $3-$boyutlu uzayda antisimetrik matrisler ve vektörel çarpım arasındaki ilişki yardımıyla

$$\vec{y}-h\vec{x}=\vec{c}\wedge\left(\vec{y}+h\vec{x}\right) \tag{4.14}$$

yazılabilir. Bu denklem, Öklid uzayda homotetik hareketler için Rodrigues denklemi ve $\vec{c}$ vektörü de Öklid uzayda homotetik dönmeler için Rodrigues vektörüdür.



Şekil 4.1. Homotetik hareketler için Rodrigues denklemi temsili

Burada $\vec{y}$ ve $h\vec{x}$ vektörlerinin $\vec{c}$ ye paralel bir şekilde düzleme dik izdüşümleri $\overrightarrow{y^*}$ ve $\overrightarrow{hx^*}$ olmak üzere, $\overrightarrow{y^*}$, $\overrightarrow{hx^*}$ ve $\overrightarrow{y^*}-\overrightarrow{hx^*}$ vektörleri, düzlemin normali olan $\vec{c}$ vektörüne diktirler. Böylece,

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \overrightarrow{y^*} + \lambda\vec{c} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{y^*} = \vec{y} - \lambda\vec{c} \\ h\vec{x} &= \overrightarrow{hx^*} + \lambda\vec{c} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{hx^*} = h\vec{x} - \lambda\vec{c} \end{aligned} \tag{4.15}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{hx^*} &= A\left(h\vec{x} - \lambda\vec{c}\right) \\ &= Ah\vec{x} - A\lambda\vec{c} \end{aligned}$$

olur. Burada $\left\langle \vec{c},\vec{c} \right\rangle = \left\langle A\vec{c}, A\vec{c} \right\rangle$ eşitliği sağlandığından, $\vec{c}$ ve $A\vec{c}$ vektörlerinin boylarının eşit olduğu söylenebilir. Öte yandan düzlemin normali yani $\vec{c}$ tek olduğundan $A\vec{c}$ yerine $\vec{c}$ yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} Ah\overrightarrow{x^*} &= y - \lambda\vec{c} \\ &= \overrightarrow{y^*} \end{aligned}$$

elde edilir. $B = hA$ olduğundan

$$B\overrightarrow{x^*} = \overrightarrow{y^*} \tag{4.16}$$

yazılabilir. Bu durumda $\vec{y}$ ve $h\vec{x}$ vektörleri ile ilgili bağıntılar, $\vec{y}$ ve $h\vec{x}$ vektörlerinin düzleme dik izdüşümleri olan $\overrightarrow{y^*}$ ve $h\overrightarrow{x^*}$ vektörleri için de sağlanmış olur. O halde $B\vec{x} = \vec{y}$ dönmesinden elde edilen $\vec{y} - h\vec{x} = \vec{c} \wedge \left(\vec{y} + h\vec{x}\right)$ denkleminin düzlemdeki karşılığı (4.16) dönme denklemi göz önünde bulundurularak

$$\overrightarrow{y^*} - h\overrightarrow{x^*} = \overrightarrow{c^*} \wedge \left(\overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*}\right)$$

şeklindedir. Böylece

$$\left\| \overrightarrow{y^*} - h\overrightarrow{x^*} \right\| = \left\| \vec{c} \right\| \left\| \overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*} \right\| \sin\left(\vec{c}, \overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*}\right)$$

dir ve $\sin\left(\vec{c}, \overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*}\right) = 1$ olduğundan,

$$\left\| \overrightarrow{y^*} - h\overrightarrow{x^*} \right\| = \left\| \vec{c} \right\| \left\| \overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*} \right\| \tag{4.17}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\left\|\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}\right\|=\sqrt{\left\langle \overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*},\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}\right\rangle}$$
$$=\sqrt{\left\langle \overrightarrow{y^*},\overrightarrow{y^*}\right\rangle-2h\left\langle \overrightarrow{y^*},\overrightarrow{x^*}\right\rangle+h^2\left\langle \overrightarrow{x^*},\overrightarrow{x^*}\right\rangle}$$
$$=\sqrt{\left\|\overrightarrow{y^*}\right\|^2-2h\left\|\overrightarrow{y^*}\right\|\left\|\overrightarrow{x^*}\right\|\cos\phi+h^2\left\|\overrightarrow{x^*}\right\|^2}$$

dır. Homotetik hareket uzaklığı korumadığı için

$$\left\|\overrightarrow{x^*}\right\|=k \text{ ve } \left\|\overrightarrow{y^*}\right\|=hk$$

eşitlikleri $k\neq 0\in\mathbb{R}^+$ için yazılabilir. O halde

$$\left\|\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}\right\|=\sqrt{h^2k^2-2h^2k^2\cos\phi+h^2k^2}$$
$$=\sqrt{2h^2k^2-2h^2k^2\cos\phi}$$
$$=hk\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\phi}$$
$$=hk\sqrt{2}\sqrt{1-\left(1-2\sin^2\phi/2\right)}$$

olup

$$\left\|\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}\right\|=2kh\sin\phi/2 \tag{4.18}$$

dır. Benzer işlemler yinelenerek,

$$\left\|\overrightarrow{y^*}+h\overrightarrow{x^*}\right\|=\sqrt{h^2k^2+2h^2k^2\cos\phi+h^2k^2}$$
$$=\sqrt{2h^2k^2+2h^2k^2\cos\phi}$$
$$=hk\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\phi}$$
$$=hk\sqrt{2}\sqrt{1+\left(2\cos^2\phi/2-1\right)}$$

olup

$$\left\| \overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*} \right\| = 2kh\cos\phi/2 \tag{4.19}$$

ifadesi elde edilir. (4.18) ve (4.19) denklemleri oranlanırsa,

$$\frac{\left\| \overrightarrow{y^*} - h\overrightarrow{x^*} \right\|}{\left\| \overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*} \right\|} = \frac{2kh\sin\phi/2}{2kh\cos\phi/2}$$

ve

$$\frac{\left\| \overrightarrow{y^*} - h\overrightarrow{x^*} \right\|}{\left\| \overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*} \right\|} = \tan\phi/2 \tag{4.20}$$

olur. (4.17) ve (4.20) denklemlerinden

$$\left\| \vec{c} \right\| = \tan\phi/2 \tag{4.21}$$

elde edilir. $\vec{c}$ yönündeki birim vektör $\vec{s} = (a, b, c)$ olarak seçilirse $\vec{c}$ vektörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} c_1 &= \tan(\phi/2)a \\ c_2 &= \tan(\phi/2)b \\ c_3 &= \tan(\phi/2)c \end{aligned} \tag{4.22}$$

şeklindedir ve Öklid uzayda homotetik hareketler için Rodrigues parametreleri olarak adlandırılır.

Sonuç 4.2.1. (3.16) ve (4.22) denklemleri karşılaştırıldığında Öklid uzayda genel ve homotetik hareketler için, Rodrigues parametreleri değişmez.

4.3. Öklid Uzayda Homotetik Hareketler için Euler Parametreleri

Bu bölümde Euler parametreleri, Öklid uzayda homotetik hareketler için genelleştirilmiştir. Euler, tanımladığı dönme koordinatları cümlesiyle; bir çatıyı belirli bir açı ile kendine paralel kalacak şekilde döndürmek suretiyle yeni bir çatı elde etmek için tek bir eksen olduğu teorisini ispatlar. Euler'in bu teorisi, Euler - Rodrigues parametrelerine temel oluşturmuştur. Günümüzde kullanım alanları Rodrigues parametreleriyle aynıdır.

A pozitif ortogonal matrisi için $hA = B$ homotetik matrisi, ϕ dönme açısı olmak üzere, (4.21) denkleminden elde edilen $C = \tan(\phi/2)S$ ile verilen $\vec{s}$ birim vektörünün terimleri cinsinden ifade edilebilir. Bu durumda (4.13) denkleminde $n = 3$ için gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$
\begin{aligned}
B &= h(I_3 - C)^{-1}(I_3 + C) \\
&= h\left[I_3 - S\tan(\phi/2)\right]^{-1}\left[I_3 + S\tan(\phi/2)\right] \\
&= h\left[I_3 - S\frac{\sin(\phi/2)}{\cos(\phi/2)}\right]^{-1}\left[I_3 + S\frac{\sin(\phi/2)}{\cos(\phi/2)}\right] \\
&= h\left[\frac{I_3\cos(\phi/2) - S\sin(\phi/2)}{\cos(\phi/2)}\right]^{-1}\left[\frac{I_3\cos(\phi/2) + S\sin(\phi/2)}{\cos(\phi/2)}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir ve buradan da

$$
B = h\left[I_3\cos(\phi/2) - S\sin(\phi/2)\right]^{-1}\left[I_3\cos(\phi/2) + S\sin(\phi/2)\right] \qquad (4.23)
$$

elde edilir. O halde

$$F=\left[I_3\cos(\phi/2)+S\sin(\phi/2)\right] \tag{4.24}$$

seçilirse, bu matrisin ihtiva ettiği sabitlere; B homotetik matrisinin, Öklid uzayda homotetik hareketler için Euler parametreleri denir. Bu parametreler;

$$\begin{aligned} f_0&=\cos(\phi/2)\\ f_1&=a\sin(\phi/2)\\ f_2&=b\sin(\phi/2)\\ f_3&=c\sin(\phi/2) \end{aligned} \tag{4.25}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.3.1. (3.19) ve (4.25) denklemleri karşılaştırıldığında Öklid uzayda genel ve homotetik hareketler için, Euler parametreleri değişmez.

Teorem 4.3.1. $\vec{s}=(a,b,c)$ birim vektörüne karşılık gelen antisimetrik matris $S=\begin{bmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{bmatrix}$ ve $C=S\tan(\phi/2)$ olmak üzere, Öklid uzayda homotetik hareketler için Euler parametrelerine göre B homotetik matrisi

$$B=h\left[I_3+S\sin\phi+S^2(1-\cos\phi)\right] \tag{4.26}$$

dir.

İspat. $\phi/2=x$ olsun. O halde $C=S\tan x$ eşitliği, $n=3$ için (4.13) denkleminde yazılırsa

$$
\begin{aligned}
B &= h\left(I_3 - C\right)^{-1}\left(I_3 + C\right)\\
&= h\left(I_3 - S\tan x\right)^{-1}\left(I_3 + S\tan x\right)\\
&= h\left(I_3 - S\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{-1}\left(I_3 + S\frac{\sin x}{\cos x}\right)\\
&= h\left(\frac{I_3\cos x - S\sin x}{\cos x}\right)^{-1}\left(\frac{I_3\cos x + S\sin x}{\cos x}\right)\\
&= h\left(I_3\cos x - S\sin x\right)^{-1}\left(I_3\cos x + S\sin x\right)\\
&= h\frac{Ek\left(I_3\cos x - S\sin x\right)}{\det\left(I_3\cos x - S\sin x\right)}\left(I_3\cos x + S\sin x\right)
\end{aligned}
$$

dır. Burada $D = \left(I_3\cos x - S\sin x\right)$ seçilir ve bu matris açık olarak yazılırsa

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{bmatrix} \cos x & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & \cos x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -c\sin x & b\sin x \\ c\sin x & 0 & -a\sin x \\ -b\sin x & a\sin x & 0 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \cos x & c\sin x & -b\sin x \\ -c\sin x & \cos x & a\sin x \\ b\sin x & -a\sin x & \cos x \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\det D &= \cos x\left(\cos^2 x + a^2\sin^2 x\right) - c\sin x\left(-c\sin x\cos x - ab\sin^2 x\right)\\
&\quad - b\sin x\left(ac\sin^2 x - b\sin x\cos x\right)\\
&= \cos^3 x + \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\sin^2 x\cos x\\
&= \cos x\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)\\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

dır. Böylece D matrisinin tersi

$$D^{-1}=\frac{1}{\cos x}Ek\begin{bmatrix}\cos x & c\sin x & -b\sin x\\ -c\sin x & \cos x & a\sin x\\ b\sin x & -a\sin x & \cos x\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\cos^2 x+a^2\sin^2 x}{\cos x} & \dfrac{-c\sin x\cos x+ab\sin^2 x}{\cos x} & \dfrac{ac\sin^2 x+b\sin^2 x\cos x}{\cos x}\\ \dfrac{c\sin x\cos x+ab\sin^2 x}{\cos x} & \dfrac{\cos^2 x+b^2\sin^2 x}{\cos x} & \dfrac{-a\cos x\sin x+bc\sin^2 x}{\cos x}\\ \dfrac{ac\sin^2 x-b\sin x\cos x}{\cos x} & \dfrac{a\cos x\sin x+bc\sin^2 x}{\cos x} & \dfrac{ac\sin^2 x+b\sin^2 x\cos x}{\cos x}\end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matris ortak parantezler halinde yazılırsa,

$$D^{-1}=\cos x\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\sin x\begin{bmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{bmatrix}+\frac{\sin^2 x}{\cos x}\begin{bmatrix}a^2&ab&ac\\ba&b^2&bc\\ca&cb&c^2\end{bmatrix}$$

dir. Burada $a^2+b^2+c^2=1$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$D^{-1}=I_3\cos x+S\sin x+\frac{\sin^2 x}{\cos x}\begin{bmatrix}1-b^2-c^2 & ab & ac\\ ba & 1-a^2-c^2 & bc\\ ca & cb & 1-a^2-b^2\end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan da

$$D^{-1}=I_3\cos x+S\sin x+\frac{\sin^2 x}{\cos x}\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-b^2-c^2 & ab & ac\\ ba & -a^2-c^2 & bc\\ ca & cb & -a^2-b^2\end{bmatrix}\right)$$

$$=I_3\cos x+S\sin x+\frac{\sin^2 x}{\cos x}\left(I_3+\begin{bmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{bmatrix}\right)$$

ve

$$D^{-1}=I_3\cos x+S\sin x+\frac{\sin^2 x}{\cos x}\left(I_3+S^2\right)$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}B&=hD^{-1}F\\&=h\left(I_3\cos x-S\sin x\right)^{-1}\left(I_3\cos x+S\sin x\right)\\&=h\left[I_3\cos x+S\sin x+\frac{\sin^2 x}{\cos x}\left(I_3+S^2\right)\right]\left(I_3\cos x+S\sin x\right)\\&=h\left[I_3\cos^2 x+S\sin x\cos x+\sin^2 x\left(I_3+S^2\right)+S\cos x\sin x+S^2\sin^2 x+\frac{\sin^3 x}{\cos x}\left(S+S^3\right)\right]\end{aligned}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}S+S^3&=\begin{bmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-b^2-c^2&ab&ac\\ba&1-a^2-c^2&bc\\ca&cb&1-a^2-b^2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-abc+abc&-c+a^2c+c^3+cb^2&-bc^2+b-a^2b-b^3\\c-cb^2-c^3-ca^2&abc-abc&ac^2-a+a^3+ab^2\\-b+b^3+bc^2+ba^2&-ab^2+a-a^3-ac^2&-abc+abc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}B&=h\left[I_3\cos^2 x+S\sin x\cos x+\sin^2 x\left(I_3+S^2\right)+S\cos x\sin x+S^2\sin^2 x\right]\\&=h\left(I_3\cos^2 x+S\sin x\cos x+I_3\sin^2 x+S^2\sin^2 x+S\cos x\sin x+S^2\sin^2 x\right)\\&=h\left[I_3\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)+S\left(2\sin x\cos x\right)+S^2\left(2\sin^2 x\right)\right]\end{aligned}$$

dır. Burada $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, $2\sin x\cos x=\sin 2x$ ve $2\sin^2 x=1-\cos 2x$ olduğundan

$$B = h\left[I_3 + S\sin 2x + S^2\left(1 - \cos 2x\right)\right]$$

elde edilir. Son olarak $x = \phi/2$ olduğundan B homotetik matrisi

$$B = h\left[I_3 + S\sin\phi + S^2\left(1 - \cos\phi\right)\right]$$

olarak bulunur.

Sonuç 4.6.4. Özel olarak (4.26) ifadesinde $h = 1$ alınırsa, B pozitif ortogonal bir matris olmak üzere

$$B = I_3 + S\sin\phi + S^2\left(1 - \cos\phi\right) \tag{4.27}$$

matrisi elde edilir [3].

4.4. $\mathbb{E}^3$, $3-$ Boyutlu Öklid Uzayda Homotetik Cayley Matrisi ve Dönüşümü

Bir $\vec{s} = (a, b, c)$ vektörüne karşılık gelen 3×3 tipinde S antisimetrik matrisi,

$$\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

olmak üzere (4.6) ifadesi, $n = 3$ için $S = \left(B - hI_3\right)\left(B + hI_3\right)^{-1}$ olarak seçilirse

$$f = Sg \tag{4.29}$$

olur.

Teorem 4.4.1. 3×3 tipinde reel pozitif ortogonal bir A matrisi için $B=hA$ ve $S=\left(B-hI_3\right)\left(B+hI_3\right)^{-1}$ ise S matrisi antisimetriktir. Ayrıca S matrisinin homotetik Cayley matrisi B 'dir.

İspat. $S=\left(B-hI_3\right)\left(B+hI_3\right)^{-1}$ olduğundan

$$\left(B+hI_3\right)S=\left(B+hI_3\right)\left(B-hI_3\right)\left(B+hI_3\right)^{-1}$$

yazılabilir. Burada

$$\left(B+hI_3\right)\left(B-hI_3\right)=\left(B-hI_3\right)\left(B+hI_3\right)=B^2-h^2I_3$$

olduğundan $\left(B+hI_3\right)$ ve $\left(B-hI_3\right)$ matrisleri değişmelidir. O halde

$$\begin{aligned}
\left(B+hI_3\right)S &= \left(B-hI_3\right)\left(B+hI_3\right)\left(B+hI_3\right)^{-1} \\
\left[\left(B+hI_3\right)S\right]^T &= \left(B-hI_3\right)^T \\
S^T\left(B+hI_3\right)^T &= \left(B-hI_3\right)^T \\
S^T\left(B^T+hI_3\right)B &= \left(B^T-hI_3\right)B \\
S^T\left(B^TB+hB\right) &= B^TB-hB
\end{aligned}$$

dır. Bu ifadede $B=hA$ ve A ortogonal olduğundan,

$$\begin{aligned}
S^T\left(hA^ThA+hB\right) &= hA^ThA-hB \\
S^T\left(h^2I_3+hB\right) &= h^2I_3-hB \\
S^Th\left(hI_3+B\right) &= h\left(hI_3-B\right) \\
S^T\left(hI_3+B\right) &= \left(hI_3-B\right) \\
S^T &= \left(hI_3-B\right)\left(hI_3+B\right)^{-1}
\end{aligned}$$

olur. Buradan ise

$$S^T = -\left(B - hI_3\right)\left(B + hI_3\right)^{-1} = -S$$

elde edilir. Son denklem ifade eder ki S matrisi antisimetriktir. Ayrıca son eşitlikten B homotetik Cayley matrisi

$$\begin{aligned} S &= \left(B - hI_3\right)\left(B + hI_3\right)^{-1} \\ S\left(B + hI_3\right) &= B - hI_3 \\ SB + hS &= B - hI_3 \\ SB - B &= -h\left(I_3 + S\right) \\ \left(S - I_3\right)B &= -h\left(I_3 + S\right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$B = h\left(I_3 - S\right)^{-1}\left(I_3 + S\right) \tag{4.30}$$

elde edilir.

Tanım 4.4.1. Öz değeri 1'den farklı bir antisimetrik matris S olsun. B matrisi, bir homotetik Cayley matrisi olmak üzere,

$$\begin{aligned} hf : so(3) &\to H\left(\mathbb{E}^3\right) \\ S &\to hf\left(S\right) = B = h\left(I_3 - S\right)^{-1}\left(I_3 + S\right) \end{aligned} \tag{4.31}$$

şeklinde tanımlanan hf dönüşümüne S antisimetrik matrisinin $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayda homotetik Cayley dönüşümü denir. Burada $so(3)$ ve $H\left(\mathbb{E}^3\right)$, sırasıyla, 3×3 tipinde antisimetrik ve $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayda homotetik dönüşümler cümlesidir.

4.5. $\mathbb{E}^3$, $3-$Boyutlu Öklid Uzayda Homotetik Cayley Formülünün Bazı Uygulamaları

Bu bölümde (4.7) denklemi ile verilen C matrisine, $3-$boyutlu uzaylar için karşılık getirilen S matrisinin farklı seçimlerine göre elde edilen B homotetik matrislerine ilişkin örnekler verilmiştir.

Örnek 4.5.1. S antisimetrik matrisi

$$S=\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda B homotetik matrisi

$$\begin{aligned} B &= h\left(I_3-S\right)^{-1}\left(I_3+S\right) \\ &= h\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dır. Şimdi $I_3-S=\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulalım:

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix} &= 1\left(1+a^2\right)-c\left(-c-ab\right)-b\left(ac-b\right) \\ &= 1+a^2+c^2+abc-abc+b^2 \\ &= 1+a^2+b^2+c^2=\Delta \end{aligned}$$

ve

$$Ek\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & 1+b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & 1+c^2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 1+a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & 1+b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & 1+c^2 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$B = \frac{h}{\Delta}\begin{bmatrix} 1+a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & 1+b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & 1+c^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix}$$

dır. O halde son denklemden B homotetik matrisi

$$B = h\Delta^{-1}\begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

dir.

Sonuç 4.5.1. Özel olarak (4.32) ifadesinde $h=1$ alınırsa, B pozitif ortogonal bir matris olmak üzere, B matrisinin genel hareketler için ifadesi

$$B = \frac{1}{1+a^2+b^2+c^2}\begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

dir [10].

Örnek 4.5.2. S antisimetrik matrisi

$$S=\begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde $3-$boyutlu Öklid uzayda bir α uzay eğrisinin eğriliklerinden elde edilen bir matris olsun. (4.32) ifadesinde $a=-k_2$, $b=0$ ve $c=-k_1$ olarak alınırsa B homotetik matrisi

$$B=\frac{h}{1+k_1^2+k_2^2}\begin{bmatrix} 1+k_2^2-k_1^2 & 2k_1 & 2k_1k_2 \\ -2k_1 & 1-k_2^2-k_1^2 & 2k_2 \\ 2k_1k_2 & -2k_2 & 1-k_2^2+k_1^2 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

olur.

Sonuç 4.6.2. Özel olarak (4.34) ifadesinde $h=1$ alınırsa, B pozitif ortogonal bir matris olmak üzere, B matrisinin genel hareketler için ifadesi

$$B=\frac{1}{1+k_1^2+k_2^2}\begin{bmatrix} 1-k_1^2+k_2^2 & 2k_1 & 2k_1k_2 \\ -2k_1 & 1-k_1^2-k_2^2 & 2k_2 \\ 2k_1k_2 & -2k_2 & 1+k_1^2-k_2^2 \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

dir [10].

Örnek 4.5.3. S antisimetrik matrisi

$$S=\begin{bmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. (4.32) ifadesinde $a=b=0$ ve $c\neq 0$ olarak alınırsa B homotetik matrisi

$$B=\frac{h}{1+c^2}\begin{bmatrix}1-c^2 & -2c & 0\\ 2c & 1-c^2 & 0\\ 0 & 0 & 1+c^2\end{bmatrix}$$

ve

$$B=h\begin{bmatrix}\frac{1-c^2}{1+c^2} & -\frac{2c}{1+c^2} & 0\\ \frac{2c}{1+c^2} & \frac{1-c^2}{1+c^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.36}$$

olarak elde edilir. Burada $\sin\phi=-\frac{2c}{1+c^2}$ alınırsa buradan,

$$1+c^4+2c^2=4c^2+m^2$$
$$1+c^4-2c^2=\left(1-c^2\right)^2=m^2$$

bulunur. O halde $\cos\phi=\frac{1-c^2}{1+c^2}$ dir. Bu durumda B homotetik matrisi

$$B=h\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.37}$$

olarak bulunur. Bu ifade eder ki B homotetik matrisi, xoy düzleminde $\left(0,0,1\right)$ ekseni etrafında ϕ açısı kadar bir homotetik dönme belirtir.

Sonuç 4.5.3. Özel olarak (4.37) ifadesinde $h=1$ alınırsa, B pozitif ortogonal bir matris olmak üzere, B matrisinin genel hareketler için ifadesi

$$B=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

dir [10].

Örnek 4.5.4. S antisimetrik matrisi

$$S=\begin{bmatrix}0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\\ -b & 0 & 0\end{bmatrix}$$

olsun. (4.32) ifadesinde $a=c=0$ ve $b\neq 0$ olarak alınırsa B homotetik matrisi

$$B=h\begin{bmatrix}\cos\phi & 0 & -\sin\phi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\phi & 0 & \cos\phi\end{bmatrix} \tag{4.38}$$

elde edilir. Bu ifade eder ki B homotetik matrisi, xoz düzleminde $(0,1,0)$ ekseni etrafında ϕ açısı kadar bir homotetik dönme belirtir.

Örnek 4.5.5. S antisimetrik matrisi

$$S=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a\\ 0 & a & 0\end{bmatrix}$$

olsun. (4.32) ifadesinde $b=c=0$ ve $a\neq 0$ olarak alınırsa yine B homotetik matrisi

$$B=h\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix} \tag{4.39}$$

olarak elde edilir. Bu ifade eder ki B homotetik matrisi, yoz düzleminde $(1,0,0)$ ekseni etrafında ϕ açısı kadar bir homotetik dönme belirtir.

4.6. $\mathbb{E}^3$, $3-$Boyutlu Öklid Uzayda Homotetik Dönme Matrisleri Yardımıyla B Homotetik Matrisi

$0 \leq \phi \leq \pi$ ve $h \neq 0$ olmak üzere, $hR(\vec{s},\phi)$ ve $hR^{-1}(\vec{s},\phi) = hR(-\vec{s},\phi)$ ifadeleri, sırasıyla, $\mathbb{R}^3$'te bir $\vec{s}$ birim vektörü etrafında ϕ açısı kadar pozitif ve $-\phi$ açısı kadar negatif homotetik dönmeleri belirtsin. Bu durumda $A \in SO(3)$ için $hA = B$ olmak üzere, homotetik bir dönme altında $h\vec{r} \rightarrow \overrightarrow{r^*}$ oluyorsa

$$hA = hR(\vec{s},\phi)$$

ve buradan da

$$hR(\vec{s},\phi)\vec{r} = R(\vec{s},\phi)h\vec{r} = Ah\vec{r} = B\vec{r} = \overrightarrow{r^*}$$

yazılabilir. Öte yandan orijin noktasında $\vec{s}$ birim vektörüne dik olan bir vektör $h\vec{\mu}$ olsun. Bu vektörün içinde yattığı düzlemdeki hareketi incelemek için, her $\vec{s}$ birim vektörü, bir antisimetrik matrise karşılık getirilmelidir. O halde $\vec{s} = (a,b,c)$ birim vektörüne karşılık gelen bir antisimetrik matris

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

olmak üzere, $S\vec{r} = \vec{s} \wedge \vec{r}$ ve $S\vec{s} = \vec{s} \wedge \vec{s} = 0$ eşitlikleri sağlanır. Gerçekten de

$$S\vec{r}=\vec{s}\wedge\vec{r}\quad\Rightarrow\quad S\vec{r}=\begin{bmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ r_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-cr_2+br_3\\ cr_1-ar_3\\ -br_1+ar_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{s}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ a & b & c\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}=\left(br_3-cr_2,-ar_3+cr_1,ar_2-br_1\right)$$

ve

$$S\vec{s}=\vec{s}\wedge\vec{s}=0\quad\Rightarrow\quad S\vec{s}=\begin{bmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-cb+bc\\ ac-ca\\ -ab+ba\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\vec{0}=\vec{s}\wedge\vec{s}$$

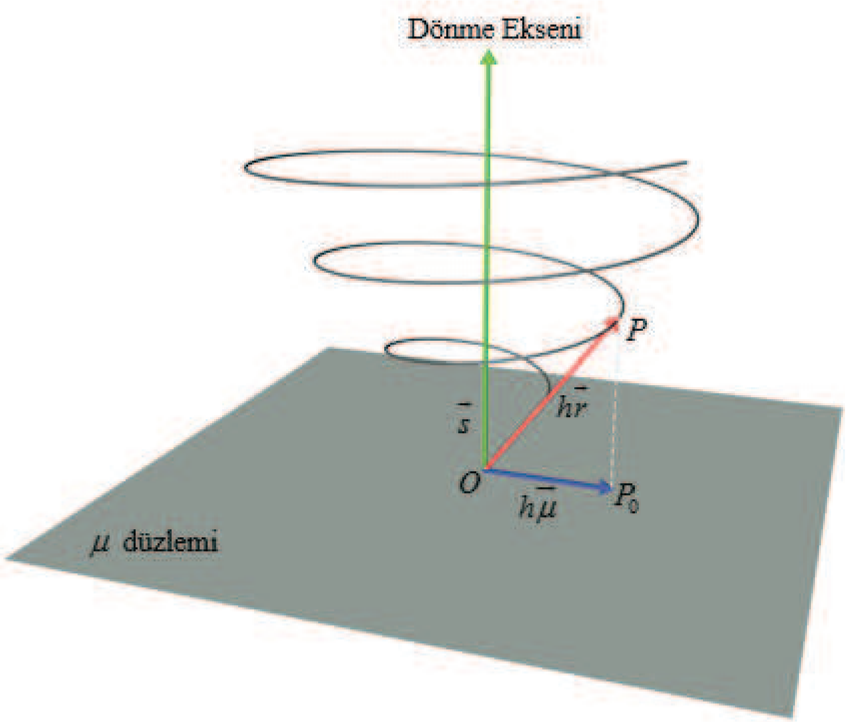
dir. Bu durumda, $h\mu$ homotetik matrisi, $h\vec{\mu}$ vektörüne karşılık gelen matris olmak üzere, $Sh\mu=\vec{s}\wedge h\vec{\mu}$ eşitliği de sağlanır. O halde $\vec{s}\wedge h\vec{\mu}$ vektörü, $\vec{s}$ ve $h\vec{\mu}$ vektörlerine ayrı ayrı ortogonaldir. Bu durumda $\vec{s}\wedge h\vec{\mu}$ vektörel çarpımı, $h\vec{\mu}$ vektörünü $\vec{s}$ ekseni etrafında $\frac{\pi}{2}$ kadarlık açıyla döndürmek olarak yorumlanabilir. Buradan da $\vec{s}$ vektörüne karşılık gelen S antisimetrik matrisinin de $h\vec{\mu}$ vektörünü $\vec{s}$ ekseni etrafında $\frac{\pi}{2}$ kadarlık açıyla döndürdüğü sonucuna varılır.

Teorem 4.6.1. $h\neq 0$ ve $A\in SO(3)$ olmak üzere, $\vec{s}$ birim ekseni etrafında $R\left(\vec{s},\phi\right)h\vec{r}=Ah\vec{r}=B\vec{r}$ homotetik dönmesi için B homotetik matrisi

$$B=h\left[I_3+S\sin\phi+S^2\left(1-\cos\phi\right)\right]=hf\left(S\right)$$

dir ve determinantı h^3'tür.

İspat. Şekil 4.2'den $3-$boyutlu Öklid uzayda herhangi bir $h\vec{r}$ vektörü için $h\vec{r} = h\vec{\mu} + k\vec{s}$ yazılabilir.



Şekil 4.2. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayda $h > 1$ için homotetik dönme temsili

Buradan

$$
\begin{aligned}
hS\vec{r} &= \vec{s} \wedge h\vec{r} \\
&= \vec{s} \wedge \left(h\vec{\mu} + k\vec{s}\right) \\
&= \vec{s} \wedge h\vec{\mu} + \vec{s} \wedge k\vec{s} \\
&= h\left(\vec{s} \wedge \vec{\mu}\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$hS\vec{r} = hS\vec{\mu}$$

elde edilir. Son denklemi soldan S matrisi uygulanırsa

$$\begin{aligned} hS^2\vec{r} &= hS^2\vec{\mu} \\ &= -h\vec{\mu} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda keyfi $h\vec{r}$ vektörünün $\mu-$düzleminde yatması ($P = P_0$) ve düzlemden ayrılmış olması ($P \in \mathbb{R}^3$) durumları incelenmelidir:

i) $P = P_0$ Durumu:

$\vec{s}$, düzlemin normali olmak üzere, orijin etrafında ϕ açısı kadar bir düzlemsel homotetik dönme sonucu $h\vec{\mu}$ vektörü

$$\begin{aligned} hR\left(\vec{s},\phi\right)\vec{\mu} = R\left(\vec{s},\phi\right)h\vec{\mu} &= \cos\phi\left(h\vec{\mu}\right) + \sin\phi\left(\vec{s} \wedge h\vec{\mu}\right) \\ &= \cos\phi\left(h\vec{\mu}\right) + \sin\phi\left(hS\vec{\mu}\right) \\ &= \cos\phi\left(h\vec{\mu}\right) + \sin\phi\left(hS\vec{r}\right) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

ii) $P \in \mathbb{R}^3$ Durumu:

$\vec{s}$, düzlemin normali olmak üzere, orijin etrafında ϕ kadar bir uzaysal homotetik dönme sonucu $h\vec{\mu}$ vektörü

$$\begin{aligned} R\left(\vec{s},\phi\right)h\vec{r} &= R\left(\vec{s},\phi\right)\left(k\vec{s} + h\vec{\mu}\right) \\ &= kR\left(\vec{s},\phi\right)\vec{s} + R\left(\vec{s},\phi\right)h\vec{\mu} \\ &= k\vec{s} + \cos\phi\left(h\vec{\mu}\right) + \sin\phi\left(hS\vec{r}\right) \\ &= h\vec{r} - h\vec{\mu} + \cos\phi\left(h\vec{\mu}\right) + \sin\phi\left(hS\vec{r}\right) \\ &= h\vec{r} + \left(1-\cos\phi\right)\left(-h\vec{\mu}\right) + \sin\phi\left(hS\vec{r}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= h\vec{r} + (1-\cos\phi) hS^2\vec{r} + \sin\phi\left(hS\vec{r}\right) \\
&= h\left[I_3 + \sin\phi S + (1-\cos\phi) S^2\right]\vec{r} \\
&= B\vec{r}
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca B homotetik matrisinin determinantını hesaplamak için, S matrisinin öz denklemi $\det(S-\lambda I_3)=0$ olmak üzere,

$$
\det\left(\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & -c & b \\ c & -\lambda & -a \\ -b & a & -\lambda \end{bmatrix} = 0
$$

dır. Buradan

$$
\begin{aligned}
\det(S-\lambda I) &= -\lambda\left(\lambda^2+a^2\right) + c(-\lambda c - ab) + b(ac - \lambda b) = 0 \\
&= -\lambda^3 - \lambda a^2 - \lambda c^2 - abc + abc - \lambda b^2 = 0 \\
&= -\lambda^3 - \lambda\left(a^2+b^2+c^2\right) = 0 \\
&= -\lambda^3 - \lambda = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde S matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -i$ ve $\lambda_3 = i$ olarak bulunur. Teorem 2.1.7’den, S’ nin bir öz değeri λ ise $f(S)$’nin bir öz değeri de $f(\lambda)$’dır. O halde $hf(S)$ öz değerleri $hf(0)$, $hf(-i)$ ve $hf(i)$’dir. Bu durumda $hf(S)$ öz değerleri,

$$
hf(\lambda) = h\left[I_3 + \sin\phi\lambda + (1-\cos\phi)\lambda^2\right]
$$

ifadesinde λ değerlerinin yerlerine yazılmasıyla bulunacaktır. O halde

$$h\,f(0)=h\left[I_3+\sin\phi(0)+(1-\cos\phi)(0)^2\right]=h$$
$$hf(-i)=h\left[I_3+\sin\phi(-i)+(1-\cos\phi)(-i)^2\right]=he^{-i\phi}$$
$$h\,f(i)=h\left[I_3+\sin\phi(i)+(1-\cos\phi)(i)^2\right]=he^{i\phi}$$

şeklindedir. Bir kare matrisin determinantı öz değerleri çarpımı olduğundan

$$\begin{aligned}\det B &= hf(0)hf(-i)hf(i)\\ &= hhe^{-i\phi}he^{i\phi}\end{aligned}$$

ve

$$\det B=h^3 \tag{4.41}$$

olur.

Sonuç 4.6.1. Özel olarak (4.41) ifadesinde $h=1$ alınırsa

$$\det B=1 \tag{4.42}$$

bulunur. Bu ifade eder ki B matrisi ortogonaldir [3].

Sonuç 4.6.2. A bir ortogonal matris ve $h\neq 0$ olmak üzere, $B=hA$ matrisine karşılık gelen dönme ekseni

$$B-B^T=h\left[I_3+\sin\phi S+(1-\cos\phi)S^2\right]-h\left[I_3-\sin\phi S+(1-\cos\phi)S^2\right]$$

ve buradan da

$$B-B^T=2h\sin\phi S \tag{4.43}$$

ifadesi ile elde edilir.

Sonuç 4.6.3. A ortogonal matris ve $h \neq 0$ olmak üzere, $B = hA$ matrisine karşılık gelen dönme açısı

$$
\begin{aligned}
izB &= h + he^{-i\phi} + he^{i\phi} \\
&= h\left(1 + e^{-i\phi} + e^{i\phi}\right) \\
&= h\left[1 + 2\frac{e^{-i\phi} + e^{i\phi}}{2}\right]
\end{aligned}
$$

ve buradan da

$$\dot{I}zB = h\left(1 + 2\cos\phi\right) \tag{4.44}$$

ifadesi ile elde edilir.

Sonuç 4.6.4. Özel olarak (4.43) ifadesinde $h = 1$ alınırsa, Sonuç 4.6.1'deki B matrisi ortogonal olur ve bu matrise karşılık gelen dönme ekseni

$$B - B^T = 2\sin\phi S \tag{4.45}$$

ifadesi ile elde edilir [3]. Ayrıca özel olarak (4.44) ifadesinde $h = 1$ alınırsa, yine Sonuç 4.6.1'deki B matrisi ortogonal olur ve bu matrise karşılık gelen dönme açısı

$$\dot{I}zB = 1 + 2\cos\phi \tag{4.46}$$

ifadesi ile elde edilir [3].

Şimdi B homotetik matrisine karşılık gelen dönme açısı ve dönme ekseni ile ilgili örnekler verelim:

Örnek 4.6.1. B homotetik matrisi $B = h\begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$ şeklinde verilsin. Şimdi bu matrise karşılık gelen dönme açısı ve dönme eksenini bulalım:

B matrisinin determinantı

$$\det B = -\frac{2h}{7}\left(\frac{4h^2}{49} - \frac{18h^2}{49}\right) + \frac{6h}{7}\left(\frac{6h^2}{49} + \frac{36h^2}{49}\right) - \frac{3h}{7}\left(-\frac{9h^2}{49} - \frac{12h^2}{49}\right) = h^3$$

olur. Ayrıca

$$\det\left(B + hI_3\right) = \det\begin{bmatrix} \frac{5h}{7} & -\frac{6h}{7} & -\frac{3h}{7} \\ -\frac{3h}{7} & \frac{5h}{7} & \frac{6h}{7} \\ -\frac{6h}{7} & \frac{3h}{7} & \frac{5h}{7} \end{bmatrix} = \frac{2h^3}{7} \neq 0$$

olduğundan $B + hI$ matrisi regülerdir. O halde verilen B homotetik matrisi, homotetik Cayley matrisi olarak alınabilir. Öte yandan (4.44) denkleminden dönme açısı

$$\dot{I}zB = -\frac{2h}{7} - \frac{2h}{7} - \frac{2h}{7} = h\left(1 + 2\cos\phi\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{6}{7} = 1 + 2\cos\phi$$

$$\Rightarrow \cos\phi = -\frac{13}{14}$$

olur. Buradan $\sin\phi = \frac{3\sqrt{3}}{14}$'dür. O halde (4.43) denkleminden dönme ekseni

$$B-B^T=\begin{bmatrix}-\frac{2h}{7} & -\frac{6h}{7} & -\frac{3h}{7}\\ -\frac{3h}{7} & -\frac{2h}{7} & \frac{6h}{7}\\ -\frac{6h}{7} & \frac{3h}{7} & -\frac{2h}{7}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{2h}{7} & -\frac{3h}{7} & -\frac{6h}{7}\\ -\frac{6h}{7} & -\frac{2h}{7} & \frac{3h}{7}\\ -\frac{3h}{7} & \frac{6h}{7} & -\frac{2h}{7}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -\frac{3h}{7} & \frac{3h}{7}\\ \frac{3h}{7} & 0 & \frac{3h}{7}\\ -\frac{3h}{7} & -\frac{3h}{7} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & b_{12}-b_{21} & b_{13}-b_{31}\\ b_{21}-b_{12} & 0 & b_{23}-b_{32}\\ b_{31}-b_{13} & b_{32}-b_{23} & 0\end{bmatrix}$$

ve vektörel ifadesi

$$B-B^T=\begin{bmatrix}b_{32}-b_{23}\\ b_{13}-b_{31}\\ b_{21}-b_{12}\end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$\begin{bmatrix}-\frac{3h}{7}\\ \frac{3h}{7}\\ \frac{3h}{7}\end{bmatrix}=2h\sin\phi\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{bmatrix}=2h\frac{3\sqrt{3}}{14}\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{bmatrix}$$

dir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa, dönme ekseni $\vec{s}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ şeklinde bir birim vektör olarak elde edilir. Bulunan bu $\vec{s}$ birim vektörü için B homotetik Cayley matrisine karşılık gelen Rodrigues ve Euler parametreleri hesaplanabilir. Bunun için ilk olarak $\tan(\phi/2)$ ifadesi hesaplanmalıdır. Bilindiği üzere,

$$\tan\phi = \frac{2\tan(\phi/2)}{1-\tan^2(\phi/2)}$$

dir. Burada $\tan\phi = -\frac{3\sqrt{3}}{13}$ olduğu göz önünde bulundurulur ve $\tan(\phi/2) = x$ alınırsa

$$3\sqrt{3}x^2 - 26x - 3\sqrt{3} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemin $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{9}$ ve $x_2 = 3\sqrt{3}$ şeklinde iki çözümü vardır. O halde

$$\tan(\phi/2) = -\frac{\sqrt{3}}{9} \quad \text{ve} \quad \tan(\phi/2) = 3\sqrt{3}$$

olur. Burada $0 \le \phi \le \pi$ aralığında olan değer $\tan(\phi/2) = 3\sqrt{3}$'tür. Bu durumda, verilen B homotetik matrisine karşılık gelen Rodrigues parametreleri (4.22) eşitliklerinden

$$c_1 = -3$$
$$c_2 = 3$$
$$c_3 = 3$$

olarak elde edilir. Öte yandan, $\tan(\phi/2) = 3\sqrt{3}$ için

$$\cos(\phi/2) = \frac{\sqrt{7}}{14}, \quad \sin(\phi/2) = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

eşitlikleri elde edilir. O halde, verilen B homotetik matrisine karşılık gelen Euler parametreleri (4.25) eşitliklerinden

$$f_0 = \frac{\sqrt{7}}{14} \qquad f_2 = \frac{\sqrt{63}}{14}$$
$$f_1 = -\frac{\sqrt{63}}{14} \qquad f_3 = \frac{\sqrt{63}}{14}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.6.2. S, 3×3 tipinde antisimetrik matrisi ve A ortogonal matrisi için $hA = B$ olmak üzere

$$B = h\left(I_3 - S\right)^{-1}\left(I_3 + S\right)$$

homotetik matrisi bir pozitif dönme gösterir. Burada

$$\vec{s} = \left(a,b,c\right),\ \tan\frac{\phi}{2} = \left\|\vec{s}\right\| = s \neq 1,\ \bar{s} = \frac{\vec{s}}{s}$$

ve

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

İspat. S antisimetrik matrisinin öz denklemi

$$\lambda^3 + s^2\lambda = 0$$

dır. Burada Teorem 2.1.2'den

$S^3+s^2S=0$ ve $S^3=-s^2S$

elde edilir. O halde

$$
\begin{aligned}
(I_3-S)^{-1} &= I+aS+bS^2\\
(I_3-S)^{-1}(I_3-S) &= (I_3+aS+bS^2)(I_3-S)\\
I_3 &= I_3+aS+bS^2-S-aS^2-bS^3\\
0 &= aS+bS^2-S-aS^2-b(-s^2S),\quad S^3=-s^2S\\
0 &= (a-1+bs^2)S+(b-a)S^2
\end{aligned}
$$

eşitliğinden

$a+bs^2=1$ ve $b=a$

bulunur. O halde

$$a=b=\frac{1}{1+s^2}$$

dir. Bu ifadeler $(I_3-S)^{-1}=I_3+aS+bS^2$ denkleminde yerlerine yazılırsa

$$(I_3-S)^{-1}=I_3+\frac{1}{1+s^2}S+\frac{1}{1+s^2}S^2$$

elde edilir. Böylece

$$\left(I_3-S\right)^{-1}h\left(I_3+S\right)=\left(I_3+\frac{1}{1+s^2}S+\frac{1}{1+s^2}S^2\right)h\left(I_3+S\right)$$

$$
\begin{aligned}
B &= hI_3+\frac{h}{1+s^2}S+\frac{h}{1+s^2}S^2+hS+\frac{h}{1+s^2}S^2+\frac{h}{1+s^2}S^3 \\
&= hI_3+\frac{h}{1+s^2}S+\frac{h}{1+s^2}S^2+hS+\frac{h}{1+s^2}S^2+\frac{h}{1+s^2}\left(-s^2S\right) \\
&= hI_3+\left(\frac{h}{1+s^2}+h-\frac{hs^2}{1+s^2}\right)S+\left(\frac{h}{1+s^2}+\frac{h}{1+s^2}\right)S^2 \\
&= hI_3+\left(\frac{h+h+hs^2-hs^2}{1+s^2}\right)S+\frac{2h}{1+s^2}S^2 \\
&= hI_3+\frac{2h}{1+s^2}S+\frac{2h}{1+s^2}S^2,\quad \overline{S}s=S \\
&= hI_3+\frac{2h}{1+s^2}\left(s\overline{S}\right)+\frac{2h}{1+s^2}\left(s\overline{S}\right)^2 \\
&= hI_3+\frac{2hs}{1+s^2}\overline{S}+\frac{2hs^2}{1+s^2}\overline{S}^2
\end{aligned}
$$

ve

$$B=h\left(I_3+\frac{2s}{1+s^2}\overline{S}+\frac{2s^2}{1+s^2}\overline{S}^2\right) \tag{4.47}$$

bulunur. Burada $\tan\frac{\phi}{2}=s$ olarak verildiğinden

$$\sin\frac{\phi}{2}=\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \qquad \text{ve} \qquad \cos\frac{\phi}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

elde edilir. Öte yandan $\sin\phi=2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}$ ve $\cos\phi=1-2\sin^2\frac{\phi}{2}$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\sin\phi=\frac{2s}{1+s^2} \qquad \text{ve} \qquad 1-\cos\phi=\frac{2s^2}{1+s^2}$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler (4.47) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$B = h\left[I_3 + \sin\phi \overline{S} + (1-\cos\phi)\overline{S}^2 \right] \tag{4.48}$$

bulunur. Burada B homotetik matrisinin, $hR(\vec{s},\phi)$ homotetik dönme hareketini temsil ettiğini Teorem 4.6.1'den biliyoruz. Şimdi (4.48) denkleminin özel durumlarını ele alalım:

i) $\phi = 0$ ise $B = hI_3$ bulunur.

ii) $\phi = \pi$ ise $s = \tan\dfrac{\phi}{2} \to \infty$ olur. Böylece dönme açısının $\dfrac{\pi}{2}$ radyan olduğu durumlarda homotetik Cayley formülü tanımlanamaz. Ancak $s \to \infty$ şartı altında $\tan\dfrac{\phi}{2} \to \infty$ ifadesi tanımlı hale gelir ve $\phi = \pi$ açısı için homotetik Cayley formülü $B = h\left(I_3 + 2\overline{S}^2\right)$ şeklinde elde edilir. Bu da $\vec{s}$ ekseni etrafında π radyan kadar bir homotetik dönme ifade eder.

Öte yandan, $3-$boyutlu Öklid uzayda B homotetik matrisinin Cayley matrisi olma şartlarından biri $B + hI_3$ matrisinin regüler olmasıdır. Şimdi bu matrisin regüler olmadığı durumu inceleyelim:

$-h$, B homotetik matrisinin bir öz değeri olsun. Bu durumda $\det(B + hI) = 0$ olur. Burada A pozitif ortogonal matrisi için $hA = B$ homotetik matrisinin determinantı h^3 olduğundan, öz denklemi üçüncü dereceden reel katsayılı bir denklemdir. O halde bu denklemin köklerinden biri $-h$ olduğundan B homotetik matrisinin öz değerleri $h, -h, -h$ olmak zorundadır. Böylece $\vec{s}$ ve $\vec{u}$ birim vektörler olmak üzere, $Bs = hs$ ve $Bu = -hu$ bağıntıları sağlanacak şekilde, $h\vec{s}$ ve $h\vec{u}$ vektörleri bulmak mümkündür. Öyle ki aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{array}{lcl} Bs = hs & & Bu = -hu \\ B^{-1}\left(Bs\right) = B^{-1}hs & & B^{-1}\left(Bu\right) = -B^{-1}hu \\ \left(B^{-1}B\right)s = B^{-1}hs & \text{ve} & \left(B^{-1}B\right)u = -B^{-1}hu \\ hs = B^{-1}h^2 s & & hu = -B^{-1}h^2 u \end{array}$$

dir. Buradan

$hs = B^{-1}h^2 s$ ve $hu = -B^{-1}h^2 u$

ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle &= \left\langle B^{-1}h^2 \vec{s}, -B^{-1}h^2 \vec{u} \right\rangle \\ &= \left(B^{-1}\right)^T \left(B^{-1}\right) h \left\langle h\vec{s}, -h\vec{u} \right\rangle \\ &= -\left(\frac{1}{h}A^{-1}\right)^T \left(\frac{1}{h}A^{-1}\right) h \left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle, \quad AA^T = I_3 \end{aligned}$$

ve

$$\left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle = -\frac{1}{h}\left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle$$

$$\left(1+\frac{1}{h}\right)\left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle = 0, \; h \neq sbt \quad \Rightarrow \; 1+\frac{1}{h} \neq 0, \; \left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle = 0$$

elde edilir. O halde $h\vec{s}$ ve $h\vec{u}$ ortogonaldir. Öte yandan $\vec{s}$ ve $\vec{u}$ vektörlerine ortogonal olan bir $\vec{v}$ vektörü $\vec{v} = \vec{s} \wedge \vec{u}$ olacak şekilde seçilsin. Bu durumda

$$\left\langle h\vec{v}, h\vec{s} \right\rangle = 0 = \left\langle h\vec{v}, h\vec{u} \right\rangle$$

olduğu görülür. Diğer taraftan

$$\left\langle B\vec{v}, h\vec{s} \right\rangle = \left\langle \vec{v}, B^T h\vec{s} \right\rangle$$
$$= \left\langle \vec{v}, h^2 A^T \vec{s} \right\rangle; \qquad s = B^{-1}hs = A^T s$$
$$= \left\langle \vec{v}, h^2 \vec{s} \right\rangle$$
$$= \left\langle h\vec{v}, h\vec{s} \right\rangle = 0$$

ve

$$\left\langle B\vec{v}, h\vec{u} \right\rangle = \left\langle \vec{v}, B^T h\vec{u} \right\rangle$$
$$= \left\langle \vec{v}, h^2 A^T \vec{u} \right\rangle$$
$$= \left\langle \vec{v}, h^2 \left(-\vec{u}\right) \right\rangle$$
$$= -\left\langle h\vec{v}, h\vec{u} \right\rangle = 0$$

eşitlikleri elde edilir. O halde Bv ile $h\vec{s} \wedge h\vec{u}$ vektörü, lineer bağımlı olmak zorundadır. O halde $Bv = \lambda v$ yazılabilir. Burada λ, B homotetik matrisinin bir öz değeridir. Bu durumda λ, regülerliği bozan $-h$ olarak seçilmelidir. O halde $Bv = \lambda v$ ve $h\vec{s}, h\vec{u}, h\vec{v}$ vektörleri $Bs = hs,\ Bu = -hu,\ Bv = -hv$ olacak şekilde $\mathbb{R}^3$'ün bir ortogonal bazını oluştururlar.

Sonuç 4.6.1. $h\vec{s}, h\vec{u}, h\vec{v}$ vektörlerinde özel olarak $h = 1$ alınırsa $\vec{s}, \vec{u}, \vec{v}$ vektörleri elde edilir. Bu vektörler, $Bs = s,\ Bu = -u,\ Bv = -v$ olacak şekilde $\mathbb{R}^3$'ün bir ortonormal bazını oluştururlar [3].

Örnek 4.6.2. B homotetik matrisi $B = h\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ şeklinde veriliyor. Bu matrise karşılık gelen dönme açısı ve dönme eksenini bulalım:

Matrisin determinantı

$$\det B = h^3$$

olarak bulunur. Gerekli hesaplamalar yapılarak $\det\left(B + hI_3\right) = 0$ olduğu görülür. Bu durumda $B + hI$ matrisi regüler değildir. O halde B homotetik matrisi, homotetik Cayley matrisi olarak alınamaz. Öte yandan dönme açısı

$$\begin{aligned} IzB &= h\left(1 + 2\cos\phi\right) \\ -h &= h\left(1 + 2\cos\phi\right) \\ &\Rightarrow \cos\phi = -1 \Rightarrow \phi = \pi \end{aligned}$$

olarak bulunur. B matrisi simetrik bir matris olduğundan $B - B^T = 0$ dır. Ayrıca $\phi = \pi$ olduğundan dönme ekseni formülünden,

$$\begin{aligned} B - B^T &= 2h\sin\phi S \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda $\vec{s}$ dönme ekseni hesaplanamaz. O halde simetrik matrisler için dönme eksenini

$$\begin{aligned} B + B^T &= h\left[I_3 + (\sin\phi)S + (1 - \cos\phi)S^2\right] + h\left[I_3 - (\sin\phi)S + (1 - \cos\phi)S^2\right] \\ B + B &= h\left[2I_3 + 2\left(1 - \cos\phi\right)S^2\right] \\ 2B &= h\left[2I_3 + 2\left(1 - \cos\pi\right)S^2\right] \\ &= h\left[2I_3 + 4S^2\right] \end{aligned}$$

ve

$$B = h\left(I_3 + 2S^2\right)$$

formülüyle bulmak mümkün olacaktır. Son denklem üzerinde gerekli hesaplamalar yapılır ve $s_1^2+s_2^2+s_3^2=1$ olduğunu göz önünde bulundurulursa

$$B=h\begin{bmatrix}1+2\left(-s_2^2-s_3^2\right) & 2s_1s_2 & 2s_1s_3\\ 2s_2s_1 & 1+2\left(-s_1^2-s_3^2\right) & 2s_2s_3\\ 2s_3s_1 & 2s_3s_2 & 1+2\left(-s_1^2-s_2^2\right)\end{bmatrix}=h\begin{bmatrix}2s_1^2-1 & 2s_1s_2 & 2s_1s_3\\ 2s_2s_1 & 2s_2^2-1 & 2s_2s_3\\ 2s_3s_1 & 2s_3s_2 & 2s_3^2-1\end{bmatrix}$$

$$=h\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

bulunur. O halde

$$h\left(2s_1^2-1\right)=-\frac{2h}{3}\ \Rightarrow\ s_1^2=\frac{1}{6}\ \Rightarrow\ s_1=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}$$
$$h\left(2s_2^2-1\right)=\frac{h}{3}\ \Rightarrow\ s_2^2=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ s_2=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}$$
$$h\left(2s_3^2-1\right)=-\frac{2h}{3}\ \Rightarrow\ s_3^2=\frac{1}{6}\ \Rightarrow\ s_3=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}$$

elde edilir. Öte yandan

$$2hs_1s_2=-\frac{2h}{3}\ \Rightarrow\ s_1s_2=-\frac{1}{3}$$
$$2hs_1s_3=\frac{h}{3}\ \Rightarrow\ s_1s_3=\frac{1}{6}$$
$$2hs_2s_3=-\frac{2h}{3}\ \Rightarrow\ s_2s_3=-\frac{1}{3}$$

dir. Bu durumda

$$\vec{s}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \quad \text{veya} \quad \vec{s}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

olacak şekilde iki farklı dönme ekseni elde edilir. Bulunan bu $\vec{s}$ birim vektörleri için, B homotetik matrisine karşılık gelen Rodrigues parametreleri $\tan(\phi/2) = \tan(\pi/2)$ ifadesi reel sayılar cümlesinde tanımsız olduğundan hesaplanamaz. Öte yandan, verilen B homotetik matrisine karşılık gelen Euler parametreleri $\phi = \pi$ olmak üzere (4.25) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \\ f_2 &= -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ f_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ f_2 &= \frac{2}{\sqrt{6}} \\ f_3 &= -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

elde edilir.

4.7. $\mathbb{E}^3$, $3-$Boyutlu Öklid Uzayda Homotetik Hareketler için Cayley Formülünün Genelleştirilmesi ve Geometrik Yorumu

Bu bölümde $\mathbb{E}^3$, $3-$boyutlu Öklid uzayda en basit ve genelleştirilmiş homotetik Cayley formülleri tanımlanacaktır.

Teorem 4.7.1. $hf(x) = h\left[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \right]$ reel değerli bir polinom olsun. 3×3 tipinde bir S antisimetrik matrisi için $hf(S)$ matrisi regülerdir.

İspat. $a^2+b^2+c^2=1$ olmak üzere, $S=\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin öz denklemi

$\det\left(S-\lambda I_3\right)=0$ 'dır. Buradan gerekli hesaplamalar yapılırsa $\lambda^3+\lambda=0$ elde edilir. Cayley-Hamilton teoremine göre $S^3+S=0$ ve $S^3=-S$ yazılabilir. Şimdi $h\neq 0$ için

$$T=hf\left(S\right)=h\left[a_n\left(S\right)^n+a_{n-1}\left(S\right)^{n-1}+...+a_1\left(S\right)+a_0\right]$$

matrisinin regüler olduğunu gösterelim: $n=0,1,2,...$ için

$$\left(S\right)^{2n+1}=\left(-1\right)^n\left(S\right) \text{ ve } \left(S\right)^{2n+2}=\left(-1\right)^n\left(S\right)^2$$

olduğundan T matrisi, I_3,S,S^2 matrislerinin bir lineer birleşimi olarak yazılabilir. Böylece

$$T=hf\left(S\right)=h\left[\left(a_1-a_3+a_5-a_7\right)S+\left(a_2-a_4+a_6-a_8\right)S^2+a_0I_3\right]$$

elde edilir. Bu katsayıları açık olarak ifade etmek gerekirse

$$\begin{array}{llcl} & \left(S\right)^{2n+1}=\left(-1\right)^n\left(S\right) & & \left(S\right)^{2n+2}=\left(-1\right)^n\left(S\right)^2 \\ n=0 \Rightarrow & \left(S\right)^1=S & & \left(S\right)^2=\left(S\right)^2 \\ n=1 \Rightarrow & \left(S\right)^3=-S & \text{ve} & \left(S\right)^4=-\left(S\right)^2 \\ n=2 \Rightarrow & \left(S\right)^5=S & & \left(S\right)^6=\left(S\right)^2 \\ & \vdots & & \vdots \end{array}$$

şeklindedir. O halde

$$hf\left(S\right)=h\left[a_0I_3+x\left(S\right)+y\left(S\right)^2\right], \quad x,y\in\mathbb{R}$$

yazılabilir. $a_0 \neq 0$ olmak üzere $m = \dfrac{x}{a_0}$, $n = \dfrac{y}{a_0}$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} hf(S) &= a_0 h\left[I_3 + \frac{x}{a_0} S + \frac{y}{a_0} S^2 \right] \\ &= a_0 h\left[I_3 + mS + nS^2 \right] \\ &= a_0 hF(S) \end{aligned}$$

olur. Burada $hf(S)$ ifadesinin regülerliğinden bahsetmek için $hF(S)$ matrisinin regüler olduğu gösterilmelidir. O halde $\det\left[hF(S)\right]$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} hF(s) &= h\left(I_3 + ms + ns^2\right) \\ &= \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} 0 & -hc & hb \\ hc & 0 & -ha \\ -hb & ha & 0 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} h\left(a^2-1\right) & hab & hac \\ hab & h\left(b^2-1\right) & hbc \\ hac & hbc & h\left(c^2-1\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h + nha^2 - nh & -mhc + nhab & mhb + nhac \\ mhc + nhab & h + hnb^2 - nh & -mha + nhbc \\ -mhb + nhac & mha + nhbc & h + nhc^2 - nh \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\det\left[hF(s)\right] = \left(h + nha^2 - nh\right)P + \left(mhc - nhab\right)Q + \left(mhb + nhac\right)R$$

dir. Burada P, Q ve R katsayıları hesaplanmalıdır. O halde

$$\begin{aligned} P &= \left[h^2\left(1 + nb^2 - n\right)\left(1 + nc^2 - n\right) - h^2\left(-ma + nbc\right)\left[ma + nbc\right]\right] \\ &= h^2\left[1 + nc^2 - n + nb^2 + n^2b^2c - n^2b^2 - n - n^2c^2 + n^2 + m^2a^2 + mnabc - mnabc - n^2b^2c\right] \\ &= h^2\left[1 + n\left(c^2 - 1 + b^2 - 1\right) - n^2\left(b^2 + c^2 - 1\right) + m^2a^2\right], \quad b^2 + c^2 = 1 - a^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= h^2\left[1+n\left(1-ha^2-2h\right)-n^2\left(1+a^2-1\right)+m^2a^2\right] \\
&= h^2\left[1-n\left(a^2+1\right)-n^2a^2+m^2a^2\right] \\
&= h^2-nh^2a^2-nh^2+n^2h^2a^2+h^2m^2a^2
\end{aligned}
$$

ve

$$
P = h^2\left(1-n\right)+a^2h^2\left(m^2+n^2-n\right)
$$

şeklindedir. Öte yandan

$$
\begin{aligned}
Q &= \left[h^2\left(mc+nab\right)\left(1+nc^2-n\right)-h^2\left(-ma+nbc\right)\left(mb+nac\right)\right] \\
&= h^2\left[mc+mnc^3-mnc+nab+n^2abc^2-n^2ab-m^2ab-mna^2c+mnb^2c-n^2abc^2\right] \\
&= h^2\left[mnc\left(c^2-1+a^2+b^2\right)+mc+nab-n^2ab-m^2ab\right], \quad a^2+b^2+c^2=1 \\
&= h^2\left(mc+nab-n^2ab-m^2ab\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
Q = h^2mc-h^2ab\left(m^2+n^2-n\right)
$$

elde edilir. Son olarak

$$
\begin{aligned}
R &= \left[h^2\left(mc+nab\right)\left(ma+nbc\right)+h^2\left(1+nb^2-n\right)\left(mb-nac\right)\right] \\
&= h^2\left[m^2ac+mnbc^2-mna^2b+n^2ab^2c+mb-nac+mnb^3-n^2ab^2c-mnb+n^2ac\right] \\
&= h^2\left[mnb\left(c^2+a^2+b^2-1\right)+m^2ac+mb-nac+n^2ac\right], \quad a^2+b^2+c^2=1 \\
&= h^2\left(m^2ac+mb-nac+n^2ac\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
R = h^2mb+h^2ac\left(m^2+n^2-n\right)
$$

bulunur. Burada $k = m^2 + n^2 - n$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
\det\left[hF(S)\right] &= \left(h + nha^2 - nh\right)\left[h^2(1-n) + a^2h^2k\right] + \left(mhc - nhab\right)\left(h^2mc - h^2abk\right) \\
&\quad + \left(mhb + nhac\right)\left(h^2mb + h^2ack\right) \\
&= h^3 \begin{Bmatrix} \left[(1-n) + na^2\right]\left[(1-n) + a^2k\right] + \left(mc - nab\right)\left(mc - abk\right) \\ +\left(mb + nac\right)\left(mb + ack\right) \end{Bmatrix} \\
&= h^3 \begin{bmatrix} (1-n)^2 + na^4k + (1-n)a^2k + (1-n)a^2n + m^2c^2 - mabck \\ -mnabc + na^2b^2k + m^2b^2 + mabck + mnabc + na^2c^2k \end{bmatrix} \\
&= h^3 \begin{bmatrix} (1-n)^2 + (1-n)a^2k + (1-n)a^2n + m^2\left(b^2 + c^2 + a^2 - a^2\right) \\ +na^2k\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \end{bmatrix} \\
&= h^3 \begin{bmatrix} (1-n)^2 + na^4k + (1-n)a^2k + (1-n)a^2n + m^2c^2 + na^2b^2k \\ +m^2b^2 + na^2c^2k \end{bmatrix} \\
&= h^3\left[(1-n)^2 + a^2k + a^2n - a^2n^2 + m^2 - m^2a^2\right] \\
&= h^3\left[(1-n)^2 + a^2\left(m^2 + n^2 - n\right) - a^2\left(m^2 + n^2 - n\right) + m^2\right] \\
&= h^3\left[(1-n)^2 + m^2\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\det\left[hF(S)\right] = h^3\left[(1-n)^2 + m^2\right]$$

elde edilir. Burada $m = 0$ ve $n = 1$ durumları hariç tutulduğunda daima $\det\left[hF(S)\right] \neq 0$ olur. Bu ifade eder ki $hf(S)$ matrisi regüledir.

Teorem 4.7.2. S, 3×3 tipinde bir antisimetrik matris, $A \in SO(3)$ olmak üzere, $hA = B$ homotetik matris ve $hf(x) = h\left[a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0\right]$, $a_0 \neq 0$ şeklinde bir polinom fonksiyonu olsun. $so(3)$ ve $H\left(\mathbb{E}^3\right)$, sırasıyla, 3×3 tipinde antisimetrik ve $\mathbb{E}^3$ 'te homotetik dönüşümler cümlesi olmak üzere

$$\begin{aligned} hf : so(3) &\to H(\mathbb{E}^3) \\ S &\to hf(S) = B = h\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1} f(S) \end{aligned} \tag{4.49}$$

dönüşümü verilsin. Bu durumda $hf\left(S^T\right)$ ve $hf(S)$ matrisleri çarpma işlemine göre değişmelidir.

İspat. $M = hf(S)$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} M^T &= hf\left(S^T\right) \\ &= hf(-S) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada ispatlanması gereken

$$MM^T = M^T M$$

eşitliğidir. Bunun için

$$hf(x) = h\left[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right]$$

eşitliği ve Teorem 2.1.2 göz önünde bulundurulursa

$$hf(S) = h\left[a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \ldots + a_1 S + a_0\right]$$

ve

$$hf(S) = h\left[a_0 I_3 + xS + yS^2\right], \quad x, y \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. O halde

$$MM^T = h\left[a_0I_3 + xS + yS^2\right]h\left[a_0I_3 - xS + yS^2\right] = h^2\left[\left(a_0I_3 + yS^2\right)^2 - \left(xS\right)^2\right]$$
$$= h\left[a_0I_3 - xS + yS^2\right]h\left[a_0I_3 + xS + yS^2\right] = h^2\left[\left(a_0I_3 + yS^2\right)^2 - \left(xS\right)^2\right]$$

olduğundan

$$MM^T = M^TM$$

ve

$$hf\left(S^T\right)hf\left(S\right) = hf\left(S\right)hf\left(S^T\right)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.7.3. S, 3×3 tipinde bir antisimetrik matris, $A \in SO(3)$ olmak üzere, $hA = B$ homotetik matris ve $hf(x) = h\left[a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0\right]$, $a_0 \neq 0$ şeklinde bir polinom fonksiyonu olsun. Bu durumda (4.49) denklemi ile tanımlı hf dönüşümü için $\det B = h^3$'tür. Dolayısıyla $hA = B$ homotetik matrisi olmak üzere, A ortogonal bir matristir.

İspat. B homotetik matrisinin determinantı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\det B &= \det\left\{h\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1} f\left(S\right)\right\}\\ &= h^3 \det\left\{\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1}\right\}\det\left[f\left(S\right)\right]\\ &= h^3\,\frac{\det\left[f\left(S\right)\right]}{\det\left[f\left(S^T\right)\right]}\\ &= h^3\,\frac{\det\left[f\left(S\right)\right]}{\left\{\det\left[f\left(S\right)\right]\right\}^T}\end{aligned}$$

$$= h^3 \frac{\det\left[f(S)\right]}{\det\left[f(S)\right]}$$

ve

$$\det B = h^3$$

elde edilir. Bu durumda $\det A = 1$ olacaktır. Öte yandan (4.49) denklemi ile tanımlı hf dönüşümünden $A = \left[f\left(S^T\right)\right]^{-1} f(S)$ yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} AA^T &= \left[f\left(S^T\right)\right]^{-1} f(S) f\left(S^T\right)\left[f(S)\right]^{-1} \\ &= \left[f\left(S^T\right)\right]^{-1} f\left(S^T\right) f(S)\left[f(S)\right]^{-1} \end{aligned}$$

ve

$$AA^T = I$$

bulunur. Bu durumda A ortogonal bir matristir.

Teorem 4.7.4. (4.49) denklemi ile tanımlı hf dönüşümü için B homotetik matrisinin determinantı h^3 ise

$$\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1} f(S) = f(S)\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1}$$

dir.

İspat. $hA = B$ matrisinin determinantı h^3 ise A matrisi pozitif ortogonal bir matristir. Bu durumda (4.49) denklemi ile tanımlı hf dönüşümünden $h \neq 0$ olmak üzere elde edilen $A = \left[f\left(S^T\right)\right]^{-1} f(S)$ matrisinin tersi ve transpozu hesaplanırsa

$$A^{-1}=\left[f\left(S\right)\right]^{-1}f\left(S^{T}\right)$$
$$A^{T}=f\left(S^{T}\right)\left[f\left(S\right)\right]^{-1}$$

elde edilir. A ortogonal olduğundan bu denklemler birbirine eşittir. O halde

$$\left[f\left(S\right)\right]^{-1}f\left(S^{T}\right)=f\left(S^{T}\right)\left[f\left(S\right)\right]^{-1}$$

bulunur. $hf\left(S\right)$ matrisinin ve dolayısıyla da $f\left(S\right)$ matrisinin regüler olduğu bilinmektedir. O halde son eşitliğin tersi alınırsa istenilen ifade elde edilir.

Burada $hf\left(S\right)$'nin farklı iki seçimi için aşağıdaki tanımlar verilebilir:

Tanım 4.7.1. $hf\left(S\right)=h\left(I_{3}+S\right)$ olmak üzere $B=h\left[f\left(S^{T}\right)\right]^{-1}f\left(S\right)$ denklemi göz önünde bulundurulursa

$$B=h\left(I_{3}-S\right)^{-1}\left(I_{3}+S\right)$$

elde edilir. Bu durumda hf dönüşümüne, en basit homotetik Cayley dönüşümü denir.

Tanım 4.7.2. $hf\left(S\right)=h\left(I_{3}+mS+nS^{2}\right)$ olmak üzere, $B=h\left[f\left(S^{T}\right)\right]^{-1}f\left(S\right)$ denklemi göz önünde bulundurulursa

$$B=h\left(I_{3}-mS+nS^{2}\right)^{-1}\left(I_{3}+mS+nS^{2}\right) \qquad (4.50)$$

elde edilir. Bu durumda hf dönüşümüne, genelleştirilmiş homotetik Cayley dönüşümü denir.

Öte yandan burada genelleştirilmiş homotetik Cayley hareketinin geometrik yorumunu yapmak için S, 3×3 tipinde, $\vec{s}=(a,b,c)$ vektörüne karşılık gelen bir antisimetrik matris ve $A\in SO(3)$ olmak üzere, $hA=B$ homotetik Cayley matrisi olsun. Bu durumda S matrisinin öz denklemi $\det(S-\lambda I)=0$ denkleminden

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & -c & b \\ c & -\lambda & -a \\ -b & a & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2+a^2\right)+c\left(-\lambda c-ab\right)+b\left(ac-\lambda b\right)=0$$
$$=\lambda^3+s^2\lambda=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=0,\ \ \lambda_2=-is,\ \ \lambda_3=is$$

dir. Burada i imajiner birim ve $s^2=a^2+b^2+c^2$'dir. Ayrıca B homotetik Cayley matrisinin öz değerleri

$$\left\{h\left[f(0)\right]^{-1}f(0),\quad h\left[f(is)\right]^{-1}f(-is),\quad h\left[f(-is)\right]^{-1}f(is)\right\}$$

şeklindedir. Bu öz değerler hesaplanırsa

$$\begin{aligned} hf(0) &= h(1+m.0+n.0)=h, \\ hf(-is) &= h\left[1+m(-is)+n(-is)^2\right] \\ &= h\left(1-ims+i^2ns^2\right) \\ &= h\left(1-ns^2-ims\right) \\ &= h(p+iq) \end{aligned}$$

ve

$$hf(is)=h(p-iq)$$

bulunur. Sonuç olarak B homotetik Cayley matrisinin öz değerleri

$$h, \quad h\left[h\left(p+iq\right)\right]^{-1}\left[h\left(p-iq\right)\right], \quad h\left[h\left(p-iq\right)\right]^{-1}\left[h\left(p+iq\right)\right]$$

veya

$$h, \quad h\frac{\left(p-iq\right)}{\left(p+iq\right)}, \quad h\frac{\left(p+iq\right)}{\left(p-iq\right)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} z &= h\left(p+iq\right) = hre^{i\phi} \\ \bar{z} &= h\left(p-iq\right) = hre^{-i\phi} \end{aligned}$$

seçilirse

$$\begin{aligned} B &= h\left(I_3 - S\right)^{-1}\left(I_3 + S\right) \\ &= h\left(\bar{z}\right)^{-1} z \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} B &= h\left[h\left(p+iq\right)\right]^{-1}\left[h\left(p-iq\right)\right] \\ &= h\frac{p-iq}{p+iq} \\ &= h\frac{re^{-i\phi}}{re^{i\phi}} \end{aligned}$$

ve

$$B = he^{-2i\phi} \tag{4.51}$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde $hz\left(\overline{z}\right)^{-1} = he^{-2i\phi}$'dir. Bu ifade eder ki B homotetik matrisi, $Ss = 0$ ve $Bs = hs$ olmak üzere, $B = hR\left(\vec{s}, 2\phi\right)$ şeklinde bir homotetik dönme hareketini temsil eder.

BÖLÜM 5. LORENTZ UZAYDA 1-PARAMETRELİ HOMOTETİK HAREKETLER İÇİN CAYLEY FORMÜLÜ, EULER PARAMETRELERİ ve UYGULAMALARI

Bu bölümde; $\mathbb{E}_1^3$, $3-$boyutlu Lorentz uzayda, $1-$parametreli homotetik hareketler için Cayley formülü verilecektir. Buradan hareketle $\mathbb{E}_1^3$, $3-$boyutlu Lorentz uzayda homotetik hareketler için Rodrigues – Euler parametreleri tanımlanıp, homotetik Cayley dönüşümü literatüre katılacak ve örneklerle desteklenecektir. Ayrıca Lorentz anlamda homotetik dönme matrisleri tanımlanacak ve Lorentz uzayda genelleştirilmiş Cayley formülü elde edilecektir.

5.1. $\mathbb{E}_1^3$, $3-$ Boyutlu Lorentz Uzayda Homotetik Cayley Formülü

$\mathbb{E}_1^3$, $3-$boyutlu Lorentz uzayda bir cismin $1-$parametreli homotetik hareketi,

$$\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hA & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $A \in SO(3,1)$ semiortogonal bir matris, $c \in \mathbb{R}_1^n$ bir sütun matrisi ve $A = A(t)$, $h = h(t)$, $c = c(t)$, t zaman parametresinin C^∞ fonksiyonlarıdır. x ve y aynı bir P noktasının, sırasıyla, L hareketli ve L' sabit uzayının ortonormal koordinat sistemlerine göre yer vektörleridir. $t = t_0$ anında L' ve L'nin koordinat sistemleri çakışık olarak ele alınacaktır. Bu çalışmada yukarıdaki $1-$parametreli homotetik hareket L/L' ile gösterilecektir. Bu hareketin orijin etrafında bir homotetik dönme hareketi belirten kısmı, h homotetik sabiti olmak üzere,

$$y = hAx,\ \ h = h(t) \neq 0 \tag{5.2}$$

ile verilmektedir. (5.2) eşitliğinde $hA = B$ olarak seçilirse

$$y = Bx \tag{5.3}$$

elde edilir. Öte yandan $\vec{f} = \vec{y} - h\vec{x}$ ve $\vec{g} = \vec{y} + h\vec{x}$, $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz uzayda iki spacelike (timelike) vektör, $\varepsilon = \varepsilon^{-1} = \varepsilon^T$ ve $\left\langle A\vec{x}, A\vec{x} \right\rangle_L = (\varepsilon Ax)^T (Ax)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{f}, \vec{g} \right\rangle_L &= \left\langle \vec{y} - h\vec{x}, \vec{y} + h\vec{x} \right\rangle_L \\
&= \left\langle \vec{y}, \vec{y} \right\rangle_L - h\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle_L + h\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle_L - h^2 \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle_L \\
&= \left\langle B\vec{x}, B\vec{x} \right\rangle_L - h^2 \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle_L \\
&= \left\langle hA\vec{x}, hA\vec{x} \right\rangle_L - h^2 \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle_L \\
&= h^2 \left\langle A\vec{x}, A\vec{x} \right\rangle_L - h^2 \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle_L \\
&= h^2 (\varepsilon Ax)^T (Ax) - h^2 \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle_L \\
&= h^2 x^T A^T \varepsilon^T Ax - h^2 \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle_L \\
&= h^2 x^T \varepsilon^2 A^T \varepsilon Ax - h^2 \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle_L \\
&= h^2 x^T \varepsilon\varepsilon A^T \varepsilon Ax - h^2 \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle_L \\
&= h^2 x^T \varepsilon A^{-1} Ax - h^2 \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle_L \\
&= h^2 x^T \varepsilon^T Ix - h^2 \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle_L \\
&= h^2 (\varepsilon x)^T x - h^2 \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle_L \\
&= h^2 \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle_L - h^2 \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle_L
\end{aligned}$$

ve

$$\left\langle \vec{f}, \vec{g} \right\rangle_L = 0$$

dır. Bu ifade eder ki $\vec{f}$ ve $\vec{g}$ vektörleri Lorentz anlamda ortogonaldir. $y = Bx$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} f &= Bx - hx \\ &= \left(B - hI_3\right)x \end{aligned} \tag{5.4}$$

ve

$$\begin{aligned} g &= Bx + hx \\ &= \left(B + hI_3\right)x \end{aligned} \tag{5.5}$$

dır. Burada B matrisinin öz değeri $-h$'den farklı olduğu durumlarda $\left(B + hI_3\right)^{-1}$ vardır. O halde

$$f = \left(B - hI_3\right)\left(B + hI_3\right)^{-1} g$$

bulunur. Burada

$$C = \left(B - hI_3\right)\left(B + hI_3\right)^{-1} \tag{5.6}$$

olarak alınırsa

$$f = Cg$$

elde edilir.

Teorem 5.1.2. (5.6) denklemi ile verilen 3×3 tipindeki C matrisi Lorentz anlamda antisimetriktir.

İspat. C matrisinin Lorentz anlamda antisimetrik olduğunu göstermek için $C^T = -\varepsilon C \varepsilon$ olduğu gösterilmelidir. O halde

$$C = (B - hI_3)(B + hI_3)^{-1}$$
$$(B + hI_3)C = (B + hI_3)(B - hI_3)(B + hI_3)^{-1}$$

olup, $(B + hI_3)(B - hI_3) = (B - hI_3)(B + hI_3) = B^2 - h^2 I_3$ olduğundan $(B + hI_3)$ ve $(B - hI_3)$ matrisleri değişmelidir. O halde

$$(B + hI_3)C = (B - hI_3)(B + hI_3)(B + hI_3)^{-1}$$
$$\left[(B + hI_3)C\right]^T = (B - hI_3)^T$$
$$C^T (B + hI_3)^T = (B - hI_3)^T$$
$$C^T \left(B^T + hI_3\right)\varepsilon B \varepsilon = \left(B^T - hI_3\right)\varepsilon B \varepsilon$$
$$C^T \left(\varepsilon^2 B^T \varepsilon B \varepsilon + h\varepsilon B \varepsilon\right) = \varepsilon^2 B^T (\varepsilon B \varepsilon) - h\varepsilon B \varepsilon$$

dır. Burada $B = hA$ ve A Lorentz anlamda ortogonal olduğundan,

$$C^T \left(h\varepsilon^2 A^T h\varepsilon A \varepsilon + h\varepsilon B \varepsilon\right) = h\varepsilon^2 A^T h\varepsilon A \varepsilon - h\varepsilon B \varepsilon$$
$$C^T \left(h^2 \varepsilon\left(\varepsilon A^T \varepsilon\right) A \varepsilon + h\varepsilon B \varepsilon\right) = h^2 \varepsilon \left(\varepsilon A^T \varepsilon\right) A \varepsilon - h\varepsilon B \varepsilon$$
$$C^T \left(h^2 \varepsilon\left(A^{-1} A\right)\varepsilon + h\varepsilon B \varepsilon\right) = h^2 \varepsilon\left(A^{-1} A\right)\varepsilon - h\varepsilon B \varepsilon$$
$$C^T \left(h^2 \varepsilon I_3 \varepsilon + h\varepsilon B \varepsilon\right) = h^2 \varepsilon I_3 \varepsilon - h\varepsilon B \varepsilon$$
$$C^T \left(h^2 I_3 + h\varepsilon B \varepsilon\right) = h^2 I_3 - h\varepsilon B \varepsilon$$

ve

$$C^T \left(h^2 I_3 + h\varepsilon B \varepsilon\right)\left(h^2 I_3 + h\varepsilon B \varepsilon\right)^{-1} = \left(h^2 \varepsilon^2 I_3 - h\varepsilon B \varepsilon\right)\left(h^2 I_3 + h\varepsilon B \varepsilon\right)^{-1}$$
$$C^T = h\frac{1}{h}\left[\varepsilon(hI_3 - B)\varepsilon\right]\left[\varepsilon(hI_3 + B)\varepsilon\right]^{-1}$$
$$= \varepsilon(hI_3 - B)\left(\varepsilon\varepsilon^{-1}\right)(hI_3 + B)^{-1}\varepsilon^{-1}$$

$$= \varepsilon\left(hI_3 - B\right)\left(hI_3 + B\right)^{-1}\varepsilon$$
$$= -\varepsilon\left[\left(B - hI_3\right)\left(B + hI_3\right)^{-1}\right]\varepsilon$$

dur. O halde

$$C^T = -\varepsilon C\varepsilon$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Bu şartlar, (5.6) denklemi göz önünde bulundurularak değerlendirilirse, öz değerlerinden biri 1 olmayan C Lorentz anlamda antisimetrik matrisi için, A semiortogonal bir matris olmak üzere, $hA = B$ matrisi

$$\begin{aligned} C &= \left(B - hI_3\right)\left(B + hI_3\right)^{-1} \\ CB + hC &= B - hI_3 \\ CB - B &= -hC - hI_3 \\ B - CB &= hC + hI_3 \\ \left(I_3 - C\right)B &= h\left(I_3 + C\right);\ \det\left(I_3 - C\right) \neq 0 \end{aligned}$$

ve

$$B = h\left(I_3 - C\right)^{-1}\left(I_3 + C\right) \tag{5.7}$$

şeklinde elde edilir. (5.7) denklemine bir C matrisi için **Lorentz anlamda homotetik Cayley formülü** denir.

Sonuç 5.1.1. Özel olarak (5.7) denkleminde $h = 1$ alınırsa, C matrisi için Lorentz anlamda Cayley formülü

$$B = \left(I_3 - C\right)^{-1}\left(I_3 + C\right)$$

elde edilir [10].

5.2. Lorentz Uzayda Homotetik Hareketler için Rodrigues Denklemleri

Bu bölümde Lorentz uzayda spacelike ve timelike eksenler için Rodrigues parametreleri ayrı ayrı incelenmiştir.

5.2.1. Spacelike eksen için Rodrigues parametreleri

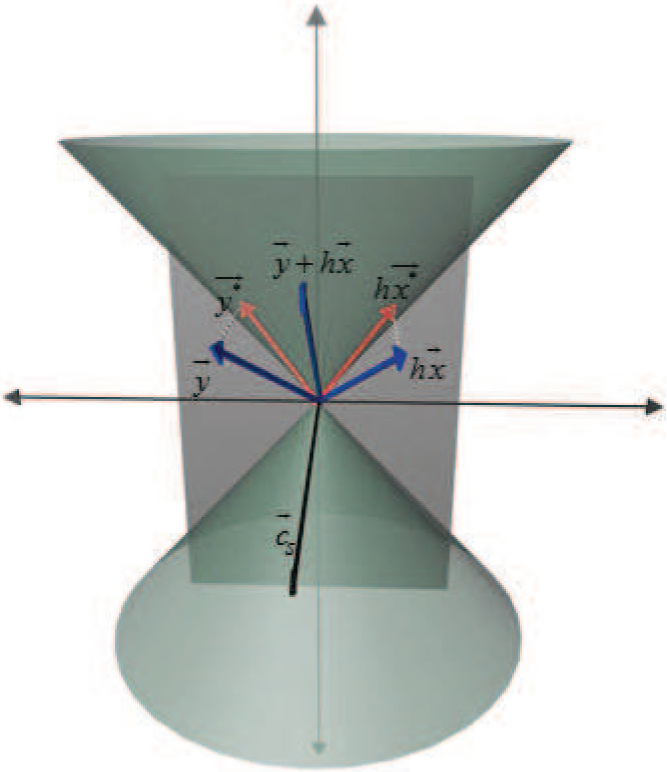
Bir A semiortogonal matrisi için $h(t) = h \neq 0$, $hA = B$ ve $h\vec{x} \in \mathbb{E}_1^3$ spacelike (timelike) bir vektör olsun. Bu durumda Teorem 2.2.7'den $\vec{y}$'de spacelike (timelike) bir vektördür. C Lorentz anlamda antisimetrik bir matris olmak üzere

$$\vec{y} - h\vec{x} = C\left(\vec{y} + h\vec{x}\right) \tag{5.8}$$

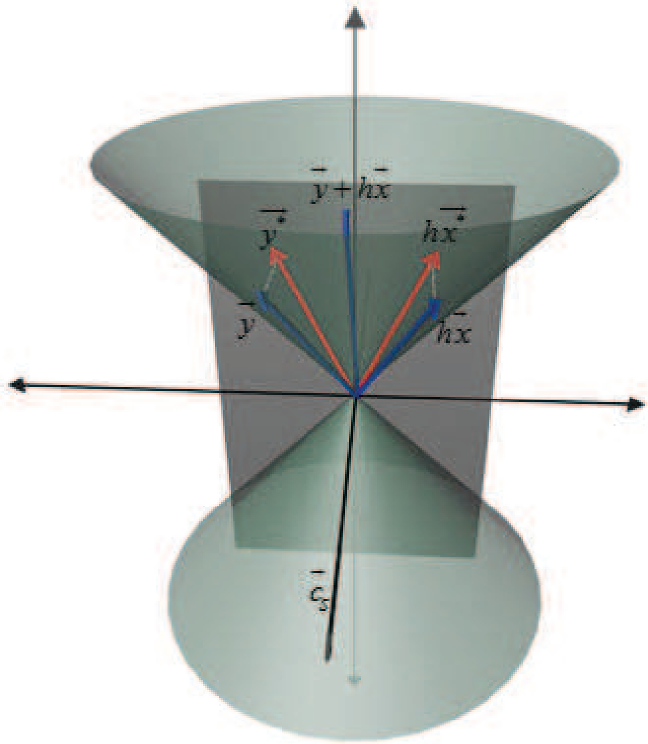
olduğunu biliyoruz. Bu denklem; dönme hareketi yapan cismin, belli noktalarının hareketli ve sabit uzaylardaki çatılara göre koordinatları arasındaki ilişkiyi verir. $3-$ boyutlu uzayda

$$\vec{y} - h\vec{x} = \vec{c_s} \wedge_L \left(\vec{y} + h\vec{x}\right) \tag{5.9}$$

yazılabilir. Bu denklem, Lorentz uzayda homotetik hareketler için spacelike Rodrigues denklemi ve $\vec{c_s}$ vektörü de homotetik hareketler için spacelike Rodrigues vektörüdür. Timelike vektörlerin future-pointing olduğu durumlar için aşağıdaki şekiller verilebilir:



Şekil 5.1. $\vec{hx}$ spacelike bir vektör olmak üzere spacelike bir eksen için Rodrigues denklemi temsili



Şekil 5.2. $\vec{hx}$ timelike bir vektör olmak üzere spacelike bir eksen için Rodrigues denklemi temsili

Burada $\vec{y}$ ve $h\vec{x}$ vektörlerinin, $\overrightarrow{c_s}$ vektörüne paralel bir düzleme dik izdüşümleri aynı time konide bulunan, $\overrightarrow{y^*}$ ve $h\overrightarrow{x^*}$ vektörleri olmak üzere, $\overrightarrow{y^*}$, $h\overrightarrow{x^*}$ ve $\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}$ vektörleri, düzlemin normali olan $\overrightarrow{c_s}$ vektörüne Lorentz anlamda diktirler. O halde

$$\vec{y}=\overrightarrow{y^*}+\lambda\overrightarrow{c_s} \Rightarrow \overrightarrow{y^*}=\vec{y}-\lambda\overrightarrow{c_s}$$
$$h\vec{x}=h\overrightarrow{x^*}+\lambda\overrightarrow{c_s} \Rightarrow h\overrightarrow{x^*}=h\vec{x}-\lambda\overrightarrow{c_s}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} Ah\overrightarrow{x^*} &= A\left(h\vec{x}-\lambda\overrightarrow{c_s}\right) \\ &= Ah\vec{x}-A\lambda\overrightarrow{c_s} \end{aligned}$$

olur. Burada $\left\langle \overrightarrow{c_s},\overrightarrow{c_s}\right\rangle_L=\left\langle A\overrightarrow{c_s},A\overrightarrow{c_s}\right\rangle_L$ eşitliği sağlanır. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{c_s},\overrightarrow{c_s}\right\rangle_L &= \left\langle A\overrightarrow{c_s},A\overrightarrow{c_s}\right\rangle_L \\ &= \left(\varepsilon AC\right)^T\left(AC\right) \\ &= C^T A^T \varepsilon^T AC \\ &= C^T A^T \varepsilon AC \\ &= C^T \varepsilon A^{-1}\varepsilon\varepsilon AC \\ C^T\varepsilon C &= C^T\varepsilon C \end{aligned}$$

dir. Bu ifade eder ki $\overrightarrow{c_s}$ ve $A\overrightarrow{c_s}$ vektörlerinin boyları eşittir. Öte yandan düzlemin normali yani $\overrightarrow{c_s}$ tek olduğundan $A\overrightarrow{c_s}$ yerine $\overrightarrow{c_s}$ yazılabilir. Bu taktirde

$$\begin{aligned} Ah\overrightarrow{x^*} &= y-\lambda\overrightarrow{c_s} \\ &= \overrightarrow{y^*} \end{aligned}$$

elde edilir. $B=hA$ olduğundan

$$\overrightarrow{Bx^*} = \overrightarrow{y^*} \tag{5.10}$$

yazılabilir. Bu durumda $\vec{y}$ ve $h\vec{x}$ vektörleri ile ilgili bağıntılar, $\vec{y}$ ve $h\vec{x}$'in düzleme dik izdüşümleri olan $\overrightarrow{y^*}$ ve $h\overrightarrow{x^*}$ vektörleri için de sağlanmış olur. $\vec{y} = B\vec{x}$ dönmesinden elde edilen $\vec{y} - h\vec{x} = \vec{c_s} \wedge_L \left(\vec{y} + h\vec{x}\right)$ denkleminin düzlemdeki karşılığı, (5.10) dönme denklemi göz önünde bulundurularak

$$\overrightarrow{y^*} - h\overrightarrow{x^*} = \vec{c_s} \wedge_L \left(\overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*}\right)$$

şeklindedir. Böylece Tanım 2.2.11 gereğince

$$\left\|\overrightarrow{y^*} - h\overrightarrow{x^*}\right\|_L = \left\|\vec{c_s}\right\|_L \left\|\overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*}\right\|_L \cosh\left(\vec{c_s}, \overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*}\right)$$

dir ve $\left\langle \vec{c_s}, \overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*} \right\rangle_L = 0$ olduğundan

$$\left|\left\langle \vec{c_s}, \overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*} \right\rangle_L\right| = \left\|\vec{c_s}\right\|_L \left\|\overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*}\right\|_L \sinh\left(\vec{c_s}, \overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*}\right) = 0$$

dır. Bu durumda $\sinh\left(\vec{c_s}, \overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*}\right) = 0$ ve bu iki vektör arasındaki açı sıfır olarak elde edilir. O halde $\cosh\left(\vec{c_s}, \overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*}\right) = 1$ bulunur. Böylece

$$\left\|\overrightarrow{y^*} - h\overrightarrow{x^*}\right\|_L = \left\|\vec{c_s}\right\|_L \left\|\overrightarrow{y^*} + h\overrightarrow{x^*}\right\|_L \tag{5.11}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\left\| \overrightarrow{y^*} - h\overrightarrow{x^*} \right\|_L = \sqrt{\left| \left\langle \overrightarrow{y^*} - h\overrightarrow{x^*}, \overrightarrow{y^*} - h\overrightarrow{x^*} \right\rangle_L \right|}$$

$$= \sqrt{\left[\left\langle \overrightarrow{y^*}, \overrightarrow{y^*} \right\rangle_L - 2h \left\langle \overrightarrow{y^*}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle_L + h^2 \left\langle \overrightarrow{x^*}, \overrightarrow{x^*} \right\rangle_L \right]}$$

$$= \sqrt{\left| - \left\| \overrightarrow{y^*} \right\|_L^2 + 2h \left\| \overrightarrow{y^*} \right\|_L \left\| \overrightarrow{x^*} \right\|_L \cosh\phi - h^2 \left\| \overrightarrow{x^*} \right\|_L^2 \right|}$$

$$= \sqrt{\left| \left\| \overrightarrow{y^*} \right\|_L^2 - 2h \left\| \overrightarrow{y^*} \right\|_L \left\| \overrightarrow{x^*} \right\|_L \cosh\phi h^2 \left\| \overrightarrow{x^*} \right\|_L^2 \right|}$$

dır. Homotetik hareketler uzaklığı korumadığı için

$$\left\| \overrightarrow{x^*} \right\|_L = k \text{ ve } \left\| \overrightarrow{y^*} \right\|_L = hk$$

eşitlikleri $k \neq 0 \in \mathbb{R}^+$ için yazılabilir. O halde

$$\left\| \overrightarrow{y^*} - h\overrightarrow{x^*} \right\|_L = \sqrt{\left| h^2k^2 - 2h^2k^2 \cosh\phi + h^2k^2 \right|}$$

$$= \sqrt{\left| 2h^2k^2 - 2h^2k^2 \cosh\phi \right|}$$

$$= hk\sqrt{2}\sqrt{\left| 1 - \cosh\phi \right|}$$

$$= hk\sqrt{2}\sqrt{\left| 1 - \left(1 + 2\sinh^2 \phi/2 \right) \right|}$$

$$= 2hk\sqrt{\left| \sinh^2 \phi/2 \right|}$$

olup

$$\left\| \overrightarrow{y^*} - h\overrightarrow{x^*} \right\|_L = 2kh \sinh \phi/2 \tag{5.12}$$

dır. Benzer işlemler yinelenerek,

$$\left\|\overrightarrow{y^*}+h\overrightarrow{x^*}\right\|_L=\sqrt{\left|-h^2k^2-2h^2k^2\cosh\phi-h^2k^2\right|}$$
$$=hk\sqrt{2}\sqrt{\left|1+\cosh\phi\right|}$$
$$=hk\sqrt{2}\sqrt{\left|1+\left(2\cosh^2\phi/2-1\right)\right|}$$
$$=2hk\sqrt{\left|\cosh^2\phi/2\right|}$$

olup

$$\left\|\overrightarrow{y^*}+h\overrightarrow{x^*}\right\|_L=2kh\cosh\phi/2 \tag{5.13}$$

ifadeleri elde edilir. (5.12) ve (5.13) denklemleri oranlanırsa,

$$\frac{\left\|\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}\right\|_L}{\left\|\overrightarrow{y^*}+h\overrightarrow{x^*}\right\|_L}=\frac{2kh\sinh\phi/2}{2kh\cosh\phi/2}$$

ve

$$\frac{\left\|\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}\right\|_L}{\left\|\overrightarrow{y^*}+h\overrightarrow{x^*}\right\|_L}=\tanh\phi/2 \tag{5.14}$$

elde edilir. (5.11) ve (5.14) denklemlerinden

$$\left\|\overrightarrow{c_s}\right\|_L=\tanh\phi/2 \tag{5.15}$$

elde edilir. $\overrightarrow{c_s}$ yönündeki spacelike birim vektör $\vec{s}=(a,b,c)$ ise $\overrightarrow{c_s}$ vektörünün bileşenleri

$$c_{s_1} = \tanh(\phi/2)a$$
$$c_{s_2} = \tanh(\phi/2)b \qquad (5.16)$$
$$c_{s_3} = \tanh(\phi/2)c$$

şeklindedir ve Lorentz uzayda spacelike bir eksen etrafında gerçekleşen homotetik hareketler için Rodrigues parametreleri olarak adlandırılır.

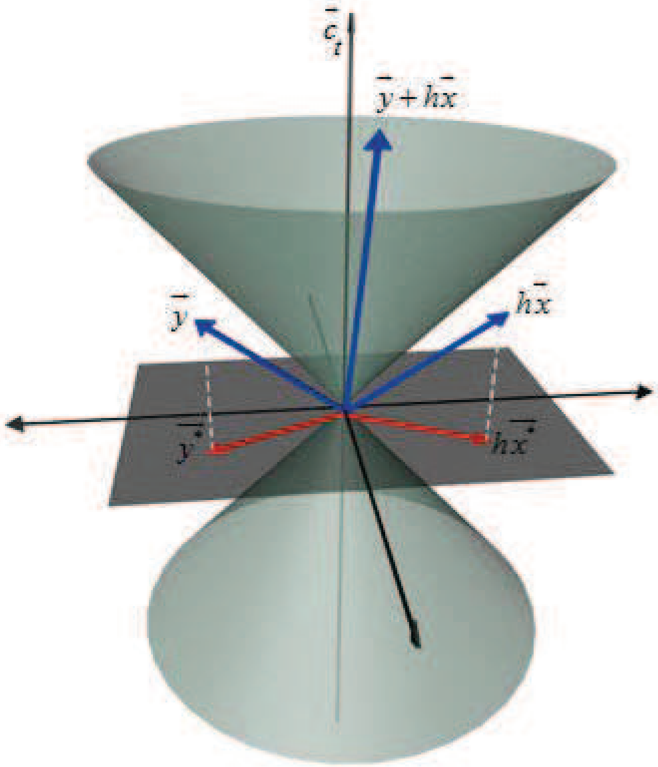
Sonuç 5.2.1.1. (3.32) ve (5.16) denklemleri karşılaştırıldığında, Lorentz uzayda genel ve homotetik hareketler altında, spacelike bir eksen için Rodrigues parametreleri değişmez.

5.2.2. Timelike eksen için Rodrigues parametreleri

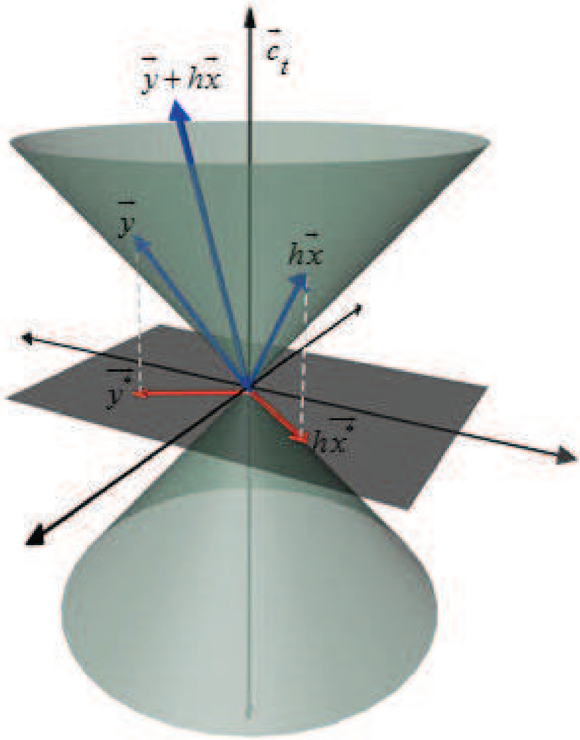
Bir A semiortogonal matrisi için $h(t) = h \neq 0$, $hA = B$ ve $h\vec{x} \in \mathbb{E}_1^3$ spacelike (timelike) bir vektör olsun. Bu durumda Teorem 2.2.7'den $\vec{y}$'de spacelike (timelike) bir vektördür. C Lorentz anlamda antisimetrik bir matris olmak üzere (5.8) denklemi göz önünde bulundurularak $3-$boyutlu Lorentz uzayda C Lorentz anlamda antisimetrik matrisine karşılık gelen timelike vektör $\vec{c_t}$ olmak üzere,

$$\vec{y} - h\vec{x} = \vec{c_t} \wedge_L \left(\vec{y} + h\vec{x}\right) \qquad (5.17)$$

yazılabilir. Bu denklem, Lorentz uzayda homotetik hareketler için timelike Rodrigues denklemi ve $\vec{c_t}$ vektörü de homotetik hareketler için timelike Rodrigues vektörüdür. Timelike vektörlerin future-pointing olduğu durumlar için aşağıdaki şekiller verilebilir:



Şekil 5.3. $h\vec{x}$ spacelike bir vektör olmak üzere timelike bir eksen için Rodrigues denklemi temsili



Şekil 5.4. $h\vec{x}$ timelike bir vektör olmak üzere timelike bir eksen için Rodrigues denklemi temsili

Burada $\vec{y}$ ve $h\vec{x}$ vektörlerinin $\vec{c_t}$ vektörüne paralel şekilde düzleme dik izdüşümleri $\overrightarrow{y^*}$ ve $h\overrightarrow{x^*}$ olmak üzere, $\overrightarrow{y^*}$, $h\overrightarrow{x^*}$ ve $\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}$ vektörleri, düzlemin normali olan $\vec{c_t}$ vektörüne diktirler. O halde Bölüm 5.2.1'deki işlemler tekrarlanarak $\overrightarrow{y^*}$, $h\overrightarrow{x^*}$ izdüşüm vektörleri için

$$\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}=\vec{c_t}\wedge_L\left(\overrightarrow{y^*}+h\overrightarrow{x^*}\right) \tag{5.18}$$

ve

$$\left\|\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}\right\|_L=\left\|\vec{c_t}\right\|_L\left\|\overrightarrow{y^*}+h\overrightarrow{x^*}\right\|_L$$

elde edilir. Burada $\overrightarrow{y^*}$, $h\overrightarrow{x^*}$ vektörleri spacelike olduğundan Bölüm 5.2.1'den farklı olarak

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}\right\|_L&=\sqrt{\left|\left\langle\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*},\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}\right\rangle_L\right|}\\&=\sqrt{\left[\left\langle\overrightarrow{y^*},\overrightarrow{y^*}\right\rangle_L-2h\left\langle\overrightarrow{y^*},\overrightarrow{x^*}\right\rangle_L+h^2\left\langle\overrightarrow{x^*},\overrightarrow{x^*}\right\rangle_L\right]}\\&=\sqrt{\left|-\left\|\overrightarrow{y^*}\right\|_L^2+2h\left\|\overrightarrow{y^*}\right\|_L\left\|\overrightarrow{x^*}\right\|_L\cos\phi-h^2\left\|\overrightarrow{x^*}\right\|_L^2\right|}\\&=\sqrt{\left|\left\|\overrightarrow{y^*}\right\|_L^2-2h\left\|\overrightarrow{y^*}\right\|_L\left\|\overrightarrow{x^*}\right\|_L\cos\phi h^2\left\|\overrightarrow{x^*}\right\|_L^2\right|}\end{aligned}$$

bulunur. Homotetik hareketler uzaklığı korumadığı için yine $\left\|\overrightarrow{x^*}\right\|_L=k$ ve $\left\|\overrightarrow{y^*}\right\|_L=hk$ eşitlikleri $k\neq 0\in\mathbb{R}^+$ için yazılıp devam edilirse

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}\right\|_L&=\sqrt{\left|h^2k^2-2h^2k^2\cos\phi+h^2k^2\right|}\\&=\sqrt{\left|2h^2k^2-2h^2k^2\cos\phi\right|}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= hk\sqrt{2}\sqrt{\left|1-\cos\phi\right|} \\
&= hk\sqrt{2}\sqrt{\left|1-\left(1+2\sin^2\phi/2\right)\right|} \\
&= 2hk\sqrt{\left|\sin^2\phi/2\right|}
\end{aligned}
$$

olup

$$\left\|\overrightarrow{y^*}-h\overrightarrow{x^*}\right\|_L = 2kh\sin\phi/2$$

dır. Benzer işlemler yinelenerek,

$$\left\|\overrightarrow{y^*}+h\overrightarrow{x^*}\right\|_L = 2hk\sqrt{\left|\cos^2\phi/2\right|}$$

eşitlikleri elde edilir. O halde $\overrightarrow{c_t}$ timelike vektörü için de

$$\left\|\overrightarrow{c_t}\right\|_L = \tan\phi/2 \tag{5.19}$$

bulunur. $\vec{c}$ yönündeki timelike birim vektör $\vec{s}=(a,b,c)$ ise $\vec{c}$ vektörünün bileşenleri

$$
\begin{aligned}
c_{t_1} &= \tan(\phi/2)a \\
c_{t_2} &= \tan(\phi/2)b \\
c_{t_3} &= \tan(\phi/2)c
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

şeklindedir ve Lorentz uzayda timelike eksen etrafında homotetik hareketler için Rodrigues parametreleri olarak adlandırılır.

Sonuç 5.2.2.1. (3.33) ve (5.20) denklemleri karşılaştırıldığında Lorentz uzayda genel ve homotetik hareketler altında, timelike bir eksen için Rodrigues parametreleri değişmez.

5.3. Lorentz Uzayda Homotetik Hareketler için Euler Parametreleri

Bu bölümde Lorentz uzayda spacelike ve timelike eksenler için Euler parametreleri ayrı ayrı incelenmiştir.

5.3.1. Spacelike eksen için Euler parametreleri

A semiortogonal matrisi için $hA = B$ homotetik matrisi; ϕ hiperbolik dönme açısı olmak üzere, (5.15) denkleminden elde edilen $C = \tanh(\phi/2)S$ ile verilen $\vec{s}$ spacelike birim vektörünün terimleri cinsinden ifade edilebilir. Bu durumda (5.7) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
B &= h(I_3 - C)^{-1}(I_3 + C) \\
&= h\left[I_3 - S\tanh(\phi/2)\right]^{-1}\left[I_3 + S\tanh(\phi/2)\right] \\
&= h\left[I_3 - S\frac{\sinh(\phi/2)}{\cosh(\phi/2)}\right]^{-1}\left[I_3 + S\frac{\sinh(\phi/2)}{\cosh(\phi/2)}\right] \\
&= h\left[\frac{I_3\cosh(\phi/2) - S\sinh(\phi/2)}{\cosh(\phi/2)}\right]^{-1}\left[\frac{I_3\cosh(\phi/2) + S\sinh(\phi/2)}{\cosh(\phi/2)}\right]
\end{aligned}$$

dir. O halde

$$B = h\left[I_3\cosh(\phi/2) - S\sinh(\phi/2)\right]^{-1}\left[I_3\cosh(\phi/2) + S\sinh(\phi/2)\right]$$

elde edilir. Burada

$$F = \left[I_3\cosh(\phi/2) + S\sinh(\phi/2)\right] \tag{5.21}$$

seçilirse, bu matrisin ihtiva ettiği sabitlere; Lorentz uzayda spacelike bir eksen etrafında gerçekleşen homotetik hareketler için Euler parametreleri denir. Bu parametreler;

$$
\begin{aligned}
f_{s_0} &= \cosh(\phi/2) \\
f_{s_1} &= a\sinh(\phi/2) \\
f_{s_2} &= b\sinh(\phi/2) \\
f_{s_3} &= c\sinh(\phi/2)
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

şeklindedir.

Sonuç 5.3.1.1. (3.35) ve (5.22) denklemleri karşılaştırıldığında Lorentz uzayda genel ve homotetik hareketler altında, spacelike bir eksen için Euler parametreleri değişmez.

Burada S Lorentz anlamda antisimetrik matrisi belirlenmelidir. $\vec{s},\vec{w} \in \mathbb{E}_1^3$ ve w sütun matrisi olmak üzere,

$$
\vec{s} \wedge_L \vec{w} = Sw
$$

eşitliğini sağlayan S matrisi

$$
S = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}
$$

şeklindedir. Gerçekten de

$$
\vec{s} \wedge_L \vec{w} = \det \begin{bmatrix} -\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a & b & c \\ u & v & w \end{bmatrix} = (cv - bw, uc - aw, av - ub)
$$

ve

$$Sw = \begin{bmatrix} x & y & z \\ k & l & m \\ e & f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$
$$= (xu + yv + zw, ku + lv + mw, eu + fv + gw)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} cv - bw = xu + yv + zw &\quad \Rightarrow \quad y = c, z = -b, x = 0 \\ uc - aw = ku + lv + mw &\quad \Rightarrow \quad k = c, m = -a, l = 0 \\ av - ub = eu + fv + gw &\quad \Rightarrow \quad e = -b, f = a, g = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$S = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

dır. Ayrıca bu matris

$$S^T = -\varepsilon S \varepsilon$$
$$\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= -\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

eşitliğini sağladığından Lorentz anlamda antisimetriktir. O halde (5.7) denklemi belirlenen C matrisi yerine (5.23) denklemi ile belirlenen S matrisi yazılabilir. Bu matrise karşılık gelen $\vec{s}$ spacelike vektörü için aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 5.3.1.1. S Lorentz anlamda antisimetrik matrisine karşılık gelen vektör $\vec{s}=(a,b,c)$ olsun. $\vec{s}$ vektörü; spacelike birim vektör olarak seçilirse S matrisinin öz değerleri $0,-1$ ve 1 şeklindedir.

İspat. S matrisinin öz denklemi $\det(S-\lambda I_3)=0$ şeklindedir. Bu denklemin kökleri, $\vec{s}=(a,b,c)$ spacelike birim vektör olmak üzere incelenirse, S matrisinin öz değerleri

$$\begin{aligned} \det(S-\lambda I_3)&=0 \\ -\lambda^3+\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda&=0 \\ -\lambda^3+\lambda&=0 \\ -\lambda\left(\lambda^2-1\right)&=0 \end{aligned}$$

eşitliğinden $\lambda=0,\lambda=-1,\lambda=1$ olarak elde edilir [10].

Teorem 5.3.1.2. $\vec{s}=(a,b,c)$ spacelike birim vektörüne karşılık gelen matris $S=\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ ve $C=S\tanh(\phi/2)$ olmak üzere, Lorentz uzayda homotetik hareketler altında spacelike bir eksen için Euler parametrelerine göre B homotetik matrisi

$$B=h\left[I_3+S\sinh\phi+S^2\left(\cosh\phi-1\right)\right] \tag{5.24}$$

dir.

İspat. $\phi/2=x$ olsun. O halde $C=S\tanh(\phi/2)$ eşitliği (5.7) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} B&=h\left(I_3-C\right)^{-1}\left(I_3+C\right) \\ &=h\left(I_3-S\tanh x\right)^{-1}\left(I_3+S\tanh x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h\left(I_3 - S\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)^{-1}\left(I_3 + S\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) \\
&= h\left(\frac{I_3\cosh x - S\sinh x}{\cosh x}\right)^{-1}\left(\frac{I_3\cosh x + S\sinh x}{\cosh x}\right) \\
&= h\left(I_3\cosh x - S\sinh x\right)^{-1}\left(I_3\cosh x + S\sinh x\right)
\end{aligned}$$

ve

$$B = h\frac{Ek\left(I_3\cosh x - S\sinh x\right)}{\det\left(I_3\cosh x - S\sinh x\right)}\left(I_3\cosh x + S\sinh x\right)$$

dır. Burada $D = \left(I_3\cosh x - S\sinh x\right)$ seçilir ve açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned}
D &= \begin{bmatrix} \cosh x & 0 & 0 \\ 0 & \cosh x & 0 \\ 0 & 0 & \cosh x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & c\sinh x & -b\sinh x \\ c\sinh x & 0 & -a\sinh x \\ -b\sinh x & a\sinh x & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cosh x & -c\sinh x & b\sinh x \\ -c\sinh x & \cosh x & a\sinh x \\ b\sinh x & -a\sinh x & \cosh x \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\det D &= \cosh x\left(\cosh^2 x + a^2\sinh^2 x\right) + c\sinh x\left(-c\sinh x\cosh x - ab\sinh^2 x\right) \\
&\quad + b\sinh x\left(ac\sinh^2 x - b\sinh x\cosh x\right) \\
&= \cosh^3 x + \left(a^2 - b^2 - c^2\right)\sinh^2 x\cosh x \\
&= \cosh^3 x - \left(-a^2 + b^2 + c^2\right)\sinh^2 x\cosh x \\
&= \cosh x\left(\cosh^2 x - \sinh^2 x\right) \\
&= \cosh x
\end{aligned}$$

dır. Böylece D matrisinin tersi

$$D^{-1}=\frac{1}{\cosh x}Ek\begin{bmatrix}\cosh x & -c\sinh x & b\sinh x\\ -c\sinh x & \cosh x & a\sinh x\\ b\sinh x & -a\sinh x & \cosh x\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\cosh^2 x+a^2\sinh^2 x}{\cosh x} & \dfrac{c\sinh x\cosh x-ab\sinh^2 x}{\cosh x} & \dfrac{-ac\sinh^2 x-b\sinh x\cosh x}{\cosh x}\\ \dfrac{c\sinh x\cosh x+ab\sinh^2 x}{\cosh x} & \dfrac{\cosh^2 x-b^2\sinh^2 x}{\cosh x} & \dfrac{-a\cosh x\sinh x-bc\sinh^2 x}{\cosh x}\\ \dfrac{ac\sinh^2 x-b\sinh x\cosh x}{\cosh x} & \dfrac{a\cosh x\sinh x-bc\sinh^2 x}{\cosh x} & \dfrac{\cosh^2 x-c^2\sinh^2 x}{\cosh x}\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu matris ortak parantezler halinde yazılırsa,

$$D^{-1}=\cosh x\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\sinh x\begin{bmatrix}0&c&-b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{bmatrix}+\frac{\sinh^2 x}{\cosh x}\begin{bmatrix}a^2&-ab&-ac\\ab&-b^2&-bc\\ac&-bc&-c^2\end{bmatrix}$$

dir. $-a^2+b^2+c^2=1$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$D^{-1}=I_3\cosh x+S\sinh x+\frac{\sinh^2 x}{\cosh x}\begin{bmatrix}-1+b^2+c^2&-ab&-ac\\ab&-1-a^2+c^2&-bc\\ac&-bc&-1-a^2+b^2\end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan da

$$D^{-1}=I_3\cosh x+S\sinh x+\frac{\sinh^2 x}{\cosh x}\left(-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b^2+c^2&-ab&-ac\\ab&-a^2+c^2&-bc\\ac&-bc&-a^2+b^2\end{bmatrix}\right)$$

$$=I_3\cosh x+S\sinh x+\frac{\sinh^2 x}{\cosh x}\left(-I_3+\begin{bmatrix}0&c&-b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&c&-b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{bmatrix}\right)$$

ve

$$D^{-1} = I_3 \cosh x + S \sinh x + \frac{\sinh^2 x}{\cosh x}\left(-I_3 + S^2\right)$$

şeklindedir. O halde

$$\begin{aligned} B &= hD^{-1}F \\ &= h\left(I_3 \cosh x - S \sinh x\right)^{-1}\left(I_3 \cosh x + S \sinh x\right) \\ &= h\left[I_3 \cosh x + S \sinh x + \frac{\sinh^2 x}{\cosh x}\left(-I_3 + S^2\right)\right]\left(I_3 \cosh x + S \sinh x\right) \\ &= h\left[\begin{array}{l} I_3 \cosh^2 x + S \sinh x \cosh x + \sinh^2 x\left(-I_3 + S^2\right) + S \cosh x \sinh x \\ +S^2 \sinh^2 x + \dfrac{\sinh^3 x}{\cosh x}\left(-S + S^3\right) \end{array}\right] \end{aligned}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} -S + S^3 &= \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 + b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ ab & -1 - a^2 + c^2 & -bc \\ ac & -bc & -1 - a^2 + b^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} abc - abc & -c - a^2c + c^3 + b^2c & -bc^2 + b + a^2b - b^3 \\ -c + cb^2 + c^3 - ca^2 & -abc + abc & -ac^2 + a + a^3 - ab^2 \\ b - b^3 - bc^2 + ba^2 & ab^2 - a - a^3 + ac^2 & abc - abc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -c + c\left(-a^2 + b^2 + c^2\right) & b - b\left(-a^2 + b^2 + c^2\right) \\ -c + c\left(-a^2 + b^2 + c^2\right) & 0 & a - a\left(-a^2 + b^2 + c^2\right) \\ b - b\left(-a^2 + b^2 + c^2\right) & -a + a\left(-a^2 + b^2 + c^2\right) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
B &= h\left[I_3 \cosh^2 x + S \sinh x \cosh x + \sinh^2 x\left(-I_3 + S^2\right) + S \cosh x \sinh x + S^2 \sinh^2 x \right] \\
&= h\left(I_3 \cosh^2 x + S \sinh x \cosh x - I_3 \sinh^2 x + S^2 \sinh^2 x + S \cosh x \sinh x + S^2 \sinh^2 x \right) \\
&= h\left[I_3 \left(\cosh^2 x - \sinh^2 x \right) + S\left(2 \sinh x \cosh x \right) + S^2 \left(2 \sinh^2 x \right) \right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $2 \sinh x \cosh x = \sinh 2x$ ve $2\sinh^2 x = \cosh 2x - 1$ olduğundan

$$
B = h\left[I_3 + S \sinh 2x + S^2 \left(\cosh 2x - 1 \right) \right]
$$

elde edilir. $x = \phi/2$ olduğundan B homotetik matrisi

$$
B = h\left[I_3 + S \sinh \phi + S^2 \left(\cosh \phi - 1 \right) \right]
$$

olarak bulunur.

5.3.2. Timelike eksen için Euler parametreleri

A semiortogonal matrisi için $hA = B$ homotetik matrisi; ϕ dönme açısı olmak üzere, (5.19) denkleminden elde edilen $C = \tan\left(\phi/2\right)S$ ile verilen $\vec{s}$ timelike birim vektörünün terimleri cinsinden ifade edilebilir. Bu durumda (5.7) denkleminden

$$
\begin{aligned}
B &= h\left(I_3 - C\right)^{-1}\left(I_3 + C\right) \\
&= h\left[I_3 - S \tan\left(\phi/2\right) \right]^{-1} \left[I_3 + S \tan\left(\phi/2\right) \right] \\
&= h\left[I_3 - S \frac{\sin\left(\phi/2\right)}{\cos\left(\phi/2\right)} \right]^{-1} \left[I_3 + S \frac{\sin\left(\phi/2\right)}{\cos\left(\phi/2\right)} \right] \\
&= h\left[\frac{I_3 \cos\left(\phi/2\right) - S \sin\left(\phi/2\right)}{\cos\left(\phi/2\right)} \right]^{-1} \left[\frac{I_3 \cos\left(\phi/2\right) + S \sin\left(\phi/2\right)}{\cos\left(\phi/2\right)} \right]
\end{aligned}
$$

dir. O halde

$$B = h\left[I_3\cos(\phi/2) - S\sin(\phi/2)\right]^{-1}\left[I_3\cos(\phi/2) + S\sin(\phi/2)\right]$$

elde edilir. Burada

$$F = \left[I_3\cos(\phi/2) + S\sin(\phi/2)\right]$$

seçilirse, bu matrisin ihtiva ettiği sabitlere; Lorentz uzayda, timelike bir eksen etrafında gerçekleşen homotetik hareketler için Euler parametreleri denir. Bu parametreler;

$$\begin{aligned} f_{t_0} &= \cos(\phi/2) \\ f_{t_1} &= a\sin(\phi/2) \\ f_{t_2} &= b\sin(\phi/2) \\ f_{t_3} &= c\sin(\phi/2) \end{aligned} \tag{5.25}$$

şeklindedir.

Sonuç. 5.3.2.1. (3.36) ve (5.25) denklemleri karşılaştırıldığında, Lorentz uzayda genel ve homotetik hareketler altında, timelike bir eksen için Euler parametreleri değişmez.

Öte yandan burada (5.23) denklemi ile verilen S Lorentz anlamda antisimetrik matrisini Bölüm 5.3.1 deki gibi elde etmek mümkündür. Bu matrise karşılık gelen $\vec{s}$ timelike vektörü için aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 5.3.2.1. S Lorentz anlamda antisimetrik matrisine karşlık gelen timelike vektör $\vec{s} = (a,b,c)$ olsun. $\vec{s}$ vektörü; timelike birim vektör olarak seçilirse, S matrisinin öz değerleri $0, -i$ ve i şeklindedir.

İspat. S matrisinin öz denklemi $\det(S - \lambda I_3) = 0$ şeklindedir. Bu denklemin kökleri, $\vec{s} = (a,b,c)$ timelike birim vektör olmak üzere incelenirse S matrisinin öz değerleri

$$\det\left(S-\lambda I_3\right)=0$$
$$-\lambda^3+\left(-a^2+b^2+c^2\right)\lambda=0$$
$$-\lambda^3-\lambda=0$$
$$-\lambda\left(\lambda^2+1\right)=0$$

eşitliğinden öz değerler $\lambda=0,\lambda=-i,\lambda=i$ olarak elde edilir [10].

Teorem 5.3.2.2. $\vec{s}=\left(a,b,c\right)$ timelike birim vektörüne karşılık gelen matris $S=\begin{bmatrix}0 & c & -b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}$ ve $C=S\tan\left(\phi/2\right)$ olmak üzere, Lorentz uzayda homotetik hareketler altında timelike bir eksen için Euler parametrelerine göre B homotetik matrisi

$$B=h\left[I_3+S\sin\phi+S^2\left(1-\cos\phi\right)\right] \tag{5.26}$$

dir.

İspat. Bölüm 5.3.2'deki işlemler, $\vec{s}$'nin timelike birim vektör olduğu göz önünde bulundurularak tekrarlanırsa, $\phi/2=x$ için

$$B=h\left(I_3\cos x-S\sin x\right)^{-1}\left(I_3\cos x+S\sin x\right)$$

ve $D=\left(I_3\cos x-S\sin x\right)$ olmak üzere,

$$D^{-1}=I_3\cos x+S\sin x+\frac{\sin^2 x}{\cos x}\left(I_3+S^2\right)$$

elde edilir. O halde

$$
\begin{aligned}
B &= h\left[I_3\cos^2 x + S\sin x\cos x + \sin^2 x\left(I_3+S^2\right) + S\cos x\sin x + S^2\sin^2 x\right]\\
&= h\left(I_3\cos^2 x + S\sin x\cos x + I_3\sin^2 x + S^2\sin^2 x + S\cos x\sin x + S^2\sin^2 x\right)\\
&= h\left[I_3\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right) + S\left(2\sin x\cos x\right) + S^2\left(2\sin^2 x\right)\right]
\end{aligned}
$$

dır. Burada $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, $2\sin x\cos x=\sin 2x$ ve $2\sin^2 x = 1-\cos 2x$ olduğundan

$$
B = h\left[I_3 + S\sin 2x + S^2\left(1-\cos 2x\right)\right]
$$

elde edilir. $x=\phi/2$ olduğundan B homotetik matrisi

$$
B = h\left[I_3 + S\sin\phi + S^2\left(1-\cos\phi\right)\right]
$$

olarak bulunur.

5.4. $\mathbb{E}_1^3$, $3-$Boyutlu Lorentz Uzayda Homotetik Cayley Dönüşümü ve Uygulamaları

Tanım 5.4.1. S, öz değeri 1'den farklı Lorentz anlamda antisimetrik bir matris olsun. B matrisi, Lorentz anlamda homotetik Cayley matrisi olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
hf : so(3,1) &\to H\left(\mathbb{E}_1^3\right)\\
S &\to hf\left(S\right) = B = h\left(I_3 - S\right)^{-1}\left(I_3+S\right)
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlanan hf dönüşümüne S matrisinin $\mathbb{E}_1^3$ Lorentz uzayda homotetik Cayley dönüşümü denir. Burada $so(3,1)$ ve $H\left(\mathbb{E}_1^3\right)$, sırasıyla, 3×3 tipinde Lorentz anlamda antisimetrik ve $\mathbb{E}_1^3$'te homotetik dönüşümler cümlesidir.

Teorem 5.4.1. B, Lorentz anlamda homotetik Cayley matrisi, $\vec{s}=(a,b,c)$ spacelike (timelike) bir vektör ve $\left\|\vec{s}\right\|_L \neq 1$ olmak üzere $Bs=hs$ bağıntısı vardır.

İspat.

$$Bs = h\Delta^{-1}\begin{bmatrix} 1+a^2+b^2+c^2 & 2(-ab+c) & -2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2-b^2+c^2 & -2(bc+a) \\ 2(ac-b) & 2(-bc+a) & 1-a^2+b^2-c^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$= h\Delta^{-1}\begin{bmatrix} a(1+a^2+b^2+c^2)+2b(-ab+c)-2c(ac+b) \\ 2a(ab+c)+b(1-a^2-b^2+c^2)-2c(bc+a) \\ 2a(ac-b)+2b(-bc+a)+c(1-a^2+b^2-c^2) \end{bmatrix}$$

$$= h\Delta^{-1}\begin{bmatrix} a+a^3-ab^2-ac^2 \\ b-b^3-bc^2+ba^2 \\ c-c^3+ca^2-cb^2 \end{bmatrix}$$

$$= h\frac{1}{(1+a^2-b^2-c^2)}\begin{bmatrix} a(1+a^2-b^2-c^2) \\ b(1-b^2+a^2-c^2) \\ c(1-c^2+a^2-b^2) \end{bmatrix}$$

$$= h\frac{(1+a^2-b^2-c^2)}{(1+a^2-b^2-c^2)}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

ve

$$Bs = hs$$

olarak elde edilir.

Şimdi S matrisinin farklı seçimlerine göre elde edilen B homotetik matrislerine ilişkin örnekler verelim. Burada S matrisine karşılık gelen $\vec{s}$ vektörünün spacelike ve timelike seçimleri için farklı durumlar incelenecektir. Ayrıca S matrisi yerine bir α eğrisinin eğriliklerinden oluşan matrisler alınacak ve bu eğrinin spacelike ve timelike teğetli seçilmesi durumlarında farklılık gösteren bu matrisler için B homotetik matrisleri elde edilecektir.

İlk olarak, $3-$boyutlu Lorentz uzayda $\vec{s}=(a,b,c)$ vektörüne karşılık gelen

$$S=\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi için B homotetik matrisi (5.6) denkleminden

$$\begin{aligned} B &= h\left(I_3-S\right)^{-1}\left(I_3+S\right) \\ &= h\begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dır. Şimdi $I_3-S=\begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulalım:

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix} &= 1\left(1+a^2\right)+c\left(-c-ab\right)+b\left(ac-b\right) \\ &= 1+a^2-c^2-abc+abc-b^2 \end{aligned}$$

ve

$$\det\left(I-S\right)=1+a^2-b^2-c^2=\Delta$$

şeklindedir. Öte yandan matrisin eki

$$Ek\begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a^2 & -ab+c & -ac-b \\ ab+c & 1-b^2 & -bc-a \\ ac-b & -bc+a & 1-c^2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 1+a^2 & -ab+c & -ac-b \\ ab+c & 1-b^2 & -bc-a \\ ac-b & -bc+a & 1-c^2 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$B = \frac{h}{\Delta}\begin{bmatrix} 1+a^2 & -ab+c & -ac-b \\ ab+c & 1-b^2 & -bc-a \\ ac-b & -bc+a & 1-c^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix}$$

dır. O halde son denklemden B homotetik matrisi

$$B = h\Delta^{-1}\begin{bmatrix} 1+a^2+b^2+c^2 & 2(-ab+c) & -2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2-b^2+c^2 & -2(bc+a) \\ 2(ac-b) & 2(-bc+a) & 1-a^2+b^2-c^2 \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

şeklinde bulunur. Burada $S \leftrightarrow \vec{s} = (a,b,c)$ ekseni spacelike seçilirse (5.27) denklemi $\left\|\vec{s}\right\|_L \neq 1$ olması şartıyla geçerlidir. Fakat $S \leftrightarrow \vec{s} = (a,b,c)$ ekseni timelike seçilirse $-a^2+b^2+c^2 \neq 1$ ve dolayısıyla $\Delta \neq 0$ olacağından (5.27) denklemi her zaman geçerlidir.

Sonuç 5.4.1. Özel olarak (5.27) ifadesinde $h=1$ alınırsa, $S = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ matrisi için genel hareketler altında B matrisi

$$B=\frac{1}{1+a^2-b^2-c^2}\begin{bmatrix}1+a^2+b^2+c^2 & 2(-ab+c) & -2(ac+b)\\ 2(ab+c) & 1-a^2-b^2+c^2 & -2(bc+a)\\ 2(ac-b) & 2(-bc+a) & 1-a^2+b^2-c^2\end{bmatrix} \tag{5.28}$$

şeklinde elde edilir [10].

Örnek 5.4.1. $S=\begin{bmatrix}0 & k_1 & 0\\ k_1 & 0 & k_2\\ 0 & -k_2 & 0\end{bmatrix}$, $\mathbb{E}_1^3$ 'te timelike α eğrisinin eğriliklerinden oluşan bir matris olsun. Bu durumda $S\leftrightarrow\vec{s}=(-k_2,0,k_1)$ timelike ekseni elde edilir. (5.27) ifadesinde $a=-k_2$, $b=0$ ve $c=k_1$ olarak alınırsa B homotetik matrisi

$$B=\frac{h}{1-k_1^2+k_2^2}\begin{bmatrix}1+k_2^2+k_1^2 & 2k_1 & 2k_1k_2\\ 2k_1 & 1-k_2^2+k_1^2 & 2k_2\\ -2k_1k_2 & -2k_2 & 1-k_2^2-k_1^2\end{bmatrix} \tag{5.29}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 5.4.2. Özel olarak (5.29) ifadesinde $h=1$ alınırsa, $\mathbb{E}_1^3$ 'te timelike α eğrisinin eğriliklerinden oluşan $S=\begin{bmatrix}0 & k_1 & 0\\ k_1 & 0 & k_2\\ 0 & -k_2 & 0\end{bmatrix}$ matrisi için genel hareketler altında B matrisi

$$B=\frac{1}{1-k_1^2+k_2^2}\begin{bmatrix}1+k_2^2+k_1^2 & 2k_1 & 2k_1k_2\\ 2k_1 & 1-k_2^2+k_1^2 & 2k_2\\ -2k_1k_2 & -2k_2 & 1-k_2^2-k_1^2\end{bmatrix} \tag{5.30}$$

şeklinde elde edilir [10].

Örnek 5.4.2. Bir α spacelike eğrisi için B homotetik matrisi iki durum halinde incelenmelidir:

i) $S=\begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}$, yani α spacelike eğrisi, timelike asli normale ve spacelike binormale sahip olsun. Bu matrise karşılık gelen spacelike eksen $\left\|\vec{s}\right\|_L \neq 1$ olmak üzere $S \leftrightarrow \vec{s}=(k_2,0,k_1)$ olarak elde edilir. Bu durumda (5.27) ifadesinde $a=k_2,\ b=0$ ve $c=k_1$ alınırsa B homotetik matrisi

$$B=\frac{h}{1-k_1^2+k_2^2}\begin{bmatrix} 1+k_2^2+k_1^2 & 2k_1 & -2k_1k_2 \\ 2k_1 & 1-k_2^2+k_1^2 & -2k_2 \\ 2k_1k_2 & 2k_2 & 1-k_2^2-k_1^2 \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

olur.

ii) $S=\begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}$, yani α spacelike eğrisi, spacelike asli normale ve timelike binormale sahip olsun. Bu matrise karşılık gelen spacelike eksen $\left\|\vec{s}\right\|_L \neq 1$ olmak üzere $S \leftrightarrow \vec{s}=(k_2,0,-k_1)$ olarak elde edilir. Bu durumda (5.27) ifadesinde $a=k_2,\ b=0$ ve $c=-k_1$ alınırsa B homotetik matrisi

$$B=\frac{h}{1-k_1^2+k_2^2}\begin{bmatrix} 1+k_2^2+k_1^2 & -2k_1 & 2k_1k_2 \\ -2k_1 & 1-k_2^2+k_1^2 & -2k_2 \\ -2k_1k_2 & 2k_2 & 1-k_2^2-k_1^2 \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

dir.

Örnek 5.4.3. $S=\begin{bmatrix}0 & c & 0\\ c & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ olsun. Bu matrise karşılık gelen spacelike eksen $\left\|\vec{s}\right\|_L \neq 1$ olmak üzere $S \leftrightarrow \vec{s}=(0,0,c)$ olarak elde edilir. Bu udurmda (5.27) ifadesinde $a=b=0$ ve $c\neq 0$ olarak alınırsa B homotetik matrisi

$$B=\frac{h}{1-c^2}\begin{bmatrix}1+c^2 & 2c & 0\\ 2c & 1+c^2 & 0\\ 0 & 0 & 1-c^2\end{bmatrix}$$

ve buradan da

$$B=h\begin{bmatrix}\frac{1+c^2}{1-c^2} & \frac{2c}{1-c^2} & 0\\ \frac{2c}{1-c^2} & \frac{1+c^2}{1-c^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{5.33}$$

olarak elde edilir. Burada $\sinh\phi=\frac{2c}{1-c^2}$ denirse, $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}\cosh^2 x-\frac{4c^2}{\left(1-c^2\right)^2}&=1\\ \Rightarrow \cosh^2 x&=\frac{1-2c^2+c^4+4c^2}{1-2c^2+c^4}\\ &=\frac{\left(1+c^2\right)^2}{\left(1-c^2\right)^2}\end{aligned}$$

ve

$$\cosh x = \frac{1+c^2}{1-c^2}$$

elde edilir. Böylece B homotetik matrisi

$$B = h\begin{bmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

olur. Bu ifade eder ki B homotetik matrisi, xoy düzleminde $(0,0,1)$ ekseni etrafında ϕ açısı kadar bir homotetik dönme belirtir.

Sonuç 5.4.3. Özel olarak (5.34) ifadesinde $h=1$ alınırsa $S = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi için genel hareketler altında B matrisi

$$B = \begin{bmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

şeklinde elde edilir [10].

Örnek 5.4.4. $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Bu matrise karşılık gelen spacelike eksen $\left\|\vec{s}\right\|_L \neq 1$ olmak üzere $S \leftrightarrow \vec{s} = (0,b,0)$ olarak elde edilir. Bu durumda (5.27) ifadesinde $a=c=0$ ve $b \neq 0$ olarak alınırsa B homotetik matrisi

$$B = \frac{h}{1-b^2}\begin{bmatrix} 1+b^2 & 0 & -2b \\ 0 & 1-b^2 & 0 \\ -2b & 0 & 1+b^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$B = h\begin{bmatrix} \dfrac{1+b^2}{1-b^2} & 0 & \dfrac{-2b}{1-b^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-2b}{1-b^2} & 0 & \dfrac{1+b^2}{1-b^2} \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

dir. Burada $\sinh\phi = \dfrac{-2b}{1-b^2}$ denirse, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$\cosh^2 x - \frac{4b^2}{\left(1-b^2\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \cosh^2 x = \frac{1-2b^2+b^4+4b^2}{1-2b^2+b^4}$$

$$= \frac{\left(1+b^2\right)^2}{\left(1-b^2\right)^2}$$

ve

$$\cosh x = \frac{1+b^2}{1-b^2}$$

bulunur. Böylece B homotetik matrisi

$$B = h\begin{bmatrix} \cosh\phi & 0 & \sinh\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\phi & 0 & \cosh\phi \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

olur. Bu ifade eder ki B homotetik matrisi, xoz düzleminde $(0,1,0)$ ekseni etrafında ϕ açısı kadar bir homotetik dönme belirtir.

Örnek 5.4.5. $S=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-a\\0&a&0\end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $S\leftrightarrow\vec{s}=(a,0,0)$ timelike ekseni elde edilir. O halde (5.27) ifadesinde $b=c=0$ ve $a\neq 0$ olarak alınırsa B homotetik matrisi

$$B=\frac{h}{1+a^2}\begin{bmatrix}1+a^2&0&0\\0&1-a^2&-2a\\0&2a&1-a^2\end{bmatrix}$$

ve

$$B=h\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\dfrac{1-a^2}{1+a^2}&\dfrac{-2a}{1+a^2}\\0&\dfrac{2a}{1+a^2}&\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\end{bmatrix} \tag{5.38}$$

olarak elde edilir. Burada $\sin\phi=\dfrac{2a}{1+a^2}$ denirse, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$\cos^2 x+\frac{4a^2}{\left(1+a^2\right)^2}=1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x=\frac{1+2a^2+a^4-4a^2}{1+2a^2+a^4}$$

$$=\frac{\left(1-a^2\right)^2}{\left(1+a^2\right)^2}$$

ve

$$\cos x = \frac{1-a^2}{1+a^2}$$

bulunur. Böylece B Lorentz anlamda homotetik matrisi

$$B = h\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

dir. Bu ifade eder ki B homotetik matrisi, yoz düzleminde $(1,0,0)$ ekseni etrafında ϕ açısı kadar bir homotetik dönme belirtir.

5.5. $\mathbb{E}_1^3$, $3-$Boyutlu Lorentz Uzayda Homotetik Dönme Matrisleri Yardımıyla B Homotetik Matrisi

$h \neq 0$ olmak üzere, $hR(\vec{s},\phi)$ ve $hR^{-1}(\vec{s},\phi) = hR(-\vec{s},\phi)$ ifadeleri, sırasıyla, $\mathbb{R}_1^3$'te bir $\vec{s}$ spacelike (timelike) birim vektörü etrafında ϕ açısı kadar pozitif ve $-\phi$ açısı kadar negatif homotetik dönmeleri belirtsin. Bu durumda $A \in SO(3,1)$ için $hA = B$ olmak üzere, homotetik bir dönme altında $\overrightarrow{hr} \to \overrightarrow{r^*}$ oluyorsa

$$hA = hR(\vec{s},\phi)$$

olduğundan

$$hR(\vec{s},\phi)\vec{r} = R(\vec{s},\phi)\overrightarrow{hr} = A\overrightarrow{hr} = B\vec{r} = \overrightarrow{r^*}$$

yazılabilir. Şimdi $\vec{s}$ vektörünün spacelike ve timelike olma durumlarını ayrı ayrı inceleyelim:

5.5.1. Spacelike eksen için B homotetik matrisi

Orijin noktasında $\vec{s}$ spacelike birim vektörüne dik olan bir spacelike (timelike) vektör $h\vec{\mu}$ olsun. Bu vektörün içinde yattığı düzlemdeki hareketi incelemek için, her $\vec{s}$ spacelike birim vektörüne, bir Lorentz anlamda antisimetrik matris karşılık getirilmelidir. O halde $\vec{s}=(a,b,c)$ spacelike birim vektörüne karşılık gelen bir bu matris

$$S=\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

ve $h\vec{r}$ $3-$boyutlu Lorentz uzayda keyfi bir vektör olmak üzere, $Sh\vec{r}=\vec{s}\wedge_L h\vec{r}$ ve $S\vec{s}=\vec{s}\wedge_L\vec{s}=0$ eşitlikleri sağlanır. Gerçekten de

$$Sh\vec{r}=\vec{s}\wedge_L h\vec{r} \quad\Rightarrow\quad Sh\vec{r}=\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} h \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = h\begin{bmatrix} cr_2-br_3 \\ cr_1-ar_3 \\ -br_1+ar_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{s}\wedge_L h\vec{r}=h\begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ a & b & c \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}=h\left(-br_3+cr_2,-ar_3+cr_1,ar_2-br_1\right)$$

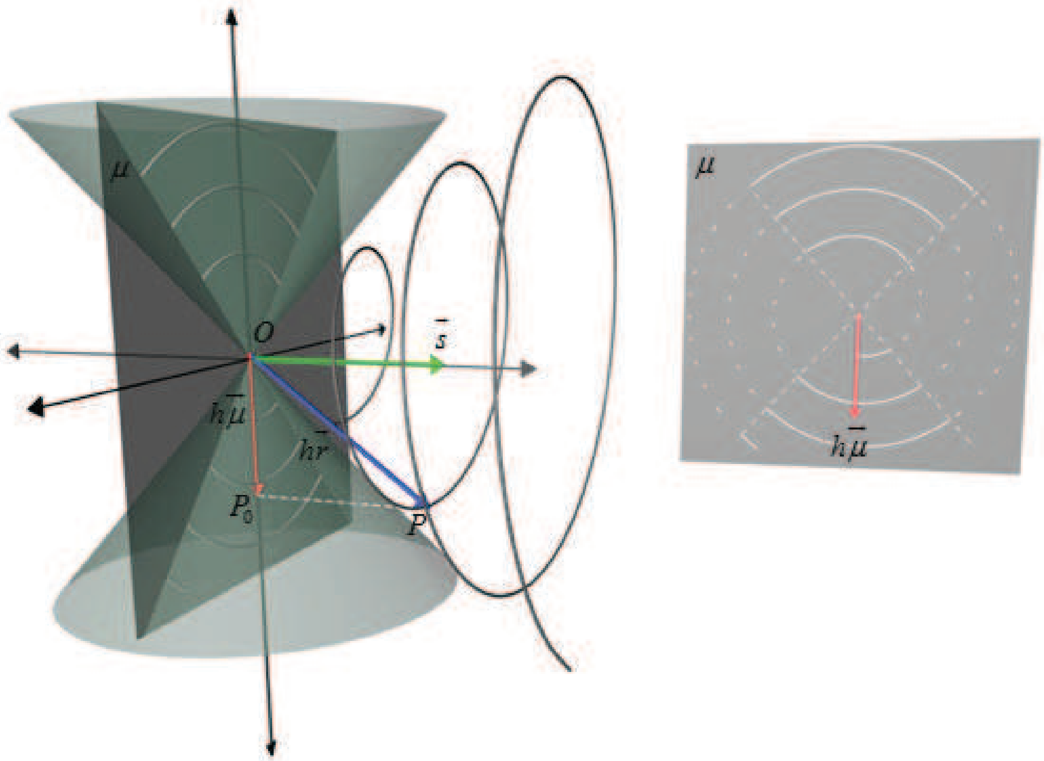
ve

$$S\vec{s}=\vec{s}\wedge_L\vec{s}=0 \quad\Rightarrow\quad S\vec{s}=\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cb-bc \\ ac-ca \\ -ab+ba \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\vec{0}=\vec{s}\wedge_L\vec{s}$$

dir. Bu durumda, $h\mu$ homotetik matrisi, $h\vec{\mu}$ vektörüne karşılık gelen matris olmak üzere, $Sh\mu=\vec{s}\wedge_L h\vec{\mu}$ eşitliği de sağlanır. O halde $\vec{s}\wedge_L h\vec{\mu}$ spacelike (timelike) vektörü, $\vec{s}$ ve $h\vec{\mu}$ vektörlerine ayrı ayrı Lorentz anlamda ortogonaldir. Bu durumda

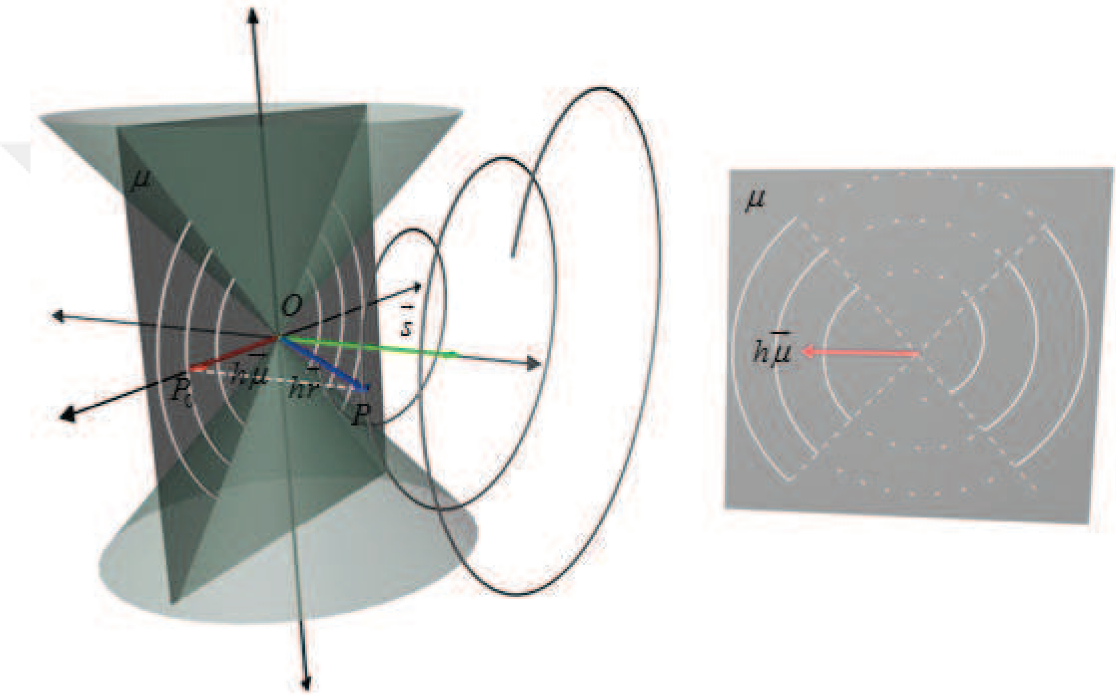
$\vec{s} \wedge_L h\vec{\mu}$ Lorentz vektörel çarpımı, $h\vec{\mu}$ spacelike (timelike) vektörünü $\vec{s}$ spacelike ekseni etrafında Lorentz anlamda ortogonalliği bozmayacak şekilde homotetik olarak döndürmek olarak yorumlanabilir. Buradan da $\vec{s}$ spacelike vektörüne karşılık gelen S Lorentz anlamda antisimetrik matrisinin de $h\vec{\mu}$ spacelike (timelike) vektörünü $\vec{s}$ spacelike ekseni etrafında Lorentz anlamda ortogonalliği bozmayacak şekilde homotetik olarak döndürdüğü sonucuna varılır. İlk olarak, $h\vec{r}$ spacelike, $h\vec{\mu}$ timelike vektörler olduğu durumu ele alalım:

Şekil 5.5'de görüldüğü üzere, $h\vec{r}$ spacelike vektörü $\vec{s}$ spacelike ekseni etrafında uzaysal bir dönme yaparken, izdüşümü olan $h\vec{\mu}$ timelike vektörü, düzlemin sadece timelike (time-koni içinde kalan) kısımlarında spiral oluşturacak şekilde bir dönme yapmaktadır.



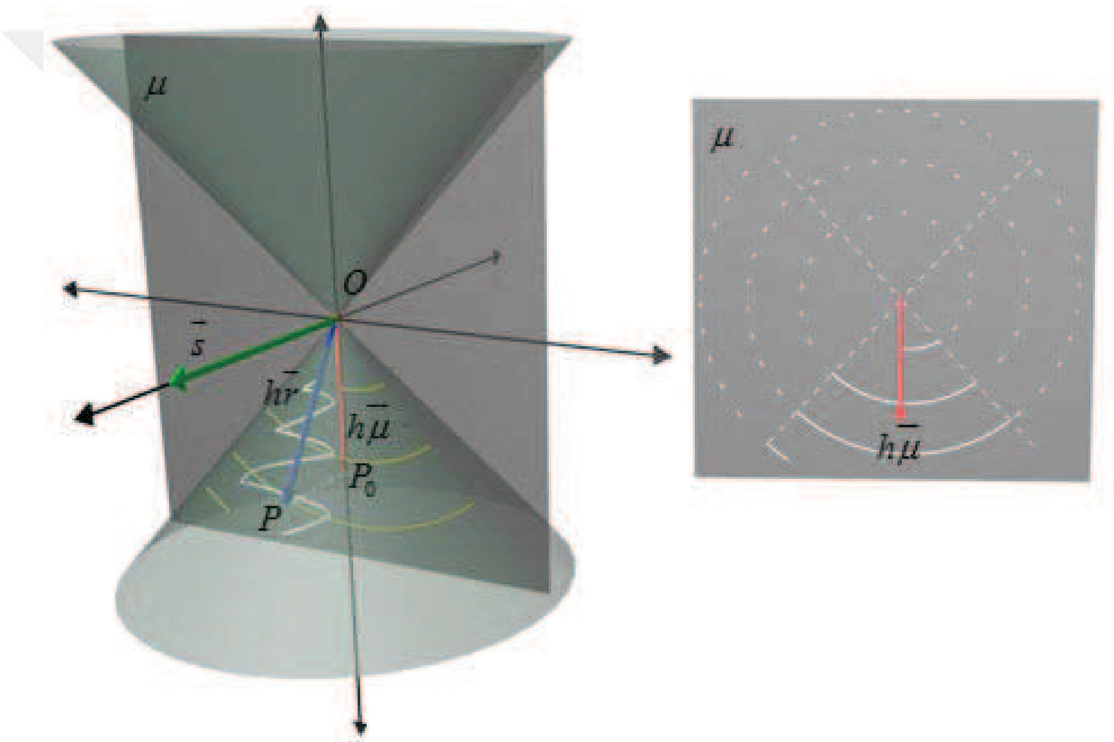
Şekil 5.5. $h\vec{r}$ spacelike, $h\vec{\mu}$ timelike vektörler olmak üzere, $h > 1$ için spacelike eksen etrafında homotetik dönme temsili

İkinci olarak, $h\vec{r}$ ve $h\vec{\mu}$ spacelike vektörler olduğu durumu ele alalım: Şekil 5.6'da görüldüğü üzere, $h\vec{r}$ spacelike vektörü, time-koninin dışına çıkamayacağı için $\vec{s}$ spacelike ekseni etrafında uzaysal bir dönme yaparken, izdüşümü olan $h\vec{\mu}$ spacelike vektörü, düzlemin sadece spacelike (time-koni dışında kalan) kısımlarında spiral oluşturacak şekilde bir dönme yapmaktadır.



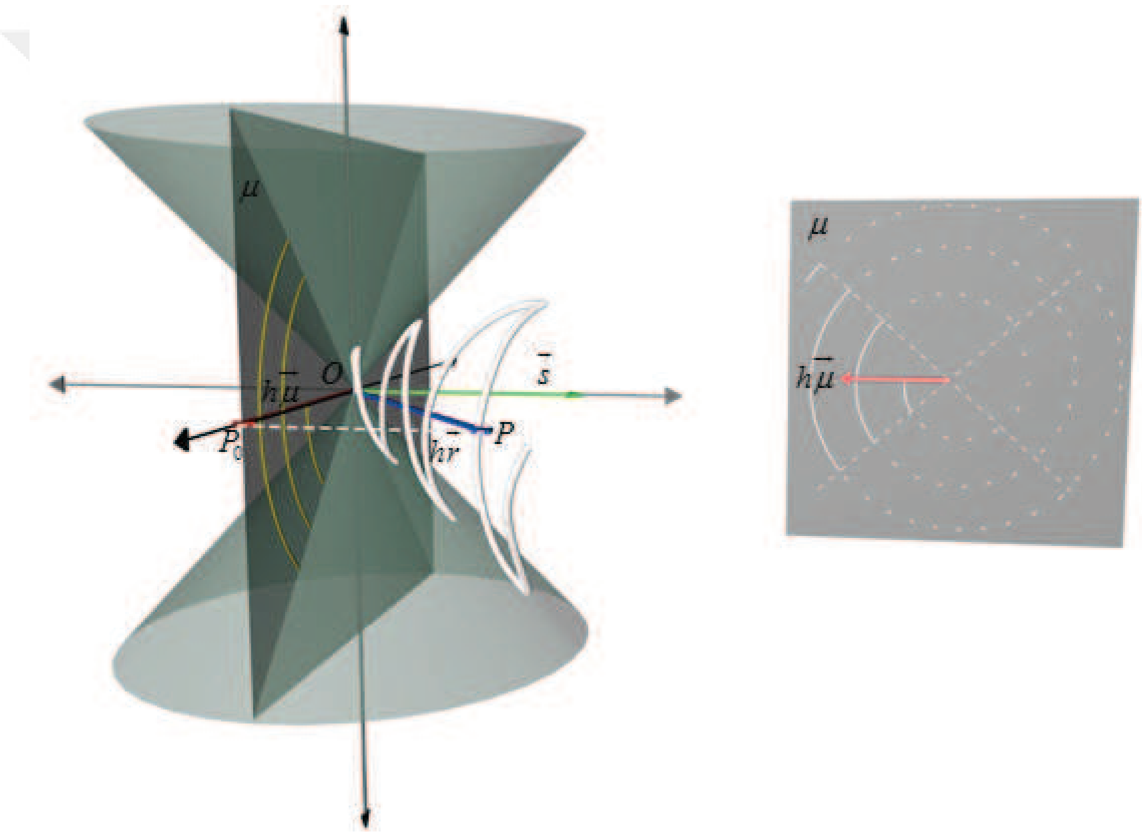
Şekil 5.6. $h\vec{r}$ ve $h\vec{\mu}$ spacelike vektörler olmak üzere, $h > 1$ için spacelike eksen etrafında homotetik dönme ile ilgili bir durum temsili

Üçüncü olarak, $h\vec{r}$ ve $h\vec{\mu}$ timelike vektörler olduğu durumu ele alalım: Şekil 5.7'de görüldüğü üzere, $h\vec{r}$ timelike vektörü, time-koninin dışına çıkamayacağı için $\vec{s}$ spacelike ekseni etrafındaki uzaysal dönmeyi, koni yüzeyi üzerindeki asimptotlara değdikçe geri dönmek suretiyle devam ettirmektedir. Öte yandan izdüşümü olan $h\vec{\mu}$ timelike vektörü, düzlemin sadece timelike (time-koni içinde kalan) kısımlarında spiral oluşturacak şekilde bir dönme yapmaktadır. (Burada şekil sadece $h\vec{r}$ ve $h\vec{\mu}$ vektörlerinin past pointing timelike olduğu durumlar için çizilmiştir.)



Şekil 5.7. $h\vec{r}$ ve $h\vec{\mu}$ timelike vektörler olmak üzere, $h>1$ için spacelike eksen etrafında homotetik dönme temsili

Son olarak, $h\vec{r}$ ve $h\vec{\mu}$ spacelike vektörler olduğu diğer bir durumu ele alalım: Şekil 5.8'de görüldüğü üzere, $h\vec{r}$ spacelike vektörü, $\vec{s}$ spacelike ekseni etrafındaki uzaysal dönmeyi gerçekleştirirken time-koninin içine giremeyeceği için koni yüzeyi üzerindeki asimptotlara değdikçe geri dönmek suretiyle devam ettirmektedir. Öte yandan izdüşümü olan $h\vec{\mu}$ spacelike vektörü, düzlemin sadece spacelike (time-koni dışında kalan) kısımlarında spiral oluşturacak şekilde bir dönme yapmaktadır. (Burada şekil sadece $h\vec{r}$ ve $h\vec{\mu}$ vektörlerinin negatif bölgede olduğu durumlar için çizilmiştir.)



Şekil 5.8. $h\vec{r}$ ve $h\vec{\mu}$ spacelike vektörler olmak üzere, $h>1$ için spacelike eksen etrafında homotetik dönme ile ilgili diğer bir durum temsili

Teorem 5.5.1.1. $h\neq 0$ ve $A\in SO(3,1)$ olmak üzere, Lorentz uzayda $\vec{s}$ spacelike birim ekseni etrafında $R(\vec{s},\phi)h\vec{r}=Ah\vec{r}=B\vec{r}$ homotetik dönmesi için B homotetik matrisi

$$B = h\left[S^0 + \sinh\phi S + (\cosh\phi - 1)S^2\right] = hf(S)$$

şeklinde elde edilir ve determinantı h^3'tür.

İspat. $h\vec{r}$ spacelike (timelike) vektörünün $\mu-$düzleminde yatması ve düzlemden ayrılması durumları ayrı ayrı incelenerek B homotetik matrisi verilebilir.

i) $h\vec{r}$ spacelike (timelike) vektörünün $\mu-$düzleminde yatması hali ($P = P_0$):

Lorentz düzlemde $h\vec{r} = h\vec{\mu}$ timelike vektörü, $\vec{s}$ spacelike birim ekseni boyunca homotetik olarak ϕ hiperbolik açısı kadar döndürülürse

$$\begin{aligned} hR(\vec{s},\phi)\vec{\mu} = R(\vec{s},\phi)h\vec{\mu} &= \cosh\phi\left(h\vec{\mu}\right) + \sinh\phi\left(\vec{s}\wedge_L h\vec{\mu}\right) \\ &= \cosh\phi\left(h\vec{\mu}\right) + \sinh\phi\left(hS\vec{\mu}\right) \\ &= \cosh\phi\left(h\vec{\mu}\right) + \sinh\phi\left(hS\vec{r}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $h\vec{r}$ spacelike (timelike) vektörünün düzlemden ayrılmış olması hali:

Burada Lorentz uzayda vektörel ve iç çarpım tanımları gereği

$$\vec{s}\wedge_L\left(\vec{s}\wedge_L h\vec{\mu}\right) = \left\langle\vec{s},\vec{s}\right\rangle_L h\vec{\mu} - \left\langle\vec{s},h\vec{\mu}\right\rangle_L \vec{s}$$

ve

$$\vec{s}\wedge_L\left(\vec{s}\wedge_L h\vec{\mu}\right) = h\vec{\mu} \text{ veya } hS^2\mu = h\mu$$

verilebilir. Ayrıca $h\vec{r} = h\vec{\mu} + k\vec{s}$ başlangıç pozisyon vektörü olmak üzere

$$\vec{s} \wedge_L h\vec{\mu} = hS\mu$$
$$\vec{s} \wedge_L \vec{r} = hSr$$
$$= S\left(h\vec{\mu} + k\vec{s}\right)$$

ve

$$\vec{s} \wedge_L h\vec{r} = hS\mu$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
R\left(\vec{s},\phi\right)h\vec{r} &= R\left(\vec{s},\phi\right)\left(k\vec{s} + h\vec{\mu}\right) \\
&= kR\left(\vec{s},\phi\right)\vec{s} + R\left(\vec{s},\phi\right)h\vec{\mu} \\
&= k\vec{s} + \cosh\phi\left(h\vec{\mu}\right) + \sinh\phi\left(hS\vec{r}\right) \\
&= h\vec{r} - h\vec{\mu} + \cosh\phi\left(h\vec{\mu}\right) + \sinh\phi\left(hS\vec{r}\right) \\
&= h\vec{r} + \left(\cosh\phi - 1\right)\left(h\vec{\mu}\right) + \sinh\phi\left(hS\vec{r}\right) \\
&= h\vec{r} + \left(\cosh\phi - 1\right)hS^2\vec{r} + \sinh\phi\left(hS\vec{r}\right) \\
&= h\left[S^0 + \sinh\phi S + \left(\cosh\phi - 1\right)S^2\right]\vec{r} \\
&= Bh\vec{r}
\end{aligned}$$

ve

$$B = h\left[S^0 + \sinh\phi S + \left(\cosh\phi - 1\right)S^2\right] = hf\left(S\right) \tag{5.40}$$

bulunur. Son olarak $hA = B$ homotetik matrisi için A matrisinin semiortogonal olduğu yani $\det B = h^3$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için; S matrisinin öz denklemi $\det\left(S - \lambda I_3\right) = 0$ olmak üzere,

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & c & -b \\ c & -\lambda & -a \\ -b & a & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

dır. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} \det(S-\lambda I_3) &= -\lambda(\lambda^2+a^2) - c(-\lambda c - ab) - b(ac - \lambda b) = 0 \\ &= -\lambda^3 - \lambda a^2 + \lambda c^2 + abc - abc + \lambda b^2 = 0 \\ &= -\lambda^3 - \lambda(a^2 - b^2 - c^2) = 0; \qquad -a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ &= \lambda^3 - \lambda = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde S matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ ve $\lambda_3 = 1$'dir. S matrisinin bir öz değeri λ ise $f(S)$'nin bir öz değeri de $f(\lambda)$ olduğundan $hf(S)$ öz değerleri $hf(0)$, $hf(-1)$ ve $hf(1)$'dir. Bu durumda $hf(S)$ öz değerleri,

$$hf(\lambda) = h\left[I_3 + \sinh\phi\lambda + (\cosh\phi - 1)\lambda^2\right]$$

ifadesinde λ değerlerinin yerine yazılmasıyla bulunacaktır. O halde

$$\begin{aligned} hf(0) &= h\left[I_3 + \sinh\phi(0) + (\cosh\phi - 1)(0)^2\right] = h \\ hf(-1) &= h\left[I_3 + \sinh\phi(-1) + (\cosh\phi - 1)(-1)^2\right] = h(\cosh\phi - \sinh\phi) \\ hf(1) &= h\left[I_3 + \sinh\phi(1) + (\cosh\phi - 1)(1)^2\right] = h(\cosh\phi + \sinh\phi) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bir kare matrisin determinantı öz değerleri çarpımı olduğundan

$$\begin{aligned} \det B &= f(0)\,f(-1)\,f(1) \\ &= hh(\cosh\phi - \sinh\phi)\,h(\cosh\phi + \sinh\phi) \\ &= h^3(\cosh^2\phi - \sinh^2\phi) \end{aligned}$$

ve

$$\det B = h^3$$

bulunur.

Sonuç 5.5.1.1. A semiortogonal bir matris, S Lorentz anlamda antisimterik bir matris ve bu matrise karşılık gelen spacelike vektör $\vec{s}$ olsun. $h \neq 0$ olmak üzere, $B = hA$ homotetik matrisine karşılık gelen dönme ekseni

$$B - \varepsilon B^T \varepsilon = h\left[I_3 + \sinh\phi S + (\cosh\phi - 1)S^2\right] - h\varepsilon\left[I_3 - \sinh\phi\varepsilon S\varepsilon + (\cosh\phi - 1)\varepsilon S^2\varepsilon\right]\varepsilon$$

ve

$$B - \varepsilon B^T \varepsilon = 2h\sinh\phi S \tag{5.41}$$

denklemi ile bulunur.

Sonuç 5.5.1.2. A semiortogonal bir matris, $h \neq 0$, S Lorentz anlamda antisimterik bir matris ve bu matrise karşılık gelen spacelike vektör $\vec{s}$ olsun. $B = hA$ homotetik matrisine karşılık gelen dönme açısını hesaplamak için,

$$\begin{aligned}
B &= h\left[S^0 + \sinh\phi S + (\cosh\phi - 1)S^2\right] \\
\dot{I}zB &= h\left\{Iz\left[S^0 + \sinh\phi S + (\cosh\phi - 1)S^2\right]\right\} \\
&= h\left\{IzS^0 + Iz(\sinh\phi S) + Iz\left[(\cosh\phi - 1)S^2\right]\right\} \\
&= h\left[3 + \sinh\phi IzS + (\cosh\phi - 1)IzS^2\right] \\
&= h\left[3 + (\cosh\phi - 1)2\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)\right]; \qquad \vec{s}\ \textit{spacelike} \\
&= h\left[3 + 2(\cosh\phi - 1)\right] \\
&= h(1 + 2\cosh\phi)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\left\|\vec{s}\right\|_L \neq 1$ için B homotetik matrisine karşılık gelen dönme açısı,

$$\dot{I}zB = h\left(1 + 2\cosh\phi\right) \tag{5.42}$$

denklemi ile bulunur.

Sonuç 5.5.1.3. Özel olarak (5.41) ifadesinde $h = 1$ alınırsa, B semiortogonal bir matris olur ve bu matrise karşılık gelen dönme ekseni

$$B - B^{-1} = 2\sinh\phi S \tag{5.43}$$

denklemi ile bulunur [10]. Öte yandan (5.42) ifadesinde özel olarak $h = 1$ alınırsa B matrisine karşılık gelen dönme açısı

$$\dot{I}zB = 1 + 2\cosh\phi \tag{5.44}$$

denklemi ile bulunur [10].

Teorem 5.5.1.2. S, 3×3 tipinde Lorentz anlamda bir antisimetrik matris ise

$$B = h\left(I_3 - S\right)^{-1}\left(I_3 + S\right)$$

olmak üzere A semiortogonal matrisi için $hA = B$ homotetik matrisi bir pozitif homotetik dönme belirtir. Burada $\vec{s} = \left(a, b, c\right)$ spacelike bir vektör, $\tanh\dfrac{\phi}{2} = \left\|\vec{s}\right\|_L = s \neq \mp 1$, $\bar{s} = \dfrac{\vec{s}}{s}$ ve

$$S = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

İspat. S'nin öz denklemi $\lambda^3 + s^2\lambda = 0$ ve Cayley-Hamilton teoreminden dolayı, $S^3 + s^2 S = 0$ ve dolayısıyla $S^3 = -s^2 S$ eşitliği vardır. Öte yandan

$$
\begin{aligned}
(I_3 - S)^{-1} &= I_3 + aS + bS^2 \\
(I_3 - S)^{-1}(I_3 - S) &= \left(I_3 + aS + bS^2\right)(I_3 - S) \\
I_3 &= I_3 + aS + bS^2 - S - aS^2 - bS^3 \\
0 &= aS + bS^2 - S - aS^2 - b\left(-s^2 S\right), \quad S^3 = -s^2 S \\
0 &= \left(a - 1 + bs^2\right)S + (b - a)S^2
\end{aligned}
$$

eşitliğinden

$$a + bs^2 = 1 \quad \text{ve} \quad b = a$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan

$$a = b = \frac{1}{1+s^2}$$

olduğu görülür. Bu ifadeler $(I_3 - S)^{-1} = I_3 + aS + bS^2$ denkleminde yerlerine yazılırsa

$$(I_3 - S)^{-1} = I + \frac{1}{1+s^2}S + \frac{1}{1+s^2}S^2$$

bulunur. Böylece

$$
\begin{aligned}
(I_3 - S)^{-1} h(I_3 + S) &= \left(I_3 + \frac{1}{1+s^2}S + \frac{1}{1+s^2}S^2\right) h(I_3 + S) \\
B &= hI_3 + \frac{h}{1+s^2}S + \frac{h}{1+s^2}S^2 + hS + \frac{h}{1+s^2}S^2 + \frac{h}{1+s^2}S^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= hI_3 + \frac{h}{1+s^2} S + \frac{h}{1+s^2} S^2 + hS + \frac{h}{1+s^2} S^2 + \frac{h}{1+s^2}\left(-s^2 S\right) \\
&= hI_3 + \left(\frac{h}{1+s^2} + h - \frac{hs^2}{1+s^2}\right) S + \left(\frac{h}{1+s^2} + \frac{h}{1+s^2}\right) S^2 \\
&= hI_3 + \left(\frac{h+h+hs^2-hs^2}{1+s^2}\right) S + \frac{2h}{1+s^2} S^2 \\
&= hI_3 + \frac{2h}{1+s^2} S + \frac{2h}{1+s^2} S^2, \quad \overline{S}s = S \\
&= hI_3 + \frac{2h}{1+s^2}\left(s\overline{S}\right) + \frac{2h}{1+s^2}\left(s\overline{S}\right)^2 \\
&= hI_3 + \frac{2hs}{1+s^2}\overline{S} + \frac{2hs^2}{1+s^2}\overline{S}^2
\end{aligned}
$$

ve

$$
\left(I_3 - S\right)^{-1} h\left(I_3 + S\right) = h\left(I_3 + \frac{2s}{1+s^2}\overline{S} + \frac{2s^2}{1+s^2}\overline{S}^2\right)
$$

elde edilir. Hipotezde $\tanh\frac{\phi}{2} = s$ verilmişti. O halde

$$
\sinh\frac{\phi}{2} = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \qquad \text{ve} \qquad \cosh\frac{\phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}
$$

elde edilir. Öte yandan $\sinh\phi = 2\sinh\frac{\phi}{2}\cosh\frac{\phi}{2}$ ve $\cosh\phi = 1 + 2\sinh^2\frac{\phi}{2}$ eşitlikleri göz önünde bulundurulursa

$$
\sinh\phi = \frac{2s}{1+s^2} \qquad \text{ve} \qquad \cosh\phi - 1 = \frac{2s^2}{1+s^2}
$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler yardımıyla

$$
B = h\left[I_3 + \sinh\phi\,\overline{S} + \left(\cosh\phi - 1\right)\overline{S}^2\right] \tag{5.45}
$$

bulunur. Burada B Lorentz anlamda homotetik Cayley matrisi, Lorentz uzayda $hR\left(\vec{s},\phi\right)$ hareketini, yani $\vec{s}$ spacelike ekseni etrafında ϕ açısı kadarlık pozitif homotetik dönmeyi temsil etmektedir.

Öte yandan, $3-$boyutlu Lorentz uzayda B homotetik matrisinin Cayley matrisi olma şartlarından biri $(B+hI_3)$ matrisinin regüler olması idi. Şimdi bu matrisin regüler olmadığı durumu inceleyelim:

$-h$, B homotetik matrisinin bir özdeğeri olsun. Bu durumda $\det(B+hI)\neq 0$ olur. Burada A semiortogonal matrisi için $hA=B$ homotetik matrisinin determinantı h^3 olduğundan, öz denklemi üçüncü dereceden reel katsayılı bir denklemdir. O halde bu denklemin köklerinden biri $-h$ olduğundan B homotetik matrisinin öz değerleri $h,-h,-h$ olmak zorundadır. Böylece $\vec{s}$ ve $\vec{u}$ spacelike birim vektörler olmak üzere, $Bs=hs$ ve $Bu=hu$ bağıntıları sağlanacak şekilde, $h\vec{s}$ ve $h\vec{u}$ spacelike vektörleri bulmak mümkündür. O halde

$$\begin{aligned} Bs &= hs \\ B^{-1}\left(Bs\right) &= B^{-1}hs \\ \left(B^{-1}B\right)s &= B^{-1}hs \\ hs &= B^{-1}h^2 s \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} Bu &= -hu \\ B^{-1}\left(Bu\right) &= -B^{-1}hu \\ \left(B^{-1}B\right)u &= -B^{-1}hu \\ hu &= -B^{-1}h^2 u \end{aligned}$$

dur. Buradan

$$hs=B^{-1}h^2s \quad \text{ve} \quad hu=-B^{-1}h^2u$$

ifadeleri çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \left\langle h\vec{s},h\vec{u}\right\rangle_L &= \left\langle B^{-1}h^2s,-B^{-1}h^2u\right\rangle_L \\ &= \left(\varepsilon B^{-1}\right)^T\left(B^{-1}\right)h\left\langle h\vec{s},-h\vec{u}\right\rangle_L \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left(\varepsilon \frac{1}{h} A^{-1}\right)^T \left(\frac{1}{h} A^{-1}\right) h \left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle_L, \quad \varepsilon A^T \varepsilon = A^{-1} \\
&= -\frac{1}{h^2} \left(A^{-1}\right)^T \varepsilon \left(A^{-1}\right) h \left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle_L \\
&= -\frac{1}{h^2} \left(A^{-1}\right)^T \varepsilon \left(\varepsilon A^T \varepsilon\right) h \left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle_L \\
&= -\frac{1}{h} \left(A^T\right)^{-1} A^T \varepsilon \left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle_L \\
&= -\frac{\varepsilon}{h} \left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle_L
\end{aligned}
$$

ve

$$
\left(I_3 + \frac{1}{h}\varepsilon\right)\left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle_L = 0, \ h \neq sbt \quad \Rightarrow \quad I + \frac{1}{h}\varepsilon \neq 0, \ \left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle_L = 0
$$

elde edilir. O halde $h\vec{s}$ ve $h\vec{u}$ spacelike vektörleri ortogonaldir. Öte yandan $\vec{s}$ ve $\vec{u}$ spacelike vektörlerine dik bir $\vec{v}$ timelike vektörü $\vec{v} = \vec{s} \wedge_L \vec{u}$ olacak şekilde seçilsin. Bu durumda

$$
\left\langle h\vec{v}, h\vec{s} \right\rangle_L = 0 = \left\langle h\vec{v}, h\vec{u} \right\rangle_L
$$

olduğu görülür. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\left\langle B\vec{v}, h\vec{s} \right\rangle_L &= \left(\varepsilon B v\right)^T \left(hs\right) \\
&= \left(v\right)^T \left(\varepsilon B\right)^T \left(hs\right) \\
&= \left(\varepsilon\varepsilon v\right)^T \left(B^T \varepsilon\right)\left(hs\right) \\
&= \left(\varepsilon v\right)^T \varepsilon^T \left(B^T \varepsilon\right)\left(hs\right) \\
&= \left(\varepsilon v\right)^T \left(\varepsilon B^T \varepsilon\right)\left(hs\right) \\
&= h\left(\varepsilon v\right)^T \left(\varepsilon A^T \varepsilon\right)\left(hs\right)
\end{aligned}
$$

$$= h\left\langle \vec{v}, A^{-1}h\vec{s} \right\rangle_L \quad \Rightarrow \quad hs = B^{-1}h^2 s = A^{-1}hs$$
$$= \left\langle h\vec{v}, h\vec{s} \right\rangle_L = 0$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\left\langle B\vec{v}, h\vec{u} \right\rangle_L &= \left(\varepsilon B v\right)^T \left(hu\right) \\
&= \left(v\right)^T \left(\varepsilon B\right)^T \left(hu\right) \\
&= \left(\varepsilon \varepsilon v\right)^T \left(B^T \varepsilon\right)\left(hu\right) \\
&= \left(\varepsilon v\right)^T \varepsilon^T \left(B^T \varepsilon\right)\left(hu\right) \\
&= \left(\varepsilon v\right)^T \left(\varepsilon B^T \varepsilon\right)\left(hu\right) \\
&= h\left(\varepsilon v\right)^T \left(\varepsilon A^T \varepsilon\right)\left(hu\right) \\
&= h\left\langle \vec{v}, A^{-1}h\vec{u} \right\rangle_L \quad \Rightarrow \quad hs = B^{-1}h^2 u = -A^{-1}hu \\
&= -\left\langle h\vec{v}, h\vec{u} \right\rangle_L = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $B\vec{v}$ vektörü ile $h\vec{s} \wedge_L h\vec{u}$ timelike vektörü, lineer bağımlı olmak zorundadır. Böylece $B\vec{v}$ timelike bir vektördür ve $Bv = \lambda v$ yazılabilir. Burada λ, B Lorentz anlamda homotetik matrisinin bir öz değeridir. Bu durumda λ, regülerliği bozan $-h$ değeri olarak seçilmelidir. O halde $Bv = \lambda v$ ve $h\vec{s}, h\vec{u}, h\vec{v}$ vektörleri $Bs = hs,\ Bu = -hu$ ve $Bv = -hv$ olacak şekilde $\mathbb{R}_1^3$'ün bir ortogonal bazını oluştururlar.

Sonuç 5.5.1.4. $h\vec{s}, h\vec{u}, h\vec{v}$ vektörlerinde özel olarak $h = 1$ alınırsa $\vec{s}, \vec{u}, \vec{v}$ vektörleri elde edilir. Bu vektörler, $Bs = s,\ Bu = -u,\ Bv = -v$ olacak şekilde $\mathbb{R}_1^3$' ün bir ortonormal bazını oluştururlar.

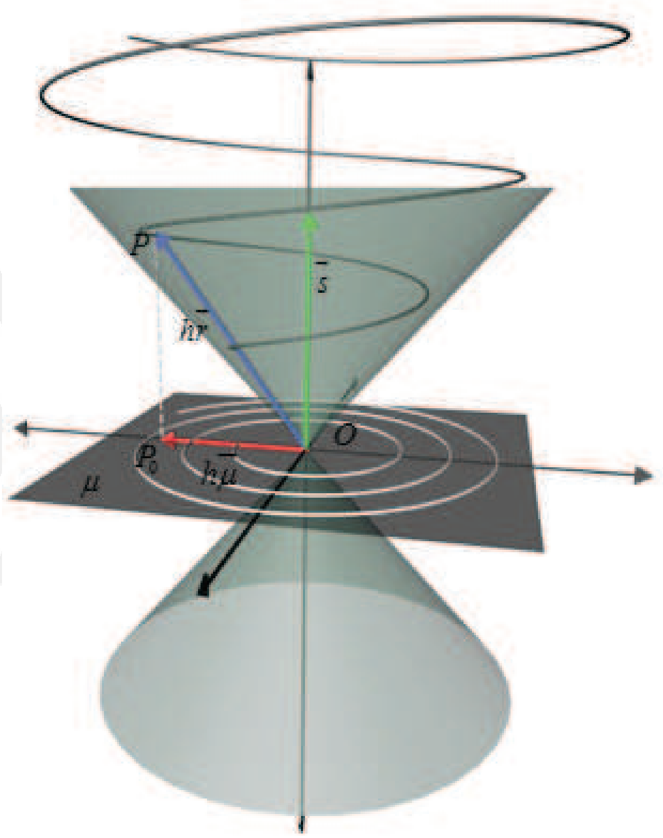
5.5.2. Timelike eksen için B homotetik matrisi

Orijin noktasında $\vec{s}$ timelike birim vektörüne dik olan bir spacelike vektör $\overrightarrow{h\mu}$ olsun. Bu vektörün içinde yattığı düzlemdeki homotetik hareketi incelemek için, her $\vec{s}$ timelike birim vektörüne, bir Lorentz anlamda antisimetrik matris karşılık getirilmelidir. O halde $\vec{s}=(a,b,c)$ timelike birim vektörüne karşılık gelen matris

$$S=\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

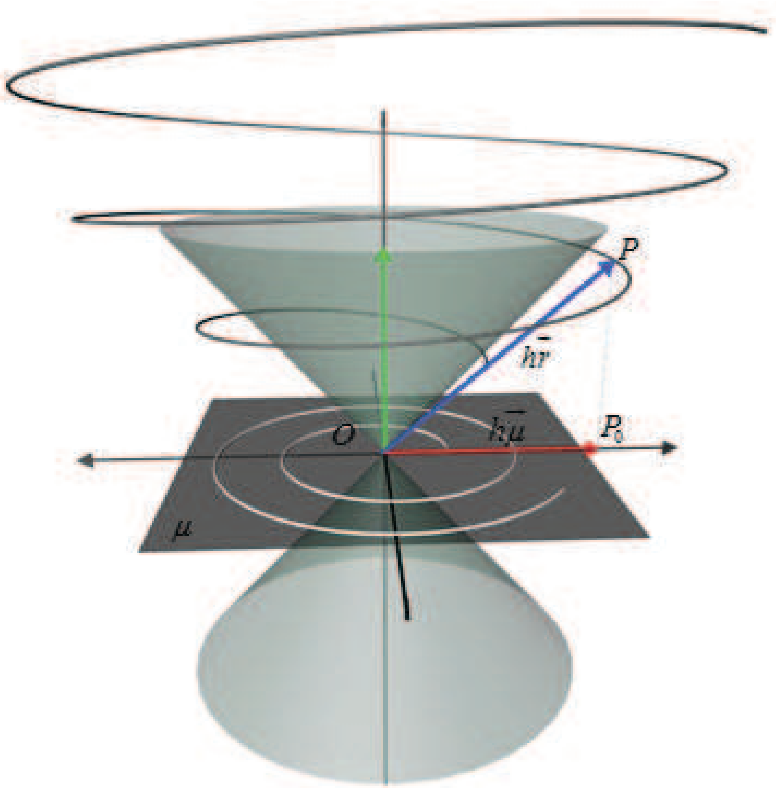
ve $\overrightarrow{hr}$, $3-$boyutlu Lorentz uzayda spacelike bir vektör olmak üzere, $S\overrightarrow{hr}=\vec{s}\wedge_L \overrightarrow{hr}$ ve $S\vec{s}=\vec{s}\wedge_L \vec{s}=0$ eşitlikleri sağlanır. Bu durumda, $h\mu$ homotetik matrisi, $\overrightarrow{h\mu}$ spacelike vektörüne karşılık gelen matris olmak üzere, $Sh\mu=\vec{s}\wedge_L \overrightarrow{h\mu}$ eşitliği elde edilir. O halde $\vec{s}\wedge_L \overrightarrow{h\mu}$ spacelike vektörü, $\vec{s}$ ve $\overrightarrow{h\mu}$ vektörlerine ayrı ayrı Lorentz anlamda ortogonaldir. Bu durumda $\vec{s}\wedge_L \overrightarrow{h\mu}$ Lorentz vektörel çarpımı, $\overrightarrow{h\mu}$ spacelike vektörünü $\vec{s}$ timelike ekseni etrafında Lorentz anlamda ortogonalliği bozmayacak şekilde homotetik olarak döndürmek olarak yorumlanabilir. Buradan da $\vec{s}$ timelike vektörüne karşılık gelen S Lorentz anlamda antisimetrik matrisinin de $\overrightarrow{h\mu}$ spacelike vektörünü $\vec{s}$ ekseni etrafında Lorentz anlamda ortogonalliği bozmayacak şekilde homotetik olarak döndürdüğü sonucuna varılır. İlk olarak, $\overrightarrow{hr}$ spacelike, $\overrightarrow{h\mu}$ timelike vektörler olduğu durumu ele alalım:

Şekil 5.9’da görüldüğü üzere, $h\vec{r}$ timelike vektörü $\vec{s}$ timelike ekseni etrafında time-koni içinde kalan uzaysal bir dönme yaparken, izdüşümü olan $h\vec{\mu}$ spacelike vektörü, düzlemde sarmal oluşturacak şekilde bir dönme yapmaktadır. (Burada şekil sadece $\vec{s}$ vektörünün future-pointing timelike olduğu durumlar için çizilmiştir.)



Şekil 5.9. $h\vec{r}$ timelike bir vektör olmak üzere, $h > 1$ için timelike eksen etrafında homotetik dönme temsili

İkinci olarak, Şekil 5.10'da görüldüğü üzere, $h\vec{r}$ spacelike vektörü $\vec{s}$ timelike ekseni etrafında time-koni dışında uzaysal bir dönme yaparken, izdüşümü olan $h\overrightarrow{\mu}$ spacelike vektörü, düzlemde sarmal oluşturacak şekilde bir dönme yapmaktadır. (Burada şekil sadece $\vec{s}$ vektörünün future-pointing timelike olduğu durumlar için çizilmiştir.)



Şekil 5.10. $h\vec{r}$ spacelike bir vektör olmak üzere, $h>1$ için timelike eksen etrafında homotetik dönme temsili

Teorem 5.5.2.1. $h \neq 0$ ve $A \in SO(3,1)$ olmak üzere, Lorentz uzayda $\vec{s}$ timelike birim ekseni etrafında $R(\vec{s},\phi)h\vec{r} = Ah\vec{r} = B\vec{r}$ homotetik dönmesi için B homotetik matrisi

$$B = h\left[I_3 + S\sin\phi + S^2(1-\cos\phi)\right] = hf(S)$$

şeklinde elde edilir ve determinantı h^3'tür.

İspat. $h\vec{r}$ spacelike (timelike) vektörünün $\mu-$düzleminde yatması ve düzlemden ayrılması durumları ayrı ayrı incelenerek B homotetik matrisi verilebilir:

i) $h\vec{r}$ spacelike (timelike) vektörünün $\mu-$düzleminde yatması hali ($P=P_0$):

Lorentz düzlemde $h\vec{r}=h\vec{\mu}$ spacelike vektörü, $\vec{s}$ timelike birim ekseni boyunca ϕ açısı kadar homotetik olarak döndürülürse

$$
\begin{aligned}
hR\left(\vec{s},\phi\right)\vec{\mu}=R\left(\vec{s},\phi\right)h\vec{\mu} &= \cos\phi\left(h\vec{\mu}\right)+\sin\phi\left(\vec{s}\wedge_L h\vec{\mu}\right)\\
&= \cos\phi\left(h\vec{\mu}\right)+\sin\phi\left(hS\vec{\mu}\right)\\
&= \cos\phi\left(h\vec{\mu}\right)+\sin\phi\left(hS\vec{r}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

ii) $h\vec{r}$ spacelike vektörünün düzlemden ayrılmış olması hali:

Burada Bölüm 5.5.1'den farklı olarak, Lorentz uzayda vektörel ve iç çarpım tanımları gereği

$$
\vec{s}\wedge_L\left(\vec{s}\wedge_L h\vec{\mu}\right)=\left\langle\vec{s},\vec{s}\right\rangle_L h\vec{\mu}-\left\langle\vec{s},h\vec{\mu}\right\rangle_L \vec{s}
$$

ve

$$
\vec{s}\wedge_L\left(\vec{s}\wedge_L h\vec{\mu}\right)=-h\vec{\mu} \text{ veya } hS^2\mu=-h\mu
$$

ifadeleri verilebilir. Ayrıca yine $h\vec{r}=h\vec{\mu}+k\vec{s}$ başlangıç pozisyon vektörü olmak üzere

$$\vec{s} \wedge_L h\vec{\mu} = hS\mu$$
$$\begin{aligned}\vec{s} \wedge_L h\vec{r} &= hSr \\ &= S\left(h\vec{\mu} + k\vec{s}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\vec{s} \wedge_L h\vec{r} = hS\mu$$

dır. O halde Bölüm 5.5.1'deki benzer işlemler tekrarlanarak

$$\begin{aligned}R\left(\vec{s},\phi\right)h\vec{r} &= R\left(\vec{s},\phi\right)\left(k\vec{s} + h\vec{\mu}\right) \\ &= h\left[I_3 + \sin\phi S + \left(1-\cos\phi\right)S^2\right]\vec{r} \\ &= B\vec{r}\end{aligned}$$

ve

$$B = h\left[I_3 + \sin\phi S + \left(1-\cos\phi\right)S^2\right] = hf\left(S\right) \tag{5.46}$$

bulunur. Son olarak $hA = B$ homotetik matrisi için A matrisinin semiortogonal olduğu yani $\det B = h^3$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için; S matrisinin öz denklemi $\det\left(S - \lambda I_3\right) = 0$ olmak üzere, gerekli hesaplamalar yapılırsa S'nin öz değerleri $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -i$ ve $\lambda_3 = i$ olarak bulunur. Bu durumda $hf\left(S\right)$ öz değerleri,

$$hf\left(\lambda\right) = h\left[I_3 + \sin\phi\lambda + \left(1-\cos\phi\right)\lambda^2\right]$$

ifadesinde λ değerlerinin yerine yazılmasıyla bulunacaktır. O halde

$$h\,f(0)=h\left[1+\sin\phi(0)+(1-\cos\phi)(0)^2\right]=h$$
$$hf(-i)=h\left[1+\sin\phi(-i)+(1-\cos\phi)(-i)^2\right]=h(\cos\phi-i\sin\phi)$$
$$h\,f(i)=h\left[1+\sin\phi(i)+(1-\cos\phi)(i)^2\right]=h(\cos\phi+i\sin\phi)$$

şeklindedir. Bir kare matrisin determinantı öz değerleri çarpımı olduğundan

$$\begin{aligned}\det B &= f(0)\,f(-i)\,f(i)\\ &= hh(\cos\phi-i\sin\phi)\,h(\cos\phi+i\sin\phi)\\ &= h^3\left(\cos^2\phi-i^2\sin^2\phi\right)\end{aligned}$$

ve

$$\det B = h^3$$

bulunur.

Sonuç 5.5.2.1. A semiortogonal bir matris, S Lorentz anlamda antisimterik bir matris ve bu matrise karşılık gelen timelike vektör $\vec{s}$ olsun. $h\neq 0$ olmak üzere, $B=hA$ homotetik matrisine karşılık gelen dönme ekseni

$$B-\varepsilon B^T\varepsilon = h\left[I_3+\sin\phi S+(1-\cos\phi)S^2\right]-h\varepsilon\left[I_3-\sin\phi\varepsilon S\varepsilon+(1-\cos\phi)\varepsilon S^2\varepsilon\right]\varepsilon$$

ve

$$B-\varepsilon B^T\varepsilon = 2h\sin\phi S \tag{5.47}$$

denklemi ile elde edilir.

Sonuç 5.5.2.2. A semiortogonal bir matris, S Lorentz anlamda antisimterik bir matris ve bu matrise karşılık gelen timelike vektör $\vec{s}$ olsun. $h \neq 0$ olmak üzere, $B = hA$ homotetik matrisine karşılık gelen dönme açısı,

$$
\begin{aligned}
B &= h\left[S^0 + \sin\phi S + (1-\cos\phi)S^2\right] \\
\dot{I}zB &= h\left\{Iz\left[S^0 + \sin\phi S + (1-\cos\phi)S^2\right]\right\} \\
&= h\left[3 + 2(\cos\phi - 1)\right]
\end{aligned}
$$

ve

$$\dot{I}zB = h(1 + 2\cos\phi) \tag{5.48}$$

denklemi ile elde edilir.

Teorem 5.5.2.2. S, 3×3 tipinde Lorentz anlamda bir antisimetrik matris ise,

$$B = h(I_3 - S)^{-1}(I_3 + S)$$

olmak üzere A semiortogonal matrisi için $hA = B$ homotetik matrisi, pozitif bir homotetik dönme belirtir. Burada $\vec{s} = (a,b,c)$ timelike bir vektör, $\tan\frac{\phi}{2} = \left\|\vec{s}\right\|_L = s \neq \mp 1$, $\bar{s} = \frac{\vec{s}}{s}$ ve

$$S = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

İspat. Teorem 5.5.1.2’deki işlemler tekrarlanarak

$$B = h\left(I_3 + \frac{2s}{1+s^2}\overline{S} + \frac{2s^2}{1+s^2}\overline{S}^2 \right)$$

elde edilir ve

$$\sin\phi = \frac{2s}{1+s^2} \quad \text{ve} \quad 1-\cos\phi = \frac{2s^2}{1+s^2}$$

eşitliklerinden

$$B = h\left[I_3 + \sin\phi\overline{S} + (1-\cos\phi)\overline{S}^2 \right]$$

bulunur. Burada B Lorentz anlamda homotetik Cayley matrisi, Lorentz uzayda $hR\left(\vec{s},\phi\right)$ yani $\vec{s}$ timelike ekseni etrafında ϕ açısı kadarlık pozitif homotetik dönmeyi temsil etmektedir.

Şimdi $(B+hI_3)$ matrisinin regüler olmadığı durumu inceleyelim:

Bu durumda, $\vec{s}$ timelike ve dolayısıyla $\vec{u}$ spacelike birim vektörler olmak üzere, $Bs = hs$ ve $Bu = hu$ bağıntıları sağlanacak şekilde, $h\vec{s}$ timelike ve $h\vec{u}$ spacelike vektörleri bulmak mümkündür. O halde $hs = B^{-1}h^2 s$ ve $hu = -B^{-1}h^2 u$ elde edilir ve bu ifadeler iç çarpılırsa

$$\left(I_3 + \frac{1}{h}\varepsilon \right)\left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle_L = 0,\ h \neq sbt \quad \Rightarrow \quad I + \frac{1}{h}\varepsilon \neq 0,\ \left\langle h\vec{s}, h\vec{u} \right\rangle_L = 0$$

elde edilir. O halde $h\vec{s}$ timelike ve $h\vec{u}$ spacelike vektörleri Lorentz anlamda ortogonaldir. Öte yandan $\vec{s}$ timelike ve $\vec{u}$ spacelike birim vektörlerine dik bir $\vec{v}$ spacelike vektörü $\vec{v} = \vec{s} \wedge_L \vec{u}$ olacak şekilde seçilsin. Bu durumda

$$\left\langle h\vec{v}, h\vec{s} \right\rangle_L = 0 = \left\langle h\vec{v}, h\vec{u} \right\rangle_L$$

olduğu görülür. Diğer taraftan

$$\left\langle B\vec{v}, h\vec{s} \right\rangle_L = \left\langle h\vec{v}, h\vec{s} \right\rangle_L = 0 \text{ ve } \left\langle B\vec{v}, h\vec{u} \right\rangle_L = -\left\langle h\vec{v}, h\vec{u} \right\rangle_L = 0$$

eşitlikleri Bölüm 5.5.1'deki gibi elde edilir. Bundan dolayı $B\vec{v}$ vektörü ile $h\vec{s} \wedge_L h\vec{u}$ spacelike vektörü, lineer bağımlı olmak zorundadır. O halde $B\vec{v}$ spacelike bir vektördür ve $Bv = \lambda v$ yazılabilir. Burada λ, B homotetik matrisinin bir öz değeridir. Bu durumda λ, regülerliği bozan $-h$ değeri olarak seçilmelidir. O halde $Bv = \lambda v$ ve $h\vec{s}, h\vec{u}, h\vec{v}$ vektörleri $Bs = hs,\ Bu = -hu,\ Bv = -hv$ olacak şekilde $\mathbb{R}_1^3$'ün bir ortogonal bazını oluştururlar.

Sonuç 5.5.2.3. $h\vec{s}, h\vec{u}, h\vec{v}$ vektörlerinde özel olarak $h = 1$ alınırsa $\vec{s}, \vec{u}, \vec{v}$ vektörleri elde edilir. Bu vektörler, $Bs = s,\ Bu = -u,\ Bv = -v$ olacak şekilde $\mathbb{R}_1^3$'ün bir ortonormal bazını oluştururlar.

5.6. $\mathbb{E}_1^3$, $3-$Boyutlu Lorentz Uzayda Homotetik Hareketler için Cayley Formülünün Genelleştirilmesi ve Geometrik Yorumu

Bu bölümde $\mathbb{E}_1^3$, $3-$boyutlu Lorentz uzayda, en basit ve genelleştirilmiş Lorentz anlamda homotetik Cayley formülü tanımlanacaktır.

Teorem 5.6.1 $hf(x) = h\left[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right]$ reel değerli bir polinom olsun. 3×3 tipinde bir S Lorentz anlamda antisimetrik matrisi için $hf(S)$ matrisi regülerdir.

İspat. $S=\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin öz denklemi $\det\left(S-\lambda I_3\right)=0$ dır. Burada $\vec{s}$ vektörünün spacelike ve timelike birim vektör olma durumları ayrı ayrı incelenmelidir:

i) $\vec{s}$ vektörü ilk olarak spacelike birim vektör olarak alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa karakteristik polinomu $\lambda^3-\lambda=0$ olarak elde edilir. Burada $S^3-S=0$ yani $S^3=S$ yazılabilir. O halde $h\neq 0$ olmak üzere

$$T=hf\left(S\right)=h\left[a_n\left(S\right)^n+a_{n-1}\left(S\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(S\right)+a_0\right]$$

matrisinin regüler olduğu gösterilmelidir. Bu durumda

$$n=0,1,2,\ldots \text{ için } \left(S\right)^{2n+1}=S \text{ ve } \left(S\right)^{2n+2}=S^2$$

olduğundan T matrisi, I_3,S,S^2 matrislerinin bir lineer birleşimi olarak yazılabilir. Böylece

$$T=hf\left(S\right)=h\left[\left(a_1+a_3+a_5+a_7\right)S+\left(a_2+a_4+a_6+a_8\right)S^2+a_0I_3\right]$$

elde edilir. Bu katsayıları açık olarak ifade etmek gerekirse

$$\begin{array}{lll} \left(S\right)^{2n+1}=\left(S\right) & & \left(S\right)^{2n+2}=\left(S\right)^2 \\ n=0 \Rightarrow \left(S\right)^1=S & & \left(S\right)^2=\left(S\right)^2 \\ n=1 \Rightarrow \left(S\right)^3=S & \text{ve} & \left(S\right)^4=\left(S\right)^2 \\ n=2 \Rightarrow \left(S\right)^5=S & & \left(S\right)^6=\left(S\right)^2 \\ \quad\vdots & & \quad\vdots \end{array} \tag{5.49}$$

şeklindedir. O halde

$$hf\left(S\right)=h\left[a_0I_3+xS+yS^2\right],\quad x,y\in\mathbb{R}$$

yazılabilir. $a_0\neq 0$ olmak üzere $m=\dfrac{x}{a_0},\ n=\dfrac{y}{a_0}$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}hf\left(S\right)&=ha_0\left[I_3+\frac{x}{a_0}S+\frac{y}{a_0}S^2\right]\\&=ha_0\left[I_3+mS+nS^2\right]\end{aligned}$$

ve

$$hf\left(S\right)=ha_0F\left(S\right)$$

olur. Burada $hf\left(S\right)$ ifadesinin regülerliğinden bahsetmek için $\det\left[hF\left(S\right)\right]$ matrisinin regüler olduğu gösterilmelidir. O halde $\det\left[hF\left(S\right)\right]$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned}hF\left(S\right)&=h\left(I_3+mS+nS^2\right)\\&=\begin{bmatrix}h&0&0\\0&h&0\\0&0&h\end{bmatrix}+m\begin{bmatrix}0&hc&-hb\\hc&0&-ha\\-hb&ha&0\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}h\left(a^2+1\right)&-hab&-hac\\hab&h\left(1-b^2\right)&-hbc\\hac&-hbc&h\left(1-c^2\right)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}h+nha^2+nh&mhc-nhab&-mhb-nhac\\mhc+nhab&h-hnb^2+nh&-mha-nhbc\\-mhb+nhac&mha-nhbc&h-nhc^2+nh\end{bmatrix}\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\det\left[hF\left(s\right)\right]=\left(h+nha^2+nh\right)P-\left(mhc-nhab\right)Q-\left(mhb+nhac\right)R$$

dir. Burada P,Q ve R katsayıları hesaplanmalıdır. O halde

$$
\begin{aligned}
P &= \left[h^2 \left(1 - nb^2 + n\right)\left(1 - nc^2 + n\right) + h^2 \left(ma + nbc\right)\left(ma - nbc\right) \right] \\
&= h^2 \left[1 - nc^2 + n - nb^2 + n^2 b^2 c^2 - n^2 b^2 + n - n^2 c^2 + n^2 + m^2 a^2 - mnabc + mnabc - n^2 b^2 c^2 \right] \\
&= h^2 \left[1 - n\left(c^2 - 1 + b^2 - 1\right) - n^2 \left(b^2 + c^2 - 1\right) + m^2 a^2 \right], \quad b^2 + c^2 = 1 + a^2 \\
&= h^2 \left[1 - n\left(1 + a^2 - 2\right) - n^2 \left(1 + a^2 - 1\right) + m^2 a^2 \right] \\
&= h^2 \left[1 - n\left(a^2 - 1\right) - n^2 a^2 + m^2 a^2 \right] \\
&= h^2 - nh^2 a^2 + nh^2 - n^2 h^2 a^2 + h^2 m^2 a^2
\end{aligned}
$$

ve

$$
P = h^2 \left(1 + n\right) + a^2 h^2 \left(m^2 - n^2 - n\right)
$$

şeklindedir. Öte yandan

$$
\begin{aligned}
Q &= \left[h^2 \left(mc + nab\right)\left(1 - nc^2 + n\right) + h^2 \left(ma + nbc\right)\left(-mb + nac\right) \right] \\
&= h^2 \left[mc - mnc^3 + mnc + nab - n^2 abc^2 + n^2 ab - m^2 ab + mna^2 c - mnb^2 c + n^2 abc^2 \right] \\
&= h^2 \left[mnc\left(-c^2 + 1 + a^2 - b^2\right) + mc + nab + n^2 ab - m^2 ab \right], \quad -a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\
&= h^2 \left(mc + nab + n^2 ab - m^2 ab \right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
Q = h^2 mc - h^2 ab\left(m^2 - n^2 - n\right)
$$

elde edilir. Son olarak

$$
\begin{aligned}
R &= \left[h^2 \left(mc + nab\right)\left(ma - nbc\right) + h^2 \left(1 - nb^2 + n\right)\left(mb - nac\right) \right] \\
&= h^2 \left[m^2 ac - mnbc^2 + mna^2 b - n^2 ab^2 c + mb - nac - mnb^3 + n^2 ab^2 c + mnb - n^2 ac \right] \\
&= h^2 \left[mnb\left(-c^2 + a^2 - b^2 + 1\right) + m^2 ac + mb - nac - n^2 ac \right], \quad -a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\
&= h^2 \left(m^2 ac + mb - nac - n^2 ac \right)
\end{aligned}
$$

ve

$$R = h^2mb + h^2ac\left(m^2 - n^2 - n\right)$$

bulunur. $k = m^2 - n^2 - n$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
\det\left[hF(S)\right] &= \left(h + nha^2 + nh\right)\left[h^2(1+n) + a^2h^2k\right] + \left(-mhc + nhab\right)\left(h^2mc - h^2abk\right) \\
&\quad + \left(-mhb - nhac\right)\left(h^2mb + h^2ack\right) \\
&= h^3\begin{Bmatrix} \left[(1+n) + na^2\right]\left[(1+n) + a^2k\right] + \left(-mc + nab\right)\left(mc - abk\right) \\ + \left(-mb - nac\right)\left(mb + ack\right) \end{Bmatrix} \\
&= h^3\begin{bmatrix} (1+n)^2 + na^4k + (1+n)a^2k + (1+n)a^2n - m^2c^2 + mabck \\ + mnabc - na^2b^2k - m^2b^2 - mabck - mnabc - na^2c^2k \end{bmatrix} \\
&= h^3\begin{bmatrix} (1+n)^2 + (1+n)a^2k + (1+n)a^2n + m^2\left(-b^2 - c^2 + a^2 - a^2\right) \\ + na^2k\left(a^2 - b^2 - c^2\right) \end{bmatrix} \\
&= h^3\left[(1+n)^2 + (1+n)a^2k + (1+n)a^2n + m^2\left(-1 - a^2\right) - na^2k\right] \\
&= h^3\left[(1+n)^2 + a^2k + na^2k + a^2n + a^2n^2 - m^2 - m^2a^2 - na^2k\right] \\
&= h^3\left[(1+n)^2 + a^2k + a^2n + a^2n^2 - m^2 - m^2a^2\right] \\
&= h^3\left[(1+n)^2 + a^2\left(-m^2 + n^2 + n\right) - a^2\left(m^2 - n^2 - n\right) - m^2\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\det\left[hF(S)\right] = h^3\left[(1+n)^2 - m^2\right]$$

elde edilir. Burada $m = 0$ ve $n = -1$ durumları hariç tutulduğunda daima $\det\left[hF(S)\right] \neq 0$ olur. O halde bu bilgiler sayesinde $hf(S)$ matrisinin regüler olduğu söylenebilir.

ii) $\vec{s}$ vektörü timelike birim vektör olarak alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa karakteristik polinomu $\lambda^3+\lambda=0$ olarak elde edilir. Burada $S^3+S=0$ yani $S^3=-S$ yazılabilir. O halde $h\neq 0$ olmak üzere

$$T=hf\left(S\right)=h\left[a_n\left(S\right)^n+a_{n-1}\left(S\right)^{n-1}+\ldots+a_1\left(S\right)+a_0\right]$$

matrisinin regüler olduğu gösterilmelidir. Bu durumda

$n=0,1,2,\ldots$ için $\left(S\right)^{2n+1}=\left(-1\right)^n\left(S\right)$ ve $\left(S\right)^{2n+2}=\left(-1\right)^n\left(S\right)^2$

olduğundan T matrisi, I_3,S,S^2 matrislerinin lineer birleşimi olarak yazılabilir. Böylece

$$T=hf\left(S\right)=h\left[\left(a_1-a_3+a_5-a_7\right)S+\left(a_2-a_4+a_6-a_8\right)S^2+a_0I_3\right]$$

ifadesi elde edilir. Bu katsayıları açık olarak ifade etmek gerekirse

$$\begin{array}{lllc}
 & \left(S\right)^{2n+1}=\left(-1\right)^n\left(S\right) & \left(S\right)^{2n+2}=\left(-1\right)^n\left(S\right)^2 & \\
n=0 \Rightarrow & \left(S\right)^1=S & \left(S\right)^2=\left(S\right)^2 & \\
n=1 \Rightarrow & \left(S\right)^3=-S \quad\quad \text{ve} & \left(S\right)^4=-\left(S\right)^2 & \\
n=2 \Rightarrow & \left(S\right)^5=S & \left(S\right)^6=\left(S\right)^2 & \\
 & \vdots & \vdots &
\end{array} \tag{5.50}$$

şeklindedir. O halde

$$hf\left(S\right)=h\left[a_0I_3+x\left(S\right)+y\left(S\right)^2\right],\quad x,y\in\mathbb{R}$$

yazılabilir. $a_0\neq 0$ olmak üzere $m=\dfrac{x}{a_0},\ n=\dfrac{y}{a_0}$ olarak seçilirse

$$hf\left(S\right)=ha_0\left[I_3+\frac{x}{a_0}S+\frac{y}{a_0}S^2\right]$$
$$=ha_0\left[I_3+mS+nS^2\right]$$

ve

$$hf\left(S\right)=ha_0F\left(S\right)$$

olur. Burada $hf\left(S\right)$ ifadesinin regülerliğinden bahsetmek için $hF\left(S\right)$ matrisinin regüler olduğu gösterilmelidir. O halde $\det\left[F\left(S\right)\right]$ hesaplanırsa

$$hF\left(S\right)=h\left(I_3+mS+nS^2\right)$$
$$=\begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{bmatrix}+m\begin{bmatrix} 0 & hc & -hb \\ hc & 0 & -ha \\ -hb & ha & 0 \end{bmatrix}+n\begin{bmatrix} h\left(a^2-1\right) & -hab & -hac \\ hab & h\left(-1-b^2\right) & -hbc \\ hac & -hbc & h\left(-1-c^2\right) \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} h+nha^2-nh & mhc-nhab & -mhb-nhac \\ mhc+nhab & h-hnb^2-nh & -mha-nhbc \\ -mhb+nhac & mha-nhbc & h-nhc^2-nh \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$\det\left[hF\left(S\right)\right]=\left(h+nha^2-nh\right)P-\left(mhc-nhab\right)Q-\left(mhb+nhac\right)R$$

dir. Burada P,Q ve R katsayıları hesaplanmalıdır. O halde

$$P=\left[h^2\left(1-nb^2-n\right)\left(1-nc^2-n\right)+h^2\left(ma+nbc\right)\left(ma-nbc\right)\right]$$
$$=h^2\left[1-nc^2-n-nb^2+n^2b^2c^2+n^2b^2-n+n^2c^2+n^2+m^2a^2-mnabc+mnabc-n^2b^2c^2\right]$$
$$=h^2\left[1-n\left(c^2+1+b^2+1\right)-n^2\left(-b^2-c^2-1\right)+m^2a^2\right],\quad b^2+c^2=-1+a^2$$

$$
\begin{aligned}
&= h^2\left[1-n\left(-1+a^2+2\right)-n^2\left(1-a^2-1\right)+m^2a^2\right]\\
&= h^2\left[1-n\left(a^2+1\right)+n^2a^2+m^2a^2\right]\\
&= h^2-nh^2a^2-nh^2+n^2h^2a^2+h^2m^2a^2
\end{aligned}
$$

ve

$$
P = h^2\left(1-n\right)+a^2h^2\left(m^2+n^2-n\right)
$$

şeklindedir. Öte yandan

$$
\begin{aligned}
Q &= \left[h^2\left(mc+nab\right)\left(1-nc^2-n\right)+h^2\left(ma+nbc\right)\left(-mb+nac\right)\right]\\
&= h^2\left[mc-mnc^3-mnc+nab-n^2abc^2-n^2ab-m^2ab+mna^2c-mnb^2c+n^2abc^2\right]\\
&= h^2\left[mnc\left(-c^2-1+a^2-b^2\right)+mc+nab-n^2ab-m^2ab\right],\quad -a^2+b^2+c^2=-1\\
&= h^2\left(mc+nab-n^2ab-m^2ab\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
Q = h^2mc-h^2ab\left(m^2+n^2-n\right)
$$

elde edilir. Son olarak

$$
\begin{aligned}
R &= \left[h^2\left(mc+nab\right)\left(ma-nbc\right)+h^2\left(1-nb^2-n\right)\left(mb-nac\right)\right]\\
&= h^2\left[m^2ac-mnbc^2+mna^2b-n^2ab^2c+mb-nac-mnb^3+n^2ab^2c-mnb+n^2ac\right]\\
&= h^2\left[mnb\left(-c^2+a^2-b^2-1\right)+m^2ac+mb-nac+n^2ac\right],\quad -a^2+b^2+c^2=-1\\
&= h^2\left(m^2ac+mb-nac+n^2ac\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
R = h^2mb+h^2ac\left(m^2+n^2-n\right)
$$

bulunur. $k=m^2+n^2-n$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
\det\left[hF(S)\right] &= \left(h+nha^2-nh\right)\left[h^2(1-n)+a^2h^2k\right]+\left(-mhc+nhab\right)\left(h^2mc-h^2abk\right) \\
&\quad +\left(-mhb-nhac\right)\left(h^2mb+h^2ack\right) \\
&= h^3\left\{\begin{matrix}\left[(1-n)+na^2\right]\left[(1-n)+a^2k\right]+\left(-mc+nab\right)\left(mc-abk\right) \\ +\left(-mb-nac\right)\left(mb+ack\right)\end{matrix}\right\} \\
&= h^3\left[\begin{matrix}(1-n)^2+na^4k+(1-n)a^2k+(1-n)a^2n-m^2c^2+mabck \\ +mnabc-na^2b^2k-m^2b^2-mabck-mnabc-na^2c^2k\end{matrix}\right] \\
&= h^3\left[\begin{matrix}(1-n)^2+(1-n)a^2k+(1-n)a^2n+m^2\left(-b^2-c^2+a^2-a^2\right) \\ +na^2k\left(a^2-b^2-c^2\right)\end{matrix}\right] \\
&= h^3\left[(1-n)^2+(1-n)a^2k+(1-n)a^2n+m^2\left(1-a^2\right)+na^2k\right] \\
&= h^3\left[(1-n)^2+a^2k-na^2k+a^2n-a^2n^2+m^2-m^2a^2+na^2k\right] \\
&= h^3\left[(1-n)^2+a^2k+a^2n-a^2n^2+m^2-m^2a^2\right] \\
&= h^3\left[(1-n)^2+a^2\left(-m^2-n^2+n\right)+a^2\left(m^2+n^2-n\right)+m^2\right]
\end{aligned}$$

ve

$$\det\left[hF(S)\right]=h^3\left[(1-n)^2+m^2\right]$$

elde edilir. Burada $m=0$ ve $n=1$ durumları hariç tutulduğunda daima $\det\left[hF(S)\right]\neq 0$ olur. O halde bu bilgiler sayesinde $hf(S)$ matrisinin regüler olduğu söylenebilir.

Teorem 5.6.2. S, 3×3 tipinde Lorentz anlamda antisimetrik bir matris, $A\in SO(3,1)$ olmak üzere, $hA=B$ Lorentz anlamda homotetik matris ve $hf(x)=h\left[a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\right]$, $a_0\neq 0$ şeklinde bir polinom fonksiyonu olsun. $so(3,1)$ ve $H\left(\mathbb{E}_1^3\right)$, sırasıyla, 3×3 tipinde Lorentz anlamda antisimetrik ve $\mathbb{E}_1^3$'te homotetik dönüşümler uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} hf : so(3,1) &\to H\left(\mathbb{E}_1^3\right) \\ S &\to hf(S) = B = h\varepsilon\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1}\varepsilon f(S) \end{aligned} \tag{5.51}$$

dönüşümü veriliyor. Bu durumda $hf(-S)$ ve $hf(S)$ matrisleri çarpma işlemine göre değişmelidir.

İspat. $M = hf(S)$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} M^T &= hf\left(S^T\right) \\ &= hf(-\varepsilon S\varepsilon) \\ &= h\varepsilon f(-S)\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Burada ispatlanması gereken

$$M\varepsilon M^T\varepsilon = \varepsilon M^T\varepsilon M$$

eşitliğidir. Bunun için

$$hf(x) = h\left[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right]$$

denklemi göz önünde bulundurulursa

$$hf(S) = h\left[a_n S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0\right]$$

dır. Teorem 5.6.1'den bilindiği üzere,

$$hf(S) = h\left[a_0 I_3 + xS + yS^2\right], \quad x, y \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. O halde

$$M\varepsilon M^T \varepsilon = h\left[a_0 I_3 + xS + yS^2\right] h\varepsilon\left[a_0 I_3 - x\varepsilon S\varepsilon + y\varepsilon S^2\varepsilon\right]\varepsilon = h^2\left[\left(a_0 I_3 + yS^2\right)^2 - \left(xS\right)^2\right]$$
$$\varepsilon M^T \varepsilon M = h\varepsilon\left[a_0 I_3 - x\varepsilon S\varepsilon + y\varepsilon S^2\varepsilon\right]\varepsilon h\left[a_0 I_3 + xS + yS^2\right] = h^2\left[\left(a_0 I_3 + yS^2\right)^2 - \left(xS\right)^2\right]$$

olduğundan

$$M\varepsilon M^T \varepsilon = \varepsilon M^T \varepsilon M$$

ve

$$hf(S)hf(-S) = hf(-S)hf(S) \tag{5.52}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.6.3. S , 3×3 tipinde Lorentz anlamda antisimetrik bir matris, $A \in SO(3,1)$ olmak üzere, $hA = B$ homotetik matris ve $hf(x) = h\left[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right]$, $a_0 \neq 0$ şeklinde bir polinom fonksiyonu olsun. Bu durumda (5.51) denklemi ile tanımlı hf dönüşümü için $\det B = h^3$'tür. Dolayısıyla $hA = B$ homotetik matris olmak üzere, A semiortogonal bir matristir.

İspat. B homotetik matrisinin determinantı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\det B &= \det\left\{h\varepsilon\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1}\varepsilon f(S)\right\}\\ &= h^3 \det\left\{\varepsilon\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1}\varepsilon\right\}\det\left[f(S)\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= h^3 \det\left[\left\{\varepsilon f\left(S^T\right)\varepsilon\right\}\right]^{-1} \det\left[f\left(S\right)\right] \\
&= h^3 \frac{\det\left[f\left(S\right)\right]}{\det\left[\varepsilon f\left(S^T\right)\varepsilon\right]} \\
&= h^3 \frac{\det\left[f\left(S\right)\right]}{\det\varepsilon \det\left[f\left(S\right)\right]^T \det\varepsilon} \\
&= h^3 \frac{\det\left[f\left(S\right)\right]}{\det\left[f\left(S\right)\right]}
\end{aligned}
$$

ve

$$\det B = h^3$$

elde edilir. Bu durumda $\det A = 1$ olacaktır. Öte yandan (5.51) denklemi ile tanımlı hf dönüşümünden $A = \varepsilon\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1}\varepsilon f\left(S\right)$ yazılabilir. O halde

$$
\begin{aligned}
A\varepsilon A^T\varepsilon &= \varepsilon\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1}\varepsilon f\left(S\right)\varepsilon f\left(S^T\right)\varepsilon\left[f\left(S\right)\right]^{-1}\varepsilon\varepsilon \\
&= \varepsilon\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1}\varepsilon f\left(-S\right)f\left(S\right)\left[f\left(S\right)\right]^{-1} \\
&= \varepsilon\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1} f\left(S^T\right)\varepsilon f\left(S\right)\left[f\left(S\right)\right]^{-1} \\
&= \varepsilon\varepsilon
\end{aligned}
$$

ve

$$A\varepsilon A^T\varepsilon = I$$

bulunur. Bu durumda A semiortogonal bir matristir.

Teorem 5.6.4. (5.51) denklemi ile tanımlı hf dönüşümü için B homotetik matrisinin determinantı h^3 ise

$$\left[f(-S)\right]^{-1} f(S) = f(S)\left[f(-S)\right]^{-1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $hA = B$ matrisinin determinantı h^3 ise A semiortogonal bir matristir. Bu durumda (5.51) denklemi ile tanımlı hf dönüşümünden $h \neq 0$ olmak üzere elde edilen $A = \varepsilon\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1} \varepsilon f(S)$ matrisinin tersi ve transpozu hesaplanırsa

$$A^{-1} = \left[f(S)\right]^{-1} \varepsilon f\left(S^T\right)\varepsilon$$
$$A^T = f\left(S^T\right)\varepsilon\left[f(S)\right]^{-1} \varepsilon$$

elde edilir. A semiortogonal bir matris olduğundan

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \varepsilon A^T \varepsilon \\ \left[f(S)\right]^{-1} \varepsilon f\left(S^T\right)\varepsilon &= \varepsilon f\left(S^T\right)\varepsilon\left[f(S)\right]^{-1} \varepsilon\varepsilon \\ &= \varepsilon f\left(S^T\right)\varepsilon\left[f(S)\right]^{-1} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. $hf(S)$ matrisinin ve dolayısıyla da $f(S)$ matrisinin regüler olduğunu biliyoruz. O halde son eşitliğin tersi alınırsa

$$\varepsilon\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1} \varepsilon f(S) = f(S)\varepsilon\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1} \varepsilon$$

ve

$$\left[f(-S)\right]^{-1} f(S) = f(S)\left[f(-S)\right]^{-1}$$

bulunur.

Burada $hf(S)$'nin farklı iki seçimi için aşağıdaki tanımlar verilebilir:

Tanım 5.6.1. $hf(S)=h(I+S)$ olarak seçilir ve $B=h\varepsilon\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1}\varepsilon f(S)$ denkleminde yerine yazılırsa

$$B=h\left(I_3-S\right)^{-1}\left(I_3+S\right)$$

elde edilir. Bu durumda hf dönüşümüne, Lorentz anlamda en basit homotetik Cayley dönüşümü denir.

Tanım 5.6.2. $hf(S)=h\left[I_3+mS+nS^2\right]$ seçilir ve $B=h\varepsilon\left[f\left(S^T\right)\right]^{-1}\varepsilon f(S)$ denkleminde yerine yazılırsa

$$B=h\left[I_3-mS+nS^2\right]^{-1}\left[I_3+mS+nS^2\right] \tag{5.53}$$

elde edilir. Bu durumda hf dönüşümüne, Lorentz anlamda genelleştirilmiş homotetik Cayley dönüşümü denir.

Öte yandan genelleştirilmiş homotetik Cayley dönüşümünün geometrik yorumu için S, 3×3 tipinde, $\vec{s}=(a,b,c)$ spacelike (timelike) vektörüne karşılık gelen Lorentz anlamda antisimetrik bir matris ve $A\in SO(3,1)$ olmak üzere, $hA=B$ homotetik Cayley matrisi olsun. Bu durumda S matrisinin öz denklemi $\det\left(S-\lambda I_3\right)=0$ denkleminden

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}-\lambda & c & -b\\ c & -\lambda & -a\\ -b & a & -\lambda\end{bmatrix} &= -\lambda\left(\lambda^2+a^2\right)-c\left(-\lambda c-ab\right)-b\left(ac-\lambda b\right)=0\\ &= -\lambda^3+s^2\lambda=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1=0,\;\; \lambda_2=-s,\;\; \lambda_3=s\end{aligned}$$

dir. Ayrıca B homotetik Cayley matrisinin öz değerleri

$$\left\{h\left[f(0)\right]^{-1}f(0),\ h\left[f(s)\right]^{-1}f(-s),\ h\left[f(-s)\right]^{-1}f(s)\right\}$$

şeklindedir. Bu öz değerler hesaplanırsa

$$\begin{aligned} hf(0) &= h(1+m.0+n.0)=h, \\ hf(-s) &= h\left[1+m(-s)+n(-s)^2\right] \\ &= h\left(1-ms+ns^2\right) \\ &= h\left(1-ms+ns^2\right) \end{aligned}$$

ve

$$hf(s)=h\left(1+ms+ns^2\right)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak B homotetik matrisinin öz değerleri

$$h,\quad h\left[h\left(1+ms+ns^2\right)\right]^{-1}\left[h\left(1-ms+ns^2\right)\right],\quad h\left[h\left(1-ms+ns^2\right)\right]^{-1}\left[h\left(1+ms+ns^2\right)\right]$$

veya

$$h,\quad h\frac{1-ms+ns^2}{1+ms+ns^2},\quad h\frac{1+ms+ns^2}{1-ms+ns^2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\vec{s}=(a,b,c)$ spacelike (timelike) eksenine karşılık gelen Lorentz anlamda antisimetrik matris S ve $k\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$e^{kS}=I_3+kS+\frac{k^2}{2!}S^2+\frac{k^3}{3!}S^3+\ldots \tag{5.54}$$

ve

$$e^{-kS} = I_3 - kS + \frac{k^2}{2!}S^2 - \frac{k^3}{3!}S^3 + \ldots \tag{5.55}$$

eşitlikleri göz önünde bulundurulursa (5.49) ve (5.50) denklemlerinde olduğu gibi (5.54) ve (5.55) ifadeleri S, S^2 ve I_3 matrislerinin lineer kombinasyonları şeklinde

$$e^{kS} = I_3 + xS + yS^2, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

ve

$$e^{-kS} = I_3 - xS + yS^2, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. O halde $hf(S) = B = h(I_3 - S)^{-1}(I_3 + S)$ dönüşümü için

$$e^{-kS} = (I_3 - S)$$

ve

$$e^{kS} = (I_3 + S)$$

seçilirse

$$\begin{aligned} B &= h(I_3 - S)^{-1}(I_3 + S) \\ &= h\left(e^{-kS}\right)^{-1}\left(e^{kS}\right) \\ &= he^{2kS} \end{aligned}$$

şeklinde homotetik üstel bir dönüşüm elde edilir.

Son olarak, $\mathbb{E}_1^n$ Lorentz uzayında $n=2$ ve $n=3$ özel durumları için dönme matrislerini inceleyelim:

i) $n=2$ ise, S Lorentz anlamda antisimetrik matrisi:

$$S=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak seçilsin. Bu matrise karşılık gelen spacelike vektör $\vec{s}=(0,1)$ şeklindedir. O halde

$$\begin{aligned} he^{\phi S} &= h\left[I_2+\frac{\phi S}{1!}+\frac{(\phi S)^2}{2!}+\frac{(\phi S)^3}{3!}+\ldots+\frac{(\phi S)^n}{n!}+\ldots \right] \\ &= h\left[\left(\frac{\phi S}{1!}+\frac{(\phi S)^3}{3!}+\ldots\right)+\left(I_2+\frac{(\phi S)^2}{2!}+\frac{(\phi S)^4}{4!}+\ldots\right)\right] \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} S^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=I_2 \\ S^4 &= I_2 \\ &\vdots \\ S^{2n} &= I_2 \qquad n=0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

ve

$$S^{2n+1}=S \qquad n=0,1,2,\ldots$$

dir. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
he^{\phi S} &= h\left[\left(\frac{\phi}{1!}+\frac{\phi^3}{3!}+\dots\right)S+\left(I_2+\frac{\phi^2}{2!}+\frac{\phi^4}{4!}+\dots\right)I_2\right] \\
&= h\left[(\sinh\phi)S+(\cosh\phi)I_2\right]
\end{aligned}
$$

bulunur. S matrisi son eşitlikte yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
he^{\phi S} &= h\left\{\sinh\phi\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\cosh\phi\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\} \\
&= h\begin{bmatrix}\cosh\phi & \sinh\phi\\ \sinh\phi & \cosh\phi\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ve

$$
he^{\phi S} = hA(\phi) = B(\phi) = B
$$

şeklinde homotetik dönme matrisi elde edilir.

ii) $n=3$ ise, S Lorentz anlamda antisimetrik matrisi

$$
S=\begin{bmatrix}0 & c & -b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}
$$

olarak seçilsin ve bu matrise karşılık gelen spacelike birim vektör $\vec{s}=(a,b,c)$ olsun. O halde burada

$$
\begin{aligned}
he^{\phi S} &= h\left[I_3+\frac{\phi S}{1!}+\frac{(\phi S)^2}{2!}+\frac{(\phi S)^3}{3!}+\dots+\frac{(\phi S)^n}{n!}+\dots\right] \\
&= h\left[\left(\frac{\phi S}{1!}+\frac{(\phi S)^3}{3!}+\dots\right)+\left(I_3+\frac{(\phi S)^2}{2!}+\frac{(\phi S)^4}{4!}+\dots\right)\right]
\end{aligned}
$$

eşitliği vardır. Ayrıca

$$S^2=\begin{bmatrix}0 & c & -b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & c & -b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b^2+c^2 & -ab & -ac\\ -ab & c^2-a^2 & bc\\ ac & -bc & b^2-a^2\end{bmatrix}$$

$$S^3=\begin{bmatrix}b^2+c^2 & -ab & -ac\\ -ab & c^2-a^2 & bc\\ ac & -bc & b^2-a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & c & -b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & c & -b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}=S$$

ve

$$\begin{array}{lll} S=S & S^2=S^2 & \\ S^3=S & S^4=S^2 & \\ S^5=S & S^6=S^2 & \\ \vdots & \vdots & \\ S^{2n+1}=S & S^{2n+2}=S^2 & n=0,1,2,\ldots \end{array}$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} he^{\phi S} &= h\left[I_3+\left(\frac{\phi S}{1!}+\frac{\phi^3 S}{3!}+\ldots\right)+\left(\frac{\phi^2 S^2}{2!}+\frac{\phi^4 S^2}{4!}+\ldots\right)\right] \\ &= h\left[I_3+\left(\frac{\phi}{1!}+\frac{\phi^3}{3!}+\ldots\right)S+\left(\frac{\phi^2}{2!}+\frac{\phi^4}{4!}+\ldots\right)S^2\right] \end{aligned}$$

ve

$$he^{\phi S}=h\left[I+(\sinh\phi)S+(\cosh\phi-1)S^2\right] \tag{5.56}$$

elde edilir. Eğer $\vec{s}$ timelike birim vektör seçilir ve $3-$boyut için yapılan işlemler tekrarlanırsa yine

$$he^{\phi S}=h\left[I+\frac{\phi S}{1!}+\frac{(\phi S)^2}{2!}+\frac{(\phi S)^3}{3!}+\ldots+\frac{(\phi S)^n}{n!}+\ldots\right]$$
$$=h\left[\left(\frac{\phi S}{1!}+\frac{(\phi S)^3}{3!}+\ldots\right)+\left(I+\frac{(\phi S)^2}{2!}+\frac{(\phi S)^4}{4!}+\ldots\right)\right]$$

eşitliği vardır. Burada

$$S^2=\begin{bmatrix}0 & c & -b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & c & -b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b^2+c^2 & -ab & -ac\\ ab & c^2-a^2 & -bc\\ ac & -bc & b^2-a^2\end{bmatrix}$$
$$S^3=\begin{bmatrix}b^2+c^2 & -ab & -ac\\ ab & c^2-a^2 & -bc\\ ac & -bc & b^2-a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & c & -b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-abc+abc & b^2c+c^3-a^2c & -b^3-bc^2+a^2b\\ c^3-a^2c+b^2c & -abc+abc & -ab^2-c^2a+a^3\\ -bc^2-b^3+a^2b & ac^2+ab^2-a^3 & -abc+abc\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & c\left(-a^2+b^2+c^2\right) & b\left(a^2-b^2-c^2\right)\\ c\left(-a^2+b^2+c^2\right) & 0 & a\left(a^2-b^2-c^2\right)\\ b\left(a^2-b^2-c^2\right) & a\left(-a^2+b^2+c^2\right) & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & -c & b\\ -c & 0 & a\\ b & -a & 0\end{bmatrix}=-S$$

ve

$$\begin{array}{lll}S=S & S^2=S^2 & \\ S^3=-S & S^4=-S^2 & \\ S^5=S & S^6=S^2 & \\ \vdots & \vdots & \\ S^{2n+1}=(-1)^n S & S^{2n+2}=(-1)^n S^2 & n=0,1,2,\ldots\end{array}$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
he^{\phi S} &= h\left[I_3+\left(\frac{\phi S}{1!}-\frac{\phi^3 S}{3!}+\ldots\right)+\left(\frac{\phi^2 S^2}{2!}-\frac{\phi^4 S^2}{4!}+\ldots\right)\right] \\
&= h\left[I_3+\left(\frac{\phi}{1!}-\frac{\phi^3}{3!}+\ldots\right)S+\left(\frac{\phi^2}{2!}-\frac{\phi^4}{4!}+\ldots\right)S^2\right]
\end{aligned}
$$

ve

$$
he^{\phi S} = h\left[I_3+(\sin\phi)S+(1-\cos\phi)S^2\right] \tag{5.57}
$$

elde edilir.

BÖLÜM 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Geometri ve klasik Mekanik alanında çok iyi bilinen ve kullanılan dönme üzerine bir genelleme yapılması hedeflenmiştir. Dönme konusuyla ilgili, Cayley, n – boyutlu Öklid uzayda iki ortogonal vektör için, bazı şartlar altında her reel antisimetrik matrise, bir Cayley matrisi ve her Cayley matrisine, bir antisimetrik matris karşılık geleceğini göstermiştir. Öte yandan ilk olarak Euler, bir dönme formülü geliştirmiş, sonrasında Rodrigues, bu formülü yeniden yorumlamış ve Euler-Rodrigues parametreleri ifade edilmiştir. Ayrıca Euler parametreleri, bir birim kuaterniyon meydana getirir ve kuaterniyon cebiri kullanılarak robot kol hareketleri, popüler bilgisayar oyunları tasarımı ve uzay araçlarının ortam şartlarına uygun olarak tasarlanması gibi birçok önemli alanda başrolde kullanılarak, çalışmalara katkı sağlamıştır. Öte yandan, iki koordinat sisteminin birbirine göre durumlarının incelenmesi, navigasyon, klavuzluk ve uçuş kontrolü gibi havacılık uygulamalarında kullanılır. Yani iki koordinat sisteminin içerdiği vektörlerin art arda sıralanışının ölçümünden elde edilen bazı durumlar vardır: Bunlara örnek olarak, uzay boşluğundaki uydularda kullanılan yıldız takipçilerinin ölçümleriyle, aynı yıldızların bilinen yörüngelerin sensörleri yardımıyla (dünya üzerinde, uzaya çıkmadan) yapılan ölçümler karşılaştırılabilir ve bu ölçümler iki sensör arasındaki benzer tutumların ortaya çıkmasında kullanılabilir. Bir diğer örnek olarak, uçak üzerinde bulunan füze ve uçağın, aerodinamik ölçümleri temelinde, birbirlerine göre tutumlarını kontrol altında tutmak, ele alınabilir. Bu örneklerden de anlaşılacağı üzere, konunun uygulama alanları oldukça geniş ve önemlidir. Bu çalışmada ele alınan, dönme konusu ve onun üzerine yapılan çalışmaları ele alıp, homotetik anlamda farklı bir bakış açısı getirerek, kavrama büyüklük olgusunu da katmaktır. Bu sayede yapılan tüm çalışmaların bir genellemesi yapılmıştır. Bu çalışmada verilen yeni bakış açısının, bahsi geçen kullanım alanlarına oldukça büyük faydalar sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Müller, H.R., Kinematik Dersleri. Ankara University Science Faculty Press, Um.96-Mat, 2, 1963.

[2] Müller, H. R., Zur bewegunsgeometrie in Raumenn höherer dimension. Mh. Math., 70, 47-57, 1966.

[3] Chong, F. and Andrews, R.J., Rotation Matrices. Aust. Math. Soc. Gaz., 26, 3, 108-119, 2000.

[4] Hacısalihoğlu, H. H., On The Geometry of Motion In The Euclidean n-Space. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A, 23, 95-108, 1974.

[5] Hacısalihoğlu, H. H., On The Rolling Of One Curve Or Surface Upon Another. P. Roy. Irish Acad., 71, Sect. A, 13-17, 1971.

[6] Hacısalihoğlu, H. H. and Arslan, İ., The Sets of Homothetic Motions. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A_1, 39, 9-14 (11990), 1990.

[7] Birman, G. S. and Nomizu, K., Trigonometry In Lorentzian Geometry. Am. Math. Mon., 91, 9, 543-549, 1984.

[8] Bottema, O. and Roth, B., Theoretical Kinematics. North-Holland Press, New York, 1979.

[9] Ergin, A. A., The Kinematic Geometry On The Lorentzian Plane. Ankara University Graduate School of Naturel and Applied Sciences Deparment of Mathematics, Ph.D. Thesis, (1989).

[10] Bükcü, B., Cayley Formula and its Applications in $\mathbb{E}_1^3$ Ankara University Graduate School of Naturel and Applied Sciences Deparment of Mathematics, Ph.D. Thesis, (2003).

[11] Bükcü, B., General Cayley Mapping at Euclidean Space and Rotation Matrices. Erciyes University Graduate School of Naturel and Applied Sciences Press, 22, 1-2, 194-202, 2006.

[12] Bükcü, B., On The Rotation Matrices In The Semi-Euclidean Space. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, 55, 1, 7-13, 2006.

[13] Keçilioğlu, O., Özkaldı, S. and Gündoğan, H., Rotations and Screw Motion with Timelike Vector in 3-Dimensional Lorentzian Space. Adv. App. Clifford Alg., 22, 1081-1091, 2012.

[14] Özkaldı, S. and Gündoğan, H., Cayley Formula, Euler Parameters and Rotations in 3-Dimensional Lorentzian Space. Adv. App. Clifford Alg., 20, 367-377, 2010.

[15] Güngör, M. A., and Tosun, M., One Parameter Lorentzian Motions In Lorentz 3-Space, Kragujevac Jour. of Math. , 31, 95 - 109, 2008.

[16] Tosun, M., Küçük, A. and Güngör, M. A., The Homothetic Motions In The Lorentz 3-Space. Acta Math. Sci., 26, 711-719, 2006.

[17] Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri Cilt I. A.Ü. Fen Fakültesi, 1992.

[18] Hacısalihoğlu, H. H., Lineer Cebir. Gazi Üniversitesi Yayınları, 1985.

[19] O’neill, B., Semi-Riemannian Geometry. Academic Press, 1983.

[20] Darling, R. W. R., Differential Forms and Connections. Cambridge University Press, 1994.

[21] Ekmekçi, N. and İlarslan, K., Higher Curvatures in Lorentzian Space. Jour. of Ins. of Math. and Comp. Sci. (Math. Ser.), 11, 2, 97-102, 1998.

ÖZGEÇMİŞ

Doğan Ünal, 01.01.1986'da İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2003 yılında Adile Mermerci Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2003 yılında başladığı Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü 2007 yılında bitirdi. 2007 yılında Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. 2009 yılında Sakarya Üniversitesi Uzaktan Eğitim Araştırma ve Uygulama Merkezi'nde uzman olarak çalışmaya başladı akabinde yüksek lisans eğitimini 2010 yılında bitirdi. Aynı yıl içinde Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü'nde doktora eğitimine başladı. Halen Sakarya Üniversitesi Uzaktan Eğitim Araştırma ve Uygulama Merkezi'nde uzman olarak görev yapmaktadır.