T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI TİPTEN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN SÜREKLİ BAĞIMLILIK SONUÇLARI

DOKTORA TEZİ

Mesude Elif UYSAL

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Şevket GÜR**

Şubat 2019

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI TİPTEN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN SÜREKLİ BAĞIMLILIK SONUÇLARI

DOKTORA TEZİ

Mesude Elif UYSAL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK

Bu tez 20 /02/ 2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. İpek GÜLEÇ **Jüri Başkanı**	**Doç. Dr. Ali DEMİR** **Üye**	**Doç. Dr. Ali Serdar ARIKAN** **Üye**
Doç. Dr. Metin YAMAN **Üye**		**Prof. Dr. Şevket GÜR** **Üye**

Oğlum EREL' e

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Mesude Elif UYSAL

20 /02/ 2019

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışmada, tezimin her sayfasının her satırında emeği geçen, bana değerli vaktini ayırıp engin bilgisiyle beni yönlendiren, adımlarımı sağlamlaştıran, sabır ve anlayışını esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Şevket GÜR hocama, yüksek matematiği ilk sevdiren, akademik hayat ile ilk tanıştıran, bilgi ve birikiminden yıllarca faydalandığım değerli Prof. Dr. Okay ÇELEBİ hocama en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazım aşamasında her zorda kaldığımda yardımlarını esirgemeyen Hande Şişik, Gamze Kuruk ve Serdar Nair arkadaşlarıma teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca, desteklerini hiç azaltmadan sabırla bu süreçte yanımda olan değerli ailem ve sevgili eşime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

BSD	: Başlangıç sınır değer
DDE	: Çift dispersif denklem
KTD	: Kısmi türevli denklem

ÖZET

Anahtar kelimeler: Sürekli bağımlılık, yapısal kararlılık, çözümlerin nitel davranışı, güçlü sönümlü denklemler, dalga denklemi, çift dispersif dalga denklemleri

Bu tezin ilk bölümünde incelenen problemlerin çözümlerinin global, lokal ve zayıf çözümlerinin varlığı hakkında günümüze kadar yapılan çalışmalar tarihi gelişimiyle ele alınmıştır. Ayrıca sürekli bağımlılık konusu ile ilgili bir çok çalışmaya da yer verilmiştir.

İkinci bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel tanım ve eşitsizlikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde başlangıç ve sınır değeri belli lineer olmayan sönüm "damping" ve kaynak terim içeren Klein-Gordon denkleminin çözümlerinin problemin katsayılarına olan sürekli bağımlılığı konusu esas alınmıştır.

Dördüncü bölümde disipatif terim içeren çift dispersif dalga denkleminin çözümlerinin problemin katsayılarına olan sürekli bağımlılığı çalışılmıştır.

CONTINUOUS DEPENDENCE ON COEFFICIENTS OF SOME TYPE OF INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS

SUMMARY

Keywords: Continuous dependence, Structural stability, qualitative theory, strong damping term, wave equation, double dispersive equations

In the first part of this thesis, the studies on the existence of global, local and weak solutions of the problems which are examined in this thesis have been dealt with in the historical development. In addition, studies related to the subject of continuous dependence are placed within this part.

In the second chapter of this thesis, this chapter provides basic definitions and inequalities that will be used throughout the thesis.

In the third chapter of this thesis, the continuous dependence of the solutions of the initial and boundary values of the Klein-Gordon equation, which includes nonlinear damping, and source terms, to the coefficients of the problem are taken as the base of the study.

In the fourth chapter of this thesis, the continuous dependence of the solutions of the double dispersive wave equation, which contains the dissipative term, to the coefficients of the problem has been studied.

Standard energy method has been applied in the study for the examined problems.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Kısmi türevli denklemlerin (KTD) bizi çevreleyen evrenin işleyişini anlamaya çalışmamızda üstün bir rolü vardır. Neredeyse tüm bilimsel çalışmaların çoğu zaman bir KTD vasıtasıyla incelenen olguyu modellediği sıklıkla görülür. Mesela denklem tipi olarak dinamik yani zamanla değişen bir modeli evrimsel bir KTD üretir. Aynı zamanda bu evrimsel KTD modeli "wave-like" yani salınım modellerin önemli bir sınıfı olmaktadır. Ses veya su dalgalarını öne çıkaran herhangi bir yapı bu sınıfa girmektedir.

Dalganın zamanla kaybolduğu bilinen bir gerçektir. Örneğin, hareketsiz bir göle taş atıldığında, belli bir zaman sonra atıldığı sırada ortaya çıkmış olan dalgalardan eser kalmaz veya bir gitarın teline basıldığında kısa bir zaman için titreşim gerçekleşecektir ve sonrasında tel durağan halini alacaktır. Dalganın zaman içinde kaybolmasına dalganın sönümlenmesi "damping of the wave" denilmektedir. Dalganın sönümlenmesi durumu aslında, bir sistemdeki bir çeşit sürtünme sebebiyle oluşan değişim sırasında sistemin enerjisini yavaş yavaş kaybettiğini gösterir. Bazen bu durum için sistemin disipatif olması ya da sistemin enerji tüketmesi şeklinde söylenmektedir.

Bu tezde amaçlanan, yukarıda bahsedilen disipatif dalga durumunu modellemiş başlangıç değeri ve ilk sınır değeri verilen denklemler için çözümün nitel davranışını "qualitative theory" ya da başka bir deyişle problemin yapısal kararlılığını "structural stability" araştırmak olacaktır.

Bilindiği gibi bir problem aşağıdaki koşulları sağladığında bu probleme iyi tanımlıdır denir.

-Problemin en az bir çözümü vardır (varlık);

- Problemin çözümü tektir (teklik);
- Problemin çözümü problemin verilerine sürekli bağlıdır.

Problemin verileri söylemi; başlangıç ve sınır verileri, ek veriler (ters problemlerde), denklemin katsayıları, sağ tarafı vs. olarak anlaşılmalıdır.

Diğer taraftan kötü tanımlı problemlerin sürekli bağımlılık tartışmasında ise problemin fiziksel anlamı için matematiksel bir modelin analizinde ve türetilmesinde ortaya çıkan üç önemli hata kaynağına odaklanılmıştır.

- Veri ölçüm hataları (başlangıç veya sınır değerleri, denklemdeki katsayılar veya sınır operatörleri, parametreler). Bununla ilgili olarak, Hawking'in bir çalışmasından bahsedebiliriz. Hawking 1993'te insan beyninin yaklaşık 10^{26} parçacıktan oluştuğunu söylemiştir bu nedenle de insan beyninin başlangıç koşullarına karşı çok hassas olduğu aşikardır. Yani bir beyin modelinin kullanılmasıyla herhangi bir insanın davranışını öngörmek oldukça zor olacaktır. Bununla ilgili başka bir örnek için hassas ekonomi konusuna değinilebilinir. Burada parametrelerdeki ufak bir değişiklik, borsa kaosuna, para birimi dalgalanmalarına ve diğer birçok değişken duruma yol açabilir.
- Bölgenin uzaysal geometrisini ve başlangıç zaman geometrisini karakterize etmedeki hatalar.
- Model denklemleri formüle etmedeki hatalar.

Dolayısıyla bu başlıklar altında yapısal kararlılık konusu; ana denklemin çözümünün denklemin katsayılarına olan sürekli bağımlılığı, sınır verilerine sürekli bağımlılığı, sınır koşullarının katsayılarına olan sürekli bağımlılığı veya kısmi türevli denklemin kendisinin sürekli bağımlılığı incelenmesi üzerine olması mantıklıdır.

Aslında sürekli bağımlılık tartışması, problemin katsayılarındaki ya da sınır koşulundaki katsayılardaki ufak bir değişimin veya artışın problemin çözümü için büyük değişimlere sebep olup olmadığı hakkındadır. Eğer ele alınan problemin çözümleri parametrelere sürekli bağımlı ise parametrelerde küçük değişiklikler olduğunda problemin çözümünde de küçük değişiklikler olması beklenir. Böylece problemi modellerken kullanılan materyalin özellikleri değişse bile yeni problemin çözümlerinin nasıl olacağı tahmin edilebilir. Sürekli ortamlar mekaniğinin çeşitli süreçlerini modelleyen lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için çözümlerin başlangıç sınır değer problemlerine sürekli bağımlılığı ile ilgili birçok yayın vardır [1,2,3,4,5,6,7].

Bununla birlikte yapısal kararlılık ile ilgili birçok referans, başlangıç verilerinde görülen küçük sapmalara göre bakılan kararlılık analizi kadar önemli olduğu vurgusu ile birlikte Ames ve Straughan [8] ın yazmış olduğu kitapta bulunabilir. Bu kitapta tezin ana konusu olan katsayı incelemesine örnek olarak ısıl konveksiyon probleminde başlangıç verisindeki soğutma katsayısının sürekli bağımlılığı incelenmiştir.

Bu tezin birinci bölümünde güçlü sönümlü lineer olmayan Klein-Gordon başlangıç sınır değer problemi,

$$u_{tt} - \alpha\Delta u_t + \beta u_t - \sigma\Delta u + m^2 u + \lambda |u|^{p-1} u = 0 \qquad (x,t)\in\Omega\times[0,T] \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x\in\Omega \tag{1.2}$$

$$u = 0 \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T] \tag{1.3}$$

incelenecektir. Burada $\alpha,\beta,\sigma,m,\lambda\in\mathbb{R}$ fiziksel katsayılardır ve sırasıyla ilk ikisi sönüm, dağılma, kütle ve lineerliği bozan terimin katsayıları olarak adlandırılır. Burada $\Omega\subset\mathbb{R}^n (n\geqslant 3)$ sınırı yeterince düzgün sınırlı bölgedir. Δ, n boyutlu Laplace operatör, yani $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ile tanımlı ikinci dereceden diferansiyel operatördür.

Burada $n = 1,2$ için $p = \infty$ ve $n\geqslant 3$ için $1 < p \leqslant \frac{n}{n-2}$ dır. Klein - Gordon denklemi tarihsel anlamda önemli bir yere sahiptir. Bu denklem ilk önce Oskar Klein ve Walter Gordon tarafından 1926'da birbirlerinden bağımsız olarak, bir elektronun göreceli hareketini tanımlamak amacıyla önerildi. Fakat daha sonra, elektronun hareketi Dirac denklemiyle daha doğru olarak tarif edildi ve bunun yerine Klein-Gordon denklemi, spini 0 (sıfır) olan parçacıkları.

(1.1) denkleminde $\alpha = \beta = 0$ olduğu durumlar için yani sönüm terimlerinin olmadığı başlangıç sınır değer problemleri birçok yazar tarafından incelenmiştir [9,10,11,12,13,14,15]. Bu tarz sönümsüz başlangıç sınır değer problemlerinin zamanda değişen lokal (yerel) çözümleri için literatürde yeterince bilgi mevcuttur [10,13,15]. Bununla birlikte, yeterince küçük başlangıç verisi için zaman ile değişen global çözümlerin varlığı da bilinmektedir [10,11,12,16]. Cezaneve [17] çalışmasında tüm global çözümlerin enerji fazı uzayında zaman içinde düzgün sınırlı olarak kaldığını da ispatlamıştır.

(1.1) denkleminin zayıf sönümlü hali için yani $\alpha = 0, \beta > 0$ olduğunda zaman-periyodik çözümün varlığı ve tekliği Galerkin metodu ve Leray-Schauder sabit nokta teoremiyle Gao ve Guo tarafından ispatlandı [18].

Bununla birlikte, Ha ve Park [19] yaptıkları çalışmada silindirik olmayan bölgede Faedo-Galerkin metodu kullanarak çözümün varlığını ve tekliğini ispatlamışlardır. Ayrıca bu çalışmalarında global çözümlerin üstel bir şekilde azaldığını da ispatlamışlardır.

Polat ve Taşkesen [20] çalışmalarında, $\beta = 1$ iken potansiyel iyileştirme metodu ile global çözümün varlığını ispatladılar.

Güçlü sönümlü (1.1) denklemi için yani $\alpha > 0, \beta > 0$ durumu için çözümler hakkında literatürde daha az bilgi mevcuttur. Avrin [21] yaptığı çalışmada (1.1) denkleminde önce $\alpha = 0$ halinde $p > 3$ için $\mathbb{R}^3$'te global zayıf çözümün varlığını gösterdi. Sonra, global zayıf çözümlerin, her $\alpha > 0$ için uygun koşullar altında global güçlü çözümlere yaklaştığını ispatladı.

Bununla birlikte, Xu ve Ding [22] yaptıkları çalışmada çözümlerin global olarak varolduğunu ve ilgili başlangıç sınır değer probleminin asimptotik davranışını incelediler.

Bu tezin ikinci bölümünde $g(u_t) = \alpha \,|\, u_t \,|^{m-2}\, u_t$ ve $f(u) = -\beta \,|\, u \,|^{p-2}\, u$ olmak üzere,

$$u_{tt} - \Delta u - a\Delta u_{tt} + b\Delta^2 u - d\Delta u_t + g(u_t) = f(u) \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \tag{1.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geqslant 3) \tag{1.5}$$

$$u = \Delta u \equiv 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \tag{1.6}$$

şeklinde dördüncü mertebeden disipatif terim içeren lineer olmayan hiperbolik denklemler için konulmuş başlangıç sınır değer problemi göz önüne alınmıştır. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ yeterince düzgün sınıra sahip bir bölgeyi gösterir. g ve f verilen lineer olmayan fonksiyonlar ve u bilinmeyen fonksiyondur. Bazı sürekli ortamlarda sinüzodial dalganın hızı frekansa bağlıdır. Hızın frekansla değişimi dispersiyon olarak adlandırılır. Bu denklemde a ve b dispersif katsayılarıdır. d ise enerji yitimini ifade eden disipatif katsayısını ifade etmektedir. Bu problem genel olarak $m > 2$ ve $p > 2$ olduğu durumda incelenecektir.

(1.4) denklemi gibi ifade edilen birçok fiziksel problem örneği vardır. Bir dalga kılavuzunda lineer olmayan dalga yayılım problemlerinde dış ortamın etkisi ve dolayısıyla dalganın yanal yüzeyleri boyunca enerji değişimi olasılığı ihmal edilmemelidir. Dolayısıyla ele alınan dalga probleminin modellenmesi bu etkilere göre yapılmıştır.

Materyali hiperelastik olan doğrusal olmayan bir elastik çubuk yüzeyi ile bir ortam arasındaki etkileşim modeli gözönüne alındığında $u(x,t)$, çubuğun uzunlamasına yer değiştirmesini gösteren bir fonksiyon olmak üzere,

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{4}(6u^2 + au_{tt} - bu_{xx})_{xx} \tag{1.7}$$

çift dispersif denklemi (DDE) için bir çözümdür [22,23]. Benzer şekilde,

$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{1}{4}(cu^3 + 6u^2 + au_{tt} - bu_{xx} + du_t)_{xx} \tag{1.8}$$

şeklinde genelleştirilmiş kübik dağılımlı denklem de türetilebilmektedir (CDDE) [22,23]. Dikkat edilirse, (1.4) denklemi için $f(u) = \frac{c}{4}u^3 + \frac{3}{2}u^2$; $g(u_t) = 0$ ve a, b ve d sırasıyla $\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{d}{4}$ ile yer değiştirdiğinde,

$$u_{tt} - u_{xx} - au_{xtt} + bu_{xxxx} - du_{xxt} = f(u)_{xx} \tag{1.9}$$

denkleminin (1.8) denklemine dönüştüğü açıktır. Eğer $d \equiv 0$, $f(u) = \frac{3}{2}u^2$ ve a,b sırasıyla $\frac{a}{4}, \frac{b}{4}$ ile yer değiştirirse (1.9) denklemi (1.7) denklemine dönüşür.

Yoğunlaştırılmış madde fiziğinin klasik problemi için [24]'te,

$$u_{tt} - u_{xx} = (cu^3 + du^2 - bu_{xx})_{xx} + [f(u)]_{xt} + [g(u)]_{xxt} \tag{1.10}$$

denklemi incelenmiştir. Burada dalga, katmanlı sıvı dalgasıdır.

[25]'te ise, farklı bir ortam için dalga yayılımı, u uzunlamasına gerginligi gösteren fonksiyon, $a,b,c > 0$, $f,g \neq 0$ ve $\epsilon \ll 1$ sabitleri olmak üzere,

$$u_{tt} - u_{xx} = \epsilon(cu^2 + au_{tt} - bu_{xx} + [g(u_t)]_{xx}) + O(\epsilon^2) \tag{1.11}$$

denklemi disipatif terim içeren çift dispersif denklem olarak tanımlanmıştır (DDE with dissipation). Burada lineer olmayan elastik bir dalga kılavuzu ifadesi verilmiştir. (1.11) denkleminde $O(\epsilon^2)$'yi ihmal edip $\epsilon = 1$ alındığında (1.11) denklemi, (1.9) denkleminin özel bir durumu olur.

(1.4) denklemi için konulmuş başlangıç sınırdeğer problemine benzer problemler için son yıllarda yapılan çalışmalara göz atalım:

Di ve Shang [26] çalışmalarında (1.4) denkleminde $g(u_t) = a\,|u_t|^{m-2}\,u_t$ ve $f(u) = b\,|u|^{p-2}\,u$ için,

$$u_{tt} - \Delta u - \beta\Delta u_t + \gamma\Delta^2 u - \delta u_{tt} + a\,|u_t|^{m-2}\,u_t = b\,|u|^{p-2}\,u \tag{1.12}$$

denklemini $\Omega\times(0,\infty)$ bölgesinde başlangıç koşulu ve homojen Dirichlet ve Neumann sınır koşulları altında gözönüne almışlar ve bu problemin global zayıf çözümünün varlığını Galerkin metodunu kullanarak göstermişlerdir.

Gursky ve Samsonov [27] çalışmalarında $f(u) = u^2, g(u_t) = 0$ olmak üzere bir boyutlu,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = (u^2 + au_{xx} + bu_{tt})_{xx} + \mu u_{xxt} \tag{1.13}$$

denkleminin invaryant çözümlerini Lie simetrileri kullanarak elde etmişlerdir.

Runzang ve ark. [28] yaptıkları çalışmada $a = b = 1,\ g\left(u_t\right) = 0$ olmak üzere,

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u + k\Delta u_t = \Delta f(u), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \tag{1.14}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \tag{1.15}$$

probleminin zayıf çözümünün doğrusal olmayan terime ve başlangıç verilerine bağlı koşullar altında global varlığını incelemişlerdir.

Chen ve Wang [29] çalışmalarında,

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxx} - \alpha u_{xxt} = g(u)_{xx} \tag{1.16}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \tag{1.17}$$

şeklinde bir boyutlu Cauchy problemi için global çözümün varlığını ve tekliğini incelemişlerdir.

Chen ve ark. [30] yaptıkları çalışmada $\Omega = (0,l)$ olmak üzere,

$$u_{tt} - u_{xx} - au_{xxtt} + bu_{xxxx} - du_{xxt} = f\left(u\right)_{xx} \tag{1.18}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad u_{xx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{1.19}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \overline{\Omega} \tag{1.20}$$

başlangıç sınır değer probleminin global çözümünün varlığını incelemişlerdir.

Daha önce yapılan çalışmalar göstermektedir ki (1.1) ve (1.4) denklemlerinin ilgili başlangıç sınır değer probleminin uygun uzaylarda çözümünün varlığı ve tekliği için yeterli koşullar elde edilmiş ve bu koşullar altında çözümün varlığı ve tekliği ispat edilmiştir. Farklı olarak bu çalışmada (1.1)-(1.3) ve (1.4)-(1.6) problemlerinin uygun uzaylardaki çözümlerinin denklemin katsayılarına olan sürekli bağımlılığı ayrı başlıklar altında incelenecektir.

Birinci bölüm giriş bölümüdür ve problemlerin literatür çalışmasını içermektedir. İkinci bölümde aynı zamanda temel kavramlar ve kullanılacak eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde güçlü sönümlü lineer olmayan Klein-Gordon denkleminin çözümlerinin problemin katsayılarına olan sürekli bağımlılığı incelemesi her katsayı için ayrı ayrı verilmiştir. Daha sonra tüm katsayılar aynı anda ele alınıp sürekli bağımlılık incelemesi yapılmıştır. Dördüncü bölümde disipatif terim içeren çift dispersif dalga probleminin çözümleri için problemin katsayılarına olan sürekli bağımlılığı ayrıntılarıyla verilmiştir. Ardından bu denklem için uygun katsayılar aynı anda ele alınıp sürekli bağımlılık incelemesi yapılmıştır.

Tez çalışmasının üçüncü bölümünde elde edilmiş sonuçlar "Continuous dependence of solutions to the strongly damped nonlinear Klein–Gordon Equation" isimli makalede Turk J Math. dergisinde yayınlanmıştır [31].

BÖLÜM 2. TANIMLAR VE TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez için gerekli olabilecek bazı tanımlar ve yardımcı bilgiler verilmiştir [32,33,34,35].

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1.(Normlu uzay): V, bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^n, x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in V$ ve $\forall a \in F$ için,

- $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|ax\| = |a|\|x\|$
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlarsa V üzerinde bir norm adını alır ve bu durumda $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu uzay adı verilir, $\|x\|$ sayısına da $x \in V$ elemanının normu denir. Her $\|x\|$ normu, $d: V \times V \to \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde bir uzaklık fonksiyonu olduğundan her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır. Bununla birlikte, bir metrik uzayın normlu uzay olması gerekmez. Bir normlu uzay, üzerinde tanımlanan norm altında vektör uzayı belirtir.

Tanım 2.1.2.(Cauchy dizisi): $(x_n), (V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\epsilon > 0$ için $n, m \geqslant N$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.3. $(x_n), (V, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$ olacak şekilde bir $x \in V$ varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. (Banach Uzayı): Bir V normlu uzayında her Cauchy dizisi V'nin bir elemanına yakınsıyor ise bu uzaya tam uzay denir. $(V, \|\cdot\|)$ uzayı tam ise bu uzaya Banach uzayı denir.

Tanım 2.1.5. (İç Çarpım): F cismi üzerinde bir V vektör uzayı verildiğinde, $V \times V$ uzayı üzerinde tanımlı F değerli $(.,.): V \times V \to F$ bir fonksiyonun her $x, y \in V$ ve $a, b \in C$ için aşağıdaki özellikleri varsa, bu fonksiyona iç çarpım denir.

- $(x,x) \geqslant 0; (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (burada $\overline{c}, c \in \mathbb{C}$'nin bir karmaşık eşleneğidir.),
- $(ax + by, z) = a(x,z) + b(y,z)$

$F = \mathbb{R}$ halinde $(x,y) = (y,x)$ dir. Bir iç çarpım ile $\| x \| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$ tanımlanan $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun norm olduğunu görmek oldukça kolaydır. Normu yukarıda olduğu gibi bir iç çarpım tarafından tanımlanan uzaya iç çarpım uzayı denir.

Tanım 2.1.6. (Hilbert uzayı): Normlu bir uzay olan bir iç çarpım uzayı bir Banach uzayı ise bu uzaya Hilbert uzayı denir. Başka bir ifadeyle, bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisinin bu uzayın bir öğesine yakınsak olması halinde bu uzaya Hilbert uzayı denir.

Tanım 2.1.7. n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ ve gerçel Euclid uzayında bir nokta $x = (x_1, \cdots, x_n)$ ve bu noktanın normu $|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$ ile tanımlanır. x ve y'nin iç çarpımı $x.y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ şeklindedir.

Tanım 2.1.8. $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ negatif olmayan α_j 'lerin n-bileşenlisi ise α 'ya çoklu indis denir ve $x^{\alpha}, |\alpha|=\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|$ mertebeye sahip olan $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ tek terimlisi, yani $x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ ile tanımlanır. Benzer şekilde $1\leqslant j\leqslant n$ için $D_j=\partial/\partial x_j$ ise, o zaman $D^j=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}, |\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir.

Tanım 2.1.9. Ω, $\mathbb{R}^n$ 'de bir bölge ve p pozitif gerçel sayı olsun. Ω bölgesinde tanımlı bütün ölçülebilir u fonksiyonlar sınıfına $\int_{\Omega}|u(x)|^p\,dx<\infty$ koşulu altında $L^p(\Omega)$ uzayı denir. Bu uzay bir vektör uzayıdır. $1\leqslant p\leqslant\infty$ olmak üzere bu uzay $\|u\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_{\Omega}|u(x)|^p\right)^{1/p}$ normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.10. Ω, $\mathbb{R}^n$ 'de bir bölge ve $1\leq p<\infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde p. kuvveti integrallenebilen bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L_{p,loc}(\Omega)$ uzayı denir.

Tanım 2.1.11. $L^2(\Omega)$ uzayı $(u,v)=\int_{\Omega}u(x)\overline{v(x)}dx$ iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.1.12. $-\infty\leqslant a<b<\infty$ olsun. $\|u(.)\|_V\in L^p(a,b)$ koşulunu sağlayan (a,b) 'den V 'ye tanımlanmış ölçülebilir u fonksiyonlar uzayına $L^p(a,b;V)$ uzayı denir. $L^p(a,b;V)$ uzayı ;

$$\|u\|_{L^p(a,b;V)}=\begin{cases}\left(\int_a^b\|u(t)\|_V^p\,dt\right)^{1/p} & 1\leqslant p<\infty\\ ess\sup\limits_{t\in(a,b)}\|u(t)\|_V & p=\infty\end{cases}$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Benzer şekilde $a < c < d < b$ olmak üzere her bir c, d için $u \in L^p(c,d;V)$ ise, o zaman $u \in L^p(a,b;V)$ yazılır ve $p = 1$ için u lokal integrallenebilirdir denir.

Tanım 2.1.13. $u, v \in L_{1,loc}(\Omega)$ olsun. Bir α çoklu-indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için $D_1 > 0, M_2 > 0$ eşitliği sağlanırsa, $v \in L_{1,loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi olarak da adlandırılır ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır. Eğer u fonksiyonu, klasik anlamda D^α sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, o zaman $D^\alpha u$ aynı zamanda u fonksiyonunun zayıf kısmi türevidir. Elbette $D^\alpha u$ klasik anlamda olmaksızın zayıf anlamda mevcut olabilir.

Tanım 2.1.14.(Sobolev Uzayı): $\Omega, \mathbb{R}^n$ 'de bir bölge, m herhangi bir pozitif tam sayı ve $1 \leqslant p < \infty$ olmak üzere $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m\}$ şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\| u \|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha u \|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\| u \|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha u \|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad p = \infty$$

tanımlanan bu normlar ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.15. Eğer $p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega), W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur ve $H^m(\Omega)$ uzayında norm,

$$\| u \|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \| D^\alpha u \|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{1/2}, \text{ ile verilir.}$$

Tanım 2.1.16. $H^m(\Omega)$ uzayı, $(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$ iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır, burada $(u,v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$ olup $L^2(\Omega)$ uzayındaki iç çarpımdır.

$H_0^1(\Omega)$ uzayı için iç çarpım $(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ şeklinde tanımlanır ve bu uzayda norm $\| u \|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (\nabla u)^2 dx\right)^{1/2}$ olur.

2.2. Kullanılan Eşitsizlikler

$\epsilon -$*Young eşitsizliği.* $\quad ab \leqslant \epsilon a^2 + \dfrac{b^2}{4\epsilon}, \qquad \forall a,b > 0, \epsilon > 0.$

Cauchy−Schwarz eşitsizliği. $H, \| U \| = (U,U)^{1/2}$ normu ve $(\cdot,\cdot)$ iç çarpımı ile tanımlanmış bir Hilbert uzayı olsun. Bu şekilde,

$$|(u,v)| \leqslant \| u \| . \| v \|, \qquad \forall u,v \in H$$

geçerlidir.

Hölder eşitsizliği. $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega), p \geqslant 1$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ise, o zaman $uv \in L^1(\Omega)$ olup $\| uv \|_{L^1(\Omega)} \leqslant \| u \|_{L^p(\Omega)} \| v \|_{L^q(\Omega)}$ eşitsizliği geçerlidir. $p = 1$ durumunda, $q = \infty$ ve $\| v \|_{L^q(\Omega)} = ess \sup_\Omega | v |$ alırız. $p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir.

Genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği. $1 \leqslant p_1, ..., p_m \leqslant \infty$ için $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + ... + \dfrac{1}{p_m} = 1$ olsun. Böylece, $\int_\Omega |u_1(x) ... u_m(x)| dx \leqslant \prod_{i=1}^m || u_i \|_{p_i}$ eşitsizliği geçerlidir.

Sobolev eşitsizliği. $N > 1$ olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olsun. $n > p, p \geqslant 1$ ve $u \in W_0^{1,p}$ ise, o zaman $\| u \|_{L_{\frac{np}{(n-p)}}(\Omega)} \leqslant C \| Du \|_{L^p(\Omega)}$ olacak şekilde $C = C(n,p)$ sabiti vardır.

$\sup_{\Omega}|u|\leqslant C|\Omega|^{1/n-1/p}\|Du\|_{L^p(\Omega)}$ olur.

Sobolev-Poincaré Eşitsizliği. p sayısı $2\leqslant p<\infty$ $(n=1,2)$ ve $2\leqslant p\leqslant\frac{2n}{n-2}$ $(n\geqslant 3)$ şeklinde olsun. Bu durumda $C_*=C_*(\Omega,p)$ sabit sayısı ve $u\in H_0^1(\Omega)$ için $\|u\|_{L^p(\Omega)}\leqslant C_*\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ olur.

Kısmi İntegral Alma Formülleri. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ($\partial\Omega\in C^1$ sınırına sahip) bölgesinde tanımlı $A(x)=(A_1(x),\cdots,A_n(x))$ vektörü $i=1,\cdots,n$ olmak üzere $A_i(x)\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)$ bileşenleri ile verilsin. $divA(x)=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial A_n}{\partial x_n}$ fonksiyonu $\bar{\Omega}$ ($\mathbb{R}^n$ uzayında sınırlı bölge) bölgesinde sürekli veya Ω bölgesinde integrallenebilir ise $\int_\Omega divA(x)dx=\int_{\partial\Omega}A(x)n(x)ds$ olup, burada $n(x);\Omega$ bölgesine göre dışa yönlendirilmiş $\partial\Omega$ sınırı için birim normal vektördür. Bu formül Ostrogradsky formülü olarak bilinmektedir. $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$, $v(x)\in C^1(\bar{\Omega})$ ve $\Delta u=div(\nabla u)$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun. $v\Delta u=v\cdot div(\nabla u)=div(v\nabla u)-\nabla u\nabla v$, $\nabla u\nabla v=u_{x_1}v_{x_1}+\cdots+u_{x_n}v_{x_n}$ olduğundan Ostrogradsky formülüne göre $\int_\Omega v\Delta udx=\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial n}ds-\int_\Omega\nabla u\nabla vdx$ elde edilir. Burada $\nabla u\cdot n|_{\partial\Omega}=\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}$ olup bu formül Green formülü olarak bilinmektedir.

Gronwall Eşitsizliği (Diferansiyel form) $\eta(t)$ negatif olmayan, $[0,T]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ negatif olmayan $[0,T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere, $\eta'(t)\leqslant\phi(t)\eta(t)+\psi(t)$ eşitsizliği sağlanıyorsa, tüm $0\leqslant t\leqslant T$ için $\eta(t)\leqslant e^{\int_0^t\phi(s)ds}(\eta(0)+\int_0^t\psi(s)ds)$ olur.

BÖLÜM 3. KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI

Bu bölümde,

$$u_{tt} - \alpha\Delta u_t + \beta u_t - \sigma\Delta u + m^2 u + \lambda |u|^{p-1} u = 0 \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega \tag{3.2}$$

$$u = 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \tag{3.3}$$

probleminin α (sönüm), m (kütle) ve λ (lineerliği bozan terimin katsayısı) katsayılarına göre sürekli bağımlılığı incelenecektir. İspatlarda standart enerji metodu kullanılacaktır.

3.1. Ön Kestirimler

Şimdi, (3.1)-(3.3) probleminin çözümüne ilişkin bazı eşitsizlikler elde edilsin.

Teorem 3.1. $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ için (3.1)-(3.3) probleminin çözümü olan

$u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\| u_t(t) \|^2 \leqslant D_1, \| \nabla u(t) \|^2 \leqslant D_2, \| u(t) \|^2 \leqslant D_3 \tag{3.4}$$

ve

$$\int_0^t \| \nabla u_s(x,s) \|^2 \, ds \leqslant D_4 \tag{3.5}$$

eşitsizliklerini sağlar. Burada $D_1, D_2, D_3, D_4 > 0$ sabitleri problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlıdır.

İspat 3.1. (3.4)-(3.5) eşitsizliklerini elde edebilmek için (3.1) denklemi u_t ile $L^2(\Omega)$ da çarpılırsa

$$(u_{tt}, u_t) - \alpha(\Delta u_t, u_t) + \beta(u_t, u_t) - \sigma(\Delta u, u_t) + m^2(u, u_t) + \lambda \int_\Omega |u|^{p-1} u u_t dx = 0 \qquad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) eşitliğinin sol tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplandığında aşağıdaki elde edilir.

$$\int_\Omega u_t u_{tt} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| u_t(t) \|^2$$

$$\int_\Omega u_t \Delta u_t dx = \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u_t}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla u_t \nabla u_t dx = - \| \nabla u_t(t) \|^2$$

$$\int_\Omega u_t u_t dx = \| u_t(t) \|^2$$

$$\int_\Omega u_t \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla u(t) \|^2$$

$$\int_\Omega |u|^{p-1} u u_t = \frac{1}{p+1} \int_\Omega \frac{d}{dt} |u|^{p+1} dx = \frac{1}{p+1}\frac{d}{dt} \| u \|_{p+1}^{p+1}$$

dır. Yukarıdaki eşitlikler düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2} \| u_t(t) \|^2 + \frac{\sigma}{2} \| \nabla u(t) \|^2 + \frac{m^2}{2} \| u(t) \|^2 + \frac{\lambda}{p+1} \| u(t) \|_{p+1}^{p+1}\Big]$$
$$+\alpha \| \nabla u_t(t) \|^2 + \beta \| u_t(t) \|^2 = 0 \qquad (3.7)$$

elde edilir.

Enerji fonksiyonu $E_u(t)=\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla u(t)\|^2+\frac{m^2}{2}\|u(t)\|^2+\frac{\lambda}{p+1}\|u(t)\|_{p+1}^{p+1}$

olmak üzere, $\alpha,\beta\geqslant 0$ ve (3.7) eşitliğinden $\frac{d}{dt}E_u(t)\leqslant 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Yani, enerji fonksiyonu artmayan bir fonksiyondur.

Buradan $[0,t]$ aralığında integral alındığında $E_u(t)\leqslant E_u(0)$ olarak bulunur. Bu da ilgili eşitsizliklerinin sağlandığını gösterir.

3.1.1. α Katsayısı için sürekli bağımlılık

Bu bölümde, (3.1)-(3.3) başlangıç sınır değer(bsd) probleminin α katsayısına göre sürekli bağımlılığı incelenecektir. Bunu yapmak için u ,

$$u_{tt}-\alpha\Delta u_t+\beta u_t-\sigma\Delta u+m^2u+\lambda|u|^{p-1}u=0 \qquad (x,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{3.8}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x) \qquad x\in\Omega, \tag{3.9}$$

$$u=0 \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T] \tag{3.10}$$

probleminin çözümü v ise, $\alpha+a\geqslant 0$ olmak üzere,

$$v_{tt}-(\alpha+a)\Delta v_t+\beta v_t-\sigma\Delta v+m^2v+\lambda|v|^{p-1}v=0, \tag{3.11}$$

$$v(x,0)=u_0(x),\quad v_t(x,0)=u_1(x) \quad x\in\Omega, \tag{3.12}$$

$$v=0 \quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T] \tag{3.13}$$

probleminin çözümü olsun. Şimdi, bu iki çözümün farkını $w=u-v$ şeklinde tanımlayalım. Böylece w,

$$w_{tt}-\alpha\Delta w_t+a\Delta v_t+\beta w_t-\sigma\Delta w+m^2w+\lambda(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v)=0, \tag{3.14}$$

$$w(x,0)=0,\qquad w_t(x,0)=0 \qquad x\in\Omega, \tag{3.15}$$

$$w=0 \quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T] \tag{3.16}$$

başlangıç sınır değer problemini sağlayacaktır.

Teorem 3.1.1. (3.14)-(3.16) probleminin çözümü olan w için a w şağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\frac{1}{2}\| w_t(t)\|^2 + \frac{\sigma}{2}\| \nabla w(t)\|^2 + \frac{m^2}{2}\| w(t)\|^2 \leqslant \frac{e^{M_1 t} D_4}{4\lambda} a^2 \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{3.17}$$

burada $D_4 > 0, M_1 > 0$ problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlı sabitlerdir.

İspat 3.1.1. (3.14) denkleminin w_t ile $L_2(\Omega)$ 'da iç çarpımı alınırsa

$$(w_{tt}, w_t) - \alpha(\Delta w_t, w_t) + a(\Delta v_t, w_t) + \beta(w_t, w_t) - \sigma(\Delta w, w_t) + m^2(w, w_t)$$
$$+\lambda \int_\Omega (|u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v) w_t dx = 0 \tag{3.18}$$

olur.

(3.18) eşitliğinin sol tarafındaki integraller ayrı ayrı hesaplandığında aşağıdaki elde edilir.

$$\int_\Omega w_t w_{tt} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| w_t(t)\|^2$$

$$\int_\Omega w_t \Delta w_t dx = \int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial w_t}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla w_t \nabla w_t dx = -(\nabla w_t, \nabla w_t) = -\| \nabla w_t(t)\|^2$$

$$\int_\Omega w_t \Delta v_t dx = \int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial v_t}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla w_t \nabla v_t dx = -(\nabla w_t, \nabla v_t)$$

$$\int_\Omega w_t \Delta w dx = \int_{\partial\Omega} w_t \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla w_t \nabla w dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \nabla w(t)\|^2$$

$$\int_\Omega w w_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| w(t)\|^2$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki işlemler düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\| w_t(t)\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{m^2}{2}\| w(t)\|^2\Big]+\alpha\|\nabla w_t(t)\|^2-a(\nabla v_t,\nabla w_t)$$
$$+\beta\| w_t(t)\|^2+\lambda\int_\Omega(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v)w_t dx=0 \quad (3.19)$$

elde edilir.

$$E_w(t)=\frac{1}{2}\| w_t(t)\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{m^2}{2}\| w(t)\|^2$$

olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)=-\alpha\|\nabla w_t(t)\|^2-\beta\| w_t(t)\|^2+a(\nabla v_t,\nabla w_t)-\lambda\int_\Omega\big(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v\big)w_t dx$$

elde edilir. Ayrıca $\beta>0$ olduğundan,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\alpha\|\nabla w_t(t)\|^2\leqslant a|(\nabla v_t,\nabla w_t)|+\lambda\Big|\int_\Omega(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v)w_t dx\Big| \quad (3.20)$$

şeklinde yazılabilir. (3.20) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terim için sırasıyla Cauchy-Schwarz ve ϵ- Young eşitsizliği $\epsilon=\frac{\alpha}{4}$ için uygulanırsa,

$$\begin{aligned} a|(\nabla v_t,\nabla w_t)| &\leqslant a\|\nabla v_t(t)\|\|\nabla w_t(t)\| \\ &\leqslant \epsilon\|\nabla w_t(t)\|^2+\frac{a^2}{4\epsilon}\|\nabla v_t(t)\|^2 \\ &\leqslant \frac{\alpha}{4}\|\nabla w_t(t)\|^2+\frac{a^2}{\alpha}\|\nabla v_t(t)\|^2 \end{aligned}$$

olur.

Şimdi, $\lambda\left|\int_\Omega\left(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v\right)w_t dx\right|$ integrali için bir üst sınır bulalım.

$I=\int_\Omega\left(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v\right)w_t dx$ olsun.

Bunu yapmak için, I 'yı , $I_1=\int_\Omega |u|^{p-1}ww_t\,dx$ ve $I_2=\int_\Omega\left(|u|^{p-1}-|v|^{p-1}\right)vw_t dx$ olmak üzere $I=I_1+I_2$ şeklinde iki parça halinde yazalım.

$|ww_t|$ terimi için sırasıyla, Cauchy-Schwarz ve genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$|I_1|\leqslant\int_\Omega |u|^{p-1}|ww_t|\,dx\leqslant\int_\Omega |u|^{p-1}|w||w_t|\,dx\leqslant\|u(t)\|_{3(p-1)}^{p-1}\|w(t)\|_6\|w_t(t)\| \tag{3.21}$$

olduğu görülür.

Bununla beraber, (3.21) eşitsizliğinin sağ tarafındaki terimlere Sobolev eşitsizliği uygulanırsa,

$$|I_1|\leqslant d_1^{p-1}d_2\|\nabla u(t)\|^{p-1}\|\nabla w(t)\|\|w_t(t)\|$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca (3.4) yardımıyla $C_1=d_1^{p-1}d_2D_2^{\frac{p-1}{2}}$ olmak üzere,

$$|I_1|\leqslant C_1\|\nabla w(t)\|\|w_t(t)\| \tag{3.22}$$

olduğu görülür.

Son olarak (3.22) eşitsizliğine ϵ-Young eşitsizliği $\epsilon=\lambda$ ile uygulandığında,

$$|I_1|\leqslant\lambda C_1^2\|\nabla w(t)\|^2+\frac{1}{4\lambda}\|w_t(t)\|^2 \tag{3.23}$$

bulunur.

Şimdi, I_2 için bir üst sınır bulmaya çalışalım. Öncelikle, ara değer teoremi $f(x)=x^{\alpha}$ fonksiyonu için $[0,\infty)$ aralığında uygulandığında $0<\theta<1$ olmak üzere,

$$I_2=(p-1)\int_{\Omega}\big(\theta|u|+(1-\theta)|v|\big)^{p-2}(|u|-|v|)vw_t dx$$

elde edilir.

Burada, Cauchy-Schwarz ve $\big||u|-|v|\big|\leqslant|u-v|$ üçgen eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$I_2\leqslant(p-1)\int_{\Omega}\big(\theta|u|+(1-\theta)|v|\big)^{p-2}|w||v||w_t|\,dx \tag{3.24}$$

olarak bulunur.

Şimdi, (3.24) için genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği uygulanırsa ve

$$h(t)=\Big[\int_{\Omega}\big(\theta|u|+(1-\theta)|v|\big)^{6(p-2)}dx\Big]^{\frac{1}{6}} \tag{3.25}$$

olmak üzere,

$$|I_2|\leqslant(p-1)h(t)\|v(t)\|_6\|w(t)\|_6\|w_t(t)\| \tag{3.26}$$

olacaktır. (3.25) de bir kestirim elde etmek için $(a+b)^p\leqslant2^p(a^p+b^p)$ eşitsizliğini iki kez uygulamak gerekir. Buradan, $k_0=\max\{\theta,1-\theta\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}h(t)&\leqslant\Big[2^{6(p-2)}\int_{\Omega}\big(\theta^{6(p-2)}|u|^{6(p-2)}+(1-\theta)^{6(p-2)}|v|^{6(p-2)}\big)dx\Big]^{\frac{1}{6}}\\&\leqslant2^{p-2}\Big[\theta^{6(p-2)}\|u(t)\|_{6(p-2)}^{6(p-2)}+(1-\theta)^{6(p-2)}\|v(t)\|_{6(p-2)}^{6(p-2)}\Big]^{\frac{1}{6}}\\&\leqslant2^{p-2}2^{\frac{1}{6}}k_0^{p-2}\Big[\|u(t)\|_{6(p-2)}^{p-2}+\|v(t)\|_{6(p-2)}^{p-2}\Big].\end{aligned}$$

Ayrıca, Sobolev eşitsizliği (3.27) için uygulandığında d_3 Sobolev sabiti olmak üzere,

$$h(t) \leqslant 2^{p-2} 2^{\frac{1}{6}} k_0^{p-2} d_3^{p-2} \left[\| \nabla u(t) \|^{p-2} + \| \nabla v(t) \|^{p-2} \right] \tag{3.28}$$

olarak bulunur.

(3.4) yardımıyla $h(t)$ için üst sınır,

$$\sup_{t \geq 0} h(t) \leqslant A_0 := 2^{p-1} 2^{\frac{1}{6}} k_0^{p-2} d_3^{p-2} D_2^{\frac{p-2}{2}} \tag{3.29}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi (3.29)'u , (3.26)'da yerine koyarsak,

$$| I_2 | \leqslant (p-1) A_0 \| v(t) \|_6 \| w(t) \|_6 \| w_t(t) \| \tag{3.30}$$

olur. Daha sonra Sobolev eşitsizliği ve (3.4) yardımıyla $C_0 = (p-1) A_0 d_2^2 D_2^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere,

$$| I_2 | \leqslant C_0 \| \nabla w(t) \| \| w_t(t) \| \tag{3.31}$$

eşitsizliği elde edilir.

ϵ-Young eşitsizliği $\epsilon = \lambda$ alarak (3.31)'de uygulandığında,

$$| I_2 | \leqslant \lambda C_0^2 \| \nabla w(t) \|^2 + \frac{1}{4\lambda} \| w_t(t) \|^2 \tag{3.32}$$

elde edilir.

Dolayısıyla, (3.22) ve (3.32) toplandığında,

$$\begin{aligned} |I| &\leqslant \int_\Omega \left| (|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v)w_t \right| dx \\ &\leqslant |I_1| + |I_2| \\ &\leqslant C_3 \|\nabla w(t)\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|w_t(t)\|^2 \end{aligned} \tag{3.33}$$

bulunur.

Böylelikle, (3.20) yeniden düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_w(t) + \alpha\|\nabla w_t(t)\|^2 \leqslant \frac{\alpha}{4}\|\nabla w_t(t)\|^2 + \frac{a^2}{\alpha}\|\nabla v_t(t)\|^2 + \lambda C_3\|\nabla w(t)\|^2 \\ + \frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 \end{aligned} \tag{3.34}$$

olur. Eşitsizliğin sağına $\frac{m^2}{2}\|w(t)\|^2$ pozitif terimi eklendiğinde,

$$\frac{d}{dt}E_w(t) \leqslant \frac{a^2}{\alpha}\|\nabla v_t(t)\|^2 + \lambda C_3\|\nabla w(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{m^2}{2}\|w(t)\|^2$$

şekline dönüşür.

Buradan $M_1 = \max\left\{1, \lambda C_3, \frac{\sigma}{2}\right\}$ olmak üzere,

$\frac{d}{dt}E_w(t) \leqslant M_1 E_w(t) + \frac{a^2}{\alpha}\|\nabla v_t(t)\|^2$ diferansiyel eşitsizliği elde edilir.

(3.4) kestirimi kullanıldığında bu diferansiyel eşitsizlik,

$$E_w(t) \leqslant \frac{e^{M_1 t} D_4}{\alpha} a^2 \tag{3.35}$$

şeklinde tüm $t \in (0,T]$ için geçerli olmaktadır. Üstteki teorem gösteriyor ki $a \to 0$ olurken $\| w(t) \| \to 0$ ve $\| \nabla w(t) \| \to 0$ olur. Böylece (3.1)-(3.3) başlangıç sınır değer probleminin çözümü α katsayısına sürekli bağımlıdır.

3.1.2. β Katsayısı için sürekli bağımlılık

Bu bölümde, (3.1)-(3.3) probleminin çözümünün β katsayısına göre sürekli bağımlılığı ispatlanacaktır. u, (3.1)-(3.3) probleminin çözümü, v de $\beta + b > 0$ olmak üzere,

$$v_{tt} - \alpha \Delta v_t + (\beta + b) v_t - \sigma \Delta v + m^2 v + \lambda | v |^{p-1} v = 0 \; (x,t) \in \Omega \times [0,T],$$

$$v(x,0) = u_0(x), \quad v_t(x,0) = u_1(x) \quad x \in \Omega,$$

$$v = 0 \; (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$$

başlangıç sınır değer probleminin çözümü olsun.

Dolayısıyla, $w = u - v$ olmak üzere,

$$w_{tt} - \alpha \Delta w_t + \beta w_t - b v_t - \sigma \Delta w + m^2 w + \lambda (| u |^{p-1} u - | v |^{p-1} v) = 0 \tag{3.36}$$

$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0 \quad x \in \Omega, \tag{3.37}$$

$$w = 0 \tag{3.38}$$

bsd probleminin çözümü olacaktır.

Teorem 3.1.2. (3.36)-(3.38) probleminin çözümleri,

$$\frac{1}{2}\| w_t(t)\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{m^2}{2}\| w(t)\|^2\leqslant\frac{e^{M_2 t}D_1 t}{2}b^2 \qquad \forall t\in[0,T],$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $D_1>0, M_2>0$ problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlı sabitlerdir.

İspat 3.1.2. (2.44) denklemi w_t ile $L_2(\Omega)$ 'da çarpılırsa,

$$(w_{tt},w_t)-\alpha(\Delta w_t,w_t)+a(\Delta v_t,w_t)+\beta(w_t,w_t)-\sigma(\Delta w,w_t)+m^2(w,w_t)$$
$$+\lambda\int_\Omega(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v)w_t dx=0$$

elde edilir. Teorem 3.1.1. in ispatında yapılan benzer işlemler yardımıyla,

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\| w_t(t)\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{m^2}{2}\| w\|^2\Big]+\alpha\|\nabla w_t(t)\|^2-b(v_t,w_t)+\beta\| w_t(t)\|^2$$
$$+\lambda\int_\Omega(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v)w_t dx=0$$

elde edilir.

Burada, $E_w(t)=\frac{1}{2}\| w_t(t)\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{m^2}{2}\| w(t)\|^2$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\alpha\|\nabla w_t(t)\|^2+\beta\| w_t(t)\|^2\leqslant b|(v_t,w_t)|+\lambda\Big|\int_\Omega(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v)w_t dx\Big| \qquad (3.39)$$

olarak yazılabilir.

(3.39) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terim için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanıldığında,

$$b\,|(v_t,w_t)|\leqslant\frac{b^2}{2}\|v_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2$$

olur. $\lambda\left|\int_\Omega(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v)w_t dx\right|$ terimi için (3.33)'de bulunan üst sınır kullanılırsa,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\alpha\,\|\nabla w_t(t)\|^2+\beta\|w_t(t)\|^2\leqslant\frac{b^2}{2}\|v_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2$$
$$+\lambda C_3\,\|\nabla w(t)\|^2+\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. (3.4) yardımıyla ve eşitsizliğin sağına pozitif $\frac{m^2}{2}\|w\|^2$ terimi eklendiğinde,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)\leqslant\frac{b^2}{2}D_1+\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\lambda C_3\|\nabla w(t)\|^2+\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{m^2}{2}\|w(t)\|^2$$

elde edilir.

Böylelikle,

$M_2=\max\left\{1,\frac{\sigma}{2},\lambda C_3\right\}$ ve (3.4) yardımıyla,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)\leqslant\frac{D_1}{2}b^2+M_2E_w(t)$$

olur. Çıkan diferansiyel eşitsizlik çözüldüğünde,

$$E_w(t)\leqslant\frac{e^{M_2t}D_1t}{2}b^2\qquad\forall t\in[0,T]$$

olduğu görülür. Bu da istenilen sonuçtur.

3.1.3 σ Katsayısı için sürekli bağımlılık

Bu bölümde (3.1)-(3.3) probleminin bir çözümünün σ katsayısına göre sürekli bağımlılık incelemesi yapılacaktır.

u, (3.1)-(3.3) probleminin çözümü, v ise $\sigma + s > 0$ olmak üzere,

$$v_{tt} - \alpha \Delta v_t + \beta v_t - (\sigma + s)\Delta v + m^2 v + \lambda |v|^{p-1} v = 0 \ (x,t) \in \Omega \times [0,T],$$
$$v(x,0) = u_0(x), \quad v_t(x,0) = u_1(x) \quad x \in \Omega,$$
$$v = 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$$

bsd probleminin çözümü olsun. Dolayısıyla, $w = u - v$ olmak üzere,

$$w_{tt} - \alpha \Delta w_t + \beta w_t - \sigma \Delta w + s \Delta v + m^2 w + \lambda(|u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v) = 0, \tag{3.40}$$
$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0 \quad x \in \Omega, \tag{3.41}$$
$$w = 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \tag{3.42}$$

probleminin çözümü olacaktır.

Teorem 3.1.3 (3.40)-(3.42) probleminin çözümleri,

$$\frac{1}{2}\| w_t(t) \|^2 + \frac{\sigma}{2} \| \nabla w(t) \|^2 + \frac{m^2}{2} \| w(t) \|^2 \leqslant \frac{e^{M_3 t} D_2 t}{2} s^2 \qquad \forall t \in [0,T],$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $D_2 > 0, M_3 > 0$ başlangıç verilere ve parametrelere bağlı sabitlerdir.

İspat 3.1.3. (3.40) denklemi w_t ile $L_2(\Omega)$ 'da çarpılırsa,

$$(w_{tt}, w_t) - \alpha(\Delta w_t, w_t) + \beta(w_t, w_t) - \sigma(\Delta w, w_t) + s(w_t, \Delta v) + m^2(w, w_t)$$
$$+\lambda \int_\Omega (|u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v) w_t dx = 0$$

elde edilir. Teorem 3.1.1. in ispatındaki benzer işlemler yardımıyla,

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2} \| w_t(t) \|^2 + \frac{\sigma}{2} \| \nabla w(t) \|^2 + \frac{m^2}{2} \| w(t) \|^2\Big] + \alpha \| \nabla w_t(t) \|^2 + \beta \| w_t(t) \|^2$$
$$-s(\nabla v, \nabla w_t) + \lambda \int_\Omega (|u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v) w_t dx = 0$$

elde edilir.

Buradan, $E_w(t) = \frac{1}{2} \| w_t(t) \|^2 + \frac{\sigma}{2} \| \nabla w(t) \|^2 + \frac{m^2}{2} \| w(t) \|^2$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt} E_w(t) + \alpha \| \nabla w_t(t) \|^2 + \beta \| w_t(t) \|^2 \leqslant s |(\nabla v, \nabla w_t)| + \lambda \Big| \int_\Omega (|u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v) w_t dx \Big| \quad 3.43)$$

olur. (3.43) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk terim için ϵ- Young eşitsizliği $\epsilon = \alpha / 4$ için kullanıldığında,

$$s |(\nabla v, \nabla w_t)| \leqslant \frac{s^2}{\alpha} \| \nabla v(t) \|^2 + \frac{\alpha}{4} \| \nabla w_t(t) \|^2$$

olur.

$\lambda \Big| \int_\Omega (|u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v) w_t dx \Big|$ terimi için (3.33)'da bulunan üst sınır kullanılırsa,

$$\frac{d}{dt} E_w(t) + \alpha \| \nabla w_t(t) \|^2 + \beta \| w_t(t) \|^2 \leqslant \frac{s^2}{\alpha} \| \nabla v(t) \|^2 + \frac{\alpha}{4} \| \nabla w_t(t) \|^2$$

$$+\lambda C_3 \,\|\, \nabla w(t) \,\|^2 + \frac{1}{2} \,\|\, w_t(t) \,\|^2$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. $\alpha, \beta > 0$ ve eşitsizliğin sağına pozitif $\frac{m^2}{2} \| w(t) \|^2$ terimi eklendiğinde,

$$\frac{d}{dt} E_w(t) \leqslant \frac{s^2}{\alpha} \| \nabla v(t) \|^2 + \frac{1}{2} \| \nabla w_t(t) \|^2 + \lambda C_3 \,\|\, \nabla w(t) \,\|^2 + \frac{m^2}{2} \| w(t) \|^2$$

olur.

Böylelikle $M_3 = \max\left\{1, \frac{\sigma}{2}, \lambda C_3\right\}$ ve (3.4) yardımıyla,

$\frac{d}{dt} E_w(t) \leqslant \frac{D_2}{\alpha} s^2 + M_3 E_w(t)$ elde edilir. Bu diferansiyel eşitsizlik çözüldüğünde

$$E_w(t) \leqslant \frac{e^{M_3 t} D_2 t}{2} s^2 \qquad \forall t \in [0, T]$$

olduğu görülür. Bu da istenilen sonuçtur.

3.1.4. m Katsayısı için sürekli bağımlılık

Bu bölümde, (3.1)-(3.3) probleminin çözümünün m katsayısına göre sürekli bağımlılığı ispatlanacaktır. u, (3.1)-(3.3) probleminin çözümü, v'de $\mu > 0$ olmak üzere,

$$v_{tt} - \alpha \Delta v_t + \beta v_t - \sigma \Delta v + (m^2 + \mu) v + \lambda \,|\, v \,|^{p-1} v = 0 \; (x,t) \in \Omega \times [0,T],$$

$$v(x,0) = u_0(x), \quad v_t(x,0) = u_1(x) \quad x \in \Omega,$$

$$v = 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$$

bsd probleminin çözümü olsun. Böylece, $w = u - v$ olmak üzere,

$$w_{tt}-\alpha\Delta w_t+\beta w_t-\sigma\Delta w+m^2 w-\mu v+\lambda(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v)=0 \tag{3.44}$$

$$w(x,0)=0,\quad w_t(x,0)=0\quad x\in\Omega, \tag{3.45}$$

$$w=0 \tag{3.46}$$

bsd probleminin çözümü olur.

Teorem 3.1.4. (3.44)-(3.46) probleminin çözümü,

$$\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{m^2}{2}\|w(t)\|^2\leqslant\frac{e^{M_2t}D_3t}{2}\mu^2,\qquad \forall t\in[0,T]$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $D_3>0$ ve $M_2>0$ parametrelere ve başlangıç koşullara bağlı sabitlerdir.

İspat 3.1.4. İspat için öncelikle (3.44) denkleminin $L^2(\Omega)$'da w_t ile iç çarpımını alalım. Böylece,

$$(w_{tt},w_t)-\alpha(\Delta w_t,w_t)+\beta(w_t,w_t)-\sigma(\Delta w,w_t)+m^2(w,w_t)-\mu(v,w_t)$$
$$+\lambda(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v,w_t)=0.$$

Teorem 3.1.1. in ispatındaki benzer işlemler yardımıyla,

$$E_w(t)=\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{m^2}{2}\|w(t)\|^2$$

olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\alpha\|\nabla w_t(t)\|^2+\beta\|w_t(t)\|^2\leqslant\mu|(v,w_t)|+\lambda\left|\int_\Omega(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v)w_t dx\right|$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim için Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa, (3.4) yardımıyla,

$$\mu\,|(v,w_t)| \leqslant \frac{\mu^2}{2}\|v(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 \leqslant \frac{\mu^2}{2}D_3 + \frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2$$

olduğu görülür. $\lambda\left|\int_\Omega (|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v)w_t dx\right|$ terimi için ise (3.33)'da bulunan üst sınır kullanıldığında,

$$\frac{d}{dt}E_w(t) + \alpha\|\nabla w_t(t)\|^2 + \beta\|w_t(t)\|^2 \leqslant \frac{\mu^2}{2}D_3 + \frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \lambda C_3\|\nabla w(t)\|^2$$

$$+\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{m^2}{2}\|w(t)\|^2$$

olduğu görülür.

Buradan $M_2 = \max\left\{1, \frac{\sigma}{2}, \lambda C_3\right\}$ olmak üzere $\frac{d}{dt}E_w(t) \leqslant \frac{D_3}{2}\mu^2 + M_2 E_w(t)$ diferansiyel eşitsizliği ortaya çıkar. Bu son eşitsizlik çözüldüğünde $\forall t \in [0,T]$ için,

$$E_w(t) \leqslant \frac{e^{M_2 t} D_3 t}{2}\mu^2$$

olur. Dolayısıyla m katsayısı için sürekli bağımlılık sonucu gösterilmiş olur.

3.1.5. λ Katsayısı için sürekli bağımlılık

Bu bölümde (3.1)-(3.3) probleminin çözümünün λ katsayısına göre sürekli bağımlılık incelemesi yapılacaktır.

u, (3.1)-(3.3) probleminin çözümü, v ise $\lambda + L > 0$ olmak üzere,

$$v_{tt} - \alpha\Delta v_t + \beta v_t - \sigma\Delta v + m^2 v + (\lambda + L)|v|^{p-1}v = 0 \; (x,t) \in \Omega\times[0,T],$$

$v(x,0)=u_0(x), \quad v_t(x,0)=u_1(x) \quad x\in\Omega,$

$v=0$

bsd probleminin çözümü olsun. Dolayısıyla, $w=u-v$ olmak üzere,

$$w_{tt}-\alpha\Delta w_t+\beta w_t-\sigma\Delta w+m^2w+\lambda(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v)-L|v|^{p-1}v=0, \tag{3.47}$$

$$w(x,0)=0, \quad w_t(x,0)=0 \quad x\in\Omega, \tag{3.48}$$

$$w=0 \tag{3.49}$$

probleminin çözümü olacaktır.

Teorem 3.1.5. (3.47)-(3.49) probleminin çözümü,

$$\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{m^2}{2}\|w(t)\|^2\leqslant\frac{e^{M_3t}D_2^pt}{2}L^2, \qquad \forall t\in(0,T]$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, $M_3>0$ ve $D_2>0$ başlangıç verilere ve parametrelere bağlı sabitlerdir.

İspat 3.1.5. Teoremin ispatı için önce (3.47) denklemini $L^2(\Omega)$ uzayında w_t ile çarpalım.

$$(w_{tt},w_t)-\alpha(\Delta w_t,w_t)+\beta(w_t,w_t)-\sigma(\Delta w,w_t)+m^2(w,w_t)+\lambda(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v,w_t)$$
$$-L(|v|^{p-1}v,w_t)=0.$$

Teorem 3.1.1.'in ispatındaki benzer işlemler yardımıyla,

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{m^2}{2}\|w(t)\|^2\Big]+\alpha\|\nabla w_t(t)\|^2+\beta\|w_t(t)\|^2$$

$$+\lambda\int_\Omega\left(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v\right)w_t dx+L\left(|v|^{p-1}v,w_t\right)=0$$

elde edilir.

$$E_w(t)=\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{\sigma}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{m^2}{2}\|w(t)\|^2$$

olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+\alpha\|\nabla w_t(t)\|^2+\beta\|w_t(t)\|^2\leqslant\lambda\left|\int_\Omega(|u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v)w_t dx\right|$$
$$+L\left|\int_\Omega|v|^{p-1}vw_t dx\right| \qquad (3.50)$$

olur. Şimdi, $\int_\Omega |v|^{p-1}|vw_t|\,dx$ integrali için bir üst sınır bulalım.

Cauchy-Schwarz ve Hölder eşitsizlikleri sırasıyla uygulandığında,

$$\int_\Omega|v|^{p-1}|vw_t|\,dx\leqslant\int_\Omega|v|^{p-1}|v||w_t|\,dx\leqslant\|v(t)\|_{2p}^p\|w_t(t)\|\,dx$$

eşitsizliği elde edilir.

Daha sonra, Sobolev eşitsizliği uygulandığında d_0 Sobolev sabiti olmak üzere,

$$\int_\Omega|v|^{p-1}|vw_t|\,dx\leqslant d_0^p\|\nabla v(t)\|^p\|w_t(t)\|$$

olur. Bununla birlikte, Cauchy ve ϵ-Young eşitsizlikleri $\epsilon=\frac{L}{2}$ için uygulandığında,

$$\int_\Omega|v|^{p-1}|vw_t|\,dx\leqslant\frac{L}{2}d_0^{2p}\|\nabla v(t)\|^{2p}+\frac{1}{2L}\|w_t(t)\|^2$$

elde edilir. (3.4) yardımıyla $B_0=\frac{1}{2}D_2^p d_0^{2p}$ için,

$$\int_\Omega |v|^{p-1} |vw_t|\, dx \leqslant LB_0 + \frac{1}{2L} \| w_t(t) \|^2$$

olur.

$\lambda \left| \int_\Omega (|u|^{p-1} u - |v|^{p-1} v) w_t dx \right|$ terimi için ise (3.33)'de gösterilen üst sınır kullanıldığında ve (3.50), (3.51) ile düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{dt} E_w(t) + \alpha \| \nabla w_t(t) \|^2 + \beta \| w_t(t) \|^2 \leqslant \lambda C_3 \| \nabla w(t) \|^2 + \frac{1}{2} \| w_t(t) \|^2 + L^2 B_0$$

$$+ \frac{1}{2} \| w_t(t) \|^2 + \frac{m^2}{2} \| w(t) \|^2$$

olacaktır. Buradan $M_3 = \max \left\{ 1, \frac{C_3}{\sigma}, 1 + C_3 \right\}$ olmak üzere,

$\frac{d}{dt} E_w(t) \leqslant M_3 E_w(t) + \frac{C D_2^p}{2} L^2$ diferansiyel eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik çözüldüğünde $\forall t \in (0, T]$ için,

$$E_w(t) \leqslant \frac{e^{M_3 t} C D_2^p t}{2} L^2$$

geçerli olduğu kolaylıkla görülür. Burada L artışının $L \to 0$ olduğunda çözüme büyük bir etkisi olmadığı açıktır.

3.1.6. Tüm katsayılar için aynı anda sürekli bağımlılık

Bundan önceki kısımlarda çözümün her bir parametreye göre sürekli bağımlılığı ayrı ayrı ispatlanmıştır. Bu bölümde ise çözümün bütün parametrelere aynı anda sürekli bağımlı olup olmadığı incelenecektir. Yani bütün parametreler aynı anda değiştiğinde, çözümde de nasıl bir değişikliğin meydana geldiği araştırılacaktır.

u fonksiyonu,

$$u_{tt} - \alpha_1 \Delta u_t + \beta_1 u_t - \sigma_1 \Delta u + m_1^2 u + \lambda_1 |u|^{p-1} u = 0$$

$u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x)$

$u=0$

probleminin çözümü, v ise

$$v_{tt}-\alpha_2\Delta v_t+\beta_2 v_t-\sigma_2\Delta v+m_2^2 v+\lambda_2 |v|^{p-1} v=0$$

$$v(x,0)=v_0(x), \quad v_t(x,0)=v_1(x)$$

$$v=0$$

probleminin çözümü olsun.

$w=u-v$ olmak üzere yeni problem aşağıdaki şekildedir.

$$w_{tt}-\alpha_1\Delta u_t+\alpha_2\Delta v_t+\beta_1 u_t-\beta_2 v_t-\sigma_1\Delta u+\sigma_2\Delta v \qquad (3.52)$$

$$+m_1^2 u-m_2^2 v+\lambda_1 |u|^{p-1} u-\lambda_2 |v|^{p-1} v=0,$$

$$w(x,0)=0 \quad w_t(x,0)=0, \qquad (3.53)$$

$$w = 0. \qquad (3.54)$$

Şimdi,

$$\alpha=\alpha_1-\alpha_2 \quad \beta=\beta_1-\beta_2, \quad \sigma=\sigma_1-\sigma_2, \quad m=m_1^2-m_2^2, \quad \lambda=\lambda_1-\lambda_2$$

değerleri ele alınsın. Bu değerler ile (3.52) yeniden düzenlendiğinde,

$$w_{tt}-\alpha_1\Delta w_t-\alpha\Delta v_t+\beta_1 w_t+\beta v_t-\sigma_1\Delta w-\sigma\Delta v+m_1^2 w+mv$$

$$+\lambda_1(|u|^{p-1} u-|v|^{p-1} v)+\lambda |v|^{p-1v}=0, \qquad (3.55)$$

$$w(x,0)=0 \quad w_t(x,0)=0, \qquad (3.56)$$

$$w = 0 \qquad (3.57)$$

olur.

Teorem 3.1.6. (3.55)-(3.57) probleminin çözümleri Teorem 3.2.1'in koşulları altında problemin katsayılarına sürekli bağımlıdır.

İspat 3.1.6. (3.55), w_t ile $L_2(\Omega)$ uzayında çarpıldığında,

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\| w_t(t)\|^2 + \frac{\sigma_1}{2}\| \nabla w(t)\|^2 + \frac{m_1^2}{2}\| w(t)\|^2\Big] + \alpha_1 \| \nabla w_t(t)\|^2 + \beta_1 \| w_t(t)\|^2$$

$$+\alpha(\nabla w_t, \nabla v_t) + \beta(w_t, v_t) + \sigma(\nabla v, \nabla w_t) + m(w_t, v) + \lambda_1(w_t, |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v)$$

$$+\lambda(w_t, |v|^{p-1}v) = 0$$

(3.58) için düzenleme yapıldığında,

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\| w_t(t)\|^2 + \frac{\sigma_1}{2}\| \nabla w(t)\|^2 + \frac{m_1^2}{2}\| w(t)\|^2$$

olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_1(t) + \alpha_1 \| \nabla w_t(t)\|^2 + \beta_1 \| w_t(t)\|^2 \leqslant \alpha |(\nabla w_t, \nabla v_t)| + \beta |(w_t, v_t)| + \sigma |(\nabla v, \nabla w_t)|$$

$$+m|(w_t, v)| + \lambda_1 |(w_t, |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v)| + \lambda |(w_t, |v|^{p-1}v)| \tag{3.59}$$

şeklinde olur. Şimdi (3.4)-(3.5) kestirimleri yardımıyla (3.59) için üst sınır elde edilsin. ϵ-Young eşitsizliğinde $\epsilon = \dfrac{\alpha_1}{2}$ alarak,

$$\alpha |(\nabla w_t, \nabla v_t)| \leqslant \frac{\alpha_1}{2}\| \nabla w_t(t)\|^2 + \frac{\alpha^2}{2\alpha_1}\| \nabla v_t(t)\|^2 \leqslant \frac{\alpha_1}{2}\| \nabla w_t(t)\|^2 + \frac{\alpha^2}{2\alpha_1}D_4$$

olur. Cauchy- Schwarz eşitsizliği yardımıyla,

$$\beta \,|\, (w_t, v_t) \,|\leqslant \frac{1}{2} \| \, w_t(t) \,\|^2 + \frac{\beta^2}{2} \| \, v_t(t) \,\|^2 \leqslant \frac{1}{2} \| \, w_t(t) \,\|^2 + \frac{\beta^2}{2} D_1$$

olur. ϵ-Young eşitsizliği yardımıyla $\epsilon = \frac{\alpha_1}{2}$ için,

$$\sigma \,|\, (\nabla v, \nabla w_t) \,|\leqslant \frac{\sigma^2}{2\alpha_1} \| \, \nabla v(t) \,\|^2 + \frac{\alpha_1}{2} \| \, \nabla w_t(t) \,\|^2 \leqslant \frac{\sigma^2}{2\alpha_1} D_2 + \frac{\alpha_1}{2} \| \, \nabla w_t(t) \,\|^2$$

olur. Cauchy-Schwarz yardımıyla,

$$m \,|\, (w_t, v) \,|\leqslant \frac{m^2}{2} \| \, v(t) \,\|^2 + \frac{1}{2} \| \, w_t(t) \,\|^2 \leqslant \frac{m^2}{2} D_3 + \frac{1}{2} \| \, w_t(t) \,\|^2$$

dır.

Teorem 3.1.5.in ispatındaki işlemler yardımıyla,

$$\lambda \,|\, (w_t, |\, v \,|^{p-1} v) \,|\leqslant \lambda^2 \frac{1}{2} d_0^{2p} \| \, \nabla v(t) \,\|^{2p} + \frac{1}{2} \| \, w_t(t) \,\|^2 \leqslant \lambda^2 \frac{1}{2} d_0^{2p} D_2^p + \frac{1}{2} \| \, w_t(t) \,\|^2$$

dır. Ayrıca, $\lambda_1 \,|\, (w_t, |\, u \,|^{p-1} u - |\, v \,|^{p-1} v) \,|\leqslant \lambda_1 C_3 \,||\, \nabla w(t) \,||^2 + \frac{1}{2} ||\, w_t(t) \,||^2$ olduğu Teorem 3.1.1. de ispatlandı. Dolayısıyla (3.59) için yeniden düzenleme yapıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_1(t) + \alpha_1 \| \, \nabla w_t(t) \,\|^2 \leqslant\ & \frac{\alpha_1}{2} \| \, \nabla w_t(t) \,\|^2 + \frac{\alpha^2}{2\alpha_1} D_4 + \frac{1}{2} \| \, w_t(t) \,\|^2 + \frac{\beta^2}{2} D_1 + \frac{\sigma^2}{2\alpha_1} D_2 \\ & + \frac{\alpha_1}{2} \| \, \nabla w_t(t) \,\|^2 + \frac{m^2}{2} D_3 + \frac{1}{2} \| \, w_t(t) \,\|^2 + \lambda^2 \frac{1}{2} d_0^{2p} D_2^p \\ & + \frac{1}{2} \| \, w_t(t) \,\|^2 + \lambda_1 C_3 \,||\, \nabla w(t) \,||^2 + \frac{1}{2} ||\, w_t(t) \,||^2 + \frac{m_1^2}{2} \| \, w(t) \,\|^2 \end{aligned}$$

olur. Böylelikle, $M^* = \max\left\{1, 2, \frac{\sigma_1}{2}, \lambda_1 C_3\right\}$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_1(t) \leqslant M^* E_1(t) + \alpha^2 \frac{D_4}{2\alpha_1} + \beta^2 \frac{D_1}{2} + \sigma^2 \frac{D_2}{2\sigma_1} + m^2 \frac{D_3}{2} + \lambda^2 \frac{d_0^{2p} D_2^p}{2}$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir.

Bu diferansiyel eşitsizlik $A = \alpha^2 \frac{D_4}{2\alpha_1} + \beta^2 \frac{D_1}{2} + \sigma^2 \frac{D_2}{2\sigma_1} + m^2 \frac{D_3}{2} + \lambda^2 \frac{d_0^{2p} D_2^p}{2}$

olmak üzere çözüldüğünde ,

$$E_1(t) \leqslant Ate^{M^* t}$$

elde edilir. Bu da gösteriyor ki her katsayı aynı anda sıfıra yaklaştığında w çözümü de $\forall t \in [0,T]$ için sıfıra yaklaşacaktır.

BÖLÜM 4. DİSİPATİF VE ÇİFT DİSPERSİF TERİM İÇEREN DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI

Bu bölümde,

$$u_{tt} - \Delta u - a\Delta u_{tt} + b\Delta^2 u - d\Delta u_t + \alpha |u_t|^{m-2} u_t + \beta |u|^{p-2} u = 0 \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega \tag{4.2}$$

$$u = \Delta u \equiv 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \tag{4.3}$$

probleminin çözümünün a (dispersif), d (sönüm), α (sönüm), β (lineerliği bozan terimin katsayısı) pozitif katsayılarına göre sürekli bağımlılık incelemesi ayrı ayrı gösterilecektir. Aynı zamanda denklemin bu katsayıların tümüne aynı anda sürekli bağımlı olduğu da ispatlanacaktır. Burada, $m > 2, p > 2$ olduğu durum incelenecektir. İspatlarda ilk bölümde olduğu gibi standart enerji metodu kullanılacaktır.

4.1. Ön Kestirimler

Teorem 4.1. $(u_0, u_1) \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right) \times H_0^1(\Omega)$ olmak üzere (4.1)-(4.3) başlangıç sınır değer probleminin çözümü aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$\| u_t(t) \|^2 \leqslant A_1, \quad \| \nabla u(t) \|^2 \leqslant A_1, \quad \| \Delta u(t) \|^2 \leqslant A_2, \quad \| \nabla u_t(t) \| \leqslant A_3.$$

Burada A_1, A_2, A_3 problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlı sabitlerdir.

İspat 4.1. İspat için öncelikle (4.1) denkleminin u_t ile $L^2(\Omega)$ uzayında iç çarpımını alalım.

$$(u_{tt},u_t)-(\Delta u,u_t)-a(\Delta u_{tt},u_t)+b(\Delta^2 u,u_t)-d(\Delta u_t,u_t)+\alpha\int_\Omega |u_t|^{m-2}\, u_t u_t dx$$
$$+\beta\int_\Omega |u|^{p-2}\, uu_t dx=0 \qquad (4.5)$$

(4.5) eşitliğinin sağ tarafındaki integraller alındığında,

$$\int_\Omega u_t u_{tt} dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| u_t(t)\|^2$$

$$\int_\Omega u_t\Delta u dx=\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|^2$$

$$\int_\Omega u_t\Delta u_{tt} dx=\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u_{tt}}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla u_t\nabla u_{tt} dx=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_t(t)\|^2$$

$$\int_\Omega u_t\Delta^2 u=\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial \Delta u}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla u_t\nabla \Delta u dx=\int_\Omega \Delta u_t\Delta u dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u(t)\|^2$$

$$\int_\Omega u_t\Delta u_t dx=\int_{\partial\Omega} u_t\frac{\partial u_t}{\partial n}ds-\int_\Omega \nabla u_t\nabla u_t dx=-\|\nabla u_t(t)\|^2$$

$$\int_\Omega u_t u_t\,|u_t|^{m-2}\,dx=\| u_t(t)\|_m^m$$

$$\int_\Omega |u|^{p-2}uu_t dx=\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^p dx=\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\| u\|_p^p$$

Yukarıdaki işlemler düzenlendiğinde,

$$E_u(t)=\frac{1}{2}\| u_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2+\frac{b}{2}\|\Delta u(t)\|^2+\frac{a}{2}\|\nabla u_t(t)\|^2+\frac{\beta}{p}\| u(t)\|_p^p$$

olmak üzere,

$\frac{d}{dt}E_u(t)+d\,\|\nabla u_t(t)\|^2+\alpha\,\| u_t(t)\|_m^m=0$ dir. d ve α pozitif olduğundan,

$$\frac{d}{dt}E_u(t)\leqslant 0 \tag{4.6}$$

olur.

$[0,t]$ aralığında (4.6) integre edildiğinde $E_u(t)\leqslant E_u(0)$ olduğu görülür. Bu sayede istenen tüm ön kestirimler elde edilir.

Teorem 4.2. Varsayalım ki, $u_0 \in L^2(\Omega)$ ve $u_1 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ olsun. Bu sayede, (4.1)-(4.3) problemi için

$$\|\nabla u_{tt}(t)\|^2 \leqslant A_4, \qquad \forall t \in [0,T] \tag{4.7}$$

kestirimi geçerlidir. Burada A_4 başlangıç verilere ve denklemin parametrelerine bağlı bir pozitif sabit değerdir.

İspat 4.2. Bu kestirimi bulabilmek için önce (4.1) denkleminin t'ye göre bir kez türevi alınır.

$$u_{ttt} - \Delta u_t - d\Delta u_{tt} + b\Delta^2 u_t - a\Delta u_{ttt} + \alpha(m-1)|u_t|^{m-2} u_{tt} + \beta(p-1)|u|^{p-2} u_t = 0 \tag{4.8}$$

(4.8) eşitliği u_{tt} ile $L^2(\Omega)$ uzayında çarpılırsa,

$$\begin{aligned}&(u_{ttt},u_{tt}) - (\Delta u_t, u_{tt}) - d(\Delta u_{tt}, u_{tt}) + b(\Delta^2 u_t, u_{tt}) - a(\Delta u_{ttt}, u_{tt})\\ &\quad +\alpha(m-1)\int_\Omega |u_t|^{m-2} u_{tt}^2 dx + \beta(p-1)\int_\Omega |u|^{p-2} u_t u_{tt} dx = 0\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) eşitliğindeki integraller alınırsa,

$$\int_\Omega u_{tt}u_{ttt}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| u_{tt}(t)\|^2$$

$$\int_\Omega u_{tt}\Delta u_t dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| \nabla u_t(t)\|^2$$

$$\int_\Omega u_{tt}\Delta u_{tt}dx = -\|\nabla u_{tt}(t)\|^2$$

$$\int_\Omega u_{tt}\Delta^2 u_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u_t(t)\|^2$$

$$\int_\Omega u_{tt}\Delta u_{ttt}dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_{tt}(t)\|^2$$

elde edilir. Yukarıdaki işlemler (4.9) için düzenlendiğinde,

$E_{u_t} = \frac{1}{2}\| u_{tt}(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|\Delta u_t(t)\|^2 + \frac{a}{2}\|\nabla u_{tt}(t)\|^2$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_{u_t}(t) + d\|\nabla u_{tt}(t)\|^2 + \alpha(m-1)\int_\Omega |u_t|^{m-2} u_{tt}^2 dx + \beta(p-1)\int_\Omega |u|^{p-2} u_t u_{tt} dx = 0$$

olacaktır.

Taraf tarafa mutlak değer alınırsa,

$$\frac{d}{dt}E_{u_t}(t) + d\|\nabla u_{tt}(t)\|^2 \leqslant \alpha(m-1)\left|\int_\Omega |u_t|^{m-2} u_{tt}^2 dx\right| + \beta(p-1)\left|\int_\Omega |u|^{p-2} u_t u_{tt} dx\right| \quad (4.10$$

eşitsizliği elde edilir.

Dolayısıyla eşitsizliğin sağ tarafındaki terimler için üst sınır elde edilerek Poincaré eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}\alpha(m-1)\int_\Omega |u_t|^{m-2}|u_{tt}|^2 dx &\leqslant \alpha(m-1)|\Omega| \max |u_t|^{m-2}\int_\Omega |u_{tt}|^2 dx \\ &\leqslant \alpha(m-1)2E_u(0)^{\frac{m-2}{2}}\|u_{tt}(t)\|^2 \\ &\leqslant C_1\|\nabla u_{tt}(t)\|^2\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $C_1 = 2C\alpha(m-1)|\Omega| E_u(0)^{\frac{m-2}{2}}$ dır.

Şimdi de Poincaré eşitsizliği ve aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği yardımıyla,

$C_2 = \dfrac{\beta(p-1)C\,|\Omega|\,A_1^{\frac{p-2}{2}}}{2}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\beta(p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}|u_t||u_{tt}|\,dx &\leqslant \beta(p-1)|\Omega|\max|u|^{p-2}\|u_t(t)\|\|u_{tt}(t)\| \\ &\leqslant \beta(p-1)C|\Omega|\|\nabla u(t)\|^{p-2}\|u_t(t)\|\|u_{tt}(t)\| \\ &\leqslant C_2\left[\|\nabla u_t(t)\|^2+\|\nabla u_{tt}(t)\|^2\right]\end{aligned}$$

olarak bulunur. (4.10) düzenlendiğinde,

$$\frac{d}{dt}E_{u_t}(t)+d\|\nabla u_{tt}(t)\|^2 \leqslant C_1\|\nabla u_{tt}(t)\|^2+C_2\left[\|\nabla u_t(t)\|^2+\|\nabla u_{tt}(t)\|^2\right]$$

elde edilir. Aynı zamanda $d>0$ olduğundan,

$$\frac{d}{dt}E_{u_t}(t) \leqslant C_2\|\nabla u_t(t)\|^2+(C_1+C_2)\|\nabla u_{tt}(t)\|^2$$

olur. Bu sayede $M_1=\max\left\{\frac{1}{2},C_2,\frac{a}{2},C_1+C_2\right\}$ olmak üzere $\frac{d}{dt}E_{u_t}(t)\leqslant M_1E_{u_t}(t)$

elde edilir.

Buradan $E_{u_t}(t)\leqslant e^{M_1t}E_{u_t}(0)$ bulunur Böylece,

$$\|\nabla u_{tt}(t)\|^2 \leqslant \frac{2E_{u_t}(0)}{a}e^{M_1t}$$

olur. İstenen eşitsizlik $\|\nabla u_{tt}(t)\|^2 \leqslant A_4, \qquad \forall t\in[0,T]$ için elde edilir.

4.1.1. a Katsayısı için sürekli bağımlılık

Bu bölümde (4.1)-(4.3) bsd probleminin çözümünün a katsayısına göre sürekli bağımlılığı incelenecektir. Bunun için u fonksiyonu,

$$u_{tt} - \Delta u - a\Delta u_{tt} + b\Delta^2 u - d\Delta u_t + \alpha |u_t|^{m-2} u_t + \beta |u|^{p-2} u = 0 \tag{4.11}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega \tag{4.12}$$

$$u = \Delta u \equiv 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \tag{4.13}$$

probleminin çözümü, v ise $a + \tilde{a} > 0$ olmak üzere,

$$v_{tt} - \Delta v - a\Delta v_{tt} + b\Delta^2 v - d\Delta v_t + \alpha |v_t|^{m-2} v_t + \beta |v|^{p-2} v = 0 \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]$$

$$v(x,0) = u_0(x), \qquad v_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega$$

$$v = \Delta v \equiv 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$$

probleminin çözümü olsun. $w = u - v$ olmak üzere yeni problem,

$$\begin{aligned} w_{tt} - \Delta w - a\Delta w_{tt} - \tilde{a}\Delta v_{tt} + b\Delta^2 w - d\Delta w_t + \alpha(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t) \\ + \beta(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) = 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$w(x,0) = 0, \qquad w_t(x,0) = 0 \qquad x \in \Omega \tag{4.15}$$

$$w = \Delta w \equiv 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \tag{4.16}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.1. Problem (4.14)-(4.16) için w çözümü,

$$\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2+\frac{a}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2\leqslant\frac{e^{M_2t}A_4}{2}\tilde{a}^2$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $A_4>0, M_2>0$ problemin başlangıç verilerine ve denklemin parametrelerine bağlı sabitlerdir.

İspat 4.1.1. (4.14) denklemini w_t ile $L^2(\Omega)$ 'da çarptığımızda,

$$(w_t,w_{tt})-(w_t,\Delta w)-a(w_t,\Delta w_{tt})-\tilde{a}(w_t,\Delta v_{tt})+b(w_t,\Delta^2 w)-d(w_t,\Delta w_t)$$
$$+\alpha\int_\Omega(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t)w_t dx+\beta\int_\Omega(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v)w_t dx=0$$

olur.

Buradan Teorem 4.1.'in işlemlerine benzer hesaplamalarla integraller alındığında

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2+\frac{a}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2\Big]+d\|\nabla w_t(t)\|^2$$
$$-\tilde{a}(\nabla v_{tt},\nabla w_t)+\alpha\int_\Omega(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t)w_t dx$$
$$+\beta\int_\Omega(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v)w_t dx=0 \qquad (4.17)$$

elde edilir.

$E_w(t)=\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2+\frac{a}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2$ olmak üzere (4.17)

eşitliğinin mutlak değeri alındığında

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+d\|\nabla w_t(t)\|^2+\alpha\int_\Omega(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t)w_t dx\leqslant|\tilde{a}(\nabla v_{tt},\nabla w_t)|$$
$$+\left|\beta\int_\Omega(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v)w_t dx\right|$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi $\int \left(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t \right) w_t dx \geqslant 0$ olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t) w_t &= \sum_{i=0}^{n} (|u_{t_i}|^{m-2} u_{t_i} - |v_{t_i}|^{m-2} v_{t_i}) w_{t_i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \Big[\frac{1}{2} |u_t|^{m-2} (u_{t_i} - v_{t_i} + u_{t_i}) w_{t_i} + \frac{1}{2} |u_t|^{m-2} u_{t_i} w_{t_i} \\
&\quad - \frac{1}{2} |v_t|^{m-2} v_{t_i} w_{t_i} + \frac{1}{2} |v_t|^{m-2} (u_{t_i} - v_{t_i} - u_{t_i}) w_{t_i} \Big] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \Big[\frac{1}{2} (|u_t|^{m-2} + |v_t|^{m-2}) w_{t_i} w_{t_i} \\
&\quad + \frac{1}{2} (|u_t|^{m-2} - |v_t|^{m-2})(u_{t_i}^2 - v_{t_i}^2) \Big] \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2} (|u_t|^{m-2} + |v_t|^{m-2}) w_{t_i} w_{t_i} \\
&\quad + \frac{1}{2} (|u_t|^{m-2} - |v_t|^{m-2})(|u_t| - |v_t|)(|u_t| + |v_t|)
\end{aligned}
$$

dır. Dolayısıyla,

$$
(|u_t|^{m-2} - |v_t|^{m-2})(|u_t| - |v_t|) \geqslant 0 \tag{4.18}
$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$f(x) = x^{\alpha}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında monoton artan olduğundan (4.18) geçerlidir. Böylelikle (4.17) eşitliği yeniden düzenlendiğinde

$$
\frac{d}{dt} E_w(t) \leqslant |\tilde{a}(\nabla v_{tt}, \nabla w_t)| + \beta \left| \int_{\Omega} (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) w_t dx \right| \text{olduğu görülür.}
$$

Şimdi, eşitsizliğin sağ tarafı için üst sınır elde edilsin.

$\int_\Omega \left| (|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)w_t \right| dx \leqslant C_3 \|\nabla w(t)\|^2 + \frac{1}{2\beta}\|w_t(t)\|^2$ olduğu (3.33)'da

ispatlanmıştı.

$|\tilde{a}(\nabla v_{tt}, \nabla w_t)|$ için ise Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$|\tilde{a}(\nabla v_{tt}(t), \nabla w_t(t))| \leqslant \frac{\tilde{a}^2\|\nabla v_{tt}(t)\|^2}{2} + \frac{\|\nabla w_t(t)\|^2}{2}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, eşitsizliğin sağ tarafına $\frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2$ pozitif terimi eklendiğinde

$$\frac{d}{dt}E_w(t) \leqslant \frac{\tilde{a}^2\|\nabla v_{tt}(t)\|^2}{2} + \frac{\|\nabla w_t(t)\|^2}{2} + \beta C_3\|\nabla w(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2$$

elde edilir. Böylelikle,

$M_2 = \max\left\{\frac{a}{2}, \frac{1}{2}, \beta C_3\right\}$ olmak üzere ve (4.4)'den

$\frac{d}{dt}E_w(t) \leqslant \frac{\tilde{a}^2 A_4}{2} + M_2 E_w(t)$ şeklinde diferansiyel eşitsizlik yazılabilir.

Gronwall eşitsizliği sayesinde arzu edilen $E_w(t) \leqslant \frac{e^{M_2 t}A_4}{2}\tilde{a}^2$ sürekli bağımlılık sonucu elde edilir. Görüyoruz ki, $\tilde{a} \to 0$ olduğunda çözüm de sıfıra yaklaşır.

4.1.2. d Katsayısı için sürekli bağımlılık

Bu bölümde (4.1)-(4.3) bsd probleminin çözümünün d katsayısına göre sürekli bağımlılığı incelenecektir. Bunun için u ,

$$u_{tt}-\Delta u-a\Delta u_{tt}+b\Delta^2u-d\Delta u_t+\alpha|u_t|^{m-2}u_t+\beta|u|^{p-2}u=0 \tag{4.19}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \qquad u_t(x,0)=u_1(x) \qquad x\in\Omega \tag{4.20}$$

$$u=\Delta u\equiv 0 \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T] \tag{4.21}$$

probleminin çözümü, v ise $d+\tilde{d}>0$ olmak üzere,

$$v_{tt}-\Delta v-a\Delta v_{tt}+b\Delta^2v-(d+\tilde{d})\Delta v_t+\alpha|v_t|^{m-2}v_t+\beta|v|^{p-2}v=0$$

$$v(x,0)=u_0(x), \qquad v_t(x,0)=u_1(x) \qquad x\in\Omega$$

$$v=\Delta v\equiv 0 \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T]$$

dır.

Böylelikle, $w=u-v$ aşağıdaki problemi sağlar.

$$w_{tt}-\Delta w-a\Delta w_{tt}+b\Delta^2w-d\Delta w_t-\tilde{d}\Delta v_t+\alpha(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t)$$
$$+\beta(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v)=0 \tag{4.22}$$

$$w(x,0)=0, \qquad w_t(x,0)=0 \qquad x\in\Omega \tag{4.23}$$

$$w=\Delta w\equiv 0 \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T],T>0. \tag{4.24}$$

Teorem 4.1.2. Eğer u ve v, sırasıyla (4.19)-(4.21) ve (4.22)-(4.24) problemlerinin çözümleri ise w için,

$$\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2+\frac{a}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2\leqslant\frac{e^{M_3t}A_3t}{2}\tilde{d}^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada M_3 ve A_3 problemin başlangıç verilerine bağlı pozitif sabitlerdir.

İspat 4.1.2. (4.22), w_t ile Ω üzerinde çarpıldığında,

$$(w_t, w_{tt}) - (w_t, \Delta w) - a(w_t, \Delta w_{tt}) + b(w_t, \Delta^2 w) - d(w_t, \Delta w_t) - \tilde{d}(w_t, \Delta v_t)$$
$$+\alpha(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t, w_t) + \beta\int_\Omega (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) w_t dx = 0$$

olur. Teorem 4.1.' in ispatındaki benzer hesaplamalarla,

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\| w_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2 + \frac{a}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2\Big] + d\|\nabla w_t(t)\|^2$$
$$-\tilde{d}(\nabla v_t, \nabla w_t) + \alpha(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t, w_t) + \beta\int_\Omega (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) w_t dx = 0$$

elde edilir. Bununla birlikte, $(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t, w_t) \geqslant 0$ olduğu (3.33)'de gösterilmiştir. Ayrıca, $d > 0$ olduğundan,

$$\frac{d}{dt} E_w(t) \leqslant |\tilde{d}(\nabla v_t, \nabla w_t)| + \beta\left|\int_\Omega (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) w_t dx\right|$$

yazılabilir.

$\beta\int_\Omega (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) w_t dx \leqslant \beta C_3 \|\nabla w(t)\|^2 + \frac{\| w_t(t)\|^2}{2}$ olduğu (3.33)'de gösterilmiştir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim için,

$\tilde{d}\,|(\nabla v_t, \nabla w_t)| \leqslant \frac{\tilde{d}^2\|\nabla v_t(t)\|^2}{2} + \frac{\|\nabla w_t(t)\|^2}{2}$ yazılabilir. Böylelikle, (4.4) kullanılarak ve $\frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2$ terimi eklenerek,

$$\frac{d}{dt} E_w(t) \leqslant \frac{\tilde{d}^2\|\nabla v_t(t)\|^2}{2} + \frac{\|\nabla w_t(t)\|^2}{2} + \beta C_3\|\nabla w(t)\|^2 + \frac{\| w_t(t)\|^2}{2} + \frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $M_3 = \max\{1/2, a/2, \beta C_3\}$ olmak üzere,

$\frac{d}{dt}E_w(t) \leqslant \frac{\tilde{d}^2 A_3}{2} + M_3 E_w(t)$ diferansiyel eşitsizlik yazılabilir. Gronwall eşitsizliğinden

$E_w(t) \leqslant \frac{e^{M_3 t} A_3 t}{2}\tilde{d}^2, \qquad \forall t \in [0,T]$ elde edilir. Bu da istenilen sonuçtur.

4.1.3. α Katsayısı için sürekli bağımlılık

Bu bölümde (4.1)-(4.3) probleminin çözümünün α katsayısı için sürekli bağımlılığı incelenecektir.

u,

$$u_{tt} - \Delta u - a\Delta u_{tt} + b\Delta^2 u - d\Delta u_t + \alpha |u_t|^{m-2} u_t + \beta |u|^{p-2} u = 0 \tag{4.25}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega \tag{4.26}$$

$$u = \Delta u \equiv 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \tag{4.27}$$

probleminin çözümü olsun. v ise,

$$v_{tt} - \Delta v - a\Delta v_{tt} + b\Delta^2 v - d\Delta v_t + (\alpha + \tilde{\alpha}) |v_t|^{m-2} v_t + \beta |v|^{p-2} v = 0$$

$$v(x,0) = u_0(x), \qquad v_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega$$

$$v = \Delta v \equiv 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$$

probleminin çözümü olsun.

Bu iki problemin farkı $w = u - v$ olmak üzere,

$$w_{tt} - \Delta w - a\Delta w_{tt} + b\Delta^2 w - d\Delta w_t + \alpha(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t) - \tilde{\alpha} |v_t|^{m-2} v_t$$

$$+\beta(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) = 0 \tag{4.28}$$

$$w(x,0) = 0, \qquad w_t(x,0) = 0 \qquad x \in \Omega \tag{4.29}$$

$$w=\Delta w\equiv 0 \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T] \tag{4.30}$$

problemini sağlar.

Teorem 4.1.3. Problem (4.28)-(4.30)'un bir çözümü w olsun. Dolayısıyla w, M_4 ve A_3 problemin başlangıç verilerine ve parametrelerine bağlı pozitif sabitler olmak üzere,

$$\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2+\frac{a}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2\leqslant\frac{e^{M_4t}A_3^{m-1}C}{2}\tilde{\alpha}^2$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat 4.1.3. Denklem (4.28)'i w_t ile $L^2(\Omega)$'da çarptığımızda,

$$(w_t,w_{tt})-(w_t,\Delta w)-a(w_t,\Delta w_{tt})+b(w_t,\Delta^2 w)-d(w_t,\Delta w_t)$$
$$-\tilde{\alpha}\int_\Omega |v_t|^{m-2}v_t w_t dx+\alpha(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t,w_t)+\beta\int_\Omega(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v)w_t dx=0$$

elde edilir. Yani,

$$E_w(t)=\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2+\frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2+\frac{a}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2$$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}E_w(t)+d\|\nabla w_t(t)\|^2+\alpha(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t,w_t)\leqslant\left|\tilde{\alpha}\int_\Omega|v_t|^{m-2}v_t w_t dx\right|$$
$$+\left|\beta\int_\Omega(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v)w_t dx\right| \tag{4.31}$$

dır.

$\left|\beta\int_\Omega(|u|^{p-2}u-|v|^{p-2}v)w_t dx\right|\leqslant\beta C_3\|\nabla w(t)\|^2+\dfrac{\|w_t(t)\|^2}{2}$ olduğu (3.33)' de gösterilmiştir. Ayrıca $(|u_t|^{m-2}u_t-|v_t|^{m-2}v_t,w_t)\geqslant 0$ olduğu Teorem 4.1.1'de elde edilmiştir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim için bir üst sınır elde edilirse; $2 < m \leqslant \dfrac{2n-2}{n-2}$ ve C bir Sobolev sabiti olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\left| \tilde{\alpha} \int_\Omega |v_t|^{m-2} v_t w_t dx \right| &\leqslant \tilde{\alpha} \int_\Omega |v_t|^{m-1} w_t dx \\
&\leqslant \tilde{\alpha} \| w_t(t) \| \| v_t(t) \|_{2(m-1)}^{m-1} \\
&\leqslant \frac{1}{2} \| w_t(t) \|^2 + \frac{\tilde{\alpha}^2}{2} C \| \nabla v_t(t) \|^{2(m-1)}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

(4.31) yeniden düzenlenirse ve $\dfrac{b}{2} \| \Delta w(t) \|^2$ pozitif terimi eşitsizliğin sağ tarafına eklenirse

$$
\frac{d}{dt} E_w(t) \leqslant \frac{1}{2} \| w_t(t) \|^2 + \frac{\tilde{\alpha}^2}{2} C \| \nabla v_t(t) \|^{2(m-1)} + \beta C_3 \| \nabla w(t) \|^2 + \frac{\| w_t(t) \|^2}{2} + \frac{b}{2} \| \Delta w(t) \|^2
$$

olacaktır.

Dolayısıyla, $M_4 = \max\{1, 1/2, \beta C_3\}$ olmak üzere,

$\dfrac{d}{dt} E_w(t) \leqslant M_4 E_w(t) + \dfrac{\tilde{\alpha}^2}{2} C A_3^{m-1}$ diferansiyel eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla istenilen sonuç,

$$
E_w(t) \leqslant \frac{e^{M_4 t} A_3^{m-1} C}{2} \tilde{\alpha}^2
$$

bulunur. Yani, $\tilde{a} \to 0$ olduğunda $\forall t \in [0, T]$ için $w \to 0$ olacaktır.

4.1.4. β Katsayısı için sürekli bağımlılık

Bu bölümde (4.1)-(4.3) probleminin çözümünün β katsayısına sürekli bağımlılığı incelenecektir.

u fonksiyonu,

$$u_{tt} - \Delta u - a\Delta u_{tt} + b\Delta^2 u - d\Delta u_t + \alpha |u_t|^{m-2} u_t + \beta |u|^{p-2} u = 0 \tag{4.32}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega \tag{4.33}$$

$$u = \Delta u \equiv 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], T > 0 \tag{4.34}$$

probleminin çözümü olsun. v ise,

$$v_{tt} - \Delta v - a\Delta v_{tt} + b\Delta^2 v - d\Delta v_t + \alpha |v_t|^{m-2} v_t + (\beta + \tilde{\beta}) |v|^{p-2} v = 0$$

$$v(x,0) = u_0(x), \qquad v_t(x,0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega$$

$$v = \Delta v \equiv 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]$$

probleminin çözümü olsun.

Dolayısıyla $w = u - v$,

$$w_{tt} - \Delta w - a\Delta w_{tt} + b\Delta^2 w - d\Delta w_t + \alpha(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t) + \beta(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v)$$
$$-\tilde{\beta} |v|^{p-2} v = 0 \tag{4.35}$$

$$w(x,0) = 0, \qquad w_t(x,0) = 0 \qquad x \in \Omega \tag{4.36}$$

$$w = \Delta w \equiv 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], T > 0 \tag{4.37}$$

probleminin çözümü olur.

(4.35), w_t ile $L^2(\Omega)$'da çarpıldığında

$$(w_t, w_{tt}) - (w_t, \Delta w) - a(w_t, \Delta w_{tt}) + b(w_t, \Delta^2 w) - d(w_t, \Delta w_t) + \int_\Omega (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) w_t dx$$
$$+\tilde{\beta}\int_\Omega |v|^{p-2} v w_t dx = 0$$

dır. Teorem 4.1.'deki benzer işlemlerle hesap yapıldığında,

$$E_w(t) = \frac{1}{2}\| w_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2 + \frac{a}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dt}E_w(t) \leqslant \beta \left| \int_\Omega (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) w_t dx \right| + \tilde{\beta}\left| \int_\Omega |v|^{p-2} v w_t dx \right|$$ eşitsizliği elde edilir.

Eşitsizliğin sağ tarafı için bir üst sınır,

$$\left| \tilde{\beta}\int_\Omega |v|^{p-2} v w_t dx \right| \leqslant \tilde{\beta}\| w_t(t)\| \| v(t)\|_{2(p-1)}^{p-1} \leqslant \frac{1}{2}\| w_t(t)\|^2 + \frac{\tilde{\beta}}{2} C_2 \|\nabla v(t)\|^{2(p-1)}$$

olarak bulunur. Bununla birlikte,

$$\left| \beta\int_\Omega (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) w_t dx \right| \leqslant \beta C_3 \|\nabla w(t)\|^2 + \frac{\| w_t(t)\|^2}{2}$$ olduğu (3.33)'de

gösterilmişti. Dolayısıyla,

$$\frac{d}{dt}E_w(t) \leqslant \frac{1}{2}\| w_t(t)\|^2 + \frac{\tilde{\beta}}{2} C_2 \|\nabla v(t)\|^{2(p-1)} + \beta C_3 \|\nabla w(t)\|^2 + \frac{\| w_t(t)\|^2}{2} + \frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2$$

olur. $M_5 = \max\{1, \beta C_3\}$ olmak üzere $\frac{d}{dt}E_w(t) \leqslant M_5 E_w(t) + \frac{\tilde{\beta}}{2} C_2 A_1^{(p-1)}$ elde edilir.

Buradan da

$$E_w(t) \leqslant \frac{e^{M_5 t} C_2 A_1^{p-1} t}{2} \tilde{\beta} \tag{4.38}$$

bulunur. Böylelikle aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 4.1.4. Teorem 4.1.'in koşulları sağlandığında, (4.35)-(4.37) probleminin çözümü β katsayısına sürekli bağımlıdır. Bununla birlikte, (4.38) eşitsizliği geçerlidir.

4.1.5. Tüm parametrelere aynı anda bağımlılık

Bundan önceki kısımlarda çözümün her bir parametreye göre sürekli bağımlılığı ayrı ayrı ispatlandı. Bu bölümde ise çözümün bütün parametrelere aynı zamanda sürekli bağımlı olup olmadığı incelenecektir. Yani bütün parametreler aynı anda değiştiğinde çözümde nasıl bir değişikliğin meydana geldiği araştırılacaktır.

u fonksiyonu,

$$u_{tt} - \Delta u - a_1 \Delta u_{tt} + b\Delta^2 u - d_1 \Delta u_t + \alpha_1 |u_t|^{m-2} u_t + \beta_1 |u|^{p-2} u = 0 \tag{4.39}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \tag{4.40}$$

$$u = \Delta u \equiv 0 \tag{4.41}$$

başlangıç sınır değer probleminin çözümü olsun.

v de aynı başlangıç sınır koşulları altında olmak üzere,

$$v_{tt} - \Delta v - a_2 \Delta v_{tt} + b\Delta^2 v - d_2 \Delta v_t + \alpha_2 |v_t|^{m-2} v_t + \beta_2 |v|^{p-2} v = 0$$

$$v(x,0) = u_0(x), \qquad v_t(x,0) = u_1(x)$$

$$v = \Delta v \equiv 0$$

probleminin çözümü olsun.

$w = u - v, a = a_1 - a_2, d = d_1 - d_2, \alpha = \alpha_1 - \alpha_2, \beta = \beta_1 - \beta_2$

olmak üzere yeni problem,

$$w_{tt} - \Delta w \ - a_1 \Delta w_{tt} - a \Delta v_{tt} + b \Delta^2 w - d_1 \Delta w_t - d \Delta v_t + \alpha_1 (|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t)$$
$$+\alpha |v_t|^{m-2} v_t + \beta_1 (|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v) + \beta |v|^{p-2} v = 0 \qquad (4.42)$$
$$w(x,0) = 0, \qquad w_t(x,0) = 0 \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \qquad (4.43)$$
$$w = \Delta w \equiv 0 \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \qquad (4.44)$$

dır.

Teorem 4.1.5. (4.42)-(4.44) probleminin bir çözümü w olsun. Böylece w, (4.4)-(4.7) koşulları altında denklemin a, b, α, β katsayılarına sürekli bağımlıdır.

İspat 4.1.5. (4.42) denklemi w_t ile çarpıldığında ve Teorem 4.1'deki benzer işlemlerle

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2 + \frac{a_1}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2\Big] + a(\nabla w_t, \nabla v_{tt}) + d_1\|\nabla w_t(t)\|^2$$
$$+d(\nabla w_t, \nabla v_t) + \alpha_1(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t, w_t) + \alpha(|v_t|^{m-2} v_t, w_t) + \beta_1(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v, w_t)$$
$$+\beta(|v|^{p-2} v, w_t) = 0$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\|w_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|^2 + \frac{a_1}{2}\|\nabla w_t(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|\Delta w(t)\|^2\Big] + d_1\|\nabla w_t(t)\|^2$$
$$+\alpha_1(|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t, w_t) \leqslant |a(\nabla w_t, \nabla v_{tt})| + |d(\nabla w_t, \nabla v_t)| + |\alpha(|v_t|^{m-2} v_t, w_t)|$$
$$+ |\beta_1(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v, w_t)| + |\beta(|v|^{p-2} v, w_t)| \qquad (4.45)$$

olur.

Şimdi eşitsizliğin sağ tarafı için üst sınırlar elde etmek için Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla,

$$|a(\nabla w_t, \nabla v_{tt})| \leqslant \frac{a^2 \|\nabla v_{tt}\|^2}{2} + \frac{\|\nabla w_t(t)\|^2}{2}.$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla

$$|d(\nabla w_t, \nabla v_t)| \leqslant \frac{d^2 \|\nabla v_t(t)\|^2}{2} + \frac{\|\nabla w_t(t)\|^2}{2}.$$

ϵ-Young ve Sobolev eşitsizliği yardımıyla $m, p \leqslant \dfrac{2n-2}{n-2}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} |(|v_t|^{m-2} v_t, w_t)| &\leqslant \int |v_t|^{m-2} |v_t| |w_t| \, dx \\ &\leqslant \| v_t(t) \|_{2(m-1)}^{m-1} \| w_t(t) \| \\ &\leqslant d_0^{m-1} \| \nabla v_t(t) \|^{m-1} \| w_t(t) \| \\ &\leqslant \alpha d_0^{m-1} A_3^{\frac{m-1}{2}} + \frac{1}{4\alpha} \| w_t(t) \|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$|(|v|^{p-2} v, w_t)| \leqslant \beta d_1^{p-2} A_1^{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{4\beta} \| w_t(t) \|^2$$

dır.

Ayrıca, $\int_\Omega (|u_t|^{m-2} u_t - |v_t|^{m-2} v_t) w_t dx \geqslant 0$ olduğu Teorem 4.1.1. de ispat edilmiştir. $|(|u|^{p-2} u - |v|^{p-2} v, w_t)| \leqslant C_3 \|\nabla w(t)\|^2 + \dfrac{1}{2\beta_1} \|w_t(t)\|^2$ olduğu da (3.33)'de gösterilmişti. Dolayısıyla,

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \| w_t \|^2 + \frac{1}{2} \| \nabla w \|^2 + \frac{a_1}{2} \| \nabla w_t \|^2 + \frac{b}{2} \| \Delta w \|^2$$

olmak üzere (4.45) düzenlendiğinde ve bulduğumuz kestirimler yardımıyla

$$\frac{d}{dt} E_w(t) \leqslant M_2 E_w(t) + B$$

olduğu görülür. Burada $M_2 = \max\{1/2, 1, \beta_1 C_3, a_1/2, 1+d_1\}$ ve $B = \frac{a^2}{2} A_4 + \frac{d^2}{2} A_3 + \alpha^2 d_0^{m-1} A_3^{\frac{m-1}{2}} + \beta^2 d_1^{p-2} A_1^{\frac{p-1}{2}}$ dır. Bu diferansiyel eşitsizlik çözüldüğünde $E_w(t) \leqslant Bte^{M_2 t}$ olacaktır.

Bu da gösteriyor ki $\forall t \in [0,T]$ için tüm katsayılar aynı anda $a \to 0, d \to 0, \alpha \to 0, \beta \to 0$ olduğunda $w \to 0$ olacaktır.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde enerji metodu kullanılarak doğrusal olmayan Klein-Gordon denkleminin tüm katsayılarına olan sürekli bağımlığı, çift dispersif disipatif terim içeren dalga denkleminin ise a, d, α ve β katsayılarına olan sürekli bağımlığı ispatlanmıştır. Bununla birlikte her iki problemin çözümlerinin tüm katsayılara aynı anda sürekli bağımlılığı da ispatlanmıştır.

Çift dispersif terimli dalga denkleminin b dispersif katsayısı için sürekli bağımlılık sonucu enerji metodu ile bulunamamıştır. Çünkü $\| \Delta w_t(t) \|^2$ kestirimi kullanılan metot yardımı ile elde edilememiştir. Problemin katsayılarına olan sürekli bağımlılık konusu bir çok lineer olmayan kısmi türevli denklemler için enerji metodu ile uygun uzaylarda incelenebilinir.

KAYNAKLAR

[1] Yaman, M., Gür, Ş., Continuous dependence for the damped nonlinear hyperbolic equation. Math. comput. appl., 16(2), 437-442, 2011.

[2] Gür, Ş., Güleç, I., Continuous dependence of solutions to fourth-order nonlinear wave equation. Hacet. J. Math Stat., 45, 367-371, 2016.

[3] Harfash, A.J., Continuous dependence on the coefficients for double diffusive convection in Darcy flow with magnetic field effect. Anal. Math. Phys., 163-181, 2013.

[4] Lin, C., Payne, L.E., Continuous dependence on the Soret coefficient for double diffusive convection in Darcy flow. J. Math. Anal. Appl., 342, 311-325, 2008.

[5] Payne, L.E., Straughan, B., Convergence and continuous Dependence for the Brinkman-Forchheimer equations. Studies in Applied Maths., 102, 419-439, 1999.

[6] Çelebi, A.O., Kalantarov, V.K., Decay of solutions and structural stability for the coupled Kuramoto-Sivashinsky-Ginzburg-Landau equations. Applicable Anal., 94(11), 2342-2354, 2015.

[7] Çelebi, A.O., Gür, Ş., Kalantarov, V.K., Structural stability and decay estimate for marine riser equations. Math. Comput. Model., 11-12, 3182-3188, 2011.

[8] Ames, K.A., Straughan, B., Non-Standard and improperly posed problems. Mathematics in Science and Engineering Series. Academic Press, New York, 194, 1997.

[9] Ball, J.M., Finite time blow-up in nonlinear problems. In M.G. Crandall, editor, Academic Press, New York, Nonlinear Evolution Equations, 189-205, 1978.

[10] Cazenave, T., Haraux, A., An Introduction to Semilinear Evolution Equations. Oxf. Lec. S. Math. Appl., 13, 1998.

[11] Ginibre, J., Velo, G., The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation. Ann. I. H. Poincare-An., 6, 15-35, 1989.

[12] Klainerman, S., Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in four space-time dimensions. Commun. Pur. Appl. Math., 38, 631-641, 1985.

[13] Lions, J.L., Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires. Paris, 1969.

[14] Pecher, H. β L^p-Abschatzungen und klassiche Losungen für nichtlineare Wellengleichungen. I , Math. Z., 150, 159-183, 1976.

[15] Strauss, W.A., Nonlinear Wave Equations., CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC., AMS, Providence, RI, 73, 1989..

[16] Strauss, W.A., Nonlinear scattering theory at low energy. J. Funct. Anal., 41, 110-133, 1981.

[17] Cazenave, T., Uniform estimates for solutions of nonlinear Klein-Gordon equations. J. Funct. Anal., 1, 36-55, 1985..

[18] Gao, P., Guo, B.L., The time-periodic solution for a 2D dissipative Klein Gordon equation. J. Math. Anal. Appl., 296: 286-294, 2004.

[19] Ha, T.G., Park, J.Y., Global existence and uniform decay of a damped Klein-Gordon equation in a noncylindrical domain. Nonlinear Anal., 74, 577-584, 2011.

[20] Avrin, J.D., Convergence properties of the strongly damped nonlinear KleinGordon equation. J. Differ. Equations, 67, 243-255, 1987.

[21] Xu, R., Ding, Y., Global solutions and finite time blow up for damped Klein-Gordon Equation, Acta Math. Sci., 33B, 643-652, 2013.

[22] Samsonov, A.M., Sokurinskaya, E.V., Energy Exchange Between Nonlinear Waves in Elastic Waveguides and External Media. In: Engelbrecht P.J. (eds) Nonlinear Waves in Active Media., Research Reports in Physics., Springer, Berlin, Heidelberg, 1989.

[23] Samsonov, A.M., Nonlinear Strain Waves in Elastic Waveguides. In: Jeffrey A., Engelbrecht J. (eds) Nonlinear Waves in Solids. CISM Courses and Lectures (International Centre for Mechanical Sciences), 341, Springer, Vienna, 1994.

[24] Dodd, R. et al., Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, 1984.

[25] Samsonov, A.M., On existence of longitudinal strain solutions in an infinite nonlinearly elastic rod, Soviet Phys. Dokl. 4, 298-300, 1988.

[26] Di, H., Shang, Y., Global existence and asymptotic behavior of solutions for the double dispersive-dissipative wave equation with nonlinear damping and source terms. Boundary Value Problems, 29, 2015.

[27] Gursky, V.V., Samsonov, A.M., Symmetries and exact solutions to a nonlinear doubly dispersive equation with dissipation. Conference: Day on Diffraction, Proceedings, International Seminar., 2001.

[28] Runzhang, X., Yacheng, L., Tao, Y., Global existence of solution for Cauchy problem of multidimensional generalized double dispersion equations, Nonlinear Analysis, 71(10), 4977-4983, 2009..

[29] Shubin, W., Guowang, C., Cauchy problem of the generalized double dispersion equation. Nonlinear Analysis. 64(1), 159-173, 2006..

[30] Guowang, C., Yanping, W., Shubin, W., Initial boundary value problem of the generalized cubic double dispersion equation. J. Math. Anal. Appl., 299(2), 563-577, 2004.

[31] Gur, S., Uysal, M.E., Continuous dependence of solutions to the strongly damped nonlinear Klein-Gordon equation. Turk J. Math., 42: 904-910, 2018.

[32] Kesevan, S., Topics in functional analysis and applications. John Wiley Sons, India, 1989.

[33] Evans, L.C., Partial differential equations., Graduate studies in mathematics, vol 19, 1998.

[34] Adams, R.A., Fournier, J.J.F., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 2003.

[35] Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations, Springer, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Mesude Elif Uysal, 08.08.1987’de İstanbul’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İstanbul’da tamamladı. 2005 yılında Erenköy (yabancı dil ağırlıklı) Kız Lisesi’nden mezun oldu. 2006 yılında başladığı Yeditepe Üniversitesi Matematik Bölümü’nü 2010 yılında bitirdi. 2010 yılında Yeditepe Üniversitesi Matematik Bölümü’nde Bütünleşik Doktora eğitimine başladı. 2012-2013 yılı arası Yeditepe Üniversitesinde Araştırma Görevliliği yaptı. 2016 yılında yatay geçiş ile Sakarya Üniversitesi’nde Doktora eğitimine devam etmektedir. Ayrıca evli ve 1 çocuk annesidir.