T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bİ-İZOTONİK UZAYLARDA İKİLİ KOMPAKTLIK

YÜKSEK LİSANS

Seval KOCA

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalı

KASIM 2023

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bİ-İZOTONİK UZAYLARDA İKİLİ KOMPAKTLIK

YÜKSEK LİSANS

Seval KOCA

Matematik

Topoloji

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Soley ERSOY

KASIM 2023

Seval Koca tarafından hazırlanan “Bi-izotonik uzaylarda kompaktlık” adlı tez çalışması 23.11.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Topoloji Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı :	**Prof.Dr.Emrah Evren Kara** Düzce Üniversitesi
Jüri Üyesi :	**Prof.Dr.Soley Ersoy** (Danışman)
Jüri Üyesi :	**Doç.DrMahpeyker Öztürk.** Sakarya Üniversitesi

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum "Bİ-İZOTONİK UZAYLARDA İKİLİ KOMPAKTLIK" başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

23/11/2023

Seval KOCA

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesini hiçbir zaman esirgemeyen, öğrettiği ilke ve etikleri meslek hayatımda daima prensip sayacağım, çalışmamın tüm evrelerinde her bakımdan desteğini hep arkamda hissettiğim sayın hocam Prof. Dr. Soley ERSOY'a şükran ve saygılarımı sunarım. Tüm eğitim hayatım boyunca olduğu gibi bu tez çalışmasında da maddi manevi desteklerini hiç eksik etmeyen başta çok kıymetli aileme ve sevgili arkadaşım Dr. Arzu SÜREKÇİOĞLU' na teşekkürü bir borç bilirim.

Seval KOCA

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

$\mathscr{D}$	: $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ uzayında X ’in ikili açık örtüsü
$\mathscr{D}_i$	: (X, cl_i) uzayında X ’in açık örtüsü
$\mathbf{cl}_1\mathbf{cl}_2(\boldsymbol{A})$	: $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ uzayında A kümesinin kapanışı
$\mathbf{cl}_i(\boldsymbol{A})$	: (X, cl_i) uzayında A kümesinin kapanışı
$\mathscr{F}$	: ikili kapalı kümelerin ailesi
$\mathscr{F}_{\mathbf{cl}_i}$	: cl_i kapalı kümelerin ailesi
$\mathbf{int}_1\mathbf{int}_2(\boldsymbol{A})$	: $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ uzayında A kümesinin içi
$\mathbf{int}_i(\boldsymbol{A})$	: (X, cl_i) uzayında A kümesinin içi
$\mathscr{N}(\boldsymbol{x})$	: $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ uzayında x noktasının ikili komşuluklar ailesi
$\mathscr{N}_i(\boldsymbol{x})$	: (X, cl_i) uzayında x noktasının komşuluklar ailesi
$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})$	: Kuvvet kümesi
$(\boldsymbol{X}, \mathbf{cl})$	: İzotonik uzay
$(\boldsymbol{X}, \mathbf{cl}_1, \mathbf{cl}_2)$	: Bi-izotonik uzay
$(\boldsymbol{X}, \mathcal{T})$	: Topolojik uzayı
$(\boldsymbol{X}, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$	: Bitopolojik uzay

Bİ-İZOTONİK UZAYLARDA İKİLİ KOMPAKTLIK

ÖZET

Bu tez çalışması, bi-izotonik uzayların ikili kompaktlığını tanıtmayı ve özelliklerini araştırmayı amaçlayan beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm, mevcut literatürün özetine ayrılmıştır. Ayrıca, temel kavramların açıklandığı ikinci ve üçüncü bölümlerde bitopolololojik uzaylar ile bi-izotonik uzaylara dair bilinen topolojik kavramlar detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Bu uzaylarda daha önce yapılan araştırmaların sonuçları, yeni tanımlamalar ve incelemeler için temel oluşturacak şekilde özetlenmiştir.

İlk bölüm, tez konusuyla ilgili yapılan çalışmaların tarihsel gelişimini detaylı olarak sunmaktadır. Bu bölümde, bitopolojik uzay ve bi-izotonik uzay kavramlarının literatüre kazandırılma süreçleri ile araştırmacıların ikili yapıların olduğu bu uzaylarda kavramları hangi bakış açıları ile ele aldıkları açıklanmıştır. Dahası bitopolojik uzaylarda kompaktlığın alternatif tanımlarının verilme ve bu tanımların karşılaştırılma süreci paylaşılmıştır. Bu bağlamda, tez konusu için öncü çalışmalar ve bu konuda ortaya konan önemli sonuçlar ile ilgili bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde $\left(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\right)$ bitopolojik uzaylarının temel tanımları, bitopolojik uzaylar arasında tanımlanan dönüşümlerin sürekliliği ve bitopolojik uzaylarda ayırma aksiyomlarının genellemelerine yer verilmiştir. Ayrıca, bitopolojik uzaylarda kompaklık kavramı tezimizin orijinal tanım ve bulguları için ilham kaynağı olduğundan ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayların tanımı ve kapanış fonksiyonunun özellikleri ile birlikte alt uzay, süreklilik ve ayırma aksiyomları gibi temel kavramların bi-izotonik uzaylarda nasıl şekillendiğini gösteren ilgili tanım ve teoremler sunulmuştur.

Son olarak dördüncü bölüm bu tezin orijinal kısmı olup bu tezin ikinci ve üçüncü bölümünde verilen bitopolojik uzaylar ve bi-izotonik uzaylara ilişkin temel bilgiler ışığında $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$. bi-izotonik uzaylarında $\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2$ örtü tanımı verilip bu tanımdan faydalanarak bi-izotonik uzaylarda ilk kez ikili kompaktlık kavramı tanımlanmıştır. İkili kompaktlığın karakterizasyonlarının yanı sıra alt uzaylar nasıl tanımlandığı bi süreklilik altında nasıl korunduğu gibi temel sorulara yanıtlar verilmiştir.

Bu tez çalışmasından elde edilen tüm sonuçlar beşinci bölümde özetlenmiş ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

Sonuç olarak bi-izotonik uzaylarda bağlantılılık ve ayrıma aksiyomları gibi bilinen kavramlara ek olarak kompaktlığın da tanımlanmasıyla elde edilecek bulguların manifold teorisi gibi alanları etkilemesi beklenmektedir. Ayrıca oldukça yeni bir kavram olan bi-izotonik uzaylar, farklı yoğunlukları olan altkümeleriyle dikkat çeken bir yapıya sahip olup, matematiksel analizin de ilgi alanındadır. Bu çalışma, bu özel uzay türünün daha iyi anlaşılmasını sağlayarak matematiksel analizdeki genel bilgi birikimine katkıda bulunacaktır. Böylece bi-izotonik uzaylarda ikili kompaktlık

kavramı ilgili diğer bilim alanlarına da yeni bir bakış açısı kazandıracaktır. Elde edilecek sonuçlar, bi-izotonik uzayların kompaktlık özelliklerinin daha derinlemesine incelenmesi, teorik ve uygulamalı matematik alanlarında yeni keşiflere ve gelişmelere yol açacak önemli bir adım olacaktır. Daha çok bir ifade ile bulgularımız matematiksel teorilerin temellerini güçlendirirken bu uzayların uygulama alanları olan diğer disiplinlere de ışık tutacaktır. Ayrıca, bu çalışmanın elde edeceği sonuçlar, ileri araştırmalara yön verecek ve bu alandaki gelecekteki çalışmalar için önemli bir temel oluşturacaktır.

COMPACTNESS IN BI-ISOTONIC SPACES

SUMMARY

This thesis study consists of five sections aiming to introduce the pairwise compactness of bi-isotonic spaces and investigate their properties. The sections explaining key concepts provide essential information on bi-isotonic spaces, bitopological spaces, and pairwise compactness in bitopological spaces and summarize the results of previous research on related subjects.

The first section presents a detailed literature review related to the thesis topic. The objective of this section is to extensively discuss previous studies and significant findings regarding bi-isotonic spaces and the theory of compactness. The literature review aims to provide the readers with a broad perspective by presenting the foundational reference points that constitute the basis of the thesis. In this context, the pioneering studies related to the bi-isotonic and bitopological spaces and the significant results achieved are thoroughly expressed. The presentation of the literature aims to deepen the existing knowledge, emphasize the context and importance of the research questions and objectives of the thesis, and highlight the innovative contribution of the thesis in this field. The first section enables readers to understand the scope of the thesis, identify gaps in the literature, and recognize the thesis's endeavor to fill these gaps. Thus, it provides a better context for the analysis and conclusions to be presented in the subsequent sections.

The second section is a comprehensive chapter that examines the fundamental definitions and properties of a bitopological space which was defined by Kelly in 1962, such as a triple $\left(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2\right)$ where $\mathcal{T}_1$ and $\mathcal{T}_2$ are topologies on a non-empty set X. This section offers information for in-depth insights into bitopological spaces and contributes to understanding more advanced concepts in bi-isotonic spaces. Bitopological spaces are a class derived from general topological spaces, possessing additional structure and properties. In this section, the basic definitions of bitopological spaces are taken as a starting point. These definitions show that bitopological spaces give a more effective way to study the relationships and properties of points in space by considering two different topological structures, thus open sets or neighborhoods. This section also elaborates on how mappings between bitopological spaces are defined, their impact on their continuity properties, and the generalizations of separation axioms in bitopological spaces. To provide a solid foundation on bi-isotonic spaces, this section thoroughly examines the relationships between bitopological spaces and topological spaces, as well as the comparative analysis of different classes of bitopological spaces, which are also included in this section.

The third section provides a detailed explanation of fundamental concepts and theorems concerning the bi-isotonic spaces and subspaces, continuity, and separation axioms in these spaces. Bi-isotonic spaces are particular spaces defined as follows: A

generalized bi-closure space $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ is called bi-isotonic space where $\mathrm{cl}_1 \colon P(X) \to P(X)$ and $\mathrm{cl}_2 \colon P(X) \to P(X)$ defined on the power set $P(X)$ of a non-empty set X are the closure operators satisfying only the grounded and isotony axioms. In topological spaces, a closure operator is well-known as a mathematical operation satisfying each Kuratowki axiom. However, if an operator satisfies only the grounded axiom $\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing$ and isotony axiom $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$ for all $A, B \in P(X)$ it is called isotony operator. In that way, in the bi-isotonic spaces the operators $\mathrm{cl}_1 \colon P(X) \to P(X)$, and $\mathrm{cl}_2 \colon P(X) \to P(X)$ are isotonic. This allows us to construct two structures on a space generalizing bitopological spaces by these isotony operators. This relatively new definition of bi-isotonic space in the realm of topology leads to define more general concepts in the area. As can be seen from this definition, bi-isotonic spaces exhibit differences in density among their subsets. This concept allows for the mathematical investigation of the existence of subsets with different densities in a space. This section also covers fundamental concepts and theorems related to subspaces, continuity, and separation axioms in bi-isotonic spaces. Subspaces refer to the condition where subsets of a bi-isotonic space also form bi-isotonic spaces. Bi-continuity signifies the specific continuity properties of transformations in a bi-isotonic space. Separation axioms imply the properties of bi-isotonic spaces that separate points via their neighborhoods. Consequently, the definition of bi-isotonic spaces, their specific properties, and explanations through examples constitute a stage for the original contributions and serve the main objective of the thesis by emphasizing the importance of bi-isotonic spaces in mathematical analysis. The foundational information presented in this section facilitates the comprehension of the analysis and conclusions to be presented in the subsequent sections, contributing to the narrative structure of the thesis.

The fourth section constitutes the most significant and original part of the thesis based on the foundational information provided in previous sections on bitopological and bi-isotonic spaces. Three different pairwise compactness definitions are given such as pairwise S-compactness referring to the study of Swart (1971); pairwise B-compactness referring to the study of Birsan (1969); and pairwise FHP- compactness based on the study of Fletcher, Hoyle ve Patty (1969). From these three definitions, it is seen that if a bi-isotonic space is

pairwise S-compact $\Rightarrow$ pairwise B-compact $\Rightarrow$ pairwise FHP- compact.

In that regard, pairwise S-compact bi-isotonic space is studied, and it is called only pairwise compact bi-isotonic space in the rest of the thesis. Then new definitions and theorems are stated on pairwise compact subsets of bi-isotonic space. Also, the relationship between pairwise compactness and pairwise Hausdorff spaces is investigated. However, a new situation occurs that the relationship between pairwise compactness and pairwise Hausdorff spaces in bitopological spaces does not exist in bi-isotonic spaces. It is proved that the space has to be a biclosure space. Additionally, the relationship between pairwise compactness and limit points in bi-isotonic spaces is studied. Related theorems are expressed and proved. Finally, it is found whether the pairwise compactness is preserved under bi-continuity or not. Thus, it is seen that pairwise compactness is a topological property in bi-isotonic spaces. These main results in this section make a valuable contribution to the literature by providing a new perspective on the compactness theory. A more detailed understanding of the compactness properties of bi-isotonic spaces paves the way for further research and advancements in the field of mathematical analysis.

This thesis study aims to provide a significant contribution to the pairwise compactness of bi-isotonic spaces, thereby supporting the advancement of research in this area within mathematical analysis. By improving the understanding of this particular type of space, this study will contribute to the general knowledge of mathematical analysis. The obtained results will represent a crucial step towards a more in-depth examination of the compactness properties of bi-isotonic spaces, leading to discoveries and advancements in both theoretical and applied mathematics.

1. GİRİŞ

Günümüzde çok değerli bilgi sistemlerinde veri azaltımı veya oyun teorisi gibi alanlarda kullanılan bitopolojik uzaylar, ilk kez 1963'de Kelly tarafından bir X kümesi üzerinde herhangi $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ topolojileri ile donatılmış $\left(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2\right)$ üçlüsü olarak tanımlanmıştır. Bitopolojik uzaylar için başyapıt kabul edilen (Kelly, 1963)'de özellikle nokta-küme ilişkileri, açık, kapalı kümeler gibi birçok bilinen kavramın bitopolojik uzaylardaki doğal genellemeleri verilmiştir ve elde edilen sonuçlar daha sonra yapılan çalışmaları önemli ölçüde etkilemiştir. Aslında bitopolojik uzay terimi ilk kez Motchane tarafından kullanılmış, ancak $\left(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2\right)$ bitopolojik uzayı biri diğerinden daha ince olan veya başka belirli ilişkilerle birbirine bağlı olan $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ topolojileri kullanılarak biraz farklı tanımlamıştır (Motchane, 1957). Eş zamanlı yapılan bir diğer çalışma olan (Weston, 1957)'de ise bir X üzerinde keyfi $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ topolojileri karşılaştırılarak tanımlanmış olan $\left(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2\right)$ üçlüsü için özel bir terim kullanmamıştır. Bu süreçte bitopolojik uzaylar arasında tanımlanan fonksiyonların sürekliliğini açıklamak üzere çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bi-süreklilik kavramı (Reilly, 1972)'de tanımlanmış olmakla birlikte bi-sürekli olması gerekmeyen farklı dönüşüm sınıflarının incelenmesi halen devam etmektedir. Birçok topolojik kavram bu uzaylara kolayca genellenirken bitopolojik uzaylarda kompaktlık kavramının tutarlı bir tanımının yapılması zaman almıştır. Bitopolojik uzaylarda ikili kompaktlık kavramını ifade etmek için ikili açık örtü kavramına ihtiyaç duyulmuştur. Literatürde ikili açık küme tanımı mevcut olmasına rağmen ikili açık örtüyü tanımlamak birçok girişim olmuş ancak bitopolojik uzaylarda örtü kavramının diğer kavramlardan çok daha karmaşık olduğu görülmüştür. Bu süreçte yapılan tanımlamalar sonucu ortaya çıkan bazı yetersizlikler sebebiyle alternatif kompaktlık tanımları verilmiştir. Kompaktlığın bitopolojik uzaylarda (Kim, 1968), (Fletcher ve ark., 1969), (Birsan 1969), (Swart, 1971), (Saegrove, 1973) ve (Phak ve Choi, 1971) tarafından verilen altı farklı tanımı mevcuttur.

İlk olarak $p-$kompaktlık tanımı Kim tarafından 1968 yılında verilmiş ancak bu tanımlamayı yaparken adjoint topoloji adı verilen öncül bir kavram da tanımlanmıştır.

Akabinde 1969 yılında ikili açık örtünün ilk tanımı ve bu tanıma dayalı ikili kompaktlık tanımı ile ilgili karakterizasyonlar Fletcher, Hoyle ve Patty tarafından yapılmıştır.

Fletcher ve arkadaşlarının ikili kompaktlık tanımını yayımladığı tarih ile eş zamanlı olmasına rağmen onlardan bağımsız olarak bir başka ikili kompaktlık tanımı Birsan tarafından verilmiştir. Zaman içinde literatürde çıkabilecek karışıklıkları önlemek adına Birsan anlamında ikili kompaktlık yerine ikili B-kompakt terimi kullanılmıştır. Birsan'ın tanımında ikili kompaktlık ince kavramı ile verilen kompaktlığın doğal bir genişlemesi olarak açıklanmıştır çünkü geçmişte kompaktlığın alt örtü kavramı yerine ince kavramı kullanılarak tanımlandığı bilinmektedir ve bu kavramlar zaman zaman birbirinin yerine kullanılmıştır.

Hem Fletcher ve arkadaşlarının hem de Birsan'ın tanımları $\left(X,\mathcal{T}\right)$ ve $\left(X,\mathcal{Q}\right)$ her ikisi de kompakt ve $\left(X,\mathcal{T},\mathcal{Q}\right)$ bitopolojik uzayı ikili Hausdorff iken $\mathcal{T}=\mathcal{Q}$ olmasını gerektirmiştir. Ancak Swart 1971 yılında bu durumun aksi bir örnek vererek tanımın yetersizliğini göstermiştir. Böylece mevcut tanımları kapsayan Swart anlamında ikili kompaktlık tanımı ortaya çıkmış ve bunun için ikili S-kompakt terimi kullanılmıştır.

İkili açık örtü yerine ikili kapalı aile yardımıyla karakterize edilen ikili kompaktlık kavramı da Phak ve Choi tarafından 1971 yılında sunulmuştur.

E. Čech, Z. Frolík ve M. Katětov'un Topological Spaces isimli baş yapıtında $\mathrm{cl}:P\left(X\right)\to P\left(X\right)$ olarak tanımlanan fonksiyona kapanış fonksiyonu ve $\left(X,\mathrm{cl}\right)$ ikilisine de genelleştirilmiş kapanış uzayı adı verilmiştir (Čech ve ark., 1966). Böylece kapanış fonksiyonunun sağladığı bazı belli özelliklere göre hangi uzayların izotonik, komşuluk, kapanış ya da topolojik uzay olduğu açıklanmıştır (Stadler ve Stadler, 2002). Zaman için topolojik uzayların bitopolojik uzaylara genelleştirilmiş olmasının verdiği ilham ile izotonik uzaylar da bir X kümesi üzerinde sadece belli kapanış aksiyomlarını sağlayan cl_1 ve cl_2 fonksiyonları tanımlamak suretiyle $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzaylar olarak genişletilmiştir (Uysal, 2018, Ersoy ve Erol, 2020). Böylece cl_1 ve cl_2 izotoni fonksiyonları ile birlikte tanımlanan $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayları incelenmiş, bu uzaylarda açık ve kapalı kümelerin tanımı ile küme özellikleri belirtilmiştir. Bi-izotonik uzaylar arasında sürekli ve bi-sürekli dönüşümler tanımlanmış, yine bi-izotonik uzaylarda ayırma aksiyomları tanımlanmıştır (Ersoy ve Erol, 2020). Bu çalışmalara ek olarak bi-izotonik uzaylarda ikili olarak ayrılmış kümeler ve bazı özellikleri incelemiş, bu bilgilere dayanarak ikili bağlantılılık (bağlantısızlık) ve ayrıca bi-izotonik uzaylarda toplam bağlantısızlık kavramları incelenmiştir (Ersoy ve Acet, 2022). Ayrıca, bikapanış veya bitopolojik uzaylarla farklılıkları ifade etmek için bazı örnekler ve karşıt örnekler sunulmuştur (Ersoy ve Acet, 2020).

Bu tez çalışmasında da bitopolojik uzaylarda ikili kompaktlık ile ilgili bilinenler ve bi-izotonik uzayların temel tanım ve teoremleri ışığında bi-izotonik uzaylarda ikili kompaktlık tanımlanacak ve temel özellikleri incelenecektir.

2. BİTOPOLOJİK UZAYLAR

2.1. Temel Kavramlar

Bitopolojik uzay kavramı topolojik uzayları genelleştirmek üzere 1963 yılında Kelly tarafından ayrıntılı olarak tanıtılmıştır. Günümüzde çok değerli bilgi sistemlerinde veri azaltımı veya oyun teorisi gibi alanlarda kullanılan bitopolojik uzayların temel kavramları birçok bilim insanı tarafından farklı şekillerde tanımlanmıştır. Özellikle kompaktlığın tutarlı bir tanımının yapılması zamana almıştır. Bu bölümde bitopolojik uzayların temel kavramlarına yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1. $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ boştan farklı bir X kümesi üzerinde iki farklı topoloji olsun. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ sıralı üçlüsüne bitopolojik uzay denir (Kelly, 1963).

Tanım 2.1.2. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $A=A_1\cup A_2$ olacak şeklinde $A_1\in\mathcal{T}_1$ ve $A_2\in\mathcal{T}_2$ varsa A alt kümesine $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$açık küme denir (Kelly, 1963).

A kümesi $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$açık küme olmak üzere $K=X-A$ tümleyenine $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$kapalı küme denir. Bir başka ifadeyle $K=K_1\cap K_2$ olacak şekilde K_1, $\mathcal{T}_1-$kapalı ve K_2, $\mathcal{T}_2-$ kapalı kümeleri varsa K alt kümesine $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$kapalı küme denir (Kelly, 1963, Lane, 1967).

Uyarı 2.1.1. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayında $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$açık kümelerin ailesi bir topoloji belirtmek zorunda değildir çünkü $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$açık kümelerin keyfi birleşimi $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$açık küme olmasına rağmen sonlu kesişimi genel olarak $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$açık değildir. Dahası $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$kapalı kümelerin keyfi kesişimi $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$kapalı küme olmasına rağmen sonlu birleşimi genel olarak $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$kapalı değildir (Dvalishvili, 2005).

Tanım 2.1.3. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayında herhangi $A \subset X$ alt kümesini kapsayan tüm $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$kapanışı denir ve $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\text{cl}(A)=\bigcap\{F : A\subset F,\ F\ \ \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-\text{kapalı}\}$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde A kümesinin kapsadığı tüm $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$açık kümelerin birleşimine A kümesinin $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-$içi denir ve $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\text{int}(A)=\bigcup\{U : U\subset A, U\ \ \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2-\text{açık}\}$ şeklinde gösterilir (Ravi ve Thivagar, 2006).

Teorem 2.1.1. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bir bitopolojik uzay ve $U,V \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır (Ravi ve Thivagar, 2006);

i) $\mathcal{T}_1\text{int}(U)\subset \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\text{int}(U)$ ve $\mathcal{T}_2\text{int}(U)\subset \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\text{int}(U)$,

ii) $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\text{cl}(U)\subset \mathcal{T}_1\text{cl}(U)$ ve $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\text{cl}(U)\subset \mathcal{T}_2\text{cl}(U)$,

iii) $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\text{cl}(U\cap V)\subset \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\text{cl}(U)\cap \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\text{cl}(V)$,

iv) $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\text{int}(U)\cup \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\text{int}(V)\subset \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\text{int}(U\cup V)$.

Tanım 2.1.5. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayı olsun. $i\in\{1,2\}$ olmak üzere $\mathcal{T}_i^Y=\{A\cap Y : A\in \mathcal{T}_i\}$ aileleri $Y\subset X$ uzayının indirgenmiş alt uzay topolojileridir. $(Y,\mathcal{T}_1^Y,\mathcal{T}_1^Y)$ bitopolojik uzayına da $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayının alt uzayı denir (Dvalishvili, 2005).

2.2. Bitopolojik Uzaylarda Sürekli Dönüşümler

Bu bölümde bitopolojik uzaylar arasında tanımlı dönüşümler tanıtılmış ve bi-süreklilik kavramı ifade edilmiştir.

Tanım 2.2.1. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ ve $(Y,\mathcal{T}_1',\mathcal{T}_2')$ bitopolojik uzay olsun. Bir $i\in\{1,2\}$ için $f:(X,\mathcal{T}_i)\rightarrow(Y,\mathcal{T}_i')$ dönüşümü sürekli (açık, kapalı ya da homeomorfizm) ise $f:(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)\rightarrow(Y,\mathcal{T}_1',\mathcal{T}_2')$ dönüşümü $i-$sürekli ($i-$açık, $i-$kapalı ya da $i-$homeomorfizm) denir (Reilly, 1986).

Tanım 2.2.2. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ ve $(Y,\mathcal{T}_1',\mathcal{T}_2')$ bitopolojik uzay olsun. Eğer $f:(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)\to(Y,\mathcal{T}_1',\mathcal{T}_2')$ dönüşümü hem $1-$sürekli hem de $2-$sürekli ise f dönüşümüne bi-süreklidir denir.

f dönüşümü birebir ve örten olmak üzere f bi-sürekli ve f^{-1} bi-sürekli ise f dönüşümüne bihomeomorfizm denir (Cobzaş, 2013).

Bihomeomorfizmler altında invaryant kalan özellikler bitopolojik özellikler olarak adlandırılır. Böylece herhangi bir $\wp$ bitopolojik özelliğinin $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayında var olması için gerek ve yeter şart $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ uzayına bihomeomorfik olan her bir bitopolojik uzayında da $\wp$ özelliğinin var olmasıdır (Dvalishvili, 2005).

2.3. Bitopolojik Uzaylarda Ayırma Aksiyomları

Tanım 2.3.1. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzay olsun. Eğer her farklı $x,y\in X$ için $x\in A$ ve $y\notin A$ olacak şekilde bir A, $\mathcal{T}_1-$açık kümesi veya $y\in B$ ve $x\notin B$ olacak şekilde bir B, $\mathcal{T}_2-$açık kümesi varsa X bitopolojik uzayı ikili T_0-uzayıdır denir (Murdeshwar and Naimpally, 1966).

Tanım 2.3.2. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzay olsun. Eğer her farklı $x,y\in X$ noktaları için $x\in A$ ve $y\notin A$ olacak şekilde bir A, $\mathcal{T}_1-$açık kümesi ve $y\in B$ ve $x\notin B$ olacak şekilde bir B, $\mathcal{T}_2-$açık kümesi varsa X bitopolojik uzayı ikili $S-T_1-$uzayıdır (Swart anlamında ikili T_1-uzayıdır) denir (Swart, 1971).

Eğer X uzayı $\mathcal{T}_1$ topolojisine göre T_1-uzayı ve $\mathcal{T}_2$ topolojisine göre T_1-uzayı ise X bitopolojik uzayı ikili $R-T_1-$uzayıdır (Reilly anlamında ikili T_1-uzayıdır) denir (Reilly, 1972).

Tanım 2.3.3. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzay olsun. Eğer her farklı $x,y\in X$ noktaları için $A\cap B=\varnothing$ olacak şekilde x noktası içeren bir A, $\mathcal{T}_1-$açık kümesi ve y noktasını içeren bir B, $\mathcal{T}_2-$açık kümesi varsa X bitopolojik uzayı ikili Hausdorff uzayıdır denir (Reilly, 1972).

Tanım 2.3.4. $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayı olsun. Her $x \in X$ noktası $\mathcal{T}_2$ – kapalı kümelerinden oluşan bir $\mathcal{T}_1$ – komşuluk tabanına sahipse $\mathcal{T}_1$ topolojisi $\mathcal{T}_2$ topolojisine göre regülerdir denir (Kelly, 1963).

Eğer X, hem $\mathcal{T}_1$ topolojisi $\mathcal{T}_2$ topolojisine göre regüler hem de $\mathcal{T}_2$ topolojisi $\mathcal{T}_1$ topolojisine göre regüler ise ikili regülerdir (Reilly, 1972).

$(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayı ikili regüler ve ikili $R - T_1 -$ uzayı ise ikili T_3 −uzayıdır denir (Dvalishvili, 2005).

Tanım 2.3.5. $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayı olsun. Eğer $F \cap K = \varnothing$ olacak şekilde herhangi F, $\mathcal{T}_1$ −kapalı ve K, $\mathcal{T}_2$ −kapalı kümeleri verildiğinde $F \subset A$, $K \subset B$ ve $A \cap B = \varnothing$ olacak şekilde A, $\mathcal{T}_1$ – açık ve B, $\mathcal{T}_2$ – açık kümeleri varsa X bitopolojik uzayına ikili normaldir denir (Cobzaş, 2013).

$(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayı ikili normal ve $R - T_1 -$ uzayı ise ikili T_4 −uzayı denir (Dvalishvili, 2005).

2.4. Bitopolojik Uzaylarda İkili Kompaktlık

Bitopolojik uzaylarda ikili açık küme tanımlandıktan sonraki yıllarda ikili kompaktlık tanımında kullanılmak üzere ikili açık örtü kavramını ifade etmek üzere birçok girişim olmuştur ancak bu kavramının diğer kavramlardan çok daha karmaşık olduğu görülmüştür. Bu süreçte ortaya çıkan bazı yetersizlikler sebebiyle alternatif kompaktlık tanımları Kim (1968), Fletcher, Hoyle ve Patty (1969), Birsan (1969), Swart (1971) Saegrove (1973), ve Phak ve Choi (1971) tarafından verilmiştir.

İlk olarak Y. W. Kim tarafından tanımlanan $p -$ kompaktlık, adjoint topoloji adı verilen aşağıdaki öncül kavramın tanımlanmasını gerekli kılmıştır.

Tanım 2.4.1. $(X, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzay ve $V \in \mathcal{T}_2$ boştan farklı bir alt küme olsun. $\mathcal{T}_1(V) = \{\varnothing, X, \{U \cup V, U \in \mathcal{T}_1\}\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir ve bu topoloji $\mathcal{T}_1$ topolojisinin V kümesine göre adjoint topolojisi olarak adlandırılır (Kim, 1968).

Tanım 2.4.2. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzay olsun. X 'in boştan farklı her $V\in\mathcal{T}_2$ alt kümesi için $\mathcal{T}_1(V)$ kompakt ise X bitopolojik uzayı $(1,2)-$kompakttır denir (Kim, 1968).

X bitopolojik uzayı hem $(1,2)-$kompakt hem de $(2,1)-$kompakt ise $p-$kompakt olarak adlandırılır (Kim, 1968).

Bir $(1,2)-$kompakt uzayda, $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$ ise $(X,\mathcal{T}_1)$ topolojik uzayı kompakttır (Kim, 1968).

X 'in $(1,2)-$kompakt ve $p-$kompakt alt kümeleri de benzer şekilde tanımlanır.

Örnek 2.4.1. $\mathbb{R}$ reel sayıların kümesi üzerinde $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$ topolojileri sırasıyla $\{x|x<a\}$ ve $\{x|x<a\}$ kümeleri tarafından üretilen topolojiler olsun. $\mathbb{R}$, $p-$kompakt olmasına rağmen $\mathcal{U}_1$ veya $\mathcal{U}_2$ kompakt değildir (Kim, 1968).

Literatürde bi-süreklilik olarak bilinen kavram aşağıda görüldüğü üzere $p-$süreklilik olarak da adlandırılmıştır.

Tanım 2.4.3. Bir f fonksiyonu $f:(X,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{Q}_1)$ ve $f:(X,\mathcal{T}_2)\to(Y,\mathcal{Q}_2)$ sürekli ise $f:(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)\to(Y,\mathcal{Q}_1,\mathcal{Q}_2)$ fonksiyonu $p-$süreklidir denir (Kim, 1968).

Lemma 2.4.1. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayında $(1,2)-$kompaktlık ve $p-$kompaktlık $p-$sürekli dönüşümler altında değişmez kalır (Kim, 1968).

Lemma 2.4.2. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)-$kompakt olsun. X 'in $\mathcal{T}_1-$kapalı alt kümesi $(1,2)-$kompakttır ve $\mathcal{T}_2-$kapalı özalt kümesi $\mathcal{T}_1-$kompakt ve $(1,2)-$kompakttır (Kim, 1968).

İspat. C, X 'in $\mathcal{T}_1-$kapalı alt kümesi ve $C\subset\bigcup_{i\in I}\{U_i\cup V|U_i\in\mathcal{T}_1,V\in\mathcal{T}_2\}$ olsun. Bu durumda $X=(X-C)\cup\bigcup_{i\in I}(U_i\cup V)$ olur. $X-C\in\mathcal{T}_1$ ve X, $(1,2)-$kompakt olduğundan $X=(X-C)\cup\bigcup_{i=1}^{n}(U_i\cup V)$ sağlanır. Böylece $C\subset\bigcup_{i=1}^{n}(U_i\cup V)$ sağlanır, yani C, $(1,2)-$kompakttır. Teoremin ikinci önermesi de benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 2.4.1. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayı $p-$kompakt ise $i,j\in\{1,2\}$ ve $i\neq j$ olmak üzere $\mathcal{T}_j-$kapalı özalt kümesi $p-$kompakt ve $\mathcal{T}_i-$kompakttır (Kim, 1968).

Lemma 2.4.3. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayı $p-$Hausdorff uzayı olsun. $i\in\{1,2\}$ olmak üzere $\mathcal{T}_i-$Hausdorffluk X 'in $(1,2)-$kompakt alt kümesinin $\mathcal{T}_i-$kapalı olmasını gerektirir (Kim, 1968).

Lemma 2.4.4. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayı $p-$Hausdorff olsun. $i,j\in\{1,2\}$ ve $i\neq j$ olmak üzere X 'in $\mathcal{T}_i-$kompakt alt kümeleri $\mathcal{T}_j-$kapalıdır (Kim, 1968).

Tanım 2.4.4. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzay ve C, X 'in bir alt kümesi olsun. $x\in C$ ve $y\in X-C$ için $x\in U_x$, $y\in V_y$ ve $U_x\cap V_y=\varnothing$ olacak şekilde $U_x\in\mathcal{T}_1$ ve $V_y\in\mathcal{T}_2$ varsa ise $(1,2)-$ayrılmıştır denir.

Bir $p-$Hausdorff bitopolojik uzayında her alt küme $p-$ayrılmıştır (Kim, 1968).

Lemma 2.4.5. Bir $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayında $i\neq j$ olmak üzere $\mathcal{T}_j-$kompakt alt küme $(j,i)-$ayrılmışsa $\mathcal{T}_j-$kapalıdır (Kim, 1968).

Teorem 2.4.2. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayı $(1,2)-$kompakt ve her $\mathcal{T}_2-$kapalı küme $(1,2)-$ayrılmışsa $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$, $(2,1)-$düzenlidir (Kim, 1968).

İspat. C, X 'in $\mathcal{T}_2-$kapalı bir altkümesi olsun. Lemma 2.4.2 göz önüne alınırsa C, $\mathcal{T}_1-$kompakt olduğu görülür. Eğer $p\notin C$ ise hipoteze göre her $y_i\in C$ için $y_i\in U_{y_i}$, $p\in V_{y_i}$ ve $U_{y_i}\cap V_{y_i}=\varnothing$ olacak şekilde $V_{y_i}\in\mathcal{T}_2$ ve $U_{y_i}\in\mathcal{T}_1$ vardır. $\{U_{y_i}\,|\,y_i\in C\}$ ailesi C 'nin $\mathcal{T}_1-$açık örtüsü olup C, $\mathcal{T}_1-$kompakt olduğundan $C\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{y_i}$ olacak şekilde $n\in N$ vardır. Eğer $V_p=\bigcap_{i=1}^{n}V_{y_i}$ ile gösterilirse $V_p\cap U_{y_i}=\varnothing$ olup buradan $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzayı $(2,1)-$regüler olur.

İkili açık örtünün ilk tanımı, dolayısıyla bu tanıma dayalı ikili kompaktlık ve ilgili karakterizasyonlar 1969 yılında Fletcher, Hoyle ve Patty tarafından aşağıdaki şekilde yapılmıştır.

Tanım 2.4.5. $(X,\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ bitopolojik uzay olsun. $\mathcal{B}\cap\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{B}\cap\mathcal{T}_2$ aileleri $\varnothing$ kümeden farklı bir küme içermek üzere $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}_1\cup\mathcal{T}_2$ ise $\mathcal{B}$ örtüsüne bitopolojik uzayın ikili açık örtüsü denir (Fletcher ve ark., 1969).

Tanım 2.4.6. Bitopolojik uzayın her ikili açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse bitopolojik uzaya ikili kompakt denir (Fletcher ve ark., 1969).

Örnek 2.4.2 $X=[0,\infty)$ kümesi üzerinde $\mathcal{U}$ alışılmış topolojisi ve $\mathcal{Q}=\{\varnothing\}\cup\{U\cup(x,\infty)|U\in\mathcal{U}$ ve $x\in X\}$ topolojisi verilsin. $(X,\mathcal{U},\mathcal{Q})$ bitopolojik uzayı $\mathcal{U}\neq\mathcal{Q}$ olduğu için ikili Hausdorff olduğu açıkça görülür. $\mathcal{B}$, X 'in bir ikili açık örtüsü ve V $\mathcal{Q}-$açık olacak şekilde $\mathcal{B}$ ailesinin boştan farklı V elemanını ve $(v,\infty)\subset V$ olacak şekilde $v\in X$ noktasını alınsın. $\mathcal{Q}\subset\mathcal{U}$ olduğu için $\mathcal{B}$ aynı zamanda X 'in $\mathcal{U}-$açık örtüsü olur. Buradan $\mathcal{B}$, $[0,v]$ kümesinin de $\mathcal{U}-$açık örtüsü olur. $\mathcal{B}$ 'nın sonlu bir $\mathcal{A}$ alt örtüsü vardır. Bu nedenle $\mathcal{A}\cup\{V\}$, X kümesinin ikili açık sonlu alt örtüsü olur. $(X,\mathcal{U},\mathcal{Q})$ ikili kompakttır (Fletcher ve ark., 1969).

Teorem 2.4.3. $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ ikili kompakt ve C, X 'in $\mathcal{T}-$kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda C, $\mathcal{Q}-$kompakttır (Fletcher ve ark., 1969).

İspat. $\mathcal{B}$, C 'nin bir $\mathcal{Q}-$açık örtüsü olsun. O zaman $\mathcal{B}\cup\{X-C\}$, X 'in bir ikili açık örtüsüdür. Dolayısıyla $\mathcal{A}\cup\{X-C\}$ sonlu bir ikili açık alt örtüsü vardır. Buradan da $\mathcal{A}$ ailesi C 'nin sonlu bir $\mathcal{Q}-$açık örtüsü olur.

Teorem 2.4.4. $(X,\mathcal{T})$ ve $(X,\mathcal{Q})$ Hausdorff uzayları ve $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ ikili kompakt ise $\mathcal{T}=\mathcal{Q}$ olur (Fletcher ve ark., 1969).

İspat. A, X 'in herhangi $\mathcal{T}-$kapalı alt kümesi olsun. Teorem 2.4.3'e göre A, $\mathcal{Q}-$kompakttır. Bu nedenle $(X,\mathcal{Q})$ Hausdorff olduğu için A, $\mathcal{Q}-$kapalıdır. Benzer şekilde X 'in her $\mathcal{Q}-$kapalı alt kümesi $\mathcal{T}-$kapalıdır.

Teorem 2.4.5. $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ ikili Hausdorff ve ikili kompakt ise o zaman $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ ikili düzenlidir (Fletcher ve ark., 1969).

İspat. X 'in herhangi C, $\mathcal{T}-$kapalı alt kümesini ve herhangi $p \in X-C$ noktasını alalım. $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ ikili Hausdorff uzayı olduğundan her $x \in C$ için $\mathcal{T}-$açık U_x ve $\mathcal{Q}-$açık V_x vardır öyle ki $p \in U_x$, $x \in V_x$ ve kabul gereği $U_x \cap V_x = \varnothing$ olur. Ayrıca $\mathscr{V} = \{V_x \mid x \in C\}$ ailesi C 'nin bir $\mathcal{Q}-$açık örtüsü olur. Böylece Teorem 2.4.3'e göre bu örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır. $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$ ve $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ olacak şekilde U, $\mathcal{T}-$açık ve V, $\mathcal{Q}-$açık kümelerini alırsak $p \in U$, $C \subset V$ ve $U \cap V = \varnothing$ sağlanır. Bu nedenle $\mathcal{T}$, $\mathcal{Q}$ 'ye göre düzenlidir. Benzer şekilde $\mathcal{Q}$, $\mathcal{T}$ 'ya göre düzenli olduğu da gösterilir.

Teorem 2.4.6. $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ ikili kompakt ve $\mathcal{T}$, $\mathcal{Q}$ 'ya göre düzenli ya da $\mathcal{Q}$, $\mathcal{T}$ 'ya göre düzenli ise $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ ikili normaldir (Fletcher ve ark., 1969).

İspat. İlk olarak $\mathcal{T}$, $\mathcal{Q}$ 'ye göre düzenli olsun. Ayrıca $H \cap K = \varnothing$ olacak şekilde H $\mathcal{T}-$kapalı kümesi ve K, $\mathcal{Q}-$kapalı kümesini alalım. Her $x \in K$ için $x \in U_x$ olacak şekilde bir U_x, $\mathcal{T}-$açık kümesi ve $H \subset V_x$ olacak şekilde bir V_x, $\mathcal{Q}-$açık kümesi vardır öyle ki $U_x \cap V_x = \varnothing$ sağlanır. $\mathscr{U} = \{U_x \mid x \in K\}$ ailesi K 'nın bir $\mathcal{T}-$açık örtüsüdür. Teorem 2.4.3'e göre K, $\mathcal{Q}-$kapalı küme olduğundan $\mathcal{T}-$kompakttır ve K 'yı örten $\mathscr{U}$ 'nun sonlu bir $\{U_{x_1}, U_{x_2}, U_{x_3}, \ldots, U_{x_m}\}$ alt ailesi vardır. $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$ ve $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ ile gösterilirse o zaman $H \subset V$, $K \subset U$ ve $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde U, $\mathcal{T}-$açık ve V, $\mathcal{Q}-$açık kümeleri bulunmuş olur ve ispat tamamlanır.

Fletcher ve arkadaşlarının ikili kompaktlık tanımını yayımladığı tarih ile eş zamanlı olmasına rağmen onlardan bağımsız olarak farklı bir ikili kompaktlık tanımı Birsan tarafından verilmiştir. Zaman içinde literatürde çıkabilecek karışıklıkları önlemek adına Birsan anlamında ikili kompaktlık yerine ikili B-kompakt terimi kullanılmıştır.

Tanım 2.4.7. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ aileleri X kümesinin iki örtüsü olmak üzere eğer her $B \in \mathcal{B}$ için $B \subset A$ olacak şekilde en az bir $A \in \mathcal{A}$ varsa $\mathcal{B}$ örtüsüne $\mathcal{A}$ 'nın incesi denir (Birsan, 1969).

Geçmişte kompaktlığın alt örtü kavramı yerine ince kavramı kullanılarak tanımlandığı bilinmektedir. Bu kavramların zaman zaman birbirinin yerine kullanılmış olması gerçeğiyle Birsan ince kavramı ile bilinen kompaktlığın doğal bir genişlemesi olarak aşağıdaki ikili kompaktlık tanımını vermiştir.

Tanım 2.4.8. $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ bitopolojik uzayında X 'in her $\mathcal{T}-$açık örtüsünün sonlu bir $\mathcal{Q}-$açık incesi varsa X bitopolojik uzayına $\mathcal{Q}$ 'ya göre $\mathcal{T}-$kompakt denir.

Eğer X hem $\mathcal{Q}$ 'ya göre $\mathcal{T}-$kompakt hem de $\mathcal{T}$ 'ya göre $\mathcal{Q}-$kompakt ise ikili kompakt bitopolojik uzay olarak adlandırılır (Birsan, 1969).

Teorem 2.4.7. $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ bir bitopolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

i) X uzayı $\mathcal{Q}$ 'ya göre $\mathcal{T}-$kompakttır.

ii) $\mathcal{T}-$kapalı kümelerden $\{F_i \mid i \in I\}$ ailesinin boş kesişime sahipse boş kesişime sahip $\mathcal{Q}-$kapalı kümelerin sonlu bir $\{H_j \mid j \in J\}$ ailesi vardır ve öyle ki her $j \in J$ için H $H_j \supset F_i$ olacak şekilde bir $i \in I$ vardır. (Birsan, 1969).

İspat. $(\mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{ii})$ $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$ olacak şekilde $\mathcal{T}-$kapalı kümelerden oluşan $\{F_i \mid i \in I\}$ ailesi verilsin. O zaman her bir $i \in I$ için $G_i = X - F_i$ tümleyeni $\mathcal{T}-$açıktır ve $\{G_i \mid i \in I\}$ ailesi X 'in bir $\mathcal{T}-$açık örtüsüdür. X uzayı $\mathcal{Q}$ 'ya göre $\mathcal{T}-$kompakt olduğundan $\{G_i \mid i \in I\}$ örtüsünün sonlu bir $\{Z_j \mid j \in J\}$ $\mathcal{Q}-$açık incesi vardır. Buradan her bir $j \in J$ için $H_j = X - F_j$ tümleyeni $\mathcal{Q}-$kapalı olup $\bigcap_{j\in J} H_j = X - \bigcup_{j\in J}(X - Z_j) = X - X = \varnothing$ olur. Ayrıca her $j \in J$ için $G_i \supset Z_j$, dolayısıyla $H_j \supset F_i$ olacak şekilde $i \in I$ vardır.

$(\mathrm{ii} \Rightarrow \mathrm{i})$ önermesi de benzer yolla kanıtlanır.

Teorem 2.4.8. $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ bitopolojik uzayı ikili Hausdorff ve $(X,\mathcal{T})$ kompakt ise $\mathcal{T} \subset \mathcal{Q}$ olur (Birsan, 1969).

İspat. X 'in her $\mathcal{T}-$kapalı alt kümesinin $\mathcal{Q}-$kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. $Z \subset X$ alt kümesi $\mathcal{T}-$kapalı ve $y \notin Z$ olsun. O zaman her $z \in Z$ için $U_z \cap V_z = \varnothing$ olacak şekilde z noktasını içeren bir U_z, $\mathcal{T}-$açık kümesi ve y noktasını içeren bir V_z, $\mathcal{Q}-$açık kümesi vardır. $\{U_z | z \in Z\}$ ailesi Z 'nin $\mathcal{T}-$açık örtüsüdür. Z kümesi $\mathcal{T}-$kompakt uzayın $\mathcal{T}-$kapalı alt kümesi olduğundan $\mathcal{T}-$kompakttır. O halde, Z 'nin bir $\{U_{z_1}, U_{z_2}, \ldots, U_{z_n}\}$ şeklinde $\mathcal{T}-$açık sonlu alt örtüsü vardır. $V = \bigcap_{k=1}^{n} V_{z_k}$ kümesi y noktasının $\mathcal{Q}-$açık komşuluğudur ve $V \cap Z = \bigcap_{k=1}^{n} V_{z_k} \cap \bigcup_{k=1}^{n} U_{z_k} = \varnothing$ olur. Böylece $V \subset X - Z$ olup $X - Z$ kümesi $\mathcal{Q}-$açıktır. Dolayısıyla Z kümesi $\mathcal{Q}-$kapalıdır. Her $\mathcal{T}-$kapalı alt kümesinin $\mathcal{Q}-$kapalı ise $\mathcal{T} \subset \mathcal{Q}$ olur

Sonuç 2.4.1. $(X, \mathcal{T}, \mathcal{Q})$ ikili bir Hausdorff bitopolojik uzayı olsun.

Eğer $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{Q}$ topolojilerinin her ikisi de kompakt ise, $\mathcal{T} = \mathcal{Q}$ olur.

Eğer X uzayı $\mathcal{Q}$ 'ya göre $\mathcal{T}-$kompakt ise, o zaman $\mathcal{T} \subset \mathcal{Q}$ olur.

Eğer $(X, \mathcal{T}, \mathcal{Q})$ ikili kompakt ise, $\mathcal{T} = \mathcal{Q}$ olur (Birsan, 1969).

Teorem 2.4.9. $(X, \mathcal{T}, \mathcal{Q})$ bir bitopolojik uzay ve $Y \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler vardır.

Eğer Y 'nin her $\mathcal{T}-$açık örtüsünün sonlu bir $\mathcal{Q}-$açık incesi varsa Y alt uzayı $\mathcal{Q}$ 'ya göre $\mathcal{T}-$kompakttır.

Eğer Y kümesi $\mathcal{Q}-$açık ise tersi de doğrudur (Birsan, 1969).

Fletcher, Hoyle ve Patty'nin tanımı ve Birsan'ın tanımı $(X, \mathcal{T})$ ve $(X, \mathcal{Q})$ her ikisi de kompakt ve $(X, \mathcal{T}, \mathcal{Q})$ bitopolojik uzayı ikili Hausdorff iken $\mathcal{T} = \mathcal{Q}$ olmasını gerektirmiştir. Ancak Swart 1971 yılında bu durumun aksi bir örnek vererek tanımın yetersizliğini göstermiştir. Böylece mevcut tanımları kapsayan aşağıdaki tanımı vermiştir. Swart anlamında ikili kompaktlık yerine ikili S-kompakt terimi kullanılmıştır.

Tanım 2.4.9. $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ bir bitopolojik uzay olsun. X 'in $\mathscr{A} \subset \mathcal{T} \cup \mathcal{Q}$ örtüsüne $(\mathcal{T},\mathcal{Q})-$ açık örtü denir (Swart, 1971).

Tanım 2.4.10. $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ bitopolojik uzay olmak üzere X 'in her $(\mathcal{T},\mathcal{Q})-$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa ikili S-kompakt olarak adlandırılır (Swart, 1971).

Literatürde var olan bitopolojik uzaylarda kompaktlık benzeri tanımlarda aşağıda şekilde verilmiştir.

Tanım 2.4.11. $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ bitopolojik uzayında $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{Q}$ üstten sınırlı topolojilerine göre açık olan bir $A \subset X$ alt kümesi yarı-açık olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.12. $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ bitopolojik uzay olmak üzere X 'in her yarı-açık örtüsünün sonlu bir alt varsa $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ yarı-kompakt olarak adlandırılır (Datta, 1972)

Tanım 2.4.13. Her bi-süreklilik fonksiyonunun $f:(X,\mathcal{T},\mathcal{Q}) \to (\mathbb{R},\mathscr{U},\overline{\mathscr{U}})$ sınırlı olması durumda $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ sözde kompakttır denir (Saegrove 1973);

Tanım 2.4.14. $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ bitopolojik uzayı hem sözde kompakt hem de ikili reel kompakt ise bikompakt olarak adlandırılır (Saegrove 1973).

İkili açık örtü yerine ikili kapalı aile yardımıyla karakterize edilen ikili kompaktlık kavramı da Phak ve Choi tarafından 1971 yılında aşağıdaki şekilde sunulmuştur.

Tanım 2.4.15. $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ bitopolojik uzay olsun. $F_1 \subset X$, $\mathcal{T}-$kapalı özalt küme ve $F_2 \subset X$, $\mathcal{Q}-$kapalı özalt küme olmak üzere boştan farklı F_1 ve F_2 kümelerinden oluşan $\mathcal{F}$ ailesine ikili kapalı aile denir (Phak ve Choi, 1971).

Teorem 2.4.10. Bitopolojik uzaylarda aşağıdakiler denktir.

- **i)** $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ ikili kompakttır.
- **ii)** X bitopolojik uzayının sonlu arakesit özelliğine sahip alt kümelerinin her ikili kapalı ailesi boştan farklı arakesite sahiptir (Phak ve Choi, 1971).

İspat. $(\text{i} \Rightarrow \text{ii})$ $(X,\mathcal{T},\mathcal{Q})$ ikili kompakt olsun. O halde her ikili açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahiptir. Her $F_i \in \mathcal{F}$ için $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$ ise $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \varnothing$ olduğunu gösterelim. Bu amaçla varsayalım $\mathcal{F}$ ikili kapalı kümeler ailesi olmak üzere $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$ olsun. O halde $X - \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} (X - F)_i = X$ olur. Bu durumda her $i \in I$ olmak üzere boştan farklı $F_i \in \mathcal{F}$ özalt kümeleri için $X \setminus F_i \in \mathcal{T}$ ya da $X \setminus F_i \in \mathcal{Q}$ olduğundan $\{X \setminus F_i \mid i \in I\}$ ailesi X bitopolojik uzayının ikili açık örtüsüdür. $(X, \mathcal{T}, \mathcal{Q})$ ikili kompakt olduğundan $\bigcup_{i=1}^{n} (X - F_i) = X$ olacak şekilde $\{(X - F_i) \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ sonlu alt örtüsü vardır. Tümleme işlemi ile $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$ bulunur.

$(\text{ii} \Rightarrow \text{i})$ $\mathcal{F}$ ikili kapalı kümeler ailesi I indis kümesi olmak üzere $F_i \in \mathcal{F}$ iken $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$ olsun. X 'in ikili kompakt olduğunu gösterelim. $\mathcal{U}$ ikili açık örtü olmak üzere $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ olsun. $\varnothing = \bigcap_{i\in I} (X - U_i)$ olup $X - U_i \in F$, $\bigcap_{i\in I}^{n} (X - U_i) = \varnothing$ olacağından $\bigcup_{i=1}^{n} U_i = X$ elde edilir. Buradan $(X, \mathcal{T}, \mathcal{Q})$ ikili kompakt olduğu görülür.

3. Bİ-İZOTONİK UZAYLAR

3.1. Temel Kavramlar

Bi-izotonik uzaylar ile ilgili temel tanım ve teoremler bu bölümde özet olarak verilmiştir.

Tanım 3.1.1. X herhangi bir küme olsun ve $P(X)$ kuvvet kümesini göstersin. Herhangi $A \in P(X)$ ve $x \in X$ için

- $\mathrm{cl} : P(X) \to P(X)$ olarak verilen herhangi fonksiyona kapanış fonksiyonu ve $\mathrm{cl}(A)$ kümesine A kümesinin kapanışı,
- $\mathrm{int}\, A = X - \mathrm{cl}(X - A)$ şeklinde tanımlanan $\mathrm{int} : P(X) \to P(X)$ fonksiyonuna iç (veya kapanış fonksiyonunun dual) fonksiyonu ve $\mathrm{int}(A)$ kümesine A kümesinin içi,
- $\mathscr{N}(x) = \{N \in P(X) : x \in \mathrm{int}\, N\}$ şeklinde tanımlanan $\mathscr{N} : X \to P(P(X))$ fonksiyonuna komşuluk fonksiyonu ve $\mathscr{N}(x)$ ailesine x noktasının komşuluklar ailesi

adı verilir (Stadler ve Stadler, 2002).

(X, cl) ikilisine de genelleştirilmiş kapanış uzayı denir (Čech ve ark., 1966).

Tanım 3.1.2. X boştan farklı herhangi bir küme, $\mathrm{cl}_1 : P(X) \to P(X)$ ve $\mathrm{cl}_2 : P(X) \to P(X)$ kapanış fonksiyonları olmak üzere $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ üçlüsüne genelleştirilmiş bi-kapanış uzayı adı verilir (Boonpok, 2010).

Tanım 3.1.3. X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere her $A, B \in P(X)$ ve $i \in \{1, 2\}$ için kapanış aksiyomları aşağıdaki gibi verilir.

K0) $\mathrm{cl}_i(\varnothing)=\varnothing$.

K1) $A\subseteq B\Rightarrow \mathrm{cl}_i(A)\subseteq \mathrm{cl}_i(B)$.

K2) $A\subseteq \mathrm{cl}_i(A)$.

K3) $\mathrm{cl}_i(A\cup B)\subseteq \mathrm{cl}_i(A)\cup \mathrm{cl}_i(B)$.

K4) $\mathrm{cl}_i(\mathrm{cl}_i(A))=\mathrm{cl}_i(A)$.

Eğer cl_1 ve cl_2 kapanış fonksiyonları (K0) ve (K1) aksiyomlarını sağlıyorsa genelleştirilmiş bi-kapanış uzayı bi-izotonik uzay olarak adlandırılır (Ersoy ve Erol, 2020).

Ek olarak (K2) aksiyomunu sağlayan bi-izotonik uzay bi-komşuluk uzayı, (K4) aksiyomunu sağlayan bi-komşuluk uzayı bi-kapanış uzayı (Boonpok, 2010), (K3) aksiyomunu sağlayan bi-kapanış uzayı bitopolojik uzay olarak adlandırılır.

Yukarıda verilen aksiyomların kapanış fonksiyonlarının duali olan iç fonksiyonları türünden denkleri aşağıdaki gibidir (Stadler ve Stadler, 2002).

K0) $\mathrm{int}_i(X)=X$.

K1) $A\subseteq B\Rightarrow \mathrm{int}_i(A)\subseteq \mathrm{int}_i(B)$.

K2) $\mathrm{int}_i(A)\subseteq A$.

K3) $\mathrm{int}_i(A)\cap \mathrm{int}_i(B)\subseteq \mathrm{int}_i(A\cap B)$.

K4) $\mathrm{int}_i(\mathrm{int}_i(A))=\mathrm{int}_i(A)$.

Ayrıca kapanış aksiyomlarının komşuluk fonksiyonları türünden denkleri de aşağıdaki gibidir (Stadler ve Stadler, 2002).

K0) $X\in\mathcal{N}_i(x)$.

K1) $N\in\mathcal{N}_i(x)$ ve $N\subseteq N'\Rightarrow N\in\mathcal{N}_i(x)$.

K2) $N\in\mathcal{N}_i(x)\Rightarrow x\in N$.

K3) $N,N'\in\mathcal{N}_i(x)\Rightarrow N\cap N'\in\mathcal{N}_i(x)$.

K4) $N\in\mathcal{N}_i(x)\Leftrightarrow \mathrm{int}_i(N)\in\mathcal{N}_i(x)$.

Tanım 3.1.4. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzay olsun. Eğer $\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2(A)=A$ ise A kümesine kapalı küme denir. Kapalı kümenin tümleyenine açık küme denir (Ersoy ve Erol, 2020).

Bu tanım göz önüne alınırsa aşağıdaki önerme açıkça görülür.

Önerme 3.1.1. $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayında bir A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart $\left(X,\mathrm{cl}_1\right)$ ve $\left(X,\mathrm{cl}_2\right)$ izotonik uzaylarında kapalı olmasıdır.

Denk olarak $\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2\left(A\right)=A \Leftrightarrow \mathrm{cl}_1\left(A\right)=A$ ve $\mathrm{cl}_2\left(A\right)=A$ şeklinde ifade edilebilir.

Sonuç olarak $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayında bir A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart her $i\in\{1,2\}$ için $\mathrm{int}_i\left(A\right)=X-\left(\mathrm{cl}_i\left(X-A\right)\right)=A$ olmasıdır (Ersoy ve Erol, 2020).

Önerme 3.1.2. $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzay olsun. $A\subseteq X$ için aşağıdakiler vardır.

i) A açık küme olması için gerek ve yeter şart $A=X-\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2\left(X-A\right)$ olmasıdır.

ii) Eğer A açık küme ve $A\subseteq G$ ise $A\subseteq X-\mathrm{cl}_1\mathrm{cl}_2\left(X-G\right)$ sağlanır (Ersoy ve Erol, 2020).

Önerme 3.1.3. $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı ve $Y\subseteq X$ alt kümesi verildiğinde her . $F\subseteq Y$ kümesi ve $i\in\{1,2\}$ için $\mathrm{cl}_i^Y\left(F\right)=\mathrm{cl}_i\left(F\right)\cap Y$ olarak tanımlı $\mathrm{cl}_i^Y:P\left(Y\right)\to P\left(Y\right)$ fonksiyonları da izotoniktir (Ersoy ve Erol, 2020).

İspat. $K\subseteq L$ olacak şekilde herhangi $K,L\subseteq Y$ alt kümeleri göz önüne alınırsa $i\in\{1,2\}$ için cl_i fonksiyonları izotonik olduğundan $\mathrm{cl}_i\left(K\right)\subseteq\mathrm{cl}_i\left(L\right)$ sağlanır.Açıkça $\mathrm{cl}_i\left(F\right)\cap Y\subseteq\mathrm{cl}_i\left(K\right)\cap Y$ olduğu görülür ve bu da $\mathrm{cl}_i^Y\left(F\right)\subseteq\mathrm{cl}_i^Y\left(K\right)$ olduğu anlamına gelir.

Böylece aşağıdaki tanım verilir.

Tanım 3.1.5. $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı olsun. $Y\subseteq X$ alt kümesi için cl_1^Y ve cl_2^Y iki izotonik fonksiyonları ile birlikte $\left(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y\right)$ uzayına $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayının alt uzayı denir (Ersoy ve Erol, 2020).

Tanım 3.1.6. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayının alt uzayı $(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y)$ bi-izotonik uzayı olsun. İndirgenmiş iç operatörü int_i^Y ile gösterilmek üzere $Y_1 \subseteq Y$ için $\mathrm{int}_i^Y(Y_1) = Y - \mathrm{cl}_i^Y(Y - Y_1) = Y \cap \mathrm{int}_i(Y_1 \cup (X - Y))$ dir (Ersoy ve Erol, 2020).

Tanım 3.1.7. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayının alt uzayı $(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y)$ bi-izotonik uzayı olsun. İndirgenmiş komşuluk fonksiyonu $\mathscr{N}_i^Y$ olmak üzere $x \in X$ için $\mathscr{N}_i^Y(x) = \{N \cap Y : N \in \mathscr{N}_i(x)\}$ dir (Ersoy ve Erol, 2020).

Önerme 3.1.4. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında herhangi $Y \subseteq X$ kapalı alt kümesi verilsin. F kümesinin $(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y)$ bi-izotonik alt uzayında kapalı olması için gerek ve yeter şart F kümesinin $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında kapalı olmasıdır (Ersoy ve Erol, 2020).

3.2. Bi-izotonik Uzaylarda Sürekli Dönüşümler

Tanım 3.2.1. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ve $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ genelleştirilmiş bi-kapanış uzayları ve $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2) \to (Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ dönüşümü olsun. Eğer $i \in \{1,2\}$ için $f:(X,\mathrm{cl}_i) \to (Y,\mathrm{cl}_i')$ sürekli (açık, kapalı ya da homeomorfizm) ise f dönüşümüne $i-$sürekli ($i-$açık, $i-$kapalı ya da $i-$homeomorfizm) denir (Ersoy ve Erol, 2020).

Ayrıca f dönüşümü her $i \in \{1,2\}$ için $i-$sürekli ise bi-süreklidir denir.

Tanım 3.2.1'de verilen $f:(X,\mathrm{cl}_i) \to (Y,\mathrm{cl}_i')$ dönüşümünün sürekliliği tanımından aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 3.2.1. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ve $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ genelleştirişmiş bi-kapanış uzayları olsun. $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2) \to (Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ dönüşümü bi-süreklidir ancak ve ancak her $A \in P(X)$ ve her $i \in \{1,2\}$ için $f(\mathrm{cl}_i(A)) \subseteq \mathrm{cl}_i'(f(A))$ dir (Ersoy ve Erol, 2020).

Önerme 3.2.2. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ve $(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ bi-izotonik uzayları ve $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ dönüşümü olsun. f dönüşümü bi-süreklidir ancak ve ancak her $B\in P(Y)$ ve $i\in\{1,2\}$ için $\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}(B)\right)\subseteq f^{-1}\left(\mathrm{cl}'_i(B)\right)$ dir (Ersoy ve Erol, 2020).

Önerme 3.2.3. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$, $(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ ve $(Z,\mathrm{cl}''_1,\mathrm{cl}''_1)$ bi-izotonik uzayları olmak üzere $f:X\to Y$ ve $g:Y\to Z$ bi-sürekli dönüşümler olsun. Bu durumda $g\circ f:X\to Z$ bi-süreklidir (Ersoy ve Erol, 2020).

Önerme 3.2.4. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ve $(X,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ bi-izotonik uzayları olsun. $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ dönüşümü için aşağıdakiler denktir (Ersoy ve Erol, 2020).

i) f dönüşümü bi-süreklidir.

ii) Her $B\in P(Y)$ ve $i\in\{1,2\}$ için $f^{-1}\left(\mathrm{int}'_i(B)\right)\subseteq \mathrm{int}_i\left(f^{-1}(B)\right)$ dir

iii) Her $B\in P(Y)$ ve $i\in\{1,2\}$ için $B\in\mathcal{N}_i\left(f(x)\right)$ ise $f^{-1}(B)\in\mathcal{N}_i(x)$ dir.

Tanım 3.2.2. $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2)$ dönüşümü birebir ve örten olsun. Eğer f bi-sürekli ve f^{-1} bi-sürekli ise bi-homeomorfizm denir (Ersoy ve Erol, 2020).

3.3. Bi-izotonik Uzaylarda Ayırma Aksiyomları

Tanım 3.3.1. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ genelleştirilmiş bi-kapanış uzayı olsun. Eğer her $x,y\in X$ noktaları için $y\notin N_x$ olan $N_x\in\mathcal{N}_1(x)$ veya $x\notin N_y$ olacak şekilde $N_y\in\mathcal{N}_2(y)$ varsa $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili T_0- uzayıdır, denir (Ersoy ve Erol, 2020).

Tanım 3.3.2. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ genelleştirilmiş bi-kapanış uzayı olsun.

i) $x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için $y \notin N_x$ olacak şekilde $N_x \in \mathcal{N}_1(x)$ ve $x \notin N_y$ olacak şekilde $N_y \in \mathcal{N}_2(y)$ varsa $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ ikili $S - T_1$ − uzayıdır denir.

ii) Eğer (X, cl_1) ve (X, cl_2) uzayları T_1 − uzayı ise $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ uzayı ikili $R - T_1$ − uzayıdır (Ersoy ve Erol, 2020).

Tanım 3.3.3. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ genelleştirilmiş bi-kapanış uzayı olsun. $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ noktaları için $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_1(x)$ ve $V \in \mathcal{N}_2(y)$ kümeleri varsa $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ ikili Hausdorff uzayıdır (Ersoy ve Erol, 2020).

Tanım 3.3.4. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı olsun. $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $\mathrm{cl}_1(U) \cap \mathrm{cl}_2(V) = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_1(x)$ ve $V \in \mathcal{N}_2(y)$ varsa $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ ikili $T_{2\frac{1}{2}}$ − uzayıdır (Ersoy ve Erol, 2020).

Tanım 3.3.5. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ genelleştirilmiş bi-kapanış uzayında her $x \in X$ noktası ve her $F \subseteq X$ alt kümesi için $x \notin \mathrm{cl}_1(F)$ olmak üzere $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}_1(x)$ ve $V \in \mathcal{N}_2(F)$ varsa (X, cl_1) uzayı (X, cl_2) uzayına göre regülerdir denir.

Eğer (X, cl_1) uzayı (X, cl_2) uzayına göre regüler ve (X, cl_2) uzayı (X, cl_1) uzayına göre regüler ise $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ ikili regülerdir (Ersoy ve Erol, 2020).

Tanım 3.3.6. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı eğer ikili regüler ve ikili $R - T_1$ − uzayı ise ikili T_3 − uzayıdır denir (Ersoy ve Erol, 2020).

Tanım 3.3.7. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili quasi-normal ve ikili $R - T_1$ − uzayı ise ikili T_4 − uzayıdır denir. (Ersoy ve Erol, 2020).

4. Bİ-İZOTONİK UZAYLARDA İKİLİ KOMPAKTLIK

4.1. İkili Kompaktlık Kavramı ve Sonlu Arakesit Özelliği

Tanım 4.1.1 $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzay olsun. $\mathrm{cl}_1(K) = K$ ve $\mathrm{cl}_2(L) = L$ olacak şekilde $K, L \subset X$ verilsin.

i) K alt kümelerinden oluşan aileye $\mathrm{cl}_1 -$kapalı aile denir.

ii) L alt kümelerinden oluşan aileye $\mathrm{cl}_2 -$kapalı aile denir.

iii) K veya L alt kümelerinden oluşan aileye ikili kapalı aile denir.

$\mathrm{cl}_1 -$kapalı kümelerin ailesi $\mathscr{F}_{\mathrm{cl}_1}$, $\mathrm{cl}_2 -$kapalı kümelerin ailesi $\mathscr{F}_{\mathrm{cl}_2}$ ve ikili kapalı aile $\mathscr{F}$ ile gösterilsin.

Tanım 4.1.2. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzay olsun. $\mathscr{F}_{\mathrm{cl}_1} \cap \mathscr{F}$ ve $\mathscr{F}_{\mathrm{cl}_2} \cap \mathscr{F}$ boştan farklı küme içermek üzere sonlu arakesit özelliğine sahip herhangi ikili kapalı $\mathscr{F}$ ailesinin tüm elemanlarının arakesiti boştan farklı ise X bi-izotonik uzayına ikili FHP-kompakt denir.

Tanım 4.1.3. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında bir $\mathscr{F}_{\mathrm{cl}_1}$ ailesinin her sonlu $\mathscr{F}_{\mathrm{cl}_2}$ alt ailesinin arakesiti boş değilse bu aileye cl_2'ye göre $\mathrm{cl}_1 -$kapalı sonlu arakesit özelliği vardır denir.

Tanım 4.1.4. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayının cl_2'ye göre $\mathrm{cl}_1 -$kapalı sonlu arakesit özelliği var olan herhangi ailenin arakesiti boş değilse cl_2'ye göre $\mathrm{cl}_1 -$kompakt denir.

Tanım 4.1.5. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı hem cl_1'e göre $\mathrm{cl}_2 -$kompakt hem de cl_2'ye göre $\mathrm{cl}_1 -$kompakt ise ikili B-kompakttır.

Tanım 4.1.6. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayında sonlu arakesit özelliğine sahip herhangi ikili kapalı $\mathscr{F}$ ailesi boştan farklı arakesite sahip ise X uzayına ikili S-kompakt denir.

Tüm tanımlardan açıkça görülür ki $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı

ikili S-kompakt $\Rightarrow$ikili B-kompakt$\Rightarrow$ikili FHP-kompakt

sağlanır. Dolayısıyla, tezin geri kalanında X bi-izotonik uzayı ikili kompakt denildiğinde ikili S-kompakt olduğu anlaşılacaktır.

Bu tanıma göre $\left(X,\mathrm{cl}_1\right)$ kompakt veya $\left(X,\mathrm{cl}_2\right)$ kompakt ise $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ ikili kompakttır.

Örnek 4.1.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde

$$\mathrm{cl}_1\left(C\right)=\begin{cases} C, & C \text{ sonlu} \\ \mathbb{R}, & C \text{ sonsuz} \end{cases} \text{ ve } \mathrm{cl}_1\left(C\right)=\begin{cases} \varnothing, & C=\varnothing \\ \left(-\infty,\lambda\right], & \sup C=\lambda \\ \mathbb{R}, & \sup C=\infty \end{cases}$$

olacak şekilde $\mathrm{cl}_1\colon P\left(\mathbb{R}\right)\to P\left(\mathbb{R}\right)$ ve $\mathrm{cl}_2\colon P\left(\mathbb{R}\right)\to P\left(\mathbb{R}\right)$ kapanış fonksiyonlarını alalım. $\left(\mathbb{R},\mathrm{cl}_1\right)$ kompakt iken $\left(\mathbb{R},\mathrm{cl}_2\right)$ kompakt değildir ancak $\left(\mathbb{R},\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ ikili kompakttır.

Tanım 4.1.7. Her $i\in\left\{1,2\right\}$ için $\left(X,\mathrm{cl}_i\right)$ bir izotonik uzay ve $\mathscr{B}_i=\left\{A_j\subset X \,\middle|\, \mathrm{int}_i\left(A_j\right)=A_j,\ j\in J\right\}$ ailesi de $\left(X,\mathrm{cl}_i\right)$ uzayında X 'in bir açık örtüsü olsun. Eğer $\mathscr{B}\subset\mathscr{B}_1\cup\mathscr{B}_2$ ise $\mathscr{B}$ örtüsüne $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayında X 'in ikili açık örtüsü denir.

Teorem 4.1.1. $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

i) X bi-izotonik uzayı ikili kompakt uzaydır.

ii) X kümesinin arakesiti boş olan her ikili kapalı $\mathscr{F}=\left\{F_j \,\middle|\, j\in J\right\}$ ailesinin arakesiti boş olan sonlu bir $\left\{F_{j_1},F_{j_2},\ldots,F_{j_n}\right\}$ alt ailesi vardır.

iii) X kümesinin her ikili açık $\mathscr{B}=\left\{A_j \,\middle|\, j\in J\right\}$ örtüsünün sonlu bir $\left\{A_{j_1},A_{j_2},\ldots,A_{j_n}\right\}$ alt örtüsü vardır.

İspat. (i)$\Leftrightarrow$(ii) Tanım 4.6 gereği X bi-izotonik uzayının ikili kompakt uzay olması için gerek yeter şart X kümesinin ikili kapalı alt kümelerinden oluşan herhangi $\mathscr{F}=\left\{F_j \mid j\in J\right\}$ ikili kapalı ailesinin her sonlu $\left\{F_{j_1},F_{j_2},\ldots,F_{j_n}\right\}$ alt ailesi $\bigcap_{k=1}^{n}F_{j_k}\neq\varnothing$ özelliğine sahip ise $\bigcap_{j\in I}F_j\neq\varnothing$ özelliğini sağlanmasıdır. Bu önermenin karşıt pozitifi $\bigcap_{j\in I}F_j=\varnothing$ olacak şekilde X kümesinin ikili kapalı alt kümelerinden oluşan her $\mathscr{F}=\left\{F_j \mid j\in J\right\}$ ailesi verildiğinde $\bigcap_{k=1}^{n}F_{j_k}=\varnothing$ olacak şekilde sonlu bir $\left\{F_{j_1},F_{j_2},\ldots,F_{j_n}\right\}$ alt ailesi var olmasıdır.

(ii)$\Rightarrow$(iii) X kümesinin ikili kapalı alt kümelerinden oluşan ve arakesiti boş olan her $\mathscr{F}=\left\{F_j \mid j\in J\right\}$ ailesinin arakesiti boş olan sonlu bir $\left\{F_{j_1},F_{j_2},\ldots,F_{j_n}\right\}$ alt ailesi var olsun. X 'in herhangi $\mathscr{B}$ ikili açık örtüsünü alalım öyle ki $\mathscr{B}=\left\{A_j \mid j\in J\right\}$ ikili açık örtüsü $\operatorname{int}_1\left(A_j\right)=A_j$ veya $\operatorname{int}_2\left(A_j\right)=A_j$ olacak şekilde tanımlıdır. Eğer her $j\in J$ için $F_j=X-A_j$ dersek $i=1$ veya $i=2$ olmak üzere

$$F_j=X-A_j=X-\operatorname{int}_i\left(A_j\right)=\operatorname{cl}_i\left(X-A_j\right)=\operatorname{cl}_i\left(F_j\right)$$

sağlanır. Bir başka deyişle $F_j\in\mathscr{G}$ olur yani cl_1 veya cl_2-kapalıdır. Şimdi de $X=\bigcup_{j\in I}A_j$ ifadesinin tümleyeni alınırsa $\varnothing=\bigcap_{j\in I}\left(X-A_j\right)=\bigcap_{j\in I}F_j$ elde edilir. Kabulden $\bigcap_{j\in I}F_j=\varnothing$ iken $\bigcap_{k=1}^{n}F_{j_k}=\varnothing$ olacak şekilde sonlu bir ikili kapalı $\left\{F_{j_1},F_{j_2},\ldots,F_{j_n}\right\}$ alt ailesi var. Son eşitliğin tekrar tümleyeni alınırsa $\bigcup_{k=1}^{n}\left(X-F_{j_k}\right)=\bigcup_{k=1}^{n}A_{j_k}=X$ olacak şekilde sonlu ikili açık $\left\{A_{j_1},A_{j_2},\ldots,A_{j_n}\right\}$ alt örtüsünün var olduğu görülür.

(iii)$\Rightarrow$(ii) X kümesinin her ikili açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü var olsun. X kümesinin $F_j\subset X$ alt kümeleri cl_1 veya cl_2-kapalı olacak şekilde arakesiti boş olan yani $\bigcap_{j\in I}F_j=\varnothing$ özelliğini sağlayan herhangi ikili kapalı $\left\{F_j \mid j\in J\right\}$ ailesi verilsin. Eğer her $j\in J$ için $A_j=X-F_j$ dersek $i=1$ veya $i=2$ olmak üzere

$$A_j = X - F_j = X - \mathrm{cl}_i\left(F_j\right) = \mathrm{cl}_i\left(X - F_j\right) = \mathrm{int}_i\left(A_j\right)$$

sağlanır. Dolayısıyla $\mathrm{int}_1\left(A_j\right) = A_j$ veya $\mathrm{int}_2\left(A_j\right) = A_j$ olduğu görülür. Ayrıca $\bigcap_{j\in I} F_j = \varnothing$ ifadesinin tümleyeninden $\bigcup_{j\in J} X - F_j = \bigcup_{j\in J} A_j = X$ bulunur. Böylece

$$\mathscr{B} = \left\{A_j \subset X \,\middle|\, \mathrm{int}_1\left(A_j\right) = A_j \text{ veya } \mathrm{int}_2\left(A_j\right) = A_j,\ j \in J\right\}$$

ailesi de X 'in bir ikili açık örtüsü olup kabulden $\bigcup_{k=1}^{n} A_{j_k} = X$ olacak şekilde sonlu ikili açık $\left\{A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_n}\right\}$ alt örtüsü vardır. Tekrar tümleme işlemi uygulanarak

$$\bigcap_{k=1}^{n} X - A_{j_k} = \bigcap_{k=1}^{n} X - \mathrm{int}_i\left(A_{j_k}\right) = \bigcap_{k=1}^{n} F_{j_k} = \varnothing$$

bulunur. Sonuç olarak $\bigcap_{j\in I} F_j = \varnothing$ sağlayan her $\left\{F_j \,\middle|\, j \in J\right\}$ ikili kapalı ailesi verildiğinde $\bigcap_{k=1}^{n} F_{j_k} = \varnothing$ sağlayan sonlu $\left\{F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_n}\right\}$ alt ailesi vardır ve ispat tamamlanır.

4.2. İkili Kompaktlık ve Alt Uzay

Tanım 4.2.1. $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı olsun. $Y \subset X$ alt kümesi için cl_1^Y ve cl_2^Y indirgenmiş izotonik fonksiyonlar ile birlikte $\left(Y, \mathrm{cl}_1^Y, \mathrm{cl}_2^Y\right)$ bi-izotonik alt uzayı verilsin. Her $i \in \{1,2\}$ için $\mathscr{B}_i^Y = \left\{A_j \,\middle|\, A_j = \mathrm{int}_i^Y\left(A_j\right),\ j \in J\right\}$ ailesi $\left(Y, \mathrm{cl}_i^Y\right)$ izotonik alt uzayında Y 'in birer açık örtüsü olmak üzere $\mathscr{B}^Y \subset \mathscr{B}_1^Y \cup \mathscr{B}_2^Y$ ise $\mathscr{B}^Y$ örtüsüne Y bi-izotonik alt uzayında Y 'nin ikili açık örtüsü denir.

Tanım 4.2.2. $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı ve $Y \subset X$ olmak üzere $\left(Y, \mathrm{cl}_1^Y, \mathrm{cl}_2^Y\right)$ bi-izotonik alt uzayının her $\mathscr{B}^Y$ ikili açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa Y alt uzayı ikili kompakttır denir.

Teorem 4.2.1. $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı ve $Y \subset X$ olmak üzere $\left(Y, \mathrm{cl}_1^Y, \mathrm{cl}_2^Y\right)$ bi-izotonik alt uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart $\mathrm{cl}_1^Y -$kapalı veya $\mathrm{cl}_2^Y -$

kapalı alt kümelerinden oluşan ve arakesiti boş olan her $\left\{F_j \middle| j \in J\right\}$ ailesinin arakesiti boş olan sonlu bir $\left\{F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_n}\right\}$ alt ailesi vardır.

İspat. $\Rightarrow$ Varsayalım $Y \subset X$ alt kümesi ikili kompakt olsun. O halde, Tanım 4.2.2 gereği Y bi-izotonik alt uzayında Y 'nin her ikili açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. $F_j \subset X$ alt kümeleri $\mathrm{cl}_1^Y -$kapalı veya $\mathrm{cl}_2^Y -$kapalı olacak şekilde arakesiti boş olan yani $\bigcap_{j \in I} F_j = \varnothing$ sağlayan herhangi

$$\left\{F_j \middle| F_j = \mathrm{cl}_1^Y\left(F_j\right) \text{ veya } F_j = \mathrm{cl}_2^Y\left(F_j\right), j \in J\right\}$$

ailesini alalım. Eğer her $j \in J$ için $A_j = Y - F_j$ dersek Tanım 3.1.5'den $i = 1$ veya $i = 2$ olmak üzere

$$\mathrm{int}_i^Y\left(A_j\right) = Y - \mathrm{cl}_i^Y\left(Y - A_j\right) = Y - \mathrm{cl}_i^Y\left(F_j\right) = Y - F_j = A_j$$

sağlanır. $\bigcap_{j \in I} F_j = \varnothing$ ifadesinin tümleyeninden $\bigcup_{j \in J}\left(Y - F_j\right) = \bigcup_{j \in J} A_j = Y$ bulunur. Böylece $\mathscr{B}^Y = \left\{A_j \middle| A_j = \mathrm{int}_1^Y\left(A_j\right) \text{ veya } A_j = \mathrm{int}_2^Y\left(A_j\right), j \in J\right\}$ ailesi Y 'in alt uzayda bir ikili açık örtüsü olup hipotezden $\bigcup_{k=1}^{n} A_{j_k} = Y$ olacak şekilde $\left\{A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_n}\right\}$ sonlu alt örtüsü vardır. Tekrar tümleyeni alınırsa $\bigcap_{k=1}^{n}\left(Y - A_{j_k}\right) = \bigcap_{k=1}^{n} F_{j_k} = \varnothing$ bulunur. Sonuç olarak $\bigcap_{j \in I} F_j = \varnothing$ sağlayan her $\left\{F_j \middle| j \in J\right\}$ ikili kapalı alt kümeler ailesi verildiğinde $\bigcap_{k=1}^{n} F_{j_k} = \varnothing$ sağlayan sonlu $\left\{F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_n}\right\}$ alt ailesi vardır ve ispat tamamlanır.

$\Leftarrow$ X kümesinin $\mathrm{cl}_1^Y -$kapalı veya $\mathrm{cl}_2^Y -$kapalı alt kümelerinden oluşan ve arakesiti boş olan her $\left\{F_j \middle| j \in J\right\}$ ailesinin arakesiti boş olan sonlu bir alt ailesi var olsun. Y 'nin herhangi $\mathscr{B}^Y$ ikili indirgenmiş açık örtüsünü alalım. O halde $\mathscr{B}^Y = \left\{A_j \middle| j \in J\right\}$ ikili açık örtüsü $\mathrm{int}_1^Y\left(A_j\right) = A_j$ veya $\mathrm{int}_2^Y\left(A_j\right) = A_j$ olacak şekilde tanımlıdır. Eğer her $j \in J$ için $F_j = Y - A_j$ ile gösterirsek $i = 1$ veya $i = 2$ olmak üzere

$$\mathrm{cl}_i^Y\left(F_j\right)=\mathrm{cl}_i^Y\left(Y-A_j\right)=Y-\mathrm{int}_i^Y\left(A_j\right)=Y-A_j=F_j$$

olup $Y=\bigcup_{j\in I}A_j$ ifadesinin tümleyeni alınırsa $\varnothing=\bigcap_{j\in I}\left(Y-A_j\right)=\bigcap_{j\in I}F_j$ elde edilir. Kabulden $\bigcap_{k=1}^{n}F_{j_k}=\varnothing$ sağlanır. Tekrar tümleyeni alınırsa $\bigcup_{k=1}^{n}\left(Y-F_{j_k}\right)=\bigcup_{k=1}^{n}A_{j_k}=Y$ olacak şekilde $\left\{A_{j_1},A_{j_2},\ldots,A_{j_n}\right\}$ sonlu alt örtüsünün var olduğu görülür.

Sonuç 4.2.1. $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı ve $Y\subset X$ olmak üzere $\left(Y,\mathrm{cl}_1^Y,\mathrm{cl}_2^Y\right)$ bi-izotonik alt uzayının ikili kompakt olması için gerek ve yeter şart Y kümesinin sonlu arakesit özelliğine sahip ikili indirgenmiş kapalı alt kümelerinin bir $\mathscr{F}^Y$ ailesi verildiğinde $\bigcap_{F\in\mathscr{F}^Y}F\neq\varnothing$ sağlanmasıdır.

4.3. İkili Kompaktlık ve Komşuluk

Tanım 3.1.7 göz önüne alınarak aşağıdaki bi-izotonik uzaylarda bir noktanın ikili komşuluklar ailesi tanımı aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 4.3.1. $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı ve $x\in X$ olsun. Her bir $i\in\{1,2\}$ için $\mathscr{N}_i(x)$ ailesi $\left(X,\mathrm{cl}_i\right)$ izotonik uzayında x noktasının komşuluklar ailesi olmak üzere $\mathscr{N}(x)\subset\mathscr{N}_1(x)\cup\mathscr{N}_2(x)$ ise $\mathscr{N}:X\to P\left(P\left(X\right)\right)$ fonksiyonuna $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayında komşuluk fonksiyonu adı verilir.

$\mathscr{N}(x)$ ailesi de x noktasının $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayında ikili komşuluklar ailesi olarak adlandırılır.

Teorem 4.3.1. $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı olsun ve $N_x\in\mathscr{N}(x)$ kümesi herhangi $x\in X$ noktasının bir komşuluğunu göstersin. Eğer $X=\bigcup_{k=1}^{n}N_{x_k}$ olacak şekilde sonlu tane $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ noktası varsa X bi-izotonik uzayı ikili kompakttır.

İspat. Her $x\in X$ noktasının bir $N_x\in\mathscr{N}(x)$ komşuluğunu verildiğinde $X=\bigcup_{k=1}^{n}N_{x_k}$ olacak şekilde sonlu tane $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ noktası var olsun. X kümesinin herhangi ikili açık $\mathscr{B} = \left\{ A_j \subset X \,\middle|\, \operatorname{int}_1\left(A_j\right) = A_j \text{ veya } \operatorname{int}_2\left(A_j\right) = A_j,\ j \in J \right\}$ örtüsünü alalım. Yani $\bigcup_{j \in J} A_j = X$ olsun. Elbette her $x \in X$ için $x \in \operatorname{int}_i\left(A_j\right)$ olacak şekilde en az bir $j = j(x)$ yani $A_{j(x)} \in \mathscr{N}(x)$ vardır. Kabulden $1 \leq k \leq n$ olmak üzere $A_{j(x_k)}$ kümelerinin sonlu ailesi $\bigcup_{k=1}^{n} A_{j(x_k)} = X$ olacak şekilde X kümesini örter. Bu da X bi-izotonik uzayı ikili kompakt olduğunu gösterir.

Uyarı 4.3.1. Bitopolojik uzaylar için bilinen birçok kavram gibi ikili kompaktlık tanımı doğal bir şekilde bi-izotonik uzaylara genişletilmiştir ancak bazı genişletmeler için bi-izotonik uzaylarda çalışmak yeterli olmamıştır. Örneğin yukarıdaki teoremin tersinin ispatı için (K0) ve (K1) aksiyomlarına ek olarak (K2) ve (K4) aksiyomlarının varlığına ihtiyaç duyulduğundan aşağıdaki bu teoremin tersi bi-izotonik uzayrın özel hali olan bi-kapanış uzaylarında verilmiştir.

Teorem 4.3.2. $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$ bi-kapanış uzayı olsun ve $N_x \in \mathscr{N}(x)$ kümesi herhangi $x \in X$ noktasının bir komşuluğunu göstersin. X bi-kapanış uzayı ikili kompakt ise $X = \bigcup_{k=1}^{n} N_{x_k}$ olacak şekilde sonlu tane $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ noktası vardır.

İspat. X bi-kapanış uzayı ikili kompakt olsun. O halde, Teorem 4.1.1 (iii) gereği X kümesinin her $\mathscr{B}$ ikili açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır. $x \in X$ noktasının bir $N_x \in \mathscr{N}(x)$ komşuluğu verildiğinde $\mathscr{N}(x) \subset \mathscr{N}_1(x) \cup \mathscr{N}_2(x)$ olup $N_x \in \mathscr{N}_1(x)$ veya $N_x \in \mathscr{N}_2(x)$ sağlanır. $\mathscr{N}_i(x) = \left\{ N_x \in P(X) : x \in \operatorname{int}_i\left(N_x\right) \right\}$ olarak tanımlandığına göre $x \in \operatorname{int}_1\left(N_x\right)$ veya $x \in \operatorname{int}_2\left(N_x\right)$ olur. x noktaları X kümesini tararken $i = 1$ veya $i = 2$ olmak üzere $\bigcup_{x \in X} \operatorname{int}_i\left(N_x\right) = X$ sağlanır. Ayrıca (K4) aksiyomu gereği var olan $\operatorname{int}_i\left(\operatorname{int}_i\left(N_x\right)\right) = \operatorname{int}_i\left(N_x\right)$ eşitliği $\operatorname{int}_i\left(N_x\right)$ alt kümelerin ailesi ikili açık bir aile olup X kümesinin bir ikili açık örtüsünü oluşturur. X bi-kapanış uzayı ikili kompakt olması kabulu gereği $X = \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{int}_i\left(N_{x_k}\right)$ olacak şekilde sonlu $\left\{ \operatorname{int}_i\left(N_{x_1}\right), \operatorname{int}_i\left(N_{x_2}\right), \ldots, \operatorname{int}_i\left(N_{x_n}\right) \right\}$ alt örtüsünün vardır. Ayrıca (K2) aksiyomundan $x_k \in \mathrm{int}_i\left(N_{x_k}\right) \subset N_{x_k}$ bir başka deyişle $x_k \in N_{x_k}$ sağlandığı gerçeği göz önüne alınırsa $X = \bigcup_{k=1}^{n} N_{x_k}$ olacak şekilde sonlu tane $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ noktası var olduğu görülür.

4.4. İkili Kompaktlık ve Yığılma Noktası

Aşağıdaki tanım bi-izotonik uzaylar için anlamlı değildir. Genelleştirilmiş bi-kapanış uzayının en azından bi-komşuluk uzayı yada daha özel halleri olan bi-komşuluk ve bitopolojik uzay olması gerekir, aksi takdirde (K2) aksiyomunun eksikliğinde $N \in \mathscr{N}(x)$ olması $x \in N$ olmasını gerektirmez.

Tanım 4.4.1. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-komşuluk uzayı ve $x \in X$ olsun. Eğer x noktasının her $N \in \mathscr{N}(x)$ komşuluğu $(N - \{x\}) \cap A = \varnothing$ koşulunu sağlıyorsa x noktasına A kümesinin $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-komşuluk uzayında yığılma noktası adı verilir.

Uyarı 4.4.1. Aşağıdaki teoremin ispatı için Teorem 4.3.2 kullanıldığından aşağıdaki teorem bi-komşuluk uzayların özel hali olan bi-kapanış uzaylarında verilmiştir.

Teorem 4.4.1. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ ikili kompakt bi-kapanış uzayının her sonsuz alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

İspat. İkili kompakt bir $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-kapanış uzayında herhangi sonsuz elemanlı alt küme A olsun. Varsayalım ki A kümesinin hiçbir yığılma noktası olmasın. Bu durumda $(N_x - \{x\}) \cap A = \varnothing$ olacak şekilde her x noktasının en az bir $N_x \in \mathscr{N}(x)$ komşuluğu vardır. Teorem 4.3.2 gereği X bi-kapanış uzayı ikili kompakt ise $X = \bigcup_{k=1}^{n} N_{x_k}$ olacak şekilde sonlu tane $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ noktası vardır. $A \subset X$ olduğundan

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} N_{x_k}$$

elde edilir. Diğer taraftan $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ noktaları A kümesinin yığılma noktası olmadığından her bir $N_{x_k} \in \mathscr{N}(x_k)$, $1 \le k \le n$ komşuluğu için

$$A \cap \left(N_{x_k} - \{x_k\} \right) = \varnothing$$

sağlanır. Dolayısıyla, A kümesi $\varnothing$ veya sonlu bir kümedir. Bu ise, A kümesinin sonsuz olmasıyla çelişir. O halde $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2 \right)$ ikili kompakt bi-kapanış uzayının her sonsuz alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

4.5. İkili Hausdorffluk ve Kompaktlık

$\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2 \right)$ ikili Haudorff uzaylarında kompaktlığı incelemeye başlamadan önce $\left(X, \mathrm{cl} \right)$ Haudorff uzaylarında kompaktlığın anlamını açıklayan aşağıdaki yardımcı lemmayı verelim.

Lemma 4.5.1. $\left(X, \mathrm{cl} \right)$ Hausdorff kapanış uzayı olsun. Eğer bir $C \subset X$ alt kümesi kompakt ise kapalıdır.

İspat. $\left(X, \mathrm{cl} \right)$ Haudorff kapanış uzayının kompakt bir C alt kümesi verilsin. $\left(X, \mathrm{cl} \right)$ izotonik uzayı Hausdorff uzayı olduğundan x noktasından farklı her $y \in X$ noktası için $y \notin \mathrm{cl}\left(U \right)$ olacak şekilde $U \in \mathscr{N}\left(x \right)$ vardır (Habil ve Elzenati, 2008). Eğer $\mathrm{cl}\left(U \right) = F$ dersek (K4) aksiyomu gereği $\mathrm{cl}\left(F \right) = F$ olup F kapalı bir kümedir.

Ayrıca (K2) aksiyomu gereği $U \subset \mathrm{cl}\left(U \right) = F$ olur. Dahası (K1) aksiyomundan $U \in \mathscr{N}\left(x \right)$ ve $U \subset F$ olmasını gerektirir. Böylece yine (K2) aksiyomundan $F \in \mathscr{N}\left(x \right)$ ise $x \in F$ olur.

x noktasının kapalı komşuluklar ailesini $\mathscr{F}\left(x \right)$ ile gösterelim. O halde x noktasından farklı her y noktasını içermeyen bir $F \in \mathscr{F}\left(x \right)$ kapalı kümesi var olduğuna göre

$$\bigcap_{F \in \mathscr{F}(x)} F = \left\{ x \right\}$$

sağlanır. Şimdi herhangi $x \in \mathrm{cl}\left(C \right) \subset X$ noktasını alalım. (Stadler ve Stadler, 2002)'dan izotonik uzaylarda $\mathrm{cl}\left(C \right) = \left\{ a \in X \middle| \forall N \in \mathscr{N}\left(a \right) : C \cap N \neq \varnothing \right\}$ olduğu bilinmektedir. Bu göz önüne alınarak kapanış uzayında $\forall F \in \mathscr{F}\left(x \right)$ için $C \cap F \neq \varnothing$

olup $\mathscr{F}^C(x)=\{C\cap F \mid F\in\mathscr{F} : x\in F\}$ ailesi indirgenmiş kapalı komşuluklar ailesi sonlu arakesit özelliğine sahip olup C kompakt olduğundan

$$\varnothing \neq \bigcap_{C\cap F\in\mathscr{F}^C(x)} (C\cap F) = C\cap \bigcap_{F\in\mathscr{F}(x)} F = C\cap\{x\}$$

sağlanır. Sonuç olarak $C\cap\{x\}\neq\varnothing$ olması $x\in C$ yani bu da $\mathrm{cl}(C)\subset C$ olmasını gerektirir. (K2) aksiyomu gereği $C\subset\mathrm{cl}(C)$ kapsaması vardır ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.5.1. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili Haudorff bi-kapanış uzayının cl_1-kompakt alt kümeleri cl_2-kapalıdır.

İspat. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili Haudorff bi-kapanış uzayının cl_1-kompakt bir C alt kümesini alalım. X ikili Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter şart her farklı $x,y\in X$ için $y\notin\mathrm{cl}_1(N_x)$ olacak şekilde $N_x\in\mathscr{N}_2(x)$ ve $x\notin\mathrm{cl}_2(N_y)$ olacak şekilde $N_y\in\mathscr{N}_1(y)$ var olmasıdır (Ersoy ve Erol, 2020). (K4) aksiyomu gereği $\mathrm{cl}_1(\mathrm{cl}_1(N_x))=\mathrm{cl}_1(N_x)$ olup cl_1-kapalı olduğu görülür. $\mathscr{F}_{\mathrm{cl}_1}(x)$ ailesi x noktasını içeren cl_1-kapalı kümeler ailesini göstersin. Bu durumda x'den farklı y noktaları için $y\notin\mathrm{cl}_1(N_x)$ olacağından $\bigcap_{\mathrm{cl}_1(N_x)\in\mathscr{F}_{\mathrm{cl}_1}(x)} \mathrm{cl}_1(N_x)=\{x\}$ sağlanır.

Şimdi herhangi $x\in\mathrm{cl}_2(C)$ alalım. $\mathrm{cl}_2(C)=\{x\in X \mid \forall N_x\in\mathscr{N}_2(x): C\cap N_x\neq\varnothing\}$ olduğuna göre (K2) aksiyomu gereği $x\in N_x\subseteq\mathrm{cl}_1(N_x)$ olup her $N_x\in\mathscr{N}_2(x)$ için $C\cap\mathrm{cl}_1(N_x)\neq\varnothing$ sağlanır.

Ayrıca C kümesi cl_1-kompakt olduğundan cl_1-kapalı olan $\mathrm{cl}_1(N_x)\in\mathscr{F}_{\mathrm{cl}_1}(x)$ alt kümelerinin ailesi verildiğinde $C\subset\bigcup_{k=1}^{n} N_{x_k}$ olacak şekilde sonlu tane $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ noktası vardır. Dolayısıyla

$$\bigcap_{k=1}^{n}\left(C\cap\mathrm{cl}_1\left(N_{x_k}\right)\right)\neq\varnothing$$

sağlanır. Böylece $\mathscr{F}_{\mathrm{cl}_1}^{C}(x)=\left\{C\cap \mathrm{cl}_1(N_x)\middle|\mathrm{cl}_1(N_x)\in \mathscr{F}_{\mathrm{cl}_1}(x)\right\}$ indirgenmiş cl_1-kapalı kümeler ailesi sonlu arakesit özelliğine sahip olur ve

$$\bigcap_{C\cap \mathrm{cl}_1(N_x)\in \mathscr{F}_{\mathrm{cl}_1}^{C}(x)}\left(C\cap \mathrm{cl}_1(N_x)\right)\neq\varnothing$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\varnothing\neq C\cap \bigcap_{\mathrm{cl}_1(N_x)\in \mathscr{F}_{\mathrm{cl}_1}(x)}\mathrm{cl}_1(N_x)=C\cap\{x\}$$

elde edilir. Sonuç olarak $x\in C$ olur. Buradan $\mathrm{cl}_2(C)\subseteq C$ olduğu görülür. Ayrıca (K2) aksiyomu gereği $C\subseteq \mathrm{cl}_2(C)$ olup ispat tamamlanır.

Aşağıdaki sonuç bu teoremin ispatına benzer yolla kolaylıkla kanıtlanabilir.

Sonuç 4.5.1. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ ikili Haudorff bi-kapanış uzayının cl_2-kompakt alt kümeleri cl_1-kapalıdır.

4.6. İkili Kompakt Uzayların Kapalı Alt Kümeleri

Teorem 4.6.1. $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili kompakt olsun. X ’in cl_1-kapalı alt kümeleri cl_2-kompakttır.

İspat. C, X ’in boştan farklı herhangi cl_1-kapalı alt kümesi olsun. C ’nin $\bigcap_{j\in I}\left(C\cap F_j\right)=\varnothing$ olacak şekilde herhangi $\mathrm{cl}_2^{Y}-$kapalı alt kümelerinin bir $\mathscr{F}_{\mathrm{cl}_2^{Y}}=\left\{C\cap F_j\middle|\mathrm{cl}_2(F_j)=F_j,\, j\in J\right\}$ ailesini alalım. Bu durumda $\mathscr{F}_{\mathrm{cl}_2}=\left\{F_j\middle|\mathrm{cl}_2(F_j)=F_j,\, j\in J\right\}$ ailesi cl_2-kapalı alt kümelerden oluşur ve $\mathscr{F}_{\mathrm{cl}_2}\cup\{C\}$ ailesi X kümesinin ikili kapalı alt kümelerinden oluşan ve arakesiti boş olan bir ailesi olur. Böylece $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili kompakt uzay olduğundan $C\cap\bigcap_{k=1}^{n}F_{j_k}=\varnothing$ olacak şekilde ikili kapalı alt kümelerinden oluşan $\left\{F_{j_1},F_{j_2},\dots,F_{j_n},C\right\}$ sonlu alt ailesi vardır. Sonuç olarak C, X ’in boştan farklı alt kümesi olduğuna göre $\bigcap_{k=1}^{n}\left(C\cap F_{j_k}\right)=\varnothing$ olacak şekilde $\mathrm{cl}_2^{Y}-$kapalı alt kümelerinin

$\{C \cap F_{j_1}, C \cap F_{j_2}, ..., C \cap F_{j_n}\}$ sonlu alt ailesinin varlığı C'nin cl_2-kompakt olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

Aşağıdaki sonuç bu teoremin ispatına benzer yolla kolaylıkla kanıtlanabilir.

Sonuç 4.6.1. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-izotonik uzayı ikili kompakt olsun. X'in cl_2-kapalı alt kümeleri cl_1-kompakttır.

Teorem 4.5.1, Sonuç 4.5.1, Teorem 4.6.1 ve Sonuç 4.6.1 göz önüne alınarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.6.2. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-kapanış uzayı ikili kompakt ve ikili Hausdorff olsun. $i \neq j$ olacak şekilde $i, j \in \{1,2\}$ için $C \subset X$ alt kümesi cl_i-kompakttır ancak ve ancak cl_2-kapalıdır.

Uyarı 4.6.1. Lemma 4.5.1'e göre Haudorff kapanış uzayının kompakt alt kümeleri kapalı ve Sonuç 4.6.2'ye göre ikili kompakt bi-kapanış uzayının cl_i-kapalı alt kümelerinin cl_j-kompakt olduğu göz önüne alınarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.6.2. (X, cl_1) ve (X, cl_2) kapanış uzayları Haudorff ve $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-kapanış uzayı da ikili kompakt olsun. O zaman $\mathrm{cl}_1 = \mathrm{cl}_2$ olur.

İspat. X'in her cl_1-kapalı alt kümesinin cl_2-kapalı ve her cl_2-kapalı alt kümesinin cl_1-kapalı olduğu gösterilmelidir. Bu amaçla X'in herhangi cl_1-kapalı C alt kümesini alalım. Sonuç 4.6.2'e göre C alt kümesi cl_2-kompakttır. (X, cl_1) hem de (X, cl_2) kapanış uzayları da Hausdorff uzayı olduğunundan Lemma 4.5.1'e göre (X, cl_2) Haudorff kapanış uzayının cl_2-kompakt alt kümeleri cl_2-kapalı olduğundan C alt kümesi cl_2-kapalıdır. Benzer şekilde benzer şekilde X'in her cl_2-kapalı alt kümesi cl_1-kapalı olduğu gösterilir. Bu ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teoremin ispatında (K2) aksiyomuna ihitiyaç duyulduğundan uzay en azından bi-komşuluk uzayı olması gerekir.

Teorem 4.6.3. $(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2)$ bi-komşuluk uzayı verilsin. X kümesinin sonlu sayıda ikili kompakt alt kümelerinin birleşimi ikili kompakttır.

İspat. X kümesinin herhangi iki Y_1 ve Y_2 ikili kompakt alt kümesi verilsin. $Y = Y_1 \cup Y_2$ kümesinin ikili kompakt olduğunu gösterelim.

$F_j \subset X$ alt kümeleri $\mathrm{cl}_1^Y -$kapalı veya $\mathrm{cl}_2^Y -$kapalı yani $F_j = \mathrm{cl}_1^Y\left(F_j\right)$ veya $F_j = \mathrm{cl}_2^Y\left(F_j\right)$ olacak şekilde $\bigcap_{j\in I} F_j = \varnothing$ sağlayan herhangi $\left\{F_j \,|\, j \in J\right\}$ ailesini alalım. $s=1$ ve $s=2$ için

$$\begin{aligned} Y_s &\subseteq Y \\ Y_s \cap \mathrm{cl}_i\left(F_j\right) &\subseteq Y \cap \mathrm{cl}_i\left(F_j\right) \\ \mathrm{cl}_i^{Y_s}\left(F_j\right) &\subseteq \mathrm{cl}_i^{Y}\left(F_j\right) = F_j \end{aligned}$$

sağlanır. Ayrıca (K2) aksiyomundan $F_j \subseteq \mathrm{cl}_i^{Y_s}\left(F_j\right)$ olduğundan F_j kümeleri $\mathrm{cl}_1^{Y_s} -$ kapalı veya $\mathrm{cl}_2^{Y_s} -$kapalıdır. Böylece $\bigcap_{j\in I} F_j = \varnothing$ özelliğini sağlayan $\left\{F_j \,|\, j \in J\right\}$ ailesinin Y_1 ikili kompakt olduğundan $\mathrm{cl}_1^{Y_1} -$kapalı veya $\mathrm{cl}_2^{Y_1} -$kapalı kümelerin $\bigcap_{k=1}^{m} F_{j_k} = \varnothing$ olacak şekilde $\left\{F_{j_k} \,|1 \le k \le m\right\}$ sonlu alt ailesi ve Y_2 ikili kompakt olduğundan $\mathrm{cl}_1^{Y_2} -$kapalı veya $\mathrm{cl}_2^{Y_2} -$kapalı kümelerin $\bigcap_{k=m+1}^{n} F_{j_k} = \varnothing$ olacak şekilde $\left\{F_{j_k} \,|m+1 \le k \le n\right\}$ sonlu alt ailesi vardır. Sonuç olarak $\bigcap_{j\in I} F_j = \varnothing$ özelliğini sağlayan $\left\{F_j \,|\, j \in J\right\}$ ailesinin $\bigcap_{k=1}^{n} F_{j_k} = \varnothing$ olacak şekilde $\mathrm{cl}_1^Y -$kapalı veya $\mathrm{cl}_2^Y -$kapalı kümelerinin

$$\left\{F_{j_k} \,|1 \le k \le m\right\} \cup \left\{F_{j_k} \,|m+1 \le k \le n\right\} = \left\{F_{j_k} \,|1 \le k \le n\right\}$$

sonlu alt ailesinin varlığı $Y = Y_1 \cup Y_2$ kümesinin ikili kompakt olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.6.4. $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$ bi-kapanış uzayı ikili Hausdorff olsun. $i \ne j$ için $i \in \{1,2\}$ olmak üzere X kümesinin herhangi sayıda $\mathrm{cl}_i -$kompakt alt kümelerinin kesişimi $\mathrm{cl}_j -$kapalıdır.

İspat. $s \in I$ olmak üzere C_s kümeleri X 'in herhangi $\mathrm{cl}_i -$kompakt alt kümeleri olsun. $C = \bigcap_{s\in I} C_s$ alt kümesinin $\mathrm{cl}_i -$kompakt olduğunu kanıtlanmalıdır.

$\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$ bi-kapanış uzayı ikili Hausdorff olduğundan Sonuç 4.5.1'den, $s \in I$ için C_s alt kümeleri $i, j \in \{1,2\}$ olmak üzere $i \neq j$ için $\mathrm{cl}_i -$kompakt alt kümeleri $\mathrm{cl}_j -$kapalıdır. $C = \bigcap_{s\in I} C_s \subseteq C_s$ olup izotoni özelliğinden

$$\mathrm{cl}_j\left(C\right) = \mathrm{cl}_j\left(\bigcap_{s\in I} C_s\right) \overset{\text{(K1)'den}}{\subseteq} \bigcap_{s\in I} \mathrm{cl}_j\left(C_s\right) = \bigcap_{s\in I} C_s = C$$

elde edilir. Ayrıca (K2)'den $C \subseteq \mathrm{cl}_j\left(C\right)$ kapsaması da vardır. Böylece $\mathrm{cl}_j\left(C\right) = C$ olduğundan C alt kümesi $\mathrm{cl}_j -$kapalıdır.

Teorem 4.6.1 ve Sonuç 4.6.1'den ikili kompakt bi-kapanış uzayının $\mathrm{cl}_j -$kapalı alt kümesi $\mathrm{cl}_i -$kompakt olduğundan $C \subset C_s$ olup C alt kümesi $\mathrm{cl}_i -$kompakttır ve aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.6.3. $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$ bi-kapanış uzayı ikili kompakt ve ikili Hausdorff olsun. $i \in \{1,2\}$ olmak üzere X kümesinin herhangi sayıda $\mathrm{cl}_i -$kompakt alt kümelerinin kesişimi $\mathrm{cl}_i -$kompakttır.

4.7. İkili Kompaktlık ve İkili Süreklilik

Teorem 4.7.1. $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$ ve $\left(Y, \mathrm{cl}_1', \mathrm{cl}_2'\right)$ iki bi-kapanış uzayı ve $f : \left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right) \to \left(Y, \mathrm{cl}_1', \mathrm{cl}_2'\right)$ bi-sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzayı ikili kompakt ise $f\left(X\right)$ kümesi $\left(Y, \mathrm{cl}_1', \mathrm{cl}_2'\right)$ uzayında ikili kompakttır.

İspat. $f\left(X\right)$'in her $j \in J$ için F_j alt kümeleri $\mathrm{cl}_1' -$kapalı veya $\mathrm{cl}_2' -$kapalı olacak şekilde arakesiti boş olan yani $\bigcap_{j\in I} F_j = \varnothing$ sağlayan herhangi $\left\{F_j \middle| F_j \subset f\left(X\right)\right\}_{j\in J}$ ikili kapalı alt kümeler ailesini alalım. f dönüşümü bi-sürekli olduğundan Önerme 3.2.2'den her $j \in J$ ve $i \in \{1,2\}$ için $\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(F_j\right)\right) \subseteq f^{-1}\left(\mathrm{cl}_i'\left(F_j\right)\right)$ dir. Her $j \in J$ için

F_j alt kümeleri cl'_1- kapalı veya cl'_2- kapalı olduğundan $i=1$ veya $i=2$ olmak üzere $\mathrm{cl}'_i\left(F_j\right)=F_j$ olup $\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(F_j\right)\right)\subseteq f^{-1}\left(F_j\right)$ sağlanır. Ayrıca $\bigcap_{j\in I}F_j=\varnothing$ ifadesinin ön görüntüsünden

$$\bigcap_{j\in I} f^{-1}\left(F_j\right)=f^{-1}\left(\bigcap_{j\in I}F_j\right)=f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$$

elde edilir. Böylece $\bigcap_{j\in I}\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(F_j\right)\right)=\varnothing$ sağlanır. $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-kapanış uzayında $\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(F_j\right)\right)$ alt kümeleri cl_1- kapalı yada cl_2-kapalıdır ve X ikili kompakt olduğundan $\left\{\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(F_j\right)\right)\middle|\, f^{-1}\left(F_j\right)\subset X\right\}_{j\in J}$ ikili kapalı alt kümeler ailesi verildiğinde

$$\bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(F_{j_k}\right)\right)=\varnothing$$

eşitliğini sağlayan sonlu $\left\{\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(F_{j_1}\right)\right),\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(F_{j_2}\right)\right),\ldots,\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(F_{j_n}\right)\right)\right\}$ alt ailesi vardır. f dönüşümü bi-sürekli olduğundan Önerme 3.2.1'den her $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ olmak üzere $f^{-1}\left(F_{j_k}\right)\subset X$ alt kümeleri için $f\left(\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(F_{j_k}\right)\right)\right)\subseteq\mathrm{cl}'_i\left(f\left(f^{-1}\left(F_{j_k}\right)\right)\right)=\mathrm{cl}'_i\left(F_{j_k}\right)=F_{j_k}$ sağlanır. Böylece

$$\varnothing=f(\varnothing)=f\left(\bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(F_{j_k}\right)\right)\right)\subseteq\bigcap_{k=1}^{n}f\left(\mathrm{cl}_i\left(f^{-1}\left(F_{j_k}\right)\right)\right)\subseteq\bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{cl}'_i\left(F_{j_k}\right)=\bigcap_{k=1}^{n}F_{j_k}$$

sağlanır ve ispat tamamlanır.

f fonksiyonu örten bir fonksiyon ise $f(X)=Y$ olduğundan aşağıdaki sonuç Teorem 4.7.1'den doğrudan elde edilir.

Sonuç 4.7.1 $f:\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)\to\left(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2\right)$ bi-sürekli birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer $\left(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2\right)$ bi-kapanış uzayı ikili kompakt uzay ise $\left(Y,\mathrm{cl}'_1,\mathrm{cl}'_2\right)$ bi-kapanış uzayı da ikili kompakt uzaydır.

Sonuç 4.7.2. $f:(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)\to(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ bi-homeomorfizm olsun. Eğer $(X,\mathrm{cl}_1,\mathrm{cl}_2)$ bi-kapanış uzayı ikili kompakt uzay olması için gerek ve yeter şart $(Y,\mathrm{cl}_1',\mathrm{cl}_2')$ bi-kapanış uzayının ikili kompakt olmasıdır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının orijinal kısmı Bölüm 4'te verilmiş olup bi-izotonik uzaylarda ikili kompaktlık sonlu arakesit özelliği ve ikili açık örtü ile ifade edilmiştir. Bi-izotonik alt uzaylarda ikili kompaktlık hem indirgenmiş kapanış fonksiyonları hem de bu fonksiyonların dualleri olan iç fonksiyonları ile tanımlanmıştır. Komşuluk kavramı ile ikili kompaktlık karakterize edilmiş, bu süreçte bi-izotonik uzaylarda çalışmanın yeterli olmadığı görülmüştür. Dolaysıyla kompaktlığa ilişkin birçok kavram bi-izotonik uzaylara kolaylıkla genişletilmesine rağmen zaman zaman bi-kapanış yada bi-komşuluk uzaylarında çalışılmıştır. Ayırma aksiyomlarından ikili Hausdorffluk ve kompaktlık ilişkisi araştırılarak ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca benzer çapraz ilişkilerin ikili kompakt uzayların kapalı alt kümeleri için de var olduğu görülmüştür. Son olarak bi-kapanış uzaylarının ikili kompaktlığının bi-süreklilik altında korunduğu görülmüştür.

Verilen yeni tanımlamalar ve elde edilen orijinal sonuçlar yardımıyla ileri bir çalışmalarda $\left(X, \mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2\right)$ bi-izotonik uzaylarında sayılabilir ikili kompaktlık, dizisel ikili kompaktlık ve yerel ikili kompaktlık ve ikili parakompaktlık kavramları araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Birsan, T. (1969). Compacité dans les espaces bitopologiques., *An. Şti. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Secţ. I a Mat. (N.S.)* 15, 317–328.

Boonpok, C. (2010). Hausdorff biclosure spaces, *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, 5(5-8), 359–363.

Čech, Frolík, Z. & Katětov, M. (1966). *Topological spaces*, Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 233–394.

Cobzaş, Ş. (2013). *Functional analysis in asymmetric normed spaces.* Frontiers in Mathematics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.

Datta, M.C. (1972). Projective bitopological spaces, *J. Austral. Math. Soc.* 13, 327–334.

Dvalishvili, B. P. (2005). *Bitopological space: Theory, Relations with Generalized Algebraic Structures and Applications*, North-Holland Math. Studies, Volume 199 - 1st Edition.

Ersoy, S. & Acet, A. A. (2022). Pairwise connectedness in bi-isotonic spaces, *Palest. J. Math.* 11(2), 342–351.

Ersoy, S. & Erol, N. (2020). Separation axioms in bi-isotonic spaces, *Sci. Math. Jpn.* 83(3), 225–240.

Fletcher, P., Hoyle, H. B. & Patty, C.W. (1969). The comparison of topologies, *Duke Math. J.* 36, 325–331.

Habil, E. D. & Elzenati, K. A. (2006). Connectedness in isotonic spaces. *Turk. J. Math.* 30, 247–262.

Habil, E. D. & Elzenati, K. A. (2008). Topological properties in isotonic spaces, *Islamic Uni. J.* 16(2), 1–14.

Ivanov, A. A. (1995). Problems of the theory of bitopological spaces, III. (Russian) *Zap. Nauchn. Sem. S –Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 231, Issled. Po Topol. 8, 9-54, English Trans.: *J. Math. Sci.* (New York) 91(1998), No.6, 3339–3364

Kelley, J. L. (1955). *General Topology*, Van Nostrand Reinhold Co., New York.

Kelly, J. C. (1963). Bitopological Spaces, *Proc. London Math. Soc.* (3) 13, 71–89.

Kim, Y. W. (1968). Pairwise compactness, *Publicationes Mathematicae* 15, 87-90

Lane, E. P. (1967) Bitopological spaces and quasi-uniform spaces, *Proc. London Math. Soc.* 1-2, 2, 241–256.

Motchane, L. (1957). Sur la notion d'espace bitopologique et sur les espaces de Baire, *C. R. Acad. Sci. Paris* 224, 3121–3124.

Murdeshwar, M. G. & Naimpally, S. A. (1966). *Quasi-Uniform Topological Spaces*, Ser. A, Noordhoff, Groningen.

Pahk, D.H. & Choi, B.D. (1971). Notes on pairwise compactness, *Kyungpook Math. J.* 11, 45–52.

Ravi, O. (2006), Thivagar, M.L., A bitopological (1,2)∗ semi-generalised continuous maps. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 2(29), 1, 79–88.

Reilly, I. L. (1972). On bitopological separation properties, *Nanta Math.* 5(2) 14–25

Reilly, I. L. (1986). On essentially pairwise Hausdorff spaces, *Rend. Circ. Mat. Palermo Series 2* 25(1-2) 47–52,

Saegrove, J. (1973). Pairwise complete regularity and compactification in bitopological spaces, *J. London Math. Soc.* 2(7), 286–290.

Stadler, B. M. R. & Stadler, P.F. (2002). Basic properties of closure spaces, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* 42, 577–585.

Swart, J. (1971). Total disconnectedness in bitopological spaces and product bitopological spaces, *Indag. Math.* 33, 135-145.

Uysal, N. (2018). Bi-izotonik uzaylar ve ayırma aksiyomları, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Topoloji Bilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 1-70.

Weston, J. D. (1957). On the comparison of topologies, *J. London Math.* Soc., 32, 342–354.

ÖZGEÇMİŞ

Seval KOCA :

02.04.1991 tarihinde Sakarya'da doğdu ilk ve orta öğretimi Sakarya'da tamamladı.

ÖĞRENİM DURUMU:

2017, Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

2023, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Topoloji Bilim Dalı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2013-2014 yılları arasında Tiamo Kurs Merkezinde mental Matematik Öğretmenliği yaptı.
- 2017-2018 yılları arasında Milli Eğitim Bakanlığı'nda ücretli öğretmen olarak çalıştı.
- 2018-2020 yılında Özel Kale Kolejinde öğretmenlik yaptı.
- 2020 yılından beri Özel Mefkure Kolejinde Matematik Öğretmenliği yapıyor.