T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİSLER YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI İLE İLGİLİ ÖZDEŞLİKLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülsüm LİMAN

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

OCAK 2024

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİSLER YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI İLE İLGİLİ ÖZDEŞLİKLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülsüm LİMAN

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Refik KESKİN

OCAK 2024

Gülsüm LİMAN tarafından hazırlanan "MATRİSLER YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI İLE İLGİLİ ÖZDEŞLİKLER ÜZERİNE" adlı tez çalışması 25.01.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı : **Prof. Dr. Refik KESKİN (Danışman)** ....
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR** ....
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Dr. Öğr. Üyesi Merve GÜNEY DUMAN** ....
Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum "MATRİSLER YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI İLE İLGİLİ ÖZDEŞLİKLER ÜZERİNE" başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(25/01/2024)

Gülsüm LİMAN

Eşime ve çocuklarıma

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğretimim boyunca beni teşvik eden, titizlikle yönlendiren ve değerli bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan değerli danışman hocam Prof. Dr. Refik KESKİN'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca sayın Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR, Prof. Dr. Zafer ŞİAR ve Dr. Öğr. Üyesi Merve GÜNEY DUMAN hocalarıma fikir ve düşüncelerini benimle paylaştıkları için teşekkür ederim.

Bu süreçte hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen, her zaman yanımda olan aileme ve eşim Kasım Furkan LİMAN'a teşekkür ederim.

Gülsüm LİMAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ v
TEŞEKKÜR ix
İÇİNDEKİLER xi
SİMGELER VE KISALTMALAR xiii
ÖZET xv
SUMMARY xix
1. GİRİŞ 1
2. ÖN BİLGİLER 6
3. İKİNCİ MERTEBEDEN MATRİSLER YARDIMIYLA ÖZDEŞLİK TÜRETME 13
4. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN MATRİSLER YARDIMIYLA ÖZDEŞLİK TÜRETME 53
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 63
KAYNAKLAR 65
ÖZGEÇMİŞ 72

SİMGELER VE KISALTMALAR

F_n	: n. Fibonacci sayısı
L_n	: n. Lucas sayısı
(F_n)	: Fibonacci dizisi
(L_n)	: Lucas dizisi
(U_n)	: Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
(V_n)	: Genelleştirilmiş Lucas dizisi
U_n	: n. Genelleştirilmiş Fibonacci sayısı
V_n	: n. Genelleştirilmiş Lucas sayısı
(P_n)	: Pell dizisi
(Q_n)	: Pell-Lucas dizisi
$\|A\|$	: A kare matrisinin determinantı
A^n	: A kare matrisinin n. kuvveti
$[\![a]\!]$	: a reel sayısının tam değeri
I	: Birim matris
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar ümesi
$\sum$	: Toplam sembolü

MATRİSLER YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI İLE İLGİLİ ÖZDEŞLİKLER ÜZERİNE

ÖZET

Leonardo Fibonacci Avrupa orta çağının en genç matematikçisi olarak tanınır. Matematik yazılarında verdiği bilgiler dışında hayatı hakkında çok az şey bilinmektedir. Pisalı bir tüccar olan babası Fibonacci'ye henüz çocuk yaştayken Cezayir'in Bugia şehrinde ticaretlerini takip etmesi ve hesaplama sanatını öğrenmesi için ilk eğitimini aldırır. Fibonacci, Hint-Arap sisteminin o zamanlar İtalya'da kullanılan Romen numaralandırma sistemine göre daha üstün olduğuna ikna olmuştur. Daha sonra Fibonacci 1202'de öncü çalışması Liber Abaci'yi yayınladı. Liber Abaci kitabında bahsedilen $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ sayı dizisi birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Bu dizinin elemanları kendinden önceki iki sayının toplamı şeklindedir. Bu sayı dizisine Fibonacci dizisi denir. n. Fibonacci sayısı F_n ile göstrilir. Başlangıç koşuları farklı seçildiğinde oluşan bir diğer dizi ise $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$ şeklinde tanımlanan Lucas dizisidir. n. Lucas sayısı L_n ile göstrilir. Bu iki dizi başlangıç koşulları $F_0 = 0, F_1 = 1$ ve $L_0 = 2, L_1 = 1, n \geq 2$ için sırasıyla $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ve $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ tekrarlama bağıntıları ile tanımlanır. Literatürde bu iki dizi ile ilgili birçok özdeşlik bulunmaktadır. Bu özdeşliklerin ispatında ise matrislerden, matematiksel tümevarımdan ve Binet formüllerinden yararlanılmıştır. Bu matrislerden en bilineni ise $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Fibonacci matrisidir. Q matrisinin ilk kullanımı 1960 yılında Charles H. King'in San Jose Eyalet Koleji yüksek lisans tezinde "Fibonacci'nin Bazı Diğer Özellikleri" başlığıyla ortaya çıktığı biliniyor. Burada, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin n. kuvveti $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$'dir. İlk olarak 1753 yılında Robert Simson tarafından verilen $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ Cassini özdeşliğinin daha sonra Q matrisi ile ilgili $|Q|^n = |Q^n|$ eşitliği yardımıyla elde edildiği görülmüştür. Burada Fibonacci ve Lucas dizileri başlangıç koşulları farklı seçildiğinde elde edilen dizilerden sadece ikisidir. Daha sonra genel bir tanım yapılmıştır. Genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizileri sırasıyla $U_0 = 0, U_1 = 1, V_0 = 2, V_1 = k, n \geq 2$ için sırasıyla $U_n = kU_{n-1} + tU_{n-2}$ ve $V_n = kV_{n-1} + tV_{n-2}$ tekrarlama bağıntıları ile tanımlanmıştır. Literatürde bu iki dizi ile ilgili birçok özdeşlik bulunmaktadır. Bu özdeşlikleri elde etmek için farklı yöntemler kullanılmıştır. Bu yöntemlerden biri de kare matrisleri kullanmaktır. Bu matrislerden en bilineni ise $A = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisidir. Bu matrisin n. kuvveti $A^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & tU_n \\ U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix}$ 'dir. Burada $|A|^n = |A^n|$ eşitliği kullanıldığında Cassini özdeşliğinin en genel hali olan $U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = (-t)^{n-1}$ özdeşliği elde edilir.

Birinci bölümde çalışmanın içeriği hakkında bazı bilgiler kısaca verilmiştir. Ayrıca karesel matrisler ile ilgili literatürde bulunan bazı çalışmalar tanıtılmıştır ve alınan matrislerin genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili özdeşliklerin türetilmesinde nasıl kullanıldığından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, ilk olarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının tanımları verilmiştir. Daha sonra bu sayılarla ilgili bazı özelliklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak terimleri $\{0,1,\pm a,\pm b,a+b,-ab\}$ kümesinde olan

2×2 boyutlu matrisler seçilerek bu matrislerin $n.$ kuvveti hesaplanmıştır. Hesaplamalar yapılırken seçilen kare matrislerin özdeğerleri ve özvektörleri kullanılarak köşegenleştirilip $n.$ kuvvetleri hesaplanmıştır. Daha sonra buradan hareketle elde edilen matrislerde

$$a=\alpha=\frac{k+\sqrt{k^2+4t}}{2}$$

ve

$$b=\beta=\frac{k-\sqrt{k^2+4t}}{2}$$

alınarak terimleri genelleştirilmiş Fibonacci sayısı ve genelleştirilmiş Lucas sayısı olan bazı yeni 2×2 boyutlu matrisler elde edilmiştir. Elde edilen bu matrislerden Binom açılımı yardımıyla, n ve m doğal sayı iken

$$U_{n+1}=t\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^jU_{n-j-1},$$

$$U_n=-\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^jU_{n-j},$$

$$V_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^jV_{n-j},$$

$$U_{mn+1}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}tU_{mn-1-mj}{V_m}^j,$$

$$U_mU_{mn+mk+m}=U_{mn+m}U_{mk+m}+(-t)^mU_{mn}U_{mk},$$

$$V_m^n=-\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^m(-t)^{mj}\frac{U_{mn-2mj-m}}{U_m},$$

$$V_m^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj}U_{mn+1-2mj},$$

$$2V_m^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}V_{mn-2mj}(-t)^{mj},$$

$$V_{mn}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}V_{mn-mj}{V_m}^j,$$

$$k^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^jU_{n-2j+1},$$

$$2k^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^jV_{n-2j},$$

$$k(k^2+4t)^n=\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^jU_{2n-2j+2},$$

$$2(k^2+4t)^n=\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^jU_{2n-2j+1},$$

$$0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^jU_{n-2j},$$

$$0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj}\frac{U_{mn-2mj}}{U_m},$$

$$0=\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^{j}V_{2n-2j}\ ,$$

$$0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj}U_{mn-2mj},$$

$$0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}U_{mn-2mj}(-t)^{mj}$$

özdeşlikleri elde edilmiştir.

Ayrıca n tek doğal sayı iken

$$V_n=k\sum_{j=0}^{n-1}t^{j}U_{n-2j},$$

$$V_n=k\sum_{j=0}^{n-1}t^{j+1}U_{n-2j-2},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}t^{j}U_{n-2j-1}=0,$$

$$\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{j}(-t)^{j}U_{n-2j}=\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{n-j}U_{2j-n},$$

$$2U_m^n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}U_{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^{j},$$

$$0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj}(-1)^{j}V_{mn-2mj}$$

ve n çift doğal sayı iken

$$\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{j}(-t)^{j}U_{n-2j}=\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{n-j}U_{2j-n},$$

$$2U_m^n(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}V_{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^{j},$$

$$0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}U_{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^{j}$$

gibi özdeşlikler bulunmuştur. Daha sonra terimleri $\{0,1,\pm k,t,2t,\pm kt,k^2+2t\}$ kümesinde olan bazı 2×2 boyutlu matrisler seçilerek bu matrislerin de n. kuvveti hesaplanmıştır. Elde edilen bu matrisler yardımıyla da yukarıda verilen özdeşliklere benzer yeni özdeşlikler elde edilmiştir. Son olarak ise elde edilen matrisler yardımıyla

$$(k^2+4t)(-t)^{n-1}=V_{n+1}V_{n-1}-V_n^2$$

özdeşliği elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise 3×3 boyutlu matrislere yer verilmiştir. Bu bölümde bazı kaynaklardan alınan 3×3 boyutlu matrislerin özdeşlik elde etmede nasıl kullanıldığından bahsedilmiştir. Daha sonra 3×3 boyutlu bazı matrisler verilip n. kuvvetleri köşegenleştirme yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Bu matrisler yeni özdeşlikler elde etmek için kullanılmıştır. Bu özdeşliklerden bazıları aşağıda verilmiştir.

$$U_{m+n} = U_m U_{n+1} + tU_{m-1}U_n,$$

$$U_{mn+mk+m}U_m = U_{mn+m}U_{mk+m} - (-t)^m U_{mn}U_{mk},$$

$$U_{mn+mk}U_m = U_{mn}U_{mk+m} - (-t)^m U_{mn-m}U_{mk}\ ,$$

$$(-t)^{mn-m}U_m^2 = U_{mn}^2 - U_{mn-m}U_{mn+m}.$$

Beşinci bölümde sonuç ve öneriler yer almaktadır.

ON IDENTITIES RELATED TO GENERALIZED FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS BY THE HELP OF MATRİCES

SUMMARY

Leonardo Fibonacci is known as the youngest mathematician of the European Middle Ages. Little is known about his life, except for a few facts he gave in his mathematical writings. His father gave him his first education in Bugia, Algeria, to learn the art of calculation in order to follow their trade. Fibonacci was convinced that the Indo-Arabic system was superior to the Roman numbering system used in Italy at the time. Fibonacci then published his pioneering work, Liber Abaci, in 1202. The $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ number sequence mentioned in the book Liber Abaci has attracted the attention of many mathematicians. The elements of this array are the sum of the two numbers before it. This sequence of numbers is called the Fibonacci sequence. The nth Fibonacci number is denoted by F_n. Another sequence that occurs when the initial conditions are chosen differently is the Lucas sequence defined as $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...$ The nth Lucas number is denoted by L_n. These two sequences are defined by the recurrence relations $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ and $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ for $n \geq 2$ with the initial conditions $F_0 = 0, F_1 = 1$ and $L_0 = 2, L_1 = 1,$ respectively. There are many identities regarding these two sequences in the literature. In proving these identities, matrices, mathematical induction and Binet formulas are used. The most well-known of these matrices is the Fibonacci matrix $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. It is known that the first use of the Q matrix appeared in 1960 in Charles H. King's San Jose State College master's thesis under the title "Some Properties of the Fibonacci Numbers". The nth power of the matrix $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ is $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$. It has been seen that the equation $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ (Cassini's identity) given by Robert Simson in 1753 is obtained from the equation $|Q|^n = |Q^n|$. Here, Fibonacci and Lucas sequences are just two of the sequences obtained when initial conditions are chosen differently. Then, a general definition was made. Generalized Fibonacci and generalized Lucas sequences are defined by the recurrence relation $U_n = kU_{n-1} + tU_{n-2}, U_0 = 0, U_1 = 1$ and $V_n = kV_{n-1} + tV_{n-2}, V_0 = 2, V_1 = k,$ respectively. There are many identities regarding these two series in the literature. Different methods have been used to obtain these identities. One of these methods is to use square matrices. The most well-known of these matrices is $A = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. The nth power of this matrix is $A^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & tU_n \\ U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix}$. When the $|A|^n = |A^n|$ equation is used here, the identity $U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = (-t)^{n-1}$, which is the most general form of Cassini's identity, is obtained. In this study, new identities were obtained after taking the power of different square matrices by diagonalizing them.

In the first chapter, some brief information about the content of the study was given. In addition, some studies in the literature on square matrices were introduced and it

was mentioned how the matrices were used to obtain identities regarding generalized Fibonacci and Lucas sequences.

In the second chapter, firstly, the definitions of generalized Fibonacci and generalized Lucas numbers were given. Later, some theorems about these numbers were given.

In the third part, some 2×2 square matrices with terms $\{0,1,\pm a,\pm b,a+b,-ab\}$ were selected and the nth power of these matrices was calculated. While making the calculations, the eigenvalues and eigenvectors of the selected square matrices were found, diagonalized and nth powers were taken. Then, in these matrices obtained,

$$a=\alpha=\frac{k+\sqrt{k^2+4t}}{2}$$

and

$$b=\beta=\frac{k-\sqrt{k^2+4t}}{2}$$

were used and the terms were used as generalized Fibonacci number and generalized Lucas number. Using these matrices and Binomial expansion, the following identities were found when n and m are natural numbers:

$$U_{n+1}=t\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^jU_{n-j-1},$$

$$U_n=-\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^jU_{n-j},$$

$$U_{mn+1}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}tU_{mn-1-mj}{V_m}^j\ ,$$

$$U_mU_{mn+mk+m}=U_{mn+m}U_{mk+m}+(-t)^mU_{mn}U_{mk},$$

$$V_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^jV_{n-j},$$

$$V_{mn}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}V_{mn-mj}{V_m}^j\ ,$$

$$V_m^n=-\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{m+mj}\frac{U_{mn-2mj-m}}{U_m}\ ,$$

$$V_m^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj}U_{mn+1-2mj},$$

$$2V_m^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj}V_{mn-2mj},$$

$$k^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^jU_{n-2j+1},$$

$$2k^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^jV_{n-2j},$$

$$k(k^2+4t)^n=\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^jU_{2n-2j+2},$$

$$2(k^2+4t)^n=\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^jU_{2n-2j+1},$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j} = 0,$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} \frac{U_{mn-2mj}}{U_m} = 0,$$

$$\sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} t^j V_{2n-2j} = 0,$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} U_{mn-2mj} = 0\ ,$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj} (-t)^{mj} = 0\ .$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} t^j U_{n-2j-1} = 0\ ,$$

$$\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j} = \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{n-j} U_{2j-n}\ ,$$

$$k(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j\, U_{n-2j+1},$$

$$2U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j,$$

$$V_n = k \sum_{j=0}^{n-1} t^j U_{n-2j},$$

$$V_n = k \sum_{j=0}^{n-1} t^{j+1} U_{n-2j-2},$$

$$\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{j} t^j V_{n-2j} = -\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{j} t^j (-t)^{n-2j} V_{2j-n},$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} (-1)^j V_{mn-2mj} = 0$$

if n is an odd natural number.

$$\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j} = \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{n-j} U_{2j-n},$$

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j\, U_{n-2j+1},$$

$$2U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} (-1)^j V_{mn-2mj},$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j = 0$$

if n is an even natural number.

Then, some 2×2 square matrices whose terms are in the set $\{0,1,\pm k, t, 2t, \pm kt, k^2+2t\}$ are selected and the nth power was calculated. With the help of these matrices, identities similar to those given above were obtained. Finally, with the help of the obtained matrices, the identity

$$(k^2+4t)(-t)^{n-1} = V_{n+1}V_{n-1} - V_n^2$$

was found.

In the fourth chapter, 3×3 square matrices were included. In this section, it was mentioned how 3×3 square matrices taken from some sources were taken and used to obtain identities. Then, some 3×3 square matrices are given. The nth powers of these matrices were calculated using diogonelizetion method. These mtrices were used to obtain some identities such as

$$U_{m+n} = U_m U_{n+1} + tU_{m-1}U_n \ ,$$

$$U_{mn+mk+m}U_m = U_{mn+m}U_{mk+m} - (-t)^m U_{mn}U_{mk},$$

$$U_{mn+mk}U_m = U_{mn}U_{mk+m} - (-t)^m U_{mn-m}U_{mk} \ ,$$

$$(-t)^{mn-m}U_m^2 = U_{mn}^2 - U_{mn-m}U_{mn+m}.$$

In the fifth chapter, results and suggestions regarding the study were given.

1. GİRİŞ

Leonardo Fibonacci, Leonardo Pisano veya Pisa'lı Leonard olarak da bilinir. Avrupa orta çağının en genç ve başarılı matematikçisi olarak tanınır. Babası, Fibonacci'ye aile ticaretini takip etmesi ve hesaplama sanatını öğrenmesi için Cezayir'in Bugia şehrinde ilk eğitimini aldırır. Burada Fibonacci Hint-Arap hesap teknikleriyle tanışır[1]. Hint-Arap sistemindeki matematiksel hesaplamaların nasıl yapıldığını açıklayan Liber Abaci kitabını yazar. Şüphesiz ki Fibonacci'yi tanınır yapan Liber Abaci kitabında bahsettiği $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ sayı dizisidir. Bu sayı dizisi Fibonacci dizisi olarak bilinir. Bu dizi elemanlarına Fibonacci sayıları denir. n. Fibonacci sayısı F_n ile gösterilir. Bu dizinin terimleri $F_0 = 0, F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ için

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ tekrarlama bağıntısı ile tanımlanır[1]. Fibonacci dizisi birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Bunlardan birisi de François Edouard Anatole Lucas'tır. Başlangıç koşulları farklı seçildiğinde oluşan $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$ sayı dizisine ise Lucas dizisi denir. n. Lucas sayısı L_n ile gösterilir Bu dizinin terimleri $L_0 = 2, L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ tekrarlama bağıntısı ile tanımlanır[1]. Literatürde bu iki dizi ile ilgili yapılan çalışmalar sonucunda birçok özdeşlik elde edilmiştir. Bu özdeşliklerin ispatında matrislerden, matematiksel tümevarımdan ve Binet formüllerinden yararlanılmıştır. Bu matrislerden en bilineni $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Fibonacci matrisidir. Q matrisinin karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ olup kökleri ise $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 'dir. Q matrisinin n. kuvveti $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$'dir[1]. Q Matrisinin tarihi geçmişine bakılırsa ilk olarak Q matrisinin temel kullanımı 1960 yılında Charles H. King'in San Jose Eyalet Koleji yüksek lisans tezinde "Fibonacci'nin Bazı Diğer Özellikleri" başlığıyla ortaya çıkmıştır[2]. Halbuki Fibonacci Q matrisinin ilk ortaya çıktığı yer Joel Brenner'in "Lucas'ın Matrisi" başlıklı makalesinin bir özetinde yer almaktadır. Bu özet, Mart 1951 tarihli American Mathematical Monthly dergisinin 221 ve 222. sayfalarında yayımlandı[3]. Burada Brenner, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin n. kuvvetinin $\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$'e eşit olduğunu verir.

Q matrisi özdeşliklerin ispatlarında kullanılmıştır. Örneğin; $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ matrisinin determinantı alındığında Cassini özdeşliği, yani $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ elde edilir. Aynı özdeşlik [4,5] numaralı kaynaklarda ele alınan $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin n. kuvvetinin $R^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$ olduğu gösterilerek ve bu R^n'nin determinantı alınarakda elde edilmiştir. Burada Q ve R matrisleri benzer matrislerdir. Benzer matrisler aynı özdeşlikleri verir. Bu çalışmada genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilgili yeni özdeşlikler elde etmek için birçok karesel matristen yararlanılacaktır. Bunun için ilk önce genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin tanımlarını verelim. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri (U_n) ve (V_n), sırasıyla, başlangıç koşulları $U_0 = 0, U_1 = 1, V_0 = 2, V_1 = k$ ve $n \geq 2$ için $U_n = kU_{n-1} + tU_{n-2}$, $V_n = kV_{n-1} + tV_{n-2}$ tekrarlama bağıntıları ile tanımlanır[6,7]. Bu dizilerle ilgili birçok özdeşlik vardır. Bu özdeşlikleri elde etmek için farklı yollar izlenmiştir.

Hoggatt, Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren birçok özdeşlik vermiştir[8]. Daha sonra bu özdeşlikler genişletilebilir mi sorusu üzerine yoğunlaşmıştır. Hoggatt ve Bergum, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerini tanımlayıp yukarıda bahsedilen çalışmada verdikleri özdeşliklerin en genel halini bulmuşlardır[9].

Melham ve Shannon $M = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisini ele almıştır[10]. Bu matris, başlangıç koşulları $W_0 = a, W_1 = b, n \geq 2$ için $W_n = kW_{n-1} + tW_{n-2}$ tekrarlama bağıntısı için kullanılmıştır. Burada $a = 0,\ b = 1$ alınırsa $U_n = kU_{n-1} + kU_{n-2}$ ile $a = 2, b = k$ alınırsa $V_n = kV_{n-1} + tV_{n-2}$ tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan (U_n) ve (V_n) dizileri elde edilir. Bununla birlikte $k = t = 1$ alınırsa M matrisi Q matrisine indirgenir. Melham ve Shannon bu çalışmada, $W_n = kW_{n-1} + tW_{n-2}$ tekrarlama bağıntısı ve (U_n) dizisiyle ilişkili olan ve ayrıca M matrisinin genelleştirilmiş hali olan

$$M_{k,m} = \begin{pmatrix} U_{k+m} & -(-t)^m U_k \\ U_k & -(-t)^m U_{k-m} \end{pmatrix}$$

matrisini tanımlamışlardır. . Daha sonra $M_{k,m}$ matrisine benzer şekilde

$$N_{k,m} = \begin{pmatrix} V_{k+m} & -(-t)^m V_k \\ V_k & -(-t)^m V_{k-m} \end{pmatrix}$$

matrisinin tanımını vererek genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilgili özdeşlikler elde etmişlerdir.

Cerda-Morales $M = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisini ele alıp

$$V_{(k,t)} = \begin{pmatrix} k^2 + 2t & kt \\ k & 2t \end{pmatrix}$$

matrisini tanımlamıştır[11]. Bu matrisi kullanarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileriyle ilgili verilen özdeşlikleri farklı bir şekilde elde etmiştir.

Keskin ve Şiar $\begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & k \end{pmatrix}$ matrislerinin $X^2 = kX + tI$ denklemini sağlayan X, 2×2 boyutlu matrislerin özel bir durumu olduğunu belirtmişlerdir[12]. Ayrıca X matrisi $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & k - a \end{pmatrix}$ ve $|X| = -t$ olacak şekilde tanımlanmıştır. Bu matrisin n. kuvvetinin

$$X^n = \begin{pmatrix} aU_n + tU_{n-1} & bU_n \\ cU_n & U_{n+1} - aU_n \end{pmatrix}$$

olduğu gösterilmiştir. Yine determinantı $-t$ olan $S = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} & \frac{k^2+4t}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{k}{2} \end{pmatrix}$ matrisi tanımlamışlardır. Daha sonra X ve S matrislerini genelleştrilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili özdeşlik üretmek için kullanmışlardır[12].

Kawala ve Lahurikar $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1+a-a^2}{b} & 1 - a \end{pmatrix}$ matrisini tanımlamıştır[13]. Burada $a = b = 1$ alınırsa $M(a,b)$ matrisi Q matrisine indirgenir. Eğer $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ alındığında a yerine α, b yerine 1 alınırsa $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ matrisi ve a yerine β, b yerine -1 alınırsa $\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ matrisi elde edilir. Bu matrisler Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili özdeşlik elde etmede kullanılmıştır.

Kalman ve Mena genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili özdeşlik elde etmek için $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & k \end{pmatrix}$ matrisini ele almışlardır[14].

Gould $\begin{pmatrix} a + b & -ab \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisini ele alarak bu matrisin n. kuvvetinin

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \dfrac{-ab(a^n-b^n)}{a-b} \\ \dfrac{a^n-b^n}{a-b} & \dfrac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} \end{pmatrix}$$

matrisine eşit olduğunu belirtmiştir[2].

Bu çalışmada ise, Gould tarafından verilen matristen esinlenerek yeni matrisler elde edilip bu matrislerin n. kuvvetleri hesaplanarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili yeni özdeşlikler elde edilecektir. Ayrıca, yukarıda belirtilen

$$D = \begin{pmatrix} k^2+2t & kt \\ t & 2t \end{pmatrix}$$

matrisi ele alınarak $A = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ile birlikte düşünüldüğünde $D = kA + 2tI$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Buradan hareketle $B = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & -k \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} k & 2t \\ 2 & -k \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2t & -kt \\ -k & k^2+2t \end{pmatrix}$ matrisleri için $D = AC = CA,\quad B = C - A,\quad E = CB = BC$ eşitliklerinin sağlandıkları görülerek genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili yeni özdeşlikler elde edilecektir.

Bunun yanı sıra, $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4t}}{2}$ ve $\beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4t}}{2}$ olmak üzere $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ matrisleri kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileriyle ilgili bazı özdeşlikler verilecektir.

2. ÖN BİLGİER

Tanım 2.1. k ve t sıfırdan farklı tam sayılar ve $k^2 + 4t \neq 0$ olsun. Bu durumda $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için $U_n = kU_{n-1} + tU_{n-2}$ ile verilen (U_n) dizisine genelleştirilmiş Fibonacci dizisi denir. U_n'e ise n. genelleştirilmiş Fibonacci sayısı denir[1].

Tanım 2.2. k ve t sıfırdan farklı tam sayılar ve $k^2 + 4t \neq 0$ olsun. Bu durumda $V_0 = 2$, $V_1 = k$ olmak üzere $n \geq 2$ için $V_n = kV_{n-1} + tV_{n-2}$ ile verilen (V_n) dizisine genelleştirilmiş Lucas dizisi denir. V_n'e ise n. genelleştirilmiş Lucas sayısı denir[1].

Burada U_n yerine $U_n(k,t)$, V_n yerine ise $V_n(k,t)$ yazılabilir. Bu dizilerde, özel olarak $k = t = 1$ alındığında sırasıyla (F_n) Fibonacci dizisi, (L_n) Lucas dizisine dönüşür. Ayrıca, $k = 2$ ve $t = 1$ için (U_n) ve (V_n) dizileri sırasıyla, (P_n) Pell dizisi ve (Q_n) Pell-Lucas dizisine dönüşür.

Öte yandan, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerine ilişkin karakteristik denklemi $x^2 - kx - t = 0$ olup bu denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4t}}{2}$$

ve

$$\beta = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4t}}{2}$$

dir. Burada, $\alpha + \beta = k, \alpha\beta = -t,\ \alpha - \beta = \sqrt{k^2 + 4t}, \alpha^2 = \alpha k + t,\ \ \beta^2 = \beta k + t$ olduğu kolaylıkla görülür.

Ayrıca; $n \in \mathbb{N}$ için negatif terimli genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları sırasıyla $U_{-n} = -(-t)^{-n}U_n$ ve $V_{-n} = (-t)^{-n}V_n$ şeklinde tanımlanır.

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarına ilişkin bazı özdeşlikler ve bu sayılar ile bu sayı dizilerinin sağladığı karakteristik denklemin kökleri arasındaki bazı formüller verilecektir. Bu bölümde verilecek olan teorem ve önermelerin ispatında, bu dizilere ilişkin Binet formülleri ve matematiksel tümevarım kullanılacaktır[1,12].

Teorem 2.3. $n \geq 1$ tamsayısı için aşağıdakiler doğrudur.

a) $\alpha^n = \alpha U_n + tU_{n-1}$,

b) $\beta^n = \beta U_n + tU_{n-1}$,

c) $\sqrt{k^2+4t}\,\alpha^n = \alpha V_n + tV_{n-1}$,

d) $-\sqrt{k^2+4t}\,\beta^n = \alpha V_n + tV_{n-1}$.

İspat: İspatı matematiksel tümevarımla gösterelim.

a) $n = 1$ için $\alpha^1 = \alpha U_1 + tU_0 = \alpha \cdot 1 + t \cdot 0 = \alpha$ olduğundan eşitlik sağlanır. Eşitlik $n = k$ için doğru olsun. O zaman

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k \alpha = \alpha(\alpha U_k + tU_{k-1}) = \alpha^2 U_k + \alpha t U_{k-1} = (\alpha k + t)U_k + \alpha t U_{k-1}$$
$$= \alpha k U_k + tU_k + \alpha t U_{n-1} = \alpha(kU_k + tU_{k-1}) + tU_k = \alpha U_{k+1} + \mathrm{t}U_k$$

bulunur. Dolayısıyla eşitliğin $n = k+1$ için doğru olduğu görülür. Şu halde tümevarım ilkesine göre iddia tamamlanmıştır.

b) $n = 1$ için $\beta^1 = \beta U_1 + tU_0 = \alpha \cdot 1 + t \cdot 0 = \beta$ olduğundan eşitlik sağlanır. Eşitlik $n = k$ için doğru olsun. O zaman

$$\beta^{k+1} = \beta^k \beta = \beta(\beta U_k + tU_{k-1}) = \beta^2 U_k + \beta t U_{k-1} = (\beta k + t)U_k + \beta t U_{k-1}$$
$$= \beta k U_k + tU_k + \beta t U_{n-1} = \beta(kU_k + tU_{k-1}) + tU_k = \beta U_{k+1} + tU_k$$

bulunur. Böylece eşitliğin $n = k+1$ için doğru olduğu görülür. Şu halde tümevarım ilkesine göre iddia ispatlanmıştır.

c) $n = 1$ için

$$\sqrt{k^2+4t}\,\alpha^1 = \alpha(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta = k\alpha + t + t = k\alpha + 2t$$
$$= \alpha V_1 + tV_0$$

olduğundan eşitlik sağlanır. Eşitliğin $n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim. $n = k+1$ için doğruluğunu gösterelim. O zaman

$$\sqrt{k^2+4t}\,\alpha^{k+1} = \sqrt{k^2+4t}\,\alpha^k \alpha = \alpha\left(\sqrt{k^2+4t}\,\alpha^k\right)$$
$$= \alpha(\alpha V_n + tV_{n-1})$$
$$= \alpha^2 V_n + \alpha t V_{n-1} = k\alpha V_n + tV_n + \alpha t V_{n-1}$$
$$= \alpha(kV_n + tV_{n-1}) + tV_n$$
$$= \alpha V_{n+1} + tV_n$$

bulunur ve eşitliğin $n = k+1$ için doğru olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

d) $n = 1$ için

$$-\sqrt{k^2+4t}\beta^1 = -\beta(\alpha-\beta) = \beta^2 - \alpha\beta = k\beta + t + t = k\beta + 2t$$
$$= \beta V_1 + tV_0$$

olduğundan eşitlik sağlanır. Eşitliğin $n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim. $n = k + 1$ için doğruluğunu gösterelim. O zaman

$$-\sqrt{k^2+4t}\beta^{k+1} = -\sqrt{k^2+4t}\beta^k\beta = \beta\left(-\sqrt{k^2+4t}\beta^k\right) = \beta(\beta V_n + tV_{n-1})$$
$$= \beta^2 V_n + \beta t V_{n-1} = k\beta V_n + tV_n + \beta t V_{n-1} = \beta V_{n+1} + tV_n$$

bulunur ve eşitliğin $n = k + 1$ için doğru olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 2.4. $n \geq 1$ ve n tam sayı olmak üzere; n. genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları, sırasıyla, $U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta}$ ve $V_n = \alpha^n + \beta^n$ formülleri ile verilir.

İspat: Teorem 2.3'ün a) ve b) şıkkında verilen eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$\alpha^n - \beta^n = \alpha U_n - \beta U_n$ bulunur. Buradan $U_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ eşitliği elde edilir.

Teorem 2.3'ün c) ve d) şıkkında verilen eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$(\alpha^n + \beta^n)\sqrt{k^2+4t} = V_n(\alpha-\beta)$ bulunur. Buradan $\alpha - \beta = \sqrt{k^2+4t}$ ve

$k^2 + 4t \neq 0$ olduğundan $V_n = \alpha^n + \beta^n$ eşitliği elde edilir.

Teorem 2.5. n tam sayı olmak üzere $U_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ ve $V_n = \alpha^n + \beta^n$'dir.

İspat: $n > 0$ için Teorem 2.4'te ispatı verilmiştir.

$n = 0$ için $U_0 = \frac{\alpha^0-\beta^0}{\alpha-\beta} = \frac{1-1}{\alpha-\beta} = 0$ ve $V_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 1 + 1 = 2$ eşitlik sağlanır. $n < 0$ için $m < 0$ olmak üzere $n = -m$ yazılabilir. Buradan

$$U_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^{-m}-\beta^{-m}}{\alpha-\beta} = \frac{\frac{1}{\alpha^m}-\frac{1}{\beta^m}}{\alpha-\beta} = \frac{\beta^m-\alpha^m}{\alpha^m\beta^m(\alpha-\beta)} = \frac{-(\alpha^m-\beta^m)}{(-t)^m(\alpha-\beta)} = -(-t)^{-m}U_{-m}$$
$$= U_n,$$

$$V_n = \alpha^n + \beta^n = \alpha^{-m} + \beta^{-m} = \frac{1}{\alpha^m} + \frac{1}{\beta^m} = \frac{\alpha^m+\beta^m}{\alpha^m\beta^m}$$
$$= (-t)^{-m}(\alpha^m + \beta^m)$$
$$= V_{-m}$$
$$= V_n$$

eşitlikler sağlanır.

Tanım 2.6. n tam sayı olmak üzere

$U_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ ve $V_n = \alpha^n + \beta^n$ formüllerine sırasıyla, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerine ilişkin Binet formülleri denir.

Önerme 2.7. n tam sayı olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $V_n = U_{n+1} + tU_{n-1}$,

b) $V_n = kU_n + 2tU_{n-1}$,

c) $(k^2 + 4t)U_n = V_{n+1} + tV_{n-1}$.

İspat:

a) Binet formülleri kullanılarak ispatı yapılır. Gerçekten

$$U_{n+1} + tU_{n-1} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} + (-\alpha\beta)\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}-\beta\alpha^n+\alpha\beta^n}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{\alpha^n(\alpha-\beta)+\beta^n(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} = \alpha^n + \beta^n = V_n$$

eşitliği elde edilir.

b) a) şıkkındaki eşitlikten yararlanılarak ispatı yapılır. Gerçekten

$$V_n = U_n + tU_{n-1} = kU_n + tU_{n-1} + tU_{n-1} = kU_n + 2tU_{n-1}$$

eşitliği elde edilir.

c) Binet formülleri kullanılarak ispatı yapılır. Gerçekten

$$V_{n+1} + tV_{n-1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} + (-\alpha\beta)(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

$$= \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} - \beta\alpha^n - \alpha\beta^n = \alpha^n(\alpha-\beta) - \beta^n(\alpha-\beta)$$

$$= (\alpha^n - \beta^n)(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)\frac{1}{\alpha-\beta} = U_n(k^2 + 4t)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 2.8. n tam sayı olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $\alpha^{2n} = V_n\alpha^n - (-t)^n$,

b) $\alpha^{2n} = U_n\sqrt{k^2 + 4t}\alpha^n + (-t)^n$.

İspat: Binet formülleri kullanılarak ispatı yapılır.

a) $V_n\alpha^n - (-t)^n = (\alpha^n + \beta^n)\alpha^n - \alpha^n\beta^n = \alpha^{2n} + \alpha^n\beta^n - \alpha^n\beta^n = \alpha^{2n}$

olduğu görülür.

b) $U_n\sqrt{k^2+4t}\alpha^n+(-t)^n=\frac{(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)\alpha^n+\alpha^n\beta^n$

$$=\alpha^{2n}-\alpha^n\beta^n+\alpha^n\beta^n=\alpha^{2n}$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 2.9. X, 2×2 boyutlu matris olmak üzere

$X^2=kX+tI$ ise her $n\in Z$ için $X^n=U_nX+tU_{n-1}I$ eşitliği doğrudur[12].

Teorem 2.10. X, $2x2$ boyutlu matris olmak üzere

$X^2=kX+tI \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & k-a \end{pmatrix}$ ve $detX=-t$ veya $\lambda\in\{\alpha,\beta\}$ olmak üzere

$X=\lambda I$'dır[12].

Sonuç 2.11. $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & k-a \end{pmatrix}$ ve $|X|=-t$ ise $X^n=\begin{pmatrix} aU_n+tU_{n-1} & bU_n \\ cU_n & U_{n+1}-aU_n \end{pmatrix}$

dir[12].

Sonuç 2.12. n tam sayı olmak üzere

$$V_n^2-(k^2+4t)U_n^2=4(-t)^n$$

dir.

İspat: Binet formülleri kullanılırsa

$$V_n^2-(k^2+4t)U_n^2=(\alpha^n+\beta^n)^2-(k^2+4t)\frac{(\alpha^n-\beta^n)^2}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\alpha^{2n}+2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}-(\alpha-\beta)^2\frac{(\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n})}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\alpha^{2n}+2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}-\alpha^{2n}+2\alpha^n\beta^n-\beta^{2n}$$

$$=4\alpha^n\beta^n$$

$$=4(-t)^n$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 2.13. m ve n tam sayı olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $U_{m+n}=U_mU_{n+1}+tU_{m-1}U_n$,

b) $(-t)^{n-1}U_{m-n}=U_{m-1}U_n-U_mU_{n-1}$,

c) $U_n^2-U_{n+1}U_{n-1}=(-t)^{n-1}$.

İspat:

a) Binet formülleri kullanılırsa ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$U_mU_{n+1} + tU_{m-1}U_n = \left(\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right) + t\left(\frac{\alpha^{m-1}-\beta^{m-1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= \frac{\alpha^{m+n+1}-\alpha^m\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}\beta^m+\beta^{m+n+1}+(-\alpha\beta)(\alpha^{m+n-1}-\alpha^{m-1}\beta^n-\alpha^n\beta^{m-1}+\beta^{m+n-1}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha^{m+n+1}-\alpha^m\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}\beta^m+\beta^{m+n+1}-\alpha^{m+n}\beta+\alpha^m\beta^{n+1}+\alpha^{n+1}\beta^m-\alpha\beta^{m+n}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha^{m+n}(\alpha-\beta)-\beta^{m+n}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha^{m+n}-\beta^{m+n}}{\alpha-\beta}$$

$$= U_{m+n}$$

ve

b) $U_{m-1}U_n - U_mU_{n-1}$

$$= \left(\frac{\alpha^{m-1}-\beta^{m-1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right) + t\left(\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= \frac{\alpha^{m+n-1}-\alpha^{m-1}\beta^n-\alpha^n\beta^{m-1}+\beta^{m+n-1}+(-\alpha\beta)(\alpha^{m+n-1}-\alpha^{m-1}\beta^n-\alpha^n\beta^{m-1}+\beta^{m+n-1}}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$= \frac{\alpha^m\beta^m\left(\frac{-1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\alpha^m\beta^m\left(\frac{-1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{(-t)^{n-1}(\alpha^m\beta^n-\alpha^n\beta^m)}{\alpha-\beta} \cdot \frac{(\alpha.\beta)^{-n}}{(\alpha\beta)^{-n}}$$

$$= (-t)^{n-1}U_{m-n}$$

olduğu görülür.

c) b) şıkkında m yerine $n+1$ yazılırsa istenen elde edilir.

Teorem 2.14. n tam sayı olmak üzere

$A = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} & \frac{k^2+4t}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{k}{2} \end{pmatrix}$ ise $A^n = \begin{pmatrix} \frac{V_n}{2} & \frac{(k^2+4t)U_n}{2} \\ \frac{U_n}{2} & \frac{V_n}{2} \end{pmatrix}$'dir.

İspat: Önerme 2.9 kullanılarak ispatı yapılır. Gerçekten

$$A^2=\begin{pmatrix}\frac{k}{2} & \frac{k^2+4t}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{k}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{k}{2} & \frac{k^2+4t}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{k}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{k^2+k^2+4t}{4} & \frac{k(k^2+4t)+k(k^2+4t)}{4}\\ \frac{2k}{4} & \frac{k^2+4t+k^2}{4}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{k^2+2t}{2} & \frac{k(k^2+4t)}{2}\\ \frac{k}{2} & \frac{k^2+2t}{2}\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\frac{k}{2} & \frac{k^2+4t}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{k}{2}\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=kA+tI$$

sağlandığından

$$A^n=U_nA+tU_{n-1}I=U_n\begin{pmatrix}\frac{k}{2} & \frac{k^2+4t}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{k}{2}\end{pmatrix}+tU_{n-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{kU_n+2tU_{n-1}}{2} & \frac{(k^2+4t)U_n}{2}\\ \frac{U_n}{2} & \frac{kU_n+2tU_{n-1}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{V_n}{2} & \frac{(k^2+4t)U_n}{2}\\ \frac{U_n}{2} & \frac{V_n}{2}\end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 2.15. k ve t sıfırdan farklı tam sayılar olmak üzere $X=\begin{pmatrix}k & t\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ise

$$X^n=\begin{pmatrix}U_{n+1} & tU_n\\ U_n & tU_{n-1}\end{pmatrix}$$

dir.

İspat: $X^2=\begin{pmatrix}k & t\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k & t\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k^2+t & kt\\ k & t\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}k & t\\ 1 & 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=kX+tI$

olduğundan Önerme 2.9‘a göre

$$\begin{aligned}X^n&=U_nX+tU_{n-1}I\\ &=U_n\begin{pmatrix}k & t\\ 1 & 0\end{pmatrix}+tU_{n-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}kU_n+tU_{n-1} & tU_n\\ U_n & tU_{n-1}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}U_{n+1} & tU_n\\ U_n & tU_{n-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Aşağıda Girard-Waring özdeşliği verilecek ve bununla ilgili (U_n), (V_n) dizilerinin yeni bir açılımı elde edilecektir.

Teorem 2.16. (Girard-Waring özdeşliği) x ve y'ler reel sayılar ve n doğal sayı olmak üzere

$$x^n + y^n = \sum_{k=0}^{\llbracket \frac{n}{2} \rrbracket} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} (x+y)^{n-2k} (xy)^k$$

ve

$$\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y} = \sum_{k=0}^{\llbracket \frac{n}{2} \rrbracket} (-1)^k \binom{n-k}{k} (x+y)^{n-2k} (xy)^k \text{ ‘dır[15].}$$

Teorem 2.16'da x yerine α, y yerine β yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.17. n doğal sayı olmak üzere

$$V_n = \sum_{j=0}^{\llbracket \frac{n}{2} \rrbracket} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} k^{n-2j} t^j,$$

$$U_{n+1} = \sum_{j=0}^{\llbracket \frac{n}{2} \rrbracket} \binom{n-j}{j} k^{n-2j} t^j$$

dir.

Teorem 2.15'te verilen $X = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ile ilgili detaylar için [1,12] numaralı kaynaklara bakılabilir. Bu matrisin öz değerleri $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4t}}{2}$ ve $\beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4t}}{2}$ ‘dir. Literatürde bu matris ve benzer matrisler kullanılarak elde edilen birçok genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileriyle ilgili özdeşlik vardır[1].

3. İKİNCİ MERTEBEDEN MATRİSLER YARDIMIYLA ÖZDEŞLİK TÜRETME

$a \neq b$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a+b & -ab \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ve bu matrisin n. kuvveti

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \dfrac{-ab(a^n-b^n)}{a-b} \\ \dfrac{a^n-b^n}{a-b} & \dfrac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} \end{pmatrix}$$

şeklinde verilmiştir[2]. Aşağıdaki teoremde 2×2 boyutlu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ matrisinde

$yz = -ab$ ve $\{x, t\} = \{a+b, 1\}$ alınarak elde edilen matrisler ve bu matrislerin n. kuvvetleri kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilgili yeni özdeşlikler elde edilecektir.

Teorem 3.1. a, b sıfırdan ve birbirinden farklı tam sayılar olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $X = \begin{pmatrix} a+b & -ab \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ise $X^n = \begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \frac{-ab(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{a^n-b^n}{a-b} & \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} a+b & -a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ ise $A^n = \begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \frac{-a(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{b(a^n-b^n)}{a-b} & \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} \end{pmatrix}$,

c) $B = \begin{pmatrix} a+b & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ ise $B^n = \begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \frac{a(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{-b(a^n-b^n)}{a-b} & \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} \end{pmatrix}$,

d) $C = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ b & a+b \end{pmatrix}$ ise $C^n = \begin{pmatrix} \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} & \frac{-a(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{b(a^n-b^n)}{a-b} & \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \end{pmatrix}$,

e) $D = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & a+b \end{pmatrix}$ ise $D^n = \begin{pmatrix} \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} & \frac{a(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{-b(a^n-b^n)}{a-b} & \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \end{pmatrix}$,

f) $E = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ a & 0 \end{pmatrix}$ ise $E^n = \begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \frac{-b(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{a(a^n-b^n)}{a-b} & \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} \end{pmatrix}$,

g) $F = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ ise $F^n = \begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \frac{b(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{-a(a^n-b^n)}{a-b} & \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} \end{pmatrix}$,

h) $G = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -a & a+b \end{pmatrix}$ ise $G^n = \begin{pmatrix} \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} & \frac{b(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{-a(a^n-b^n)}{a-b} & \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \end{pmatrix}$,

i) $H = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ a & a+b \end{pmatrix}$ ise $H^n = \begin{pmatrix} \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} & \frac{-b(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{a(a^n-b^n)}{a-b} & \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \end{pmatrix}$.

İspat:

Burada A ile G, B ile H, C ile F, D ile E matrisleri benzer matrislerdir. Benzer matrisler olduğundan dolayı A, B, C ve D matrislerinin n. kuvvetinin ispatlarının verilmesi yeterlidir.

X, A, B, C, D matrislerinin n. kuvvetlerinin hesaplanışında köşegenleştirme yöntemi kullanılacaktır.

a) X matrisinin karakteristik denklemi $|X - \lambda I| = 0$ yani $\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = 0$'dır. Bu denklemin kökleri sırasıyla a ve b'dir. Dolayısıyla a ve b, X matrisinin özdeğerleridir. Birbirinden farklı iki özdeğer bulunduğundan X matrisi köşegenleştirilebilirdir. Şimdi a ve b özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri bulalım. a ile ilgili özvektörleri bulmak için $(X - aI)x = 0$ denklemi yani $\begin{pmatrix} b & -ab \\ 1 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ denklemi çözülmelidir. Buradan $s \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as \\ s \end{pmatrix}$ şeklindeki her vektörün bir özvektör olduğu kolaylıkla görülebilir. O halde $s = 1$ alındığında $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ özvektörü elde edilir. Benzer şekilde, b ile ilgili özvektörler için

$(X-bI)y=0$ denklemi ele alınırsa $\begin{pmatrix} a & -ab \\ 1 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$ denklemi çözülmelidir. Buradan $s_1 \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} bs_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$ biçimindeki her vektörün bir özvektör olduğu görülecektir. O halde $s_1=1$ için $\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$ özvektörü bulunur. Sütunları $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$ özvektörlerinden oluşan matris $P=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ olsun. $|P|=a-b\neq 0$ olduğundan P matrisinin tersi $P^{-1}=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix} 1 & -b \\ -1 & a \end{pmatrix}$'dir. Köşegen elemanları özdeğerler olan matris $J=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ olsun. $X=PJP^{-1}$ eşitliği sağlandığından $X^n=PJ^nP^{-1}$'dir. Dolayısıyla

$$X^n=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix} 1 & -b \\ -1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \frac{-ab(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{a^n-b^n}{a-b} & \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

b) a) şıkkındakine benzer şekilde A matrisinin karakteristik denkleminin

$\lambda^2-(a+b)\lambda+ab=0$ ve bu denklemin köklerinin a ile b olduğu görülür. Dolayısıyla a ve b, A matrisinin özdeğerleri olup birbirinden farklı olduğundan A matrisi köşegenleştirilebilirdir.

Şimdi a ve b özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri bulalım. Buna göre a ile ilgili $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ özvektörleri $\begin{pmatrix} b & -a \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$ denkleminden $s\neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} as \\ bs \end{pmatrix}$ olarak elde edilir. O halde $s=1$ alındığında $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ özvektörü bulunur. Benzer şekilde b ile ilgili $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ özvektörleri $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$ denkleminden $s_1\neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$ biçiminde olduğu görülür. Burada $s_1=1$ alındığında $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ özvektörü elde edilir. Sütunları $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ özvektörlerinden oluşan matris $P=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ olsun. $|P|=a-b\neq 0$ olduğundan P matrisinin tersi $P^{-1}=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -b & a \end{pmatrix}$'dir. Köşegen elemanları özdeğerler olan matris $J=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ olsun. $A=PJP^{-1}$ eşitliğinden $A^n=PJ^nP^{-1}$'dir. Dolayısıyla

$$A^n=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \frac{-a(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{b(a^n-b^n)}{a-b} & \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

c) a) ve b) şıklarındakine benzer şekilde görülebilir ki $B = \begin{pmatrix} a+b & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerleri a ile b ve bunlara karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as \\ -bs \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ -s_1 \end{pmatrix}$ dir. Burada $s = 1$ ve $s_1 = 1$ alındığında sırasıyla $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ özvektörleri bulunur. Sütunları $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ özvektörlerden oluşan matris $P = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -b & -1 \end{pmatrix}$ olsun. P matrisinin tersi ise $|P| = -a + b \neq 0$ olduğundan $P^{-1} = \frac{1}{-a+b}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ b & a \end{pmatrix}$'dir. Köşegen elemanları özdeğerler olan matris $J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ olsun. $B = PJP^{-1}$ eşitliği sağlandığından $B^n = PJ^nP^{-1}$ 'dir. Dolayısıyla

$$B^n = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n \frac{1}{-a+b}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \frac{a(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{-b(a^n-b^n)}{a-b} & \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

d) Yukarıdakilere benzer şekilde C matrisinin özdeğerlerinin a ile b ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin sırasıyla $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ olduğu görülebilir. Sütunları bu özvektörlerden oluşan matris $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -b \end{pmatrix}$ olsun. P matrisinin tersi $P^{-1} = \frac{1}{a-b}\begin{pmatrix} -b & -a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$'dir. $J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ olmak üzere $C = PJP^{-1}$ olduğundan $C^n = PJ^nP^{-1}$'dir. Dolayısıyla

$$C^n = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n \frac{1}{a-b}\begin{pmatrix} -b & -a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} & \frac{-a(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{b(a^n-b^n)}{a-b} & \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

e) Yukarıdakilere benzer yöntem uygulandığında $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ ve $J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ olmak üzere $D = PJP^{-1}$ ve dolayısıyla $D^n = PJ^nP^{-1}$ olduğu görülebilir. Böylece

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n \frac{1}{-a+b}\begin{pmatrix} b & -a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} & \frac{a(a^n-b^n)}{a-b} \\ \frac{-b(a^n-b^n)}{a-b} & \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1’ de a yerine α, b yerine β alınırsa $a+b=k,\ -ab=t,\ U_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, $V_n=\alpha^n+\beta^n$ olup sonuç olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2. k ve t sıfırdan farklı tam sayılar olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.

a) $X=\begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ için $X^n=\begin{pmatrix} U_{n+1} & tU_n \\ U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix}$,

b) $A=\begin{pmatrix} k & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ için $A^n=\begin{pmatrix} U_{n+1} & -\alpha U_n \\ \beta U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix}$,

c) $B=\begin{pmatrix} k & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ için $B^n=\begin{pmatrix} U_{n+1} & \alpha U_n \\ -\beta U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix}$,

d) $C=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & k \end{pmatrix}$ için $C^n=\begin{pmatrix} tU_{n-1} & -\alpha U_n \\ \beta U_n & U_{n+1} \end{pmatrix}$,

e) $D=\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & k \end{pmatrix}$ için $D^n=\begin{pmatrix} tU_{n-1} & \alpha U_n \\ -\beta U_n & U_{n+1} \end{pmatrix}$,

f) $E=\begin{pmatrix} k & -\beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ için $E^n=\begin{pmatrix} U_{n+1} & -\beta U_n \\ \alpha U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix}$,

g) $F=\begin{pmatrix} k & \beta \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ için $F^n=\begin{pmatrix} U_{n+1} & \beta U_n \\ -\alpha U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix}$,

h) $G=\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\alpha & k \end{pmatrix}$ için $G^n=\begin{pmatrix} tU_{n-1} & \beta U_n \\ -\alpha U_n & U_{n+1} \end{pmatrix}$,

i) $H=\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \alpha & k \end{pmatrix}$ için $H^n=\begin{pmatrix} tU_{n-1} & -\beta U_n \\ \alpha U_n & U_{n+1} \end{pmatrix}$.

Teorem 3.3. n doğal sayı olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $U_{n+1}=t\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^jU_{n-j-1}$,

b) $U_n=-\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^jU_{n-j}$,

c) $tU_{n-1}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^jU_{n-j+1}$,

d) $V_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^jV_{n-j}$.

İspat: Teorem 3.2’deki $A=\begin{pmatrix} k & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ ve $D=\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & k \end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım. Açık olarak $A+D=\begin{pmatrix} k & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & k \end{pmatrix}=kI$ ve $AD=DA=-tI$’dır. Böylece

$$A^n=(-D+kI)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-D)^{n-j}k^j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^jD^{n-j} \quad (3.1)$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan

$$A^n=\begin{pmatrix} U_{n+1} & -\alpha U_n \\ \beta U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

olduğundan 3.1 ve 3.2 eşitliklerinden

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} & -\alpha U_n \\ \beta U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^j U_{n-j-1} & \alpha\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^j U_{n-j} \\ -\beta\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^j U_{n-j} & \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}k^j U_{n-j+1} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$U_{n+1} = t\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\,k^j U_{n-j-1}, \tag{3.3}$$

$$U_n = -\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\,k^j U_{n-j},$$

$$tU_{n-1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\,k^j U_{n-j+1} \tag{3.4}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve c) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.3 ve 3.4 eşitliği taraf tarafa toplanır ve Önerme 2.7 a) özdeşliği kullanılırsa

$$V_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\,k^j V_{n-j}$$

olduğu görülür. Bu ise d) eşitliğidir.

Teorem 3.4. n tek doğal sayı olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $V_n = k\sum_{j=0}^{n-1} t^j U_{n-2j}$,

b) $V_n = k\sum_{j=0}^{n-1} t^{j+1} U_{n-2j-2}$,

c) $\sum_{j=0}^{n-1} t^j U_{n-2j-1} = 0$.

İspat: Teorem 3.2'deki $A = \begin{pmatrix} k & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ ve $D = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & k \end{pmatrix}$ matrislerini ve bu matrislerin n. kuvvetlerini ele alalım. Açık olarak

$$A^n + D^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & -\alpha U_n \\ \beta U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tU_{n-1} & \alpha U_n \\ -\beta U_n & U_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+1} + tU_{n-1} & 0 \\ 0 & U_{n+1} + tU_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V_n & 0 \\ 0 & V_n \end{pmatrix} = V_n I$$

ve $AD = DA = -tI$'dır. Dolayısıyla

$$V_n I = A^n + D^n = (A + D)\sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} D^j (-1)^j \tag{3.5}$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan $AD = DA = -tI$ eşitliğinden

$$A^{n-1-j}D^j(-1)^j = A^{n-1-2j}t^j \tag{3.6}$$

olduğu görülür. Bu durumda $A + D = kI$ olduğu kullanılırsa ve 3.6 eşitliği 3.5 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$V_n I = k\sum_{j=0}^{n-1} t^j A^{n-1-2j} = \begin{pmatrix} k\sum_{j=0}^{n-1} t^j U_{n-2j} & -\alpha k\sum_{j=0}^{n-1} t^j U_{n-1-2j} \\ \beta k\sum_{j=0}^{n-1} t^j U_{n-1-2j} & tk\sum_{j=0}^{n-1} t^j U_{n-2-2j} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

eşitliği bulunur. O halde $V_n I = \begin{pmatrix} V_n & 0 \\ 0 & V_n \end{pmatrix}$ olup 3.7'de elde edilen matris eşitliğinden

$V_n = k\sum_{j=0}^{n-1} t^j U_{n-2j}$,

$V_n = k\sum_{j=0}^{n-1} t^{j+1} U_{n-2j-2}$,

$\sum_{j=0}^{n-1} t^j U_{n-2j} = 0$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve c) eşitlikleri olduğu görülür.

Teorem 3.5. n doğal sayı olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $k^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j+1}$,

b) $k^n = t\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j-1}$,

c) $2k^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j V_{n-2j}$,

d) $0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j}$.

İspat: Teorem 3.2'deki $A = \begin{pmatrix} k & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ ve $D = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & k \end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım. Açık olarak $A + D = \begin{pmatrix} k & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & k \end{pmatrix} = kI$ ve $AD = DA = -tI$'dır. Buradan

$$k^n I = (kI)^n = (A + D)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^{n-j} D^j \tag{3.8}$$

eşitliği elde edilir. $AD = DA = -tI$ olduğu kullanılırsa

$$A^{n-j} D^j = A^{n-2j} (-t)^j \tag{3.9}$$

eşitliği bulunur. 3.9'daki eşitlik 3.8'de yerine yazılırsa

$$k^n I = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^{n-2j} (-t)^j$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n+1-2j} & -\alpha\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j} \\ \beta\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j} & t\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-1-2j} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

eşitliği bulunur. O halde $k^n I = \begin{pmatrix} k^n & 0 \\ 0 & k^n \end{pmatrix}$ olup 3.10'daki eşitlikten

$$k^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n+1-2j} , \tag{3.11}$$

$$k^n = t\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-1-2j} , \tag{3.12}$$

$0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j}$

elde edilir. Bunların a), b) ve d) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.11 ve 3.12 eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Önerme 2.7 a) özdeşliği kullanılırsa

$$2\,k^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j\, V_{n-2j}$$

eşitliği bulunur. Bu ise c) eşitliğidir.

Sonuç 3.6. n doğal sayı olmak üzere;

n çift sayı ise

$$\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j} = \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{n-j} U_{2j-n},$$

n tek sayı ise

$$\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j} = \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{n-j} U_{2j-n}$$

dir.

İspat: n çift doğal sayısı için

$n-2j<0 \Leftrightarrow j>\frac{n}{2}$ ve $j=\frac{n}{2}$ ise $U_{n-2j}=0$ olduğundan ve Teorem 3.5'in d) şıkkında verilen $0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^j U_{n-2j}$ eşitliği kulllanılırsa

$$0 = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j} + \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j}$$

yazılabilir. Buradan

$$\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j} = -\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j} \tag{3.13}$$

olur. $U_{-n} = -(-t)^{-n} U_n$ olduğu kullanılırsa

$$U_{n-2j} = -(-t)^{n-2j} U_{2j-n} \tag{3.14}$$

olur. O halde 3.15 eşitliği 3.14'te yerine yazıldığında

$$\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j} = -\sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j (-(-t)^{n-2j}) U_{2j-n}$$

$$= \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{n-j} U_{2j-n}$$

eşitliği elde edilir.

Öte yandan n tek doğal sayısı için $n-2j \neq 0$ olduğundan ve Teorem 3.5'in d) şıkkında verilen $0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^j U_{n-2j}$ eşitliği kullanılırsa

$$0=\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{j}(-t)^j U_{n-2j}+\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n}\binom{n}{j}(-t)^j U_{n-2j}$$

ve dolayısıyla

$$\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{j}(-t)^j U_{n-2j}=-\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n}\binom{n}{j}(-t)^j U_{n-2j} \tag{3.15}$$

bulunur. Burada $U_{-n}=-(-t)^{-n}U_n$ olduğu kullanılırsa

$$U_{n-2j}=-(-t)^{n-2j}U_{2j-n} \tag{3.16}$$

olur. O halde 3.16 eşitliği 3.15'de yerine yazılırsa

$$\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{j}(-t)^j U_{n-2j}=-\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n}\binom{n}{j}(-t)^j(-(-t)^{n-2j})U_{2j-n}$$

$$=\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{n-j}U_{2j-n}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.7. m ve n doğal sayılar olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $V_m^n=-\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj+m}\frac{U_{mn-2mj-m}}{U_m}$,

b) $V_m^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj}\frac{U_{mn-2mj+m}}{U_m}$,

c) $0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj}\frac{U_{mn-2mj}}{U_m}$.

İspat: Teorem 3.1'deki $H=\begin{pmatrix}0 & -b\\ a & a+b\end{pmatrix}$ ve $F=\begin{pmatrix}a+b & b\\ -a & 0\end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım. Burada a yerine α^m ve b yerine β^m alınırsa, $H=\begin{pmatrix}0 & -\beta^m\\ \alpha^m & V_m\end{pmatrix}$ ve

$F=\begin{pmatrix}V_m & \beta^m\\ -\alpha^m & 0\end{pmatrix}$ matrisleri elde edilir. Açık olarak

$H+F=\begin{pmatrix}0 & -\beta^m\\ \alpha^m & V_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}V_m & \beta^m\\ -\alpha^m & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_m & 0\\ 0 & V_m\end{pmatrix}=V_mI$ ve

$HF=FH=(-t)^mI$'dır. Bu durumda

$$V_m^n\mathrm{I}=(V_mI)^n=(H+F)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}H^{n-j}F^j \tag{3.17}$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan $HF=FH=(-t)^mI$ olduğu kullanılırsa

$$H^{n-j}F^j = H^{n-2j}(-t)^{mj} \tag{3.18}$$

olur. O halde 3.18'deki eşitlik 3.17'de yerine yazılırsa

$$V_m^n I = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} H^{n-2j}(-t)^{mj} \tag{3.19}$$

eşitliği bulunur. Teorem 3.1'de verilen

$H^n = \begin{pmatrix} -(-t)^m \frac{U_{mn-m}}{U_m} & -\beta^m \frac{U_{mn}}{U_m} \\ \alpha^m \frac{U_{mn}}{U_m} & \frac{U_{mn+m}}{U_m} \end{pmatrix}$ matrisi ve $V_m^n I = \begin{pmatrix} V_m^n & 0 \\ 0 & V_m^n \end{pmatrix}$ matrisi 3.19'daki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} V_m^n & 0 \\ 0 & V_m^n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-(-t)^m)(-t)^{mj} \frac{U_{m(n-2j)-m}}{U_m} & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-\beta^m)(-t)^{mj} \frac{U_{m(n-2j)}}{U_m} \\ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^m (-t)^{mj} \frac{U_{m(n-2j)}}{U_m} & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} \frac{U_{m(n-2j)+m}}{U_m} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$V_m^n = -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj+m} \frac{U_{mn-2mj-m}}{U_m},$$

$$V_m^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} \frac{U_{mn-2mj+m}}{U_m},$$

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} \frac{U_{mn-2mj}}{U_m}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve c) eşitlikleri olduğu görülür.

Teorem 3.8. n doğal sayı olmak üzere;

$$Z = \begin{pmatrix} k & -2\alpha \\ 2\beta & -k \end{pmatrix} \text{ ise } Z^n = \begin{cases} (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} I, & n \text{ çift doğal sayı ise} \\ (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} Z, & n \text{ tek doğal sayı ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: Z matrisinin karakteristik denklemini $|Z-\lambda I| = 0$ yani $\lambda^2 - (k^2+4t) = 0$'dır. Bu denklemin kökleri sırasıyla $\alpha-\beta$ ve $\beta-\alpha$'dır. Dolayısıyla $\alpha-\beta$ ve $\beta-\alpha$, Z matrisinin özdeğerleridir. Birbirinden farklı iki özdeğer bulunduğundan Z matrisi köşegenleştirilebilirdir. Şimdi $\alpha-\beta$ ve $\beta-\alpha$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri bulalım. $\alpha-\beta$ ile ilgili özvektörleri bulmak için $(Z-(\alpha-\beta)I)x = 0$ denklemi çözülmelidir. Yani $\begin{pmatrix} 2\beta & -2\alpha \\ 2\beta & -2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ denklemi çözülmelidir. Böylece

$s_1 \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha s_1 \\ \beta s_1 \end{pmatrix}$ şeklindeki her vektörün bir özvektör olduğu görülür. O halde $s_1 = 1$ alındığında $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ özvektörü elde edilir. Benzer şekilde, $\beta - \alpha$ ile ilgili özvektörler için $(Z + (\alpha - \beta)I)y = 0$ denklemi ele alınırsa $\begin{pmatrix} 2\alpha & -2\alpha \\ 2\beta & -2\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$ denklemi çözülmelidir. Aynı zamanda $s_2 \neq 0$ olmak üzere özvektörlerin $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 \\ s_2 \end{pmatrix}$ biçimindeki her vektör bir özvektördür. O halde $s_2 = 1$ için $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ özvektörü bulunur. Sütunları $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ özvektörlerinden oluşan matris $P = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ olsun. P matrisinin tersi ise $|P| = \alpha - \beta \neq 0$ olduğundan $P^{-1} = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$'dir. Köşegen elemanları özdeğerler olan matris $J = \begin{pmatrix} \alpha - \beta & 0 \\ 0 & \beta - \alpha \end{pmatrix}$ olsun. $Z = PJP^{-1}$ eşitliği

sağlandığından $Z^n = PJ^nP^{-1}$ 'dir. Dolayısıyla

$$Z^n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha - \beta & 0 \\ 0 & -(\alpha - \beta) \end{pmatrix}^n \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\alpha(\alpha-\beta)^n - \beta(-1)^n(\alpha-\beta)^n}{\alpha-\beta} & \frac{-\alpha(\alpha-\beta)^n + \alpha(-1)^n(\alpha-\beta)^n}{\alpha-\beta} \\ \frac{\beta(\alpha-\beta)^n - \beta(-1)^n(\alpha-\beta)^n}{\alpha-\beta} & \frac{-\beta(\alpha-\beta)^n + \alpha(-1)^n(\alpha-\beta)^n}{\alpha-\beta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} (k^2 + 4t)^{\frac{n}{2}} I, & n \text{ çift doğal sayı ise} \\ (k^2 + 4t)^{\frac{n-1}{2}} Z\,, & n \text{ tek doğal sayı ise} \end{cases}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.9. n doğal sayı olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

n çift doğal sayı ise;

a) $(k^2 + 4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j\, U_{n-2j+1}$,

b) $(k^2 + 4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{j+1}\, U_{n-2j-1}$,

c) $2(k^2 + 4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j\, V_{n-2j}$,

d) $0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j U_{n-2j}$.

n tek doğal sayı ise ;

e) $k(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^j\, U_{n-2j+1}$,

f) $-k(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{j+1}\, U_{n-2j-1}$,

g) $2(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^j\, U_{n-2j}$,

h) $0 = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^j V_{n-2j}$.

İspat: Teorem 3.2'deki $A = \begin{pmatrix} k & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ ve $D = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & k \end{pmatrix}$ matrisleri ile Teorem 3.8'deki $Z = \begin{pmatrix} k & -2\alpha \\ 2\beta & -k \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Açık olarak

$$A - D = \begin{pmatrix} k & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -2\alpha \\ 2\beta & -k \end{pmatrix} = \mathrm{Z}$$

ve $AD = DA = -tI$'dır. Buradan

$$Z^n = (A-D)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} A^{n-j}\,(-D)^j \tag{3.20}$$

eşitliği elde edilir. $AD = DA = -tI$ olduğu kullanılırsa

$$A^{n-j}(-D)^j = A^{n-2j}t^j \tag{3.21}$$

eşitliği bulunur. O halde 3.21'deki eşitlik 3.22'de yerine yazılırsa

$$Z^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} A^{n-2j}\, t^j \tag{3.22}$$

eşitliği elde edilir. Buradan n çift doğal sayı ise Teorem 3.8'e göre

$$Z^n = \begin{pmatrix} (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

olduğundan 3.22 ve 3.23 eşitliklerinden

$$\begin{pmatrix} (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^j U_{n-2j+1} & -\alpha\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^j U_{n-2j} \\ \beta\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^j U_{n-2j} & \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{j+1} U_{n-2j-1} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^j U_{n-2j+1}, \tag{3.24}$$

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{j+1} U_{n-2j-1}\,, \tag{3.25}$$

$$0 = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^j U_{n-2j}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve d) eşitlikleri olduğu görülür.Ayrıca 3.24 ve 3.25 eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Önerme 2.7 a)'daki özdeşlik kullanılırsa

$$2(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j V_{n-2j}$$

eşitliği bulunur. Bu ise c) eşitliğidir.

n tek doğal sayı ise Teorem 3.8'e göre

$$Z^n = \begin{pmatrix} k(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} & -2\alpha(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} \\ 2\beta(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} & -k(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

olduğundan 3.22 ve 3.26'dan

$$\begin{pmatrix} k(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} & -2\alpha(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} \\ 2\beta(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} & -k(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j U_{n-2j+1} & -\alpha \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j U_{n-2j} \\ \beta \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j U_{n-2j} & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{j+1} U_{n-2j-1} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği bulunur. Bu matris eşitliğinden

$$k(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j U_{n-2j+1}, \tag{3.27}$$

$$-k(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{j+1} U_{n-2j-1}, \tag{3.28}$$

$$2(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j U_{n-2j}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların e), f) ve g) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.27 ve 3.28 eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Önerme 2.7 a)'daki özdeşlik kullanılırsa

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j V_{n-2j}$$

eşitliği bulunur. Bu ise h) eşitliğidir.

Bu eşitlikten aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.10. n tek doğal sayı ise

$$\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{j} t^j V_{n-2j} = -\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{j} t^j (-t)^{n-2j} V_{2j-n}$$

dir.

İspat: n tek doğal sayı için $n-2j \neq 0$ olduğundan ve Teorem 3.9'dan n tek doğal sayı iken d) şıkkında verilen $0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}t^jV_{n-2j}$ eşitliği kullanılırsa

$$0=\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{j}t^jV_{n-2j}+\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n}\binom{n}{j}t^jV_{n-2j}$$

yazılabilir. Buradan

$$\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n}\binom{n}{j}t^jV_{n-2j}=-\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n}\binom{n}{j}t^jV_{n-2j} \qquad (3.29)$$

eşitliği bulunur. Ayrıca $V_{-n}=(-t)^{-n}V_n$ olduğu kullanılırsa

$$V_{n-2j}=(-t)^{n-2j}V_{2j-n} \qquad (3.30)$$

olur. O halde 3.30 eşitliği 3.29 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{j}t^jV_{n-2j}=-\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n}\binom{n}{j}t^j(-t)^{n-2j}V_{2j-n}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.11. n doğal sayı olmak üzere;

$$Z_1=\begin{pmatrix}k & 2\alpha\\ -2\beta & -k\end{pmatrix} \text{ ise } Z_1^n=\begin{cases}(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}I, & n \text{ çift doğal sayı ise}\\ (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}Z_1, & n \text{ tek doğal sayı ise}\end{cases}$$

dir.

İspat: Z_1 matrisinin karakteristik denkleminin $\lambda^2-(k^2+4t)=0$ ve bu denklemin köklerinin sırasıyla $\alpha-\beta$ ve $\beta-\alpha$ olduğu kolaylıkla görülebilir. $\alpha-\beta$ ve $\beta-\alpha$, Z_1 matrisinin birbirinden farklı iki özdeğeri olduğundan Z_1 matrisi köşegenleştirilebilirdir. Şimdi $\alpha-\beta$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler $\begin{pmatrix}2\beta & 2\alpha\\ -2\beta & -2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$ denkleminden $s_1\neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha s_1\\ -\beta s_1\end{pmatrix}$ olarak elde edilir. O halde $s_1=1$ alındığında $\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}$ özvektörü bulunur. $\beta-\alpha$ ile ilgili özvektörlerin ise $\begin{pmatrix}2\alpha & 2\alpha\\ -2\beta & -2\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=0$ denkleminden $s_2\neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s_2\\ -s_2\end{pmatrix}$ biçiminde olduğu görülür. O halde $s_2=1$ alındığında $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ özvektörü bulunur. Sütunları $\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ özvektörlerinden oluşan matris $P=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ -\beta & -1\end{pmatrix}$ olsun. P matrisinin tersi ise $|P|=-\alpha+\beta\neq 0$ olduğundan

$P^{-1} = \frac{-1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$'dir. Köşegen elemanları özdeğerler olan matris

$J = \begin{pmatrix} \alpha-\beta & 0 \\ 0 & -(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$ olsun. $Z_1 = PJP^{-1}$ eşitliği sağlandığından

$Z_1^n = PJ^nP^{-1}$ 'dir. Dolayısıyla

$$Z_1^n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\beta & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha-\beta & 0 \\ 0 & -(\alpha-\beta) \end{pmatrix}^n \frac{-1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\alpha(\alpha-\beta)^n-\beta(-1)^n(\alpha-\beta)^n}{\alpha-\beta} & -\frac{\alpha(\alpha-\beta)^n+\alpha(-1)^n(\alpha-\beta)^n}{\alpha-\beta} \\ \frac{-\beta(\alpha-\beta)^n+\beta(-1)^n(\alpha-\beta)^n}{\alpha-\beta} & \frac{-\beta(\alpha-\beta)^n+\alpha(-1)^n(\alpha-\beta)^n}{\alpha-\beta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} (k^2+4t)^{\frac{n}{2}}I, & n \text{ çift doğal sayı ise} \\ (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}Z_1, & n \text{ tek doğal sayı ise} \end{cases}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.12. n doğal sayı olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $k(k^2+4t)^n = \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^jU_{2n-2j+2}$,

b) $-k(k^2+4t)^n = \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^{j+1}U_{2n-2j}$,

c) $2(k^2+4t)^n = \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^jU_{2n-2j+1}$,

d) $0 = \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^jV_{2n-2j}$.

İspat: Teorem 3.2'deki $B = \begin{pmatrix} k & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ ve $C = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & k \end{pmatrix}$ matrisleri ile

Teorem 3.11'deki $Z_1 = \begin{pmatrix} k & 2\alpha \\ -2\beta & -k \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Açık olarak

$$B - C = \begin{pmatrix} k & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2\alpha \\ -2\beta & -k \end{pmatrix} = Z_1 \tag{3.31}$$

ve $BC = CB = -tI$ olduğu görülür. 3.31'deki eşitliğin her iki tarafının $(2n+1)$. kuvveti alındığında

$$(B-C)^{2n+1} = Z_1^{2n+1} = Z_1^{2n}Z_1 = (k^2+4t)^nZ_1 \tag{3.32}$$

olur. Öte yandan

$$(B-C)^{2n+1} = \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}B^{2n+1-j}(-C)^j \tag{3.33}$$

dir. $BC = CB = -tI$ olduğu kullanılırsa

$$B^{2n+1-j}(-C)^j = B^{2n+1-2j}t^j \tag{3.34}$$

olduğundan 3.34 eşitliği 3.33'te yerine yazılırsa

$$(B-C)^{2n+1} = \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} t^j B^{2n+1-2j} \tag{3.35}$$

eşitliği elde edilir. Böylece 3.32 ve 3.35 eşitlikleri ile $B^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & \alpha U_n \\ -\beta U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix}$ olduğu kullanılırsa

$$(k^2+4t)^n \begin{pmatrix} k & 2\alpha \\ -2\beta & -k \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} t^j U_{2n-2j+2} & \alpha \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} t^j U_{2n-2j+1} \\ -\beta \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} t^j U_{2n-2j+1} & \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} t^{j+1} U_{2n-2j} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$k(k^2+4t)^n = \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} t^j U_{2n-2j+2}, \tag{3.36}$$

$$-k(k^2+4t)^n = \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} t^{j+1} U_{2n-2j}, \tag{3.37}$$

$$2(k^2+4t)^n = \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} t^j U_{2n-2j+1}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve c) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.36 ve 3.37'deki eşitlikler taraf tarafa toplanır ve Önerme 2.7 a)'daki özdeşlik kullanılırsa

$$0 = \sum_{j=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} t^j V_{2n-2j}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise d) eşitliğidir.

Teorem 3.13. m ve n doğal sayılar olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $V_m^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} U_{mn+1-2mj}$,

b) $V_m^n = t\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} U_{mn-1-2mj}$,

c) $2V_m^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} V_{mn-2mj}$,

d) $0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} U_{mn-2mj}$.

İspat:

Teorem 3.2'deki $B = \begin{pmatrix} k & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ ve $C = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & k \end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım. Açık olarak

$$B^m + C^m = \begin{pmatrix} U_{m+1} & \alpha U_m \\ -\beta U_m & tU_{m-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tU_{m-1} & -\alpha U_m \\ \beta U_m & U_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_m & 0 \\ 0 & V_m \end{pmatrix} = V_m I$$

ve $BC = CB = -tI$'dır. Buradan

$$V_m^n I = (V_m I)^n = (B^m + C^m)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (B^m)^{n-j} (C^m)^j \tag{3.38}$$

eşitliği elde edilir. $BC = CB = -tI$ olduğu kullanılırsa

$$(B^m)^{n-j}(C^m)^j = B^{mn-2mj}(-t)^{mj} \tag{3.39}$$

olur. 3.39 eşitliği 3.38'de yerine yazılırsa

$$V_m^n I = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B^{mn-2mj}(-t)^{mj} \tag{3.40}$$

olduğu görülür. Burada

$$V_m^n I = \begin{pmatrix} V_m^n & 0 \\ 0 & V_m^n \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

olduğundan 3.40 ve 3.41 eşitlikleri ile $B^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & \alpha U_n \\ -\beta U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix}$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{pmatrix} V_m^n & 0 \\ 0 & V_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} U_{mn+1-2mj} & \alpha \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} U_{mn-2mj} \\ -\beta \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} U_{mn-2mj} & t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} U_{mn-1-2mj} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$V_m^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} U_{mn+1-2mj}, \tag{3.42}$$

$$V_m^n = t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} U_{mn-1-2mj} \tag{3.43}$$

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} U_{mn-2mj}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve d) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.42 ve 3.43 eşitliği taraf tarafa toplanır ve Önerme 2.7 a)'daki özdeşlik kullanılırsa

$$2V_m^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} V_{mn-2mj}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise c) eşitliğidir.

Teorem 3.13'de k ve t yerine 1 yazılırsa aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.14. m ve n doğal sayılar olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $L_m^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{mj} F_{mn-1-2mj}$,

b) $2L_m^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{mj} L_{mn-2mj}$,

c) $0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{mj} F_{mn-2mj}$.

Teorem 3.15. m ve n doğal sayılar olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

n çift doğal sayı ise;

a) $U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (-t)^{mj}\, U_{mn+1-2mj}$,

b) $U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (-t)^{mj}\, U_{mn-1-2mj}$,

c) $2U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (-t)^{mj}\, V_{mn-2mj}$,

d) $0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j$.

n tek doğal sayı ise

e) $kU_m^n (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (-t)^{mj}\, U_{mn+1-2mj}$,

f) $-kU_m^n (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (-t)^{mj}\, U_{mn-1-2mj}$,

g) $2U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j (-t)^{mj}\, U_{mn-2mj}$,

h) $0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} (-1)^j\, V_{mn-2mj}$.

İspat: Teorem 3.2'deki $B = \begin{pmatrix} k & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ ve $C = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & k \end{pmatrix}$ matrisleri ile Teorem 3.11'deki $Z_1 = \begin{pmatrix} k & 2\alpha \\ -2\beta & -k \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Açık olarak

$$B^m - C^m = \begin{pmatrix} U_{m+1} & \alpha U_m \\ -\beta U_m & tU_{m-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} tU_{m-1} & -\alpha U_m \\ \beta U_m & U_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kU_m & 2\alpha U_m \\ -2\beta U_m & -kU_m \end{pmatrix}$$

$$= U_m \begin{pmatrix} k & 2\alpha \\ -2\beta & -k \end{pmatrix} = U_m Z_1$$

ve $BC = CB = -tI$'dır. Buradan

$$U_m^n Z_1^n = (U_m Z_1)^n = (B^m - C^m)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (B^m)^{n-j} (-C^m)^j \tag{3.44}$$

olur. $BC = CB = -tI$ olduğu kullanılırsa

$$(B^m)^{n-j} (-C^m)^j = B^{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j \tag{3.45}$$

eşitliği bulunur. O halde 3.44 eşitliği 3.43 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$U_m^n Z_1^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B^{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j \tag{3.46}$$

elde edilir. Buradan n çift doğal sayı ise Teorem 3.11'e göre

$$U_m^n Z_1^n = \begin{pmatrix} U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

olduğundan bu matris 3.46 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn+1-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j & \alpha \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j \\ -\beta \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j & t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-1-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn+1-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j \quad , \tag{3.47}$$

$$U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-1-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j \quad , \tag{3.48}$$

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve d) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.47 ve 3.48 eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Önerme 2.7 a)'daki özdeşlik kullanılırsa

$$2{U_m}^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj}(-1)^j V_{mn-2mj}$$

eşitliği bulunur. Bu ise c) eşitliğidir.

n tek doğal sayı ise Teorem 3.11'e göre

$$Z_1^n = \begin{pmatrix} k(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} & 2\alpha(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} \\ -2\beta(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} & -k(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} \end{pmatrix}$$

olduğundan bu matris 3.46 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} kU_m^n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} & 2\alpha U_m^n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} \\ -2\beta U_m^n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} & -kU_m^n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn+1-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j & \alpha \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j \\ -\beta \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j & t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-1-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$kU_m{}^n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj}(-1)^j U_{mn+1-2mj}\ , \qquad (3.49)$$

$$-kU_m{}^n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = t\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj}(-1)^j U_{mn-1-2mj}\ , \qquad (3.50)$$

$$2U_m{}^n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj}(-1)^j U_{mn-2mj}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların e), f) ve g) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.49 ve 3.50'deki eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Önerme 2.7 a)'daki özdeşlik kullanılırsa

$$0 = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj}(-1)^j V_{mn-2mj}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise h) eşitliğidir.

Teorem 3.16. m ve n doğal sayılar olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $U_{mn+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}tU_{mn-1-mj}V_m{}^j$,

b) $U_{mn} = -\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}U_{mn-mj}V_m{}^j$,

c) $tU_{mn-1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}U_{mn+1-mj}V_m{}^j$,

d) $V_{mn} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}V_{mn-mj}V_m{}^j$.

İspat: Teorem 3.2'deki $B = \begin{pmatrix} k & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ ve $C = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & k \end{pmatrix}$ matrisleri ele alalım.

Açık olarak

$$B^m + C^m = \begin{pmatrix} U_{m+1} & \alpha U_m \\ -\beta U_m & tU_{m+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tU_{m-1} & -\alpha U_m \\ \beta U_m & U_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_m & 0 \\ 0 & V_m \end{pmatrix} = V_m I\text{'dır.}$$

$$B^{mn} = (B^m)^n = (-C^m + V_m I)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-C^m)^{n-j}(V_m)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}C^{mn-mj}V_m^j \qquad (3.51)$$

eşitliği elde edilir. Böylece Teorem 3.2'ye göre

$$B^{mn} = \begin{pmatrix} U_{mn+1} & \alpha U_{mn} \\ -\beta U_{mn} & tU_{mn-1} \end{pmatrix} \qquad (3.52)$$

olduğundan 3.51 ve 3.52 eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{pmatrix} U_{mn+1} & \alpha U_{mn} \\ -\beta U_{mn} & tU_{mn-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} tU_{mn-1-mj} V_m{}^j & -\alpha \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} U_{mn-mj} V_m{}^j \\ \beta \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} U_{mn-mj} V_m{}^j & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} V_{mn+1-mj} V_m{}^j \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$U_{mn+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} tU_{mn-1-mj} V_m{}^j , \tag{3.53}$$

$$U_{mn} = -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} U_{mn-mj} V_m{}^j ,$$

$$tU_{mn-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} U_{mn+1-mj} V_m{}^j \tag{3.54}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve c) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.53 ve 3.54 eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve $V_n = U_{n+1} + tU_{n-1}$ özdeşliği kullanılırsa

$$V_{mn} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} V_{mn-mj} V_m{}^j$$

eşitliği bulunur. Bu ise d) eşitliğidir.

Teorem 3.17. m ve n doğal sayılar olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $U_m U_{mn+mk+m} = U_{mn+m} U_{mk+m} + (-t)^m U_{mn} U_{mk}$,
b) $U_m U_{mn+mk} = U_{mn+m} U_{mk} - (-t)^m U_{mn} U_{mk-m}$,
c) $U_m U_{mn+mk-m} = -U_{mn} U_{mk} - (-t)^m U_{mn-m} U_{mk-m}$.

İspat: Teorem 3.1'den $A = \begin{pmatrix} a+b & -a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Burada a yerine α^m, b yerine β^m alınırsa $A = \begin{pmatrix} V_m & -\alpha^m \\ \beta^m & 0 \end{pmatrix}$ matrisi elde edilir. Buradan

$$A^{n+k} = A^n \cdot A^k \tag{3.55}$$

eşitliği ele alındığında Teorem 3.1 b) şıkkına göre

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{U_{mn+m}}{U_m} & \frac{-\alpha^m U_{mn}}{U_m} \\ \frac{-\beta^m U_{mn}}{U_m} & \frac{-(-t)^m U_{mn-m}}{U_m} \end{pmatrix},$$

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{U_{mk+m}}{U_m} & \frac{-\alpha^m U_{mk}}{U_m} \\ \frac{-\beta^m U_{mk}}{U_m} & \frac{-(-t)^m U_{mk-m}}{U_m} \end{pmatrix},$$

$$A^{n+k} = \begin{pmatrix} \frac{U_{mn+mk+m}}{U_m} & \frac{-\alpha^m U_{mn+mk}}{U_m} \\ \frac{-\beta^m U_{mn+mk}}{U_m} & \frac{-(-t)^m U_{mn+mk-m}}{U_m} \end{pmatrix}$$

olup bu eşitlikler 3.55'de yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} \frac{U_{mn+mk+m}}{U_m} & \frac{-\alpha^m U_{mn+mk}}{U_m} \\ \frac{-\beta^m U_{mn+mk}}{U_m} & \frac{-(-t)^m U_{mn+mk-m}}{U_m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{U_{mn+m}}{U_m} & \frac{-\alpha^m U_{mn}}{U_m} \\ \frac{-\beta^m U_{mn}}{U_m} & \frac{-(-t)^m U_{mn-m}}{U_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{U_{mk+m}}{U_m} & \frac{-\alpha^m U_{mk}}{U_m} \\ \frac{-\beta^m U_{mk}}{U_m} & \frac{-(-t)^m U_{mk-m}}{U_m} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği bulunur. Bu matris eşitliğinden

$$U_m U_{mn+mk+m} = U_{mn+m} U_{mk+m} + (-t)^m U_{mn} U_{mk},$$

$$U_m U_{mn+mk} = U_{mn+m} U_{mk} - (-t)^m U_{mn} U_{mk-m},$$

$$U_m U_{mn+mk-m} = -U_{mn} U_{mk} - (-t)^m U_{mn-m} U_{mk-m}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve c) eşitliği olduğu görülür.

Aşağıdaki teoremde [13] numaralı makaleden alınan matrisler verilecektir. Daha sonra bu matrisler verilen özdeşliklerin ispatında kullanılacaktır.

Teorem 3.18. n doğal sayı olsun. Bu durumda;

a) $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ise $A_1^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & U_n \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$,

b) $B_1 = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ise $B_1^n = \begin{pmatrix} \beta^n & -U_n \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

dir.

İspat: : a) A_1 matrisinin karakteristik denkleminin $\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta = 0$ ve bu denklemin köklerinin sırasıyla α ve β olduğu kolaylıkla görülebilir. α ve β, A_1 matrisinin birbirinden farklı iki özdeğer olduğundan A_1 matrisi köşegenleştirilebilirdir. Şimdi α özdeğerine karşılık gelen özvektörler $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \beta-\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ denkleminden

$s \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$ olarak elde edilir. O halde $s = 1$ alındığında $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ özvektörü bulunur. β ile ilgili özvektörlerin ise $\begin{pmatrix} \alpha-\beta & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$ denkleminden $s_1 \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ (\beta-\alpha)s_1 \end{pmatrix}$ biçiminde olduğu görülür. O halde $s_1 = 1$ için $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta-\alpha \end{pmatrix}$ özvektörü bulunur. Sütunları $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta-\alpha \end{pmatrix}$ özvektörlerinden oluşan matris $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \beta-\alpha \end{pmatrix}$ olsun. $|P| = \beta - \alpha \neq 0$ olduğundan $P^{-1} = \frac{1}{\beta-\alpha}\begin{pmatrix} \beta-\alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$'dir.

Köşegen elemanları özdeğerler olan matris $J=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ olsun. $A_1=PJP^{-1}$ eşitliği sağlandığından $A_1^n=PJ^nP^{-1}$ 'dir. Dolayısıyla

$$A_1^n=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \beta-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}^n\frac{1}{\beta-\alpha}\begin{pmatrix}\beta-\alpha & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^n & U_n\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}$$

dir.

b) a) şıkkındakine benzer şekilde yapıldığında $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \beta-\alpha & 0\end{pmatrix}$ ve $J=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ olmak üzere $B_1=PJP^{-1}$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Böylece $B_1^n=PJ^nP^{-1}$ olup buradan

$$B_1^n=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \beta-\alpha & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}^n\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix}0 & -1\\ \alpha-\beta & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta^n & -U_n\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$$

elde edilir.

Teorem 3.19. n doğal sayı olmak üzere;

$$C_1=\begin{pmatrix}(k^2+4t)^{\frac{1}{2}} & 2\\ 0 & -(k^2+4t)^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix} \text{ ise } {C_1}^n=\begin{cases}(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}I\,, & n \text{ çift doğal sayı ise}\\ (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}C_1\,, & n \text{ tek doğal sayı ise}\end{cases}$$

dir.

İspat: Teorem 3.18'dekine benzer şekilde ispat yapılır.

Teorem 3.20. n doğal sayı olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $(k^2+4t)^{\frac{2n+1}{2}}=\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^j\alpha^{2n+1-2j}$,

b) $-(k^2+4t)^{\frac{2n+1}{2}}=\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^j\beta^{2n+1-2j}$,

c) $2(k^2+4t)^n=\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^jU_{2n+1-2j}$.

İspat: Teorem 3.18'deki $A_1=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ ve $B_1=\begin{pmatrix}\beta & -1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım.

Açık olarak

$$A_1-B_1=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \beta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\beta & -1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-\beta & 2\\ 0 & \beta-\alpha\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(k^2+4t)^{\frac{1}{2}} & 2\\ 0 & -(k^2+4t)^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$

$$= C_1 \tag{3.56}$$

ve $A_1B_1 = B_1A_1 = -tI$’dır.Burada 3.56 eşitliğinin her iki tarafının $(2n+1)$. kuvveti alınırsa

$$(A_1 - B_1)^{2n+1} = {C_1}^{2n+1} = {C_1}^{2n}C_1 = (k^2+4t)^n(A_1 - B_1)$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$(k^2+4t)^n C_1 = (A_1 - B_1)^{2n+1} = \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}{A_1}^{2n+1-j}(-B_1)^j \tag{3.57}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $A_1B_1 = B_1A_1 = -tI$ olduğu kullanılırsa

$${A_1}^{2n+1-j}(-B_1)^j = {A_1}^{2n+1-2j}t^j \tag{3.58}$$

eşitliği bulunur. O halde 3.58 eşitliği 3.57’de yerine yazılırsa

$$(k^2+4t)^n\begin{pmatrix}(k^2+4t)^{\frac{1}{2}} & 2\\ 0 & -(k^2+4t)^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}{A_1}^{2n+1-2j}t^j$$

$$= \begin{pmatrix}\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^j\alpha^{2n+1-2j} & \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^jU_{2n+1-2J}\\ 0 & \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^j\beta^{2n+1-2j}\end{pmatrix}$$

matris eşitliği bulunur. Bu matris eşitliğinden

$$(k^2+4t)^{\frac{2n+1}{2}} = \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^j\alpha^{2n+1-2j}\ ,$$

$$-(k^2+4t)^{\frac{2n+1}{2}} = \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^j\beta^{2n+1-2j},$$

$$2(k^2+4t)^n = \sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}t^jU_{2n+1-2J} \tag{3.59}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve c) eşitlikleri olduğu görülür.

Dikkat edilirse 3.59 eşitliği Teorem 3.12’deki c) eşitliği ile aynıdır.

Teorem 3.21. m ve n doğal sayılar olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $V_m^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\alpha^{mn-2mj}(-t)^{mj}$,

b) $V_m^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\beta^{mn-2mj}(-t)^{mj}$,

c) $2V_m^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}V_{mn-2mj}(-t)^{mj}$,

d) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}U_{mn-2mj}(-t)^{mj} = 0$.

İspat: Teorem 3.18’deki $A_1 = \begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ ve $B_1 = \begin{pmatrix}\beta & -1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım. Açık olarak

$$A_1^m + B_1^m = \begin{pmatrix}\alpha^m & U_m\\ 0 & \beta^m\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta^m & -U_m\\ 0 & \alpha^m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}V_m & 0\\ 0 & V_m\end{pmatrix} = V_mI$$

ve $A_1B_1 = B_1A_1 = -tI$’dır. Buradan

$$V_m^n I = (V_m I)^n = (A_1^m + B_1^m)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (A_1^m)^{n-j} (B_1^m)^j \tag{3.60}$$

eşitliği bulunur. $A_1B_1 = B_1A_1 = -tI$ olduğu kullanılırsa

$$A_1^{mn-mj} B_1^{mj} = A_1^{mn-2mj}(-t)^{mj} \tag{3.61}$$

eşitliği elde edilir. O halde 3.61 eşitliği 3.60 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} V_m^n I &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A_1^{mn-2mj}(-t)^{mj} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^{mn-2mj}(-t)^{mj} & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj}(-t)^{mj} \\ 0 & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \beta^{mn-2mj}(-t)^{mj} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.62}$$

eşitliği bulunur. Diğer yandan

$$V_m^n I = \begin{pmatrix} V_m^n & 0 \\ 0 & V_m^n \end{pmatrix}$$

olduğundan bu eşitlik 3.62’de yerine yazıldığında elde edilen matris eşitliğinden

$$V_m^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^{mn-2mj}(-t)^{mj}\ , \tag{3.63}$$

$$V_m^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \beta^{mn-2mj}(-t)^{mj}\ , \tag{3.64}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj}(-t)^{mj} = 0 \tag{3.65}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve d) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.63 ve 3.64 eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Teorem 2.4 b) kullanılırsa

$$2V_m^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} V_{mn-2mj}(-t)^{mj} \tag{3.66}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise c) eşitliğidir.

Dikkat edilirse 3.66 ve 3.65 eşitlikleri sırasıyla Teorem 3.13’deki c) ve d) eşitliği ile aynıdır.

Teorem 3.21’da $m = 1$ alınırsa $V_1 = k$ olduğundan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.22. k ve t sıfırdan farklı doğal sayılar olsun. Bu durumda;

a) $k^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^{n-2j}(-t)^j$,

b) $k^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \beta^{n-2j}(-t)^j$,

c) $2k^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} V_{n-2j}(-t)^j$,

d) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}U_{n-2j}(-t)^{j}=0$

dir.

Teorem 3.23. m ve n doğal sayılar olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

n çift doğal sayı ise

a) $U_m^n(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\alpha^{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j$,

b) $U_m^n(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\beta^{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j$,

c) $2U_m^n(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}V_{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j$,

d) $0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}U_{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j$

dir.

n tek doğal sayı ise

e) $U_m^n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\alpha^{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j$,

f) $-U_m^n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\beta^{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j$,

g) $2U_m^n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}U_{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j$,

h) $0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-t)^{mj}(-1)^jV_{mn-2mj}$

dir.

İspat: Teorem 3.18'deki $A_1=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ ve $B_1=\begin{pmatrix}\beta & -1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ matrisleri ile Teorem 3.19'daki $C_1=\begin{pmatrix}(k^2+4t)^{\frac{1}{2}} & 2\\ 0 & -(k^2+4t)^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Açık olarak

$$A_1^m-B_1^m=\begin{pmatrix}\alpha^m & U_m\\ 0 & \beta^m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\beta^m & -U_m\\ 0 & \alpha^m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^m-\beta^m & 2U_m\\ 0 & \beta^m-\alpha^m\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha-\beta)U_m & 2U_m\\ 0 & -(\alpha-\beta)U_m\end{pmatrix}=U_m\begin{pmatrix}(k^2+4t)^{\frac{1}{2}} & 2\\ 0 & -(k^2+4t)^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$

$=U_mC_1$'dir. Ayrıca $A_1B_1=B_1A_1=-tI$ 'dır. Buradan

$$U_m{}^nC_1{}^n=(U_mC_1)^n=(A_1^m-B_1^m)^{\,n}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(A_1^m)^{n-j}(-B_1^m)^j \tag{3.67}$$

eşitliği elde edilir. $A_1B_1=B_1A_1=-tI$ olduğu kullanılırsa

$$A_1^{mn-mj}(-B_1^m)^j=A_1^{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j \tag{3.68}$$

eşitliği bulunur. O halde 3.68 eşitliği 3.67 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$U_m{}^n C_1{}^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A_1^{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j \tag{3.69}$$

eşitliği bulunur. Böylece n çift doğal sayı ise 3.69 eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} U_m{}^n & 0 \\ 0 & (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} U_m{}^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j \\ 0 & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \beta^{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j , \tag{3.70}$$

$$U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \beta^{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j, \tag{3.71}$$

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j \tag{3.72}$$

eşitlikleri bulunur. Bunların a), b) ve d) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.70 ve 3.71 eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Teorem 2.4 b) kullanılırsa

$$2U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} V_{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j \tag{3.73}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise c) eşitliğidir.

Dikkat edilirse 3.73 ve 3.72 eşitlikleri sırasıyla Teorem 3.15'deki n çift doğal sayı olması durumunda c) ve d) eşitliği ile aynıdır.

Diğer yandan n tek doğal sayı ise 3.68 eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} U_m{}^n & 2(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} U_m{}^n \\ 0 & -(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} U_m{}^n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j \\ 0 & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \beta^{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$U_m^n (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^{mn-2mj} (-t)^{mj} (-1)^j \ , \tag{3.74}$$

$$-U_m^n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \beta^{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j \,, \tag{3.75}$$

$$2U_m^n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} U_{mn-2mj}(-t)^{mj}(-1)^j \tag{3.76}$$

olduğu görülür. Bunların e), f) ve g) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.74 ve 3.75'deki eşitlikler taraf tarafa toplanır ve Teorem 2.4 b) kullanılırsa

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^{mj} (-1)^j V_{mn-2mj} \tag{3.77}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise h) eşitliğidir.

Dikkat edilirse 3.76 ve 3.77 eşitlikleri sırasıyla Teorem 15'deki c) ve d) eşitlikleri ile aynıdır.

Teorem 3.24. m ve n doğal sayılar olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $\alpha^{mn} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \beta^{mn-mj} V_m^j \,,$

b) $U_{mn} = -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} U_{mn-mj} V_m^j \,,$

c) $\beta^{mn} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \alpha^{mn-mj} V_m^j \,,$

d) $V_{mn} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} V_{mn-mj} V_m^j.$

İspat: Teorem 3.18'deki $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ve $B_1 = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım. Görülebilir ki

$$A_1^m + B_1^m = \begin{pmatrix} \alpha^m & U_m \\ 0 & \beta^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta^m & -U_m \\ 0 & \alpha^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_m & 0 \\ 0 & V_m \end{pmatrix} = V_m I$$

dir. Buradan

$$A_1^{mn} = (A_1{}^m)^n = (-B_1^m + V_m I\ )^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-B_1^m)^{n-j} V_m^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} B_1^{mn-mj} V_m^j \tag{3.78}$$

eşitliği bulunur. Öte yandan Teorem 3.18'e göre

$$A_1^{mn} = \begin{pmatrix} \alpha^{mn} & U_{mn} \\ 0 & \beta^{mn} \end{pmatrix}$$

ve

$$B_1^{mn-mj} = \begin{pmatrix} \beta^{mn-mj} & -U_{mn-mj} \\ 0 & \alpha^{mn-mj} \end{pmatrix}$$

olduğundan (3.78)'den

$$\begin{pmatrix} \alpha^{mn} & U_{mn} \\ 0 & \beta^{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \beta^{mn-mj} V_m^j & -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} U_{mn-mj} V_m^j \\ 0 & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \alpha^{mn-mj} V_m^j \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$\alpha^{mn} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \beta^{mn-mj} V_m^j , \tag{3.79}$$

$$U_{mn} = -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} U_{mn-mj}\, V_m^j , \tag{3.80}$$

$$\beta^{mn} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \alpha^{mn-mj} V_m^j \tag{3.81}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve c) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.79 ve 3.81 eşitlikleri taraf tarafa toplanılır ve Teorem 2.4 b) kullanılırsa

$$V_{mn} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} V_{mn-mj}\, V_m^j \tag{3.82}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise d) eşitliğidir.

Dikkat edilirse 3.80 ve 3.82 eşitlikleri sırasıyla Teorem 3.16'daki b) ve d) eşitlikleri ile aynıdır.

Aşağıdaki teoremde kullanılan $D = \begin{pmatrix} k^2+2t & kt \\ k & 2t \end{pmatrix}$ matrisinin n. kuvveti [11] numaralı makalede mevcuttur.

Teorem 3.25. k ve t sıfırdan farklı tam sayılar olmak üzere;

a) $A = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ise $A^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & tU_n \\ U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix}$,

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & -k \end{pmatrix}$ ise $B^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} tU_{n-1} & -tU_n \\ -U_n & U_{n+1} \end{pmatrix}, & n \text{ çift doğal sayı ise} \\ \begin{pmatrix} -tU_{n-1} & tU_n \\ U_n & -U_{n+1} \end{pmatrix}, & n \text{ tek doğal sayı ise} \end{cases}$,

c) $C = \begin{pmatrix} k & 2t \\ 2 & -k \end{pmatrix}$ ise $C^n = \begin{cases} (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} I, & n \text{ çift doğal sayı} \\ (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} C, & n \text{ tek doğal sayı'} \end{cases}$

d) $D = \begin{pmatrix} k^2+2t & kt \\ k & 2t \end{pmatrix}$ ise $D^n = \begin{cases} (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} U_{n+1} & tU_n \\ U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix}, & n \text{ çift doğal sayı} \\ (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} V_{n+1} & tV_n \\ V_n & tV_{n-1} \end{pmatrix}, & n \text{ tek doğal sayı} \end{cases}$,

e) $E=\begin{pmatrix}2t & -kt\\ -k & k^2+2t\end{pmatrix}$ ise $E^n=\begin{cases}(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix}tU_{n-1} & -tU_n\\ -U_n & U_{n+1}\end{pmatrix}, n \text{ çift doğal sayı}\\ (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix}tV_{n-1} & -tV_n\\ -V_n & V_{n+1}\end{pmatrix}, n \text{ tek doğal sayı}\end{cases}$

dir.

İspat: Teorem 3.25'de verilen matrislerin n. kuvvetlerinin hesaplanışı köşegenleştirme yöntemi ile yapılabilir.

a) A matrisinin özdeğerleri α ve β , birer özvektörleri ise sırasıyla $\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}\beta\\1\end{pmatrix}$ 'dır.

b) B matrisinin özdeğerleri $-\alpha$ ve $-\beta$, birer özvektörleri ise sırasıyla $\begin{pmatrix}\beta\\1\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}$'dır.

c) C matrisinin özdeğerleri $\alpha-\beta$ ve $\beta-\alpha$, birer özvektörleri sırasıyla $\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}\beta\\1\end{pmatrix}$'dır.

d) D matrisinin özdeğerleri $\alpha(\alpha-\beta)$ ve $\beta(\beta-\alpha)$, birer özvektörleri sırasıyla $\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}\beta\\1\end{pmatrix}$'dır.

e) E matrisinin özdeğerleri $\beta(\beta-\alpha)$ ve $\alpha(\alpha-\beta)$, birer özvektörleri sırasıyla $\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}\beta\\1\end{pmatrix}$'dır.

Gerekli köşegenleştirme yapılarak ilerlenirse istenen sonuçlar kolayca elde edilebilir.

Teorem 3.26. n doğal sayı olsun. Bu durumda;

n çift doğal sayı ise aşağıdakiler doğrudur.

a) $tU_{n-1}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^jU_{n-j+1}$,

b) $U_n=-\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^jU_{n-j}$,

c) $U_{n+1}=t\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^jU_{n-j-1}$,

d) $V_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^jV_{n-j}$.

n tek doğal sayı ise aşağıdakiler doğrudur.

e) $-tU_{n-1}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^jU_{n-j+1}$,

f) $U_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^jU_{n-j}$,

g) $U_{n+1}=-t\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^jU_{n-j-1}$,

h) $V_n=-\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^jV_{n-j}$.

İspat: Teorem 3.25'deki $A = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & -k \end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım. Açık olarak $A - B = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = kI$'dır. Buradan

$$B^n = (A - kI)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^{n-j} (-k)^j \tag{3.83}$$

olur. Burada Teorem 3.25'e göre n çift doğal sayı ise

$$B^n = \begin{pmatrix} tU_{n-1} & -tU_n \\ -U_n & U_{n+1} \end{pmatrix} \text{ ve } A^{n-j} = \begin{pmatrix} U_{n-j+1} & tU_{n-j} \\ U_{n-j} & tU_{n-j-1} \end{pmatrix}$$

olduğundan 3.83'ten

$$\begin{pmatrix} tU_{n-1} & -tU_n \\ -U_n & U_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j+1} & t\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j} \\ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j} & t\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j-1} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$tU_{n-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j+1} \ , \tag{3.84}$$

$$U_n = -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j} \ ,$$

$$U_{n+1} = t\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j-1} \tag{3.85}$$

olduğu görülür. Bunların a), b) ve c) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.84 ve 3.85 eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Önerme 2.7 a) özdeşliği kullanılırsa

$$V_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j V_{n-j}$$

eşitliği bulunur. Bu ise d) eşitliğidir.

Diğer yandan Teorem 3.25'e göre n tek doğal sayı ise

$$B^n = \begin{pmatrix} -tU_{n-1} & tU_n \\ U_n & -U_{n+1} \end{pmatrix}$$

olduğundan 3.83'te yerine yazılırsa

$$\begin{pmatrix} -tU_{n-1} & tU_n \\ U_n & -U_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j+1} & t\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j} \\ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j} & t\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j-1} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$-tU_{n-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j+1} \ , \tag{3.86}$$

$U_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j}$,

$$U_{n+1} = -t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j U_{n-j-1} \tag{3.87}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların e), f) ve g) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.87 eşitliğinden 3.86 eşitliği çıkarılır ve ve Önerme 2.7 a) özdeşliği kullanılırsa

$$V_n = -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^j V_{n-j}$$

eşitliği bulunur. Bu ise h) eşitliğidir.

Teorem 3.27. n doğal sayı olsun. Bu durumda;

n çift doğal sayı ise aşağıdakiler doğrudur.

a) $U_{n-1}(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j\, U_{2n-2j-1}$,

b) $U_n(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j\, U_{2n-2j}$,

c) $U_{n+1}(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j\, U_{2n-2j+1}$,

d) $V_n(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j\, V_{2n-2j}$.

n tek doğal sayı ise aşağıdakiler doğrudur.

e) $V_{n-1}(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j\, U_{2n-2j-1}$,

f) $V_n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j\, U_{2n-2j}$,

g) $V_{n+1}(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j\, U_{2n-2j+1}$,

h) $U_n(k^2+4t)^{\frac{n+1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j\, V_{2n-2j}$.

İspat: Teorem 3.25'deki $B = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & -k \end{pmatrix}$ ve $E = \begin{pmatrix} 2t & -kt \\ -k & k^2+2t \end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım. Açık olarak

$$E = \begin{pmatrix} 2t & -kt \\ -k & k^2+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & -k \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^2 + tI$$

dır. Böylece

$$E^n = (B^2+tI)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B^{2n-2j} t^j \tag{3.88}$$

eşitliği elde edilir. Burada Teorem 3.25'e göre n çift doğal sayı ise

$$E^n = (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} tU_{n-1} & -tU_n \\ -U_n & U_{n+1} \end{pmatrix} \tag{3.89}$$

olduğundan 3.88 ve 3.89 eşitliklerinden

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} tU_{n-1} & -tU_n \\ -U_n & U_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{j+1} U_{2n-2j-1} & -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{j+1} U_{2n-2j} \\ -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{j} U_{2n-2j} & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{j} U_{2n-2j+1} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$U_{n-1}(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j U_{2n-2j-1}, \tag{3.90}$$

$$U_n(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j U_{2n-2j} \ ,$$

$$U_{n+1}(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j U_{2n-2j+1} \tag{3.91}$$

olduğu görülür. Bunlar ise a), b) ve c) eşitlikleridir. Burada 3.90 eşitliği t ile çarpılıp 3.91 eşitliği ile taraf tarafa toplanır ve $V_n = U_{n+1} + tU_{n-1}$ özdeşliği kullanılırsa

$$V_n(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j V_{2n-2j}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise d) eşitliğidir.

Diğer yandan Teorem 3.25'e göre n tek doğal sayı ise

$$E^n = (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} tV_{n-1} & -tV_n \\ -V_n & V_{n+1} \end{pmatrix} \tag{3.92}$$

olduğundan 3.88 ve 3.92 eşitliklerinden

$$(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} tV_{n-1} & -tV_n \\ -V_n & V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{j+1} U_{2n-2j-1} & -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{j+1} U_{2n-2j} \\ -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{j} U_{2n-2j} & \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{j} U_{2n-2j+1} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$V_{n-1}(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j U_{2n-2j-1}, \tag{3.93}$$

$$V_n(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j U_{2n-2j} \ ,$$

$$V_{n+1}(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j U_{2n-2j+1} \tag{3.94}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların e), f) ve g) eşitlikleri olduğu görülür. Burada 3.93 eşitliği t ile çarpılıp 3.94 eşitliği ile taraf tarafa toplanır ve $(k^2+4t)U_n = V_{n+1} + tV_{n-1}$ özdeşliği kullanılırsa

$$U_n(k^2+4t)^{\frac{n+1}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j \, V_{2n-2j}$$

eşitliği bulunur. Bu ise h) eşitliğidir.

Teorem 3.28. n doğal sayı olsun. Bu durumda;

n çift doğal sayı ise aşağıdakiler doğrudur.

a) $(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}U_{n-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j} U_{2j-1}$,

b) $(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}U_{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j} U_{2j}$,

c) $(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}U_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j} U_{2j+1}$,

d) $(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}V_{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j} V_{2j}$.

n tek doğal sayı ise aşağıdakiler doğrudur.

e) $(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}V_{n-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j} U_{2j-1}$,

f) $(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}V_{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j} U_{2j}$,

g) $(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}V_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j} U_{2j+1}$,

h) $(k^2+4t)^{\frac{n+1}{2}}U_{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j} V_{2j}$.

İspat: Teorem 3.25'deki $B = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & -k \end{pmatrix}$ ve $E = \begin{pmatrix} 2t & -kt \\ -k & k^2+2t \end{pmatrix}$ matrisleri ele alalım. Açık olarak

$$E = \begin{pmatrix} 2t & -kt \\ -k & k^2+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & -k \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^2 + tI$$

dır. Buradan

$$E^n = (tI + B^2)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^{n-j} B^{2j} \tag{3.95}$$

eşitliği bulunur. O halde Teorem 3.25'e göre n çift doğal sayı ise

$$E^n = (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} tU_{n-1} & -tU_n \\ -U_n & U_{n+1} \end{pmatrix} \tag{3.96}$$

olduğundan 3.95 ve 3.96 eşitliklerinden

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix} tU_{n-1} & -tU_n \\ -U_n & U_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j+1}U_{2j-1} & -\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j+1}U_{2j} \\ -\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j}U_{2j} & \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j}U_{2j+1} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}U_{n-1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j}U_{2j-1}\,, \tag{3.97}$$

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}U_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j}U_{2j}\ \ ,$$

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}U_{n+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j}U_{2j+1} \tag{3.98}$$

olduğu görülür. Bunlar a), b) ve c) eşitlikleridir. Ayrıca 3.97 eşitliğini t ile çarpılır 3.98 eşitliği ile taraf tarafa toplanır ve $V_n = U_{n+1} + tU_{n-1}$ özdeşliği kullanılırsa

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}V_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j}V_{2j}$$

eşitliği bulunur. Bu ise d) eşitliğidir.

Diğer yandan Teorem 3.23'e göre n tek doğal sayı ise

$$E^n = (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix} tV_{n-1} & -tV_n \\ -V_n & V_{n+1} \end{pmatrix} \tag{3.99}$$

olduğundan 3.95 ve 3.99 eşitliklerinden

$$(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix} tV_{n-1} & -tV_n \\ -V_n & V_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j+1}U_{2j-1} & -\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j+1}U_{2j} \\ -\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j}U_{2j} & \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j}U_{2j+1} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}V_{n-1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j}U_{2j-1}\,, \tag{3.100}$$

$$(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}V_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j}U_{2j},$$

$$(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}V_{n+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j}U_{2j+1} \tag{3.101}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların e), f) ve g) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.100 eşitliği t ile çarpılır 3.101 eşitliği ile taraf tarafa toplanır ve $(k^2+4t)U_n = V_{n+1} + tV_{n-1}$ özdeşliği kullanılırsa

$$(k^2+4t)^{\frac{n+1}{2}}U_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} t^{n-j}V_{2j}$$

eşitliği bulunur. Bu ise h) eşitliğidir.

Teorem 3.29. n doğal sayı olsun. Bu durumda;

n çift doğal sayı ise aşağıdakiler doğrudur.

a) $(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} tU_{n-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} (k^2+2t)^j U_{n-j+1}$,

b) $(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} U_n = -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} (k^2+2t)^j U_{n-j}$,

c) $(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} U_{n+1} = t\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} (k^2+2t)^j U_{n-j-1}$,

d) $(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} V_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} (k^2+2t)^j V_{n-j}$.

n tek doğal sayı ise aşağıdakiler doğrdur.

e) $(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} tV_{n-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} (k^2+2t)^j U_{n-j+1}$,

f) $-(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} V_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} (k^2+2t)^j U_{n-j}$,

g) $(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} V_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} (k^2+2t)^j U_{n-j-1}$,

h) $(k^2+4t)^{\frac{n+1}{2}} U_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} (k^2+2t)^j V_{n-j}$.

İspat: Teorem 3.25' deki $A = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $E = \begin{pmatrix} 2t & -kt \\ -k & k^2+2t \end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım.

Açık olarak

$$E = \begin{pmatrix} 2t & -kt \\ -k & k^2+2t \end{pmatrix} = -k\begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^2+2t & 0 \\ 0 & k^2+2t \end{pmatrix} = -kA + (k^2+2t)\mathrm{I}$$

'dır. Buradan

$$E^n = (-kA + (k^2+2t)I)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} A^{n-j} (k^2+2t)^j \tag{3.102}$$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 3.25'e göre n çift doğal sayı ise

$$E^n = (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} tU_{n-1} & -tU_n \\ -U_n & U_{n+1} \end{pmatrix} \tag{3.103}$$

olduğundan 3.102 ve 3.103 eşitliklerinden

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} tU_{n-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} (k^2+2t)^j U_{n-j+1}\ , \tag{3.104}$$

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} U_n = -\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} (k^2+2t)^j U_{n-j}\ ,$$

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} U_{n+1} = t\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-k)^{n-j} (k^2+2t)^j U_{n-j-1} \tag{3.105}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve c) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.104 ve 3.105 eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Önerme 2.7 a) özdeşliği kullanılırsa

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}V_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^{n-j}(k^2+2t)^jV_{n-j}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise d) eşitliğidir.

Diğer yandan Teorem 3.25'e göre n tek doğal sayı ise

$$E^n = (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix} tV_{n-1} & -tV_n \\ -V_n & V_{n+1}\end{pmatrix} \tag{3.106}$$

olduğundan 3.102 ve 3.106 eşitliklerinden

$$(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}tV_{n-1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^{n-j}(k^2+2t)^jU_{n-j+1}, \tag{3.107}$$

$$-(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}V_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^{n-j}(k^2+2t)^jU_{n-j},$$

$$(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}V_{n+1} = t\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^{n-j}(k^2+2t)^jU_{n-j-1} \tag{3.108}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların e), f) ve g) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.107 ve 3.108 eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve $(k^2+4t)U_n = V_{n+1}+tV_{n-1}$ özdeşliği kullanılırsa

$$(k^2+4t)^{\frac{n+1}{2}}U_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-k)^{n-j}(k^2+2t)^jV_{n-j}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise h) eşitliğidir.

Teorem 3.30. n doğal sayı olsun. Bu durumda;

n çift doğal sayı aşağıdakiler doğrudur.

a) $(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}U_{n+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}k^{n-j}(2t)^jU_{n-j+1}$,

b) $(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}U_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}k^{n-j}(2t)^jU_{n-j}$,

c) $(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}U_{n-1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}k^{n-j}(2t)^jU_{n-j-1}$,

d) $(k^2+4t)^{\frac{n}{2}}V_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}k^{n-j}(2t)^jV_{n-j}$.

n tek doğal sayı ise aşağıdakiler doğrudur.

a) $(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}V_{n+1} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}k^{n-j}(2t)^jU_{n-j+1}$,

b) $(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}}V_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}k^{n-j}(2t)^jU_{n-j}$,

c) $(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} V_{n-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j} (2t)^j U_{n-j-1}$,

d) $(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} U_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j} (2t)^j V_{n-j}$.

İspat: Teorem 3.25'deki $A = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $D = \begin{pmatrix} k^2+2t & kt \\ k & 2t \end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım. Açık olarak

$$D = \begin{pmatrix} k^2+2t & kt \\ k & 2t \end{pmatrix} = \mathrm{k}\begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = kA + 2tI$$

dır. Buradan

$$D^n = (kA+2tI)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j} A^{n-j} (2t)^j \tag{3.109}$$

eşitliği elde edilir. O halde Teorem 3.25'e göre n çift doğal sayı ise

$$D^n = (k^2+4t)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} U_{n+1} & tU_n \\ U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.110}$$

olduğundan 3.109 ve 3.110 eşitliklerinden

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} U_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j} (2t)^j U_{n-j+1}, \tag{3.111}$$

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} U_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j} (2t)^j U_{n-j} ,$$

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} U_{n-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j} (2t)^j U_{n-j-1} \tag{3.112}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve c) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.112 eşitliği t ile çarpılıp 3.111 eşitliği ile taraf tarafa toplanır ve Önerme 2.7 a) özdeşliği kullanılırsa

$$(k^2+4t)^{\frac{n}{2}} V_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j} (2t)^j V_{n-j}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise d) eşitliğidir.

Diğer yandan Teorem 3.25'e göre n tek doğal sayı ise

$$D^n = (k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} V_{n+1} & tV_n \\ V_n & tV_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.113}$$

olduğundan 3.109 ve 3.113 eşitliklerinden

$$(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} V_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j} (2t)^j U_{n-j+1}, \tag{3.114}$$

$$(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} V_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j} (2t)^j U_{n-j},$$

$$(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} V_{n-1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j} (2t)^j U_{n-j-1} \tag{3.115}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların e), f) ve g) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.115 eşitliği t ile çarpılır 3.114 eşitliği ile taraf tarafa toplanır ve $(k^2+4t)U_n = V_{n+1} + tV_{n-1}$ özdeşliği kullanılırsa

$$(k^2+4t)^{\frac{n-1}{2}} U_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{n-j} (2t)^j V_{n-j}$$

eşitliği bulunur. Bu ise h) eşitliğidir.

Teorem 3.31. n doğal sayı olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $k^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j+1}$,

b) $k^n = t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j-1}$,

c) $2k^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j V_{n-2j}$,

d) $0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j}$.

İspat: Teorem 3.25'deki $A = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & -k \end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım.

Açık olarak

$A - B = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} =$ kI ve $AB = BA = tI$'dır. Buradan

$$k^n I = (A-B)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^{n-j} (-B)^j \tag{3.116}$$

eşitliği bulunur. $AB = BA = tI$ olduğu kulllanılırsa

$$A^{n-j}(-B)^j = A^{n-2j}(-t)^j \tag{3.117}$$

eşitliği elde edilir. O halde 3.117 eşitliği 3.116 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$k^n I = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^{n-2j} (-t)^j \tag{3.118}$$

eşitliği bulunur. Dolayısıyla

$$k^n I = \begin{pmatrix} k^n & 0 \\ 0 & k^n \end{pmatrix} \tag{3.119}$$

olduğundan 3.118 ve 3.119 eşitliklerinden

$$\begin{pmatrix} k^n & 0 \\ 0 & k^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j+1} & t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j} \\ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j} & t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j-1} \end{pmatrix}$$

matris eşitliği elde edilir. Bu matris eşitliğinden

$$k^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j+1} \,, \tag{3.120}$$

$$k^n = t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j-1} \,, \tag{3.121}$$

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j U_{n-2j}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunların a), b) ve c) eşitlikleri olduğu görülür. Ayrıca 3.120 ve 3.121 eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve Önerme 2.7 a) özdeşliği kullanılırsa

$$2k^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-t)^j V_{n-2j}$$

eşitliği bulunur. Bu ise d) eşitliğidir.

Teorem 3.32. k ve t sıfırdan farklı tam sayılar olmak üzere

$$(k^2 + 4t)(-t)^{n-1} = V_{n+1}V_{n-1} - V_n^2$$

dir.

İspat: Teorem 3.25'deki $A = \begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $C = \begin{pmatrix} k & 2t \\ 2 & -k \end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım.

Açık olarak

$$CA^n = \begin{pmatrix} k & 2t \\ 2 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n+1} & tU_n \\ U_n & tU_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{n+1} & tV_n \\ V_n & tV_{n-1} \end{pmatrix}$$

dir. Burada eşitliğin her iki tarafının determinantı alındığında

$$|CA_n| = |C| \cdot |A_n| = -(k^2 + 4t)(tU_{n+1}U_{n-1} - tU_n^2) = \left| \begin{pmatrix} V_{n+1} & tV_n \\ V_n & tV_{n-1} \end{pmatrix} \right|$$

$$= (tV_{n+1}V_{n-1} - tV_n^2) \tag{3.122}$$

eşitliği bulunur. Burada $U_{n+1}U_{n-1} - U_n^2 = -(-t)^{n-1}$ özdeşliği 3.122'de yerine yazılırsa

$$(k^2 + 4t)(-t)^{n-1} = V_{n+1}V_{n-1} - V_n^2$$

eşitliği elde edilir.

4. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN MATRİSLER YARDIMIYLA ÖZDEŞLİK TÜRETME

Birinci bölümde $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Fibonacci matrisinden bahsedilmiştir. Bir diğer Fibonacci matrisi ise $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisidir[1]. R matrisi kullanılarak Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili özdeşlikler literatürde mevcuttur. Hoggatt ve Bicknell, R matrisini ve bu matrisin karakteristik denklemini sağlamasından yola çıkarak Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili özdeşlikler elde etmiştir[16]. Bu özdeşliklerden bazıları aşağıdaki gibidir.

$$F_{n+3}^2 - 2F_{n+2}^2 - 2F_{n+1}^2 + F_n^2 = 0 \ , \tag{4.1}$$

$$F_{n+3}F_{n+4} - 2F_{n+2}F_{n+3} - 2F_{n+1}F_{n+2} + F_nF_{n+1} = 0$$

(4.1) özdeşliği farklı bir yol izlenerek bulunmuştur[17]. Bu çalışmada Fibonacci çiftleri ele alınmış olup $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisini Fibonacci sayı çiftleri olarak tanımlamıştır. Bu iki matris kullanılarak bulunan bazı özdeşlikler aşağıdaki gibidir.

$$F_{n+2}^2 - F_n^2 = F_{2n+2} \ , \tag{4.2}$$

$$F_{n+3}^2 - F_{n+2}^2 - 2F_{n-1}^2 = F_{2n+2} + 2F_{2n}. \tag{4.3}$$

(4.2) ve (4.3) özdeşlikleri ile $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ özdeşliği kullanılarak (4.1) özdeşliği elde edilir.

Elemanları Fibonacci ve Lucas sayıları olan R ve X gibi bazı özel matrisler ve bu matrislerin n. kuvvetleri [18] çalışmasında verilmiştir. Bu matrislerin Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilgili özdeşliklerin ispatında kullanılabileceği belirtilmiştir.

Teorem 4.1(Teorem 3.1-3.7, [18]). n tam sayı olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ise $S_1^n = \begin{pmatrix} F_n & -F_{n-1} & -F_{n+1} \\ -F_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-1} \\ -F_{n-1} & F_{n-2} & F_n \end{pmatrix}$,

b) $S_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ise $S_2^n = \begin{pmatrix} -F_n & -F_{n+2} & -L_{n+1} \\ F_{n-2} & F_n & L_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n+1} & L_n \end{pmatrix}$,

c) $S_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ise $S_3^n = \begin{pmatrix} F_{n+3} & -F_{n+2} & -F_{n+1} \\ F_{n+1} & -F_n & -F_{n-1} \\ F_{n+2} & -F_{n+1} & -F_n \end{pmatrix}$,

d) $S_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ise $S_4^n = \begin{pmatrix} F_{n+3} & -F_{n+2} & -F_{n+1} \\ F_{n+1} & -F_n & -F_{n-1} \\ F_{n+2} & -F_{n+1} & -F_n \end{pmatrix}$,

e) $S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ise $S_5^n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} & F_{n+1} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} & F_n \end{pmatrix}$,

f) $S_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ise $S_6^n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} & F_{n+1} \\ F_{n-2} & F_{n-3} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} & F_n \end{pmatrix}$,

g) $S_7 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ise $S_7^n = \begin{pmatrix} -F_n & F_{n+2} & L_{n+1} \\ -F_{n-2} & F_n & L_{n-1} \\ -F_{n-1} & F_{n+1} & L_n \end{pmatrix}$.

Aynı yazarlar daha genel bir tanım yaparak aşağıdaki matrisi ve bu matrisin n. kuvvetini vermiştir[19].

Teorem 4.2(Teorem 2.1, [19]).

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \dfrac{ak - a^2 + t}{b} & k - a & 0 \\ \dfrac{br - ab - ak + a^2 - t}{b} & r + a - b - k & r \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri α, β ve r'dir. Burada a, b, k ve t sıfırdan farklı gerçek sayılar olmak üzere; $k^2 + 4t > 0$ ve $r^2 - kr - t \neq 0$ ise

$$A^n = \begin{pmatrix} aU_n + tU_{n-1} & bU_n & 0 \\ \dfrac{ak - a^2 + t}{b} U_n & (k-a)U_n + tU_{n-1} & 0 \\ \dfrac{-ab - ak + a^2 - t}{b} U_n - tU_{n-1} + r^n & (a - b - k)U_n - tU_{n-1} + r^n & r^n \end{pmatrix}$$

dir.

Burada $k = t = 1$ alınarak aşağıdaki sonuç verilmiştir.

Sonuç 4.3(Sonuç 2.1.1, [19]). a, b ve r herhengi bir gerçek sayı olsun. $b \neq 0$ ve $r^2 - r - 1 \neq 0$ olmak üzere;

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \frac{a-a^2+1}{b} & 1-a & 0 \\ \frac{br-ab-a+a^2-1}{b} & r+a-b-1 & r \end{pmatrix} \text{ ise}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} aF_n + F_{n-1} & bF_n & 0 \\ \dfrac{a-a^2+1}{b}F_n & (1-a)F_n + F_{n-1} & 0 \\ \dfrac{-ab-a+a^2-1}{b}F_n - F_{n-1} + r^n & (a-b-1)F_n - F_{n-1} + r^n & r^n \end{pmatrix}$$

dir.

Şimdi $\begin{pmatrix} k & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a+b & -ab \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrislerinden yararlanılarak bazı 3×3 boyutlu matrisler ve bu matrislerin n. kuvvetleri verilecektir.

Teorem 4.4. a, b sıfırdan ve birbirinden farklı tamsayılar, n doğal sayı olmak üzere;

$$A_1 = \begin{pmatrix} a+b & -ab & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ise}$$

$$A_1^n = \begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \frac{-ab(a^n-b^n)}{a-b} & 0 \\ \frac{a^n-b^n}{a-b} & \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

İspat: A_1 matrisinin n. kuvveti köşegenleştirme yöntemi ile hesaplanabilir. A_1 matrisinin karakteristik denklemi $|A_1 - \lambda I| = 0$ yani $\lambda^3 - (a+b)\lambda^2 + ab\lambda = 0$'dır.

Bu denklemin kökleri sırasıyla 0, a ve b'dir. Dolayısıyla 0, a ve b, A_1 matrisinin özdeğerleridir. Birbirinden farklı üç özdeğer bulunduğundan A_1 matrisi köşegenleştirilebilirdir. Şimdi 0, a ve b özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri bulalım. 0 ile ilgili özvektörleri bulmak için $(A_1 - 0I)x = 0$ denklemi yani

$\begin{pmatrix} a+b & -ab & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ denklemi çözülmelidir. Gerekli işlemler yapıldığında

$s \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$ şeklindeki her vektör özvektördür. O halde $s = 1$ alındığında $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ özvektörü elde edilir. a ile ilgili özvektörler için $(A_1 - aI)x = 0$ yani $\begin{pmatrix} b & -ab & 0 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$ denklemi çözülmelidir. Buradan $s_1 \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} as_1 \\ s_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ biçimindeki her vektör bir özvektördür. O halde $s_1 = 1$ için $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ özvektörü bulunur. Benzer şekilde, b ile ilgili özvektörler için $(A_1 - bI)x = 0$ denklemi ele alınırsa $\begin{pmatrix} a & -ab & 0 \\ 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = 0$ denklemi çözülmelidir. Buradan $s_2 \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bs_2 \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ biçimindeki her vektör bir özvektördür. O halde $s_2 = 1$ için $\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ özvektörü bulunur. Sütunları $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ özvektörlerinden oluşan matris $P = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. $|P| = a - b \neq 0$ olduğundan P matrisinin tersi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a-b} & -\frac{b}{a-b} & 0 \\ -\frac{1}{a-b} & \frac{a}{a-b} & 0 \end{pmatrix}$'dir. Köşegen elemanları özdeğerler olan matris $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ olsun. $A_1 = PJP^{-1}$ eşitliği sağlandığından $A_1^n = PJ^nP^{-1}$ 'dir.

Dolayısıyla

$$A_1^n = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a-b} & -\frac{b}{a-b} & 0 \\ -\frac{1}{a-b} & \frac{a}{a-b} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \frac{-ab(a^n-b^n)}{a-b} & 0 \\ \frac{a^n-b^n}{a-b} & \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.5. a, b sıfırdan ve birbirinden farklı tamsayılar, n tam sayı olmak üzere;

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ab \\ 0 & a+b & 0 \\ 1 & 0 & a+b \end{pmatrix} \text{ ise}$$

$$A_2^n = \begin{pmatrix} \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} & 0 & \frac{-ab(a^n-b^n)}{a-b} \\ 0 & (a+b)^n & 0 \\ \frac{a^n-b^n}{a-b} & 0 & \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \end{pmatrix}$$

dir.

İspat: A_2 matrisinin $n.$ kuvveti köşegenleştirme yöntemi ile hesaplanabilir. A_2 matrisinin özdeğerleri $a, b, a+b$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen birer özvektörleri sırasıyla $\begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$'dir. $P = \begin{pmatrix} -b & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$ olmak üzere $A_2 = PJP^{-1}$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Böylece $A_2^n = PJ^nP^{-1}$ olup buradan

$$A_2^n = \begin{pmatrix} -b & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{b} & 0 & \frac{-b}{a} \\ \frac{1}{a} & 1 & \frac{b}{a} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-ab(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b} & 0 & \frac{-ab(a^n-b^n)}{a-b} \\ 0 & (a+b)^n & 0 \\ \frac{a^n-b^n}{a-b} & 0 & \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.4 ve Teorem 4.5'te verilen matrislerde a yerine α, b yerine β alınırsa ve $\alpha + \beta = k$, $\alpha\beta = -t$ olduğu kullanılırsa aşağıdaki teoremler kolaylıkla verilebilir.

Teorem 4.6. k ve t sıfırdan farklı tam sayılar ve n doğal sayı olmak üzere;

$$A_3 = \begin{pmatrix} k & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ise}$$

$$A_3^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & tU_n & 0 \\ U_n & tU_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 4.7. k ve t sıfırdan farklı tam sayılar ve n tam sayı olmak üzer

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \text{ ise}$$

$$A_4^n = \begin{pmatrix} tU_{n-1} & 0 & tU_n \\ 0 & k^n & 0 \\ U_n & 0 & U_{n+1} \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 4.4 ve Teorem 4.5'de verilen matrislerde a yerine α^m, b yerine β^m alınırsa ve $\alpha^m + \beta^m = V_m$, $\alpha^m \beta^m = (-t)^m$ olduğu kullanılırsa aşağıdaki teorem kolaylıkla verilebilir.

Teorem 4.8. m ve n doğal sayılar olsun. Bu durumda

$$A_5 = \begin{pmatrix} V_m & -(-t)^m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ise}$$

$$A_5^n = \begin{pmatrix} \frac{U_{mn+m}}{U_m} & \frac{-(-t)^m U_{mn}}{U_m} & 0 \\ \frac{U_{mn}}{U_m} & \frac{-(-t)^m U_{mn-m}}{U_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 4.9. m ve n tam sayılar olsun. Bu durumda;

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(-t)^m \\ 0 & V_m & 0 \\ 1 & 0 & V_m \end{pmatrix} \text{ ise}$$

$$A_6^n = \begin{pmatrix} \frac{-(-t)^m U_{mn-m}}{U_m} & 0 & \frac{-(-t)^m U_{mn}}{U_m} \\ 0 & V_m^n & 0 \\ \frac{U_{mn}}{U_m} & 0 & \frac{U_{mn+m}}{U_m} \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 4.10. k ve t sıfırdan farklı tam sayılar ve n doğal sayı olmak üzere;

a) $A_7 = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ise $A_7^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & 0 & tU_n \\ U_n & 0 & U_{n-1} \\ tU_n & 0 & tU_{n-1} \end{pmatrix}$,

b) $A_8 = \begin{pmatrix} k & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ise $A_8^n = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha-\beta} + U_{n+1} & \frac{-\beta^2}{\alpha-\beta} + tU_n & 0 \\ \frac{1}{\alpha-\beta} + U_n & \frac{-\beta}{\alpha-\beta} + tU_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-\beta} + U_n & \frac{-\beta}{\alpha-\beta} + tU_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$

dir.

İspat: a) A_7 matrisinin n. kuvveti köşegenleştirme yöntemi ile hesaplanabilir. A_7 matrisinin özdeğerleri α, β, 0 ve bu özdeğerlere karşılık gelen birer özvektörleri sırasıyla $\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{t} \\ \frac{1}{t} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\beta}{t} \\ \frac{1}{t} \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$'dir. $P = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{t} & \frac{\beta}{t} & 0 \\ \frac{1}{t} & \frac{1}{t} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $A_7 = PJP^{-1}$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Böylece $A_7^n = PJ^nP^{-1}$ olup buradan

$$A_7^n = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{t} & \frac{\beta}{t} & 0 \\ \frac{1}{t} & \frac{1}{t} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{t}{\alpha-\beta} & 0 & -\frac{\beta}{\alpha-\beta} \\ -\frac{t}{\alpha-\beta} & 0 & \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_{n+1} & 0 & tU_n \\ U_n & 0 & U_{n-1} \\ tU_n & 0 & tU_{n-1} \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

b) A_8 matrisinin n. kuvveti köşegenleştirme yöntemi ile hesaplanabilir. A_8 matrisinin özdeğerleri α, β, 0 ve bu özdeğerlere karşılık gelen birer özvektörleri sırasıyla $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$'dir. $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere $A_8 = PJP^{-1}$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Böylece $A_8^n = PJ^nP^{-1}$ olup buradan

$$A_8^n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha-\beta} & -\frac{\beta}{\alpha-\beta} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha-\beta} & \frac{\alpha}{\alpha-\beta} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha-\beta} + U_{n+1} & \frac{-\beta^2}{\alpha-\beta} + tU_n & 0 \\ \frac{1}{\alpha-\beta} + U_n & \frac{-\beta}{\alpha-\beta} + tU_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-\beta} + U_n & \frac{-\beta}{\alpha-\beta} + tU_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.11. k ve t sıfırdan farklı tam sayılar ve n tam sayı olmak üzere;

$A_9 = \begin{pmatrix} k & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ise

$$A_9^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & tU_n & 0 \\ U_n & tU_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir.

İspat: A_9 matrisinin n. kuvveti köşegenleştirme yöntemi ile hesaplanabilir. A_9 matrisinin özdeğerleri 1, β, α ve bu özdeğerlere karşılık gelen birer özvektörleri sırasıyla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$'dir. $P = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ olmak üzere $A_9 = PJP^{-1}$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Böylece $A_9^n = PJ^nP^{-1}$ olup buradan

$$A_9^n = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\alpha-\beta} & \frac{\alpha}{\alpha-\beta} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-\beta} & -\frac{\beta}{\alpha-\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} U_{n+1} & tU_n & 0 \\ U_n & tU_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.12. m ve n tam sayılar olsun. Bu durumda;

$$U_{m+n} = U_m U_{n+1} + tU_{m-1}U_n$$

dir.

İspat: Teorem 4.11'den $A_9 = \begin{pmatrix} k & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Buradan

$$A_9^{m+n} = A_9^m \cdot A_9^n \tag{4.4}$$

eşitliği ele alındığında Teorem 4.11'e göre

$$A_9^{m+n} = \begin{pmatrix} U_{m+n+1} & tU_{m+n} & 0 \\ U_{m+n} & tU_{m+n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_9^m = \begin{pmatrix} U_{m+1} & tU_m & 0 \\ U_m & tU_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_9^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & tU_n & 0 \\ U_n & tU_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olup bulunan bu matrisler 4.4'de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa istenen elde edilir.

Teorem 4.13. m ve n tam sayılar olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

a) $U_{mn+mk-m}U_m = U_{mn}U_{mk} - (-t)^m U_{mn-m}U_{mk-m}$,

b) $U_{mn+mk}U_m = U_{mn}U_{mk+m} - (-t)^m U_{mn-m}U_{mk}$,

c) $U_{mn+mk}U_m = U_{mk}U_{mn+m} - (-t)^m U_{mn}U_{mk-m}$,

d) $U_{mn+mk+m}U_m = U_{mn+m}U_{mk+m} - (-t)^m U_{mn}U_{mk}$.

İspat: Teorem 4.9'dan $A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(-t)^m \\ 0 & V_m & 0 \\ 1 & 0 & V_m \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım Buradan

$$A_6^{n+k} = A_6^n \cdot A_6^k \tag{4.5}$$

eşitliği ele alındığında Teorem 4.6'e göre

$$A_6^{n+k} = \begin{pmatrix} \frac{-(-t)^m U_{mn+mk-m}}{U_m} & 0 & \frac{-(-t)^m U_{mn+mk}}{U_m} \\ 0 & V_m^{n+k} & 0 \\ \frac{U_{mn+mk}}{U_m} & 0 & \frac{U_{mn+mk+m}}{U_m} \end{pmatrix},$$

$$A_6^n = \begin{pmatrix} \frac{-(-t)^m U_{mn-m}}{U_m} & 0 & \frac{-(-t)^m U_{mn}}{U_m} \\ 0 & V_m^n & 0 \\ \frac{U_{mn}}{U_m} & 0 & \frac{U_{mn+m}}{U_m} \end{pmatrix},$$

$$A_6^k = \begin{pmatrix} \frac{-(-t)^m U_{mk-m}}{U_m} & 0 & \frac{-(-t)^m U_{mk}}{U_m} \\ 0 & V_m^k & 0 \\ \frac{U_{mk}}{U_m} & 0 & \frac{U_{mk+m}}{U_m} \end{pmatrix}$$

olup yukarıda verilen matrisler 4.5'te yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$U_{mn+mk-m}U_m = U_{mn}U_{mk} - (-t)^m U_{mn-m}U_{mk-m}$,

$U_{mn+mk}U_m = U_{mn}U_{mk+m} - (-t)^m U_{mn-m}U_{mk}$,

$U_{mn+mk}U_m = U_{mk}U_{mn+m} - (-t)^m U_{mn}U_{mk-m}$,

$U_{mn+mk+m}U_m = U_{mn+m}U_{mk+m} - (-t)^m U_{mn}U_{mk}$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 4.14. m ve n tam sayılar olsun. Bu durumda;

$(-t)^{mn-m}U_m^2 = U_{mn}^2 - U_{mn-m}U_{mn+m}$

dir.

İspat: Teorem 4.9'dan $A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(-t)^m \\ 0 & V_m & 0 \\ 1 & 0 & V_m \end{pmatrix}$ matrisini ve bu matrisin n.

kuvveti $A_6^n = \begin{pmatrix} \frac{-(-t)^m U_{mn-m}}{U_m} & 0 & \frac{-(-t)^m U_{mn}}{U_m} \\ 0 & V_m^n & 0 \\ \frac{U_{mn}}{U_m} & 0 & \frac{U_{mn+m}}{U_m} \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Buradan

$$|A_6|^n = |A_6^n|$$

eşitliği ele alındığında

$((-t)^m V_m)^n = (-t)^{mn} V_m^n = \frac{-(-t)^m U_{mn-m}}{U_m} V_m^n \frac{U_{mn+m}}{U_m} - \frac{(-t)^m U_{mn}}{U_m} V_m^n \frac{U_{mn}}{U_m}$

olur. Böylece gerekli işlemler yapıldığında

$$(-t)^{mn-m}U_m^2 = U_{mn}^2 - U_{mn-m}U_{mn+m}$$

eşitliği elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileriyle ilgili özellikler incelenerek bu dizilerin terimleriyle ilgili özdeşlikler için hangi matrislerden yararlanıldığına dair bilgiler verilmiştir. Daha sonra bu dizilerle ilgili temel kavramlar ve özelliklerden bahsedilmiştir. Çalışmanın konusu genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilgili yeni sonuçlar ortaya koymak için matrislerden yararlanmaktır. Elemanları Fibonacci ve Lucas sayıları olan 2×2 boyutlu matrisler verilip bu matrislerin n. kuvvetleri köşegenleştirme yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Bu matrisler yardımıyla yeni özdeşlikler ortaya konulmuştur. Sonra 3×3 boyutlu matrislerden yeni özdeşlikler elde edilebilir mi konusu üzerinde durulmuştur. Bulunan yeni özdeşlikler aslında 2×2 boyutlu matrislerden de elde edildiği görülmüştür. Ayrıca 3×3 boyutlu matrislerden nasıl yeni özdeşlikler elde edilebileceği veya başka farklı kare matrislerden nasıl yararlanılabileceği konuları üzerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Koshy, T. (2019). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2. John Wiley & Sons. https://doi.org/10.1002/9781118742297

[2] Gould, H. W. (1981). A history of the Q-matrix and a higher-dimensional problem. *Fibonacci Quart*, 19(3), 250-257.

[3] Brenner, J. L. (1951). Lucas' matrix. *Amer. Math. Monthly*, 58(1), 220-221. https://doi.org/10.2307/2307721

[4] Keskin, R., & Demirtürk, B. (2010). Some new Fibonacci and Lucas identities by matrix methods. *International Journal of Mathmatical Education in Science and Technology*, 41(3), 379-387.https://doi.org/10.1080/00207390903236426

[5] Silvester, J. R. (1979). Fibonacci properties by matrix methods. *The Mathematical Gazette*, 63(425), 188-191. https://doi.org/10.2307/3617892

[6] Horadam, A. F. (1961). A generalized Fibonacci sequence. *The American Monthly*, 68(5), 455-459.https://doi.org/10.2307/2311099

[7] Horadam, A. F. (1965). Basic properties of a certain generalized sequence of number. *The Fibonacci Quarterly*, 3(3), 161-176.

[8] Hoggatt Jr, V. E. (1969). Fibonacci and Lucas number. *Houghton Mifflin Co.*, Boston.

[9] Bergum, G. E., & Hoggatt Jr, V. E. (1975). Sums and products for recurring sequences. *Fibonacci Quarterly*, 13(2), 115-120.

[10] Melham, R. S., & Shannon, A. G. (1995). Some summation identities using generalized Q-matrices. *Fibonacci Quarterly*, 33(1), 64-73.

[11] Cerda-Morales, G. (2013). On generalized Fibonacci and Lucas numbers by matrix methods. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42(2), 173-179.

[12] Siar, Z., & Keskin, R. (2013). Some New Identities Concerning Generalized Fibonacci and Lucas Numbers. *Hacettepe ...Jjournal of Mathematics and Statistics*, 42(3), 211-222.

[13] Kawale, G. S., & Lahurikar, R. M. (2022). Properties of Fibonacci and Lucas sequences via Fibonacci like matrices. *Scientific Journal*, 11(2), 115-123.

[14] Kalman, D., & Mena, R. (2003). The Fibonacci number-exposed. *Mathematics Magazine*, 76(3), 167-181. https://doi.org/10.2307/3219318

[15] He, T. X., & Shiue, P. J. S. (2020). On the applications of the Girard-Waring identities. *J. Comput. Anl. Appl*, 28, 698-708.

[16] Hoggatt Jr, V. E., & Bicknell, M. (1964). Some new Fibonacci identities. *The Fibonacci Quarterly*, 2(1), 29-32.

[17] Lang, C. L., & Lang, M. L. (2021). Fibonacci identities and Fibonacci pairs. *arXiv preprint arXiv:*2104.10074

[18] Karakaya, S., Özdemir, H., & Petik, T. (2018). 3×3 Dimensional Special Matrices Associated with Fibonacci and Lucas Number. *Sakarya University Journal of Science*, 22(6), 1917-1922.

[19] Özdemir, H., Karakaya, S., & Petik, T. (2021). On some 3×3 dimensional matrices associated with generalized Fibonacci numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(3), 63-72.

ÖZGEÇMİŞ

Ad - Soyad : Gülsüm LİMAN

ÖĞRENİM DURUMU:

Lisans **:**2012, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik

Yüksek Lisans **:** Devam ediyor, Sakarya Üniversitesi, Matematik, Cebir ve Sayılar Teorisi