T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GÖRÜNÜRDE İLİŞKİSİZ REGRESYON MODELLERİNDE ÖN TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

DOKTORA TEZİ

Melike YİĞİT

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

OCAK 2024

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GÖRÜNÜRDE İLİŞKİSİZ REGRESYON MODELLERİNDE ÖN TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

DOKTORA TEZİ

Melike YİĞİT

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nesrin GÜLER

OCAK 2024

Melike YİĞİT tarafından hazırlanan “Görünürde İlişkisiz Regresyon Modellerinde Ön Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması” adlı tez çalışması 24.01.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı :	**Unvan Adı SOYADI** Sakarya Üniversitesi	....
Jüri Üyesi :	**Unvan Adı SOYADI** (Danışman) Sakarya Üniversitesi	....
Jüri Üyesi :	**Unvan Adı SOYADI** Sakarya Üniversitesi	....
Jüri Üyesi :	**Unvan Adı SOYADI** …… Üniversitesi	....
Jüri Üyesi :	**Unvan Adı SOYADI** …… Üniversitesi	....

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum "GÖRÜNÜRDE İLİŞKİSİZ REGRESYON MODELLERİNDE ÖN TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI" başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(24/01/2024).

Melike YİĞİT

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimimin her aşamasında ve özellikle tez sürecinde bilgi birikimi ve değerli rehberliğiyle beni destekleyen kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Nesrin GÜLER' e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmamda her türlü desteği olan sevdiklerime, beni motive eden dostlarıma ve mesai arkadaşlarıma, bu süreçte en büyük destekçim olan sevgili aileme teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.

Melike YİĞİT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

BLUE : En iyi lineer yansız tahmin edici
(Best linear unbiased estimator)

BLUP : En iyi lineer yansız ön tahmin edici
(Best linear unbiased predictor)

OLSE : Alışılmış en küçük kareler tahmin edici
(Ordinary least squares estimator)

OLSP : Alışılmış en küçük kareler ön tahmin edici
(Ordinary least squares predictor)

SUR : Görünürde ilişkisiz regresyon
(Seemingly unrelated regression)

SİMGELER

$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n\times 1}}$	: n boyutlu reel vektör kümesi
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{m\times n}}$	: $m \times n$ boyutlu reel matris kümesi
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z},\dots$	: Vektörler
$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C},\dots$	: Matrisler
$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$	: Elemanları (a_{ij}) olan *A* matrisi
$\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}}$	: n boyutlu birim matris
$\boldsymbol{A}'$	: *A* matrisinin transpozu
$\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}$	: *A* matrisinin tersi
$\boldsymbol{A}^{-}$	: *A* matrisinin genelleştirilmiş tersi
$\boldsymbol{A}^{+}$	: *A* matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersi
$\boldsymbol{A}^{\perp}$	: *A* matrisinin dik tümleyeni
$\boldsymbol{P_A}, \boldsymbol{E_A}, \boldsymbol{F_A}$	: *A* matrisinin dik izdüşüm matrisleri
$\boldsymbol{i}_{+}(\boldsymbol{A})$	: *A* matrisinin pozitif inertiası
$\boldsymbol{i}_{-}(\boldsymbol{A})$	: *A* matrisinin negatif inertiası
$\boldsymbol{i}_{\pm}(\boldsymbol{A})$	: *A* matrisinin birlikte pozitif ve negatif inertiaları
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})$	: *A* matrisinin rankı
$\boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{A})$	: *A* matrisinin sütun uzayı
$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$	: *A* ve *B* matrislerinin kroneker çarpımı
$[\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{B}]$	: Parçalanmış matris
$\boldsymbol{cov}(.)$	: Kovaryans operatörü
$\boldsymbol{E}(.)$	: Beklenen değer operatörü
$\boldsymbol{D}(.)$	: Varyans-kovaryans (dağılım) operatörü
■	: İspat sonu

GÖRÜNÜRDE İLİŞKİSİZ REGRESYON MODELLERİNDE ÖN TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

ÖZET

İstatistiksel model, bir örneklem üzerinden gözlem veya deney sonucu elde edilen bilgiler doğrultusunda, verilerin bütününü ve değişkenler arasındaki ilişkileri açıklamaya, tahmin etmeye veya sonuçları yorumlamaya yarayan matematiksel bir yapıdır.

Görünürde ilişkisiz regresyon (*Seemingly Unrelated Regressions*-SUR) modeller, birden fazla regresyon denklemi birlikte analiz etmek için kullanılan istatistiksel bir model türüdür. Karmaşık sistemlerdeki değişkenler arasındaki ilişkileri tahmin etmek için kullanılan SUR modellerde, bireysel olarak ilişkisiz olmalarına rağmen hata terimleri ilişkili olabilen çoklu regresyon denklemleri ele alınmaktadır.

İstatistiksel modellerde tahmin edicilerin seçimi sonuçların tahmini üzerinde büyük bir etkiye sahiptir. Her tahmin edici, kendine özgü avantajları ve dezavantajları olan ve analizin gereksinimlerine göre farklı şekillerde uygun olabilecek özelliklere sahiptir. Bu nedenle, tahmin edici seçimi, uygulamanın amaçları ve veri yapısına dayanır. Farklı tahmin edicilerin karşılaştırılması ve en doğru tahmin edicinin belirlenmesi, modelin performansını artırmak ve verilerin en doğru şekilde yorumlanması amacıyla yapılan bir araştırmadır.

Bu tez çalışmasında, SUR modeller altında ön tahmin ve tahmin problemi göz önüne alınmıştır. Ele alınan modellerde bilinmeyen parametrelerin ön tahmin ve tahmin edicilerinin bazı istatistiksel özelliklerine ilişkin sonuçlar verilmiştir. Blok matrisler ve rank özellikleri kullanılarak ön tahmin edicilerin eşitlikleri ve toplamsal ayrışımları üzerine bazı sonuçlar elde edilmiştir. Matris rankı ve inertia formülleri vasıtasıyla ön tahmin edicilerin kovaryans matrislerinin karşılaştırılmasına ilişkin bazı eşitlik ve eşitsizlikler elde edilmiştir.

Yedi bölümden oluşan çalışmanın giriş bölümünde, SUR modeller tanıtılmış ve literatür bilgisine yer verilmiştir. İkinci bölümde çalışmada ele alınan konuya ilişkin temel kavram, teorem ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde, SUR modeller detaylı şekilde tanıtılmış, ele alınan modellerde ön tahmin ve tahmin edilebilme özellikleri ile ön tahmin ve tahmin edicilerin ifadeleri gösterilmiştir. Çalışmanın ana sonuçları üç ayrı başlık altında incelenmiştir. SUR modeller altında ön tahmin ve tahmin edicilerin eşitlikleri dördüncü bölümde, toplamsal ayrışımları beşinci bölümde ve kovaryans matrislerinin karşılaştırılması ise altıncı bölümde verilmiştir. Ön tahmin ve tahmin edicilerin eşitlikleri, toplamsal ayrışımları ile kovaryans matrislerinin karşılaştırılmasına ilişkin eşitlik ve eşitsizlikler, ayrıca bazı özel durumlara ilişkin sonuçlar blok matris, rank özellikleri ve inertia formülleri kullanılarak elde edilmiştir. Son bölümde ise sonuç ve öneriler verilmiştir.

COMPARISON OF PREDICTORS IN SEEMINGLY UNRELATED REGRESSION MODELS

SUMMARY

A statistical model supplies a mathematical framework to analyze, interpret, and make predictions about the relationships between variables based on observed data or experimental results obtained from a sample. It provides a systematic approach to understanding the underlying approaches and associations in the data, allowing researchers to infer meaningful conclusions and make informed decisions.

Seemingly Unrelated Regressions (SUR) models are a type of statistical model used to analyze multiple regression equations together. In SUR models, which are used to predict relationships between variables in complex systems, multiple regression equations with seemingly unrelated individual relationships are considered, even though their error terms can be correlated.

SUR models were first proposed in 1962 by Arnold Zellner. In this study, Zellner suggested estimating the regression effects with a single equation instead of estimating separately. This suggestion established the basis of SUR models and showed that more effective results were obtained with this method. Instead of estimating the equations that are related to each other separately, SUR models provide to analyze these equations together by bringing them together. Thus, the relationships between the variables can be determined better and the predictions can be more accurate. With this approach, the use of SUR models became widespread and the importance of considering the regression equations together in statistical analysis was emphasized.

SUR models have been developed by many researchers and used in various application areas. These models have become an important tool in estimating associated regression equations and analyzing interactions between variables and have had a significant influence on the effectiveness of regression analysis in economics, finance, business and many other disciplines.

The choice of estimators in statistical models has a great influence on the estimation of results. Each estimator has properties that have their advantages and disadvantages and may be appropriate in different ways according to the needs of the analysis. Therefore, the choice of the estimator is based on the purposes of the application and the data structure. Comparing different estimators and determining the most accurate estimator is a research to increase the performance of the model and to interpret the data in the most accurate way. The estimation techniques used and researching the properties of estimators are one of the main problems in statistical analysis.

The classical methods used to predict and estimate parameters in linear regression models in statistical analysis are Ordinary Least Squares Predictor ($OLSP$) and Ordinary Least Squares Estimator ($OLSE$), respectively. $OLSP$ is the prediction of parameters using the least squares method in cases where the relationship of the dependent variable with more than one explanatory variable is considered in the linear regression model. On the other hand, $OLSE$ is the estimation of parameters by

minimizing the sum of squared errors between the dependent variable and the predicted parameters in the linear regression model.

In linear regression models, other popular methods used in predicting and estimating parameters, except the classical methods, are the best linear unbiased predictor ($BLUP$) and the best linear unbiased estimator ($BLUE$), respectively. These are the unbiased predictors and estimators with the smallest covariance according to the Löwner order.

For SUR models, which are an extension of linear regression models and where error terms are associated between regression equations, the choice of predictor/estimator can have an important impact on the estimation of results. It is important to compare different predictors/estimators to determine which is appropriate for the situation.

Prediction problems are commonly encountered and of great importance in statistical analysis using SUR models. Obtaining accurate predictions significantly influences the model's success and the interpretability of the results. Therefore, conducting a detailed analysis of prediction problems and utilizing appropriate prediction methods enable the effective use of SUR models.

Prediction problems are one of the main issues in the statistical analysis of SUR models and have practical significance. The ability to obtain accurate predictions directly impacts the performance of the model and the interpretability of the results. Thus, it is crucial to thoroughly analyze prediction problems and use suitable prediction techniques to ensure the effective utilization of SUR models.

Covariance matrix comparison is often used as a criteria for evaluating the performance of predictors and estimators. Additionally, another method for exploring the relationships between predictors/estimators involves establishing equalities between them and deriving additive decomposition expressions for these predictors/estimators. These expressions consisting of equations enable to specify the contributions of partial unknown vectors in linear models, as the models themselves can be related within the system.

In this thesis study, the problem of estimation and prediction under SUR models has been considered. Results regarding the statistical properties of unknown parameters' estimators and predictors have been presented under the considered models. By utilizing block matrices and rank properties, some results on the equalities and decomposition of predictors have been obtained. Furthermore, by using matrix rank and inertia formulas, some equalities and inequalities concerning the comparison of covariance matrices of predictors have been derived.

By employing rigorous statistical methodologies and carefully evaluating the performance of different predictors within the SUR framework, this study aims to enhance the accuracy of predictions and facilitate a more comprehensive interpretation of the data.

This study consists of seven chapters. SUR models are introduced, and overview of the literature is provided in the introduction chapter. The second chapter presents the fundamental concepts, theorems, and properties related to the topic addressed in the study. In the third chapter, SUR models are introduced in detail, and the expressions for estimation and predictability properties, as well as the expressions for estimators and predictors, are presented under the considered models. The main results of the study are examined under three separate headings. The equalities of predictors and estimators under SUR models are presented in the fourth section, the additive decompositions in the fifth section, and the comparison of covariance matrices in the sixth section. Additionally, some results for specific cases are obtained using block matrices, rank properties, and inertia formulas. The final chapter concludes the study by presenting the results and providing recommendations for future research.

This study has contributed to a better understanding and increased utilization of SUR models by considering the statistical properties of estimators and predictors under these models. The obtained results provide researchers and practitioners with more insights into the effectiveness of SUR models in regression analysis. Furthermore, the recommendations of this study can serve as a guide for future research and contribute to the development of the literature in this field.

1. GİRİŞ

Bir sistemi, süreci veya problemi ilgili olduğu alanın kavram ve kurallarıyla açıklayan ve tanımlayan yapıya model denir. Öte yandan istatistiksel model, bir örneklem üzerinden gözlem veya deney sonucu elde edilen bilgiler doğrultusunda, verilerin bütününü ve değişkenler arasındaki ilişkileri açıklamaya, tahmin etmeye veya sonuçları yorumlamaya yarayan matematiksel bir yapıdır. İstatistiksel modeller, veri analizi ve bilimsel araştırmalarda kullanılarak karmaşık ilişkilerin anlaşılmasına ve gelecekteki olayların tahmin edilmesine yardımcı olur. Bu modeller, istatistiksel yöntemleri kullanarak gerçek dünyadaki karmaşık problemleri sadeleştirerek, verilerin özünü ortaya çıkarmaya çalışır.

Görünürde ilişkisiz regresyon (*Seemingly Unrelated Regressions*-SUR) modeller, birden fazla regresyon denklemini birlikte analiz etmek için kullanılan istatistiksel bir model türüdür. M. Uysal [1]' e göre, "Görünürde ilişkisiz regresyon modelinde çoklu regresyon denklemlerinin bir kümesi ele alınmaktadır. Bu regresyon denklemler kümesi eşanlı bir denklemler kümesi biçiminde değildir. Yani herhangi bir denklemde bağımlı değişken olarak bulunan bir değişken bir başka denklemde bağımsız değişken olarak bulunmamaktadır". Bu doğrultuda, sistemde ele alınan denklemlerin ilişkili olmasıyla aslında ifade edilmek istenen bahse konu denklemlerin hata terimlerinin ilişkili olmasıdır. Dolayısıyla, karmaşık sistemlerdeki değişkenler arasındaki ilişkileri tahmin etmek için kullanılan SUR modellerde, görünürde ilişkisiz olmalarına rağmen hata terimleri ilişkili olan çoklu regresyon denklemleri ele alınmaktadır. Görünürde ilişkisiz regresyon modelleri, regresyon denklemlerini bir araya getirir ve aynı anda tahmin eder. Her bir denklemin hata terimi arasında korelasyon olabileceğinden, SUR modeli bu ilişkileri de dikkate alır. Örneğin, bir ülkenin ekonomik büyümesini incelemek için bir SUR modeli kullanabilir. Ele alınan modelde, ekonomik büyüme oranını etkileyen farklı faktörleri anlamak amacıyla birden fazla regresyon denklemi ele alınabilir. Her bir denklemde, ekonomik büyümeyi etkileyen belirli bir değişken (örneğin, yatırım, tüketim, ihracat) bağımsız değişken olarak ele alınabilir, yani denklemler, ekonomik büyümeyi etkileyen farklı faktörleri temsil edecek şekilde oluşturulabilir. Görünürde bu denklemler birbirinden bağımsız gibi görünse de hata terimleri arasında bir korelasyon olabilir. Diğer bir örnek olarak farklı otomobil modellerinin satışlarını etkileyen faktörlerin belirlenmesi problemi ele alınabilir. Bu durumda, SUR modeli kullanarak bir dizi regresyon denklemi oluşturulabilir. Örneğin, denklemlerde bir şirketin A, B ve C olarak adlandırılan üç otomobil modelinin satışlarını etkileyen faktörlerden (reklam harcamaları, fiyat, performans, rekabetçi modellerin satışları gibi) bazıları veya hepsi bağımsız değişkenler olarak ele alınabilir, yani bu denklemlerden her biri, belirli bir otomobil modelinin satışlarını etkileyen faktörleri içerir. Görünürde bu denklemler birbirinden bağımsız gibi görünse de hata terimleri arasında bir ilişki olabilir. Örneğin, Model A' nın reklam harcamalarının etkisi Model C' nin satışlarını etkileyebilir. Bu durumu anlamak için SUR modeli kullanılabilir. Bu model, reklam harcamalarının Model A' nın satışları üzerindeki etkisini diğer modellerin satışlarıyla birlikte değerlendirebilir ve potansiyel korelasyonu dikkate alabilir. Bu örnek, otomobil üreticisinin farklı modeller arasındaki ilişkileri daha kapsamlı bir şekilde değerlendirmesine yardımcı olabilir ve her bir modelin satışını etkileyen faktörleri daha iyi anlamasına katkıda bulunabilir. Bu, pazarlama stratejilerini daha etkili bir şekilde planlamak ve satışları artırmak için önemli bir araç olabilir. Başka bir örnek olarak tarımsal teşvik ve destek politikalarının üreticilerin ürün ekim tercihleri üzerindeki etkisini incelemek için SUR modeli kullanılabilir. Üreticiler uygulanan politikaların etkisiyle ekilecek ürünler arasından ekim alanı tercihinde bulunabilirler. Örneğin A ve B ürünleri ele alındığında ekim alanları üzerinde; ürünlere sağlanan teşvik/ödemenin etkisi, ürünlerin ekim masrafları, verim ve piyasa rekabeti gibi etkenlerin etkisi incelenebilir. Probleme ilişkin oluşturulacak modelde yer alan denklemlerde ürünlerin ekim alanları bağımlı değişken olarak ele alınırken, teşvik ve destek ödemeleri bağımsız değişken olacak şekilde alınabilir. Bu denklemler görünürde birbirinden bağımsız gibi görünse bile ürünler arasındaki rekabet ilişkisinden dolayı hata terimleri arasında korelasyon olabilir. Bu örnek üzerinden SUR model ile üreticilerin ekim alan tercihlerine yönelik etkili planlama ve uygulama yapılabileceği anlaşılmaktadır.

SUR modeller ilk olarak 1962 yılında Arnold Zellner tarafından öne sürülmüştür. Zellner [2] çalışmasında regresyon etkilerini ayrı ayrı tahmin etmek yerine tek bir denklemle tahmin etmeyi önermiştir. Bu öneri, SUR modellerin temellerini oluşturmuş ve bu yöntemle daha etkin sonuçlar elde edildiğini göstermiştir. SUR modeller birbirleriyle ilişkili olan denklemleri ayrı ayrı tahmin etmek yerine, bu denklemleri bir araya getirerek birlikte analiz etmeyi sağlamaktadır. Böylece, değişkenler arasındaki ilişkiler daha iyi bir şekilde tespit edilebilmekte ve tahminler daha doğru olabilmektedir. Bu yaklaşımla SUR modellerin kullanımı yaygınlaşmış ve istatistiksel analizlerde regresyon denklemlerin bir arada ele alınmasının önemi vurgulanmıştır.

SUR modeller, birçok araştırmacı tarafından geliştirilmiş ve çeşitli uygulama alanlarında kullanılmıştır. [3] ve [4] çalışmalarında SUR modeller altında tahmin yöntemi geliştirilerek tahmin edicilerin özellikleri verilmiştir. [5] çalışmasında SUR modellerde tahmin edicilerin yansızlığı ele alınırken, [6] çalışmasında tahmin etme sürecinde çeşitli yaklaşımlarla yeni tahmin ediciler geliştirilmiştir. SUR modeller daha sonraki yıllarda birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Örnek olarak; [7-29] çalışmaları incelenebilir. Yapılan çalışmalar SUR modellerin, parametrelerin verimli tahmin edilebilirliği, hata terimleri arasındaki kovaryans yapısını doğru şekilde tespit etme ve tahminlerin daha hassas ve güvenilir olmasını sağlama gibi avantajlar sunduğunu göstermektedir.

Geniş bir uygulama alanına sahip olan SUR modeller için literatürde; üretim ve maliyet fonksiyonları, talep ve yatırım araştırmalarıyla ekonomi-finans alanlarında, üretim ve verim tahminleriyle tarım ve hayvancılık alanında, hastalık teşhis ve tedavi yöntemleriyle sağlık alanında, ulaşım ve turizm çalışmaları ile toplumsal araştırmalarla sosyal alanlarda ulusal ve uluslararası pek çok çalışma örneği mevcuttur. Bu kapsamda SUR modellerle ilgili ülkemizde son yıllarda yürütülen tez çalışmalarına örnek olarak, [30-38] çalışmaları incelenebilir.

İstatistiksel analizde, lineer regresyon modelleri için parametre tahmininde çeşitli ölçütler ve bu ölçütlere dayalı farklı tahmin ediciler bulunmaktadır. İstatistiksel modellerde tahmin edici seçimi sonuçların tahmini üzerinde büyük bir etkiye sahiptir. Her tahmin edici, kendine özgü avantajları ve dezavantajları olan ve analizin gereksinimlerine göre farklı şekillerde uygun olabilecek özelliklere sahiptir. Bu nedenle, tahmin edici seçimi, uygulamanın amaçları ve veri yapısına dayanır. Farklı tahmin edicilerin karşılaştırılması ve en doğru tahmin edicinin belirlenmesi modelin performansını artırmak ve verilerin en doğru şekilde yorumlanması amacıyla araştırılmaktadır. Kullanılan tahmin teknikleri ve tahmin edicilerin özelliklerinin incelenmesi istatistiksel analizde ele alınan temel problemlerden biridir.

Yansızlık, lineer modellerde bilinmeyen parametreler için ön tahmin ve tahmin edicileri değerlendirmede önemli bir ölçüdür. Parametrelerin ön tahmin ve tahmin edicilerinin bulunmasında kullanılan klasik bir yöntem ise en küçük kareler yöntemidir. Bu yöntemle elde edilen yansız ön tahmin ve tahmin ediciler sırasıyla alışılmış en küçük kareler ön tahmin edicisi ($OLSP$- Ordinary Least Squares Predictor) ve alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi ($OLSE$- Ordinary Least Squares Estimator) olarak bilinir. $OLSP$, doğrusal regresyon modelde hedef değişkenin birden fazla açıklayıcı değişken ile ilişkisinin incelendiği durumlarda en küçük kareler yöntemiyle parametrelerin tahmin edilmesidir. $OLSE$ ise doğrusal regresyon modelde hedef değişken ve tahmin edilen parametreler arasındaki farkın kareler toplamının minimize edilmesiyle parametrelerin tahmin edilmesidir. $OLSE$, daha geniş bir uygulama alanına sahipken $OLSP$ tek bir hedef değişkeni ve birden fazla açıklayıcı değişkenin mevcut olduğu modellerde kullanılır. $OLSP$ ve $OLSE$, regresyon modelindeki parametreleri tahmin etmek için kullanılan güvenilir yöntemler arasındadır. Bu yöntemler, gözlemlenen verilere dayanarak modelin en uygun parametre değerlerini bulma amacını taşır ve bu sayede lineer regresyon analizlerinde yaygın olarak kullanılır.

Bilinmeyen parametreler için elde edilen yansız ön tahmin ve tahmin ediciler bazı durumlarda tek bir seçenekle sınırlı olmayabilir. Doğrusal regresyon modellerde parametrelerin ön tahmin ve tahmin edilmesinde klasik yöntemler haricinde kullanılan bir diğer iyi bilinen popüler yöntem, diğer tüm yansız ön tahmin ve tahmin ediciler içerisinde en küçük kovaryans matrisine sahip ön tahmin ve tahmin edicilerin bulunmasıdır. Bu yaklaşımla elde edilen ön tahmin ve tahmin ediciler sırasıyla en iyi lineer yansız ön tahmin edici (Best Linear Unbiased Predictor-$BLUP$) ve en iyi lineer yansız tahmin edici (Best Linear Unbiased Estimator-$BLUE$) olarak bilinir. $BLUP$ ve $BLUE$, Löwner sıralamasına göre kovaryansı en küçük yansız ön tahmin ve tahmin edicilerdir.

Tahmin edicilerin performans karşılaştırmasında yaygın kullanılan ölçütlerden biri kovaryans matris karşılaştırmasıdır. Bu kapsamdaki araştırmaların bazıları; [39-54] çalışmaları olarak verilebilir. Doğrusal regresyon modellerin bir uzantısı olan ve regresyon denklemleri arasında hata terimlerinin ilişkili olduğu SUR modeller için tahmin edici seçimi sonuçların tahmini üzerinde büyük bir etki yapabilir ve farklı tahmin edicilerin karşılaştırılması, en doğru tahmin edicinin hangisi olduğunu belirlemek için önemlidir. Ancak, tahmin yöntemleri ve tahmin edicilerin karşılaştırılması problemlerinde bir ölçütün diğerlerinden daha iyi olması, her zaman en iyi modelin seçilmesi anlamına gelmeyebilir. Çünkü özellikle gerçek veriler için, modelin öngördüğü hataların nedenlerini anlamak, modelin genel performansını anlamak açısından da önemlidir. SUR modeller gibi regresyon denklemlerden oluşan model sistemlerini incelerken sistemi bütünsel bakış açısıyla ele almak gerekmektedir. Doğrusal regresyon modellerin oluşturduğu sistemden ve tekil modellerden elde edilen çıkarım sonuçları tamamen aynı değildir, ancak sistemden elde edilen ile tekil modellerden elde edilen sonuçlar arasında bağlantılar mevcuttur. Doğrusal regresyon modeller sistemi ve tekil modeller altında ön tahmin ve tahmin ediciler arasında belirli ilişki problemleri kurularak bu bağlantılar tespit edilmeye çalışılmaktadır. İstatistiksel literatürde bu doğrultuda kullanılan yaklaşımlardan başlıcaları ön tahmin ve tahmin ediciler arasındaki eşitlikler ile toplamsal ayrışımlarını tespit etmektir.

Bu tez çalışmasında, SUR modeller altında ön tahmin ve tahmin problemi göz önüne alınmıştır. Ele alınan modellerde bilinmeyen parametrelerin ön tahmin ve tahmin edicilerinin bazı istatistiksel özellikleri verilmiştir. Blok matrisler ve bazı rank özellikleri kullanılarak ön tahmin edicilerin eşitlikleri ve toplamsal ayrışımları üzerine bazı sonuçlar elde edilmiştir. Matris rankı ve inertia formülleri vasıtasıyla ön tahmin edicilerin kovaryans matrislerinin karşılaştırılmasına ilişkin bazı eşitlik ve eşitsizlikler verilmiştir. Ayrıca bazı özel durumlara ilişkin sonuçlar elde edilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde kullanılacak kavramlar hakkında ön bilgi niteliğinde olan tanım, teorem ve sonuçlar sunulmaktadır.

2.1. Matris Cebirine İlişkin Temel Bilgiler

Tanım 2.1.1. $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = 0$ sağlayacak biçimde tümü aynı anda sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skalerleri mevcut ise, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vektörleri lineer bağımlıdır. Aksi durumda bu vektörler lineer bağımsızdır [55].

Tanım 2.1.2. $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sütunlarına sahip olmak üzere, $y' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ için B' nin sütunlarının lineer bir kombinasyonu $By = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_n b_n$ ifadesiyle belirtilir. B'nin sütun uzayı, matris sütunlarının lineer kombinasyonu biçiminde gösterilebilen bütün vektörlerin kümesidir ve $\mathcal{C}(B)$ şeklinde gösterilir. $\mathcal{C}(B) = \{w \in \mathbb{R}^{n\times 1} : w = By, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}\}$ biçimindedir [56, 57].

Tanım 2.1.3. $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$' nin satır uzayı, matrisin $b_1, b_2, \ldots, b_p$ satırlarının ürettiği $\mathbb{R}^{p\times 1}$' in alt uzayıdır ve $\mathcal{C}(B')$ şeklinde ifade edilir [57].

Tanım 2.1.4. Bir matrisin sütun rankı, matrisin sütun uzayı boyutu, satır rankı ise matrisin satır uzayı boyutudur [56].

Teorem 2.1.5. Aşağıda belirtilen özelliklere sahip matris, satırca indirgenmiş eşelon formdadır [56].

i) Bütün elemanların sıfır olmadığı herhangi bir satırın, sıfır olmayan farklı olan ilk elemanı 1' dir (bu elemana 1 baş elemanı denir).

ii) (i) koşulunu sağlayan satır için 1 baş elemanının bulunduğu herhangi bir sütunun diğer bütün elemanları 0' dır.

iii) Sıfırdan başka bir elemanı bulunan herhangi iki satır için, numarası büyük olan satırda 1 baş elemanı diğerinden daha sağda yer alır.

iv) Yalnızca sıfır elemanlarının bulunduğu herhangi bir satır, sıfırdan başka bir elemanı bulunan diğer satırların altında yer alır.

Tanım 2.1.6. Herhangi bir $n \times p$ boyutlu matrise uygulanan elementer matris (satır) işlemleri aşağıda belirtilmiştir [58].

i) Matrisin iki satırının yerini değiştirmek,

ii) Matrisin bir satırını sıfır olmayan bir skaler ile çarpmak,

iii) Matrisin bir satırının belirli bir katını bir başka satıra eklemek.

Matris satırları r_i $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere, yukarıdaki ifadeler aşağıdaki şekilde verilebilir,

i) $r_i \leftrightarrow r_j$,

ii) $r_i \rightarrow mr_i$ $(m \neq 0)$,

iii) $r_i \rightarrow r_j + mr_i$ $(m \neq 0)$.

Tanım 2.1.7. Herhangi bir $n \times p$ boyutlu matrise uygulanan elementer matris (sütun) işlemleri aşağıda belirtilmiştir [58].

i) Matrisin iki sütununun yerini değiştirmek,

ii) Matrisin bir sütununu sıfır olmayan bir skaler ile çarpmak,

iii) Matrisin bir sütununun belirli bir katını bir başka sütuna eklemek.

Matris sütunları c_j $(1 \leq j \leq p)$ olmak üzere, yukarıdaki ifadeler aşağıdaki şekilde verilebilir,

i) $c_i \leftrightarrow c_j$,

ii) $c_j \rightarrow mc_j$ $(m \neq 0)$,

iii) $c_j \rightarrow c_i + mc_j$ $(m \neq 0)$.

Tanım 2.1.8. Herhangi bir B matrisi için satırca indirgenmiş eşelon formundaki tüm elemanları sıfır olmayan satırlarının sayısı B matrisinin rankı olarak tanımlanır. $r(B)$ şeklinde ifade edilir [56].

Teorem 2.1.9. B matrisinin sütun rankı, satır rankı ve rankı birbirine eşittir [56].

Teorem 2.1.10. X, $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ve X matrisi, Y matrisinin satırca indirgenmiş eşelon formu olmak üzere, X ve Y matrislerinin satır uzayları aynıdır [56].

Tanım 2.1.11. X, $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$ olmak üzere, Y matrisine elementer matris işlemleri uygulanarak X matrisi elde ediliyorsa, X matrisi Y matrisine denktir [58].

Teorem 2.1.12. X ve Y matrisleri denk matrislerse $r(X) = r(Y)$ şeklindedir [58].

Tanım 2.1.13. $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ olmak üzere, $By = \mu y$ sağlayacak şekilde sıfır olmayan bir y vektörü mevcutsa, μ skaleri B matrisinin özdeğeri, y vektörü ise μ özdeğerine karşılık bir özvektör olarak tanımlanır [59].

Tanım 2.1.14. $C = C' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere C matrisinin inertiası,

$$In(C) = \{i_+(C), i_-(C), i_0(C)\} \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir [60]. Burada C matrisinin katlılıkları göz önünde bulundurulmak şartı ile $i_-(C)$, $i_+(C)$ ve $i_0(C)$ ifadeleri, sırasıyla C matrisinin negatif, pozitif ve sıfır özdeğerlerinin sayısıdır.

Teorem 2.1.15. $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere, Y matrisinin negatif ve pozitif inertialarının toplamı, matrisin rankına eşittir. Başka bir ifadeyle,

$$r(Y) = i_+(Y) + i_-(Y) \tag{2.2}$$

şeklindedir [60].

2.2. Matrislerde Kuadratik Form ve İlişkili Tanımlar

Tanım 2.2.1. Simetrik bir $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi ve $y = (y_i) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ vektörü için,

$$y'Qy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i y_j q_{ij}$$

ifadesi, y vektörünün kuadratik formu olarak tanımlanır. Q matrisi ise kuadratik formun matrisi olarak adlandırılır. $y'Qy$ kuadratik formu, Q matrisi tarafından karakterize edilmektedir. Bu durumda kuadratik form aracılığıyla verilebilecek bazı tanımlar aşağıdadır [57, 61].

i) Q matrisi pozitif tanımlıdır, eğer $y'Qy > 0$ ise $(\forall y \neq 0)$,

ii) Q matrisi negatif tanımlıdır, eğer $y'Qy < 0$ ise $(\forall y \neq 0)$,

iii) Q matrisi pozitif yarı-tanımlıdır, eğer $y'Qy \geq 0$ ise $(\forall y)$,

iv) Q matrisi negatif yarı-tanımlıdır, eğer $y'Qy \leq 0$ ise $(\forall y)$.

Tanım 2.2.2. X, Y simetrik matrisler olmak üzere $X \succcurlyeq Y$ gösteriminde ‘‘$\succcurlyeq$’’ şeklinde ifade edilen matris sıralaması Löwner sıralamasıdır [62].

X simetrik ve uygun boyutlu bir matris olmak üzere, Tanım 2.2.1 ve Tanım 2.2.2’ ye göre X’ in negatif tanımlı, negatif yarı-tanımlı, pozitif tanımlı ve pozitif yarı-tanımlı matris olması sırasıyla $X \prec 0$, $X \preccurlyeq 0$, $X \succ 0$ ve $X \succcurlyeq 0$ şeklinde gösterilir.

X, Y simetrik ve aynı boyutlu iki matris olmak üzere, Tanım 2.2.1 ve Tanım 2.2.2’ ye göre $X - Y$ matrisinin negatif tanımlı, negatif yarı-tanımlı, pozitif tanımlı ve pozitif-yarı tanımlı olması da sırasıyla $X \prec Y$, $X \preccurlyeq Y$, $X \succ Y$ ve $X \succcurlyeq Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.3. X ve Y pozitif yarı-tanımlı matrisler olmak üzere, eğer $Y - X$ pozitif yarı-tanımlıysa X, Y den küçüktür (Löwner sıralamasına göre) ve $Y \succcurlyeq X$ ya da $X \preccurlyeq Y$ şeklinde ifade edilir. $Y - X$ pozitif tanımlıysa, X matrisi kesinlikle Y matrisinden küçüktür ve $X \prec Y$ ya da $Y \succ X$ biçimindedir [57].

Tanım 2.2.4. $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ boyutlu bir X matrisinin p ranklı pozitif yarı-tanımlı matris olmasının gerek ve yeter şartı $Y = TT'$ sağlayacak biçimde p ranklı $n \times n$ boyutlu bir T matrisinin mevcut olmasıdır [63].

2.3. Matris Parçalanması

Matris parçalanması, küme parçalanmasıyla benzer şekilde, matris elemanlarının her birinin, parçalanmanın sadece ve sadece bir alt matrisine denk gelecek biçimde karşılıklı alt matrislere ayrışmasıdır. Örnek olarak, $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$ matrisi için

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$$

ifadesi, Y’ in bir parçalanmasıdır. Öyle ki, $p = p_1 + p_2$ ve $n = n_1 + n_2$ için $Y_{11} \in \mathbb{R}^{n_1\times p_1}$, $Y_{12} \in \mathbb{R}^{n_1\times p_2}$, $Y_{21} \in \mathbb{R}^{n_2\times p_1}$ ve $Y_{22} \in \mathbb{R}^{n_2\times p_2}$ biçimindedir [58]. Bu durumda Y matrisine parçalanmış (blok) matris, Y_{11}, Y_{12}, Y_{21} ve Y_{22} alt matrislerine ise bloklar denir.

Yukarıdaki matrisin transpozesi

$$Y' = \begin{pmatrix} Y'_{11} & Y'_{21} \\ Y'_{12} & Y'_{22} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

2.4. Matrislerde Tersler

Tanım 2.4.1. $\mathrm{I_n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ birim matris ve $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ herhangi bir matris olsun. $YX = XY = \mathrm{I_n}$ sağlayacak biçimde bir $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisi mevcutsa, X matrisine Y matrisinin tersi denir ve $X = Y^{-1}$ şeklinde gösterilir. Tersinir (yani tersi olan) matrisler düzgün (yani tekil olmayan) matrisler olarak da adlandırılır [64].

Tanım 2.4.2. $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$ olmak üzere, $YGY = Y$ şartını sağlayan $G \in \mathbb{R}^{p\times n}$ matrisine, Y matrisinin genelleştirilmiş tersi denir. $G = Y^{-}$ şeklinde ifade edilir [58].

Teorem 2.4.3. Herhangi bir Y matrisinin, en az bir Y^{-} genelleştirilmiş tersi daima mevcuttur [58].

Teorem 2.4.4. $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$ olmak üzere, aşağıdaki şartları sağlayan tek bir $G \in \mathbb{R}^{p\times n}$ matrisi mevcuttur. G matrisine Y matrisinin Moore-Penrose genelleştirilmiş tersi denir. $G = Y^{+}$ şeklinde ifade edilir [59].

i) $YGY = Y$,

ii) $GYG = G$,

iii) $(YG)' = YG$,

iv) $(GY)' = GY$.

Teorem 2.4.5. $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ise, $Y^{+} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ şeklindedir [59].

Teorem 2.4.6. $(Y')^{+} = (Y^{+})'$ şeklindedir [59].

2.5. Matris Denklemleri

Tanım 2.5.1. $K \in \mathbb{R}^{p\times r}$, $L \in \mathbb{R}^{t\times s}$ ve $M \in \mathbb{R}^{p\times s}$ matrisleri için, $KYL = M$ denklem sistemini sağlayan $r \times t$ boyutlu en az bir Y matrisi mevcutsa, matris denklem sistemi tutarlıdır, aksi halde tutarsızdır denir [61].

Teorem 2.5.2. $KYL = M$ matris denklem sistemi tutarlıdır $\Leftrightarrow \mathcal{C}(M) \subset \mathcal{C}(K)$ ve $\mathcal{C}(M') \subset \mathcal{C}(L')$ dir [61].

Teorem 2.5.3. S ve T uygun boyutlu herhangi iki matris olmak üzere, $KYL = M$ matris denklem sistemi tutarlıysa

$$Y = K^{+}ML^{+} + (\mathrm{I} - K^{+}K)S + T(\mathrm{I} - LL^{+}) \tag{2.3}$$

şeklindeki Y matrisi, denklem sisteminin genel çözümünü ifade eder [61].

Sonuç 2.5.4. $KYL = M$ matris denklem sistemi tutarlıysa $Y = K^{+}ML^{+}$, denklem sisteminin bir çözümüdür [61].

$KYL = M$ denklem sisteminde $L = \mathrm{I}$ birim matris alındığında, matris denklem sistemi $KY = M$ haline dönüşür. Bu durumda Teorem 2.5.3'ün başka bir önemli sonucu aşağıdaki şekilde elde edilir.

Sonuç 2.5.5. $KY = M$ lineer matris denklem sistemi tutarlıdır $\Leftrightarrow r[K, \quad M] = r(K)$ ya da denk biçimde $KK^{+}M = M$ şeklinde mevcuttur. Böylece, S keyfi bir matris olmak üzere $Y = K^{+}M + (\mathrm{I} - K^{+}K)S$ ifadesi denklem sisteminin genel çözümüdür denir [65].

2.6. Vektör Uzayı ve İzdüşüm Matrisi

Bu kısımda verilen tanım ve teoremler hakkında [57] kaynağından detaylı bilgi edinilebilir.

Tanım 2.6.1. Herhangi $c, d \in \mathbb{R}$ ve $s, t \in V$ için $cs + dt \in V$ sağlayacak biçimdeki vektörlerin boştan farklı bir V kümesi vektör uzayı olarak tanımlanır.

Tanım 2.6.2. V_1 ve V_2 herhangi iki vektör uzayı olmak üzere, V_1 uzayındaki her vektör V_2 uzayındaki bütün vektörlere dik ise bu durumda V_1 ve V_2 vektör uzayları birbirine diktir. Bu durum $V_1 \perp V_2$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.6.3. V_1 ve V_2 herhangi iki vektör uzayı olmak üzere, $s \in V_1$ ve $t \in V_2$ için $s + t$ şeklindeki bütün vektörleri barındıran vektör uzayı V_1 ve V_2 vektör uzaylarının toplamı olarak tanımlanır. Bu durum $V_1 + V_2$ şeklinde ifade edilir. V_1 ve V_2 vektör uzaylarının birbirine dik olduğu durumda $V_1 + V_2$ toplamı $V_1 \oplus V_2$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.6.4. $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^{n\times 1}$ sağlanıyor ise V_1 ve V_2 birbirlerinin dik tümleyenidir. Bu durum $V_1 = V_2{}^{\perp}$ (ya da $V_2 = V_1{}^{\perp}$) olarak ifade edilir. Ayrıca herhangi bir V vektör uzayı için $(V^{\perp})^{\perp} = V$ şeklindedir.

Tanım 2.6.5. V vektör uzayı ele alınsın. $\forall s \in V$ için $Ps = s$ ve $Ps \in V$ sağlanıyorsa P matrisi izdüşüm matrisidir. Ayrıca, eğer $\mathrm{I} - P$, $V^{\perp}$ vektör uzayının izdüşüm matrisi oluyorsa, P matrisi V' nin dik izdüşüm matrisidir. Her izdüşüm matrisi idempotenttir.

Teorem 2.6.6. Bir X matrisi ele alınsın. XX^{+}, $\mathcal{C}(X)$' in bir dik izdüşüm matrisidir [60].

Teorem 2.6.7. $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ olmak üzere, $\mathcal{C}(XX^{+}) = \mathcal{C}(X)$ ve $\mathcal{C}(\mathrm{I}_n - XX^{+}) = \mathcal{C}(X)^{\perp}$ şeklindedir.

Teorem 2.6.8. $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ olmak üzere, $P_X = XX^{+}$, $E_X = X^{\perp} = \mathrm{I}_n - XX^{+}$ ve $F_X = \mathrm{I}_p - X^{+}X$ matrisleri sırasıyla $\mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}(X)^{\perp}$ ve $\mathcal{C}(X')^{\perp}$ üzerinde dik izdüşüm matrisleridir.

Teorem 2.6.9. X ve Y uygun boyutlu matrisler olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

i) $Y'X = 0 \Leftrightarrow \mathcal{C}(Y) = \mathcal{C}(X)^{\perp}$,

ii) $\mathcal{C}(Y) \subseteq \mathcal{C}(X) \Leftrightarrow \mathcal{C}(Y)^{\perp} \subseteq \mathcal{C}(X)^{\perp}$.

2.7. Rasgele Vektör ve Matrisler Hakkında Bazı Bilgiler

Bu bölümde, rasgele değişkenlerden oluşan rasgele vektör ve rasgele matrisler hakkında temel bilgiler ve teoremler sunulmaktadır. Konuya ilişkin [63, 66] kaynaklarından detaylı bilgi edinilebilir.

Tanım 2.7.1. $W = \left(w_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ rasgele matrisi için beklenen değer,

$E(W) = \left(E\left(w_{ij}\right)\right)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.7.2. W bir rasgele matris, K, L ve M ise bilinen matrisler olsun. Bu durumda,

$E(KWL + M) = KE(W)L + M$ şeklindedir.

Teorem 2.7.3. K ile L bilinen matrisler ve M ile N rasgele matrisler olmak üzere,

$E(KM + LN) = KE(M) + LE(N)$ şeklindedir.

Tanım 2.7.4. y rasgele değişken ve $\mu = E(y)$ olmak üzere y' nin varyansı,

$var(y) = \sigma_y^2 = E(y - \mu)^2$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.7.5. z, t rasgele vektörler ve $\mu = E(z)$, $v = E(t)$ olmak üzere, z ve t arasındaki kovaryans, $cov(z,t) = \sigma_{zt} = E(z-\mu)(t-v)'$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca $D(z) = cov(z,z) = E(z-\mu)(z-\mu)'$ dir.

Teorem 2.7.6. K ile L bilinen matrisler ve M ile N rasgele matrisleri için,

$$cov(KM, LN) = Kcov(M,N)L'$$

şeklinde ifade edilir.

2.8. Rank ve İnertiarla İlgili Bazı Özellikler

Bu başlık altında matris rank ve inertiaları hakkında genel özellikler ve temel sonuçlar verilmiştir.

Lemma 2.8.1. $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $Z \in \mathbb{R}^{l\times p}$ ve $T \in \mathbb{R}^{l\times k}$ olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır [67].

$$r[X, \quad Y] = r(X) + r(E_X Y) = r(Y) + r(E_Y X). \text{ Özellikle,}$$

$$r[X, \quad Y] = r(X) \Leftrightarrow \mathcal{C}(Y) \subseteq \mathcal{C}(X), \tag{2.4}$$

$$r[X, \quad Y] = r(X) + r(Y) \Leftrightarrow \mathcal{C}(X) \cap \mathcal{C}(Y) = \{0\}.$$

$$r\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} = r(X) + r(ZE_{X'}) = r(Z) + r(XE_{Z'}). \text{ Özellikle,}$$

$$r\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} = r(X) \Leftrightarrow \mathcal{C}(Z') \subseteq \mathcal{C}(X'). \tag{2.5}$$

Eğer $\mathcal{C}(Y) \subseteq \mathcal{C}(X)$ ve $\mathcal{C}(Z') \subseteq \mathcal{C}(X')$ ise,

$$r\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = r(X) + r(T - ZX^{+}Y). \tag{2.6}$$

Lemma 2.8.2. $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitif yarı-tanımlı matris olmak üzere $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $Z \in \mathbb{R}^{n\times k}$ ve $T \in \mathbb{R}^{t\times k}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{C}(Z) \subseteq \mathcal{C}(X)$ ise,

$$r\begin{bmatrix} X & Y & Z \\ Y' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} = r[X, \quad Y] + r(Y) + r(T) \tag{2.7}$$

dir [68].

Teorem 2.8.3. X, $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ya da $X = X'$ ve $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır [60].

$$X = Y \Leftrightarrow r(X - Y) = 0. \tag{2.8}$$

$$X \succ Y \Leftrightarrow i_+(X - Y) = n, X \prec Y \Leftrightarrow i_-(X - Y) = n. \tag{2.9}$$

$$X \succcurlyeq Y \Leftrightarrow i_-(X - Y) = 0, X \preccurlyeq Y \Leftrightarrow i_+(X - Y) = 0. \tag{2.10}$$

Teorem 2.8.4. $X = X' \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $Y = Y' \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $Q \in \mathbb{R}^{p\times r}$ ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır [60].

$$i_\pm(kX) = \begin{cases} i_\pm(X), k > 0 \\ i_\mp(X), k < 0 \end{cases}, \tag{2.11}$$

$$i_\pm \begin{bmatrix} X & Q \\ Q' & Y \end{bmatrix} = i_\pm \begin{bmatrix} X & -Q \\ -Q' & Y \end{bmatrix} = i_\mp \begin{bmatrix} -X & Q \\ Q' & -Y \end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered} i_\pm \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} = i_\pm(X) + i_\pm(Y), \\ i_+ \begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q' & 0 \end{bmatrix} = i_- \begin{bmatrix} 0 & Q \\ Q' & 0 \end{bmatrix} = r(Q), \end{gathered} \tag{2.13}$$

$$i_\pm(Q'XQ) = r(XQ) - i_\mp(X) + i_\mp(E_{XQ}XE_{XQ}). \tag{2.14}$$

Teorem 2.8.5. $X = X' \in \mathbb{R}^{p\times p}$ ve $Y = Y' \in \mathbb{R}^{r\times r}$ ve $Q \in \mathbb{R}^{p\times r}$ olmak üzere, aşağıdakiler sağlanır [60].

$$i_\pm \begin{bmatrix} X & Q \\ Q' & 0 \end{bmatrix} = r(Q) + i_\pm\big(E_Q X E_Q\big). \tag{2.15}$$

Özellikle

$$i_+ \begin{bmatrix} XX' & Q \\ Q' & 0 \end{bmatrix} = r[X, \quad Q], \tag{2.16}$$

$$i_- \begin{bmatrix} XX' & Q \\ Q' & 0 \end{bmatrix} = r(Q), \tag{2.17}$$

Eğer $\mathcal{C}(Q) \subseteq \mathcal{C}(X)$ ise, $i_\pm \begin{bmatrix} X & Q \\ Q' & Y \end{bmatrix} = i_\pm(X) + i_\pm(Y - Q'X^+Q)$. (2.18)

Teorem 2.8.6. $X = X' \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{q\times p}$ ve $\mathcal{C}(X) \subseteq \mathcal{C}(Q')$ ve $\mathcal{C}(Z) \subseteq \mathcal{C}(Q)$ olmak üzere,

$$L = \begin{bmatrix} -X & Q' & 0 \\ Q & 0 & Z \\ 0 & Z' & Y \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$i_{\pm}(Y - Z'(Q')^{+}XQ^{+}Z) = i_{\pm}(L) - r(Q) \quad (2.19)$$

dir [60].

2.9. Kroneker Çarpım

Tanım 2.9.1. $Y = (y_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ve $L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{r\times q}$ matrislerinin kroneker çarpımı $Y\otimes L$ şeklinde gösterilir ve

$$Y\otimes L = \begin{bmatrix} y_{11}L & y_{12}L & \cdots & y_{1p}L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}L & y_{n2}L & \cdots & y_{np}L \end{bmatrix}$$

ile tanımlanır. Burada $Y\otimes L \in \mathbb{R}^{nr\times pq}$' dir. Kroneker çarpım, direkt çarpım veya matris tensör çarpımı olarak da adlandırılır [64].

Aşağıda kroneker çarpıma ait bazı özellikler verilmektedir.

i) Genel olarak $Y\otimes L \neq L\otimes Y$ dir.

ii) $\forall a \in \mathbb{R}$ ve Y, L matrisleri için $(aY)\otimes L = Y\otimes(aL)$ dir.

iii) Y, L ve M matrisleri için $(Y\otimes L)\otimes M = Y\otimes(L\otimes M)$ dir.

iv) Uygun boyutlu Y, L ve M matrisleri için $(Y + L)\otimes M = Y\otimes M + L\otimes M$ dir.

3. SUR MODELLERİNDE TAHMİN

Tez çalışmasının bu bölümünde SUR modeller tanıtılarak bu modeller altında ön tahmin ve tahmin edilebilirlik tanımları verilmiştir. Ayrıca ön tahmin ediciler $OLSP$ ve $BLUP$ ile tahmin ediciler $OLSE$ ve $BLUE$ hakkında bazı özellikler sunulmuştur.

3.1. SUR Model

$$y_{ij} = x_{ij1}\beta_{i1} + \cdots + x_{ijp_i}\beta_{ip_i} + \varepsilon_{ij} \tag{3.1}$$

olarak ifade edilen lineer regresyon denklemleri ele alınsın, $i = 1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, n$. (3.1) denklemlerinde her bir i gözlemi için $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}$ bağımlı değişkenleri mevcuttur. Bu denklemlerin her bir i gözlemi için ele alınmasıyla

$$S_i: y_i = X_i\beta_i + \varepsilon_i,\ i = 1, \dots, m, \tag{3.2}$$

şeklinde ifade edilen lineer regresyon denklemlerinin bir sistemi olarak m tane regresyon modeli yazılabilir. Burada,

$y_i = (y_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ gözlenebilir rasgele vektör,

$X_i = (x_{ijt}) \in \mathbb{R}^{n\times p_i}$ bilinen bir matris,

$\beta_i = (\beta_{ij}) \in \mathbb{R}^{p_i\times 1}$ tahmin edilebilir bilinmeyen parametre vektörü,

$\varepsilon_i = (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ hata vektörüdür, $i = 1, \dots, m$, t= $1, \dots, p_i$ ve $j = 1, \dots, n$.

(3.2) modelleri için varsayımlar,

$$E(\varepsilon_i) = 0, \tag{3.3a}$$

$$D(\varepsilon_i) = cov(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = \sigma_{ii}\mathrm{I}_n := \Sigma_{ii}, \tag{3.3b}$$

$$cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma_{ij}\mathrm{I}_n := \Sigma_{ij} \tag{3.3c}$$

olarak kabul edilmektedir. (3.2)' de verilen m tane lineer regresyon modelinin her biri ayrı bir istatistiksel problem ile ilişkili olabilir ve ayrı ayrı ele alınabilir. Her ne kadar bu m tane lineer regresyon modeli ilişkisiz gibi görünse de regresyon denklemlerinde kullanılan bağımsız değişkenlerin tümü veya bir kısmı denklemlerin tümünde veya bir kısmında ortak olarak kullanıldığında, bu m tane regresyon modeli birbirleri arasında ilişkili olabilir. Başka bir deyişle, (3.2)' deki m tane lineer regresyon modeli ilişkili hata terimlerine sahip olabilir. Bu nedenle, (3.2)' deki m tane lineer regresyon modeli görünürde ilişkisiz regresyon modelleri yani SUR modelleri olarak adlandırılır.

Birbirlerinden farklı ancak aralarında ilişkiler olabileceği düşünülen modelleri ayrı ayrı tek model şeklinde incelemek yerine, bu modelleri birleşik bir model olarak ifade etmek model gruplarına yaklaşmanın yaygın bir yaklaşımıdır. (3.2)' deki S_i modellerini ayrı ayrı ele almak yerine, bu modellerdeki bilgileri birleştirmek, bilinmeyen vektörlerin ön tahminlerinde veya tahminlerinde daha etkili tahmin ediciler elde etmeye yol açabilir. Dolayısıyla, (3.2)' de verilen m tane SUR model blok matrisler vasıtasıyla birleştirebilir.

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_m \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

olmak üzere birleştirilmiş model

$$S: y = X\beta + \varepsilon \tag{3.4}$$

şeklinde ifade edilebilir, burada $y \in \mathbb{R}^{nm\times 1}$, $X \in \mathbb{R}^{nm\times p}$, $\beta \in \mathbb{R}^{p\times 1}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{nm\times 1}$ ve $p = p_1 + \cdots + p_m$ dir. Ayrıca belirtmek gerekir ki S_i modellerinin birleştirilmesiyle elde edilen S modeline bazı özel dönüşümler uygulandığında, S_i modelleri elde edilir. Başka bir deyişle, S modelinin $T_i = [0, \ldots, \mathrm{I}_n, \ldots, 0]$ dönüşüm matrisi ile soldan çarpılmasıyla,

$$T_i y = T_i X\beta + T_i\varepsilon$$

dönüşüm modeli ya da denk olarak

$$[0,\dots,\mathrm{I}_n,\dots,0]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = [0,\dots,\mathrm{I}_n,\dots,0]\begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

$$+[0,\dots,\mathrm{I}_n,\dots,0]\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

yazılmasıyla S_i modelleri elde edilir. Bu durum, bazı istatistiksel sonuçlar için birleştirilmiş model olan S modelini ele almanın, bazı dönüşümlerle S_i SUR modellerini ayrı ayrı ele almaya karşılık geleceğini göstermektedir.

(3.3) varsayımları doğrultusunda (3.4) modeli için varsayımlar

$$E(\varepsilon) = 0, \tag{3.5a}$$

$$D(\varepsilon) = \Sigma \otimes \mathrm{I}_n \tag{3.5b}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\Sigma = (\sigma_{ik}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

pozitif yarı-tanımlı bilinen bir matristir, $i,k = 1,\dots,m$, ve

$$\Sigma \otimes \mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\mathrm{I}_n & \sigma_{12}\mathrm{I}_n & \cdots & \sigma_{1m}\mathrm{I}_n \\ \sigma_{21}\mathrm{I}_n & \sigma_{22}\mathrm{I}_n & \cdots & \sigma_{2m}\mathrm{I}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}\mathrm{I}_n & \sigma_{m2}\mathrm{I}_n & \cdots & \sigma_{mm}\mathrm{I}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn\times mn}$$

dir.

Çalışma boyunca S modeli tutarlı kabul edilecektir. Yani,

$$y \in \mathcal{C}[X, \quad \Sigma \otimes \mathrm{I}_n] \tag{3.6}$$

ifadesinin 1 olasılıkla sağlandığı kabul edilmektedir [69]. Ayrıca S modelinin tutarlı olması halinde S_i modelleri de tutarlıdır [70].

3.2. SUR Modellerinde Ön Tahmin ve Tahmin

S modelinde bilinmeyen parametreler için ön tahmin ve tahmin edicilere ilişkin sonuçlara ulaşmak amacıyla bu parametrelerin genel bir fonksiyonu olan

$$\phi = K\beta + H\varepsilon \tag{3.7}$$

vektörü ele alınabilir. (3.7) için $K \in \mathbb{R}^{k\times p}$ ve $H \in \mathbb{R}^{k\times nm}$ bilinen matrisler olmak üzere, (3.5a) ve (3.5b)' ye göre

$$E(\phi) = K\beta, \tag{3.8a}$$

$$D(\phi) = H(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)H', \tag{3.8b}$$

$$cov(\phi, y) = H(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n) \tag{3.8c}$$

sağlanmaktadır. (3.7)' de K ve H matrisleri yerine bazı özel matrislerin yazılmasıyla S modelindeki bilinmeyen vektörler ile ilgili aşağıdakiler elde edilebilir.

i) $K = X$ ve $H = \mathrm{I}_{\mathrm{nm}}$ alınırsa $\phi = X\beta + \varepsilon = y$,
ii) $H = 0$ alınırsa $\phi = K\beta$,
iii) $K = X$ ve $H = 0$ alınırsa $\phi = X\beta$,
iv) $K = \mathrm{I}_{\mathrm{p}}$ ve $H = 0$ alınırsa $\phi = \beta$,
v) $K = 0$ ve $H = \mathrm{I}_{\mathrm{nm}}$ alnırsa $\phi = \varepsilon$.

S ve S_i modelleri istatistiksel çıkarımlarda bulunmak amacıyla hem ayrı ayrı hem de aynı anda ele alınabileceğinden, bu modeller altında eş zamanlı genel sonuçlara ulaşmak amacıyla modellerdeki bütün bilinmeyen ortak parametrelerin genel bir fonksiyonu olarak

$$\phi_i = K_i\beta_i + H_i\varepsilon_i = \widehat{K}_i\beta + \widehat{H}_i\varepsilon \tag{3.9}$$

ele alınabilir. Burada $K_i \in \mathbb{R}^{k\times p_i}$ ve $H_i \in \mathbb{R}^{k\times n}$ olmak üzere $\widehat{K}_i = [0, \dots, K_i, \dots, 0]$ ve $\widehat{H}_i = [0, \dots, H_i, \dots, 0]$ dir, $i = 1, \dots, m$. (3.9) ifadesinde

$$\widehat{K}_i\beta = [0, \dots, K_i, \dots, 0]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix} = K_i\beta_i$$

ve

$$\widehat{H}_i\varepsilon = H_iT_i\varepsilon = H_i[0, \dots, \mathrm{I}_n, \dots, 0]\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_m\end{bmatrix} = H_i\varepsilon_i$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan $K_i = X_i$ ve $H_i = \mathrm{I}_n$ alındığında $\widehat{X}_i = [0, \dots, X_i, \dots, 0]$ ve $T_i = [0, \dots, \mathrm{I}_n, \dots, 0]$ olmak üzere $\widehat{K}_i$ ve $\widehat{H}_i$ matrislerinin sırasıyla $\widehat{X}_i$ ve T_i matrislerine karşılık geleceği açıktır.

(3.9)' da K_i ve H_i matrisleri yerine bazı özel matrislerin yazılmasıyla S_i modelindeki bilinmeyen vektörler ile ilgili aşağıdakiler elde edilebilir.

i) $K_i = X_i$ ve $H_i = \mathrm{I}_\mathrm{n}$ alınırsa $\phi_i = X_i\beta_i + \varepsilon_i = y_i$,

ii) $H_i = 0$ alınırsa $\phi_i = K_i\beta_i$,

iii) $K_i = X_i$ ve $H_i = 0$ alınırsa $\phi_i = X_i\beta_i$,

iv) $K_i = \mathrm{I}_{p_i}$ ve $H_i = 0$ alınırsa $\phi_i = \beta_i$,

v) $K_i = 0$ ve $H_i = \mathrm{I}_\mathrm{n}$ alnırsa $\phi_i = \varepsilon_i$.

(3.2), (3.4), (3.5) ve (3.9) varsayımları altında $i = 1, \dots, m$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanmaktadır.

$$E(\phi_i) = K_i\beta_i = \widehat{K}_i\beta, \tag{3.10a}$$

$$D(\phi_i) = \sigma_{ii}H_iH_i' = H_i\Sigma_{ii}H_i' = \widehat{H}_i(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\widehat{H}_i', \tag{3.10b}$$

$$cov(\phi_i, y) = \widehat{H}_i(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n), \tag{3.10c}$$

$$cov(\phi_i, y_i) = \sigma_{ii}H_i = H_i\Sigma_{ii} = \widehat{H}_i(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)T_i'. \tag{3.10ç}$$

Ayrıca (3.7)' deki K ve H matrisleri özel olarak $K = [K_1, K_2, \dots, K_m]$ ve $H = [H_1, H_2, \dots, H_m]$ şeklinde ele alındığında,

$$K\beta = [K_1, K_2, \dots, K_m]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix} = K_1\beta_1 + K_2\beta_2 + \cdots + K_m\beta_m$$

ve

$$H\beta = [H_1, H_2, \dots, H_m]\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_m\end{bmatrix} = H_1\varepsilon_1 + H_2\varepsilon_2 + \cdots + H_m\varepsilon_m$$

olarak yazıldığında (3.7)’ de verilen ϕ vektörü ile (3.9)’ da verilen ϕ_i vektörü arasındaki ilişki aşağıdaki biçime dönüşür:

$$\begin{aligned}\phi &= K_1\beta_1 + H_1\varepsilon_1 + K_2\beta_2 + H_2\varepsilon_2 + \cdots + K_m\beta_m + H_m\varepsilon_m \\ &= \phi_1 + \phi_2 + + \cdots + \phi_m. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Aşağıda S ve S_i modelleri altında ϕ ve ϕ_i vektörleri ile bu vektörlerin bazı özel durumlarına karşılık gelen vektörlerin ön tahmin ve tahmin edilebilmelerine ilişkin koşullar verilecektir.

Tanım 3.2.1. (a) S modeli ve ϕ vektörü sırasıyla (3.4) ve (3.7)’ de gösterildiği şekilde olmak üzere $L \in \mathbb{R}^{k\times nm}$ için, $E(Ly-\phi)=0$ sağlayacak biçimde bir Ly lineer istatistiği mevcut ise, ϕ vektörüne S modelinde ön tahmin edilebilir denir. Bu durum ayrıca farklı bir biçimde ifade edilebilir. Yani, ϕ vektörü S modelinde ön tahmin edilebilirdir ⇔

$$\mathcal{C}(K') \subseteq \mathcal{C}(X') \tag{3.12}$$

dır [47]. (3.12) ayrıca S modelinde $K\beta$ vektörünün tahmin edilebilme şartıdır [71].

(b) S modeli ve ϕ_i vektörü sırasıyla (3.4) ve (3.9)’ da verildiği gibi ele alınsın. ϕ_i vektörü S modelinde ön tahmin edilebilirdir ⇔

$$\mathcal{C}(\widehat{K}_i') \subseteq \mathcal{C}(X') \tag{3.13}$$

dır. (3.13) ayrıca S modelinde $\widehat{K}_i\beta$ vektörünün tahmin edilebilme koşuludur.

(c) S_i modeli ve ϕ_i vektörü sırasıyla (3.2) ve (3.9)’ da verildiği gibi ele alınsın. ϕ_i vektörü S_i modelinde ön tahmin edilebilirdir ⇔

$$\mathcal{C}(K_i') \subseteq \mathcal{C}(X_i') \tag{3.14}$$

dır. (3.14) ayrıca S_i modeli altında $K_i\beta_i$ vektörünün tahmin edilebilme şartıdır.

Tanım 3.2.1’ de verilen ön tahmin ve tahmin edilebilmeler ile ilgili koşullara ek olarak ayrıca belirtmek gerekir ki ϕ_i vektörü S_i modeli altında ön tahmin edilebilir ise S modeli altında da ön tahmin edilebilirdir [70].

Ayrıca Tanım 3.2.1' de verilen ön tahmin ve tahmin edilebilmeler ile ilgili genel koşullar, ϕ ve ϕ_i vektörlerinin bazı özel durumlarına karşılık gelen vektörler için aşağıdaki şekilde ifade edilir:

(a) S modelinde $X\beta$ her zaman tahmin edilebilirdir,

(b) S modelinde ε her zaman ön tahmin edilebilirdir,

(c) S modelinde β tahmin edilebilirdir $\Leftrightarrow r(X) = p$,

(d) S modelinde $X_i\beta_i$ ya da denk olarak $\hat{X}_i\beta$ tahmin edilebilirdir $\Leftrightarrow \mathcal{C}(X_i') = \mathcal{C}(\hat{X}_i') \subseteq \mathcal{C}(X')$ sağlanır. Burada $\hat{X}_i = [0, \dots, X_i, \dots, 0]$ dir,

(e) S modelinde β_i tahmin edilebilirdir $\Leftrightarrow r(\hat{X}_i) = p_i$,

(f) S modelinde ε_i her zaman ön tahmin edilebilirdir,

(g) S_i modelinde $X_i\beta_i$ her zaman tahmin edilebilir ve ε_i her zaman ön tahmin edilebilirdir,

(h) S_i modelinde β_i tahmin edilebilirdir $\Leftrightarrow r(X_i) = p_i$.

Aşağıda S ve S_i modelleri altında ϕ ve ϕ_i vektörleri için $BLUP$ ve $BLUE$ tanımları verilmektedir.

Tanım 3.2.2. (a) ϕ vektörü (3.7)' de verildiği gibi alınsın ve S modelinde ön tahmin edilebilir olsun. Löwner sıralamasına göre,

$$D(Ly - \phi) = min \text{ ve } E(Ly - \phi) = 0 \tag{3.15}$$

olacak şekilde bir L matrisi bulunuyorsa, Ly istatistiği ϕ vektörünün en iyi lineer yansız ön tahmin edicisi (best linear unbiased predictor-$BLUP$) olarak tanımlanır [39].

$$Ly = BLUP_S(\phi) = BLUP_S(K\beta + H\varepsilon) \tag{3.16}$$

şeklinde gösterilir.

ϕ vektöründe $H = 0$ alınırsa, (3.16) ifadesi $K\beta$ vektörünün en iyi lineer yansız tahmin edicisi (best linear unbiased estimator-$BLUE$) olarak tanımlanır ve $BLUE_S(K\beta)$ şeklinde gösterilir.

(b) ϕ_i vektörü (3.9)' da verildiği gibi alınsın ve S modelinde ön tahmin edilebilir olsun. Löwner sıralamasına göre,

$$D(L_i y - \phi_i) = min \text{ ve } E(L_i y - \phi_i) = 0 \tag{3.17}$$

olacak şekilde bir L_i matrisi bulunuyorsa, $L_i y$ istatistiği ϕ_i vektörünün $BLUP$' ı olarak tanımlanır [39].

$$L_i y = BLUP_S(\phi_i) = BLUP_S\big(\widehat{K}_i\beta + \widehat{H}_i\varepsilon\big) \tag{3.18}$$

şeklinde gösterilir.

ϕ_i vektöründe $\widehat{H}_i = 0$ alınırsa, (3.18) ifadesi $\widehat{K}_i\beta$ vektörünün $BLUE$' su olarak tanımlanır ve $BLUE_S(\widehat{K}_i\beta)$ şeklinde gösterilir.

(c) ϕ_i vektörü (3.9)' da verildiği gibi alınsın ve S_i modelinde ön tahmin edilebilir olsun. Löwner sıralamasına göre,

$$D(G_i y_i - \phi_i) = min \text{ ve } E(G_i y_i - \phi_i) = 0 \tag{3.19}$$

olacak şekilde bir G_i matrisi bulunuyorsa, $G_i y_i$ istatistiği ϕ_i vektörünün $BLUP$' ı olarak tanımlanır [39].

$$G_i y_i = BLUP_{S_i}(\phi_i) = BLUP_{S_i}(\mathrm{K}_i\beta_i + \mathrm{H}_i\varepsilon_i) \tag{3.20}$$

şeklinde gösterilir.

ϕ_i vektöründe $\mathrm{H}_i = 0$ alınırsa, (3.20) ifadesi $\mathrm{K}_i\beta_i$ vektörünün $BLUE$' su olarak tanımlanır ve $BLUE_{S_i}(\mathrm{K}_i\beta_i)$ şeklinde gösterilir.

Aşağıda S ve S_i modelleri altında ϕ ve ϕ_i vektörleri için $OLSP$ ve $OLSE$ tanımları verilmektedir.

Tanım 3.2.3. (a) S modeli ve ϕ vektörü için;

(i) β parametre vektörünün alışılmış en küçük kareler tahmin edicisi (ordinary least-squares estimator-$OLSE$)

$$OLSE_S(\beta) = argmin_{\beta\in\mathbb{R}^{p\times 1}}(y - X\beta)'(y - X\beta) \tag{3.21}$$

olarak tanımlanır ve $OLSE_S(K\beta) = KOLSE_S(\beta)$ dir,

(ii) ε hata vektörünün alışılmış en küçük kareler ön tahmin edicisi (ordinary least-squares predictor-$OLSP$)

$$OLSP_S(\varepsilon) = y - OLSE_S(X\beta) \tag{3.22}$$

şeklindedir ve $OLSP_S(H\varepsilon) = HOLSP_S(\varepsilon)$ dir,

(iii) ϕ vektörünün $OLSP$ gösterimi

$$OLSP_S(\phi) = OLSE_S(K\beta) + OLSP_S(H\varepsilon) \tag{3.23}$$

şeklindedir [50].

(b) S modeli ve ϕ_i vektörü için;

$$OLSE_S(\widehat{K}_i\beta) = \widehat{K}_i OLSE_S(\beta) \text{ ve } OLSP_S(\widehat{H}_i\varepsilon) = \widehat{H}_i OLSP_S(\varepsilon)$$

dir ve ϕ_i vektörünün $OLSP$ gösterimi

$$OLSP_S(\phi_i) = OLSE_S(\widehat{K}_i\beta) + OLSP_S(\widehat{H}_i\varepsilon) \tag{3.24}$$

şeklindedir [50].

(c) S_i modeli ve ϕ_i vektörü için;

$$OLSE_{S_i}(K_i\beta_i) = K_i OLSE_{S_i}(\beta_i) \text{ ve } OLSP_{S_i}(H_i\varepsilon_i) = H_i OLSP_{S_i}(\varepsilon_i)$$

dir ve ϕ_i vektörünün $OLSP$ gösterimi

$$OLSP_{S_i}(\phi_i) = OLSE_{S_i}(K_i\beta_i) + OLSP_S(H_i\varepsilon_i) \tag{3.25}$$

şeklindedir [50].

Yukarıda verilen tanımlarda geçen beklenen değer ve dağılım matrisi ile ilgili ifadeler (3.8) ve (3.10) varsayımlarına göre aşağıdaki şekilde ifade edilir. Ly istatistiği S modeli altında ϕ vektörünün bir lineer yansız ön tahmin edicisi olmak üzere;

$$E(Ly - \phi) = 0 \Leftrightarrow LX = K \Leftrightarrow [L, \quad -\mathrm{I}_k]\begin{bmatrix} X \\ K \end{bmatrix} = 0,$$

$$D(Ly - \phi) = (L - H)(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)(L - H)' = [L, \quad -\mathrm{I}_k]\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\mathrm{nm}} \\ H \end{bmatrix}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\mathrm{nm}} \\ H \end{bmatrix}' [L, \quad -\mathrm{I}_k]'$$

olarak ifade edilir. $L_i y$ istatistiği S modeli altında $\phi_i$vektörünün bir lineer yansız ön tahmin edicisi ise

$$E(L_i y - \phi_i) = 0 \Leftrightarrow L_i X = \widehat{K}_i \Leftrightarrow [L_i, \quad -\mathrm{I}_k]\begin{bmatrix} X \\ \widehat{K}_i \end{bmatrix} = 0,$$

$$D(L_i y - \phi_i) = \left(L_i - \widehat{H}_i\right)(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)\left(L_i - \widehat{H}_i\right)'$$

$$= [L_i, \quad -\mathrm{I}_k]\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\mathrm{nm}} \\ \widehat{H}_i \end{bmatrix}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\mathrm{nm}} \\ \widehat{H}_i \end{bmatrix}' [L_i, \quad -\mathrm{I}_k]'.$$

Ayrıca $G_i y_i$ istatistiği S_i modeli altında ϕ_i vektörünün bir lineer yansız ön tahmin edicisi olmak üzere;

$$E(G_i y_i - \phi_i) = 0 \Leftrightarrow G_i X_i = K_i \Leftrightarrow [G_i, \quad -\mathrm{I}_{p_i}]\begin{bmatrix} X_i \\ K_i \end{bmatrix} = 0,$$

$$D(G_i y_i - \phi_i) = (G_i - H_i)(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)(G_i - H_i)'$$

$$= [G_i, \quad -\mathrm{I}_{p_i}]\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\mathrm{n}} \\ H_i \end{bmatrix}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\mathrm{n}} \\ H_i \end{bmatrix}' [G_i, \quad -\mathrm{I}_{p_i}]'$$

olarak yazılır. Benzer şekilde de K ve H matrisleri ile K_i ve H_i matrisleri yerine bazı özel matrislerin yazılmasıyla S ve S_i modellerindeki bilinmeyen vektörler ile ilgili yukarıdaki beklenen değer ve dağılım matrisi ile ilgili ifadeler elde edilebilir.

Tahmin edicilerin kovaryans matrislerinin minimizasyon problemleri kısıtlı ikinci dereceden matris değerli fonksiyonların optimizasyon problemi ile ilişkilidir. Bu durum aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 3.2.4. $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitif yarı-tanımlı matris ve $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ile $L \in \mathbb{R}^{m \times p}$ bilinen matrisler olsun. $Y_o K = L$ olacak şekilde $Y_o \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin mevcut olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $YK = L$ denkleminin tüm çözümlerine göre $Y_o Z Y_o' - YZY'$ ifadesinin pozitif inertiası

$$\underset{YK=L}{\text{maks}}\, i_+(Y_o Z Y_o' - YZY') = r\begin{bmatrix} Y_o Z \\ K' \end{bmatrix} - r(K) = r(Y_o Z K^{\perp})$$

olarak ifade edilir. Buradan, $YK = L$ matris denkleminin tüm çözümleri için $Y_o Z Y_o' \preccurlyeq YZY'$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $Y_o K = L$ matris denkleminin Y_o çözümü mevcuttur $\Leftrightarrow$ Y_o matrisi hem $Y_o K = L$ hem de $Y_o Z K^{\perp} = 0$ ifadelerini sağlar [72].

Ele alınan modellerde bilinmeyen parametreler için ön tahmin ediciler ($BLUP$ ve $OLSP$) ile tahmin ediciler ($BLUE$ ve $OLSE$) için bazı özellikler aşağıda verilmiştir. Bu teoremin ispatı ve detaylı bilgi için [47, 50] kaynaklarına bakılabilir.

Teorem 3.2.5. S modeli altında ϕ vektörü ön tahmin edilebilir olsun. S modeli altında ϕ vektörünün iki lineer yansız ön tahmin edicisi olarak Ly ve Fy istatistikleri ele alınsın. Bu durumda, $D(Ly-\phi)-D(Fy-\phi)$ farkının $E(Fy-\phi)=0$ eşitliğine göre maksimal pozitif inertiası

$$\underset{E(Fy-\phi)=0}{\text{maks}}\; i_+\big(D(Ly-\phi)-D(Fy-\phi)\big)$$

$$= r\begin{bmatrix} [L, \quad -\mathrm{I}_k]\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{\mathrm{nm}}\\ H\end{bmatrix}(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{\mathrm{nm}}\\ H\end{bmatrix}' \\ \begin{bmatrix}X\\ K\end{bmatrix}'\end{bmatrix} - r\begin{bmatrix}X\\ K\end{bmatrix}$$

$$= r\left([L, \quad -\mathrm{I}_k]\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{\mathrm{nm}}\\ H\end{bmatrix}(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{\mathrm{nm}}\\ H\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}X\\ K\end{bmatrix}^{\perp}\right)$$

dir. Böylece $E(Ly-\phi)=0$ ifadesine göre $D(Ly-\phi)=min$ olmasının gerek ve yeter şartı $Ly=BLUP_S(\phi)$ olmasıdır. Yani

$$Ly = BLUP_S(\phi) \Leftrightarrow L[X, \quad (\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^{\perp}] = [K, \quad H(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^{\perp}]. \tag{3.26}$$

(3.26)' da verilen ve temel $BLUP$ denklemi olarak bilinen matris denkleminin genel çözümü

$$BLUP_S(\phi) = Ly = ([K, \quad H(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^{\perp}]W^{+} + UW^{\perp})y \tag{3.27}$$

şeklindedir. Burada $U\in\mathbb{R}^{k\times nm}$ keyfi bir matris, $W=[X, \quad (\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^{\perp}]$ dir ve aşağıdakiler sağlanır.

$$D[BLUP_S(\phi)] = [K, \quad H(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^{\perp}]W^{+}$$
$$\times(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)([K, \quad H(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^{\perp}]W^{+})', \tag{3.28}$$

$$cov\{BLUP_S(\phi),\phi\} = [K, \quad H(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^{\perp}]W^{+}(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)H', \tag{3.29}$$

$$D[\phi-BLUP_S(\phi)] = ([K, \quad H(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^{\perp}]W^{+}-H)$$
$$\times(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)([K, \quad H(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^{\perp}]W^{+}-H)', \tag{3.30}$$

$$OLSP_S(\phi) = (KX^{+}+HX^{\perp})y, \tag{3.31}$$

$$D[\phi-OLSP_S(\phi)] = (KX^{+}-HP_X)(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)(KX^{+}-HP_X)'. \tag{3.32}$$

Ayrıca aşağıda verilenler sağlanır.

i) $r[X, \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}] = r[X, \quad \Sigma \otimes \mathrm{I}_n]$, $\mathcal{C}[X, \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}] = \mathcal{C}[X, \quad \Sigma \otimes \mathrm{I}_n]$ ve $\mathcal{C}(X) \cap \mathcal{C}[(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}] = \{0\}$,

ii) L tektir $\Leftrightarrow r[X, \quad \Sigma \otimes \mathrm{I}_n] = nm$,

iii) $BLUP_S(\phi)$ tektir $\Leftrightarrow S$ tutarlıdır.

Aşağıdaki teoremler Teorem 3.2.5' den uyarlanmıştır.

Teorem 3.2.6. S modeli altında (3.9)' da verilen ϕ_i vektörü ön tahmin edilebilir olsun. S modeli altında ϕ_i vektörünün iki lineer yansız ön tahmin edicisi olarak $L_i y$ ve $F_i y$ istatistikleri ele alınsın. Bu durumda, $D(L_i y - \phi_i) - D(F_i y - \phi_i)$ farkının $E(F_i y - \phi_i) = 0$ eşitliğine göre maksimal pozitif inertiası

$$\underset{E(F_i y - \phi_i)=0}{\text{maks}} i_+\big(D(L_i y - \phi_i) - D(F_i y - \phi_i)\big)$$

$$= r\begin{bmatrix} [L_i, \quad -\mathrm{I}_k]\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{\mathrm{nm}} \\ \widehat{H}_i\end{bmatrix}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{\mathrm{nm}} \\ \widehat{H}_i\end{bmatrix}' \\ \begin{bmatrix} X \\ \widehat{K}_i\end{bmatrix}' \end{bmatrix} - r\begin{bmatrix} X \\ \widehat{K}_i\end{bmatrix}$$

$$= r\left([L_i, \quad -\mathrm{I}_k]\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{\mathrm{nm}} \\ \widehat{H}_i\end{bmatrix}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{\mathrm{nm}} \\ \widehat{H}_i\end{bmatrix}'\begin{bmatrix} X \\ \widehat{K}_i\end{bmatrix}^{\perp}\right)$$

dir. Böylece $E(L_i y - \phi_i) = 0$ ifadesine göre $D(L_i y - \phi_i) = min$ olmasının gerek ve yeter şartı $L_i y = BLUP_S(\phi_i)$ olmasıdır. Yani

$$L_i y = BLUP_S(\phi_i) \Leftrightarrow L_i[X, \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}] = [\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}]. \tag{3.33}$$

(3.33)' de verilen ve temel $BLUP$ denklemi olarak bilinen matris denkleminin genel çözümü

$$BLUP_S(\phi_i) = L_i y$$

$$= ([\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}][X, \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}]^+ + U_i[X, \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}]^{\perp})y \tag{3.34}$$

şeklindedir. (3.34)' de $U_i \in \mathbb{R}^{k \times nm}$ keyfi bir matristir ve aşağıdakiler sağlanır.

$$D[BLUP_S(\phi_i)] = [\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}]W^{+}$$
$$\times (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)([\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}]W^{+})', \tag{3.35}$$

$$cov\{BLUP_S(\phi_i), \phi_i\} = [\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}]W^{+}(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\widehat{H}_i{}', \tag{3.36}$$

$$D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] = \left([\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}]W^{+} - \widehat{H}_i\right)$$
$$\times (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\left([\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}]W^{+} - \widehat{H}_i\right)', \tag{3.37}$$

$$OLSP_S(\phi_i) = \left(\widehat{K}_i X^{+} + \widehat{H}_i X^{\perp}\right)y, \tag{3.38}$$

$$D[\phi_i - OLSP_S(\phi_i)] = \left(\widehat{K}_i X^{+} - \widehat{H}_i P_X\right)(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)\left(\widehat{K}_i X^{+} - \widehat{H}_i P_X\right)'. \tag{3.39}$$

Ayrıca aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $r[X, \quad (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}] = r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n]$, $\mathcal{C}[X, \quad (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}] = \mathcal{C}[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n]$ ve $\mathcal{C}(X) \cap \mathcal{C}[(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}] = \{0\}$,

ii) L_i tektir $\Leftrightarrow r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] = nm$,

iii) $BLUP_S(\phi_i)$ tektir $\Leftrightarrow$ S tutarlıdır.

Teorem 3.2.7. S_i modeli ele alınsın. (3.9)' da verilen ϕ_i vektörü S_i modeli altında ön tahmin edilebilir ise aşağıdakiler sağlanmaktadır.

$$OLSE_{S_i}(K_i\beta_i) = K_i X_i{}^{+} y_i, \tag{3.40}$$

$$OLSP_{S_i}(H_i\varepsilon_i) = H_i X_i{}^{\perp} y_i, \tag{3.41}$$

$$OLSP_{S_i}(\phi_i) = OLSE_{S_i}(K_i\beta_i) + OLSP_{S_i}(H_i\varepsilon_i) = \left(K_i X_i{}^{+} + H_i X_i{}^{\perp}\right)y_i, \tag{3.42}$$

$$D\left[OLSP_{S_i}(\phi_i)\right] = \sigma_{ii}\left(K_i X_i^{+} + H_i X_i{}^{\perp}\right)\left(K_i X_i^{+} + H_i X_i{}^{\perp}\right)', \tag{3.43}$$

$$cov\left\{OLSP_{S_i}(\phi_i), \phi_i\right\} = \sigma_{ii}\left(K_i X_i^{+} + H_i X_i{}^{\perp}\right)H_i', \tag{3.44}$$

$$D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right] = \sigma_{ii}\left(K_i X_i^{+} - H_i P_{X_i}\right)\left(K_i X_i^{+} - H_i P_{X_i}\right)'. \tag{3.45}$$

Not 1. S_i modeli altında ϕ_i vektörünün $BLUP$ ve $OLSP$ ifadeleri $D(\varepsilon_i) = \sigma_{ii}\mathrm{I}_n$ olması nedeniyle çakışır.

Böylece (3.42) ifadesi

$$BLUP_{S_i}(\phi_i) = \left([K_i, \quad \sigma_{ii}H_iX_i^{\perp}]W_i^{+} + U_iW_i{}^{\perp}\right)y_i \tag{3.46}$$

şeklinde yazılabilir, burada $U_i \in \mathbb{R}^{k\times n}$ ve $W_i = [X_i, \quad \sigma_{ii}X_i^{\perp}]$ dir, $i = 1, \dots, m$.

4. SUR MODELLERİNDE ÖN TAHMİN VE TAHMİN EDİCİLERİN EŞİTLİKLERİ

Tahmin ve ön tahmin edicilerin eşitliklerinin incelenmesi, SUR modellerde ve diğer regresyon analizlerinde ele alınan önemli bir konudur. Özellikle doğrusal regresyon modellerin oluşturduğu sistemlerde, tekil modellerden ve sistemden elde edilen çıkarım sonuçları tamamen aynı değildir ve sistem ile tekil modellerden elde edilen sonuçlar arasında bağlantılar mevcuttur. Bu bağlantıları tespit etmek amacıyla doğrusal regresyon modeller sistemi ve tekil modeller altında ön tahmin ve tahmin ediciler arasında belirli ilişki problemleri kurularak incelenmektedir. İstatistiksel literatürde bu doğrultuda kullanılan yaklaşımlardan başlıcaları ön tahmin ve tahmin ediciler arasındaki eşitliklerin incelenmesidir. Bu inceleme, modeldeki değişkenler arasındaki ilişkileri anlamaya ve parametre tahminlerinin iyileştirilmesine yardımcı olmaktadır. Böylece modelin daha doğru ve güvenilir tahminler yapması sağlanarak analiz sonuçları daha anlamlı hale getirilebilir. Konu hakkında yapılan çalışmalara örnek olarak [26, 27, 42, 50, 68] kaynakları incelenebilir.

Çalışmanın bu bölümünde SUR modellerinde ön tahmin ve tahmin edicilerin eşitlikleri ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca bazı özel durumlara ilişkin sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1. ϕ_i vektörü (3.9)' da verildiği gibi olmak üzere S_i ve S modelleri altında ön tahmin edilebilir olsun. $\sigma_i = [\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{im}]$, $i = 1, \dots, m$ olarak alınsın. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a) $BLUP_S(\phi_i) = OLSP_S(\phi_i) = OLSP_{S_i}(\phi_i)$, başka bir ifadeyle

$\phi_i - BLUP_S(\phi_i) = \phi_i - OLSP_S(\phi_i) = \phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)$,

b) $D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] = D[\phi_i - OLSP_S(\phi_i)] = D[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)]$,

c) $(\widehat{K}_i - \widehat{H}_i X)X^+(\Sigma \otimes \mathrm{I_n})X^\perp = 0$, başka bir deyişle

$\mathcal{C}\left([(\widehat{K}_i - \widehat{H}_i X)X^+(\Sigma \otimes \mathrm{I_n})]'\right) \subseteq \mathcal{C}(X')$,

d) $(K_i - H_i X_i){X_i}^+(\sigma_i \otimes \mathrm{I_n})X^\perp = 0$, başka bir deyişle

$\mathcal{C}([(K_i - H_i X_i){X_i}^+(\sigma_i \otimes \mathrm{I_n})]') \subseteq \mathcal{C}(X')$, veya denk olarak

$\sigma_{ij}(K_i - H_iX_i)X_i{}^+X_j{}^\perp = 0$, bir başka deyişle

$\mathcal{C}\left(\left[\sigma_{ij}(K_i - H_iX_i)X_i{}^+\right]'\right) \subseteq \mathcal{C}(X_j{}'),\ j = 1, \dots, m,$

e) $r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & X_i{}'(\sigma_i \otimes I_n)X^\perp \\ K_i - H_iX_i & 0 \end{bmatrix} = r(X_i)$, başka bir deyişle

$r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & \sigma_{ij}X_i{}'X_j^\perp \\ K_i - H_iX_i & 0 \end{bmatrix} = r(X_i),\ j = 1, \dots, m,$

f) $r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & X_i{}'(\sigma_i \otimes I_n) \\ K_i - H_iX_i & 0 \\ 0 & X' \end{bmatrix} = r(X_i) + r(X)$, başka bir deyişle

$r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & \sigma_{ij}X_i{}' \\ K_i - H_iX_i & 0 \\ 0 & X_j{}' \end{bmatrix} = r(X_i) + r(X_j),\ j = 1, \dots, m,$

g) $\mathcal{C}([K_i - H_iX_i,\quad 0]') \subseteq \mathcal{C}([X_i{}'X_i,\quad X_i{}'(\sigma_i \otimes I_n)X^\perp]')$, başka bir ifadeyle

$\mathcal{C}([K_i - H_iX_i,\quad 0]') \subseteq \mathcal{C}\left(\left[X_i{}'X_i,\quad \sigma_{ij}X_i{}'X_j^\perp\right]'\right),\ j = 1, \dots, m.$

İspat: Öncelikle $BLUP_S(\phi_i) = OLSP_S(\phi_i)$ olduğu kabul edilsin. Böylece (3.38)' den

$$BLUP_S(\phi_i) = OLSP_S(\phi_i) = (\widehat{K}_iX^+ + \widehat{H}_iX^\perp)y$$

yazılır. $\widehat{K}_i = [0, \dots, K_i, \dots, 0]$ ve $\widehat{H}_i = [0, \dots, H_i, \dots, 0]$ olmak üzere, blok köşegen matrisin genelleştirilmiş Moore-Penrose ters özelliği kullanılarak, yani

$$\begin{bmatrix} X_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_m \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} X_1{}^+ & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_m{}^+ \end{bmatrix}$$

özelliğinin kullanılmasıyla elde edilen

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_m \end{bmatrix}^\perp &= I_{nm} - \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_m \end{bmatrix}^+ \\ &= I_{nm} - \begin{bmatrix} X_1X_1{}^+ & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_mX_m{}^+ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_n - X_1X_1{}^+ & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_n - X_mX_m{}^+ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} {X_1}^{\perp} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & {X_m}^{\perp} \end{bmatrix}$$

eşitliğinden $\widehat{K}_i X^{+} y$ ve $\widehat{H}_i X^{\perp} y$ ifadeleri sırasıyla

$$[0, \ldots, K_i, \ldots, 0] \begin{bmatrix} {X_1}^{+} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & {X_m}^{+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = [0, \ldots, K_i {X_i}^{+}, \ldots, 0] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = K_i X_i^{+} y_i$$

ve

$$[0, \ldots, H_i, \ldots, 0] \begin{bmatrix} {X_1}^{\perp} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & {X_m}^{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \left[0, \ldots, H_i {X_i}^{\perp}, \ldots, 0\right] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = H_i X_i^{\perp} y_i$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$BLUP_S(\phi_i) = OLSP_S(\phi_i) = \left(\widehat{K}_i X^{+} + \widehat{H}_i X^{\perp}\right) y$$

$$= \left(K_i {X_i}^{+} + H_i {X_i}^{\perp}\right) y_i = OLSP_{S_i}(\phi_i) \qquad (4.1)$$

olduğu görülür, yani $BLUP_S(\phi_i) \ = OLSP_S(\phi_i) = OLSP_{S_i}(\phi_i)$ dir. Dolayısıyla

$$\phi_i - BLUP_S(\phi_i) = \phi_i - OLSP_S(\phi_i) = \phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)$$

dir ve böylece

$$D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)\,] = D[\phi_i - OLSP_S(\phi_i)\,] = D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\,\right] \qquad (4.2)$$

eşitliği açıkça görülür. Ayrıca (4.1)' den $OLSP_S(\phi_i) = OLSP_{S_i}(\phi_i)$ veya denk olarak $\phi_i - OLSP_S(\phi_i) = \phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)$ her zaman sağlandığından, $D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)\,] = D[\phi_i - OLSP_S(\phi_i)\,]$ eşitliği sağlandığında (4.2) her zaman sağlanmaktadır.

(a) ⇔ (c): $BLUP_S(\phi_i) = OLSP_S(\phi_i)$ kabulü altında, (3.34) ve (3.38)' den

$$BLUP_S(\phi_i) - OLSP_S(\phi_i) = [\left(\widehat{K}_i X^{+} + \widehat{H}_i X^{\perp}\right)$$

$$-([\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n) X^{\perp}\,][X, \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n) X^{\perp}]^{+} + U_i [X, \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n) X^{\perp}]^{\perp})] y$$

$$= 0$$

yazılır ve bu ifade tüm y vektörleri için sağlanır, yani

$$\left(\widehat{K}_i X^+ + \widehat{H}_i X^\perp\right) = ([\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp][X, \quad (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp]^+ + U_i[X, \quad (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp]^\perp)$$

dır. Bu denklem tüm U_i matrisleri için çözülebilirdir ancak ve ancak

$$r\begin{bmatrix} [X, \quad (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp]^\perp \\ \left(\widehat{K}_i X^+ + \widehat{H}_i X^\perp\right) - [\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp][X, \quad (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp]^+ \end{bmatrix}$$

$$= r([X, \quad (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp]^\perp)$$

$\Leftrightarrow$

$$r\begin{bmatrix} I_{nm} & [X, \quad (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp] \\ \left(\widehat{K}_i X^+ + \widehat{H}_i X^\perp\right) - [\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp][X, \quad (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp]^+ & 0 \end{bmatrix}$$

$$-r[X, \quad (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp] = nm - r[X, \quad (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp]$$

$$\Leftrightarrow r\begin{bmatrix} I_{nm} & [X, \quad (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp] \\ \widehat{K}_i X^+ + \widehat{H}_i X^\perp & [\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp] \end{bmatrix} = nm$$

$$\Leftrightarrow r\begin{bmatrix} I_{nm} & X & (\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp \\ \widehat{K}_i X^+ + \widehat{H}_i X^\perp & \widehat{K}_i & \widehat{H}_i(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp \end{bmatrix} = nm$$

$\Leftrightarrow$

$$r\begin{bmatrix} I_{nm} & 0 & 0 \\ \widehat{K}_i X^+ + \widehat{H}_i X^\perp & \widehat{K}_i - \widehat{K}_i X^+ X & -\widehat{K}_i X^+(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp - \widehat{H}_i X^\perp(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp + \widehat{H}_i(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp \end{bmatrix}$$
$$= nm$$

dir. ϕ_i vektörü S modelinde ön tahmin edilebilir yani $\mathcal{C}(\widehat{K}_i{}') \subseteq \mathcal{C}(X')$ olduğundan $\widehat{K}_i - \widehat{K}_i X^+ X = 0$ ve $I_{nm} - X^\perp = XX^+$ olarak yazılabilir. Böylece, yukarıda elde edilen son eşitliğin

$$r\begin{bmatrix} I_{nm} & 0 \\ 0 & \left(\widehat{K}_i - \widehat{H}_i X\right)X^+(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp \end{bmatrix} = nm$$

$$\Leftrightarrow \left(\widehat{K}_i - \widehat{H}_i X\right)X^+(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^\perp = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{C}\left(\left[\left(\widehat{K}_i - \widehat{H}_i X\right)X^+(\Sigma\otimes \mathrm{I}_\mathrm{n})\right]'\right) \subseteq \mathcal{C}(X')$$

olduğu görülür. Böylece (a) ⇔ (c) dir.

(b) $\Leftrightarrow$ (c): $D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)\,] = D[\phi_i - OLSP_S(\phi_i)\,]$ kabulü altında, (3.37) ve (3.39)' dan

$$D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)\,] - D[\phi_i - OLSP_S(\phi_i)\,] = \left([\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}]W^{+} - \widehat{H}_i\right)$$

$$\times (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)\left([\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}]W^{+} - \widehat{H}_i\right)'$$

$$-\left(\widehat{K}_i X^{+} - \widehat{H}_i P_X\right)(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)\left(\widehat{K}_i X^{+} - \widehat{H}_i P_X\right)' = 0$$

olarak yazılır. Buradan [50]' de verilen Teorem 6.2' ye göre

$$r(D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)\,] - D[\phi_i - OLSP_S(\phi_i)\,]) = 0$$

ifadesi sağlanır ancak ve ancak

$$r\begin{bmatrix} X'X & X'(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n) \\ 0 & X' \\ \widehat{K}_i - \widehat{H}_i X & 0 \end{bmatrix} = 2r(X)$$

$$\Leftrightarrow r\begin{bmatrix} X'X & X'(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} \\ \widehat{K}_i - \widehat{H}_i X & 0 \end{bmatrix} = r(X)$$

$$\Leftrightarrow r\left[(\widehat{K}_i - \widehat{H}_i X)(X'X)^{+}X'(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow r\left[(\widehat{K}_i - \widehat{H}_i X)X^{+}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\widehat{K}_i - \widehat{H}_i X)X^{+}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} = 0.$$

Bu durumda (b) $\Leftrightarrow$ (c) dir.

(c) $\Leftrightarrow$ (d): (c)' de verilen $\left(\widehat{K}_i - \widehat{H}_i X\right)X^{+}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} = 0$ ifadesi sağlanır ancak ve ancak

$$\left([0, \ldots, K_i, \ldots, 0] - [0, \ldots, H_i, \ldots, 0]\begin{bmatrix} X_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_m \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} {X_1}^{+} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & {X_m}^{+} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_{11}\mathrm{I}_n & \sigma_{12}\mathrm{I}_n & \cdots & \sigma_{1m}\mathrm{I}_n \\ \sigma_{21}\mathrm{I}_n & \sigma_{22}\mathrm{I}_n & \cdots & \sigma_{2m}\mathrm{I}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}\mathrm{I}_n & \sigma_{m2}\mathrm{I}_n & \cdots & \sigma_{mm}\mathrm{I}_n \end{bmatrix}X^{\perp} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left([0, \ldots, (K_i - H_i X_i){X_i}^{+}, \ldots, 0]\right)\begin{bmatrix} \sigma_{11}\mathrm{I}_n & \sigma_{12}\mathrm{I}_n & \cdots & \sigma_{1m}\mathrm{I}_n \\ \sigma_{21}\mathrm{I}_n & \sigma_{22}\mathrm{I}_n & \cdots & \sigma_{2m}\mathrm{I}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}\mathrm{I}_n & \sigma_{m2}\mathrm{I}_n & \cdots & \sigma_{mm}\mathrm{I}_n \end{bmatrix}X^{\perp}$$

$$= 0$$

$$\Leftrightarrow \left((K_i - H_iX_i){X_i}^{+}\right)[\sigma_{i1}\mathrm{I}_n, \dots, \sigma_{i2}\mathrm{I}_n, \dots, \sigma_{im}\mathrm{I}_n]X^{\perp} = 0$$

$$\Leftrightarrow (K_i - H_iX_i){X_i}^{+}(\sigma_\mathrm{i}\otimes\mathrm{I_n})X^{\perp} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{C}\left([(K_i - H_iX_i){X_i}^{+}(\sigma_\mathrm{i}\otimes\mathrm{I_n})]'\right) \subseteq \mathcal{C}(X')$$

olduğu görülür. Ayrıca $\left((K_i - H_iX_i){X_i}^{+}\right)[\sigma_{i1}\mathrm{I}_n, \dots, \sigma_{i2}\mathrm{I}_n, \dots, \sigma_{im}\mathrm{I}_n]X^{\perp} = 0$

ifadesi denk olarak

$$\left((K_i - H_iX_i){X_i}^{+}\right)[\sigma_{i1}\mathrm{I}_n, \dots, \sigma_{i2}\mathrm{I}_n, \dots, \sigma_{im}\mathrm{I}_n]\begin{bmatrix} {X_1}^{\perp} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & {X_m}^{\perp} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow [(K_i - H_iX_i){X_i}^{+}\sigma_{i1}X_1^{\perp}, \dots, (K_i - H_iX_i){X_i}^{+}\sigma_{im}X_m^{\perp}] = 0$$

$$\Leftrightarrow (K_i - H_iX_i){X_i}^{+}\sigma_{i1}X_1^{\perp} = 0, \dots, (K_i - H_iX_i){X_i}^{+}\sigma_{im}X_m^{\perp} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{ij}(K_i - H_iX_i){X_i}^{+}X_j^{\perp} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{C}\left(\left[\sigma_{ij}(K_i - H_iX_i){X_i}^{+}\right]'\right) \subseteq \mathcal{C}({X_j}'), \;\; j = 1, \dots, m,$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda (c) ⇔ (d) dir.

(d) ⇔ (e): $X_i^{+} = (X_i'X_i)^{+}X_i'$ olduğundan (d)' de verilen $(K_i - H_iX_i){X_i}^{+}(\sigma_\mathrm{i}\otimes\mathrm{I_n})X^{\perp} = 0$ ifadesi denk olarak

$$(K_i - H_iX_i)({X_i}'X_i)^{+}{X_i}'(\sigma_\mathrm{i}\otimes\mathrm{I_n})X^{\perp} = 0$$

yazılabilir. (2.6)' dan

$$r\left((K_i - H_iX_i){X_i}^{+}(\sigma_\mathrm{i}\otimes\mathrm{I_n})X^{\perp}\right) = r\begin{bmatrix} {X_i}'X_i & {X_i}'(\sigma_\mathrm{i}\otimes\mathrm{I_n})X^{\perp} \\ K_i - H_iX_i & 0 \end{bmatrix} - r({X_i}'X_i)$$

elde edilir. Böylece $r({X_i}'X_i) = r(X_i)$ eşitliğinden

$$r\begin{bmatrix} {X_i}'X_i & {X_i}'(\sigma_\mathrm{i}\otimes\mathrm{I_n})X^{\perp} \\ K_i - H_iX_i & 0 \end{bmatrix} = r(X_i) \tag{4.3}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde (d)' de verilen $\sigma_{ij}(K_i - H_iX_i){X_i}^{+}{X_j}^{\perp} = 0$ ifadesi de $X_i^{+} = (X_i'X_i)^{+}X_i'$ olduğu kullanılarak

$$\sigma_{ij}(K_i - H_iX_i)({X_i}'X_i)^{+}{X_i}'X_j^{\perp} = 0$$

şeklinde yazılabilir. (2.6)' dan

$$r\left(\sigma_{ij}(K_i - H_iX_i)(X_i{}'X_i)^{+}X_i{}'X_j^{\perp}\right) = r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & \sigma_{ij}X_i{}'X_j^{\perp} \\ K_i - H_iX_i & 0 \end{bmatrix} - r(X_i{}'X_i)$$

elde edilir. Böylece $r(X_i{}'X_i) = r(X_i)$ eşitliğinden

$$r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & \sigma_{ij}X_i{}'X_j^{\perp} \\ K_i - H_iX_i & 0 \end{bmatrix} = r(X_i) \tag{4.4}$$

olduğu görülür. Bu durumda (d) ⇔ (e) dir.

(e) ⇔ (f) (2.5)' den (4.3) eşitliği yani (e) sağlanır:

$$r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & X_i{}'(\sigma_i \otimes I_n)X^{\perp} \\ K_i - H_iX_i & 0 \end{bmatrix} = r(X_i)$$

$$\Leftrightarrow r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & X_i{}'(\sigma_i \otimes I_n)X^{\perp} \\ K_i - H_iX_i & 0 \\ 0 & X' \end{bmatrix} = r(X_i) + r(X)$$

dir. Benzer olarak (2.5)' den (4.4) eşitliği yani (e) sağlanır:

$$r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & \sigma_{ij}X_i{}'X_j^{\perp} \\ K_i - H_iX_i & 0 \end{bmatrix} = r(X_i)$$

$$\Leftrightarrow r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & \sigma_{ij}X_i{}' \\ K_i - H_iX_i & 0 \\ 0 & X_j{}' \end{bmatrix} = r(X_i) + r\left(X_j\right) \tag{4.5}$$

olduğu görülür. Bu durumda (e) ⇔ (f) dir.

(f) ⇔ (g): (2.4)' e göre

$$r[X_i{}'X_i, \quad X_i{}'(\sigma_i \otimes I_n)X^{\perp}] = r(X_i{}'X_i) \Leftrightarrow \mathcal{C}(X_i{}'(\sigma_i \otimes I_n)X^{\perp}) \subseteq \mathcal{C}(X_i{}')$$

olarak yazılabilir. Böylece, (4.3) eşitliği için (2.5)' den

$$r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & X_i{}'(\sigma_i \otimes I_n)X^{\perp} \\ K_i - H_iX_i & 0 \end{bmatrix} = r(X_i) = r(X_i{}'X_i) = r[X_i{}'X_i, \quad X_i{}'(\sigma_i \otimes I_n)X^{\perp}]$$

$$\Leftrightarrow \ \mathcal{C}([K_i - H_iX_i, \quad 0]') \subseteq \mathcal{C}([X_i{}'X_i, \quad X_i{}'(\sigma_i \otimes I_n)X^{\perp}]')$$

sağlanır. Benzer şekilde (2.4)' e göre

$$r\left[X_i{}'X_i, \quad \sigma_{ij}X_i{}'\right] = r(X_i{}'X_i) \Leftrightarrow \mathcal{C}\left(\sigma_{ij}X_i{}'\right) \subseteq \mathcal{C}(X_i{}')$$

olarak yazılabilir. Böylece, (4.4) eşitliği için (2.5)' den

$$r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & \sigma_{ij}X_i{}'X_j^{\perp} \\ K_i - H_iX_i & 0 \end{bmatrix} = r(X_i) = r(X_i{}'X_i) = r\left[X_i{}'X_i, \quad \sigma_{ij}X_i{}'X_j^{\perp}\right]$$
$$\Leftrightarrow \ \mathcal{C}([K_i - H_iX_i, \quad 0]') \subseteq \mathcal{C}\left(\left[X_i{}'X_i, \quad \sigma_{ij}X_i{}'X_j^{\perp}\right]'\right) \tag{4.6}$$

olduğu görülür. Bu durumda (f) ⇔ (g) dir. ■

Teorem 4.1.1 için bazı özel durumlara ilişkin elde edilen sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

Sonuç 4.1.2. S_i, S modelleri sırasıyla (3.2) ve (3.4)' de verildikleri gibi ve $\sigma_i = [\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{im}]$, $i = 1, \dots, m$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i) $K_i\beta_i$ vektörü S_i ve S modelleri altında tahmin edilebilir olsun, $i = 1, \dots, m$. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a) $BLUE_S(K_i\beta_i) = OLSE_S(K_i\beta_i) = OLSE_{S_i}(K_i\beta_i)$,

b) $D[BLUE_S(K_i\beta_i)] = D[OLSE_S(K_i\beta_i)] = D\left[OLSE_{S_i}(K_i\beta_i)\right]$,

c) $\widehat{K}_iX^+(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} = 0$,

d) $K_iX_i^+(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})X^{\perp} = 0$, yani $\sigma_{ij}K_iX_i^+X_j^{\perp} = 0$, $j = 1, \dots, m$,

e) $r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & X_i{}'(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})X^{\perp} \\ K_i & 0 \end{bmatrix} = r(X_i)$, yani $r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & \sigma_{ij}X_i{}'X_j^{\perp} \\ K_i & 0 \end{bmatrix} = r(X_i)$, $j = 1, \dots, m$,

f) $r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & X_i{}'(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n}) \\ K_i & 0 \\ 0 & X' \end{bmatrix} = r(X_i) + r(X)$, yani $r\begin{bmatrix} X_i{}'X_i & \sigma_{ij}X_i{}' \\ K_i & 0 \\ 0 & X_j{}' \end{bmatrix} = r(X_i) + r(X_j)$, $j = 1, \dots, m$,

g) $\mathcal{C}\left(\left(\widehat{K}_iX^+(\Sigma\otimes \mathrm{I_n})\right)'\right) \subseteq \mathcal{C}(X')$,

h) $\mathcal{C}\left(\left(K_iX_i^+(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})\right)'\right) \subseteq \mathcal{C}(X')$, yani $\mathcal{C}((K_iX_i^+)') \subseteq \mathcal{C}(X_j')$, $j = 1, \dots, m$,

ı) $\mathcal{C}([K_i, \quad 0]') \subseteq \mathcal{C}([X_i'X_i, \quad X_i'(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})X^{\perp}]')$, yani $\mathcal{C}([K_i, \quad 0]') \subseteq \mathcal{C}\left(\left[X_i'X_i, \quad X_i'X_j^{\perp}\right]'\right)$, $j = 1, \dots, m$.

ii) S_i ve S modelleri altında $H_i\varepsilon_i$ vektörü her zaman ön tahmin edilebilirdir. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a) $BLUP_S(H_i\varepsilon_i) = OLSP_S(H_i\varepsilon_i) = OLSP_{S_i}(H_i\varepsilon_i)$,

b) $D[H_i\varepsilon_i - BLUP_S(H_i\varepsilon_i)] = D[H_i\varepsilon_i - OLSP_S(H_i\varepsilon_i)]$
$= D\left[H_i\varepsilon_i - OLSP_{S_i}(H_i\varepsilon_i)\right]$,

c) $\widehat{H}_i XX^{+}(\Sigma\otimes \mathrm{I_n})X^{\perp} = 0$, başka bir deyişle $\mathcal{C}\left(\left[\widehat{H}_i XX^{+}(\Sigma\otimes \mathrm{I_n})\right]'\right) \subseteq \mathcal{C}(X')$,

d) $H_i X_i X_i^{+}(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})X^{\perp} = 0$, başka bir deyişle $\mathcal{C}\big([H_i X_i X_i^{+}(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})]'\big) \subseteq \mathcal{C}(X')$, veya denk olarak

$\sigma_{ij} H_i X_i X_i^{+} X_j^{\perp} = 0$, bir başka deyişle $\mathcal{C}\left(\left[\sigma_{ij} H_i X_i X_i^{+}\right]'\right) \subseteq \mathcal{C}(X_j')$, $j = 1, \dots, m$,

e) $r\begin{bmatrix} X_i'X_i & X_i'(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})X^{\perp} \\ H_i X_i & 0 \end{bmatrix} = r(X_i)$, başka bir deyişle

$r\begin{bmatrix} X_i'X_i & \sigma_{ij} X_i' X_j^{\perp} \\ H_i X_i & 0 \end{bmatrix} = r(X_i)$, $j = 1, \dots, m$,

f) $r\begin{bmatrix} X_i'X_i & X_i'(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n}) \\ H_i X_i & 0 \\ 0 & X' \end{bmatrix} = r(X_i) + r(X)$, başka bir deyişle

$r\begin{bmatrix} X_i'X_i & \sigma_{ij} X_i' \\ H_i X_i & 0 \\ 0 & X_j' \end{bmatrix} = r(X_i) + r(X_j)$, $j = 1, \dots, m$,

g) $\mathcal{C}([H_i X_i,\quad 0]') \subseteq \mathcal{C}([X_i'X_i,\quad X_i'(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})X^{\perp}]')$, başka bir ifadeyle

$\mathcal{C}([H_i X_i,\quad 0]') \subseteq \mathcal{C}\left(\left[X_i'X_i,\quad \sigma_{ij} X_i' X_j^{\perp}\right]'\right)$, $j = 1, \dots, m$.

iii) S_i ve S modelleri altında $X_i\beta_i$ vektörü tahmin edilebilir olsun. ε_i vektörü bu modeller altında her zaman ön tahmin edilebilirdir. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a) $BLUE_S(X_i\beta_i) = OLSE_S(X_i\beta_i) = OLSE_{S_i}(X_i\beta_i)$,

b) $BLUP_S(\varepsilon_i) = OLSP_S(\varepsilon_i) = OLSP_{S_i}(\varepsilon_i)$,

c) $D[BLUE_S(X_i\beta_i)] = D[OLSE_S(X_i\beta_i)] = D\big[OLSE_{S_i}(X_i\beta_i)\big]$,

d) $D[\varepsilon_i - BLUP_S(\varepsilon_i)] = D[\varepsilon_i - OLSP_S(\varepsilon_i)] = D\big[\varepsilon_i - OLSP_{S_i}(\varepsilon_i)\big]$,

e) $\widehat{X}_i X^{+}(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} = 0$, burada $\widehat{X}_i = [0, \dots, X_i, \dots, 0]$,

f) $\mathrm{P}_{X_i}(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})X^{\perp} = 0$, yani $\sigma_{ij}\mathrm{P}_{X_i}X_j^{\perp} = 0$, $j = 1, \dots, m$,

g) $\mathrm{P}_{X_i}(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n}) = \mathrm{P}_{X_i}(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})P_X$, veya denk olarak, $\mathrm{P}_{X_i} = \mathrm{P}_{X_i}\mathrm{P}_{X_j}$, $j = 1, \dots, m$,

h) $X_i'(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})X^{\perp} = 0$, yani $\sigma_{ij} X_i' X_j^{\perp}$, $j = 1, \dots, m$,

ı) $X_i'(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n}) = X_i'(\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})\mathrm{P}_X$, yani $X_i = \mathrm{P}_{X_j}X_i$, $j = 1, \dots, m$,

i) $\mathcal{C}\big((\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})'\mathrm{P}_{X_i}\big) \subseteq \mathcal{C}(X')$, ya da denk olarak $\mathcal{C}\big(\mathrm{P}_{X_i}\big) \subseteq \mathcal{C}\big(X_j'\big)$, $j = 1, \dots, m$,

j) $\mathcal{C}((\sigma_i\otimes \mathrm{I_n})'X_i) \subseteq \mathcal{C}(X')$, yani $\mathcal{C}(X_i) \subseteq \mathcal{C}\big(X_j'\big)$, $j = 1, \dots, m$.

5. SUR MODELLERİNDE ÖN TAHMİN VE TAHMİN EDİCİLERİN TOPLAMSAL AYRIŞIMLARI

Doğrusal regresyon model sistemlerinde, tekil modeller ile sistemden elde edilen sonuçlar arasındaki bağlantıları tespit etmek amacıyla kullanılan yaklaşımlardan bir diğeri ön tahmin ve tahmin edicilerin toplamsal ayrışımlarının incelenmesidir. Toplamsal ayrışımlar ön tahmin ve tahmin edicilerin modeldeki katkılarını belirleme ve etkinliklerini değerlendirmenin yanı sıra değişkenlerin ilişkilerini anlama ve model performansını iyileştirme açısından önemli bir yöntemdir. Konuyla ilgili yapılan çalışmalara örnek olarak [68, 73, 74] kaynakları incelenebilir.

Teorem 5.1.1. ϕ_i vektörü (3.9)' da verildiği gibi olmak üzere S_i modeli altında ve ϕ vektörü (3.7)' de verildiği gibi olmak üzere S modeli altında ön tahmin edilebilir olsun. $D_\sigma = diag[\sigma_{11}, \dots, \sigma_{mm}]$, $i = 1, \dots, m$ olarak alınsın. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a) $BLUP_S(\phi) = BLUP_{S_1}(\phi_1) + \cdots + BLUP_{S_m}(\phi_m)$,

b) $r\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & X & D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' \\ 0 & K - HX & 0 \end{bmatrix} = 2r(X) + r[X, \quad D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n]$,

c) $r\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & X & D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' \\ 0 & K - HX & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & X & D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' \end{bmatrix}$, başka bir ifadeyle

$$\mathcal{C}([0, \quad K - HX, \quad 0]') \subseteq \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & X & D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' \end{bmatrix}'\right).$$

İspat: $BLUP_S(\phi) = BLUP_{S_1}(\phi_1) + \cdots + BLUP_{S_m}(\phi_m)$ eşitliğinin sağlanmasının gerek ve yeter şartı $(G_1T_1 + \cdots + G_mT_m)[X, \quad (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}] = [K, \quad H(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}]$ koşulunun sağlanması yani

$$\begin{aligned}&[K_1, \quad \sigma_{11}H_1{X_1}^{\perp}]W_1^{+}[\hat{X}_1, \quad T_1(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}] + \cdots \\ &\quad + [K_m, \quad \sigma_{mm}H_m{X_m}^{\perp}]W_m^{+}[\hat{X}_m, \quad T_m(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}] \\ &\quad = [K, \quad H(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}]\end{aligned} \tag{5.1}$$

dir. Bu ifade

$$\begin{aligned}&\left[[K_1, \quad \sigma_{11}H_1{X_1}^{\perp}], \ldots, [K_m, \quad \sigma_{mm}H_m{X_m}^{\perp}]\right] \\ &\qquad \times \begin{bmatrix} W_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & W_m \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} \hat{X}_1 & (\sigma_1 \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} \\ \vdots & \vdots \\ \hat{X}_m & (\sigma_m \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} \end{bmatrix} = [K, \quad H(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}]\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $\hat{X}_i = [0, \ldots, X_i, \ldots, 0]$ olduğundan ve (2.6) uygulandığında;

$$r\begin{bmatrix} X_1 & \sigma_{11}{X_1}^{\perp} & \cdots & 0 & 0 & \hat{X}_1 & (\sigma_1 \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_m & \sigma_{mm}{X_m}^{\perp} & \hat{X}_m & (\sigma_m \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} \\ K_1 & \sigma_{11}H_1{X_1}^{\perp} & \cdots & K_m & \sigma_{mm}H_m{X_m}^{\perp} & K & H(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} \end{bmatrix}$$

$$-r\begin{bmatrix} X_1 & \sigma_{11}{X_1}^{\perp} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_m & \sigma_{mm}{X_m}^{\perp} \end{bmatrix}$$

$$= r\begin{bmatrix} X_1 & \cdots & 0 & \sigma_{11}{X_1}^{\perp} & \cdots & 0 & \hat{X}_1 & (\sigma_1 \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_m & 0 & \cdots & \sigma_{mm}{X_m}^{\perp} & \hat{X}_m & (\sigma_m \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} \\ K_1 & \cdots & K_m & \sigma_{11}H_1{X_1}^{\perp} & \cdots & \sigma_{mm}H_m{X_m}^{\perp} & K & H(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} \end{bmatrix}$$

$$-r[X_1, \quad \sigma_{11}{X_1}^{\perp}] - \cdots - r[X_m, \quad \sigma_{mm}{X_m}^{\perp}]$$

$$= r\begin{bmatrix} X & (D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} & (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} \\ K & H(D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} & H(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} \end{bmatrix} - r[X_1, \quad \sigma_{11}\mathrm{I}_n] - \cdots - r[X_m, \quad \sigma_{mm}\mathrm{I}_n]$$

$$= r\begin{bmatrix} X & (D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} & (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} \\ K - HX & 0 & 0 \end{bmatrix} - r[X, \quad D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n]$$

$$= r\begin{bmatrix} X & D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n & \Sigma \otimes \mathrm{I}_n \\ K - HX & 0 & 0 \\ 0 & X' & 0 \\ 0 & 0 & X' \end{bmatrix} - 2r(X) - r[X, \quad D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n] \tag{5.2}$$

elde edilir. Buradan

$$r\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & X & D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' \\ 0 & K - HX & 0 \end{bmatrix} = 2r(X) + r[X, \quad D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n] \tag{5.3}$$

olduğu görülür.

Diğer taraftan, $D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n = A$, $X = B$, $\Sigma \otimes \mathrm{I}_n = C$ ve $X' = D$ olarak alınarak (5.2)' ye Lemma 2.8.2 uygulandığında,

$$r[A, \quad B] + r(B) + r(D) = r\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & X & D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan (2.5)' e göre

$$r\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & X & D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' \\ 0 & K - HX & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & X & D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{C}([0, \quad K - HX, \quad 0]') \subseteq \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & X & D_\sigma \otimes \mathrm{I}_n \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' \end{bmatrix}'\right) \tag{5.4}$$

olduğu görülür. ■

Teorem 5.1.1 için bazı durumlara ilişkin elde edilen sonuçlar aşağıdadır.

Sonuç 5.1.2. S_i ve S modelleri sırasıyla (3.2) ve (3.4)' te verildikleri gibi olsun, $i = 1, \ldots, m$. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i) $K_i\beta_i$ ve $K\beta$ vektörleri sırasıyla S_i ve S modelleri altında tahmin edilebilir olsun, $i = 1, \ldots, m$. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a) $BLUE_S(K\beta) = BLUE_{S_1}(K_1\beta_1) + \cdots + BLUE_{S_m}(K_m\beta_m)$,

b) $r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I}_n & X & D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' \\ 0 & K & 0 \end{bmatrix} = 2r(X) + r[X, \quad D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n]$,

c) $r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I}_n & X & D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' \\ 0 & K & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I}_n & X & D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X' \end{bmatrix}$, yani

$$\mathcal{C}([0, \quad K, \quad 0]') \subseteq \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I}_n & X & D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & X' & 0 \end{bmatrix}'\right).$$

ii) S_i ve S modelleri altında $X_i\beta_i$ ve $X\beta$ vektörleri tahmin edilebilir, ε_i ve ε vektörleri ise ön tahmin edilebilir olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

a) $BLUE_S(X\beta) = \begin{bmatrix} BLUE_S(X_1\beta_1) \\ \vdots \\ BLUE_S(X_m\beta_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BLUE_{S_1}(X_1\beta_1) \\ \vdots \\ BLUE_{S_m}(X_m\beta_m) \end{bmatrix}$,

b) $BLUP_S(\varepsilon) = \begin{bmatrix} BLUP_S(\varepsilon_1) \\ \vdots \\ BLUP_S(\varepsilon_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BLUP_{S_1}(\varepsilon_1) \\ \vdots \\ BLUP_{S_m}(\varepsilon_m) \end{bmatrix}$,

c) $r(X) + r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I}_n & D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n \\ X' & 0 \\ 0 & X' \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I}_n & D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n & X \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & X' & 0 \end{bmatrix}$,

yani $\mathcal{C}\begin{bmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cap \mathcal{C}\begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I}_n & D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n \\ X' & 0 \\ 0 & X' \end{bmatrix} = \{0\}$,

d) $r[(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^\perp, \quad (D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^\perp, \quad X] = r[(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^\perp, \quad (D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^\perp] + r(X)$,

yani $\mathcal{C}(X) \cap \mathcal{C}[(\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^\perp, \quad (D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^\perp] = \{0\}$,

e) $r\begin{bmatrix} \Sigma\otimes\mathrm{I}_n & D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n \\ X' & 0 \\ 0 & X' \end{bmatrix} = r(X) + r[D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n, \quad X]$,

f) $\mathcal{C}\big((\Sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^\perp\big) \subseteq \mathcal{C}\big((D_\sigma\otimes\mathrm{I}_n)X^\perp\big)$.

6. SUR MODELLERİNDE ÖN TAHMİN VE TAHMİN EDİCİLERİN KOVARYANS MATRİSLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Ön tahmin ve tahmin edicilerin performanslarının karşılaştırılmasında yaygın kullanılan ölçütlerden biri kovaryans matris karşılaştırılmasıdır. Finansal verilerde değişkenler arasındaki ilişkileri açıklamak, biyomedikal araştırmalarda farklı gruplar arasındaki değişkenlerin farklılıklarını belirlemek ya da sosyal bilimlerde değişkenler arasındaki bağlantıları analiz etmek gibi birçok alanda kullanılan bir yöntemdir. Kovaryans matrislerinin karşılaştırılması, uygun tahminleri belirlemeyi, ön tahmin ve tahmin edicilerin etkinliğini değerlendirmeyi ve böylece modelin iyileştirilmesini sağlar. Bu başlık altında blok matrislerin rank ve inertia formülleri kullanılarak ön tahmin ve edicilerin kovaryans matrisleri karşılaştırılmaktadır. Bu kapsamdaki araştırmalara örnek olarak [49-54] çalışmaları incelenebilir.

Teorem 6.1.1. ϕ_i vektörü (3.9)' da verildiği gibi olmak üzere S_i modelinde ön tahmin edilebilir ve $BLUP_S(\phi_i)$ ve $OLSP_{S_i}(\phi_i)$ ifadeleri sırasıyla (3.34) ve (3.42)' de gösterildiği gibi alınsın.

$$A = \begin{bmatrix} \Sigma\otimes \mathrm{I}_n & X & 0 & 0 \\ X' & 0 & \widehat{K}_i' - X'\widehat{H}_i' & 0 \\ 0 & \widehat{K}_i - \widehat{H}_i X & 0 & K_i - H_i X_i \\ 0 & 0 & K_i' - X_i' H_i' & {\sigma_{ii}}^{-1} X_i' X_i \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} &i_+\left(D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] - D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right]\right) \\ &\qquad = i_+(A) - r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] - r(X_i), \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$i_-\left(D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] - D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right]\right) = i_-(A) - r(X), \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned} &r\left(D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] - D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right]\right) = r(A) - \\ &\qquad r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] - r(X_i) - r(X), \end{aligned} \tag{6.3}$$

dır ve aşağıdakiler sağlanır.

a) $\left(D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right] \succ D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)]\right) \Leftrightarrow i_-(A) = r(X) + k.$

b) $\left(D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right] \prec D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)]\right) \Leftrightarrow i_+(A) = r[X, \quad \Sigma \otimes \mathrm{I}_n] + r(X_i) + k.$

c) $\left(D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right] \succcurlyeq D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)]\right) \Leftrightarrow i_+(A) = r[X, \quad \Sigma \otimes \mathrm{I}_n] + r(X_i).$

d) $\left(D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right] \preccurlyeq D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)]\right) \Leftrightarrow i_-(A) = r(X).$

e) $\left(D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right] = D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)]\right) \Leftrightarrow r(A) = r[X, \quad \Sigma \otimes \mathrm{I}_n] + r(X_i) + r(X).$

İspat: (3.45)’ den

$$D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] - D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right]$$

$$= D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] - \sigma_{ii}\left(K_i X_i^+ - H_i P_{X_i}\right)\left(K_i X_i^+ - H_i P_{X_i}\right)'$$

$$= D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] - \sigma_{ii}(K_i - H_i X_i)(X_i' X_i)^+ (K_i - H_i X_i)'$$

şeklinde yazılır. (2.19) ve $(X_i' X_i)^+ = (X_i' X_i)^+ (X_i' X_i)(X_i' X_i)^+$ olduğundan

$$i_\pm\left(D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] - D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right]\right)$$

$$= i_\pm(D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] - \sigma_{ii}(K_i - H_i X_i)(X_i' X_i)^+ (K_i - H_i X_i)')$$

$$= i_\pm(D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] - \sigma_{ii}(K_i - H_i X_i)(X_i' X_i)^+ (X_i' X_i)(X_i' X_i)^+ (K_i - H_i X_i)')$$

$$= i_\pm \begin{bmatrix} -\sigma_{ii} X_i' X_i & X_i' X_i & 0 \\ X_i' X_i & 0 & (K_i - H_i X_i)' \\ 0 & (K_i - H_i X_i) & D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] \end{bmatrix} - r(X_i' X_i) \tag{6.4}$$

elde edilir.

(2.12)’ den ve $r(X_i' X_i) = r(X_i') = r(X_i)$ olduğundan

$$i_\pm\left(D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] - D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right]\right)$$

$$= i_\mp \begin{bmatrix} \sigma_{ii} X_i' X_i & 0 & X_i' X_i \\ 0 & -D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] & K_i - H_i X_i \\ X_i' X_i & K_i' - X_i' H_i' & 0 \end{bmatrix} - r(X_i)$$

$$= i_\mp \left[\begin{pmatrix} \sigma_{ii} X_i' X_i & 0 & X_i' X_i \\ 0 & 0 & K_i - H_i X_i \\ X_i' X_i & K_i' - X_i' H_i' & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$- r(X_i)$$

$$= i_{\mp}\left[\begin{pmatrix} \sigma_{ii}X_i'X_i & 0 & X_i'X_i \\ 0 & 0 & K_i - H_iX_i \\ X_i'X_i & K_i' - X_i'H_i' & 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{I}_k \\ 0 \end{bmatrix} D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)][0 \quad \mathrm{I}_k \quad 0]\right]$$
$$- r(X_i)$$

elde edilir. (3.37)'den ve $(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n) = (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)^{+}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)$ alınarak (2.18) uygulanırsa

$$i_{\mp}\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)\left(Z_iW^{+} - \widehat{H}_i\right)'[0 \quad \mathrm{I}_k \quad 0] \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{I}_k \\ 0 \end{bmatrix}\left(Z_iW^{+} - \widehat{H}_i\right)(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n) & \begin{pmatrix} \sigma_{ii}X_i'X_i & 0 & X_i'X_i \\ 0 & 0 & K_i - H_iX_i \\ X_i'X_i & K_i' - X_i'H_i' & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} - i_{\mp}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)$$
$$- r(X_i)$$

$$= i_{\mp}\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & 0 & (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)\left(Z_iW^{+} - \widehat{H}_i\right)' & 0 \\ 0 & \sigma_{ii}X_i'X_i & 0 & X_i'X_i \\ \left(Z_iW^{+} - \widehat{H}_i\right)(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n) & 0 & 0 & K_i - H_iX_i \\ 0 & X_i'X_i & K_i' - X_i'H_i' & 0 \end{bmatrix}$$
$$- i_{\mp}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n) - r(X_i)$$

$$= i_{\mp}\left(\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & 0 & -(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)\widehat{H}_i & 0 \\ 0 & \sigma_{ii}X_i'X_i & 0 & X_i'X_i \\ -\widehat{H}_i(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n) & 0 & 0 & K_i - H_iX_i \\ 0 & X_i'X_i & K_i' - X_i'H_i' & 0 \end{bmatrix}\right.$$
$$\left. + \begin{bmatrix} 0 & 0 & (\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)(W^{+})'Z_i' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_iW^{+}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) - i_{\mp}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n) - r(X_i)$$

$$= i_{\mp}\left(\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & 0 & -(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n)\widehat{H}_i & 0 \\ 0 & \sigma_{ii}X_i'X_i & 0 & X_i'X_i \\ -\widehat{H}_i(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n) & 0 & 0 & K_i - H_iX_i \\ 0 & X_i'X_i & K_i' - X_i'H_i' & 0 \end{bmatrix}\right.$$
$$\left. + \begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Z_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & W \\ W' & 0 \end{bmatrix}^{+}\begin{bmatrix} \Sigma \otimes \mathrm{I}_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_i' & 0 \end{bmatrix}\right) - i_{\mp}(\Sigma \otimes \mathrm{I}_n) \tag{6.5}$$
$$- r(X_i)$$

elde edilir. (2.18) tekrar uygulanırsa

$$
= i_{\mp}\begin{bmatrix} 0 & -W & \Sigma\otimes I_n & 0 & 0 & 0 \\ -W' & 0 & 0 & 0 & Z_i' & 0 \\ \Sigma\otimes I_n & 0 & \Sigma\otimes I_n & 0 & -(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_i' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{ii}X_i'X_i & 0 & X_i'X_i \\ 0 & Z_i & -\widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n) & 0 & 0 & K_i - H_iX_i \\ 0 & 0 & 0 & X_i'X_i & K_i' - X_i'H_i' & 0 \end{bmatrix} \qquad (6.6)
$$

$$
+ i_{\pm}\begin{bmatrix} 0 & W \\ W' & 0 \end{bmatrix} - i_{\mp}(\Sigma\otimes I_n) - r(X_i)
$$

olarak yazılır. Burada $W = [X, \quad (\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]$ ve $Z_i = [\widehat{K}_i, \quad \widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp}]$ ifadeleri yerlerine yazılır ve elementer satır - sütun işlemleri uygulanırsa aşağıdakiler elde edilir.

$$
= i_{\mp}\begin{bmatrix} 0 & -X & -(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & \Sigma\otimes I_n & 0 & 0 & 0 \\ -X' & 0 & 0 & 0 & 0 & \widehat{K}_i' & 0 \\ -X^{\perp}(\Sigma\otimes I_n) & 0 & 0 & 0 & 0 & X^{\perp}(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_i' & 0 \\ \Sigma\otimes I_n & 0 & 0 & \Sigma\otimes I_n & 0 & -(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_i' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{ii}X_i'X_i & 0 & X_i'X_i \\ 0 & \widehat{K}_i & \widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & -\widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n) & 0 & 0 & K_i - H_iX_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_i'X_i & K_i' - X_i'H_i' & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
-r[X, \quad \Sigma\otimes I_n] - i_{\mp}(\Sigma\otimes I_n) - r(X_i)
$$

$$
= i_{\mp}\begin{bmatrix} -(\Sigma\otimes I_n) & -X & -(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & 0 & 0 & (\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_i' \\ -X' & 0 & 0 & 0 & 0 & \widehat{K}_i' \\ -X^{\perp}(\Sigma\otimes I_n) & 0 & 0 & 0 & 0 & X^{\perp}(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_i' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_i'X_i & K_i' - X_i'H_i' \\ 0 & 0 & 0 & X_i'X_i & \sigma_{ii}X_i'X_i & 0 \\ -\widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n) & \widehat{K}_i & \widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & K_i - H_iX_i & 0 & -\widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_i' \end{bmatrix}
$$

$$
-r[X, \quad \Sigma\otimes I_n] - r(X_i)
$$

$$
= i_{\mp}\begin{bmatrix} -(\Sigma\otimes I_n) & -X & -(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & 0 & (\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_i' & 0 \\ -X' & 0 & 0 & 0 & \widehat{K}_i' & 0 \\ -X^{\perp}(\Sigma\otimes I_n) & 0 & 0 & 0 & X^{\perp}(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_i' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{ii}X_i'X_i & 0 & X_i'X_i \\ \widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n) & \widehat{K}_i & \widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n)X^{\perp} & 0 & -\widehat{H}_i(\Sigma\otimes I_n)\widehat{H}_i' & K_i - H_iX_i \\ 0 & 0 & 0 & X_i'X_i & K_i' - X_i'H_i' & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
-r[X, \quad \Sigma\otimes I_n] - r(X_i)
$$

$$= i_{\mp}\begin{bmatrix} -(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n) & -X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -X' & 0 & 0 & 0 & \widehat{K}_i' - X'\widehat{H}_i' & 0 \\ 0 & 0 & X^{\perp}(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{ii}X_i'X_i & 0 & X_i'X_i \\ 0 & \widehat{K}_i - \widehat{H}_iX & 0 & 0 & 0 & K_i - H_iX_i \\ 0 & 0 & 0 & X_i'X_i & K_i' - X_i'H_i' & 0 \end{bmatrix}$$

$$-r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] - r(X_i)$$

$$= i_{\mp}\begin{bmatrix} -(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n) & -X & 0 & 0 & 0 \\ -X' & 0 & 0 & \widehat{K}_i' - X'\widehat{H}_i' & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ii}X_i'X_i & 0 & X_i'X_i \\ 0 & \widehat{K}_i - \widehat{H}_iX & 0 & 0 & K_i - H_iX_i \\ 0 & 0 & X_i'X_i & K_i' - X_i'H_i' & 0 \end{bmatrix} + i_{\mp}(X^{\perp}(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp})$$

$$-r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] - r(X_i)$$

$$= i_{\mp}\begin{bmatrix} -(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n) & -X & 0 & 0 \\ -X' & 0 & \widehat{K}_i' - X'\widehat{H}_i' & 0 \\ 0 & \widehat{K}_i - \widehat{H}_iX & 0 & K_i - H_iX_i \\ 0 & 0 & K_i' - X_i'H_i' & -\sigma_{ii}^{-1}X_i'X_i \end{bmatrix} + i_{\mp}(\sigma_{ii}X_i'X_i)$$

$$+ i_{\mp}(X^{\perp}(\Sigma\otimes \mathrm{I}_n)X^{\perp}) - r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] - r(X_i)$$

$$= i_{\pm}\begin{bmatrix} \Sigma\otimes \mathrm{I}_n & X & 0 & 0 \\ X' & 0 & \widehat{K}_i' - X'\widehat{H}_i' & 0 \\ 0 & \widehat{K}_i - \widehat{H}_iX & 0 & K_i - H_iX_i \\ 0 & 0 & K_i' - X_i'H_i' & \sigma_{ii}^{-1}X_i'X_i \end{bmatrix} + i_{\mp}(\sigma_{ii}X_i'X_i)$$

$$+ i_{\mp}\begin{bmatrix} \Sigma\otimes \mathrm{I}_n & X \\ X' & 0 \end{bmatrix} - r(X) - r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] - r(X_i) \tag{6.7}$$

elde edilir. Teorem 2.8.4 ve 2.8.5 kullanılarak

$$\begin{aligned} i_{\mp}(\sigma_{ii}X_i'X_i) &= r(X_i) - i_{\pm}(\mathrm{I}_n) + i_{\pm}(X_i^{\perp}\mathrm{I}_nX_i^{\perp}) \\ &= r(X_i) - i_{\pm}(\mathrm{I}_n) + i_{\pm}\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & X_i \\ X_i' & 0 \end{bmatrix} - r(X_i) \\ &= i_{\pm}\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & X_i \\ X_i' & 0 \end{bmatrix} - i_{\pm}(\mathrm{I}_n) \end{aligned} \tag{6.8}$$

olarak elde edilir. (2.16) ve (2.17)' den

$$i_+\begin{bmatrix}\Sigma\otimes \mathrm{I}_n & X\\ X' & 0\end{bmatrix} = r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n]$$

ile

$$i_-\begin{bmatrix}\Sigma\otimes \mathrm{I}_n & X\\ X' & 0\end{bmatrix} = r(X)$$

ve

$$i_+\begin{bmatrix}\mathrm{I}_n & X_i\\ X_i' & 0\end{bmatrix} = r[\mathrm{I}_n, \quad X_i]$$

ile

$$i_-\begin{bmatrix}\mathrm{I}_n & X_i\\ X_i' & 0\end{bmatrix} = r(X_i)$$

olarak yazılır. Sonuç olarak;

$$i_+\left(D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] - D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right]\right)$$

$$= i_+(A) - i_+(\mathrm{I}_n) + r[\mathrm{I}_n, \quad X_i] + r(X) - r(X) - r(X_i) - r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n]$$

$$= i_+(A) - r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] - r(X_i)$$

ve

$$i_-\left(D[\phi_i - BLUP_S(\phi_i)] - D\left[\phi_i - OLSP_{S_i}(\phi_i)\right]\right)$$

$$= i_-(A) - i_-(\mathrm{I}_n) + r(X_i) + r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] - r(X) - r(X_i) - r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n]$$

$$= i_-(A) - r(X)$$

olduğundan (6.1) ve (6.2) eşitlikleri sağlanır. (2.2)' ye göre (6.1) ve (6.2) toplandığında (6.3) eşitliği görülür. Son olarak (6.1)-(6.3) ifadelerine Teorem 2.8.3 uygulandığında (a)-(e) ifadeleri elde edilir. ■

ϕ_i vektörünün $H_i = 0$ özel durumu ele alınırsa Teorem 6.1.1 vasıtasıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.1.2. $K_i\beta_i$, S_i modeli altında tahmin edilebilir, $i = 1, \dots, m$ ve

$$A = \begin{bmatrix}\Sigma\otimes \mathrm{I}_n & X & 0 & 0\\ X' & 0 & \widehat{K}_i' & 0\\ 0 & \widehat{K}_i & 0 & K_i\\ 0 & 0 & K_i' & \sigma_{ii}{}^{-1}X_i'X_i\end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$i_+\big(D[BLUE_S(K_i\beta_i)] - D\big[OLSE_{S_i}(K_i\beta_i)\big]\big) = i_+(A) - r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] - r(X_i),$$

$$i_-\big(D[BLUE_S(K_i\beta_i)] - D\big[OLSE_{S_i}(K_i\beta_i)\big]\big) = i_-(A) - r(X),$$

$$r\big(D[BLUE_S(K_i\beta_i)] - D\big[OLSE_{S_i}(K_i\beta_i)\big]\big) = r(A) - r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] - r(X_i) - r(X)$$

dır ve aşağıdakiler sağlanır.

a) $D\big[OLSE_{S_i}(K_i\beta_i)\big] \succ D[BLUE_S(K_i\beta_i)] \Leftrightarrow i_-(A) = r(X) + k.$

b) $D\big[OLSE_{S_i}(K_i\beta_i)\big] \prec D[BLUE_S(K_i\beta_i)] \Leftrightarrow i_+(A) = r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] + r(X_i) + k.$

c) $D\big[OLSE_{S_i}(K_i\beta_i)\big] \succcurlyeq D[BLUE_S(K_i\beta_i)] \Leftrightarrow i_+(A) = r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] + r(X_i).$

d) $D\big[OLSE_{S_i}(K_i\beta_i)\big] \preccurlyeq D[BLUE_S(K_i\beta_i)] \Leftrightarrow i_-(A) = r(X).$

e) $D\big[OLSE_{S_i}(K_i\beta_i)\big] = D[BLUE_S(K_i\beta_i)] \Leftrightarrow r(A) = r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] + r(X_i) + r(X).$

Sonuç 6.1.3. S_i modeli altında $X_i\beta_i$ vektörü tahmin edilebilir ve ε_i vektörü ön tahmin edilebilir olsun, $i = 1, \dots, m$.

$$A = \begin{bmatrix} \Sigma\otimes \mathrm{I}_n & X \\ X' & \sigma_{ii}{}^{-1}\hat{X}_i{}'\hat{X}_i \end{bmatrix}$$

olmak üzere, burada $\hat{X}_i = [0, \dots, X_i, \dots, 0]$,

$$i_+\big(D[BLUE_S(X_i\beta_i)] - D\big[OLSE_{S_i}(X_i\beta_i)\big]\big)$$

$$= i_+\big(D[\varepsilon_i - BLUP_S(\varepsilon_i)] - D\big[\varepsilon_i - OLSP_{S_i}(\varepsilon_i)\big]\big) = i_+(A) - r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n],$$

$$i_-\big(D[BLUE_S(X_i\beta_i)] - D\big[OLSE_{S_i}(X_i\beta_i)\big]\big)$$

$$= i_-\big(D[\varepsilon_i - BLUP_S(\varepsilon_i)] - D\big[\varepsilon_i - OLSP_{S_i}(\varepsilon_i)\big]\big) = i_-(A) + r(X_i) - r(X),$$

$$r\big(D[BLUE_S(X_i\beta_i)] - D\big[OLSE_{S_i}(X_i\beta_i)\big]\big)$$

$$= r\big(D[\varepsilon_i - BLUP_S(\varepsilon_i)] - D\big[\varepsilon_i - OLSP_{S_i}(\varepsilon_i)\big]\big)$$

$$= r(A) - r[X, \quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] + r(X_i) - r(X),$$

dır ve aşağıdakiler sağlanır.

a) $D\big[OLSE_{S_i}(X_i\beta_i)\big] \succ D[BLUE_S(X_i\beta_i)]$

$\Leftrightarrow D\big[\varepsilon_i - OLSP_{S_i}(\varepsilon_i)\big] \succ D[\varepsilon_i - BLUP_S(\varepsilon_i)] \Leftrightarrow i_-(A) = r(X) - r(X_i) + k.$

b) $D\left[OLSE_{S_i}(X_i\beta_i)\right] \prec D[BLUE_S(X_i\beta_i)]$

$\Leftrightarrow\ D\left[\varepsilon_i - OLSP_{S_i}(\varepsilon_i)\right] \prec D[\varepsilon_i - BLUP_S(\varepsilon_i)] \Leftrightarrow i_+(A) = r[X,\quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] + k.$

c) $D\left[OLSE_{S_i}(X_i\beta_i)\right] \succcurlyeq D[BLUE_S(X_i\beta_i)]$

$\Leftrightarrow\ D\left[\varepsilon_i - OLSP_{S_i}(\varepsilon_i)\right] \succcurlyeq D[\varepsilon_i - BLUP_S(\varepsilon_i)] \Leftrightarrow i_+(A) = r[X,\quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n].$

d) $D\left[OLSE_{S_i}(X_i\beta_i)\right] \preccurlyeq D[BLUE_S(X_i\beta_i)]$

$\Leftrightarrow\ D\left[\varepsilon_i - OLSP_{S_i}(\varepsilon_i)\right] \preccurlyeq D[\varepsilon_i - BLUP_S(\varepsilon_i)] \Leftrightarrow i_-(A) = r(X) - r(X_i).$

e) $D\left[OLSE_{S_i}(X_i\beta_i)\right] = D[BLUE_S(X_i\beta_i)]$

$\Leftrightarrow D\left[\varepsilon_i - OLSP_{S_i}(\varepsilon_i)\right] = D[\varepsilon_i - BLUP_S(\varepsilon_i)]$

$$\Leftrightarrow r(A) = r[X,\quad \Sigma\otimes \mathrm{I}_n] - r(X_i) + r(X).$$

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında

$$S_i: y_i = X_i\beta_i + \varepsilon_i$$

SUR modelleri ve bu modellerin blok matrisler aracılığıyla birleştirilmesiyle elde edilen

$$S: y = X\beta + \varepsilon$$

modeli ele alınmıştır. S_i modeli birbirleriyle ilişkisiz denklemlerden oluşmaktadır. Burada kullanılan "ilişkisiz" ifadesiyle denklemde yer alan herhangi bir parametrenin başka bir denklemde bulunmadığı yani denklemlerin ortak değişken içermedikleri kastedilmektedir. Fakat bu durum hata terimlerinin ilişkisiz olduğu anlamına gelmediği gibi görünürde ilişkisiz olan denklemlerin oluşturduğu SUR modeller sisteminde, hata terimlerinin birbirleriyle ilişkili olabildikleri bilinmektedir. Dolayısıyla bu sistemlerde denklemlerin ayrı ayrı ele alınması yerine birlikte ele alınarak incelenmeleri konusunda literatürde görüş birliği mevcuttur. SUR modeller üzerine yapılan araştırmalar, SUR modellerin parametrelerin verimli tahmin edilebilirliği, hata terimleri arasındaki kovaryans yapısını doğru şekilde tespit etme ve tahminlerin daha hassas ve güvenilir olmasını sağlama gibi avantajlar sunduğunu göstermektedir.

Bu kapsamda çalışmamızda S_i ve S modellerinde eşzamanlı sonuçlar elde etmek amacıyla bilinmeyen parametrelerin tahmini problemi incelenmiştir. Bu modeller yapısal olarak birbirlerine benzeseler bile içerdikleri farklılıklar nedeniyle ortak bilinmeyenlerin ön tahmin ve tahmin edicileri gösterim, performans ve sahip oldukları özellikler açısından farklılık gösterir. Dolayısıyla S_i ve S modelleri altında ortak bilinmeyenler için

$$\phi = K\beta + H\varepsilon$$

ve

$$\phi_i = K_i\beta_i + H_i\varepsilon_i$$

vektörleri ele alınabilir. Bu vektörlerin ele alınan modeller altında ön tahmin ve tahmin edicilerinin özelliklerinin incelenmesi, modellerin benzerlikleri veya farklılıklarına ilişkin yorum yapmak açısından önemlidir. Farklı tahmin edicilerin karşılaştırılması ve en doğru tahmin edicinin belirlenmesi, modelin performansını artırmak ve verilerin en doğru şekilde yorumlanmasına yönelik araştırılmaktadır.

Bu tez çalışmasında, SUR modeller altında ön tahmin ve tahmin problemi incelenmiştir. Ele alınan modellerde bilinmeyenlerin ön tahmin ve tahmin edicilerinin istatistiksel özelliklerine ilişkin sonuçlar verilmiştir. Blok matrisler ve rank özellikleri kullanılarak ön tahmin edicilerin eşitlikleri ve toplamsal ayrışımları üzerine bazı sonuçlar elde edilmiştir. Matris rankı ve inertia formülleri vasıtasıyla ön tahmin edicilerin kovaryans matrislerinin karşılaştırılmasına ilişkin elde edilen eşitlik ve eşitsizlikler ile bazı özel durumlara ilişkin sonuçlar verilmiştir.

Çalışmanın bulguları, yeni araştırmalar için basamak oluşturabilecek ve istatistiksel analizlerin daha etkin bir şekilde yapılmasını sağlamaya yönelik bir kaynak sunmaktadır.

Elde edilen sonuçlar, araştırmacılara ve uygulayıcılara SUR modellerinin etkinliği hakkında faydalı bilgiler sunmaktadır. SUR modellerinde ön tahmin ve tahmin edicilerle ilgili yapılan bu çalışmanın, konunun anlaşılmasına ve uygulanmasına katkıda bulunduğu düşünülmektedir. Çalışmanın sınırlamaları da göz önünde bulundurularak, SUR modellerin belirli uygulama alanları üzerindeki etkilerinin daha ayrıntılı bir şekilde incelenebileceği değerlendirilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Uysal, M. (1997). *Görünüşte İlişkisiz Regresyon Denklemleri Modeli ve Tarımsal Üretim Üzerine Bir Uygulama* [Doktora tezi]. Hacettepe Üniversitesi.

[2] Zellner, A. (1962). An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias. *J. Am. Stat. Assoc.*, 57, 348-368.

[3] Zellner, A., ve Huang, D. S. (1962). Further properties of efficient estimators for seemingly unrelated regression equations. *Int. Econ. Rev.*, 3, 300-313.

[4] Zellner, A. (1963). Estimators for seemingly unrelated regression equations: some exact finite sample results. *J. Am. Stat. Assoc.*, 58, 977-992.

[5] Kakwani, N. C. (1967). The unbiasedness of Zellner's seemingly unrelated regression equations estimators. *Journal of the American Statistical Association*, 62 (317), 141-142.

[6] Kmenta, J., ve Gilbert, F. (1968). Small sample properties of alternative estimators of seemingly unrelated regressions. *Journal of the American Statistical Association*, 63 (324), 1180-1200.

[7] Rao, P. (1974). Specification bias in Seemingly Unrelated Regressions. *Sellekaerts, W. (eds) Econometrics and Economic Theory* (ss.101-113). Palgrave Macmillan. London.

[8] Revankar, N. S. (1974). Some finite sample results in the context of two seemingly unrelated regression equations. *Journal of the American Statistical Association*, 69 (345), 187-190.

[9] Dwivedi, T. D., ve Srivastava, V. K. (1978). Optimality of least squares in the seemingly unrelated regression equation model. *J. Econ.*, 7, 391-395.

[10] Baksalary, J. K., ve Kala, R. (1979). On the prediction problem in the seemingly unrelated regression equations model. *Statistics*, 10, 203-208.

[11] Srivastava, V. K., ve Dwivedi, T. D. (1979). Estimation of seemingly unrelated regression equations: A brief survey. *Journal of Econometrics*, 10, 15-32.

[12] Baltagi, B. H. (1980). On seemingly unrelated regressions with error components. *Econometrica*, 48, 1547-1551.

[13] Kmenta, J. (1986). *Elements of Econometrics*. Macmillan Publishing. New York.

[14] Srivastava, V. K., ve Giles, D. E. A. (1987). *Seemingly Unrelated Regression Equations Model*. Marcel Dekker. New York.

[15] Baltagi, B. H. (1988). The efficiency of OLS in a seemingly unrelated regressions model. *Econ Theory*, 4, 536-537.

[16] Baksalary, J. K., ve Trenkler, G. (1989). The efficiency of OLS in a seemingly unrelated regressions model. *Econ. Theory*, 5, 463-465.

[17] Bartels, R., ve Fiebig, D. G. (1991). A simple characterization of seemingly unrelated regressions models in which OLS is BLUE. *Am. Stat*, 45, 137-140.

[18] Lin, C. (1991). The efficiency of least squares estimators of a seemingly unrelated regression model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 20 (4), 919-925.

[19] Park, T. (1993). Equivalence of maximum likelihood estimation and iterative two-stage estimation for seemingly unrelated regression models. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 22(8), 2285-2296.

[20] Liu, J. (2000). MSEM dominance of estimators in two seemingly unrelated regressions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 88, 255-266.

[21] Liu, A. (2002). Efficient estimation of two seemingly unrelated regression equations. *Journal of Multivariate Analysis*, 82, 445-456.

[22] Foschi, P., ve Kontoghiorghes, E.J. (2002). Seemingly unrelated regression model with unequal size observations: computational aspects. *Comput. Stat. Data Anal.*, 41, 211-229.

[23] Sezer, D. (2006). *Görünüşte ilişkisiz regresyon modelleri ve bir uygulama* [Yüksek lisans tezi]. Selçuk Üniversitesi.

[24] Erdugan, F. (2012). *Görünüşte İlişkisiz Regresyon Modellerinde Parametre Tahmin Yöntemleri [Doktora tezi].* Çukurova Üniversitesi.

[25] Sun, Y., Ke, R., & Tian, Y. (2014). Some overall properties of seemingly unrelated regression models. *Adv. Stat. Anal.*, 98 (2), 103-120.

[26] Gong, L. (2019). Establishing equalities of OLSEs and BLUEs under seemingly unrelated regression Models. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 13 (5). https://doi.org/10.1007/s42519-018-0015-6

[27] Hou, J., ve Zhao, Y. (2019). Some remarks on a pair of seemingly unrelated regression models. *Open Math.*, 17, 979-989.

[28] Jiang, H., Qian, J., & Sun, Y. (2020). Best linear unbiased predictors and estimators under a pair of constrained seemingly unrelated regression models. *Statistics and Probability Letters*, 158, 108669.

[29] Tian, T., ve Xie, P. (2020), Simultaneous optimal predictions under two seemingly unrelated linear random-effects models. *J. Ind. Manag. Optim.*, doi:10.3934/jimo.2020168

[30] Agcakale, F. (2018). *Kırmızı Et Talep Tahmini: Erzurum İli Üzerine Bir Uygulama* [Yüksek lisans tezi]. Erzurum Teknik Üniversitesi.

[31] Ediz, Y. (2019). *Türkiye Kiraz İhracatının Pazar Gücü* [Yüksek lisans tezi]. Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi.

[32] Yüce, N. (2020). *Görünürde İlişkisiz Regresyon Modellerinde Ön Tahmin Edicilerin Kovaryans Matrisleri İçin Bazı Eşitlikler* [Yüksek lisans tezi]. Sakarya Üniversitesi.

[33] Hammada, A. (2020). *Süt ve Süt Ürünleri Talebinin AIDS Modeli ile Tahmin Edilmesi: TRA1 Bölgesi Örneği* [Doktora tezi]. Atatürk Üniversitesi.

[34] Kılıçtek, B. (2020). *Görünürde İlişkisiz Regresyon Modeli ile Alkol ve Tütün Kullanım Süresini Etkileyen Faktörlerin Belirlenmesi* [Yüksek lisans tezi]. Atatürk Üniversitesi.

[35] Ağcadağ, D. (2021). *Türkiye'de Sanayi Sektörü İçin Hammadde İthalatını Belirleyen Faktörlerin Analizi: 2008-2020* [Doktora tezi]. Süleyman Demirel Üniversitesi.

[36] Tunçel, S. (2022). *Çok Yanıtlı Deneysel Verilerin Görünüşte ilişkisiz Regresyon Analizi ile Modellenmesi ve Optimal Değişken Değerlerinin Belirlenmesi* [Yüksek lisans tezi]. Ankara Üniversitesi.

[37] Uzun, N. (2022). *Ekonomik Göstergelerin Alternatif Kanal Kullanımı ve Risk Algısı Çerçevesinde Dijital Bankacılık Müşterilerinin Yatırım Tercihleri Üzerindeki Etkileri* [Yüksek lisans tezi]. Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi.

[38] Keskin, A. (2023). *Türkiye'de Sosyal Harcamalar ve Yoksulluk İlişkisi* [Doktora tezi]. İstanbul Üniversitesi.

[39] Goldberger, A. S. (1962). Best linear unbiased prediction in the generalized linear regression model. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 57, 369-375.

[40] Drygas, H. (1975). Estimation and prediction for linear models in general spaces. *Math. Operationsforsch. Statist.*, 6 (2), 301-324.

[41] Henderson, C. R. (1975). Best linear unbiased estimation and prediction under a selection model. *Bio-metrics*, 31, 423-447.

[42] Rao, C. R. (1975). Simultaneous estimation of parameters in different linear models and applications to biometric problems. *Biometrics,* 31, 545-554.

[43] Harville, D. A. (1976). Extension of the Gauss-Markov theorem to include the estimation of random effects. *The Annals of Statistics*, 4, 384-395.

[44] Searle, S. R. (1997). The matrix handling of BLUE and BLUP in the mixed linear model. *Linear Algebra and its Applications*, 264, 291-311.

[45] Liu, Y., ve Xia, C. (2013). Fundamental equations of BLUE and BLUP in the multivariate linear model with applications. *Commun Stat: Theory and Methods*, 42, 398-412.

[46] Arendacká, B., ve Puntanen, S. (2015). Further remarks on the connection between fixed linear model and mixed linear model. *Stat. Papers*, 56 (4), 1235-1247.

[47] Tian, Y. (2015a). A new derivation of BLUPs under random-effects model. *Metrika*, 78, 905-918.

[48] Tian, Y. (2015b). A matrix handling of predictions under a general linear random-effects model with new observations. *Electron. J. Linear Algebra*, 29, 30-45.

[49] Tian, Y. (2017a). Some equalities and inequalities for covariance matrices of estimators under linear model. *Stat. Papers*, 58, 467-484.

[50] Tian, Y. (2017b). Matrix rank and inertia formulas in the analysis of general linear models. *Open Math.*, 15(1), 126-150.

[51] Tian Y., ve Jiang, B. (2016). An algebraic study of BLUPs under two linear random-effects models with correlated covariance matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 64 (12), 2351-2367.

[52] Tian, Y., ve Guo, W. (2016). On comparison of dispersion matrices of estimators under a constrained linear model. *Stat. Methods Appl.*, 25, 623-649.

[53] Güler, N., ve Büyükkaya, M. E. (2019a). Notes on comparison of covariance matrices of BLUPs under linear random-effects model with its two subsample models. *Iranian J. Sci. Tech. Transactions A*, 43 (6), 2993-3002.

[54] Güler, N., ve Büyükkaya, M. E. (2019b). Rank and inertia formulas for covariance matrices of BLUPs in general linear mixed models. *Commun. Statist. Theory and Methods*, 50 (21). https://doi.org/10.1080/03610926.2019.1599950

[55] Magnus, J. R., ve Neudecker, H. (1988). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. John Wiley. G. Britain.

[56] Venit, S., ve Bishop, W. (1985). *Elementary linear algebra*. PWS publishers. Massachusetts.

[57] Sengupta, D., ve Jammalamadaka, S.R. (2003). *Linear models an integrated approach*. World Scientific. Singapore.

[58] Seber, G. A. F. (2008). *A matrix handbook for statisticians*. John Wiley & Sons, Inc. New Jersey.

[59] Harville, D. A. (1997). *Matrix algebra from a statiscians perspective*. Springer.

[60] Tian, Y. (2010a). Equalities and inequalities for inertias of Hermitian matrices with applications. *Linear Algebra Appl.*, 433, 263-296.

[61] Graybill, F. A. (1969). *Introduction to matrices with applications in statistics*. Wadworth Publising Company inc. California.

[62] Bhatia, R. (2007). *Positive definite matrices*. Princeton series in applied mathematics. Princeton University Press. Priceton. NJ.

[63] Seber, G. A. F. (1977). *Linear regression analysis*. John Wiley, New York.

[64] Taşçı, D. (2011). *Lineer Cebir*, 4. Baskı, Gazi Üniversitesi. Ankara.

[65] Penrose, R. (1955). A generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 51, 406-413.

[66] Puntanen, S., Styan, G.P.H., & Isotalo, J. (2011). *Matrix tricks for linear statistical models*. Our Personal Top Twenty. Springer. Heidelberg.

[67] Marsaglia, G., ve Styan, G.P.H. (1974). Equalities and inequalities for ranks of matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 2, 269-292.

[68] Tian, Y. (2010b). Estimations of parametric functions under a system of linear regression equations with correlated errors. *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, 26 (10), 1927-1942.

[69] Rao, C. R. (1973). Representations of best linear unbiased estimators in the Gauss- Markoff model with a singular dispersion matrix. *J. Multivariate Anal.*, 3, 276-292.

[70] Tian, Y. (2017c). Transformation approaches of linear random-effects models. *Stat. Methods Appl.*, 26 (4), 583-608.

[71] Alalouf, I. S., ve Styan, G. P. H. (1979). Characterizations of estimability in the general linear model. *Ann Stat.*, 7, 194-200.

[72] Tian, Y. (2012). Solving optimization problems on ranks and inertias of some constrained nonlinear matrix functions via an algebraic linearization method. *Nonlinear Anal.*, 75 (2), 717-734.

[73] Jiang, B., ve Tian, Y. (2017). On additive decompositions of estimators under a multivariate general linear model and its two submodels. *J Multivariate Anal.*, 162, 193-214.

[74] Zhang, X., ve Tian, Y. (2016). On decompositions of BLUEs under a partitioned linear model with restrictions, *Statist. Papers*, 57, 345-364.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Melike YİĞİT

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** **:** 2011, Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yükseklisans** **:** 2014, Sakarya Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik

MESLEKİ DENEYİMLER:

- 2013 yılından itibaren İçişleri Bakanlığı bünyesinde görev yapmaktadır.

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Güler, N., Eriş Büyükkaya, M., ve Yiğit, M. 2022. Comparison of Covariance Matrices of Predictors in Seemingly Unrelated Regression Models, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 53, 801-809.