

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELİPTİK KUATERNİYON MATRİSLERİNİN TEKİL DEĞER
AYRIŞIMI VE ONLARIN GÖRÜNTÜ İŞLEMEDEKİ
UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Beyza ÇELİK

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

HAZİRAN 2023

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELİPTİK KUATERNİYON MATRİSLERİNİN TEKİL DEĞER
AYRIŞIMI VE ONLARIN GÖRÜNTÜ İŞLEMEDEKİ
UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Beyza ÇELİK

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Hidayet Hüda KÖSAL

Haziran 2023

Beyza ÇELİK tarafından hazırlanan “ELİPTİK KUATERNİYON MATRİSLERİNİN TEKİL DEĞER AYRIŞIMI VE ONLARIN GÖRÜNTÜ İŞLEMEDEKİ UYGULAMALARI” adlı tez çalışması 12.06.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı : **Doç. Dr. Murat SARDUVAN**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Doç .Dr. Hidayet Hüda KÖSAL (Danışman)**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Dr. Öğr. Üyesi. Kahraman Esen ÖZEN**
Çankırı Karatekin Üniversitesi

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “ELİPTİK KUATERNİYON MATRİSLERİNİN TEKİL DEĞER AYRIŞIMI VE ONLARIN GÖRÜNTÜ İŞLEMEDEKİ UYGULAMALARI” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

14.07.2023

Beyza ÇELİK

TEŞEKKÜR

Bu alıŐma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından "1002 Hızlı Destek Programı" kapsamında "Eliptik Kuaterniyon Matris Teorisinin GeliŐtirilmesi ve Uygulamaları" başlıklı ve 121F289 no.lu proje ile desteklenmiŐtir. Öncelikle TÜBİTAK'a sağladığı destekler için teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araŐtırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teŐvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. Hidayet Hda KSAL'a teŐekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca bana verdikleri manevi destek, göstermiŐ oldukları sabır ve anlayıŐtan dolayı aileme ve arkadaŐlarıma teşekkür ederim.

Beyza ÇELİK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
SİMGELER	xiii
TABLO LİSTESİ	xv
ŞEKİL LİSTESİ	xvii
ÖZET	xix
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Kapsamı.....	2
1.2. Tezin Amacı	2
1.3. Literatür Araştırması	3
2. TEMEL KAVRAMLAR	7
2.1. Eliptik Kompleks Sayılar ve Onların Matrisleri.....	7
2.2. Eliptik Kuaterniyonlar ve Onların Matrisleri	12
2.3. Renkli Görüntüler ve Renkli Görüntü İşleme	19
3. ELİPTİK MATRİSLER İÇİN ÖZDEĞER-ÖZVEKTÖR, TEKİL DEĞER AYRIŞIMI, PSEUDO TERS VE EN KÜÇÜK KARELER PROBLEMİ	27
3.1. Eliptik Katsayılı ve Eliptik Değerli Polinomların Sıfır Kökleri.....	27
3.2. Eliptik Kompleks Matrislerin Özdeğerleri ve Özvektörleri	30
3.3. Eliptik Kompleks Matrislerin Tekil Değer Ayrışımı ve Sonuçları	33
3.4. Pseudo Kodlar	35
4. ELİPTİK KUATERNİYON MATRİSLER İÇİN ÖZDEĞER-ÖZVEKTÖR, TEKİL DEĞER AYRIŞIMI, PSEUDO TERS VE EN KÜÇÜK KARELER PROBLEMİ	39
4.1. Eliptik Kuaterniyon Katsayılı ve Değerli Polinomların Sıfır Kökleri.....	39
4.2. Eliptik Kuaterniyon Matrislerin Özdeğerleri ve Özvektörleri	41
4.3. Pseudo Kodlar	49
5. ELİPTİK TEKİL DEĞER AYRIŞIMI YARDIMIYLA RENKLİ GÖRÜNTÜ SIKIŞTIRMA	53
5.1. Renkli Görüntülerin Öz Görüntüleri	54
5.2. Eliptik Tekil Ayrışımı ile Renkli Görüntü Sıkıştırma	57
5.3. ESVD ile Lineer Ağırlıklı Görüntü İyileştirme.....	66
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	67
KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	73

KISALTMALAR

CMYK	: Camgöbeği, galibarda, sarı, siyah renk uzayı
ELSI	: Bozulma modeli (Elliptic Linear Shift Invariant)
EQLSM	: Eliptik kuaterniyonik en küçük kareler iyileştirme filtresi
HSI	: Renk tonu, doygunluk, yeğlilik renk uzayı
LSI	: Bozulma modeli (Linear Shift Invariant)
PSF	: Nokta yayılma fonksiyonu (Point Spread Function)
RGB	: Kırmızı, yeşil, mavi renk uzayı

SİMGELER

\overline{A}	: A matrisinin eşleniği
A^T	: A matrisinin transpozu
A^*	: A matrisinin eşlenik transpozu
A^-	: A matrisinin genelleştirilmiş tersi
A^\dagger	: A matrisinin pseudo tersi
A^{-1}	: A matrisinin tersi
\mathbb{C}	: Kompleks sayıların cümlesi
\mathbb{C}_p	: Eliptik sayıların cümlesi
$\mathbb{C}_p^{m \times n}$: $m \times n$ tipinde eliptik matrislerin cümlesi
\mathbb{H}_p	: Eliptik kuarterniyonların cümlesi
$\mathbb{H}_p^{m \times n}$: $m \times n$ tipinde eliptik kuarterniyon matrislerinin cümlesi
\mathbb{K}	: Reel kuarterniyonların cümlesi
\mathbb{R}	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^{m \times n}$: $m \times n$ tipinde reel matrislerin cümlesi

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 5.1 Test görüntüleri üzerinde ayrılabilir metod, QSVD, RBSVD ve ESVD (Önerilen) yöntemlerinin sıkıştırma sonuçları (PSNR).	62
Tablo 5.2 Test görüntüleri üzerinde ayrılabilir metod, QSVD, RBSVD ve ESVD (Önerilen) yöntemlerinin sıkıştırma sonuçları (MSE).	63

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	Normalleştirilmiş RGB renk uzayı.....	20
Şekil 2.2	RGB renk uzayında ifade edilmiş görüntünün R, G ve B bileşenleri.....	21
Şekil 2.3	Yapay renklendirilmiş görüntüler.....	21
Şekil 2.4	RGB uzayında elde edilmiş yapay renkli görüntüler.....	22
Şekil 3.1	$p = -0.5, -1, -5$ eliptik kompleks değerli polinomuna karşılık gelen cebirsel eğriler.	29
Şekil 5.1	Renkli görüntünün eliptik kuaterniyon matris gösterimi. Diğer yandan eliptik tekil değer ayrışımı (ESVD) ile renkli bir görüntü	53
Şekil 5.2	Tüm deneysel test görüntüleri (a) Airplane, (b) Baboon, (c) Baby, (d) Barbara, (e) Bird (f) Boast (g) Cameraman (h) Goldhill (i) Monarch ve (j) Peppers.	54
Şekil 5.3	Test görüntülerinin seçilmiş özgörüntüleri.....	55
Şekil 5.4	Test görüntülerinin seçilmiş özgörüntüleri.....	56
Şekil 5.5	ESVD ile görüntü sıkıştırma adımları.	57
Şekil 5.6	Test görüntülerinin singüler değerlerinin değişimi: (a) Airplane, (b) Baboon, (c) Baby, (d) Barbara, (e) Bird, (f) Boast.....	58
Şekil 5.7	Optimal p değerleri: (a) Airplane, (b) Baboon, (c) Baby, (d) Barbara, (e) Bird, (f) Boast (g) Cameraman ve (h) Goldhill.....	60
Şekil 5.8	Optimal p değerleri: (a) Monarch ve (b) Peppers.....	61
Şekil 5.9	Test görüntülerinin seçilmiş kısmi toplamları (Ayrılabilir metod: a-e, QSVD: f-j, RBSVD: k-o ve ESVD: p-t).	64

ELİPTİK KUATERNİYON MATRİSLERİNİN TEKİL DEĞER AYRIŞIMI VE ONLARIN GÖRÜNTÜ İŞLEMEDEKİ UYGULAMALARI

ÖZET

Dijital ortamlardaki görüntüler m satır, n sütuna sahip sayısal matrislerle ifade edilirler. Görüntü sıkıştırma, iyileştirme, ayrıştırma gibi görüntü işleme teknikleri görüntüyü ifade eden bu matrislere uygulanır. Görüntü işleme süreçlerinde renkli görüntüleri temsil için kullanılan geleneksel renkli görüntü seyrek matris modelleri üç ayrı renk kanalı (Red, Green ve Blue kanalları) arasındaki ilişkiyi göz ardı eder. Dolayısıyla birçok görüntü işleme süreçlerinde renkli bir görüntünün kanalları tek tek işlenmekte veya görüntü gri tonlamalı hale dönüştürülmektedir. Bu durum görüntü işleyen cihazların hem bellek yükünü hem de işlemci yükünü artırmakta ve performans değerlerini düşürmektedir.

Bu tez kapsamında yukarıda bahsedilen problemin üstesinden gelmek amacıyla renkli görüntülerin bağımsız renk kanallarını bir bütün olarak ele alabilen, eliptik kuaterniyon matris teorisini kullanan yeni bir renkli görüntü seyrek matris modeli önerilerek elde edilen teoriler yardımıyla eliptik kuaterniyon tabanlı renkli görüntü sıkıştırma, iyileştirme ve ayrıştırma gibi metotlar elde edilmiştir. Oluşturulan bu tez 6 bölümden oluşmaktadır ve planı aşağıdaki gibidir:

Tezin birinci bölümünde tezdeki problemin tanıtıldığı giriş bölümüne yer verilmiştir. Bu bölümde tezin kapsamı ve amacından bahsedilip literatürde konuyla ilgili yer alan çalışmalar hakkında gerekli bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde çalışmamız boyunca kullanacağımız eliptik kompleks sayılar ve onların matrislerinin, eliptik kuaterniyonlar ve onların matrislerinin temel cebirsel özellikleri verilmiştir. Daha sonra ise renkli görüntüler ve renkli görüntü işleme konularının temel kavram ve uygulamalarına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde çalışmanın orjinal teorik kısmı yer almaktadır. Bu bölümde öncelikle eliptik sayı katsayılı ve değerli N' inci dereceden monik polinomların köklerine, eliptik kompleks matrislerin özdeğer-özvektörlerine ve tekil değer ayrışımı kavramlarına dair tanımlar verilerek ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Eliptik kompleks matrislerin tekil değer ayrışımının bir sonucu olarak eliptik kompleks matrislerin pseudo tersleri ve en küçük kareler çözümü elde edilmiştir. Son olarak elde edilen veriler ışığında çeşitli algoritmalar geliştirilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde eliptik kompleks matrisler için elde edilen tüm tanım ve teoremler, kurulan yapı koruyan dönüşümler yardımıyla elemanları eliptik kuaterniyon olan matrislere genelleştirilmiştir. Ayrıca çalışmanın ilerleyen kısımlarında elde edilmiş olan teoremler ışığında eliptik kompleks ve eliptik kuaterniyon matrislerin özdeğer-özvektör, tekil değer ayrışımı, en küçük kareler metodu, pseudo tersleri vb. cebirsel özelliklerinin elde edilmesine dair algoritmalar verilmiştir.

Beşinci bölüm projenin uygulamaya dair olan kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde öncelikle renkli görüntülerin eliptik kuaterniyon temsilleri verilmiştir. Daha sonra eliptik kuaterniyon matrisler için geliştirdiğimiz tekil değer ayrışımı yardımı ile renkli görüntülerin yeniden yapılandırması ve sıkıştırılması yöntemi ele alınmıştır. Bu amaçla geliştirdiğimiz sıkıştırma yöntemini kullanarak yeniden yapılandırılan renkli görüntülerin görsel kalitesi literatürde mevcut olan diğer hiperkompleks tabanlı sıkıştırma algoritmaları ile karşılaştırılarak elde ettiğimiz metodun performans değerlendirmesi yapılmıştır.

Son bölümde çalışmada elde edilmiş olan sonuçlara ve önerilere yer verilerek tez tamamlanmıştır.

SINGULAR VALUE DECOMPOSITION OF ELLIPTIC QUATERNION MATRICES AND THEIR APPLICATIONS IN IMAGE PROCESSING

SUMMARY

Images in digital media are represented by numeric matrices with m rows and n columns. Image processing techniques such as image compression, enhancement, and decomposition are applied to these matrices that express the image. Traditional color image sparse matrix models used to represent color images in image processing processes ignore the relationship between the three distinct color channels (the red, green, and blue channels). Therefore, in many image processing processes, the channels of a color image are processed one by one or the image is converted to grayscale. This situation increases both the memory load and the processor load of the image processing devices and decreases their performance values.

In this thesis, in order to overcome the aforementioned problem, a new color image sparse matrix model using elliptic quaternion matrix theory is proposed that can handle the independent color channels of color images as a whole, and elliptic quaternion-based color image compression, enhancement, and decomposition methods are obtained with the help of the obtained theories. The thesis consists of six chapters, and the plan is as follows:

In the first part of the thesis, the problem to be discussed in the thesis is introduced. In this section, the scope and purpose of the thesis are stated in detail, and the topics covered by the study and the purposes for which it was prepared are explained. In addition, information is given about the studies in the literature on the subject. In this way, the innovations and contributions that the thesis brought to the current subject were also emphasized.

In the second part, the mathematical tools that we will use in our study—elliptic complex numbers, elliptic quaternions, and the basic algebraic properties of the matrices of these objects—are discussed in detail. Definitions and important features of these concepts are presented with the necessary details for understanding the subject. Elliptic quaternions, which are the focus of our study, are of great importance because of their properties related to mathematical transformations. Similar properties of these properties are also valid for elliptic complex numbers, and therefore, explaining the link between elliptic quaternions and elliptic complex numbers plays a critical role in our study. In this context, in our study, structure-preserving transformations from elliptic quaternions to elliptic complex numbers and their properties are explained in detail. In addition, the basic concepts and applications of color spaces, color images, and color image processing, which have an important place in the processing of color images, are also discussed. Color spaces are a mathematical concept used to describe colors in image processing, and different color spaces allow colors to be represented in different ways. In the processing of color images, different color channels (for example, RGB or YUV) in color spaces can be handled separately. In this section, basic techniques such as filtering, segmentation, and segmentation used in color image processing techniques are also mentioned.

The third part of the study is the main part, where the original theoretical part of the study is included. In this section, the main research questions and hypotheses of the study are examined in detail to develop the theoretical framework. The original contribution and creative ideas of the work are presented in this section and are therefore critical to the originality and scientific value of the work. The theoretical part presented in this section provides a basis for the rest of the study and explains the methods used to arrive at the main conclusions and recommendations of the research. In this section, firstly, the roots of Nth-order monic polynomials with elliptic coefficients and valued elliptic numbers are obtained with the help of structure-preserving transformations from elliptic complex numbers to complex numbers. Then, by giving definitions about the eigenvalue-eigenvectors and singular value decomposition concepts of these elliptic complex matrices, the related theorems are stated and proved. As a result of singular value decomposition of elliptic complex matrices, pseudo-inverses of elliptic complex matrices and the least squares solution of the elliptic complex matrix equation are obtained. In the light of the obtained data, algorithms that find eigenvalue-eigenvectors, singular value decompositions, pseudo-inverses, and least squares solutions of elliptic complex matrices have been developed, and various problems have been solved with the help of these algorithms.

In the fourth part of the study, the roots of valued Nth-order monic polynomials with elliptic quaternion coefficients are obtained with the help of structure-preserving transformations from the elliptic quaternions sentence to the elliptic complex numbers set. After this theory, eigenvalue-eigenvector, singular value decomposition of elliptic quaternion matrices, least squares method, pseudo-inverses, etc. Definitions, theorems, and algorithms for algebraic properties have been obtained. In addition, examples are given to support our results.

The fifth section is the main section that includes the implementation part of the project. In this section, previously developed theoretical frameworks and methods are applied to solve real-world problems. This section details how the theoretical framework can be used for real-world applications, using examples and scenarios. In the chapter, different implementation scenarios are presented depending on the purpose and objectives of the project, and the methods used to realize these scenarios are explained in detail. This chapter shows how project work can offer solutions to real-world problems and explains the practical value of project work. Elliptic quaternions have one real and three imaginary parts. Each pixel of a color image expressed in RGB (red-green-blue) space contains three basic color components, namely red, green, and blue. Based on this information, each pixel of a color image is expressed as a pure imaginary (zero real component) elliptical quaternion. According to this representation, the red, green, and blue components of each pixel of the color images correspond to the components of the pure imaginary elliptic quaternions. Therefore, it is expressed as an elliptical quaternion matrix in the form of a color image with pixel resolution. Then, the method of reconstruction and compression of color images with the help of singular value decomposition that we developed for elliptic quaternion matrices is discussed. For this purpose, the visual quality, time, and memory complexity of the reconstructed color images using the compression method we developed were compared with those of other hypercomplex-based compression algorithms available in the literature, and a performance evaluation of the method we obtained was made.

In the last chapter, the theoretical concepts presented in the previous chapters and the results of their applications are interpreted in detail. The results were obtained using

the algorithms and methods described in the previous sections, and various problems were solved in line with them. In addition, based on the results obtained from the study, recommendations were presented, and it was emphasized that the study could be a potential resource for future research.

1. GİRİŞ

Elleptik kuaterniyonlar $a_{(E)} = a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k$ biçiminde 4-boyutlu değişmeli hiperkompleks sayılardır. Burada $a_{(E),r}, a_{(E),i}, a_{(E),j}, a_{(E),k} \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = k^2 = p < 0, p \in \mathbb{R}, j^2 = 1$ ve $i, j, k \notin \mathbb{R}$ dir (Catoni ve ark, 2005). Elleptik kuaterniyonlar, reel sayılar ($a_{(E),i} = 0, a_{(E),j} = 0$ ve $a_{(E),k} = 0$ için), kompleks sayılar ($a_{(E),j} = 0, a_{(E),k} = 0$ ve $p = -1$ için), elleptik kompleks sayılar ($a_{(E),j} = 0, a_{(E),k} = 0$ ve $p < 0, p \in \mathbb{R}$ için) ve komütatif kuaterniyonlar ($p = -1$ için) cebiri de dahil olmak üzere değişmeli bir, iki ve dört boyutlu birçok hiperkompleks sayı sistemlerinin genelleştirilmiş formudur. Diğer bir deyişle bu sayı sistemleri elleptik kuaterniyonların özel hallerine karşılık gelir. Ayrıca elleptik kuaterniyonlar cebirinin çarpmaya göre değişme özelliği ve elleptik kuaterniyonlar cümlesinden elleptik sayılar cümlesine giden birçok yapı koruyan dönüşümleri mevcut olması aynı zamanda $e_1^n = e_1^{n-1} = \dots = e_1^2 = e_1, e_2^n = e_2^{n-1} = \dots = e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) şartlarını sağlayan her ikisi de ayrıık idempotent e_1 ve e_2 sayılarının lineer bileşimi şeklinde yazılabilmelerinden dolayı elleptik kuaterniyonlar cebirinin çarpma, bölme, kuvvet alma, kök hesaplama, vb. gibi birçok cebirsel özelliğinin algoritmik karmaşıklıkđı diğer değişmeli olmayan dört boyutlu hiperkompleks sayılara göre büyük ölçüde düşüktür. Ayrıca yapısında bulundurduğu uzaylar arasında ideal uzayın seçilip (problemin çözümlüne uygun p değerinin seçilmesi) o uzayda işlem yapılması ve birçok fiziksel sistemin elleptik davranış göstermesi, bu sayı sistemini uygulamalı bilimlerde daha avantajlı bir hale getirmektedir.

Diğer yandan literatürde matris teorisinin temel konularından olan özdeğer-özvektör, tekil değer ayrışımı, pseudo ters ve en küçük kareler problemi;

- insan yüzlerini modelleme Arun ve ark. (1997),
- gen analizi Kim ve ark. (2005),
- veri analizi Yang ve Chute (1992),

- yapay sinir ağları Xia ve ark. (2017),
- makine öğrenmesi Biegler-Konig ve Barmann (1993),
- veri şifreleme ve çözme Hassibi ve Vikalo (2005),
- veri boyutu azaltma ve sıkıştırma Pei ve ark. (2003),
- görüntü ve sinyal işleme (-iyileştirme) Pei ve ark. (2008),
- robotik Deo ve Walker (1995),
- teorik ve uygulamalı matematik (Golub ve Pereyra 2003; Xia ve ark., 2017)

gibi birçok kritik alanda önemli uygulamalara sahiptir. Türkiye'nin bu alanlardaki gelişimi için, temel bilimler ile uygulamalı bilimler arasındaki boşluğu dolduran çalışmalara ve disiplinler arası çalışabilecek bilgi birikimine sahip insan gücüne ihtiyacı vardır. Bu ihtiyaç, milli ve yerli teknoloji hamlemizin de başarıyla gerçekleşmesinde etkin rol oynamaktadır.

Bu çalışmada eliptik kuaterniyon matrislerinin özdeğer-özvektör, tekil değer ayrışımı, pseudo tersi ve en küçük kareler problemine ait tanım ve teoremler elde edilerek eliptik kuaterniyon cebirinin yukarıdaki alanlarda kullanımına uygun zemin hazırlanmıştır. Bu temel amaç doğrultusunda ikinci bölümde ilgili literatür bilgisi verildikten sonra üçüncü bölümde projenin hedeflediği ana konulardaki temel araştırmalar ve kavramlar detaylandırılmıştır.

1.1. Tezin Kapsamı

Günümüzde aktif çalışma konularından birini teşkil eden özdeğer-özvektör ve tekil değer ayrışımı süreçlerine elemanları eliptik kuaterniyon olan matrislerin dâhil edilmesi ile var olan teorik altyapıya katkıda bulunulması hedeflenmektedir. Elde edilecek veriler bu süreçlerin temelinde yatan teorik bilgilerin daha ayrıntılı yorumlanabilmesini böylelikle yeni sonuç ve kavramların elde edilmesini sağlayacaktır.

1.2. Tezin Amacı

Eliptik kuaterniyon matrislerin özdeğer-özvektör, tekil değer ayrışımı, en küçük kareler çözümü ve pseudo tersi gibi kavramlarını matematik literatürüne kazandırmak

ayrıca bu kavramları kullanan uygulamalı bilimlere ve güncel teknolojik problemlerin çözümüne eliptik kuaterniyon matrislerini adapte etmektir.

1.3. Literatür Araştırması

Reel kuaterniyonlar 1843 yılında Hamilton tarafından tanımlanmıştır, (Hamilton, 1853). Hamilton'un amacı kompleks sayıları daha yüksek boyutlara genişletmektir. Reel kuaterniyonlar cümlesi

$$\mathbb{K} = \{a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

biçiminde ifade edilir. Burada birimlerinin çarpımı

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

biçiminde tanımlanmıştır. Bu çarpım kuralından reel kuaterniyonlarda çarpma işleminin değişme özelliği olmadığı görülmektedir. Reel kuaterniyonlar cümlesi, tanımlanan toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile birlikte kompleks sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu, reel sayılar cümlesi üzerinde ise 4-boyutlu vektör uzayıdır.

Elemanları reel kuaterniyon olan matrisler ilk olarak Wolf ve Lee tarafından çalışılmıştır (Wolf 1936; Lee 1949). Wolf çalışmasında elemanları reel kuaterniyon olan iki matrisin benzer olabilmeleri için gerekli ve yeterli şartı elde etmiştir. Lee ise reel kuaterniyon matrislerin özdeğerlerini ve kanonik formlarını ele almıştır. Wolf çalışmasında $n \times n$ tipindeki reel kuaterniyon matrisleri ile $2n \times 2n$ tipindeki kompleks matrisleri arasında bir izomorfizma (yapı koruyan dönüşüm) geliştirerek bu tür matrisler için bir temel bölen teoremi geliştirmiştir. Lee ise çalışmasında farklı bir izomorfizma kullanarak reel kuaterniyon matris cebirinde daha ileri sonuçlar elde etmiştir (bir reel kuaterniyon matrisinin üniter benzerlik dönüşümü altında üçgen forma dönüştürülmesi gibi). Brenner her kare reel kuaterniyon matrisin bir karakteristik köke sahip olduğunu ve benzer matrislerin aynı karakteristik köke sahip olduklarını ispatlamıştır. Ayrıca Shur'un lemmasının (her karesel matris üniter matrisler ile üçgensel forma dönüştürülebilir) reel kuaterniyon matrisler için de geçerli olduğunu göstermiştir (Brenner, 1951). Seredio vd. reel kuaterniyon değerli n inci dereceden monik polinomların köklerini bu polinoma karşılık gelen reel kuaterniyon değerli kompaniyon matrislerin özdeğer kavramı yardımıyla hesaplamıştır (Serodio ve ark., 2001). Pei ve ark. reel kuaterniyon matrislerinin tekil değer ayrışımını reel kuaterniyon değerli matris uzayından kompleks matris uzayına giden yapı koruyan

dönüşümler yardımı ile elde etmişlerdir. Dahası elde ettikleri bu teoriyi görüntü işleme süreçlerine dâhil ederek renkli görüntülerin yeniden inşası, sıkıştırılması, iyileştirilmesi süreçlerinde kullanılmak üzere kullanışlı algoritmalar geliştirmişlerdir (Pei ve ark, 2003). Yuan ve ark. reel kuaterniyon matrislerinin kompleks temsilleri ve pseudo tersleri yardımı ile $AX = B$ reel kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümünü reel kuaterniyon matrisleri, pür reel kuaterniyon matrisleri ve reel matrisler cümlesinde elde etmiştir. Ayrıca bu teori yardımı ile renkli görüntü iyileştirme algoritmaları elde etmişlerdir (Yuan ve ark, 2013). Ma and Bai kuaterniyon matrislerinin tekil değer ayrışmasını hesaplamak için yapı koruyan tek taraflı döngüsel Jacobi yöntemi elde etmişlerdir (Ma ve Bai 2020). Sang ve ark. kuaterniyonik tekil değer ayrıştırmasını kullanarak görüntü parazit bilgisini ayıran ve gürültü bilgisinden özellikler çıkaran bir görüntü kalitesi değerlendirme metriği önermişlerdir (Sang ve ark, 2020). Bununla birlikte literatürde kuaterniyon ve kuaterniyon matrislerinin görüntü işleme süreçlerine dair daha birçok uygulaması mevcuttur (Jia ve ark., 2017; Jia ve ark., 2019; Xu ve ark., 2015).

Hamilton'un keşfinden sonra C. Segre tarafından 1892 yılında komütatif kuaterniyonlar cümlesi tanımlanmıştır (Segre, 1892). Komütatif kuaterniyonlar tıpkı reel kuaterniyonlar gibi kompleks sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu ve reel sayılar cümlesi üzerinde 4-boyutlu vektör uzayıdır. Komütatif kuaterniyonlar, reel kuaterniyonlardan farklı olarak çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahiptir. Bunun yanı sıra komütatif kuaterniyonlar cümlesi sıfır bölen elemana sahiptir. Komütatif kuaterniyonların genelleştirilmiş hali eliptik kuaterniyonlardır (Catoni ve ark, 2005b). Eliptik kuaterniyonlar, eliptik sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu ve reel sayılar cümlesi üzerinde 4-boyutlu vektör uzayıdır (Catoni ve ark, 2008). Bunun yanı sıra eliptik kuaterniyonlar kümesinde tanımlı çarpma, bölme, kuvvet alma, kök hesaplama vb. birçok cebirsel işlemin algoritmik karmaşıklığı diğer değişmeli olmayan dört boyutlu hiperkompleks sayılara göre büyük ölçüde düşüktür. Bu durum bu sistemi diğer değişmeli olmayan dört boyutlu hiperkompleks sayılara göre daha avantajlı bir hale getirmektedir (Kosal, 2016).

Komütatif kuaterniyonlar ve eliptik kuaterniyonlarda hareket geometrisi, diferensiyel geometri, sayısal görüntü işleme, sinyal işleme, bilgisayar programlama gibi birçok alanda uygulamalara sahiptirler. Pei ve ark. komütatif kuaterniyonları ve onların Fourier dönüşümlerini kullanarak görüntü ve sinyal işleme süreçlerinin birçok

uygulamalarını gerçekleştirmişlerdir (Catoni ve ark., 2005; Pei ve ark., 2004). Komütatif kuaterniyonların ve eliptik kuaterniyonların holomorfik fonksiyonları, kutupsal gösterimleri ve konformal dönüşümleri konularını çalışıp bu konularla ilgili sonuçlar elde etmişlerdir (Catoni ve ark, 2005b). Pei ve ark. indirgenmiş bi-kuaterniyon matrislerinin (komütatif kuaterniyon matrislerinin) özdeğer-özvektörlerinin ve tekil değer ayrışımının hesaplanması üzerine algoritmalar geliştirmişlerdir. Dahası indirgenmiş bi-kuaterniyon değerli polinomların köklerini polinomun kompaniyon matrislerinin özdeğerleri yardımıyla hesaplamıştır. Bunun yanı sıra buldukları algoritmalar ile reel kuaterniyon cebirinde geliştirilen algoritmaların zaman ve bellek açısından algoritmik karmaşıklıklarını karşılaştırarak indirgenmiş bi-kuaterniyon uzayında geliştirilen algoritmaların daha verimli olduklarını göstermişlerdir (Pei ve ark, 2008). Isokawa ve ark. komütatif kuaterniyonları baz alarak çoklu hopfield sinir ağlarını çalışmışlardır (Isokawa ve ark, 2010). Kosal ve Tosun komütatif kuaterniyon matrislerinin temel cebirsel özelliklerini komütatif kuaterniyonlara karşılık gelen temel matrisler yardımıyla incelemişlerdir (Kosal ve Tosun, 2014). Kosal ve ark. komütatif kuaterniyon değerli matrisler üzerinde eşlenik benzerlik bağıntısını tanımlayarak komütatif kuaterniyon değerli matrislerin eşlenik özdeğer ve eşlenik özvektör kavramlarını tanımlamışlardır (Kosal ve ark, 2015). Kosal ve Tosun bir başka çalışmalarında komütatif kuaterniyonlar ve onların matrisleri üzerinde evrensel benzerlik eşitliğini elde ederek her iki uzayda da temel denklemlerin çözümlerini elde etmişlerdir (Kosal ve Tosun, 2014). Kosal komütatif kuaterniyon matris uzayında $AX = B$ denklemin en küçük kareler çözümünü elde ederek bu teoremin renkli görüntü iyileştirmedeki uygulamalarını çalışmıştır (Kosal, 2019). Bao ve Gai komütatif kuaterniyon tabanlı tekil değer ayrışımı ile sözlük öğrenme algoritması geliştirmişlerdir. Önerilen modeli sağlam ve izlenebilir kılmak ve minimizasyon problemini çözmek için komütatif kuaterniyon tabanlı Bregman iterasyonu geliştirmişlerdir (Bao ve Gai, 2019).

Görüldüğü gibi dört boyutlu hiperkompleks sayıların matris uzayı, günümüz uygulamalı bilimlerin ve güncel teknolojilerin birçok probleminin çözümünde kolaylık sağlamaktadır. Burada sayı sistemlerinin kendine has özellikleri, o uzayda geliştirilen algoritmaların verimliliğini önemli ölçüde etkilemektedir. Reel kuaterniyon cebirinin çarpma işlemine göre değişme özelliğinin olmaması ve kompleks sayılar ile reel sayılar cümlesine giden yapı koruyan dönüşümlerinin

karmaşık olması, bu uzayda geliştirilen algoritmaların zaman ve bellek karmaşalarının yüksek olmasına sebep olmaktadır. Komütatif kuaterniyonların ve eliptik kuaterniyonların algoritmik karmaşıklıkları ise reel kuaterniyonlara göre daha düşüktür. Dolayısıyla bu uzayda geliştirilen algoritmaların zaman ve bellek karmaşalarının reel kuaterniyonlara göre daha az olduğu gözlenmiştir (Pei ve ark, 2008).

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Eliptik Kompleks Sayılar ve Onların Matrisleri

Kompleks sayılar ilk kez İtalyan matematikçiler G. Cardan ve R. Bombelli tarafından cebirsel işlemlerde kullanılmıştır (Harkin ve Harkin, 2004). Tarihte çeşitli matematikçiler i kompleks birimi modifiye etmişlerdir. İngiliz geometrici W. Clifford $i^2 = 1 (i \neq \pm 1)$ olarak hiperbolik sayıları tanımlamıştır (Clifford, 1968). W. Clifford'un geliştirdiği bu sayı sistemi mekanik problemlerinde birçok kolaylık sağlamıştır. Alman geometrici E. Study $i^2 = 0 (i \neq 0)$ olarak dual sayıları tanımlamıştır. Dual sayılar da kinematik, robotik kontrol, uzaysal mekanik gibi birçok alanda uygulamalara sahiptir (Study, 1903).

Daha sonraki yıllarda bu üç sayı sistemi $i^2 = p$ ve $p \in \mathbb{R}$ olacak biçimde geliştirilmiştir (Harkin ve Harkin, 2004). $i^2 = p$ birimi ile tanımlanan sayı sistemine geliştirilmiş kompleks sayı sistemi adı verilmiştir. Burada p değeri $(-\infty, \infty)$ aralığındadır. $p < 0$ için elde edilen sayı sistemine eliptik sayılar sistemi (özel olarak $p = -1$ alındığında kompleks sayılar elde edilir), $p = 0$ alındığında parabolik veya dual sayılar sistemi ve son olarak $p > 0$ alındığında hiperbolik sayılar sistemi elde edilir (Harkin ve Harkin, 2004).

Bu bölümde eliptik sayıların ve onların matrislerinin bazı cebirsel özellikleri incelenecektir.

Eliptik sayıların cümlesi

$$\mathbb{C}_p = \left\{ a_{(e)} = a_{(e),r} + ia_{(e),i} : a_{(e),r}, a_{(e),i} \in \mathbb{R}, i^2 = p < 0 \right\}$$

biçiminde ifade edilir. $a_{(e)} = a_{(e),r} + ia_{(e),i} \in \mathbb{C}_p$ için $\text{Re}(a_{(e)}) = a_{(e),r}$ ifadesine $a_{(e)}$ eliptik sayısının reel kısmı, $\text{Im}(a_{(e)}) = a_{(e),i}$ ifadesine ise $a_{(e)}$ eliptik sayının sanal kısmı denir (Harkin ve Harkin, 2004). Bir $a_{(e)} = a_{(e),r} + ia_{(e),i}$ eliptik sayısının eşleniği ve normu sırasıyla

$$\overline{a_{(e)}} = a_{(e),r} - ia_{(e),i} \text{ ve } \|a_{(e)}\| = \sqrt{a_{(e)}\overline{a_{(e)}}} = \sqrt{a_{(e),r}^2 - pa_{(e),i}^2}$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Harkin ve Harkin, 2004).

$a_{(e)1} = a_{(e),r_1} + ia_{(e),i_1}$, $a_{(e)2} = a_{(e),r_2} + ia_{(e),i_2} \in \mathbb{C}_p$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) olmak üzere \mathbb{C}_p cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri sırasıyla

$$a_{(e)1} + a_{(e)2} = a_{(e),r_1} + a_{(e),r_2} + i(a_{(e),i_1} + a_{(e),i_2}),$$

$$a_{(e)1} a_{(e)2} = (a_{(e),r_1} a_{(e),r_2} + pa_{(e),i_1} a_{(e),i_2}) + i(a_{(e),r_1} a_{(e),i_2} + a_{(e),r_2} a_{(e),i_1}),$$

$$\lambda a_{(e)1} = \lambda(a_{(e),r_1} + ia_{(e),i_1}) = \lambda a_{(e),r_1} + i\lambda a_{(e),i_1}$$

eşitlikleri ile hesaplanır (Harkin ve Harkin, 2004).

Teorem 2.1 \mathbb{C}_p cümlesi toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile birlikte \mathbb{R} cismi üstünde 2-boyutlu bir vektör uzayıdır (Harkin ve Harkin, 2004).

Eliptik kompleks sayılar cümlesinden \mathbb{R}^2 ye de birebir bir eşleme yapılabileceğinden her bir $a_{(e)1} = (a_{(e),r_1}, a_{(e),i_1})$ eliptik kompleks sayısı düzlemde tek bir nokta ile ifade edilebilir. Tersine düzlemdeki her bir nokta da bir tek eliptik kompleks sayı ile ifade edilebilir. Bu şekilde eşleme yapılmış düzleme eliptik düzlem adı verilir.

Eliptik düzlemde $a_{(e)1} = (a_{(e),r_1}, a_{(e),i_1})$ ve $a_{(e)2} = (a_{(e),r_2}, a_{(e),i_2})$ eliptik sayıları arasındaki uzaklık

$$\|a_{(e)1} - a_{(e)2}\| = \sqrt{(a_{(e),r_1} - a_{(e),r_2})^2 - p(a_{(e),i_1} - a_{(e),i_2})^2}$$

biçiminde tanımlanır. Bu düzlemde başlangıç noktasına 1 birim uzaklıkta olan eliptik sayıların cümlesi bir elipstir ve $\|a_{(e)}\| = \sqrt{a_{(e),r}^2 - pa_{(e),i}^2} = 1$ denklemi ile verilir (Harkin ve Harkin, 2004).

Teorem 2.2 Eliptik kompleks sayılar kümesi kompleks sayılar kümesine izomorftur. Bu iki cümle arasındaki izomorfizma

$$\eta_p : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}$$

$$a_{(e)} = a_{(e),r} + ia_{(e),i} \rightarrow \eta_p(a_{(e)}) = a_{(e),r} + I\sqrt{|p|}a_{(e),i}$$

biçimindedir. Burada I kompleks birimi ($I^2 = -1$) ifade etmektedir (Harkin ve Harkin, 2004).

Tanım 2.3 Her $a_{(e_1)} = a_{(e),r} + ia_{(e),i}$ eliptik kompleks sayısı

$$\alpha_p(a_{(e)}) = \begin{pmatrix} a_{(e),r} & pa_{(e),i} \\ a_{(e),i} & a_{(e),r} \end{pmatrix}$$

şeklinde 2×2 tipinde bir reel matris ile ifade edilebilir. Bu matrise $a_{(e)}$ eliptik kompleks sayısının temel matrisi denir (Harkin ve Harkin 2004; Kosal ve Tosun, 2019).

Teorem 2.4 $a_{(e_1)} = a_{(e),r_1} + ia_{(e),i_1}$ ve $a_{(e_2)} = a_{(e),r_2} + ia_{(e),i_2} \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere temel matrisler ile ilgili aşağıdaki özellikleri doğrudur (Harkin ve Harkin 2004; Kosal ve Tosun, 2019):

1. $\alpha_p(a_{(e_1)} a_{(e_2)}) = \alpha_p(a_{(e_1)}) \alpha_p(a_{(e_2)})$,
2. $\alpha_p(\alpha_p(a_{(e_1)}) a_{(e_2)}) = \alpha_p(a_{(e_1)}) \alpha_p(a_{(e_2)})$,
3. $a_{(e_1)} = a_{(e_2)} \Leftrightarrow \alpha_p(a_{(e_1)}) = \alpha_p(a_{(e_2)})$,
4. $\alpha_p(a_{(e_1)} + a_{(e_2)}) = \alpha_p(a_{(e_1)}) + \alpha_p(a_{(e_2)})$,
5. $\alpha_p(\lambda a_{(e_1)}) = \lambda \alpha_p(a_{(e_1)})$,
6. $iz(\alpha_p(a_{(e_1)})) = a_{(e_1)} + \overline{a_{(e_1)}}$,
7. $\|a_{(e_1)}\|^2 = \det(\alpha_p(a_{(e_1)}))$.

Elemanları eliptik sayılar olan $m \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi $\mathbb{C}_p^{m \times n}$ ile gösterilir.

Bu cümlede $A_{(e)} = A_{(e),r} + iA_{(e),i}, B_{(E)} = B_{(e),r} + iB_{(e),i} \in \mathbb{C}_p^{m \times n}, C_{(e)} = C_{(e),r} + iC_{(e),i} \in \mathbb{C}_p^{n \times l}$ için toplama, skalarla çarpma ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$A_{(e)} + B_{(E)} = A_{(e),r} + B_{(e),r} + i(A_{(e),i} + B_{(e),i}) \in \mathbb{C}_p^{m \times n},$$

$$\lambda A_{(e)} = \lambda A_{(e),r} + i\lambda A_{(e),i} \in \mathbb{C}_p^{m \times n},$$

ve

$$A_{(e)}C_{(e)} = (A_{(e),r}C_{(e),r} + pA_{(e),i}C_{(e),i}) + i(A_{(e),r}C_{(e),i} + A_{(e),i}C_{(e),r}) \in \mathbb{C}_p^{m \times l}$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Teorem 2.5 $A_{(e)}$ ve $B_{(e)}$ uygun boyutlara sahip iki eliptik matris olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur Kosal ve Tosun (2019):

1. $(A_{(e)}^{-1})^{-1} = A_{(e)},$
2. $(A_{(e)}B_{(e)})^{-1} = B_{(e)}^{-1}A_{(e)}^{-1},$
3. $(A_{(e)}^k)^{-1} = (A_{(e)}^{-1})^k, k \in Z^+,$
4. $(A_{(e)}^T)^T = A_{(e)},$
5. $(A_{(e)}^k)^T = (A_{(e)}^T)^k, k \in Z^+,$
6. $\overline{(A_{(e)})} = A_{(e)}, (A_{(e)}^*)^* = A_{(e)},$
7. $\overline{(A_{(e)} + B_{(e)})} = \overline{A_{(e)}} + \overline{B_{(e)}}, (A_{(e)} + B_{(e)})^* = A_{(e)}^* + B_{(e)}^*,$
8. $\overline{(A_{(e)}B_{(e)})} = \overline{A_{(e)}}\overline{B_{(e)}}, (A_{(e)}B_{(e)})^* = B_{(e)}^*A_{(e)}^*.$
9. $\overline{(\overline{A_{(e)}})} = A_{(e)}, (\overline{A_{(e)}^*})^* = A_{(e)},$

$$10. \quad \overline{(A_{(e)} + B_{(e)})} = \bar{A}_{(e)} + \bar{B}_{(e)}, (A_{(e)} + B_{(e)})^* = A_{(e)}^* + B_{(e)}^*,$$

$$11. \quad \overline{(\lambda A_{(e)})} = \bar{\lambda} \bar{A}_{(e)}, (\lambda A_{(e)})^* = \bar{\lambda} A_{(e)}^*,$$

$$12. \quad \overline{(A_{(e)} B_{(e)})} = \bar{A}_{(e)} \bar{B}_{(e)}, (A_{(e)} B_{(e)})^* = B_{(e)}^* A_{(e)}^*,$$

$$13. \quad (\bar{A}_{(e)})^T = \overline{(A_{(e)}^T)}.$$

Teorem 2.6 $m \times n$ tipindeki eliptik kompleks matrisler cümlesi $m \times n$ tipindeki kompleks matrisler kümesine izomorftur. Bu iki cümle arasındaki izomorfizma

$$\eta_p : \mathbb{C}_p^{m \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$A_{(e)} = A_{(e),r} + iA_{(e),i} \rightarrow \eta_p(A_{(e)}) = A_{(e),r} + I\sqrt{|p|}A_{(e),i}$$

biçimindedir. Burada I kompleks birimi ($I^2 = -1$) ifade etmektedir.

Tanım 2.7 $A_{(e)} = A_{(e),r} + iA_{(e),i} \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ ve $A_{(e),r}, A_{(e),i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ olsun.

$$\begin{pmatrix} A_{(e),r} & pA_{(e),i} \\ A_{(e),i} & A_{(e),r} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times 2n} \quad (2.1)$$

matrisine $A_{(e)}$ matrisinin temel matrisi denir ve $\alpha_p(A_{(e)})$ ile gösterilir (Kosal, 2016; Kosal ve Tosun, 2014).

Teorem 2.8 $A_{(e)} = (a_{ij}), B_{(e)} = (b_{ij}) \in \mathbb{C}_p^{m \times n}, C_{(e)} = (c_{jk}) \in \mathbb{C}_p^{n \times l}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere aşağıdaki özellikler doğrudur Kosal ve Tosun (2019):

1. $\alpha_p(I_n) = I_{2n},$
2. $\alpha_p(A_{(e)} + B_{(e)}) = \alpha_p(A_{(e)}) + \alpha_p(B_{(e)}),$
3. $\alpha_p(A_{(e)} C_{(e)}) = \alpha_p(A_{(e)}) \alpha_p(C_{(e)}),$
4. $\alpha_p(\lambda A_{(e)}) = \lambda \alpha_p(A_{(e)}),$

5. $m = n$ ve $A_{(e)}$ regüler ise $\alpha_p(A_{(e)})$ da regülerdir ve

$$\left(\alpha_p(A_{(e)})\right)^{-1} = \alpha_p(A_{(e)}^{-1}) \text{ dir,}$$

6. $(A_{(e)})$ nın genelleştirilmiş tersi $(A_{(e)}^-)$ olsun. Bu durumda

$$\left(\alpha_p(A_{(e)})\right)^- = \alpha_p(A_{(e)}^-) \text{ dir,}$$

7. $A_{(e)} = B_{(e)} \Leftrightarrow \alpha_p(A_{(e)}) = \alpha_p(B_{(e)})$,

8. $A_{(e)} = A_{(e),r} + iA_{(e),i} \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ için $A_{(e)} = \frac{1}{2}(I_m \ iI_m)\alpha_p(A_{(e)})\begin{pmatrix} I_n \\ i \\ p \\ I_n \end{pmatrix}$ dir.

Teorem 2.9 $A_{(e)}, B_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ olmak üzere $A_{(e)}B_{(e)} = I_n$ ise $B_{(e)}A_{(e)} = I_n$ dir. (Kosal, 2016).

Tanım 2.10 $\lambda \in \mathbb{C}_p, A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ ve $x \in \mathbb{C}_p^{n \times 1}$ olmak üzere

$$A_{(e)}x_{(e)} = \lambda_{(e)}x_{(e)}$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir $x_{(e)}$ vektörü varsa $\lambda_{(e)}$ sayısına $A_{(e)}$ matrisinin özdeğeri ve $x_{(e)}$ vektörüne de $\lambda_{(e)}$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir. $A_{(e)}$ matrisinin tüm özdeğerlerinin cümlesi

$$\sigma_p(A_{(e)}) = \left\{ \lambda_{(e)} \in \mathbb{C}_p : A_{(e)}x_{(e)} = \lambda_{(e)}x_{(e)}, \exists x_{(e)} \neq 0 \right\} \quad (2.2)$$

biçiminde gösterilir (Kosal, 2016).

2.2. Eliptik Kuaterniyonlar ve Onların Matrisleri

Eliptik kompleks sayıların ve komütatif kuaterniyonların genelleştirilmiş formu olan eliptik kuaterniyonlar eliptik sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu, reel sayılar cümlesi üzerinde 4-boyutlu vektör uzayıdır (Kosal, 2016).

Eliptik kuaterniyonların cümlesi

$$\mathbb{H}_p = \left\{ a_{(E)} = a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k : a_{(E),r}, a_{(E),i}, a_{(E),j}, a_{(E),k} \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.3)$$

biçiminde ifade edilir. Burada i, j, k kuaterniyonik birimleri arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur:

$$i^2 = k^2 = p, j^2 = 1, ij = ji = k, jk = kj = i, ki = ik = pj, p < 0 \text{ ve } p \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Çarpım kurallarından \mathbb{H}_p cümlesinin çarpma işlemine göre değişmeli olduğu görülmektedir (Catoni ve ark, 2005b).

Bir eliptik kuaterniyon aşağıdaki gibi üç farklı biçimde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} a_{(E)} &= a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k \\ &= \left(a_{(E),r} + a_{(E),i}i \right) + j \left(a_{(E),j} + a_{(E),k}i \right) \\ &= a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

burada

$$\begin{aligned} a_{(e),1} &= \left(a_{(E),r} + a_{(E),j} \right) + \left(a_{(E),i} + a_{(E),k} \right) i \in \mathbb{C}_p \\ a_{(e),2} &= \left(a_{(E),r} - a_{(E),j} \right) + \left(a_{(E),i} - a_{(E),k} \right) i \in \mathbb{C}_p \end{aligned}$$

ve

$$e_1 = \frac{1+j}{2}, \quad e_2 = \frac{1-j}{2}$$

dır. Buradan e_1 ve e_2 birimleri ayrık idempotenttir. Yani

$$e_1^n = e_1^{n-1} = \dots = e_1^2 = e_1, e_2^n = e_2^{n-1} = \dots = e_2^2 = e_2 \text{ ve } e_1e_2 = 0$$

eşitlikleri doğrudur.

$\lambda \in \mathbb{R}, a_{(E)}, b_{(E)} \in \mathbb{H}_p$ ve

$$\begin{aligned} a_{(E)} &= a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k = a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2, \\ b_{(E)} &= b_{(E),r} + b_{(E),i}i + b_{(E),j}j + b_{(E),k}k = b_{(e),1}e_1 + b_{(e),2}e_2 \end{aligned}$$

olmak üzere \mathbb{H}_p cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} a_{(E)} + b_{(E)} &= (a_{(E),r} + b_{(E),r}) + (a_{(E),i} + b_{(E),i})i + (a_{(E),j} + b_{(E),j})j + (a_{(E),k} + b_{(E),k})k \\ &= (a_{(e),1} + b_{(e),1})e_1 + (a_{(e),2} + b_{(e),2})e_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{(E)}b_{(E)} &= (a_{(E),r}b_{(E),r} + pa_{(E),i}b_{(E),i} + a_{(E),j}b_{(E),j} + pa_{(E),k}b_{(E),k}) \\ &\quad + (a_{(E),r}b_{(E),i} + a_{(E),i}b_{(E),r} + a_{(E),j}b_{(E),k} + a_{(E),k}b_{(E),j})i \\ &\quad + (a_{(E),r}b_{(E),j} + pa_{(E),i}b_{(E),k} + a_{(E),j}b_{(E),r} + pa_{(E),k}b_{(E),i})j \\ &\quad + (a_{(E),r}b_{(E),k} + a_{(E),i}b_{(E),j} + a_{(E),j}b_{(E),i} + a_{(E),k}b_{(E),r})k \\ &= (a_{(e),1}b_{(e),1})e_1 + (a_{(e),2}b_{(e),2})e_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda a_{(E)} &= \lambda(a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k) = \lambda a_{(E),r} + \lambda a_{(E),i}i + \lambda a_{(E),j}j + \lambda a_{(E),k}k \\ &= \lambda(a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2) = \lambda a_{(e),1}e_1 + \lambda a_{(e),2}e_2. \end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Catoni ve ark, 2005b).

$a_{(E)} = a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k \in \mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonu için üç adet eşleniği mevcuttur. Bunlar

$$\overline{a_{(E)}^1} = a_{(E),r} - a_{(E),i}i + a_{(E),j}j - a_{(E),k}k,$$

$$\overline{a_{(E)}^2} = a_{(E),r} + a_{(E),i}i - a_{(E),j}j - a_{(E),k}k,$$

$$\overline{a_{(E)}^3} = a_{(E),r} - a_{(E),i}i - a_{(E),j}j + a_{(E),k}k$$

dır (Catoni ve ark, 2005b).

$a_{(E)} = a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k \in \mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonun normu ise

$$\|a_{(E)}\| = \sqrt{a_{(E),r}^2 - pa_{(E),i}^2 + a_{(E),j}^2 - pa_{(E),k}^2}$$

biçiminde tanımlanır (Pekyaman, 2021).

Teorem 2.11 $a_{(E)} = a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k \in \mathbb{H}_p$ için

$$\|a_{(E)}\| = \sqrt{\frac{1}{2}(\|a_{(e),1}\|^2 + \|a_{(e),2}\|^2)}$$

dır (Pekyaman, 2021).

$a_{(E)} = a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p$ için $\varphi_a(x) = ax$ biçiminde $\varphi_a : \mathbb{H}_p \rightarrow \mathbb{H}_p$ bir dönüşüm tanımlansın. Bu dönüşüm lineer izomorfizmadır. φ lineer izomorfizmasının $\{e_1, e_2\}$ tabanına karşılık gelen matrisi

$$\varphi_a(e_1) = (a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2)e_1 = a_{(e),1}e_1$$

$$\varphi_a(e_2) = (a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2)e_2 = a_{(e),2}e_2$$

olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_p(a_{(E)}) = \begin{pmatrix} a_{(e),1} & 0 \\ 0 & a_{(e),2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_p^{2 \times 2}. \quad (2.6)$$

Bu eliptik matrise $a_{(E)} \in \mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonun temel matrisi denir.

\mathbb{H}_p eliptik kuaterniyonlar cümlesi ile $\mathbb{C}_p^{2 \times 1}$ matris cümlesi arasında bir cebir izomorfizmi kurulabilir. Bu izomorfizma

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{H}_p &\rightarrow \mathbb{C}_p^{2 \times 1} \\ a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p &\rightarrow \tau(a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2) = \begin{pmatrix} a_{(e),1} \\ a_{(e),2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.7)$$

kuralıyla tanımlanabilir. Yani

$$a_{(E)} = a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2 \cong \begin{pmatrix} a_{(e),1} \\ a_{(e),2} \end{pmatrix}$$

yazılabilir.

Bu tanımlanan izomorfizma yardımı ile herhangi iki $a_{(E)} = a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2$, $b_{(E)} = b_{(e),1}e_1 + b_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonun çarpımı aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$a_{(E)}b_{(E)} = \begin{pmatrix} a_{(e),1} & 0 \\ 0 & a_{(e),2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{(e),1} \\ b_{(e),2} \end{pmatrix} = \varphi_p(a_{(E)})b_{(E)}.$$

Tanımlanan $\varphi_{(E)}$ fonksiyonunu için

$$\varphi_p \left(a_{(E)} b_{(E)} \right) = \varphi_p \left(a_{(E)} \right) \varphi_p \left(b_{(E)} \right)$$

$$\varphi_p \left(a_{(E)} + b_{(E)} \right) = \varphi_p \left(a_{(E)} \right) + \varphi_p \left(b_{(E)} \right)$$

eşitlikleri doğrudur. Dolayısıyla φ_p bir cebir izomorfizmdir. Ayrıca,

$$\varphi_p(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1 \quad \text{ve} \quad \varphi_p(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

olduğundan $n \in \mathbb{N}$ için

$$E_1^n = E_1^{n-1} = \dots = E_1^2 = E_1, \quad E_2^n = E_2^{n-1} = \dots = E_2^2 = E_2, \quad E_1 E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eşitlikleri mevcuttur. Dolayısıyla E_1, E_2 matrisleri ile e_1, e_2 birimleri birbirlerine izomorftur (Catoni ve ark, 2005b).

Teorem 2.12 $a_{(E)}, b_{(E)} \in \mathbb{H}_p$ olmak üzere lineer izomorfizminin aşağıdaki özellikleri mevcuttur Catoni ve ark. (2005b):

1. $\varphi_p \left(a_{(E)} b_{(E)} \right) = \varphi_p \left(a_{(E)} \right) \varphi_p \left(b_{(E)} \right),$
2. $\varphi_p \left(\varphi_p \left(a_{(E)} \right) b_{(E)} \right) = \varphi_p \left(a_{(E)} \right) \varphi_p \left(b_{(E)} \right),$
3. $a_{(E)} = b_{(E)} \Leftrightarrow \varphi_p \left(a_{(E)} \right) = \varphi_p \left(b_{(E)} \right),$
4. $\varphi_p \left(a_{(E)} + b_{(E)} \right) = \varphi_p \left(a_{(E)} \right) + \varphi_p \left(b_{(E)} \right),$
5. $\varphi_p \left(\lambda a_{(E)} \right) = \lambda \varphi_p \left(a_{(E)} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R},$
6. $iz \left(\varphi_p \left(a_{(E)} \right) \right) = a_{(e),1} + a_{(e),2},$
7. $\left\| a_{(E)} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \varphi_p \left(a_{(E)} \right) \right\|.$

Elemanları eliptik kuaterniyon olan $m \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi $\mathbb{H}_p^{m \times n}$ ile gösterilir. Bir $m \times n$ tipindeki eliptik kuaterniyon matrisi aşağıdaki gibi üç farklı biçimde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
A_{(E)} &= A_{(E),r} + A_{(E),i}i + A_{(E),j}j + A_{(E),k}k \\
&= \left(A_{(E),r} + A_{(E),i}i \right) + j \left(A_{(E),j} + A_{(E),k}i \right) \\
&= A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
A_{(e),1} &= \left(A_{(E),r} + A_{(E),j} \right) + \left(A_{(E),i} + A_{(E),k} \right) i \in \mathbb{C}_p^{m \times n}, \\
A_{(e),2} &= \left(A_{(E),r} - A_{(E),j} \right) + \left(A_{(E),i} - A_{(E),k} \right) i \in \mathbb{C}_p^{m \times n}
\end{aligned}$$

dır (Kosal, 2016).

$$A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2, B_{(E)} = B_{(e),1}e_1 + B_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}, C_{(E)} = C_{(e),1}e_1 + C_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times l}$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için toplama, skalarla çarpma ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
A_{(E)} + B_{(E)} &= \left(A_{(e),1} + B_{(e),1} \right) e_1 + \left(A_{(e),2} + B_{(e),2} \right) e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}, \\
\lambda A_{(E)} &= \lambda A_{(e),1}e_1 + \lambda A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
A_{(E)}C_{(E)} &= \left(A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \right) \left(C_{(e),1}e_1 + C_{(e),2}e_2 \right) \\
&= \left(A_{(e),1}C_{(e),1} \right) e_1 + \left(A_{(e),2}C_{(e),2} \right) e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times l}
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Kosal, 2016).

$A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ kuaterniyon matrisi için üç tane eşlenik mevcuttur. Bunlar

$$\begin{aligned}
{}^1\bar{A}_{(E)} &= \overline{A_{(e),1}}e_1 + \overline{A_{(e),2}}e_2, \in \mathbb{H}_p^{m \times n}, \\
{}^2\bar{A}_{(E)} &= A_{(e),2}e_1 + A_{(e),1}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}, \\
{}^3\bar{A}_{(E)} &= \overline{A_{(e),2}}e_1 + \overline{A_{(e),1}}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}
\end{aligned}$$

eşitlikleriyle tanımlanır (Kosal, 2016).

$A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ matrisinin transpozu $A_{(E)}^T = A_{(e),1}^T e_1 + A_{(e),2}^T e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times m}$ biçiminde tanımlanır.

$A_{(E)}^s = \left({}^s\overline{A_{(E)}} \right)^T \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $s = 1, 2, 3$, matrisine ise $A_{(E)}$ matrisinin s 'inci eşleniğe göre

eşlenik transpozu denir. $A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olmak üzere $A_{(E)} X_{(E)} A_{(E)} = A_{(E)}$ eşitliğini sağlayan $X_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{n \times m}$ matrisine $A_{(E)}$ matrisinin genelleştirilmiş tersi denir ve $A_{(E)}^-$ ile gösterilir (Kosal, 2016).

Teorem 2.13 $A_{(E)}$ ve $B_{(E)}$ matrisleri boyutları uygun eliptik kuaterniyon matrisler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur, (Kosal, 2016):

1. $\left({}^s \overline{A_{(E)}} \right)^T = \overline{\left(A_{(E)}^T \right)},$
2. $\left(A_{(E)} B_{(E)} \right)^* = B_{(E)}^* A_{(E)}^*,$
3. $\left(A_{(E)} B_{(E)} \right)^T = B_{(E)}^T A_{(E)}^T,$
4. $\overline{\left(A_{(E)} B_{(E)} \right)} = \left({}^s \overline{A_{(E)}} \right) \left({}^s \overline{B_{(E)}} \right),$
5. $A_{(E)}^{-1}$ ve $B_{(E)}^{-1}$ mevcut ise $\left(A_{(E)} B_{(E)} \right)^{-1} = B_{(E)}^{-1} A_{(E)}^{-1},$
6. $A_{(E)}^{-1}$ mevcut ise $\left(A_{(E)}^{\dagger_s} \right)^{-1} = \left(A_{(E)}^{-1} \right)^{\dagger_s},$
7. $\left({}^s \overline{A_{(E)}} \right)^{-1} = \overline{\left(A_{(E)}^{-1} \right)}.$

Tanım 2.14 $A_{(E)} = A_{(e),1} e_1 + A_{(e),2} e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_p^{2m \times 2n}$$

matrisine A matrisinin temel matrisi denir ve $\phi_p \left(A_{(E)} \right)$ ile gösterilir (Kosal, 2016).

Teorem 2.14 $A_{(E)}, B_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ ve $C_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{n \times l}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1. $\phi_p \left(I_n \right) = I_{2n},$
2. $\phi_p \left(A_{(E)} + B_{(E)} \right) = \phi_p \left(A_{(E)} \right) + \phi_p \left(B_{(E)} \right),$
3. $\phi_p \left(A_{(E)} C_{(E)} \right) = \phi_p \left(A_{(E)} \right) \phi_p \left(C_{(E)} \right),$
4. $m = n$ için $A_{(E)}^{-1}$ mevcut ise $\phi_p \left(A_{(E)}^{-1} \right) = \left(\phi_p \left(A_{(E)} \right) \right)^{-1},$

5. $\phi_p(A_{(E)}^*) = \left(\phi_p(A_{(E)})\right)^*$, fakat genelde

$$\phi_p(A_{(E)}^{*2}) \neq \left(\phi_p(A_{(E)})\right)^*, \phi_p(A_{(E)}^{*3}) \neq \left(\phi_p(A_{(E)})\right)^*$$

dır. Burada $\left(\phi_p(A_{(E)})\right)^*$, $\phi_p(A_{(E)})$ eliptik kuaterniyon matrisinin eşlenik transpozudur.

6. $m=l=n$ için

$$\det\left(\phi_p(A_{(E)}B_{(E)})\right) = \det\left(\phi_p(A_{(E)})\right)\det\left(\phi_p(B_{(E)})\right)$$

$$\det\left(\phi_p(A_{(E)}^{-1})\right) = \left(\det\phi_p(A_{(E)})\right)^{-1}$$

dir.

7. $\left(\phi_p(A_{(E)})\right)^- = \phi_p(A_{(E)}^-)$ dir. Burada $\left(\phi_p(A_{(E)})\right)^-$ matrisi $\phi_p(A_{(E)})$ matrisinin genelleştirilmiş tersidir.

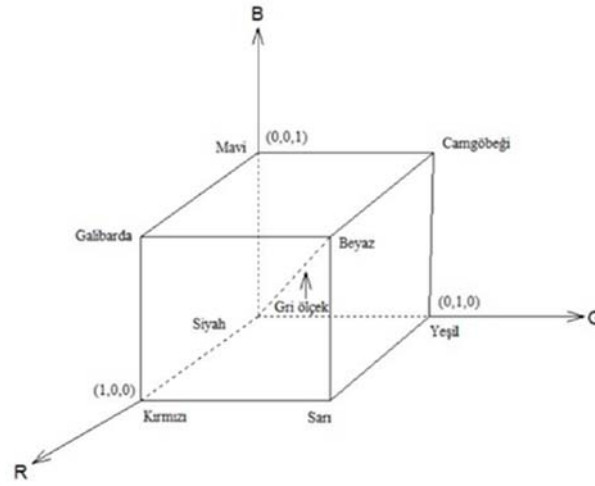
8. $A_{(E)} = (e_1I_m \quad e_2I_m)\phi_p(A_{(E)})\begin{pmatrix} e_1I_n \\ e_2I_n \end{pmatrix}$ dir.

2.3. Renkli Görüntüler ve Renkli Görüntü İşleme

Doğada renk çeşitliliğinin fazla olması nedeniyle bu renkleri gruplama ihtiyacı doğmuştur. Renkleri gruplamak ve standartlaştırmak için ise renk uzayı kavramı ortaya çıkmıştır. Bugün kullanılan pek çok renk uzayı donanıma (renkli monitörler veya yazıcılar gibi) ya da renk manipülasyonlarının hedeflendiği uygulamalara (animasyon için renkli grafiklerin üretilmesi gibi) yöneliktir. Sayısal görüntü işleme uygulamalarında renkli görüntülerin işlenmesi için farklı renk uzayları kullanılabilir. Renkli monitörler ve kameralar için en yaygın olarak kullanılan renk uzayı RGB'dir. CMY ve CMYK renkli baskı uygulamalarında yaygın olarak kullanılırken HSI insanların renk algılamasına daha yakın bir şekilde tasarlanmıştır. RGB görüntüdeki piksellerin kırmızı, yeşil ve mavi bileşenlerinin kombinasyonunu kullanarak renkleri tanımlar. CMY camgöbeği, galibarda ve sarı bileşenlerini kullanırken CMYK siyah mürekkep ekleyerek daha iyi baskı kalitesi sağlar. HSI renk tonu, doygunluk ve yeğlilik bileşenlerini kullanarak renkleri tanımlar ve insanların renk algısına daha yakındır. Farklı uygulamalar için farklı avantajları ve dezavantajları nedeniyle her bir renk uzayı farklı durumlarda tercih edilebilir (Gonzales ve Woods 2008; Li, 2012).

İnternet, renkli monitörler ve video kayıt cihazları gibi önemli ve sık kullanılan ortamlarda RGB renk uzayının kullanılması sebebi ile bu çalışma da renk uzayı olarak RGB renk uzayı kullanılacaktır.

RGB renk uzayında her renk, onun kırmızı, yeşil ve mavi ana spektral bileşenleri şeklinde görülür. Bu renk uzayı kartezyen koordinat sistemini baz alır. RGB renk uzayı Şekil 2.1'de gösterilen küptür. Bu uzayda farklı renkler küp üzerindeki veya içerisindeki noktalardır ve bu noktalar orijinden uzanan vektörler ile tanımlanırlar. Kolaylık için tüm renk değerlerinin normalize edildiği varsayılır, bu nedenle Şekil 2.1'de ki küp birim küptür. Yani tüm R , G ve B değerlerinin $[0,1]$ aralığında olduğu kabul edilir (Gonzales ve Woods 2008; Li, 2012).

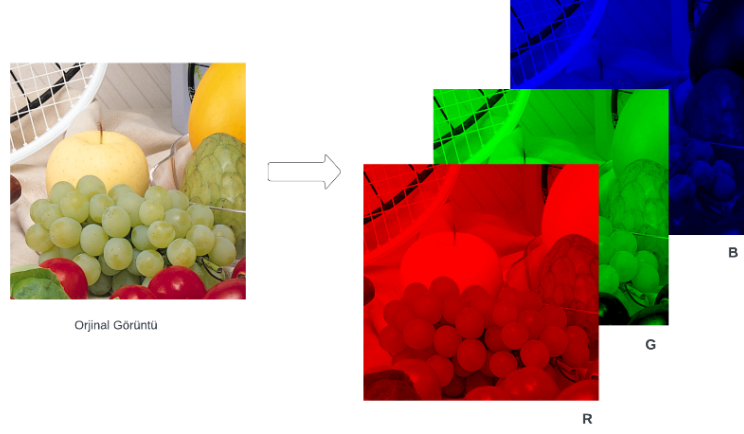


Şekil 2.1 Normalleştirilmiş RGB renk uzayı.

Renk uzayı olarak RGB renk uzayı kullanıldığında renkli görüntüler R , G ve B ile ifade edilmiş aynı cisme ait üç adet gri düzeyli görüntünün üst üste ekranda gösterilmesi ile oluşur. Renkli bir görüntünün kırmızı, yeşil ve mavi tonları matris olarak da ifade edilebilir. Matris anlamında düşünüldüğünde doğal renkli 2 boyutlu bir RGB görüntü, her biri $m \times n$ boyutunda üç matrisin bileşiminden oluşur ve

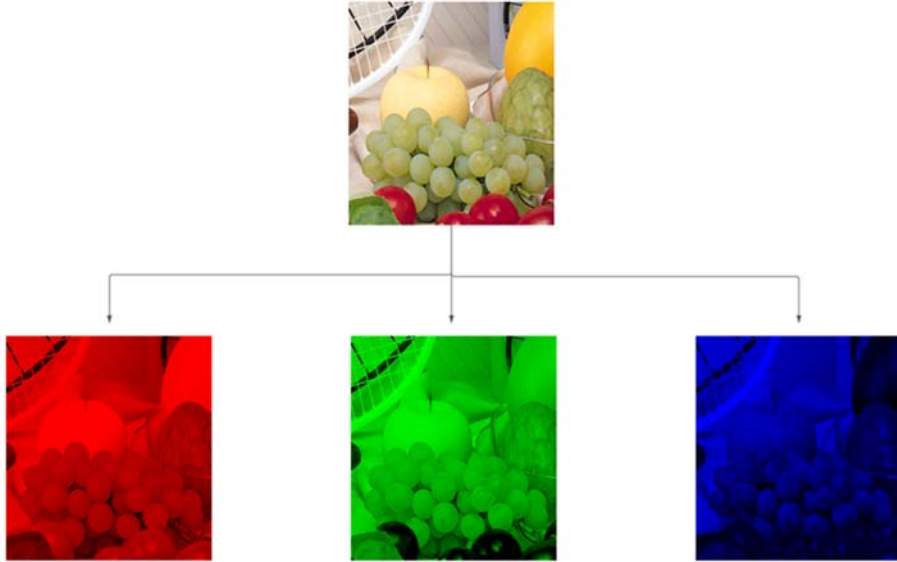
$$\{I(R, G, B) \mid R, G, B \in \mathbb{R}^{m \times n}\}$$

biçiminde ifade edilir. Burada R, G ve B matrislerinin her birinin elemanları 0 ile 1 arasında değerler alır (Şekil 2.1).



Şekil 2.2 RGB renk uzayında ifade edilmiş görüntünün R, G ve B bileşenleri.

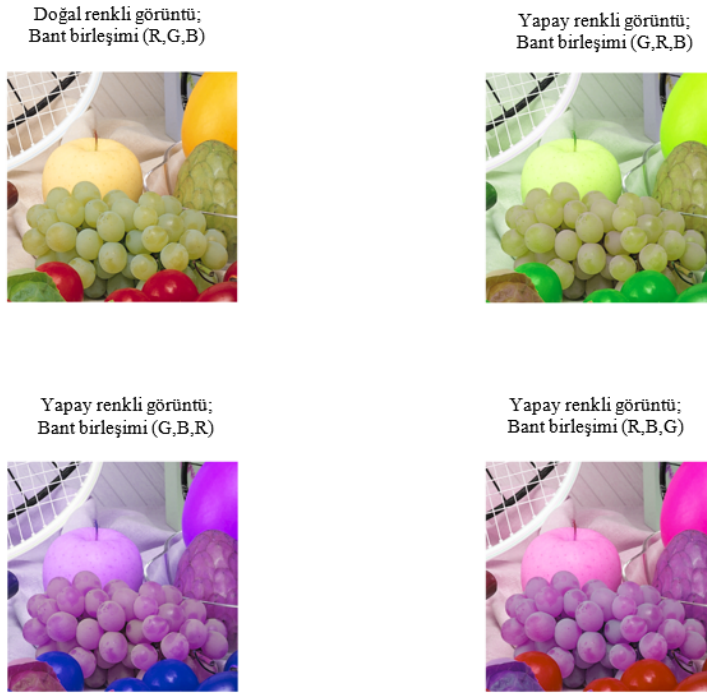
Renkli görüntülerde yeşil ve mavi bileşen matrislerin sıfır alınmasıyla sadece kırmızı bileşen görüntüsü elde edilir. Böylece, *RGB* renk uzayında görüntünün kırmızı yapay renklendirilmiş görüntüsüne ulaşılır. Bu durumda kodlama $I(R, 0, 0)$ biçiminde olacaktır. Benzer şekilde yeşil ve mavi yapay renklendirilmiş görüntüler de sırasıyla $I(0, G, 0)$ ve $I(0, 0, B)$ biçiminde olacaktır. Bu şekilde oluşan yapay renklendirilmiş görüntüler aşağıdaki gibidir (Gonzales ve Woods , 2008).



Şekil 2.3 Yapay renklendirilmiş görüntüler.

RGB formatında doğal renklerden oluşmuş renkli bir görüntü için bileşenlerin doğru dizimi sırasıyla Kırmızı-Yeşil-Mavi biçiminde olmalıdır. Eğer *RGB* gösterimde bileşenlerin sırası değişecek olursa görüntüdeki renkler de değişecektir. Bu şekilde

oluşan görüntüye yapay renkli görüntüler adı verilir (Gonzales ve Woods , 2008). Aşağıdaki resimler bununla ilgili örnekleri göstermektedir.



Şekil 2.4 RGB uzayında elde edilmiş yapay renkli görüntüler.

Dijital görüntü işleme ilk olarak resimlerin Londra ve New York arasında deniz altından kablolarla gönderilmesi ile gazete endüstrisinde kullanılmıştır. Günümüzde dijital görüntü işleme, dijital teknolojilerin hızlı gelişimi ile hayatımızın hemen hemen her alanında karşımıza çıkmaktadır. Dijital görüntü işleme, ortamla hiçbir etkileşim olmaksızın teknolojik araçlarla görüntüler içerisinde bulunan nesnelere öznelikleri hakkında anlamlı bilgi edinmemizi sağlar. Buna ilave olarak dijital görüntü işleme teknikleri ile bozukluklar içeren görüntüler iyileştirilebilir ve mevcut olan görüntülerden daha farklı görüntüler elde edilebilir. Dijital ortamlardaki görüntüler m satır, n sütuna sahip sayısal matrislerle ifade edilirler. Görüntü işleme teknikleri görüntüyü ifade eden bu matrislere uygulanır (Gonzales ve Woods 2003; Li, 2012; Gunturk, 2012).

Çok çeşitli görüntü işleme teknikleri olmakla birlikte temel olarak görüntü işleme teknikleri;

1. Görüntü İyileştirme (Image Enhancement),
2. Görüntü Onarma (Image Restoration),
3. Bölümleme (Segmentation),

4. Tanıma (Recognition),
5. Morfolojik İşlemler (Morphological Operations),
6. Görüntü Sıkıştırma (Image Compression)

olarak altı başlıkta ifade edilebilir.

Görüntü iyileştirme (Image enhancement): Görüntü iyileştirme görüntünün kalitesini artırma ve daha uygun bir görünüme getirme işlemidir. Görüntü iyileştirme kapsamında görüntüyü koyulaştırma, daha açık hale getirme veya kontrastını artırma gibi işlemler kullanılır (Gonzales ve Woods , 2008).

Görüntü onarma (Image restoration): Bozulmuş veya gürültüye maruz kalmış görüntüden temiz orijinal resmi tahmin etme veya elde etme işlemidir (Gonzales ve Woods , 2008).

Bölümleme (Segmentation): Bölümleme ya da parçalama olarak ifade edebilen bu yöntemle bir görüntüdeki nesnelerin daha kolay analiz edilebilmesi için başka bir görüntüye dönüştürülür (Gonzales ve Woods , 2008).

Tanıma (Recognition): Görüntü Tanıma, “Bilgisayarla Görü” ve “Yapay Zeka”nın bir alt kategorisidir. Belirli bir görevin otomasyonunu sağlamak amacıyla görüntüyü algılamak ve analiz etmek için bir dizi yöntemi temsil etmektedir. Herhangi bir görüntüde bulunan yer, insan, nesne ve diğer birçok öğeyi tanımlayabilen ve bunları analiz ederek sonuçlar elde edebilen bir teknoloji türüdür (Gonzales ve Woods , 2008).

Morfolojik işlemler (Morphological operations): Morfolojik görüntü işleme, görüntüye ait özelliklerin şekli ile ilgilenen görüntü işleme tekniğidir. Görüntüler üzerinde yapılan genişletme-yayma, aşındırma, sınır belirleme, iskelet ve dış bükey kabuk bulma gibi işlemler morfolojik işlemlerdir (Gonzales ve Woods , 2008).

Görüntü sıkıştırma (Image Compression): Bir görüntü dosyasını orijinal halinden daha az yer kaplayacak şekilde dönüştürme ya da kodlama işlemine görüntü sıkıştırma adı verilir. Görüntü sıkıştırma ile bir görüntü dosyasının boyutunu, kalitesini etkilemeden veya düşürmeden azaltmak mümkün hale gelir. Amaç görüntüyü en verimli şekilde saklamak veya iletmektir. Görüntü sıkıştırma, sayısal görüntü işleme alanında en fazla kullanılan ve ticari olarak da en başarılı teknolojilerden biridir.

Bir görüntünün dosya boyutu, görüntünün kalitesinde bir kayıpla veya kayıp olmadan küçültülebilir; bunlar sırasıyla kayıplı sıkıştırma ve hatasız (kayıpsız) sıkıştırma olarak adlandırılır. Kayıplı görüntü sıkıştırma ile dosya boyutunda önemli ölçüde azalmalar

ve görüntü kalitesinde yalnızca minimum, hatta bazen algılanamaz değişiklikler görülür. Kayıpsız görüntü sıkıştırma ise kalite kaybı sıfırdır. Sıkıştırılmış versiyondaki her piksel orijinaliyle bire bir aynıdır. Yüksek oranda sıkıştırma performansı elde etmek için genellikle kayıplı sıkıştırma algoritmaları tercih edilmektedir.

Bir görüntü $m \times n$ tipinde bir matris ile ifade edildiğinde m satır sayısı, görüntünün piksel yüksekliği; n sütun sayısı ise görüntünün piksel genişliği olarak isimlendirilir. Dijital ortamda bir görüntü oluşturulduğunda veya saklandığında her piksele parlaklığını temsil edecek bir sayı atanır. Matrisin içinde bulunan her değer, karşılık gelen pikselin parlaklığını ifade eder. Ancak çok daha fazla yer kaplayan renkli görüntüler için bilgisayarın görüntüyü kırmızı, yeşil ve maviden oluşan üç katmana ayırması gerekir.

Normalleştirilmemiş gri tonlamalı bir görüntü matrisindeki her piksel, değeri 0 ile 255 arasında değişen belirli bir tamsayı ile temsil edilebilir. Bu durumda gri tonlamalı m piksel yüksekliğine n piksel genişliğine sahip olan bir görüntünün tamamı için mn bitlik bir alana ihtiyaç vardır. Renkli bir görüntü için bu depolama alanı değeri kırmızı, yeşil ve mavi olmak üzere üç bileşene sahip olduğundan daha büyüktür. Dolayısıyla renkli görüntülerin depolanmasında gri tonlamalı görüntülere göre üç kat daha fazla alana ($3mn$ bitlik) ihtiyaç vardır. Günümüzde bu görüntülerin depolanması ve ağlar üzerinden hızlı bir şekilde iletilmesi ciddi bir sorun haline gelmektedir. Bu yüzden görüntü sıkıştırma işlemi günümüzün en önemli konularından biri haline gelmiştir (Gonzales ve Woods 2003; Gunturk, 2012).

Tekil değer ayrışımı ile görüntü sıkıştırma: Tekil değer ayrışımı (Singular value decomposition, (SVD)), bilim ve mühendislik disiplinlerinde sayısız uygulama için yararlı olduğu kanıtlanmış olan genel matrislerin ayrıştırılmasıyla ilgili bir kavramdır. SVD, kısıtlanmamış doğrusal en küçük kareler problemlerinin çözümünde, matris sıra tahmini ve kanonik korelasyon analizinde yaygın olarak kullanılır.

SVD veri indirgeme yöntemi olarak da görülebilir. Bu şekilde, boyutlar SVD yöntemi kullanılarak küçültülebilir. Tekil değer ayrışımının amacı daha az boyut kullanarak büyük boyutlu orijinal veri noktalarının en iyi yaklaşıklığını bulmaktır. Bir A matrisinin tekil değer ayrışımı

$$A = U \Sigma V^T$$

biçiminde ifade edilir. Burada U ile V matrisleri ortogonal matris, Σ da köşegen matristir. Tekil değer ayrışımı ile orijinal matris çok daha basit matrislerin çarpımı olarak yeniden yazılır.

SVD ile görüntü sıkıştırımda öncelikle A görüntü matrisi üç farklı matris olan U , Σ ve V matrislerine ayrıştırılır. Bu işlem tek başına görüntüyü sıkıştırılmaz. Görüntüyü sıkıştırmak için SVD uygulandıktan sonra az miktarda bilgi içeren tekil değerlerin atılması gerekir. Bu tekil değerlerin atılması, Σ matrisinin köşegenindeki ilk tekil değerlerin en fazla miktarda bilgi içermesi ve sonraki tekil değerlerin azalan miktarda görüntü bilgisi içermesi gerçeğinden kaynaklanır. Sonuç olarak SVD ile görüntü sıkıştırma uygun sayıda alt tekil değerlerin atıldıktan sonra görüntünün yeniden elde edilmesi ile yapılır. SVD ile A görüntü matrisi

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^K \sigma_i (u_i \otimes v_i^*) \quad (2.8)$$

biçiminde de yazılabilir. Burada u_i ve v_i sırasıyla U ve V ortonormal matrislerinin i nci sütun vektörlerini, \otimes ise matrislerdeki dış çarpımı temsil etmektedir. Denklem 2.8'de uygun değerleri seçilerek matris yeniden oluşturulduğunda SVD ile görüntü sıkıştırma gerçekleşmiş olur. Bu şekilde bir sıkıştırma sonucunda mn bitlik bir yer kaplayan gri tonlamalı görüntünün kapladığı alan $K(m+n+1)$ ' e düşer.

SVD ile görüntü sıkıştırma parametreleri: SVD algoritmalarının görüntüyü ne kadar sıkıştırdığını ve bozulmanın ne kadar olduğunu ölçmek için birçok parametre mevcuttur. SVD sıkıştırmasının performansını ölçmek için sıkıştırılmış görüntünün nicel ve nitel ölçümü genelde aşağıdaki üç parametre hesaplanarak bulunur:

1. Sıkıştırma Oranı (CR): Sıkıştırma oranı, sıkıştırılmamış görüntünün dosya boyutlarının sıkıştırılmış görüntünün dosya boyutlarına oranı olarak tanımlanır:

$$C_R = (mn) / (k(m+n+1)).$$

2. Ortalama Kare Hatası (MSE): MSE, orijinal görüntünün piksel değeri ile sıkıştırılmış görüntünün karşılık gelen piksel değeri arasındaki farkın tüm görüntü üzerinden ortalamasının karesi olarak tanımlanır. MSE, orijinal görüntü matrisi A sıkıştırılmış görüntü matrisi A_k olmak üzere aşağıdaki formül kullanılarak hesaplanır:

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{y=1}^m \sum_{x=1}^n (A(x, y) - A_k(x, y)).$$

3. Pik sinyal-gürültü oranı (PSNR): PSNR bir sinyalin olası maksimum gücü ile temsilinin aslına uygunluğunu etkileyen bozucu gürültünün gücü arasındaki oran olarak tanımlanır. PSNR, geniş bir aralıktaki sinyalleri barındırmak için genellikle logaritmik desibel ölçeği cinsinden ifade edilir. Kayıplı sıkıştırma genelleştirilmiş sıkıştırılmış görüntünün kalitesi PSNR değeri hesaplanarak belirlenir. Bu durumda sinyal, orijinal veridir ve gürültü, sıkıştırmanın neden olduğu hatadır. PSNR (dB cinsinden) değeri

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{3 \times 255^2 \times m \times n}{\sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^n (A(x, y) - A_k(x, y))^2}$$

formülü ile hesaplanır.

3. ELİPTİK MATRİSLER İÇİN ÖZDEĞER-ÖZVEKTÖR, TEKİL DEĞER AYRIŞIMI, PSEUDO TERS VE EN KÜÇÜK KARELER PROBLEMİ

Bu bölümde eliptik matrisler için özdeğer-özvektör, tekil değer ayrışımı, pseudo ters ve en küçük kareler problemi kavramlarına ait tanım ve teoremler elde edilmiştir.

3.1. Eliptik Katsayılı ve Eliptik Değerli Polinomların Sıfır Kökleri

$N > 0$ için N inci mertebeden reel katsayılı kompleks değerli

$$f(z) = z^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i z^i$$

polinomu verilsin. Düzlemde $\text{Re}(f(z))$ ve $\text{Im}(f(z))$ cebirsel eğrilerini ele alalım. Gauss'un 1799'da Basu ve Velleman (2017) doktora tezinde yaptığı ispatına göre bu her iki cebirsel eğri de sürekli dallar içerir. Gauss gösterdi ki yeterince büyük r için $\text{Re}(f(z)) = 0$ ve $\text{Im}(f(z)) = 0$ eğrileri $|z| = r$ çemberini $2N$ noktada keser ve bu kesim noktaları aralıklıdır. Yani bir eğrinin ardışık iki kesim noktası arasında diğer eğrinin bir kesim noktası mevcuttur.

Gauss'un ispatına göre $|z| \leq r$ diskinde giren cebirsel eğriler yeniden çıkmak zorundadır. Gauss bu gerçeklerden yola çıkarak $\text{Re}(f(z)) = 0$ ve $\text{Im}(f(z)) = 0$ cebirsel eğrilerinin diskin iç kısmında en az bir noktada kesiştiklerini göstermiştir. Bu kesim noktalarında polinomunun reel ve imajiner kısımları sıfır olur. Diğer bir deyişle bu kesim noktaları polinomunun kökleridir. Sonuç olarak reel katsayılı ve kompleks değerli N 'inci mertebeden her polinomun en az bir kökü mevcuttur.

Bu sonuç kompleks katsayılı ve kompleks değerli N 'inci mertebeden polinomlar için de geçerlidir. Gerçekten de

$$g(z) = z^N + c_{N-1}z^{N-1} + \dots + c_1z + c_0$$

kompleks katsayılı ve değerli N 'inci mertebeden bir polinom olsun.

$$\overline{g}(z) = z^N + \overline{c_{N-1}}z^{N-1} + \dots + \overline{c_1}z + \overline{c_0}$$

olmak üzere

$$f(z) = g(z)\overline{g}(z) = g(z)\overline{g(\overline{z})}$$

polinomu reel katsayılı kompleks değerli bir polinom olur. Yukarıdaki sonuca göre ise en az bir kökü mevcuttur. Kabul edelim ki bu kök z_0 olsun. Bu durumda

$$f(z_0) = g(z_0)\overline{g(\overline{z_0})} = 0$$

olur ki bu da z_0 veya $\overline{z_0}$ in g polinomu için bir kök olduğunu ifade eder. Sonuç olarak kompleks katsayılı ve kompleks değerli N 'inci mertebeden her polinomun en az bir kökü mevcuttur.

Diğer taraftan $N > 0$ için

$$f_p(z_{(e)}) = z_{(e)}^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i z_{(e)}^i$$

polinomu N inci mertebeden reel katsayılı eliptik kompleks değerli bir polinom olsun.

η_p bir cebir izomorfizması olduğundan $f_p(z_{(e)})$ polinomunun $\eta_p(f_p(z_{(e)}))$

kompleks temsili

$$\begin{aligned} \eta_p(f_p(z_{(e)})) &= \eta_p\left(z_{(e)}^N + \sum_{n=0}^{N-1} c_n z_{(e)}^n\right) = \eta_p(z_{(e)}^N) + \sum_{n=0}^{N-1} c_n \eta_p(z_{(e)}^n) \\ &= \left(\eta_p(z_{(e)})\right)^N + \sum_{n=0}^{N-1} c_n \left(\eta_p(z_{(e)})\right)^n \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $\eta_p(f_p(z_{(e)}))$ kompleks temsil N inci merteben reel katsayılı

kompleks değerli polinomdur. Cebirin temel teoremine göre $\eta_p(f_p(z_{(e)}))$

polinomunun en az bir kökü mevcuttur. Bu kök

$$\eta_p(z_{0(e)}) = x_{0(e)} + Iy_{0(e)}, (I^2 = -1)$$

olsun. Bu durumda

$$z_{0(e)} = x_{0(e)} + \frac{i}{\sqrt{|p|}} y_{0(e)}$$

eliptik kompleks sayısı $f_p(z_{(e)})$ reel katsayılı eliptik değerli polinomun bir köküdür.

Dolayısıyla $f_p(z_{(e)})$ polinomunun en az bir kökü vardır. Sonuç olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1 Eliptik kompleks katsayılı ve eliptik kompleks değerli

$$f_p(z_{(e)}) = z_{(e)}^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i z_{(e)}^i, N > 0$$

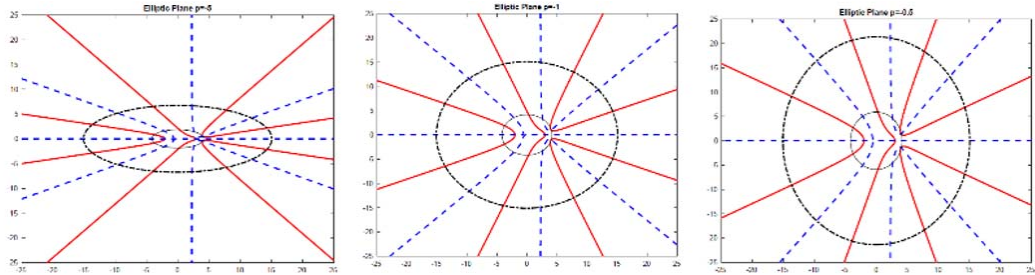
polinomun en az bir kökü mevcuttur veya bu ifadeye denk olarak

$$f_p(z_{(e)}) = z_{(e)}^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i z_{(e)}^i, N > 0$$

polinomunun en fazla N tane kökü vardır. Diğer taraftan Gauss'un ispatında olduğu gibi $\text{Re}(f_p(z_{(e)})) = 0$ ve $\text{Im}(f_p(z_{(e)})) = 0$ cebirsel eğrilerini göz önüne alırsak bu eğriler eliptik düzlemde yeterince büyük r için $x^2 - py^2 \leq r$ eliptik bölgesinin içinde kesişirler. Bu kesim noktaları $f_p(z_{(e)})$ eliptik kompleks değerli reel katsayılı polinomun kökleridir. Aşağıda

$$f_p(z_{(e)}) = z_{(e)}^4 - 9z_{(e)}^3 + 19z_{(e)}^2 + 31z_{(e)} - 102$$

eliptik değerli polinomunun $\text{Re}(f_p(z_{(e)})) = 0$ ve $\text{Im}(f_p(z_{(e)})) = 0$ cebirsel eğrilerinin kesim noktaları verilmektedir.



Şekil 3.1 $p = -0.5, -1, -5$ eliptik kompleks değerli polinomuna karşılık gelen cebirsel eğriler.

Şekil 3.1'de $p = -0.5, p = -1$ ve $p = -5$ için $f_p(z_{(e)})$ eliptik kompleks değerli polinomunun

$$\operatorname{Re}\left(f_p(z_{(e)})\right) = 0 \text{ ve } \operatorname{Im}\left(f_p(z_{(e)})\right) = 0$$

cebirsal eğrileri eliptik düzlemde çizilmiştir. Burada

$$\operatorname{Re}\left(f_p(z_{(e)})\right) = 0 \text{ ve } \operatorname{Im}\left(f_p(z_{(e)})\right) = 0$$

cebirsal eğrileri sırasıyla kırmızı ve mavi renkler ile gösterilmiştir. Bu iki eğrinin

$$\left|z_{(e)}\right| \leq \max\left(1, \sqrt{2} \sum_{n=0}^3 |c_n|\right)$$

eliptik bölgesinin içindeki arakesit noktaları $f_p(z_{(e)})$ polinomunun kökleridir.

3.2. Eliptik Kompleks Matrislerin Özdeğerleri ve Özvektörleri

$A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ karesel eliptik kompleks matrisini ele alalım. $A_{(e)}$ eliptik matrisinin karakteristik polinomu

$$f_p(z_{(e)}) = \det\left(A_{(e)} - z_{(e)} I_n\right),$$

N inci mertebeden monik (başkatsayısı 1), eliptik kompleks katsayılı ve değerli olduğundan Teorem 3.1'e göre en fazla N tane köke sahiptir. Böylelikle aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2 $A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ eliptik matrisinin en fazla N tane özdeğeri mevcuttur.

Teorem 3.3 $A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ olsun. $\eta_p(A_{(e)})$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_{\eta_p(A_{(e)})}$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler $x_{\eta_p(A_{(e)})}$ olmak üzere $A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ eliptik kompleks matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_{(e)} = \operatorname{Re}\left(\lambda_{\eta_p(A_{(e)})}\right) + \frac{1}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im}\left(\lambda_{\eta_p(A_{(e)})}\right)$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$x_{(e)} = \operatorname{Re}\left(x_{\eta_p(A_{(e)})}\right) + \frac{1}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im}\left(x_{\eta_p(A_{(e)})}\right)$$

dir. Bu önermenin tersi de doğrudur.

İspat. Kabul edelim ki $A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ matrisinin bir özdeğeri $\lambda_{(e)}$ ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör $x_{(e)}$ olsun. Bu durumda

$$A_{(e)}x_{(e)} = \lambda_{(e)}x_{(e)}$$

yazılır. Buradan ise

$$\eta_p(A_{(e)}x_{(e)}) = \eta_p(\lambda_{(e)}x_{(e)}) \Rightarrow \eta_p(A_{(e)})\eta_p(x_{(e)}) = \eta_p(\lambda_{(e)})\eta_p(x_{(e)})$$

elde edilir. Dolayısıyla $\lambda_{(e)}, A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ eliptik kompleks matrisinin özdeğeri ve $x_{(e)}$

eliptik kompleks vektörü de bu özdeğere karşılık gelen özvektör ise $\eta_p(\lambda_{(e)})$

kompleks sayısı da $\eta_p(A_{(e)})$ kompleks matrisinin bir özdeğeri ve $\eta_p(x_{(e)})$ kompleks

vektörü de bu özdeğere karşılık gelen özvektördür. Sonuç olarak η_p

izomorfizmasından

$$\lambda_{(e)} = \operatorname{Re}\left(\lambda_{\eta_p(A_{(e)})}\right) + \frac{1}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im}\left(\lambda_{\eta_p(A_{(e)})}\right)$$

ve

$$x_{(e)} = \operatorname{Re}\left(x_{\eta_p(A_{(e)})}\right) + \frac{1}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im}\left(x_{\eta_p(A_{(e)})}\right)$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek 3.4 $A_{(e)} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eliptik matris ve $p = -2$ olmak üzere $A_{(e)}$

eliptik matrisine karşılık gelen kompleks matris

$$\eta_p(A_{(e)}) = \begin{pmatrix} 8+1.4142i & 1+1.4142i & 6+1.4142i \\ 3+1.4142i & 5+1.4142i & 7+1.4142i \\ 4+1.4142i & 9+1.4142i & 2+1.4142i \end{pmatrix}$$

biçimindedir. $\eta_p(A_{(e)})$ kompleks matrise karşılık gelen özdeğerler

$$\lambda_{\eta_p(A_{(e)})} = \begin{pmatrix} 15+4.2426i & 0 & 0 \\ 0 & 4.899 & 0 \\ 0 & 0 & -4.899 \end{pmatrix}$$

ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörler

$$x_{\eta_p(A_{(e)})} = \begin{pmatrix} 0.5774+0i & 0.8131+0i & -0.3416+0i \\ 0.5774+0i & -0.4714+0i & -0.4714-0i \\ 0.5774+0i & -0.3416-0i & 0.8131+0i \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Sonuç olarak Teorem 3.3'e göre $A_{(e)}$ eliptik matrisinin özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$\lambda_{(e),1} = 15 + 3i \Rightarrow x_{(e),1} = \begin{pmatrix} 0.5774 \\ 0.5774 \\ 0.5774 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{(e),2} = 4.899 \Rightarrow x_{(e),2} = \begin{pmatrix} 0.8131 \\ -0.4714 \\ -0.3416 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{(e),3} = -4.899 \Rightarrow x_{(e),3} = \begin{pmatrix} -0.3416 \\ -0.4714 \\ 0.8131 \end{pmatrix}$$

biçiminde bulunur.

Teorem 3.5 $A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ olmak üzere $A_{(e)}$ eliptik matrisinin pseudo tersi $(A_{(e)})^\dagger$ olmak üzere

$$(A_{(e)})^\dagger = \text{Re}(\eta_p^\dagger(A_{(e)})) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \text{Im}(\eta_p^\dagger(A_{(e)}))$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki $A_{(e)}^\dagger$ matrisi $A_{(e)}$ matrisinin pseudo tersi olsun. Bu durumda

$$A_{(e)}A_{(e)}^\dagger A_{(e)} = A_{(e)}, A_{(e)}^\dagger A_{(e)}A_{(e)}^\dagger = A_{(e)}^\dagger, \left(A_{(e)}A_{(e)}^\dagger\right)^* = A_{(e)}A_{(e)}^\dagger \text{ ve } \left(A_{(e)}^\dagger A_{(e)}\right)^* = A_{(e)}^\dagger A_{(e)}$$

eşitlikleri doğru olur. Buradan ise

$$\begin{aligned} \eta_p \left(A_{(e)} \right) \eta_p \left(A_{(e)}^\dagger \right) \eta_p \left(A_{(e)} \right) &= \eta_p \left(A_{(e)} \right) \\ \eta_p \left(A_{(e)}^\dagger \right) \eta_p \left(A_{(e)} \right) \eta_p \left(A_{(e)}^\dagger \right) &= \eta_p \left(A_{(e)}^\dagger \right) \\ \left(\eta_p \left(A_{(e)} \right) \eta_p \left(A_{(e)}^\dagger \right) \right)^* &= \eta_p \left(A_{(e)} \right) \eta_p \left(A_{(e)}^\dagger \right) \\ \left(\eta_p \left(A_{(e)}^\dagger \right) \eta_p \left(A_{(e)} \right) \right)^* &= \eta_p \left(A_{(e)}^\dagger \right) \eta_p \left(A_{(e)} \right) \end{aligned}$$

eşitlikleri doğru olur. Sonuç olarak

$$\left(\eta_p \left(A_{(e)} \right) \right)^\dagger = \eta_p \left(A_{(e)}^\dagger \right)$$

ve

$$\left(A_{(e)} \right)^\dagger = \operatorname{Re} \left(\left(\eta_p \left(A_{(e)} \right) \right)^\dagger \right) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im} \left(\left(\eta_p \left(A_{(e)} \right) \right)^\dagger \right)$$

elde edilir.

3.3. Eliptik Kompleks Matrislerin Tekil Değer Ayrışımı ve Sonuçları

Teorem 3.6 $A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ olmak üzere $\eta_p \left(A_{(e)} \right)$ kompleks matrisinin tekil değer ayrışımı

$$\eta_p \left(A_{(e)} \right) = U \Sigma V^*$$

biçiminde olsun. Bu durumda $A_{(e)}$ eliptik kompleks matrisinin tekil değer ayrışımı

$$A_{(e)} = \left(\operatorname{Re}(U) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im}(U) \right) \Sigma \left(\operatorname{Re}(V) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im}(V) \right)^*$$

dır. Burada $\left(\operatorname{Re}(U) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im}(U) \right)$ ve $\left(\operatorname{Re}(V) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im}(V) \right)$ eliptik kompleks matrisleri ortonormal Σ ise reel matristir. Bu ifadenin tersi de doğrudur.

İspat. Kabul edelim ki $\eta_p(A_{(e)})$ kompleks matrisinin tekil değer ayrışımı $\eta_p(A_{(e)}) = U\Sigma V^*$ olsun. Bu durumda $\eta_p(A_{(e)}) = U\Sigma V^*$ bir cebir izomorfizması olduğundan

$$\begin{aligned} A_{(e)} &= \eta_p^{-1}(U\Sigma V^*) \\ &= (\eta_p^{-1}(U))\Sigma(\eta_p^{-1}(V^*)) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $A_{(e)}$ eliptik kompleks matrisinin tekil değer ayrışımı

$$A_{(e)} = \left(\operatorname{Re}(U) + \frac{i}{\sqrt{-p}}(\operatorname{Im}(U)) \right) \Sigma \left(\operatorname{Re}(V) + \frac{i}{\sqrt{-p}}(\operatorname{Im}(V)) \right)^*$$

biçimindedir. Ayrıca U ve V matrisleri ortonormal olduğundan

$$UU^* = I_m \Rightarrow (\eta_p^{-1}(U))(\eta_p^{-1}(U^*)) = I_m$$

dır. Buradan ise

$$\left(\operatorname{Re}(U) + \frac{i}{\sqrt{-p}}(\operatorname{Im}(U)) \right) \left(\operatorname{Re}(U) + \frac{i}{\sqrt{-p}}(\operatorname{Im}(U)) \right)^* = I_m$$

olur. Benzer biçimde

$$\left(\operatorname{Re}(V) + \frac{i}{\sqrt{-p}}(\operatorname{Im}(V)) \right) \left(\operatorname{Re}(V) + \frac{i}{\sqrt{-p}}(\operatorname{Im}(V)) \right)^* = I_m$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $\left(\operatorname{Re}(U) + \frac{i}{\sqrt{-p}}(\operatorname{Im}(U)) \right)$ ve

$\left(\operatorname{Re}(V) + \frac{i}{\sqrt{-p}}(\operatorname{Im}(V)) \right)$ eliptik kompleks matrisleri ortonormaldir.

Benzer biçimde bu önermenin tersinin doğruluğu da gösterilebilir.

Sonuç. $A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ ve $\eta_p(A_{(e)})$ kompleks matrisinin tekil değer ayrışımı

$\eta_p(A_{(e)}) = U\Sigma V^*$ olsun. Bu durumda

$$\left(A_{(e)}\right)^\dagger = \left(\left(\operatorname{Re}(\eta_p(V)) \right) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \left(\operatorname{Im}(\eta_p(V)) \right) \right) \Sigma^\dagger \left(\operatorname{Re}(\eta_p(U)) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im}(\eta_p(U)) \right)^*$$

dır.

Sonuç. $A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ ve $\eta_p(A_{(e)})$ kompleks matrisinin tekil değer ayrışımı

$\eta_p(A_{(e)}) = U \Sigma V^*$ olsun. Bu durumda $B_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{m \times q}$ için $A_{(E)} X_{(E)} = B_{(E)}$ eliptik matris denkleminin en küçük kareler çözümü $X_{(E)}$ ise

$$\begin{aligned} X_{(E)} &= \left(A_{(e)}\right)^\dagger B_{(E)} \\ &= \left(\left(\operatorname{Re}(\eta_p(V)) \right) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \left(\operatorname{Im}(\eta_p(V)) \right) \right) \Sigma^\dagger \left(\operatorname{Re}(\eta_p(U)) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im}(\eta_p(U)) \right)^* B_{(E)} \end{aligned}$$

dır.

3.4. Pseudo Kodlar

Aşağıda eliptik kompleks matrislerin özdeğer-özvektör, tekil değer ayrışımı, pseudo tersi ve en küçük kareler çözümüne ait pseudo kodlar yer almaktadır.

Algoritma 1. $A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ eliptik kompleks matrisin özdeğer-özvektörlerinin bulunması

- 1) **Başla**
- 2) Giriş $A_{(e)}$ ve p
- 3) Hesapla $\eta_p(A_{(e)}) = A_{(e),r} + I \sqrt{|p|} A_{(e),i}$
- 4) Hesapla $\eta_p(\lambda_{(e)})$ ve $\eta_p(x_{(e)})$
- 5) Hesapla $\lambda_{(e)} = \operatorname{Re} \left(\lambda_{\eta_p(A_{(e)})} \right) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im} \left(\lambda_{\eta_p(A_{(e)})} \right)$
- 6) Hesapla $x_{(e)} = \operatorname{Re} \left(x_{\eta_p(A_{(e)})} \right) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im} \left(x_{\eta_p(A_{(e)})} \right)$
- 7) Yaz $\lambda_{(e)}, x_{(e)}$
- 8) **Dur**

Algoritma 2. $A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ eliptik kompleks matrisin tekil değer ayrışımının bulunması

1) **Başla**

2) Giriş $A_{(e)}$ ve p

3) Hesapla $\eta_p(A_{(e)}) = A_{(e),r} + I\sqrt{|p|}A_{(e),i}$

4) Hesapla $\eta_p(A_{(e)}) = U\Sigma V^*$

5) Hesapla

$$X_{(e)} = \left(\left(\operatorname{Re}(\eta_p(U)) \right) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \left(\operatorname{Im}(\eta_p(U)) \right) \right) \Sigma \left(\operatorname{Re}(\eta_p(V)) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im}(\eta_p(V)) \right)^*$$

6) Yaz $X_{(e)}$

7) **Dur**

Algoritma 3. $A_{(e)} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ pseudo tersinin bulunması

1) **Başla**

2) Giriş $A_{(e)}$ ve p

3) Hesapla $\eta_p(A_{(e)}) = A_{(e),r} + I\sqrt{|p|}A_{(e),i}$

4) Hesapla $\eta_p(A_{(e)}) = U\Sigma V^*$

5) Hesapla

$$\left(A_{(e)} \right)^\dagger = \left(\left(\operatorname{Re}(\eta_p(V)) \right) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \left(\operatorname{Im}(\eta_p(V)) \right) \right) \Sigma^\dagger \left(\operatorname{Re}(\eta_p(U)) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im}(\eta_p(U)) \right)^*$$

6) Yaz $\left(A_{(e)} \right)^\dagger$

7) **Dur**

Algoritma 4. $A_{(e)}X_{(e)} = B_{(e)}$ eliptik kompleks matris denkleminin en küçük kareler

çözümü

1) **Başla**

2) Giriş $A_{(e)}, B_{(e)}$ ve p

3) Hesapla $\eta_p(A_{(e)}) = A_{(e),r} + I\sqrt{|p|}A_{(e),i}$

4) Hesapla $\eta_p(A_{(e)}) = U\Sigma V^*$

5) Hesapla

$$X_{(e)} = \left(\left(\operatorname{Re}(\eta_p(V)) \right) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \left(\operatorname{Im}(\eta_p(V)) \right) \right) \Sigma^\dagger \left(\left(\operatorname{Re}(\eta_p(U)) + \frac{i}{\sqrt{-p}} \operatorname{Im}(\eta_p(U)) \right) \right)^* B_{(E)}$$

6) Yaz $X_{(e)}$

7) **Dur**

4. ELİPTİK KUATERNİYON MATRİSLER İÇİN ÖZDEĞER-ÖZVEKTÖR, TEKİL DEĞER AYRIŞIMI, PSEUDO TERS VE EN KÜÇÜK KARELER PROBLEMİ

Bu bölümde eliptik kuaterniyon matris uzayından eliptik matrislere tanımlı izomorfizmalar yardımıyla eliptik kuaterniyon matrisler için özdeğer-özvektör, tekil değer ayrışımı, pseudo ters ve en küçük kareler problemi kavramlarına ait tanım ve teoremler elde edilmiştir.

4.1. Eliptik Kuaterniyon Katsayılı ve Değerli Polinomların Sıfır Kökleri

Teorem 4.1 Eliptik kuaterniyon katsayılı ve değerli N inci mertebeden monik polinom

$$f_p(x_{(E)}) = x_{(E)}^N + q_{(E),(n-1)}x_{(E)}^{N-1} + \dots + q_{(E),1}x_{(E)} + q_{(E),0}$$

biçiminde verilsin. $f_p(x_{(E)})$ polinomunun en fazla N^2 tane kökü mevcuttur.

İspat.

$f_p(x_{(E)})$ polinomu

$$\begin{aligned} f_p(x_{(E)}) &= (x_{(e),1}e_1 + x_{(e),2}e_2)^N + (q_{(e),(N-1),1}e_1 + q_{(e),(N-1),2}e_2)(x_{(e),1}e_1 + x_{(e),2}e_2)^{N-1} \\ &\quad + \dots + (q_{(e),1,1}e_1 + q_{(e),1,2}e_2)(x_{(e),1}e_1 + x_{(e),2}e_2) + (q_{(e),0,1}e_1 + q_{(e),0,2}e_2) \\ &= \left((x_{(e),1})^N + (q_{(e),(N-1),1})(x_{(e),1})^{N-1} + \dots + (q_{(e),1,1})(x_{(e),1}) + q_{(e),0,1} \right) e_1 + \\ &\quad \left((x_{(e),2})^N + (q_{(e),(N-1),2})(x_{(e),2})^{N-1} + \dots + (q_{(e),1,2})(x_{(e),2}) + q_{(e),0,2} \right) e_2 \\ &= f_p(x_{(e),1})e_1 + f_p(x_{(e),2})e_2 \end{aligned}$$

biçiminde de yazılabilir. Burada $f_p(x_{(e),1})$ ve $f_p(x_{(e),2})$ polinomları N inci mertebeden eliptik katsayılı ve eliptik değerli monik polinomlardır. Bu polinomların en fazla N tane kökü olacağından eliptik kuaterniyon katsayılı ve değerli $f_p(x_{(E)})$ polinomunun en fazla N^2 tane kökü mevcuttur.

Teorem 4.2 $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ karesel eliptik kuaterniyon matrisinin tersi olması için gerek ve yeter koşul $A_{(e),1}, A_{(e),2} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ eliptik matrislerinin tersi olmasıdır.

$A_{(e),1}, A_{(e),2} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ matrislerinin tersi mevcut ise bu durumda

$$A_{(E)}^{-1} = A_{(e),1}^{-1}e_1 + A_{(e),2}^{-1}e_2$$

dir.

İspat. Kabul edelim ki $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ matrisinin tersi var ve

$$A_{(E)}^{-1} = P_{(e),1}e_1 + P_{(e),2}e_2$$

biçiminde olsun. Bu durumda

$$A_{(E)}A_{(E)}^{-1} = (A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2)(P_{(e),1}e_1 + P_{(e),2}e_2) = I_n$$

dir. Buradan ise

$$A_{(e),1}P_{(e),1} = I_n \text{ ve } A_{(e),2}P_{(e),2} = I_n$$

elde edilir. Teorem 2.9'a göre

$$A_{(e),1}^{-1} = P_{(e),1} \text{ ve } A_{(e),2}^{-1} = P_{(e),2}$$

elde edilir.

Tersine kabul edelim ki

$$A_{(e),1}, A_{(e),2} \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$$

eliptik matrisleri tersinir olsun. Bu durumda

$$A_{(E)}(A_{(e),1}^{-1}e_1 + A_{(e),2}^{-1}e_2) = (A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2)(A_{(e),1}^{-1}e_1 + A_{(e),2}^{-1}e_2) = I_n$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$$

matrisi tersidir ve

$$A_{(E)}^{-1} = A_{(e),1}^{-1}e_1 + A_{(e),2}^{-1}e_2$$

dir.

4.2. Eliptik Kuaterniyon Matrislerin Özdeğerleri ve Özvektörleri

Teorem 4.3 $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ olsun. Bu durumda λ_{a+b} ve λ_{a-b} eliptik kompleks sayıları sırasıyla $A_{(e),1}$ ve $A_{(e),2}$ eliptik kompleks matrislerinin x_{a+b} ve x_{a-b} özvektörlerine karşılık gelen özdeğerleridir ancak ve ancak $\lambda_{a+b}e_1 + \lambda_{a-b}e_2$ eliptik kuaterniyonu $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ eliptik kuaterniyon matrisinin $x_{a+b}e_1 + x_{a-b}e_2$ özvektörüne karşılık gelen özdeğeridir.

İspat. Kabul edelim ki λ_{a+b} ve λ_{a-b} eliptik sayıları sırasıyla

$$A_{(e),1} \text{ ve } A_{(e),2}$$

eliptik kompleks matrislerinin x_{a+b} ve x_{a-b} özvektörlerine karşılık gelen özdeğerleri olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_{(E)}(x_{a+b}e_1 + x_{a-b}e_2) &= (A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2)(x_{a+b}e_1 + x_{a-b}e_2) \\ &= A_{(e),1}x_{a+b}e_1 + A_{(e),2}x_{a-b}e_2 \\ &= \lambda_{a+b}x_{a+b}e_1 + \lambda_{a-b}x_{a-b}e_2 \\ &= (\lambda_{a+b}e_1 + \lambda_{a-b}e_2)(x_{a+b}e_1 + x_{a-b}e_2) \end{aligned}$$

olduğundan $\lambda_{a+b}e_1 + \lambda_{a-b}e_2$ eliptik kuaterniyonu $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ eliptik kuaterniyon matrisinin $x_{a+b}e_1 + x_{a-b}e_2$ özvektörüne karşılık gelen özdeğeridir. Tersine $\lambda_{a+b}e_1 + \lambda_{a-b}e_2$ eliptik kuaterniyonu

$$A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$$

eliptik kuaterniyon matrisinin $x_{a+b}e_1 + x_{a-b}e_2$ özvektörüne karşılık gelen özdeğeri olsun.

Yani

$$\left(A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \right) (x_{a+b}e_1 + x_{a-b}e_2) = (\lambda_{a+b}e_1 + \lambda_{a-b}e_2) (x_{a+b}e_1 + x_{a-b}e_2)$$

olsun. Son eşitlikten

$$A_{(e),1}x_{a+b}e_1 + A_{(e),1}x_{a-b}e_2 = \lambda_{a+b}x_{a+b}e_1 + \lambda_{a-b}x_{a-b}e_2$$

$$\Rightarrow A_{(e),1}x_{a+b} = \lambda_{a+b}x_{a+b} \text{ ve } A_{(e),2}x_{a-b} = \lambda_{a-b}x_{a-b}$$

elde edilir ki bu da λ_{a+b} ve λ_{a-b} değerlerinin sırasıyla

$$A_{(e),1} \text{ ve } A_{(e),2}$$

eliptik matrislerinin x_{a+b} ve x_{a-b} özdeğerlerine karşılık gelen özdeğerleri olduğunu ifade eder.

Sonuç. Eliptik matrislerin en fazla N tane özdeğeri olduğundan

$$A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$$

eliptik kuaterniyon matrisinin en fazla N^2 tane özdeğeri vardır.

Örnek 4.4 $A_{(E)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ eliptik

kuaterniyon matrisi ve $p = -2$ olsun. Bu durumda $A_{(e),1}$ ve $A_{(e),2}$ eliptik kompleks matrisleri

$$A_{(e),1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } A_{(e),2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Teorem 4.3'e göre $A_{(e),1}$ ve $A_{(e),2}$ eliptik matrisine karşılık gelen özdeğerler ve özvektörler sırasıyla,

$$\begin{aligned}
A_{(e),1} \text{ matrisi için } & \left\{ \begin{aligned} \lambda_{(e),1} = 9.3541 + 9.6990i &\Rightarrow x_{(e),1} = \begin{pmatrix} 0.5645 + 0.0152i \\ 0.6368 \\ 0.5192 - 0.0543i \end{pmatrix} \\ \lambda_{(e),2} = 2.6917 - 0.1221i &\Rightarrow x_{(e),1} = \begin{pmatrix} 0.7661 \\ -0.2352 + 0.1540i \\ -0.4 - 0.2741i \end{pmatrix} \\ \lambda_{(e),3} = -1.0458 - 0.5769i &\Rightarrow x_{(e),1} = \begin{pmatrix} -0.2401 + 0.3318i \\ 0.6036 \\ -0.4246 - 0.2980i \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \\
A_{(e),2} \text{ matrisi için } & \left\{ \begin{aligned} \lambda'_{(e),1} = -3.3724 - 3.7822i &\Rightarrow x_{(e),1} = \begin{pmatrix} 0.5391 + 0.0207i \\ 0.7130 \\ 0.4179 - 0.1127i \end{pmatrix} \\ \lambda'_{(e),2} = -2.7791 + 0.1668i &\Rightarrow x_{(e),1} = \begin{pmatrix} 0.7395 \\ -0.1478 + 0.0305i \\ -0.3727 - 0.3811i \end{pmatrix} \\ \lambda'_{(e),3} = 1.1515 + 0.6154i &\Rightarrow x_{(e),1} = \begin{pmatrix} -0.1278 + 0.0207i \\ 0.4425 + 0.2561i \\ -0.3811 \end{pmatrix} \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

şeklinindedir. Sonuç olarak eliptik kuaterniyon matrisinin özdeğerleri $\lambda_{(E)} = \lambda_{(e),a}e_1 + \lambda_{(e),b}e_2$ biçiminde bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise $x_{(E)} = x_{(e),a}e_1 + x_{(e),b}e_2$ biçimindedir. Burada $a, b \in \{1, 2, 3\}$ tür.

Teorem 4.5 $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olsun. $A_{(e),1}, A_{(e),2}$ matrislerinin tekil değer ayrışimleri $A_{(e),1} = U_{(e),1}\Sigma_1 V_{(e),1}^*$ ve $A_{(e),2} = U_{(e),2}\Sigma_2 V_{(e),2}^*$ olmak üzere $A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ eliptik kuaterniyon matrisinin tekil değer ayrışımı

$$\begin{aligned}
A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 &= (U_{(e),1}e_1 + U_{(e),2}e_2) \left(\sum_1 e_1 + \sum_2 e_2 \right) (V_{(e),1}e_1 + V_{(e),2}e_2)^* \\
&= U_{(E)} \sum_{(E)} V_{(E)}^*
\end{aligned}$$

biçimindedir.

İspat. $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ için $A_{(e),1}, A_{(e),2}$ eliptik kompleks matrislerinin tekil değer ayrışimleri

$$A_{(e),1} = U_{(e),1} \Sigma_1 V_{(e),1}^* \text{ ve } A_{(e),2} = U_{(e),2} \Sigma_2 V_{(e),2}^*$$

biçiminde olsun. Bu durumda $A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ matrisinin tekil değer ayrışımı

$$\begin{aligned} A_{(E)} &= A_{(e),1} e_1 + A_{(e),2} e_2 = \left(U_{(e),1} \Sigma_1 V_{(e),1}^* A_{(e),2} \right) e_1 + \left(U_{(e),2} \Sigma_2 V_{(e),2}^* \right) e_2 \\ &= \left(U_{(e),1} e_1 + U_{(e),2} e_2 \right) \left(\Sigma_1 e_1 + \Sigma_2 e_2 \right) \left(V_{(e),1} e_1 + V_{(e),2} e_2 \right)^* \\ &= U_{(E)} \Sigma_{(E)} V_{(E)}^* \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Burada $U_{(E)}$ ve $V_{(E)}$ matrisleri üniter matrislerdir. Gerçekten de

$$\begin{aligned} U_{(E)} U_{(E)}^* &= \left(U_{(e),1} e_1 + U_{(e),2} e_2 \right) \left(U_{(e),1} e_1 + U_{(e),2} e_2 \right)^* \\ &= U_{(e),1} U_{(e),1}^* e_1 + U_{(e),2} U_{(e),2}^* e_2 \\ &= I_n e_1 + I_n e_2 = I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{(E)} V_{(E)}^* &= \left(V_{(e),1} e_1 + V_{(e),2} e_2 \right) \left(V_{(e),1} e_1 + V_{(e),2} e_2 \right)^* \\ &= V_{(e),1} V_{(e),1}^* e_1 + V_{(e),2} V_{(e),2}^* e_2 \\ &= I_n e_1 + I_n e_2 = I_n \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $\Sigma_{(E)}$ köşegen matrisi real matris değildir. Reel matris olması için gerek ve yeter koşul

$$\Sigma_1 = \Sigma_2$$

olmasıdır. Genellikle $\Sigma_{(E)}$ matrisi reel ve j 'li terimlerden oluşur. $A_{(E)}$ eliptik kuaterniyon matrisi

$$A_{(E)} = U_{(E)} \Sigma_{(E)} V_{(E)}^T = \begin{bmatrix} u_{1(E)} & \dots & u_{r(E)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1(E)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{r(E)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1(E)}^T \\ \vdots \\ v_{r(E)}^T \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$= \sum_{i=1}^r \sigma_{i(E)} \left(u_{i(E)} \otimes v_{i(E)}^T \right)$$

biçiminde de yazılabilir. Burada \otimes sembolü matrislerdeki dış çarpımı, r ise $A_{(E)}$ matrisinin rankını göstermektedir. $u_{i(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times 1}$ ve $v_{i(e)} \in \mathbb{H}_p^{n \times 1}$ elemanları da sırasıyla $U_{(E)}$ ve $V_{(E)}$ matrislerinin i 'inci sütun vektörleri olup

$$u_{i(E)}^T u_{j(E)} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ ve } v_{i(E)}^T v_{j(E)} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

dır. Denklem 4.1'de $\sigma_{i(E)}$ eliptik kuaterniyonlarına $A_{(E)}$ eliptik kuaterniyon matrisinin tekil değerleri denir.

Örnek 4.6 $A_{(E)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ eliptik

kuaterniyon matris ve $p = -3$ olsun. Bu durumda

$$A_{(e)1} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 18 \\ 7 & 4 & 13 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 16 & 2 & 12 \\ 6 & 10 & 14 \\ 8 & 18 & 4 \end{pmatrix} \text{ ve } A_{(e)2} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. $A_{(e)1}$ eliptik kompleks matrisinin tekil değer ayrışımı

$$A_{(e),1} = U_{(e),1} \Sigma_{(e),1} V_{(e),1}^*$$

olmak üzere

$$U_{(e),1} = \begin{pmatrix} -0.3069 & -0.1345 & 0.0813 \\ -0.2121 & -0.0340 & 0.0113 \\ -0.2064 & 0.2779 & -0.0354 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -0.3175 & 0.3657 & 0.2433 \\ -0.3063 & -0.0155 & -0.4731 \\ -0.2795 & -0.4089 & 0.2183 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_{(e),1} = \begin{pmatrix} 58.8878 & 0 & 0 \\ 0 & 25.3865 & 0 \\ 0 & 0 & 11.9897 \end{pmatrix}$$

ve

$$V_{(e),1} = \begin{pmatrix} -0.5752 & 0.3299 & 0.7485 \\ -0.5114 & -0.7733 & -0.0521 \\ -0.6277 & 0.2415 & -0.5888 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.0279 & -0.1857 & 0.1033 \\ -0.0614 & +0.2093 & -0.1394 \end{pmatrix}$$

dır.

Benzer biçimde $A_{(e)2}$ eliptik kompleks matrisinin tekil değer ayrışımı

$$A_{(e)2} = U_{(e)2} \Sigma_{(e)2} V_{(e)2}^*$$

dır. Burada

$$U_{(e)2} = \begin{pmatrix} -0.8048 & 0.0369 & 0.5924 \\ -0.3199 & -0.8677 & -0.3805 \\ 0.5 & -0.4957 & 0.7102 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_{(e)2} = \begin{pmatrix} 9.9191 & 0 & 0 \\ 0 & 6.0810 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7958 \end{pmatrix}$$

ve

$$V_{(e)2} = \begin{pmatrix} 0.9979 & -0.0281 & -0.0589 \\ -0.0645 & -0.2854 & -0.9562 \\ 0.0100 & 0.9580 & -0.2866 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak $A_{(E)}$ eliptik kuaterniyon matrisinin tekil değer ayrışımı

$A_{(E)} = U_{(E)} \Sigma_{(E)} V_{(E)}^*$ ise Teorem 4.5'e göre

$$\begin{aligned} U_{(E)} &= (U_{(e)1} e_1 + U_{(e)2} e_2) \\ &= \begin{pmatrix} -0.5559 & -0.0488 & 0.3369 \\ -0.2660 & -0.4509 & -0.1846 \\ 0.1468 & -0.1089 & 0.3374 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -0.1587 & 0.1828 & 0.1216 \\ -0.1532 & -0.0078 & -0.2366 \\ -0.1397 & -0.2045 & 0.1091 \end{pmatrix} \\ &\quad + j \begin{pmatrix} 0.2489 & -0.0857 & -0.2555 \\ 0.0539 & 0.4169 & 0.1959 \\ 0.3532 & 0.3868 & -0.3728 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -0.1587 & 0.1828 & 0.1216 \\ -0.1532 & -0.0078 & -0.2366 \\ -0.1397 & -0.2045 & 0.1091 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\Sigma_{(E)} = \begin{pmatrix} 34.4034 & 0 & 0 \\ 0 & 15.7338 & 0 \\ 0 & 0 & 5.5970 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 24.4844 & 0 & 0 \\ 0 & 9.6527 & 0 \\ 0 & 0 & 6.3928 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned}
V_{(E)} &= \left(V_{(e),1}e_1 + V_{(e),2}e_2 \right) \\
&= \begin{pmatrix} 0.2113 & 0.1509 & 0.3448 \\ -0.2879 & -0.5293 & -0.5042 \\ -0.3088 & 0.5997 & -0.4377 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.0139 & -0.0929 & 0.0516 \\ -0.0307 & 0.1046 & -0.0697 \end{pmatrix} \\
&\quad + j \begin{pmatrix} -0.7865 & 0.1790 & 0.4037 \\ -0.2234 & -0.2439 & 0.4520 \\ -0.3189 & -0.3583 & -0.1511 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.0139 & -0.0929 & 0.0516 \\ -0.0307 & 0.1046 & -0.0697 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

dir.

Sonuç. $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ eliptik kuaterniyon matrisinin tekil değer ayrışımı

$$A_{(E)} = U_{(E)} \sum_{(E)} V_{(E)}^*$$

biçiminde olsun. Bu durumda $A_{(E)}$ eliptik kuaterniyon matrisinin pseudo tersi

$$A_{(E)}^\dagger = V_{(E)} \sum_{(E)}^\dagger U_{(E)}^*$$

biçimindedir. Burada

$$\sum_{(E)}^\dagger = \begin{pmatrix} \sigma_1^\dagger & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r^\dagger \end{pmatrix}$$

ve

$$\sigma_i^\dagger = \begin{cases} 1/\sigma_i, & \sigma_i = c_{1i}e_1 + c_{2i}e_2 \text{ ve } c_{1i}c_{2i} \neq 0 \\ c_{1i}^{-1}e_1, & c_{1i} \neq 0 \text{ ve } c_{2i} = 0 \\ c_{2i}^{-1}e_2, & c_{1i} = 0 \text{ ve } c_{2i} \neq 0 \\ 0, & c_{1i} = c_{2i} = 0 \end{cases}$$

dir.

Teorem 4.7 $A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $B_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times q}$ için $A_{(E)}X_{(E)} = B_{(E)}$ eliptik kuaterniyon matrisinin en küçük kareler çözümü $X_{(E)}$ ise

$$X_{(E)} = A_{(E)}^\dagger B_{(E)} = V_{(E)} \sum_{(E)}^\dagger U_{(E)}^* B_{(E)}$$

dır.

İspat. $A_{(E)}X_{(E)} = B_{(E)}$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümü $X_{(E)}$ ise bu durumda $\|A_{(E)}X_{(E)} - B_{(E)}\| = \text{minimumdur}$. Diğer yandan

$$\begin{aligned} \|A_{(E)}X_{(E)} - B_{(E)}\|^2 &= \left\| \left(A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \right) \left(X_{(e),1}e_1 + X_{(e),2}e_2 \right) - \left(B_{(e),1}e_1 + B_{(e),2}e_2 \right) \right\|^2 \\ &= \left\| \left(A_{(e),1}X_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}X_{(e),2}e_2 \right) - \left(B_{(e),1}e_1 + B_{(e),2}e_2 \right) \right\|^2 \\ &= \left\| \left(A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1} \right) e_1 + \left(A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2} \right) e_2 \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\left\| A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1} \right\|^2 + \left\| A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2} \right\|^2 \right) \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $\|A_{(E)}X_{(E)} - B_{(E)}\| = \min$. olması için gerek ve yeter koşul

$$\|A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1}\| = \min . \quad , \quad \|A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2}\| = \min .$$

olmasıdır.

$$\|A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1}\| = \min .$$

ise

$$X_{(e),1} = A_{(e),1}^\dagger B_{(e),1}$$

dir. Benzer biçimde

$$\|A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2}\| = \min .$$

ise

$$X_{(e),2} = A_{(e),2}^\dagger B_{(e),1}$$

dir. Diğer taraftan $A_{(e),1}, A_{(e),2}$ eliptik kompleks matrislerinin tekil değer ayrışmaları

$$A_{(e),1} = U_{(e),1} \Sigma_1 V_{(e),1}^* , \quad A_{(e),2} = U_{(e),2} \Sigma_2 V_{(e),2}^*$$

biçiminde olsun. Bu durumda

$$X_{(e),1} = V_{(e),1} \Sigma_1 U_{(e),1}^* B_{(e),1} \text{ ve } X_{(e),2} = V_{(e),2} \Sigma_2 U_{(e),2}^* B_{(e),2}$$

dir. Sonuç olarak $A_{(E)} X_{(E)} = B_{(E)}$ denkleminin en küçük kareler çözümü

$$\begin{aligned} X_{(E)} &= X_{(e),1} e_1 + X_{(e),2} e_2 = \left(V_{(e),1} \Sigma_1 U_{(e),1}^* B_{(e),1} \right) e_1 + \left(V_{(e),2} \Sigma_2 U_{(e),2}^* B_{(e),2} \right) e_2 \\ &= \left(\left(V_{(e),1} \Sigma_1 U_{(e),1}^* \right) e_1 + \left(V_{(e),2} \Sigma_2 U_{(e),2}^* \right) e_2 \right) \left(B_{(e),1} \right) e_1 + \left(B_{(e),2} \right) e_2 \\ &= V_{(E)} \sum_{(E)}^{\dagger} U_{(E)}^* B_{(E)} = A_{(E)}^{\dagger} B_{(E)} \end{aligned}$$

dir.

4.3. Pseudo Kodlar

Aşağıda eliptik kuaterniyon matrislerin özdeğer-özvektör, tekil değer ayrışımı, pseudo tersi ve en küçük kareler çözümüne ait pseudo kodlar yer almaktadır.

Algoritma 5. $A_{(E)} = A_{(e),1} e_1 + A_{(e),2} e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ eliptik kuaterniyon matrisinin

özdeğerlerinin ve özvektörlerinin hesaplanması

- 1) **Başla**
- 2) Giriş $A_{(E)}$ ve p
- 3) Hesapla $A_{(e),1}$ ve $A_{(e),2}$
- 4) Hesapla λ_{a+b} ve λ_{a-b}
- 5) Hesapla x_{a+b} ve x_{a-b}
- 6) Hesapla $\lambda_{(E)} = \lambda_{a+b} e_1 + \lambda_{a-b} e_2$
- 7) Hesapla $x_{(E)} = x_{a+b} e_1 + x_{a-b} e_2$
- 8) Yaz $\lambda_{(E)}, x_{(E)}$
- 9) **Dur**

Algoritma 6. $A_{(E)} = A_{(e),1} e_1 + A_{(e),2} e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ eliptik kuaterniyon matrisinin tekil değer ayrışımı

- 1) **Başla**
- 2) Giriş $A_{(E)}$ ve p
- 3) Hesapla $A_{(e),1}$ ve $A_{(e),2}$
- 4) Hesapla $A_{(e),1} = U_{(e),1} \Sigma_1 V_{(e),1}^*$ ve $A_{(e),2} = U_{(e),2} \Sigma_2 V_{(e),2}^*$
- 5) Hesapla $(U_{(e),1} e_1 + U_{(e),2} e_2), (\sum_1 e_1 + \sum_2 e_2), (V_{(e),1} e_1 + V_{(e),2} e_2)$
- 6) Yaz $(U_{(e),1} e_1 + U_{(e),2} e_2), (\sum_1 e_1 + \sum_2 e_2), (V_{(e),1} e_1 + V_{(e),2} e_2)$
- 7) **Dur**

Algoritma 7. $A_{(E)} = A_{(e),1} e_1 + A_{(e),2} e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ eliptik kuarterniyon matrisinin pseudo tersi

- 1) **Başla**
- 2) Giriş $A_{(E)}$ ve p
- 3) Hesapla $A_{(e),1}$ ve $A_{(e),2}$
- 4) Hesapla $A_{(e),1} = U_{(e),1} \Sigma_1 V_{(e),1}^*$ ve $A_{(e),2} = U_{(e),2} \Sigma_2 V_{(e),2}^*$
- 5) Hesapla $A_{(E)} = U_{(E)} \sum_{(E)} V_{(E)}^*$
- 6) Hesapla $A_{(E)}^\dagger = V_{(E)} \sum_{(E)}^\dagger U_{(E)}^*$
- 7) Yaz $A_{(E)}^\dagger$
- 8) **Dur**

Algoritma 8. $A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $B_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times q}$ için $A_{(E)} X_{(E)} = B_{(E)}$ eliptik kuarterniyon matrisinin en küçük kareler çözümü

- 1) **Başla**
- 2) Giriş $A_{(E)}, B_{(E)}$ ve p
- 3) Hesapla $A_{(e),1}, A_{(e),2}, B_{(e),1}$ ve $B_{(e),2}$
- 4) Hesapla $A_{(e),1} = U_{(e),1} \Sigma_1 V_{(e),1}^*$ ve $A_{(e),2} = U_{(e),2} \Sigma_2 V_{(e),2}^*$
- 5) Hesapla $A_{(E)} = U_{(E)} \sum_{(E)} V_{(E)}^*$
- 6) Hesapla $A_{(E)}^\dagger = V_{(E)} \sum_{(E)}^\dagger U_{(E)}^*$

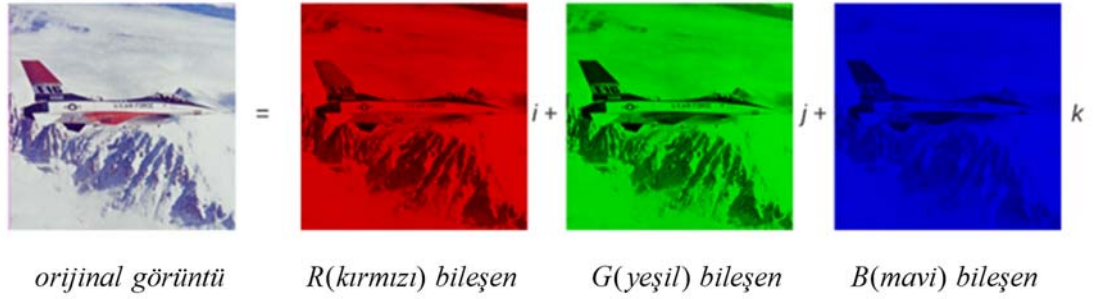
7) Hesapla $X_{(E)} = A_{(E)}^\dagger B_{(E)} = V_{(E)} \sum_{(E)}^\dagger U_{(E)}^* B_{(E)}$

8) Yaz $X_{(E)}$

9) Dur

5. ELİPTİK TEKİL DEĞER AYRIŞIMI YARDIMIYLA RENKLİ GÖRÜNTÜ SIKIŞTIRMA

Eliptik kuaterniyonların bir reel ve üç imajiner kısmı mevcuttur. RGB uzayında ifade edilmiş renkli bir görüntünün ise her bir pikselinin kırmızı, yeşil ve mavi olmak üzere üç temel renk bileşeni içerdiği daha önce söylenmişti. Bu bilgilerden yola çıkarak renkli bir görüntünün her bir pikseli pür imajiner (reel bileşeni sıfır olan) eliptik kuaterniyon ile ifade edilebilir. Bu gösterime göre renkli görüntülerin her bir pikselinin kırmızı, yeşil ve mavi bileşenleri pür imajiner eliptik kuaterniyonların i, j ve k bileşenlerine karşılık getirilir. Dolayısıyla $m \times n$ piksel çözünürlüğe sahip renkli bir görüntü $f_{(E)} = R_{(E),i}i + G_{(E),j}j + B_{(E),k}k$ biçiminde eliptik kuaterniyon matrisi olarak ifade edilebilir. Burada $R_{(E),i}, G_{(E),j}$ ve $B_{(E),k} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisleri renkli görüntünün sırasıyla kırmızı, yeşil ve mavi bileşen matrisleridir. Bu temsil görsel olarak Şekil 5.1'de gösterilmiştir.



Şekil 5.1 Renkli görüntünün eliptik kuaterniyon matris gösterimi.

Diğer yandan eliptik tekil değer ayrışımı (ESVD) ile renkli bir görüntü

$$f_{(E)} = U_{(E)} \sum_{(E)} V_{(E)}^*$$

biçiminde de temsil edilebilir. Burada $U_{(E)}, \sum_{(E)}$ ve $V_{(E)}^*$ matrisleri Algoritma 6'ya göre hesaplanır. ESVD uygulanmış renkli bir görüntüye üç kanal görüntüsüne ayrılmaksızın önemli birçok görüntü işleme teknikleri uygulanabilir. Bu bölümde ESVD ile renkli bir görüntüye bölümlenme, sıkıştırma ve iyileştirme teknikleri

uygulanacaktır. Bu teknikler için kullanacağımız test görüntüleri Şekil 5.2'de verilmiştir.



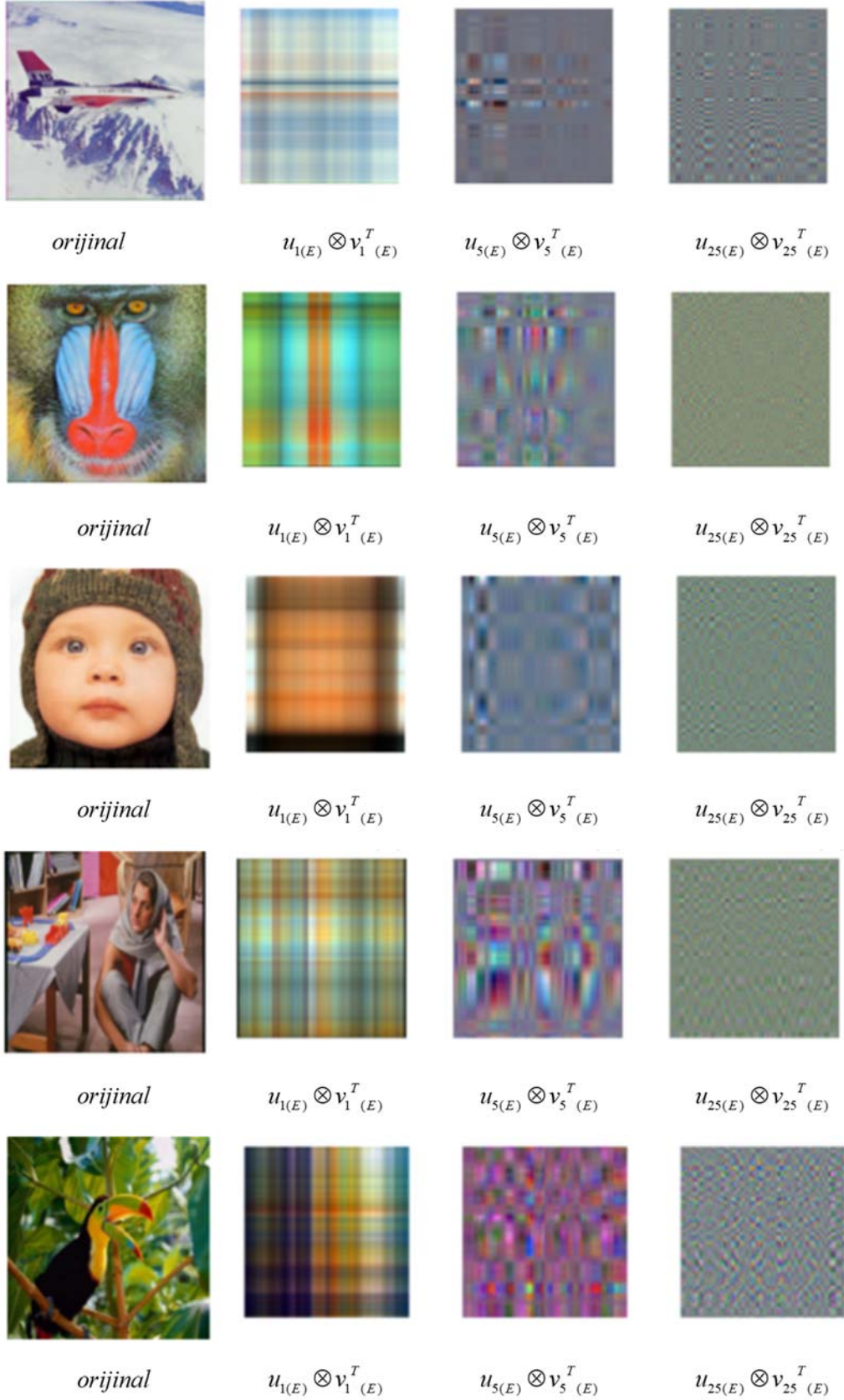
Şekil 5.1 Tüm deneysel test görüntüleri (a) Airplane, (b) Baboon, (c) Baby, (d) Barbara, (e) Bird (f) Boat (g) Cameraman (h) Goldhill (i) Monarch ve (j) Peppers.

5.1. Renkli Görüntülerin Öz Görüntüleri

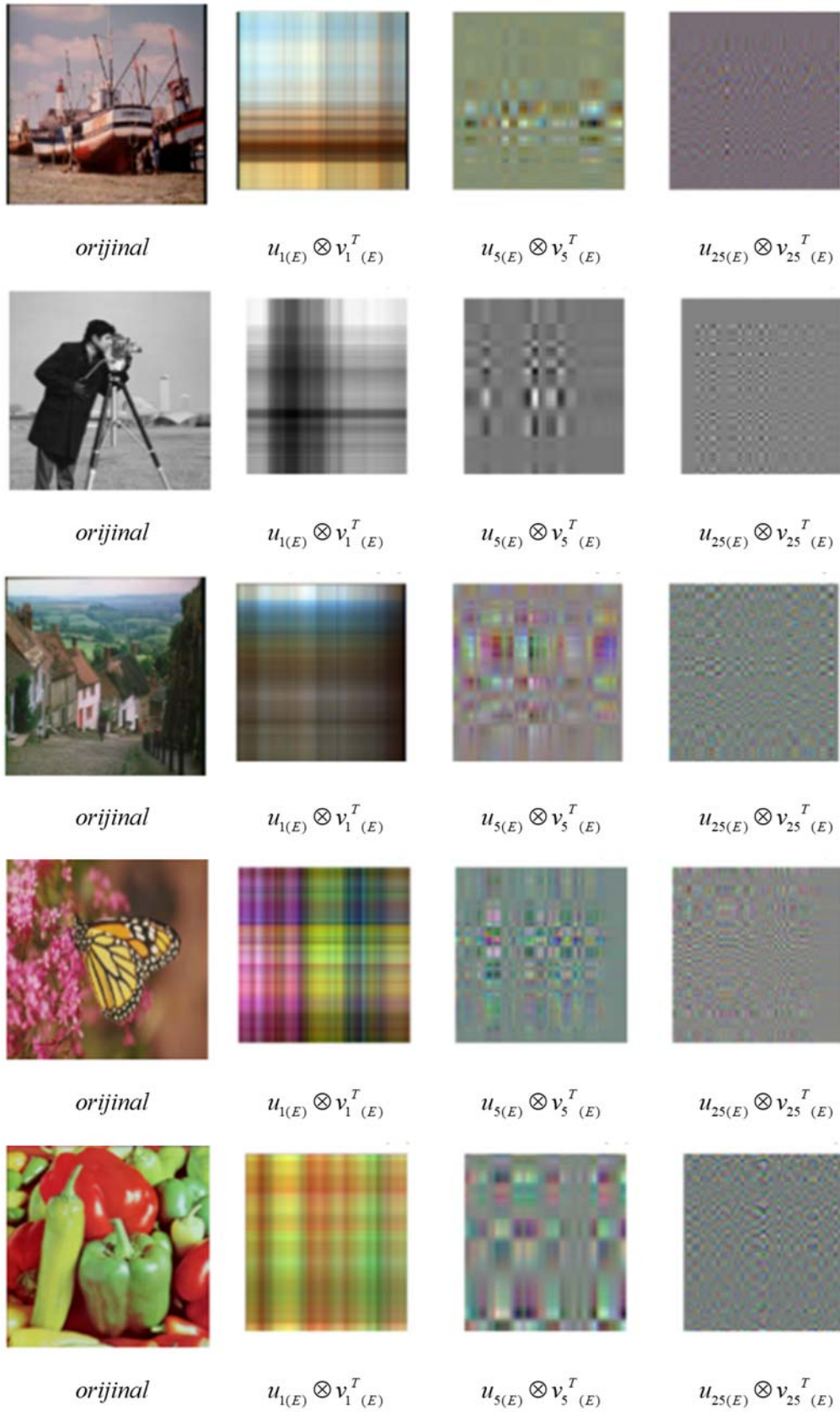
Renkli görüntülerin ESVD si

$$f_{(E)} = U_{(E)} \sum_{(E)} V_{(E)}^* = \sum_{i=1}^r \sigma_{i(E)} \left(u_{i(E)} \otimes v_{i(E)}^T \right)$$

biçiminde $u_{i(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times 1}$ ve $v_{i(E)} \in \mathbb{H}_p^{n \times 1}$ eliptik değerli vektörlerin dış çarpımlarının toplamı biçiminde de yazılabilir. (Burada $r, f_{(E)}$ görüntü matrisinin rankını göstermektedir.) Her bir $u_{i(E)} \otimes v_{i(E)}^T$ çarpımına görüntünün öz görüntüsü denir. Sonuç olarak $f_{(E)}$ renkli görüntüsü r adet öz görüntülerinin lineer bileşimi biçiminde düşünülebilir. Şekil 5.3'de ve Şekil 5.4'de test görüntülerinin $p = -0.5$ için bazı özgörüntüleri verilmiştir. Bu görüntüler orijinal görüntülerin ayrıştırılmasından elde edilen birinci, beşinci ve yirmibeşinci özgörüntülerinin normalleştirilmiş mutlak değer versiyonlarını göstermektedir. Görüldüğü üzere ilk özgörüntüler orijinal görüntünün düşük frekanslı bileşenlerini temsil ederken sonrakiler yüksek frekanslı bileşenleri temsil etmektedir.



Şekil 5.2 Test görüntülerinin seçilmiş özgörüntüleri.



Şekil 5.3 Test görüntülerinin seçilmiş özgörüntüleri.

5.2. Eliptik Tekil Ayrışımı ile Renkli Görüntü Sıkıştırma

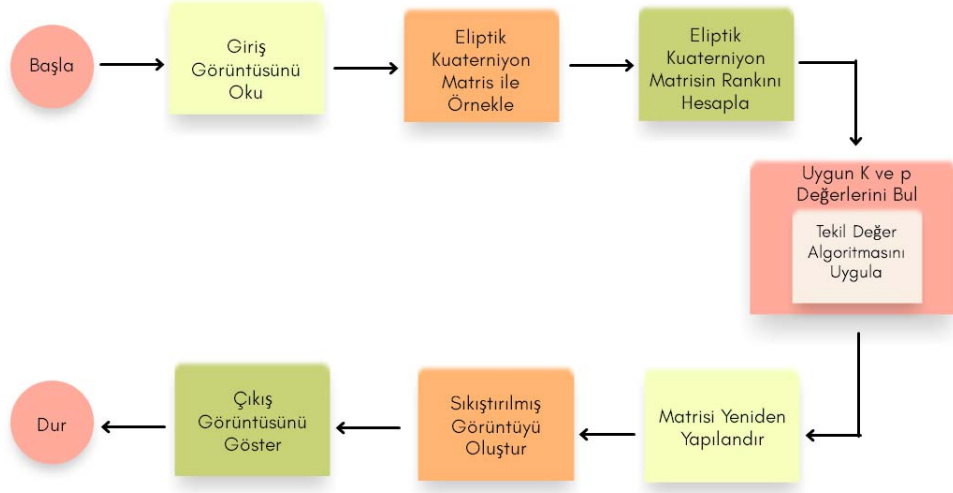
Şekil 5.2'de ki test görüntüleri

$$f_{(E)} = U_{(E)} \sum_{(E)} V_{(E)}^* = \sum_{i=1}^R \sigma_{i(E)} (u_{i(E)} \otimes v_{i(E)}^T) \quad (5.1)$$

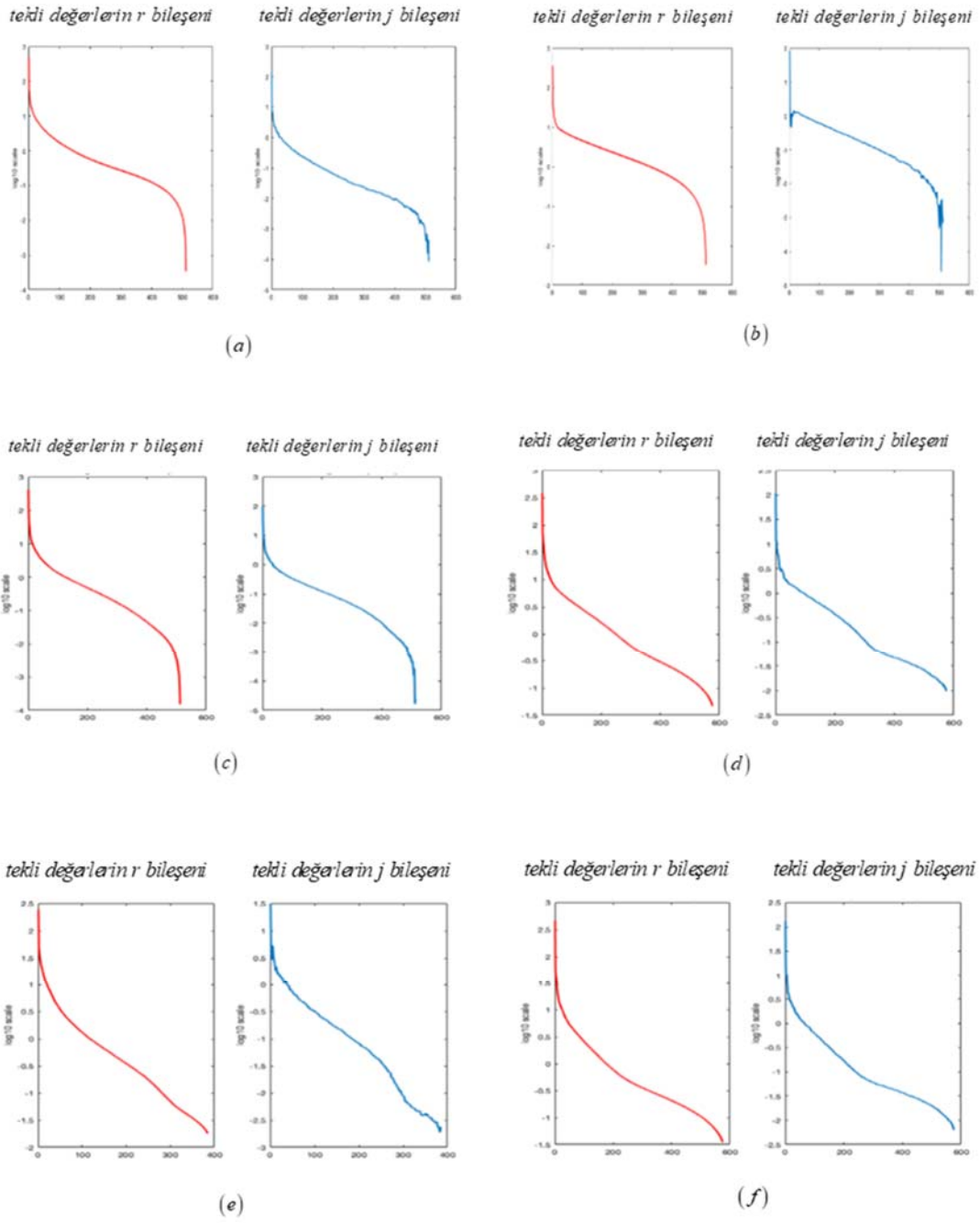
formülü yardımıyla temsil edildiğinde bu test görüntülerinin tekil değerlerinin değişimi Şekil 5.6'da gösterilmiştir. Şekil 5.6'da da görüldüğü gibi test görüntülerinin tekil değerleri çok hızlı bir şekilde bozulmaktadır. Bu nedenle $K < R$ şartını sağlayan küçük K değerleri için bile renkli görüntünün iyi bir yaklaşıklığı sağlanabilir. Denklem 5.1'de $f_{(E)}$ matrisine yaklaşmak için $K < R$ özelliğindeki K değerleri için

$$f_{(E)} = \sum_{i=1}^K \sigma_{i(E)} (u_{i(E)} \otimes v_{i(E)}^T)$$

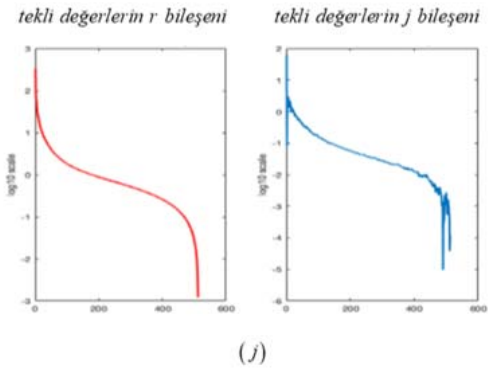
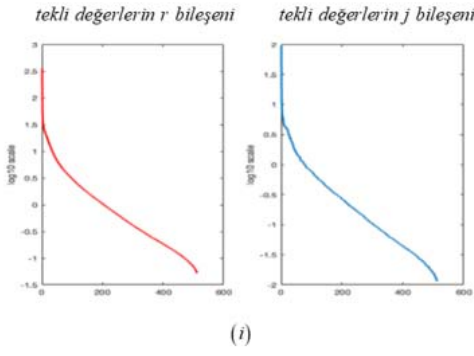
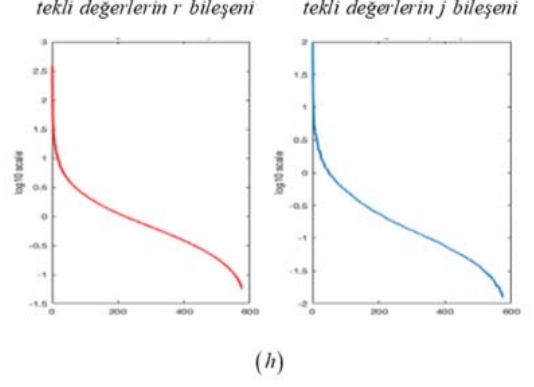
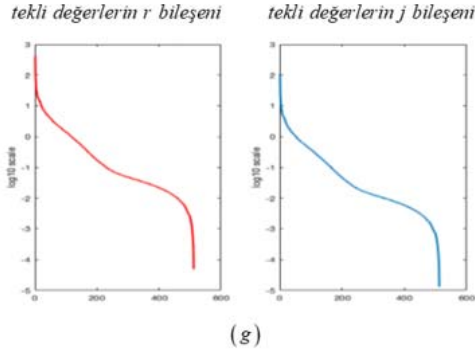
denklemini kullanılabilir. Bu durumda renkli bir görüntüyü saklamak için gerekli saklama alanı $3mn$ den $K(m+n+2)$ e düşecektir. ESVD ile görüntü sıkıştırma adımları Şekil 5.5'de verilmiştir.



Şekil 5.4 ESVD ile görüntü sıkıştırma adımları.

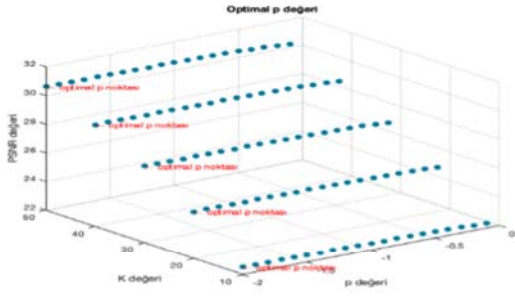


Şekil 5.5 Test görüntülerinin singüler değerlerinin değişimi: (a) Airplane, (b) Baboon, (c) Baby, (d) Barbara, (e) Bird, (f) Boast.

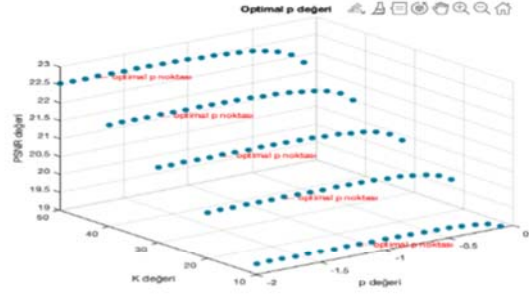


Şekil 5.7 Test görüntülerinin singüler değerlerinin değişimi: (g) Cameraman, (h) Goldhill, (i) Monarch ve (j) Peppers.

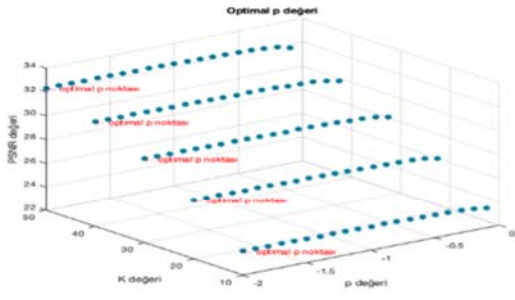
Tüm test görüntülerinin ve için optimal değerleri ve bu değerlere karşılık gelen PSNR değerleri Şekil 5.8'de ve Şekil 5.9'da verilmiştir.



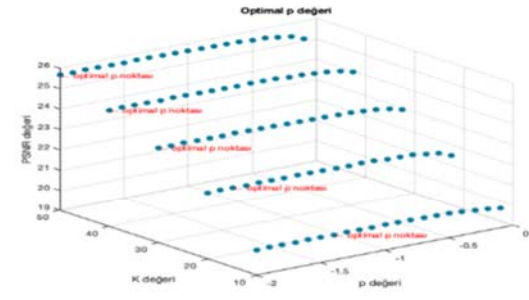
(a)



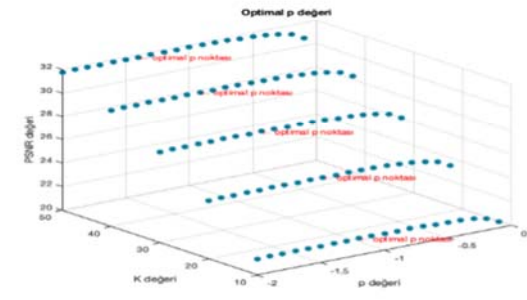
(b)



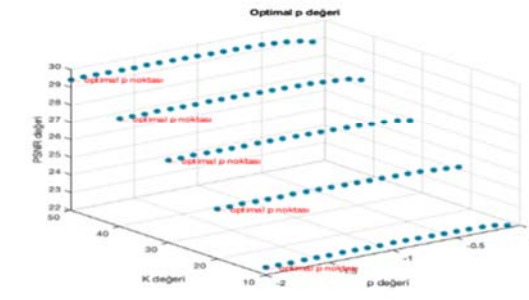
(c)



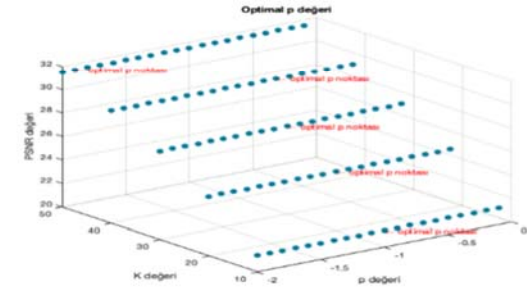
(d)



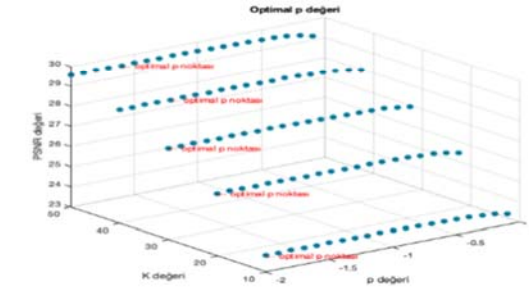
(e)



(f)

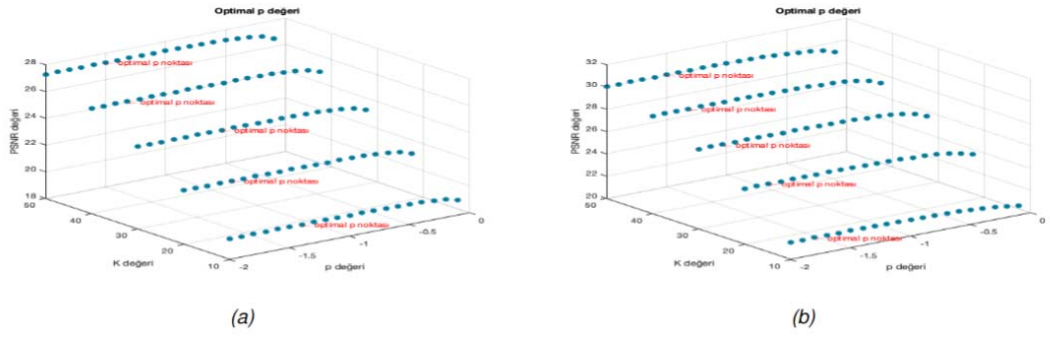


(g)



(h)

Şekil 5.6 Optimal p değerleri: (a) Airplane, (b) Baboon, (c) Baby, (d) Barbara, (e) Bird, (f) Boast (g) Cameraman ve (h) Goldhill.



Şekil 5.7 Optimal p değerleri: (a) Monarch ve (b) Peppers.

Ayrılabilir metod (tekil değer ayrışımının R , G ve B bileşenlerine ayrı ayrı uygulanması ile elde edilen sıkıştırma metodu) ile QSVD Pei ve ark. (2003), RBSVD Pei ve ark. (2008), gibi hiperkompleks tabanlı sıkıştırma metodlarıyla önerdiğimiz ESVD sıkıştırma yönteminin test görüntüleri üzerindeki PSNR ve MSE değerleri Tablo 5.1 ve Tablo 5.2'de verilmiştir.

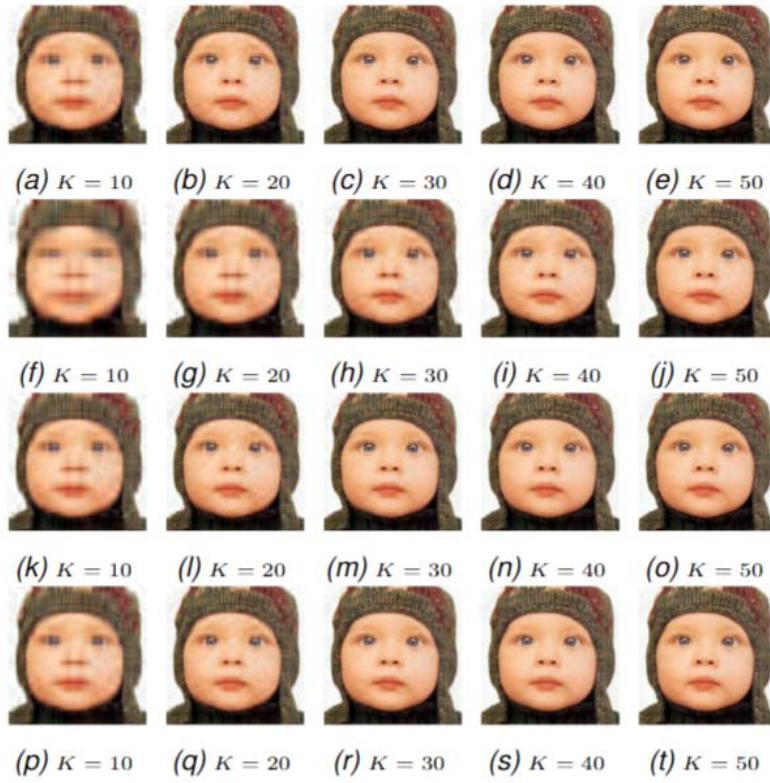
Tablo 5.1 Test görüntüleri üzerinde ayrılabilir metod, QSVD, RBSVD ve ESVD (Önerilen) yöntemlerinin sıkıştırma sonuçları (PSNR).

Metod	K	Airplar	Baboo	Baby	Barbar	Bird	Boast	Camarar	Goldh	Monar	Peppe
Seperable	10	22.47626	19.22365	23.97807	20.17889	21.15023	22.37226	21.40283	23.80553	19.47392	21.49341
QSVD	10	20.38655	18.29587	21.38905	18.05028	18.73208	20.04556	19.08185	21.83407	18.06302	18.58161
RBSVD	10	22.5009	19.3129	24.0043	20.2469	21.4129	22.4091	21.4028	23.8138	19.5610	21.4875
Önerilen M	10	22.5475	19.3139	24.0338	20.2534	21.4170	22.4318	21.4028	23.8295	19.5665	21.5484
Seperable	20	25.31003	20.20994	26.88820	22.15654	24.80274	24.72538	25.01313	26.02290	21.95326	24.86057
QSVD	20	22.45925	19.23449	23.96131	20.19767	21.27985	22.36479	21.40283	23.77338	19.49255	21.41298
RBSVD	20	25.2813	20.3113	26.9646	22.2774	24.9998	24.7745	25.0131	26.0560	22.0337	24.9569
Önerilen M	20	25.3257	20.3174	26.9922	22.2926	25.0007	24.8173	25.0131	26.0668	22.0406	25.0173
Seperable	30	27.32780	20.98207	29.03393	23.52689	27.48460	26.55361	27.49395	27.44853	24.03627	27.00183
QSVD	30	24.01954	19.77926	25.56817	21.31606	23.25004	23.67966	23.34683	25.03847	20.76419	23.41311
RBSVD	30	27.3093	21.1020	29.0947	23.6534	27.7283	26.5958	27.4940	27.4956	24.1685	27.1323
Önerilen M	30	27.3648	21.1143	29.1390	23.6939	27.7327	26.6443	27.4940	27.5141	24.1727	27.1783
Seperable	40	29.05210	21.68901	30.74857	24.57648	29.69316	28.01858	29.57108	28.54094	25.76969	28.63302
QSVD	40	25.25027	20.21537	26.89391	22.19245	24.84919	24.70719	25.01313	26.00215	21.97255	24.86690
RBSVD	40	29.0545	21.8245	30.8231	24.7075	29.9385	28.0923	29.5711	28.6204	25.8689	28.7418
Önerilen M	40	29.1064	21.8434	30.8646	24.7504	29.9484	28.1269	29.5711	28.6303	25.8795	28.7872
Seperable	50	30.53264	22.36072	32.18642	25.47954	31.51227	29.28501	31.50647	29.47336	27.17356	29.93859
QSVD	50	26.31583	20.61153	28.02365	22.92146	26.28653	25.66022	26.32754	26.79486	23.07402	26.03258
RBSVD	50	30.5456	22.5040	32.2748	25.6348	31.7679	29.3657	31.5065	29.5536	27.2814	30.0184
Önerilen M	50	30.6147	22.5321	32.3219	25.6717	31.7828	29.4267	31.5065	29.5638	27.2899	30.0510

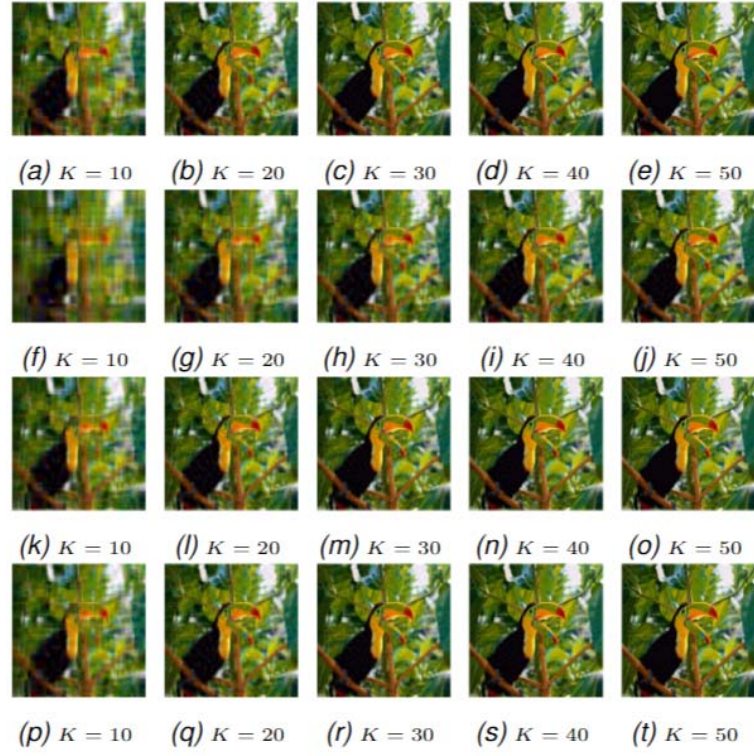
Tablo 5.2 Test görüntüleri üzerinde ayrılabilir metod, QSVD, RBSVD ve ESVD (Önerilen) yöntemlerinin sıkıştırma sonuçları (MSE).

Metod	K	Airplar	Baboo	Baby	Barbar	Bird	Boast	Cameras	Goldh	Monar	Peppe
Seperable	10	0.00565	0.01196	0.00400	0.00960	0.00767	0.00579	0.00724	0.00416	0.01129	0.00709
QSVD	10	0.00915	0.01481	0.00726	0.01567	0.01339	0.00990	0.01235	0.00656	0.01562	0.01386
RBSVD	10	0.00562	0.01171	0.00398	0.00945	0.00722	0.00574	0.00724	0.00416	0.01106	0.00710
Önerilen M	10	0.00556	0.01171	0.00395	0.00943	0.00722	0.00571	0.00724	0.00414	0.01105	0.00700
Seperable	20	0.00294	0.00953	0.00205	0.00609	0.00331	0.00337	0.00315	0.00250	0.00638	0.00327
QSVD	20	0.00568	0.01193	0.00402	0.00956	0.00745	0.00580	0.00724	0.00419	0.01124	0.00722
RBSVD	20	0.00296	0.00931	0.00201	0.00592	0.00316	0.00333	0.00315	0.00248	0.00626	0.00319
Önerilen M	20	0.00293	0.00930	0.00200	0.00590	0.00316	0.00330	0.00315	0.00247	0.00625	0.00315
Seperable	30	0.00185	0.00798	0.00125	0.00444	0.00178	0.00221	0.00178	0.00180	0.00395	0.00199
QSVD	30	0.00396	0.01052	0.00277	0.00739	0.00473	0.00429	0.00463	0.00313	0.00839	0.00456
RBSVD	30	0.00186	0.00776	0.00123	0.00431	0.00169	0.00219	0.00178	0.00178	0.00383	0.00194
Önerilen M	30	0.00183	0.00774	0.00122	0.00427	0.00169	0.00217	0.00178	0.00177	0.00383	0.00192
Seperable	40	0.00124	0.00678	0.00084	0.00349	0.00107	0.00158	0.00110	0.00140	0.00265	0.00137
QSVD	40	0.00299	0.00952	0.00204	0.00604	0.00327	0.00338	0.00315	0.00251	0.00635	0.00326
RBSVD	40	0.00124	0.00657	0.00083	0.00338	0.00101	0.00155	0.00110	0.00137	0.00259	0.00134
Önerilen M	40	0.00123	0.00654	0.00082	0.00335	0.00101	0.00154	0.00110	0.00137	0.00258	0.00132
Seperable	50	0.00088	0.00581	0.00060	0.00283	0.00071	0.00118	0.00071	0.00113	0.00192	0.00101
QSVD	50	0.00234	0.00869	0.00158	0.00510	0.00235	0.00272	0.00233	0.00209	0.00493	0.00249
RBSVD	50	0.00088	0.00562	0.00059	0.00273	0.00067	0.00116	0.00071	0.00111	0.00187	0.00100
Önerilen M	50	0.00087	0.00558	0.00059	0.00271	0.00066	0.00114	0.00071	0.00111	0.00187	0.00099

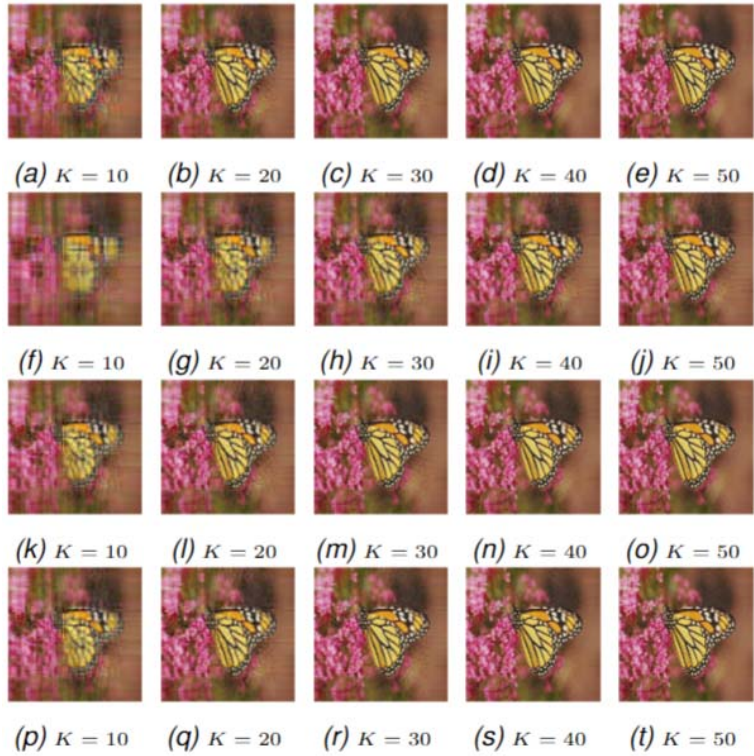
Şekil 5.10-5.12 da da önerilen ESVD sıkıştırma yöntemi ile diğer yöntemlerden elde edilen test görüntülerinin bazı kısmi toplamları gösterilmektedir.



Şekil 5.8 Test görüntülerinin seçilmiş kısmi toplamları (Ayrılabilir metod: a-e, QSVD: f-j, RBSVD: k-o ve ESVD: p-t).



Şekil 5.11 Test görüntülerinin seçilmiş kısmi toplamları (Ayrılabilir metod: a-e, QSVD: f-j, RBSVD: k-o ve ESVD: p-t).



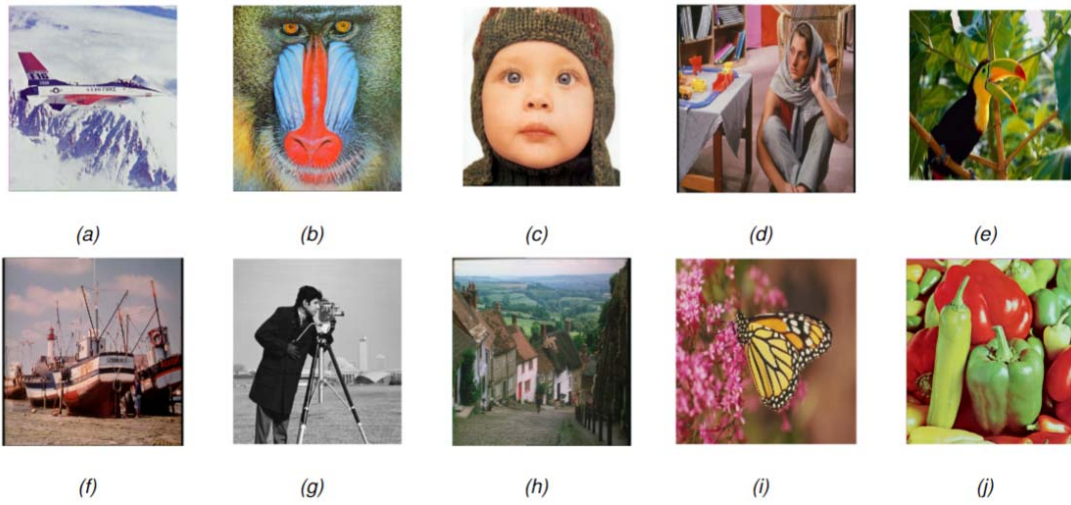
Şekil 5.12 Test görüntülerinin seçilmiş kısmi toplamları (Ayrılabilir metod: a-e, QSVD: f-j, RBSVD: k-o ve ESVD: p-t).

5.3. ESVD ile Linear Ağırlıklı Görüntü İyileştirme

ESVD ile lineer ağırlıklı görüntü işleme formülü

$$f_{(E)} = \sum_{i=1}^K (1+mi) \sigma_{i(E)} (u_{i(E)} \otimes v_{i(E)}^T) \quad (m \geq 0)$$

biçimindedir. ESVD tabanlı lineer ağırlıklandırma görüntünün yüksek frekanslı bileşenlerini iyileştirecektir. Bu bakımdan yüksek geçirgen filtreye benzer. Şekil 5.13'de $m=0.005$ ve $p=-5$ için ESVD ile lineer ağırlıklı görüntü iyileştirme metodunun test görüntülerine uygulanmasıyla elde edilmiş görüntüler yer almaktadır.



Şekil 5.13 $m=0.005$ ve $p=-5$ için lineer ağırlıklı görüntü iyileştirme metodunun uygulanması ile elde edilen iyileştirilmiş görüntüler.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada eliptik kompleks sayı katsayılı ve değerli N inci dereceden monik polinomların kökleri, eliptik kompleks matrislerin özdeğer-özvektörleri ve tekil değer ayrışımı kavramlarına dair tanımlar verilerek ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Eliptik kompleks matrislerin tekil değer ayrışımının bir sonucu olarak eliptik kompleks matrislerin pseudo tersleri ve en küçük kareler çözümü elde edilmiştir. Akabinde eliptik kompleks matrisler için elde edilen tüm tanım ve teoremler, kurulan yapı koruyan dönüşümler yardımıyla elemanları eliptik kuaterniyon olan matrislere genelleştirilmiştir. Ayrıca elde edilen teoremler ışığında eliptik kompleks ve eliptik kuaterniyon matrislerin özdeğer-özvektör, tekil değer ayrışımı, en küçük kareler metodu, pseudo tersleri vb. cebirsel özelliklerinin elde edilmesine dair pseudo kodlar verilmiştir.

Görüntü işleme süreçlerinde renkli görüntüleri temsil için kullanılan geleneksel renkli görüntü seyrek matris modelleri, üç ayrı renk kanalı (*Red*, *Green* ve *Blue* kanalları) arasındaki ilişkiyi göz ardı eder. Dolayısıyla birçok görüntü işleme süreçlerinde renkli bir görüntünün kanalları tek tek işlenmekte veya görüntü gri tonlamalı hale dönüştürülmektedir. Bu çalışmada renkli görüntülerin bağımsız renk kanallarını bir bütün olarak ele alabilen, eliptik kuaterniyon matrislerini kullanan yeni bir renkli görüntü seyrek matris modeli önerilerek mevcut soruna çözüm sunulmuştur. Ayrıca elde edilen eliptik tekil değer ayrışımı teorisi yardımıyla renkli görüntü sıkıştırma metodu geliştirilmiştir. Geliştirilen bu metodun performans sonuçları ile diğer hiperkompleks tabanlı sıkıştırma metodlarının performansları karşılaştırılarak önerilen metodun performansının diğer hiperkompleks tabanlı sıkıştırma metodlarına göre daha iyi olduğu görülmüştür. Ayrıca içerdiği uzaylar arasından ideal uzayın seçilmesi (problemin çözümüne uygun p değerinin seçilmesi), o uzayda işlemlerin gerçekleştirilmesi ve birçok fiziksel sistemin eliptik davranışı bu sayı sistemini görüntü işleme süreçlerinde daha avantajlı hale getirmektedir. Bu nedenle eliptik kuaterniyon sayı sisteminin sayısal görüntü işlemeye dahil edilmesi bu süreçlerdeki zaman, bellek ve performans ile ilgili birçok sorunu çözecektir.

Dahası proje kapsamında elde edilen teorik ve uygulamalı bilgilerin ÷lkemizde "Kritik Teknoloji Alanları" olarak belirlenen Bilgi Güvenliği, Büyük Veri ve Veri Analitiği, Modelleme ve Similasyon Teknolojileri, Robotik, Mekatronik ve Otomasyon, Yapay Zeka ve Makine Öğrenmesi gibi alanlarda da kullanımıyla bu alanlarda birçok verimli sonuçlar elde edileceğine inanıyoruz.

KAYNAKLAR

- Arun, K. S., Huang, T. S., & Blostein, S. D. (1997). Least-Squares Fitting of Two 3D Point Sets. *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 9(5), 698–700. <http://doi.org/10.1109/tpami.1987.4767965>
- Bao, Z. ve Gai, S. (2019). Reduced Quaternion Matrix-Based Sparse Representation and its Application to Color Image Processing. *IEEE Trans. Image Process.*, 13(4), 566–575. <https://doi.org/10.1049/iet-ipr.2018.5409>
- Basu, S., ve Velleman, D. J. (2017). On Gauss's First Proof of the Fundamental Theorem of Algebra. *Amer. Math. Monthly*, 124, 688–694. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.124.8.688>
- Biegler-Konig, F., and Barmann, F. (1993). A Learning Algorithm for Multilayered Neural Networks Based on Linear Least Squares Problems. *Neural Networks*, 6(1), 127–131. [https://doi.org/10.1016/S0893-6080\(05\)80077-2](https://doi.org/10.1016/S0893-6080(05)80077-2)
- Brenner, J. L. (1951). Matrices of Quaternions. *Pacific J. Math.*, 1, 329–335. <http://doi.org/10.2140/pjm.1951.1.329>
- Catoni, F., Bocaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E., and Zampetti, P. (2008). *The Mathematics of Minkowski Space-Time with an Introduction to Commutative Hypercomplex Numbers*. Birkhauser Verlag AG.
- Catoni, F., Cannata, R., Catoni, V., & Zampetti, P. (2005a). N-dimensional Geometries Generated by Hypercomplex Numbers. *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, 15, 1–25. <https://doi.org/10.1007/s00006-005-0001-4>
- Catoni, F., Cannata, R., & Zampetti, P. (2005b). An Introduction to Commutative Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 16, 1–28. <https://doi.org/10.1007/s00006-006-0002-y>
- Clifford, W. K. (1968). *Mathematical Papers*. Chelsea Pub. Co., Bronx, NY.
- Deo, A. S., ve Walker, I. D. (1995). Overview of Damped Least-Squares Methods for Inverse Kinematics of Robot Manipulators. *Journal of Intelligent Robotics Systems*, 14, 43–68. <https://doi.org/10.1007/BF01254007>
- Golub, G., ve Pereyra, V. (2003). Separable Nonlinear Least Squares: The Variable Projection Method and Its Applications. *Inverse Probl.*, 19, 1–26. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/19/2/201>
- Gonzales, R. C., and Woods, R. E. (2008). *Color Image Processing. Digital Image Processing*. (3rd ed., pp. 416-478). Pearson Education Inc. Publishing Prentice Hall.
- Hamilton, W. R. (1853). *Lectures on Quaternions*. Hodges and Smith.
- Harkin, A. A., ve Harkin, J. B. (2004). Geometry of Generalized Complex Numbers. *Math. Mag.*, 77(2), 118–129. <https://doi.org/10.1080/0025570X.2004.11953236>

- Hassibi, B., ve Vikalo, H. (2005). On the Sphere-Decoding Algorithm I. Expected Complexity. *IEEE Trans. Signal Process.*, 53(8), 2806–2818. <http://doi.org/10.1109/TSP.2005.850352>
- Isokawa, T., Nishimura, H., and Matsui, N. (2010). *Commutative Quaternion and Multistate Hopfield Neural Net-works*. In Proc. Int. Joint Conf. Neural Netw.
- Jia, Z. G., Ling, M. X., & Zhao S. T. (2017). Color Two-Dimensional Principal Component Analysis for Face Recognition Based on Quaternion Model. *Lect. Notes Comput. Sci.*, 10361, 177–189. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63309-1_17
- Jia, Z. G., Ng, M. K., & Song, G. J. (2019). Robust Quaternion Matrix Completion with Applications to Image Inpainting. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 26, 1–35. <https://doi.org/10.1002/nla.2245>
- Kim, H., Golub, G., & Park, H. (2005). Missing Value Estimation for DNA Microarray Gene Expression Data: Local Least Squares Imputation. *Bioinformatics*, 21, 187–198. <http://doi.org/10.1093/bioinformatics/bth499>
- Kosal, H. H. (2016). *Komütatif Kuaterniyonların Matrisleri Üzerine*. Doktora Tezi, Sakarya Üniversitesi.
- Kosal, H. H. (2019). Least-Squares Solutions of the Reduced Biquaternion Matrix Equation $AX = B$ and Their Applications in Colour Image Restoration. *Journal of Modern Optics*, 66(18), 1802–1810. <https://doi.org/10.1080/09500340.2019.1676474>
- Kosal, H. H., Akyigit, M., & Tosun, M. (2015). Consimilarity of Commutative Quaternion Matrices. *Miskolc Math. Notes.*, 16(2), 965–977. <https://doi.org/10.18514/MMN.2015.1421>
- Kosal, H. H., ve Pekiyan, M. (2022). Algebraic Techniques for the Least Squares Problems in Elliptic Complex Matrix Theory and Their Applications. *Math Meth Appl Sci*, 45, 12136–12146. <https://doi.org/10.1002/mma.7618>
- Kosal, H. H., ve Tosun, M. (2014). Commutative Quaternion Matrices. *Adv. Appl. Clifford Alg.*, 24(3), 769–779. <http://doi.org/10.1007/s00006-014-0449-1>
- Kosal, H. H., ve Tosun, M. (2019). Universal Similarity Factorization Equalities for Commutative Quaternions and Their Matrices. *Linear and Multilinear Algebra.*, 67(5), 26–938. <https://doi.org/10.1080/03081087.2018.1439878>
- Lee, H. C. (1949). Eigenvalues and Canonical forms of Matrices with Quaternion Coefficients. *Proc. Royal Irish Academy*, 52, 253–260.
- Li, X. ve Gunturk, B. K. (2012). *Image Denoising: Past, Present, and Future*. *Image Restoration Fundamentals and Advances* (1st ed.)
- Ma, R. R., ve Bai, Z. J. (2020). A Structure-Preserving One-Sided Jacobi Method for Computing the SVD of a Quaternion Matrix. *Applied Numerical Mathematics*, 147, 101–117. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1811.08671>
- Pei, S. C., Chang, J. H., & Ding, J. J. (2004). Commutative Reduced Biquaternions and Their Fourier Transform for Signal and Image Processing Applications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52(7), 2012–2031. <http://doi.org/10.1109/TSP.2004.828901>

- Pei, S. C., Chang, J. H., Ding, J. J., & Chen, M. Y. (2003). Quaternion Matrix Singular Value Decomposition and Its Applications for Color Image Processing. *In Proc. Int. Conf. Image Process.*, 1, 805–808. <http://doi.org/10.1109/ICIP.2003.1247084>
- Pei, S. C., Chang, J. H., Ding, J. J., & Chen, M. Y. (2008). Eigenvalues and Singular Value Decompositions of Reduced Biquaternion Matrices. *IEEE Trans. Circ. Syst. I*, 55, 2673–2685. <http://doi.org/10.1109/TCSI.2008.920068>
- Pekyaman, M. (2021). *AX = B Eliptik Kuaterniyon Matris Denkleminin En Küçük Kareler Çözümü ve Görüntü İyileştirmedeki Uygulamaları*. Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi.
- Sang, Q., Yang, Y., Liu, L., & Song, X., X. and Wu (2020). Image Quality Assessment Based on Quaternion Singular Value Decomposition. *IEEE Access*, 8, 75925–75935. <http://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2989312>
- Segre, C. (1892). The Real Representations of Complex Elements and Extension to Bicomplex. *Systems. Math. Ann.*, 40, 413.
- Serodio, R., Pereira, E., & Vitoria, J. (2001). Computing the Zeros of Quaternions Polynomials. *Comput. Math. With Appl.*, 42, 1229–1237. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(01\)00235-8](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(01)00235-8)
- Study, E. (1903). *Geometrie der dynamen*. Leipzig.
- Wolf, L. A. (1936). Similarity of Matrices in which the Elements are Real Quaternions. *Bull. Amer. Math. Soc*, 42, 737–743. <http://doi.org/10.1090/S0002-9904-1936-06417-7>
- Xia, J., Chen, G., & Sun, W. (2017). Extended Dissipative Analysis of Generalized Markovian Switching Neural Networks With Two Delay Components. *Neurocomputing.*, 260, 275–283. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.05.005>
- Xia, J., Gao, H., Liu, M., Zhuang, G., & Zhang, B. (2018). Non-Fragile Finite-Time Extended Dissipative Control for a Class of Uncertain Discrete Time Switched Linear Systems. *J Franklin Inst.*, 355, 3031–3049. <http://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2018.02.017>
- Xu, Y., Yu, L., Xu, H., & Nguyen, T. (2015). Vector Sparse Representation of Color Image Using Quaternion Matrix Analysis. *IEEE Trans. Image Process.*, 24, 1315–1329. <http://doi.org/10.1109/TIP.2015.2397314>
- Yang, Y., ve Chute, C. G. (1992). A Linear Least Squares Fit Mapping Method for Information Retrieval from Natural Language Texts. *In Proc. of the 14th conference on computational linguistics, Association for Computational Linguistics*, 2, 447–453. <https://doi.org/10.3115/992133.992139>
- Yuan, S. F., Wang, Q. W., & Duan, X. (2013). On Solutions of the Quaternion Matrix Equation $AX = B$ and Their Applications in Color Image Restoration. *Appl. Math. Comput.*, 221, 10–20. <https://doi.org/10.1016/j.amc.201>

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad :Beyza ÇELİK

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:**

2021, Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik

2015, Sakarya Üniversitesi, Bilgisayar ve Bilişim Bilimleri Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği

- **Yükseklisans:**

Devam ediyor, Sakarya Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Geometri

MESLEKİ DENEYİM:

- 2020-2022 Ücretli Öğretmen-Milli Eğitim Bakanlığı
- 2017-2018 Ücretli Öğretmen-Milli Eğitim Bakanlığı

TEZLER:

- Kodlama Teorisinin Temelleri (Matematik Lisans Tezi)
- Bilgisayar Görmesi Kullanarak Renk Değiştirme Uygulamaları (Bilgisayar Mühendisliği Lisans Tezi)

YAYINLAR:

- Kosal H., Eren K., Akyigit M. ve Celik B. (2022, 30, Ağustos). Elliptic Quaternion Matrix Theory and Its Applications. *11th International Eurasian Conference On Mathematical Sciences And Applications*, İstanbul, Turkey.