T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

S-METRİK UZAYLARDA BAZI ÇAKIŞMA EN İYİ YAKINLIK NOKTASI TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kadir ŞAMDANLI

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Aynur ŞAHİN**

Ocak 2022

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

S-METRİK UZAYLARDA BAZI ÇAKIŞMA EN İYİ YAKINLIK NOKTASI TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kadir ŞAMDANLI

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ

Bu tez 12.01.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Kadir ŞAMDANLI

12.01.2022

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. Aynur ŞAHİN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Metin BAŞARIR'a ve Matematik Bölümü'nde gerekli ilgi ve yardımı esirgemeyen bölümümüzün öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmamın tamamlanmasında bana her zaman destek olan sevgili eşim Merve Şule YAVUZ ŞAMDANLI'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, yüksek lisans eğitimim boyunca '2210-E Doğrudan Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı' ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK – BİDEB'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\emptyset$	: Boş küme
$\mathbb{F}$	: Cisim
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$D(J)$	: J dönüşümün tanım kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
(X, d)	: Metrik uzay
$B(x, r)$	: Metrik uzayda x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
Δ_{YZ}	: Metrik uzayda Y ile Z kümeleri arasındaki uzaklık
$(X, \lVert . \rVert)$	: Normlu uzay
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Sıfır dahil pozitif reel sayılar kümesi
(X, S)	: S-metrik uzay
$B_S(x, r)$	: S-metrik uzayda x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
Δ_{YZ}^S	: S-metrik uzayda Y ile Z kümeleri arasındaki uzaklık
$\{x_n\}$	: $\{x_n\}$ dizisi

ÖZET

Anahtar kelimeler: S-metrik uzay, En iyi yakınlık noktası, Çakışma en iyi yakınlık noktası, S-yakınsal Berinde g-döngüsel daralması

Bu tez çalışmasında, metrik uzaylarda birinci türden ve ikinci türden yakınsal Berinde g-daralma dönüşümleri ve kendi üzerine olmayan iki dönüşümün yakınsal Berinde g-döngüsel daralması için elde edilen çakışma en iyi yakınlık noktası teoremleri S-metrik uzaylara genelleştirildi.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk olarak tezdeki problemin tanıtıldığı giriş bölümü verilmiştir. Daha sonra, ‘Temel kavramlar’ adı altında ikinci bölümde çalışmada kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak en iyi yakınlık noktası ile çakışma en iyi yakınlık noktası tanımları verilmiştir. Daha sonra yakınsal döngüsel daralma dönüşümleri ele alınmıştır ve birinci türden ve ikinci türden yakınsal Berinde g-daralma dönüşümleri incelenmiştir. Son olarak S-metrik uzayın tanımı ve bu uzaydaki bazı temel topolojik kavramlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde S-metrik uzayında birinci türden ve ikinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümleri ve kendi üzerine olmayan iki dönüşümün S-yakınsal Berinde g-döngüsel daralması tanıtılmıştır. Daha sonra bu uzayda kendi üzerine olmayan bu dönüşüm türleri için bazı çakışma en iyi yakınlık noktası teoremleri ispatlanmıştır. Ek olarak, sonuçları desteklemek amacıyla iki örnek sunulmuştur.

Beşinci bölümde ise çalışmada elde edilen sonuçlara ve görüşlere yer verilmiştir.

SOME COINCIDENCE BEST PROXIMITY POINT RESULTS IN S-METRIC SPACES

SUMMARY

Keywords: S-metric space, Best proximity point, Coincidence best proximity point, S-proximal Berinde g-cyclic contraction

In this thesis study, the coincidence best proximity point theorems obtained for the proximal Berinde g-contraction mappings of the first kind and second kind and the proximal Berinde g-cyclic contraction of two nonself mappings in metric spaces are generalized to S-metric spaces.

This thesis consists of five sections. Firstly, introductory section which it is introduced of problem in thesis is given. Afterwards, basic definitions and concepts, which are used in the study, are given in the second section, named as 'Basic Concepts'.

In the third section, firstly, the definitions of best proximity point and coincidence best proximity point are given. Later, the proximal cyclic mappings are discussed and the proximal Berinde g-contraction mappings of the first kind and second kind are examined. Finally, the definition of the S-metric space and some basic topological concepts in this space are given.

In the fourth section, the S-proximal Berinde g-cyclic contraction of two nonself mappings and the S-proximal Berinde g-contraction mappings of the first kind and second kind in S-metric spaces are introduced. Later, some coincidence best proximity theorems are proved for these kinds of nonself mapping in this space. In addition, two examples are presented to support the results.

In the last section, the results and remarks, obtained in the study are included.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, doğrusal olmayan denklemler teorisinin incelenmesinde önemli bir role sahiptir. Bazı problemler J, bir metrik uzayda veya uygun olan diğer uzaylarda kendi üzerine olan bir dönüşüm olmak üzere, $Jx = x$ biçimdeki denklemler olarak formüle edilebilir.

Daralma ve genelleştirilmiş daralma dönüşümleriyle ilgili sabit nokta teorisi birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Daralma dönüşümü fikrini ilk ortaya atan kişinin Banach [1] olduğu bilinmektedir. 1922 de, bir metrik uzayda kendi üzerine olan dönüşümler için daralma kavramını tanıttı ve X tam metrik uzayında kendi üzerine olan her daralma dönüşümünün tek bir sabit noktasının var olduğunu ispatladı. Daha sonra, 2004 yılında Berinde [2], bir metrik uzayda daralma dönüşümünün bir genelleştirilmesi olan zayıf daralma dönüşümü kavramını tanıttı ve X tam metrik uzayında kendi üzerine olan her zayıf daralma dönüşümünün bir sabit noktasının var olduğunu ispatladı.

$Jx = x$ denkleminde, eğer J kendi üzerine olmayan bir dönüşüm ise, o zaman J nin hiçbir sabit noktası olmayabilir. Fakat x ve Jx arasındaki uzaklık ya sıfıra eşit veya sıfırdan büyüktür. O halde J nin tanım kümesindeki tüm x ler için $d(x, Jx) \geq 0$ olur. Dolayısıyla şu soru gündeme gelir: J nin tanım kümesi olan $D(J)$ de

$$d(x, Jx) = \min_{y \in D(J)} d(y, Jy)$$

olacak şekilde bir x elemanı bulunabilir mi? Bu soru, en iyi yakınlık noktası çalışmalarını ortaya çıkarmıştır.

$(X, \|.\|)$ bir normlu vektör uzayı ve C, X in boş olmayan kompakt konveks bir alt kümesi olsun. 1969 da Fan [3], en iyi yakınlık noktasını inceleyen ilk kişiydi ve eğer $J : C \to X$ kendi üzerine olmayan bir daralma dönüşümü ise, o zaman $d(Jx^*, C) = \min\{\|Jx^* - x^*\| : x^* \in C\}$ olmak üzere $\|Jx^* - x^*\| = d(Jx^*, C)$ olacak şekilde $x^* \in C$ nın var olduğunu ispatladı. Açık olarak, eğer $J(C) \subseteq C$ ise o zaman x^*, J nin bir sabit noktasıdır.

Daha sonra Kirk ve ark. [4] metrik uzayda döngüsel dönüşüm kavramını tanıttı ve üstelik onlar, (X, d) tam metrik uzayında $J : Y \cup Z \to Y \cup Z$ bir döngüsel dönüşüm ise ve bazı $\alpha \in [0,1)$ ve her $x \in Y, y \in Z$ için

$$d(Jx, Jy) \leq \alpha d(x, y)$$

koşulunu sağlarsa, o zaman $Y \cap Z \neq \emptyset$ ve J, $Y \cup Z$ de tek bir sabit noktaya sahip olduğunu ispatladılar.

Üç yıl sonra, Eldred ve Veeramani [5] döngüsel daralma dönüşümü kavramını tanıttı ve düzgün konveks Banach uzayında ve metrik uzayda döngüsel daralma dönüşümü için en iyi yakınlık noktasının varlık ve yakınsama sonuçlarını ispatladı. Bu sonuçlar Kirk ve ark. [4] sonuçlarının $Y \cap Z \neq \emptyset$ olması durumunun bir genelleştirmesidir. Eldred ve Veeramani [5]'nin kavramına dayanarak birçok matematikçi çeşitli yönlerde en iyi yakınlık noktası teoremlerini incelediler.

2011 de Basha [6], kendi üzerine olmayan J ve T dönüşümlerinin bir yakınsal döngüsel daralması ve birinci türden ve ikinci türden yakınsal daralma dönüşümleri kavramlarını verdi ve tam metrik uzayda bu dönüşümler için en iyi yakınlık noktaları üzerine bazı ilginç sonuçlar elde etti.

2021 de Klanarong ve Chaiya [7], Basha'nın kendi üzerine olmayan dönüşüm sınıflarından daha genel olan yakınsal Berinde g-döngüsel daralmayı ve birinci türden ve ikinci türden yakınsal Berinde g-daralma dönüşümlerini tanıttılar ve bazı çakışma en iyi yakınlık noktası teoremlerini sundular.

2012 de Sedghi ve ark. [8], S-metrik uzay kavramını tanıttılar ve bu uzayın topolojisini araştırdılar. Ayrıca, onlar S-metrik uzayda bazı önemli sabit nokta teoremlerini ispatladılar. Daha sonra, 2016 yılında Nantadilok [9] bu uzaylarda yakınsal daralma dönüşümlerinin bir sınıfı için en iyi yakınlık noktası teoremlerini ispatladı. 2020 yılında ise Khanpanuk [10] S-metrik uzayında MT-döngüsel daralma dönüşümleri için çakışma en iyi yakınlık noktası teoremlerini verdi.

Bu tez çalışmasındaki amaç, S-metrik uzayında S-yakınsal Berinde g-döngüsel daralma ve birinci türden ve ikinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümleri kavramlarını tanıtıp bu dönüşüm türleri için bazı çakışma en iyi yakınlık noktası teoremlerini ispatlamaktır.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin okunabilirliğini ve anlaşabilirliğini sağlamak amacıyla bazı temel bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 2.1. (Metrik uzay)

Bir X kümesi ile bir $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun.
Her $x, y, z \in X$ için,

$[M1]$ $d(x,y) \geq 0,$
$[M2]$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$[M3]$ $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri)
$[M4]$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlansın. Bu durumda d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir [11].

Örnek 2.2.

$x, y \in \mathbb{F}$ (yani $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) olmak üzere

$$d_{|.|}(x,y) = |x - y|$$

ile tanımlanan $d_{|.|}$ (mutlak değer) metriği ile $\mathbb{F}$ kümesi bir metrik uzaydır. Bu metriğe $\mathbb{F}$ deki doğal (alışılmış, standart) metrik adı verilir [12].

Örnek 2.3.

$\mathbb{R}^n$ ya da $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ vektör uzayları üzerinde

$$d_n(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanan dönüşüme Öklid metriği denir [11].

Örnek 2.4.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ olmak üzere

$$m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to \mathrm{m}(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ üzerinde maksimum metriği denir [11].

Tanım 2.5. (Yakınsak dizi)

(X, d) metrik uzayındaki $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına yakınsaması demek, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir n_0 doğal sayısı bulunacak öyle ki $\forall n \geq n_0$ için,

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olmasıdır. $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına yakınsadığını, kısaca,

$$x_n \to x \quad \text{veya} \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

gösterimlerinden birisiyle belirtilir ve x noktasına $\{x_n\}$ dizisinin limiti denir [11].

Tanım 2.6. (Cauchy dizisi)

(X, d) metrik uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall m, n \geq n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak biçimde, verilen ε sayısına bağlı, bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir [12].

Tanım 2.7. (Tam metrik uzay)

(X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içindeki bir limite yakınsarsa, (X, d) metrik uzayı tamdır, denir [12].

Tanım 2.8. (Normlu uzay)

X kümesi $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $p : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için,

$[N1]$ $p(x) \geq 0$
$[N2]$ $p(x) = 0 \iff x = 0$
$[N3]$ $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ (pozitif-homojenlik)
$[N4]$ $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (alt-toplamsallık)

özellikleri sağlanıyorsa, p fonksiyonuna X vektör uzayı üzerinde bir normdur ve üzerinde bir norm tanımlanmış herhangi bir vektör uzayına normlanmış bir uzay, denir. Bir vektör uzayı üzerindeki bir norm, çoğu kez $\| \ \|$ simgesiyle gösterilir. Buna göre norm fonksiyonu

$$x \to \|x\|$$

olacaktır. Bu norm ile normlanmış bir X vektör uzayı $(X, \| \ \|)$ simgesiyle belirtilir [11].

Tanım 2.9. (Banach uzay)

$(X,\|.\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. Eğer X uzayı, $d(x,y)=\|x-y\|$, $(x,y\ \in X)$ ile verilen normdan üretilen metriğe göre tam ise bu uzaya Banach uzayı denir [13].

Tanım 2.10. (Düzgün konveks uzay)

$(X,\|.\|)$ bir normlu vektör uzay olsun. Eğer her bir $\varepsilon>0$ ve $x,y\in X$ için $\|x\|\ \leq 1$, $\|y\|\ \leq 1$ ve $\|x-y\|\ \geq \varepsilon$ olduğunda

$$\frac{\|x-y\|}{2}\leq 1-\delta$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa, X uzayına düzgün konvekstir denir [14].

Tanım 2.11. (Konveks küme)

L bir reel lineer uzay ve $A\subseteq L$ olsun. Her $x,y\in A$ için,

$$B=\{z\in L: z=ax+(1-a)y, 0\leq a\leq 1\}\subseteq A$$

ise A kümesine konvekstir denir [15].

Tanım 2.12. (Açık yuvar)

(X,d) bir metrik uzay, $x_0\in X$ ve $r>0$ bir reel sayı olsun.

$$B(x_0;r)=\{x\in X: d(\,x,x_0)<r\,\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar adı verilir [12].

Tanım 2.13. (Sabit nokta)

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu noktaya T nin bir sabit noktası denir. Yani $Tx = x$ denkleminin çözümü veya çözümleri T dönüşümünün sabit noktalarıdır [20].

Örnek 2.14.

(i) $f(x) = x^2$ ile tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sabit noktaları $x = 0$ ve $x = 1$ olur.
(ii) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ile tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sabit noktası yoktur.
(iii) $0 < \theta < 2\pi$ için,

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ile verilen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönme (rotation) fonksiyonunun yalnız bir sabit noktası vardır ve bu $(0,0)$ noktasıdır [12].

Tanım 2.15. (İzometri)

E kümesi (X, d) metrik uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in E$ için $d(Tx, Ty) = d(x, y)$ koşulunu sağlarsa, $T : E \to E$ dönüşümüne izometri denir [27].

Tanım 2.16. (Lipschitzian dönüşüm)

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $\alpha \geq 0$ sabiti varsa T dönüşümüne X uzayında bir Lipschitzian dönüşüm denir [20].

Tanım 2.17. (Daralma dönüşümü)

(X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer (2.1) eşitsizliği $\alpha \in [0,1)$ olması durumunda sağlanıyorsa T dönüşümüne daralma veya büzülme (contraction) dönüşümü denir [21].

Tanım 2.18. (Zayıf daralma dönüşümü)

(X,d) bir metrik uzay ve $J: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x,y) + L\mathrm{d}(x, Jy)$$

olacak şekilde $\alpha \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ varsa T dönüşümüne X uzayında bir zayıf daralma dönüşümü denir [2].

BÖLÜM 3. ÇAKIŞMA EN İYİ YAKINLIK NOKTASI VE S-METRİK UZAY

3.1. Çakışma En İyi Yakınlık Noktası

Bu bölümde (X, d) bir metrik uzay ve Y, Z kümeleri X in boş olmayan alt kümeleri olsun.

Tanım 3.1.1.

$J : Y \to Z$ bir dönüşüm olsun. $\Delta_{YZ} = d(Y, Z) = inf\{d(x, y): x \in Y\ ve\ y \in Z\}$ olmak üzere $d(x, Jx) = \Delta_{YZ}$ eşitliğini sağlayan $x \in Y$ noktasına, J nin en iyi yakınlık noktası (best proximity point) denir [24].

Tanım 3.1.1. de J kendi üzerine olan bir dönüşüm yani $Y = Z$ alınırsa x noktası J nin bir sabit noktası olur.

Tanım 3.1.2.

$J : Y \to Z$ ve $g: Y \to Y$ iki dönüşüm olsun. $d(gx, Jx) = \Delta_{YZ}$ eşitliğini sağlayan $x \in Y$ noktasına, (g, J) ikilisinin çakışma en iyi yakınlık noktası (coincidence best proximity point) denir [24].

Tanım 3.1.2. de g, Y üzerinde birim dönüşüm alınırsa x noktası J nin bir en iyi yakınlık noktası olur.

Tanım 3.1.3.

$J : Y \to Z$, $T : Z \to Y$ ve $g : Y \cup Z \to Y \cup Z$ dönüşümler olsun. Bir $(x, y) \in Y \times Z$ elemanı eğer $(gx, gy) \in Y \times Z$ ve $d(gx, Jx) = d(gy, Ty) = \Delta_{YZ}$ şartlarını sağlıyorsa (x, y) noktasına, (g, J, T) üçlüsünün çakışma en iyi yakınlık noktası denir [7].

Tanım 3.1.4.

Eğer $J : Y \cup Z \to Y \cup Z$ dönüşümü $J(Y) \subseteq Z$ ve $J(Z) \subseteq Y$ şartlarını sağlıyor ise J dönüşümüne döngüsel (cyclic) dönüşüm denir [24].

Tanım 3.1.5.

Eğer $J : Y \cup Z \to Y \cup Z$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyor ise döngüsel daralma olarak adlandırılır:
(i) J, döngüsel bir dönüşümdür.
(ii) Tüm $x \in Y$, $y \in Z$ için $d(Jx, Jy) \leq kd(x, y) + (1 - k)\Delta_{YZ}$ olacak şekilde $k \in (0,1)$ vardır [5].

Tanım 3.1.6.

$J : Y \to Z$ ve $T : Z \to Y$ kendi üzerine olmayan dönüşümler olsun. Eğer her $u, x \in Y$ ve $v, y \in Z$ için,

$$d(u, Jx) = d(v, Ty) = \Delta_{YZ}$$
$$\Longrightarrow$$
$$d(Jx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + (1 - \alpha)\Delta_{YZ}$$

olacak şekilde negatif olmayan $\alpha < 1$ sayısı varsa (J, T) ikilisine bir yakınsal (proximal) döngüsel daralma denir [6].

Tanım 3.1.7.

$J : Y \to Z$ bir dönüşüm olsun.

(i) Her $u_1, u_2, x_1, x_2 \in Y$ için,

$$d(u_1, Jx_1) = d(u_2, Jx_2) = \Delta_{YZ}$$
$$\Longrightarrow$$
$$d(u_1, u_2) \leq \alpha d(x_1, x_2)$$

olacak şekilde negatif olmayan $\alpha < 1$ sayısı varsa bu J dönüşümüne birinci türden yakınsal daralma dönüşümü denir.

(ii) Her $u_1, u_2, x_1, x_2 \in Y$ için,

$$d(u_1, Jx_1) = d(u_2, Jx_2) = \Delta_{YZ}$$
$$\Longrightarrow$$
$$d(Ju_1, Ju_2) \leq \alpha d(Jx_1, Jx_2)$$

olacak şekilde eğer negatif olmayan $\alpha < 1$ sayısı varsa bu J dönüşümüne ikinci türden yakınsal daralma dönüşümü denir [6].

J nin kendi üzerine olan bir dönüşüm olması durumunda, birinci türden yakınsal daralma dönüşümü daralma dönüşümüne indirgenir. Ayrıca her daralma dönüşümü ikinci türden yakınsal daralma dönüşümüdür [6].

Tanım 3.1.8.

Bir $J : Y \to Z$ dönüşümü ve bir $g : Y \to Y$ izometrisi verildiğinde, her $x_1, x_2 \in Y$ için,

$$d(Jgx_1, Jgx_2) = d(Jx_1, Jx_2)$$

eşitliği sağlanıyorsa J dönüşümü g ye göre izometrik mesafeyi koruyor denir [6].

Tanım 3.1.9.

$J : Y \to Z$ ve $g : Y \to Y$ birer dönüşüm olsun.

(i) Her $x_1, x_2, u_1, u_2 \in Y$ için,

$$d(gu_1, Jx_1) = d(gu_2, Jx_2) = \Delta_{YZ}$$
$$\Longrightarrow$$
$$d(gu_1, gu_2) \leq \alpha d(gx_1, gx_2) + L_1 \min\{d(gx_1, gu_2), d(gx_2, gu_1)\}$$

şartını sağlayan $\alpha \in [0,1)$ ve $L_1 \geq 0$ sayıları varsa, J dönüşümüne birinci türden yakınsal Berinde g-daralma dönüşümü denir [7].

(ii) Her $x_1, x_2, u_1, u_2 \in Y$ için,

$$d(gu_1, Jx_1) = d(gu_2, Jx_2) = \Delta_{YZ}$$
$$\Longrightarrow$$
$$d(Jgu_1, Jgu_2) \leq \beta d(Jgx_1, Jgx_2) + L_2 \min\{d(Jgx_1, Jgu_2), d(Jgx_2, Jgu_1)\}$$

şartını sağlayan $\beta \in [0,1)$ ve $L_2 \geq 0$ sayıları varsa, J dönüşümüne ikinci türden yakınsal Berinde g-daralma dönüşümü denir [7].

$L_1 = 0$ (veya $L_2 = 0$) ve her $x \in Y$ için $g(x) = x$ durumunda birinci türden (veya ikinci türden) yakınsal Berinde g-daralma dönüşümü, birinci türden (veya ikinci türden) yakınsal daralma dönüşümüne indirgenir.

Tanım 3.1.10.

$J : Y \to Z,\ T : Z \to Y$ ve $g : Y \cup Z \to Y \cup Z$ birer dönüşüm olsunlar. Her $x_1,\ gu_1 \in Y$

ve $x_2,\ gu_2 \in Z$ için,

$$d(gu_1, Jx_1) = d(gu_2, Jx_2) = \Delta_{YZ}$$
$$\Longrightarrow$$
$$d(gu_1, gu_2) \leq \gamma d(gx_1, gx_2) + (1-\gamma)\Delta_{YZ} + Ld(gx_1, gu_1)$$

şartını sağlayan $\gamma \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ sayıları varsa, (J,T) ikilisine bir yakınsal Berinde g-döngüsel daralması denir [7].

$L = 0$ ve her $x \in Y \cup Z$ için $g(x) = x$ durumunda yakınsal Berinde g-döngüsel daralması bir yakınsal döngüsel daralmaya indirgenir.

3.2. S-Metrik Uzay

Tanım 3.2.1.

X boş olmayan bir küme ve $S : X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y, z, a \in X$ için,

$(S1)$ $S(x,y,z) \geq 0$
$(S2)$ $S(x,y,z) = 0$ ancak ve ancak $x = y = z$
$(S3)$ $S(x,y,z) \leq S(x,x,a) + S(y,y,a) + S(z,z,a)$

şartlarını sağlasın. Bu durumda S fonksiyonu X üzerinde S-metrik, (X,S) ikilisi S-metrik uzay olarak adlandırılır [8].

Örnek 3.2.2.

$X = \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için,

$$S(x,y,z) = |x - z| + |x + z - 2y| \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlı $S : X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir S-metriktir [16].

Örnek 3.2.3.

$(\mathbb{R}^2, d)$ Öklid metrik uzayı olsun.

$$S(x,y,z) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(z,x)\}$$

şeklinde tanımlanan S fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir S-metriktir [16].

Aşağıdaki lemma simetri koşulu olarak kabul edilir ve araştırma bulgularında bazı teoremlerin ispatında kullanılacaktır.

Lemma 3.2.4.

(X,S) bir S-metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$S(x,x,y) = S(y,y,x)$$

dir [8].

Aşağıdaki lemma, Tanım 3.2.1. ve Lemma 3.2.4. ten kolaylıkla elde edilir.

Lemma 3.2.5.

(X,S) bir S-metrik uzay olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$$S(x,x,z) \leq S(x,x,y) + 2S(y,y,z)$$

dir [26].

Tanım 3.2.6.

(X,S) bir S-metrik uzay olsun. $r > 0$ ve $x \in X$ için, $B_S(x,r)$ açık yuvarı

$B_s(x,r) = \{y \in X : S(y,y,x) < r\}$

şeklinde tanımlanır [8].

Tanım 3.2.7.

(X,S) bir S-metrik uzay olsun.

(i) X de bir $\{x_n\}$ dizisi için $n,m \to \infty$ iken $S(x_n,x_n,x_m) \to 0$ ise $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir. Yani her $\varepsilon > 0$ için, öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n,m \geq n_0$ için $S(x_n,x_n,x_m) < \varepsilon$ olur.

(ii) X de bir $\{x_n\}$ dizisi için $n \to \infty$ iken $S(x_n,x_n,x) \to 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ e yakınsar denir. Yani her $\varepsilon > 0$ için, öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n \geq n_0$ için $S(x_n,x_n,x) < \varepsilon$ olur. Bu durumda $x_n \to x$ yazılır.

(iii) (X,S) deki her Cauchy dizisi (X,S) de yakınsak ise (X,S) S-metrik uzayı tam uzay olarak adlandırılır [8].

Tanım 3.2.8.

X ve X' iki S-metrik uzay ve $f : X \to X'$ bir fonksiyon olsun. O zaman f nin $x \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart $x_n \to x$ olmak üzere X deki her $\{x_n\}$ dizisi için $f(x_n) \to f(x)$ olmasıdır. Eğer f, her $x \in X$ noktasında sürekli ise f, X de süreklidir, denir [25].

Tanım 3.2.9.

(X,S) bir S-metrik uzay ve $Y \subseteq X$ herhangi bir alt küme olsun.

(i) $x \in X$ olmak üzere her $r > 0$ için eğer

$(B_s(x,r) - \{x\}) \cap Y \neq \emptyset$

ise x noktasına Y nin bir yığılma noktası denir. Y nin tüm yığılma noktalarının kümesi Y_s' ile gösterilir [15].

(ii) Y nin yığılma noktaları kümesi Y tarafından kapsanıyorsa bir başka ifadeyle $Y_S' \subset Y$ ise Y ye kapalı küme denir [18].

Tanım 3.2.10.

(X,S) bir S-metrik uzay ve Y, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bir $S_Y : X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $x, y, z \in Y$ için,

$$S_Y(x,y,z) = S(x,y,z)$$

olarak tanımlansın. O zaman S_Y, bir indirgenmiş S-metrik ve (Y, S_Y), (X,S) S-metrik uzayının bir alt S-metrik uzayı olarak adlandırılır [18].

Önerme 3.2.11.

Eğer (X,S) bir tam S-metrik uzay ve Y, (X,S) de kapalı bir küme ise, o zaman (Y, S_Y) alt S-metrik uzayı tamdır [18].

Bir S-metrik ile bir metrik arasındaki ilişki aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 3.2.12.

(X,d) bir metrik uzay olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) Her $x, y, z \in X$ için, $S_d(x,y,z) = d(x,z) + d(y,z)$ fonksiyonu X üzerinde bir S-metriktir.
2) (X,d) de $x_n \to x$ olması için gerek ve yeter şart (X, S_d) de $x_n \to x$ olmasıdır.
3) $\{x_n\}$ dizisinin, (X,d) de Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ dizisinin, (X, S_d) de Cauchy dizisi olmasıdır.
4) (X,d) nin tam uzay olması için gerek ve yeter şart (X, S_d) nin tam uzay olmasıdır [24].

[14] de S_d fonksiyonu, d tarafından üretilen bir S-metrik olarak adlandırıldı. Fakat herhangi bir metrik tarafından üretilemeyen S-metriğin bazı örnekleri biliniyor. Örnek 3.2.2 de verilen S-metriği bu örneklerden biridir.

Açıklama 3.2.13.

Gupta [19], (X,S) bir S-metrik uzay olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d_s(x,y) = S(x,x,y) + S(y,y,x) \tag{3.2}$$

fonksiyonu tanımlayarak her S-metriğinin bir metrik tanımladığını iddia etmiştir. Fakat bu d_s fonksiyonu her zaman bir metrik tanımlamaz. Çünkü X kümesinin her elemanı için üçgen eşitsizliği her zaman sağlanmayabilir. Eğer S-metrik bir d metriği tarafından üretilebiliyorsa o zaman bu S-metrik X kümesi üzerinde bir d_s metriği tanımlar ve $d_s(x,y) = 4d(x,y)$ elde edilir. Fakat S-metrik bir metrik tarafından üretilemiyorsa d_s fonksiyonu metrik olabilir de olmayabilir de. Eğer d_s fonksiyonu bir metrik ise d_s metriğine S-metrik tarafından üretilen metrik denir [16].

Örnek 3.2.14.

$X = \{1,2,3\}$ ve $S : X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

$S(1,1,2) = S(2,2,1) = 5$,
$S(2,2,3) = S(3,3,2) = S(1,1,3) = S(3,3,1) = 2$,
$x = y = z$ ise $S(x,y,z) = 0$,
diğer durumlarda ise $S(x,y,z) = 1$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda S fonksiyonu herhangi bir metrik tarafından üretilemeyen bir S-metriktir ve (X,S) ikilisi bir S-metrik uzaydır. Fakat Açıklama 3.2.13. te tanımlanan d_s fonksiyonu bir metrik değildir. $x = 1, y = 2, z = 3$ için

$$d_s(1,2) = 10 \nleq d_s(1,3) + d_s(3,2) = 8$$

elde edilir, yani üçgen eşitsizliği sağlanmaz [16].

Tanım 3.2.15.

(X, S) bir S-metrik uzay olsun. $g : X \to X$ dönüşümü eğer her $x, y, z \in X$ için

$$S(gx, gy, gz) = S(x, y, z)$$

şartını sağlıyorsa g dönüşümüne izometri denir [10].

Tanım 3.2.16.

(X, S) bir S-metrik uzay ve Y, Z X in boş olmayan alt kümeleri olsun. $J : Y \to Z$ kendi üzerine olmayan bir dönüşüm ve $g : Y \to Y$ bir izometri olsun. J dönüşümü eğer her $x, y, z \in X$ için

$$S(Jgx, Jgy, Jgz) = S(Jx, Jy, Jz)$$

şartını sağlıyorsa g ye göre izometrik mesafeyi koruyor denir [10].

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde elde edilen sonuçlardan oluşan makale (bak. [28]), Proceedings of International Mathematical Science Dergisinde yayınlanmıştır.

İlk olarak (X,S) bir S-metrik uzay ve Y ve Z, X in boş olmayan alt kümeleri olmak üzere

$$\Delta_{YZ}^{S} = S(Y,Y,Z) = inf\{S(x,x,y) : x \in Y, y \in Z\},$$
$$Y_0 = \{x \in Y : S(x,x,y) = \Delta_{YZ}^{S} \text{ olacak şekilde } \exists y \in Z \text{ vardır}\},$$
$$Z_0 = \{y \in Z : S(x,x,y) = \Delta_{YZ}^{S} \text{ olacak şekilde } \exists x \in Y \text{ vardır}\}$$

olsun.

Tanım 4.1.

(X,S) bir S-metrik uzay ve Y, Z X in boş olmayan alt kümeleri olsun. $J : Y \to Z$ $g : Y \to Y$ dönüşümler olsun. $S(gx,gx,Jx) = \Delta_{YZ}^{S}$ şartını sağlayan $x \in Y$ elemanına (g,J) ikilisinin çakışma en iyi yakınlık noktası denir.

Tanım 4.1. de g, Y üzerinde birim dönüşüm alınırsa x noktası J nin bir en iyi yakınlık noktası olur.

Tanım 4.2.

(X,S) bir S-metrik uzay ve Y,Z X in boş olmayan alt kümeleri olsun. $J : Y \to Z$, $T : Z \to Y$ ve $g : Y \cup Z \to Y \cup Z$ dönüşümler olsun. Bir $(x,y) \in Y \times Z$ elemanı

$(gx, gy) \in Y \times Z$ ve $S(gx, gx, Jx) = S(gy, gy, Ty) = S(x, x, y) = \Delta_{YZ}^{S}$ şartlarını sağlıyorsa (x, y) elemanına (g, J, T) üçlüsünün çakışma en iyi yakınlık noktası denir.

Tanım 4.2. de g, $Y \cup Z$ üzerinde birim dönüşüm alınırsa x ve y noktaları sırasıyla J ve T nin en iyi yakınlık noktaları olur.

İlk olarak S-metrik uzayda birinci türden ve ikinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümleri tanımları verilmiştir.

Tanım 4.3.

(X, S) bir S-metrik uzay ve Y, Z X in boş olmayan alt kümeleri olsun. $J : Y \to Z$ ve $g : Y \to Y$ dönüşümler olsun.

(i) Her $x_1, x_2, u_1, u_2 \in Y$ için,

$$S(gu_1, gu_1, Jx_1) = S(gu_2, gu_2, Jx_2) = \Delta_{YZ}^{S}$$
$$\Longrightarrow$$
$$S(gu_1, gu_1, gu_2) \leq \alpha S(gx_1, gx_1, gx_2) + L_1 \min\{S(gx_1, gx_1, gu_2), S(gx_2, gx_2, gu_1)\} \quad (4.1)$$

şartını sağlayan $\alpha \in [0,1)$ ve $L_1 \geq 0$ sayıları varsa, J dönüşümüne birinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümü denir.

(ii) Her $x_1, x_2, u_1, u_2 \in Y$ için,

$$S(gu_1, gu_1, Jx_1) = S(gu_2, gu_2, Jx_2) = \Delta_{YZ}^{S}$$
$$\Longrightarrow$$
$$S(Jgu_1, Jgu_1, Jgu_2) \leq \beta S(Jgx_1, Jgx_1, Jgx_2) + L_2 \min\{S(Jgx_1, Jgx_1, Jgu_2), S(Jgx_2, Jgx_2, Jgu_1)\} \quad (4.2)$$

şartını sağlayan $\beta \in [0,1)$ ve $L_2 \geq 0$ sayıları varsa, J dönüşümüne ikinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümü denir.

Şimdi S-metrik uzayda S-yakınsal Berinde g-döngüsel daralma tanımı verilecektir.

Tanım 4.4.

(X,S) bir S-metrik uzay ve Y,Z X in boş olmayan alt kümeleri olsun. $J : Y \to Z$, $T : Z \to Y$ ve $g : Y \cup Z \to Y \cup Z$ dönüşümler olsun. Her $x_1,\ gu_1 \in Y$ ve $x_2,\ gu_2 \in Z$ için,

$$S(gu_1, gu_1, Jx_1) = S(gu_2, gu_2, \mathrm{T}x_2) = \Delta_{YZ}^S$$
$$\Longrightarrow$$
$$S(gu_1, gu_1, gu_2) \leq \gamma S(gx_1 gx_1, gx_2) + (1-\gamma)\Delta_{YZ}^S + LS(gx_1 gx_1, gu_1)$$

şartını sağlayan $\gamma \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ sayıları varsa, (J,T) ikilisine bir S-yakınsal Berinde g-döngüsel daralması denir.

Şimdi S-metrik uzayda bir çakışma en iyi yakınlık noktası teoremi ispatlanacaktır.

Teorem 4.5.

(X,S) bir tam S-metrik uzay ve Y,Z X in boş olmayan kapalı iki alt kümeleri olsun. $J : Y \to Z,\ T : Z \to Y$ ve $g : Y \cup Z \to Y \cup Z$ dönüşümleri aşağıdaki koşulları sağlasın:
(i) J ve T birinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümleridir, yani sırasıyla J ve T dönüşümleri, (4.1) eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\alpha,\beta \in [0,1)$ ve $L_1, L_2 \geq 0$ sayıları vardır;
(ii) $J(Y_0) \subseteq Z_0$ ve $T(Z_0) \subseteq Y_0$;
(iii) g, $\emptyset \neq Y_0 \subseteq g(Y_0)$ ve $Z_0 \subseteq g(Z_0)$ olan bir izometridir;
(iv) (J,T) ikilisi bir S-yakınsal Berinde g-döngüsel daralmasıdır.
Bu durumda,

$$S(gx, gx, Jx) = S(gy, gy, Ty) = S(x, x, y) = \Delta_{YZ}^{S} \tag{4.3}$$

olacak şekilde bir $x \in Y$ ve bir $y \in Z$ noktaları vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0 \in Y_0$ için,

$$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^{S}$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için x elemanına yakınsar ve herhangi bir sabit $y_0 \in Z_0$ için,

$$S(gy_{n+1}, gy_{n+1}, Ty_n) = \Delta_{YZ}^{S}$$

ile tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için y elemanına yakınsar.
Ek olarak, eğer $\alpha + L_1 < 1$ ve $\beta + L_2 < 1$ ise, bu takdirde (4.3) denklemini sağlayan bir tek x elemanı ve bir tek y elemanı vardır.

İspat

$x_0 \in Y_0$ olsun. $J(Y_0) \subseteq Z_0$ olduğundan $Jx_0 \in Z_0$ olur. Dolayısıyla $S(z_1, z_1, Jx_0) = \Delta_{YZ}^{S}$ olacak şekilde $z_1 \in Y$ vardır bu da $z_1 \in Y_0$ anlamına gelir. $Y_0 \subseteq g(Y_0)$ olduğundan $gx_1 = z_1$ olacak şekilde $x_1 \in Y_0$ vardır, bundan dolayı $S(gx_1, gx_1, Jx_0) = S(z_1, z_1, Jx_0) = \Delta_{YZ}^{S}$ olur. Benzer yolla, $S(gx_2, gx_2, Jx_1) = \Delta_{YZ}^{S}$ olacak şekilde $x_2 \in Y_0$ vardır. Tümevarım yöntemiyle her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^{S}$$

olacak şekilde Y_0 da bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturulabilir. J, birinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümü olduğundan, her $x_{n-1}, x_n, x_{n+1} \in Y_0$ için,

$$S(gx_n, gx_n, Jx_{n-1}) = S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^{S}$$

olup her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$
\begin{aligned}
S(gx_n, gx_n, gx_{n+1}) \ &\leq \alpha S(gx_{n-1}, gx_{n-1}, gx_n) \\
&\quad + L_1 \min\{S(gx_{n-1}, gx_{n-1}, gx_{n+1}), S(gx_n, gx_n, gx_n)\} \\
&= \alpha S(gx_{n-1}, gx_{n-1}, gx_n)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan g nin izometri olması da kullanılarak

$$
\begin{aligned}
S(x_n, x_n, x_{n+1}) &= S(gx_n, gx_n, gx_{n+1}) \\
&\leq \alpha S(gx_{n-1}, gx_{n-1}, gx_n) \\
&\leq \alpha^2 S(gx_{n-2}, gx_{n-2}, gx_{n-1}) \\
&\ \vdots \\
&\leq \alpha^n S(gx_0, gx_0, gx_1) \\
&= \alpha^n S(x_0, x_0, x_1) \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\alpha \in [0,1)$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} S(x_n, x_n, x_{n+1}) = 0$$

olur. $m > n$ olan pozitif m ve n tam sayıları için,

$$
\begin{aligned}
S(x_n, x_n, x_m) &\leq 2S(x_{m-1}, x_{m-1}, x_m) + S(x_n, x_n, x_{m-1}) \\
&\leq 2S(x_{m-1}, x_{m-1}, x_m) + 2S(x_{m-2}, x_{m-2}, x_{m-1}) + S(x_n, x_n, x_{m-2}) \\
&\leq 2S(x_{m-1}, x_{m-1}, x_m) + 2S(x_{m-2}, x_{m-2}, x_{m-1}) + \cdots + S(x_n, x_n, x_{n+1})
\end{aligned}
$$

olur. Şimdi $m = n + r;\ r \geq 1$ için (4.4) eşitsizliği kullanılarak

$$S(x_n, x_n, x_{n+r}) \leq 2\alpha^{n+r-1} S(x_0, x_0, x_1) + 2\alpha^{n+r-2} S(x_0, x_0, x_1) + .. + \alpha^n S(x_0, x_0, x_1)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alındığında,

$$\lim_{n\to\infty} S(x_n, x_n, x_m) = 0$$

olur. Yani $\{x_n\}$, Y de bir Cauchy dizisidir. (Y, S_Y) bir tam alt S-metrik uzay olduğundan $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ olacak şekilde $x \in Y$ vardır. Benzer şekilde, $T(Z_0) \subseteq Y_0$ ve $Z_0 \subseteq g(Z_0)$ olduğundan,

$$S(gy_{n+1}, gy_{n+1}, Ty_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

olacak şekilde Z_0 da bir $\{y_n\}$ dizisi vardır ve $y \in Z$ ye yakınsar. (J, T) ikilisi bir S-yakınsal Berinde g-döngüsel daralma ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^S = S(gy_{n+1}, gy_{n+1}, Ty_n)$$

olduğundan,

$$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, gy_{n+1}) \leq \gamma S(gx_n, gx_n, gy_n) + (1-\gamma)\Delta_{YZ}^S + LS(\mathrm{g}x_n, gx_\mathrm{n}, \mathrm{g}x_{n+1})$$

olacak şekilde $\gamma \in [0,1)$ ve $L \geq 0$ sayıları vardır. Bu ise

$$S(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) \leq \gamma S(x_n, x_n, y_n) + (1-\gamma)\Delta_{YZ}^S + LS(x_n, x_n, x_{n+1})$$

anlamına gelir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alındığında,

$$S(x, x, y) \leq \gamma S(x, x, y) + (1-\gamma)\Delta_{YZ}^S + LS(x, x, x)$$

olur ve buradan

$$S(x, x, y) \leq \Delta_{YZ}^S$$

elde edilir. Dolayısıyla $S(x, x, y) = \Delta_{YZ}^S$ dir yani $x \in Y_0$ ve $y \in Z_0$ olur. $J(Y_0) \subseteq Z_0$ ve $T(Z_0) \subseteq Y_0$ olduğundan, $Jx \in Z_0$ ve $Ty \in Y_0$ olur. Buradan $Y_0 \subseteq g(Y_0)$ ve $Z_0 \subseteq g(Z_0)$ olduğundan

$$S(gw, gw, Jx) = S(gv, gv, Ty) = \Delta_{YZ}^S$$

olacak şekilde $w \in Y_0$ ve $z \in Z_0$ vardır. J birinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümü ve

$$S(gw, gw, Jx) = S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^S$$

olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} S(gw, gw, gx_{n+1}) &\leq \alpha S(gx, gx, gx_n) \\ &\qquad + L_1 \min\{S(gx, gx, gx_{n+1}), S(gx_n, gx_n, gx)\} \\ &= \alpha S(gx, gx, gx_n) + L_1 S(gx, gx, gx_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alındığında, g nin sürekliliğinden $S(gw, gw, gx) = 0$ ve böylece $gx = gw$ olur. Dolayısıyla

$$S(gx, gx, Jx) = \Delta_{YZ}^S$$

anlamına gelir. Benzer şekilde $S(gy, gy, Ty) = \Delta_{YZ}^S$ olduğu ispatlanabilir. Böylece

$$S(gx, gx, Jx) = S(gy, gy, Ty) = S(x, x, y) = \Delta_{YZ}^S$$

olur. Dolayısıyla (x, y) ikilisi (g, J, T) üçlüsünün bir çakışma en iyi yakınlık noktasıdır. Şimdi (x, y) nin tek olduğunu ispatlamak için, $\alpha + L_1 < 1$, $\beta + L_2 < 1$ ve

$$S(gx^*, gx^*, Jx^*) = \Delta_{YZ}^S$$

olacak şekilde $x \neq x^* \in Y$ nin var olduğu kabul edilsin. J birinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümü olduğundan,

$$\begin{aligned} S(gx, gx, gx^*) &\leq \alpha S(gx, gx, gx^*) + L_1 \min\{S(gx, gx, gx^*), S(gx^*, gx^*, gx)\} \\ &= (\alpha + L_1) S(gx, gx, gx^*) \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha + L_1 < 1$ olduğundan, $S\big(gx, gx\,, gx^*\,\big) = 0$ olur. Buradan $x = x^*$ ve dolayısıyla $S(gx, gx\,, Jx\,) = \Delta_{YZ}^S$ olacak şekilde tek bir $x \in Y$ vardır. Benzer şekilde $S(gy, gy\,, Ty) = \Delta_{YZ}^S$ olacak şekilde tek bir $y \in Z$ olduğu gösterilebilir. Bundan dolayı (x, y) ikilisi (g, J, T) üçlüsünün tek çakışma en iyi yakınlık noktasıdır.

Şimdi Teorem 4.5. i açıklamak için bir örnek verilecektir.

Örnek 4.6.

$(\mathbb{R}^2, d)$ Öklid metrik uzayı alınsın.

$$S(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\}$$

tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{R}^2, S)$ bir S-metrik uzaydır. $Y = \{(0, y); -1 \le y \le 1\}$ ve $Z = \{(1, y); -1 \le y \le 1\}$ olsun. Bu durumda $\Delta_{YZ}^S = 1, Y_0 = Y$ ve $Z_0 = Z$ olur. $J : Y \to Z,\; T : Z \to Y$ ve $g : Y \cup Z \to Y \cup Z$ dönüşümleri

$$J(0, y) = \left(1, \tfrac{y}{2}\right), T(1, y) = \left(1, \tfrac{y}{2}\right) \text{ ve } g(x, y) = (x, -y)$$

olarak tanımlansın. Açıkça, $Y_0 = g(Y_0),\; Z_0 = g(Z_0),\; J(Y_0) = \left\{\left(1, \tfrac{y}{2}\right); -1 \le y \le 1\right\} \subset Z_0,\; T(Z_0) = \left\{\left(0, \tfrac{y}{2}\right); -1 \le y \le 1\right\} \subset Y_0$ ve g dönüşümü bir izometridir. Ayrıca J ve T birinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümleridir ve (J, T) ikilisi bir S-yakınsal Berinde g-döngüsel daralmadır. Bundan dolayı Teorem 4.5. in bütün koşulları sağlanır ve $Y \times Z$ de $((0,0), (1,0))$ elemanı (g, J, T) üçlüsünün tek çakışma en iyi yakınlık noktasıdır.

Eğer Teorem 4.5. te $L_1 = 0,\; L_2 = 0$ ve $L = 0$ alınırsa, aşağıdaki çakışma en iyi yakınlık noktası teoremi elde edilir.

Teorem 4.7.

X, Y, Z, Y_0, Z_0, J, T ve g Teorem 4.5. in hipotezlerini sağlasın. Bu durumda

$$S(gx, gx, Jx) = S(gy, gy, Ty) = S(x, x, y) = \Delta_{YZ}^{S}$$

olacak şekilde bir tek $x \in Y$ noktası ve bir tek $y \in Z$ noktası vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0 \in Y_0$ için,

$$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^{S} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar ve herhangi bir sabit $y_0 \in Z_0$ için,

$$S(gy_{n+1}, gy_{n+1}, Ty_n) = \Delta_{YZ}^{S} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi y noktasına yakınsar.

Eğer Teorem 4.5. te her $x \in Y \cup Z$ için $gx = x$ alınırsa, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.8.

X, Y, Z, Y_0, Z_0, J ve T Teorem 4.5. in hipotezlerini sağlasın. Bu durumda

$$S(x, x, Jx) = S(y, y, Ty) = S(x, x, y) = \Delta_{YZ}^{S}$$

olacak şekilde bir $x \in Y$ noktası ve bir $y \in Z$ noktası vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0 \in Y_0$ için,

$$S(x_{n+1}, x_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^{S} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar ve herhangi bir sabit $y_0 \in Z_0$ için,

$$S(y_{n+1}, y_{n+1}, Ty_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi y noktasına yakınsar. Ek olarak, eğer $\alpha + L_1 < 1$ ve $\beta + L_2 < 1$ ise bu takdirde x ve y noktaları sırasıyla J ve T nin tek en iyi yakınlık noktaları olur.

Eğer Teorem 4.5. te (iv) koşulu yerine J ve T sürekli dönüşümler olarak alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.9.

(X, S) bir tam S-metrik uzay ve Y, Z X in boş olmayan kapalı iki alt kümeleri olsun. $J : Y \to Z,\ T : Z \to Y$ ve $g : Y \cup Z \to Y \cup Z$ dönüşümleri aşağıdaki koşulları sağlasın:
(i) J ve T birinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümleridir; yani sırasıyla J ve T dönüşümleri, (4.1) eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\alpha, \beta \in [0,1)$ ve $L_1, L_2 \geq 0$ sayıları vardır;
(ii) J ve T sürekli dönüşümler ve $J(Y_0) \subseteq Z_0$ ve $T(Z_0) \subseteq Y_0$ dir.
(iii) g, $\emptyset \neq Y_0 \subseteq g(Y_0)$ ve $Z_0 \subseteq g(Z_0)$ olan bir izometridir.
Bu durumda

$$S(gx, gx, Jx) = S(gy, gy, Ty) = \Delta_{YZ}^S \tag{4.5}$$

olacak şekilde bir $x \in Y$ noktası ve bir $y \in Z$ noktası vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0 \in Y_0$ için,

$$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar ve herhangi bir sabit $y_0 \in Z_0$ için,

$$S(gy_{n+1}, gy_{n+1}, Ty_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi y noktasına yakınsar.

Ek olarak, eğer $\alpha + L_1 < 1$ ve $\beta + L_2 < 1$ ise bu takdirde (4.5) denklemini sağlayan bir tek x elemanı ve bir tek y elemanı vardır.

İspat

Teorem 4.5. in ispatından

$$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = S(gy_{n+1}, gy_{n+1}, Ty_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.6}$$

ile tanımlanan $\{x_n\} \subseteq Y_0$ ve $\{y_n\} \subseteq Z_0$ dizilerinin sırasıyla $x \in Y$ ve $y \in Z$ noktalarına yakınsadıkları görülür. J, T ve g sürekli dönüşümler olduğundan, $Jx_n \to Jx$, $Ty_n \to Ty$ ve $gx_{n+1} \to gx$, $gy_{n+1} \to gy$ olur. (4.6) denkleminde $n \to \infty$ için limit alındığında,

$$S(gx, gx, Jx) = S(gy, gy, Ty) = \Delta_{YZ}^S$$

elde edilir. x ve y noktalarının tek olduklarının ispatı Teorem 4.5. te ki gibidir.

Şimdi S-metrik uzayda birinci türden ve ikinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümleri için bir çakışma en iyi yakınlık noktası teoremi ispatlanacaktır.

Teorem 4.10.

(X, S) bir tam S-metrik uzay ve Y, Z X in boş olmayan kapalı iki alt kümeleri olsun. $J : Y \to Z$ ve $g : Y \to Y$ dönüşümleri aşağıdaki koşulları sağlasın:
(i) J birinci türden ve ikinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümüdür, yani J dönüşümü sırasıyla (4.1) ve (4.2) eşitsizliklerini sağlayacak şekilde $\alpha, \beta \in [0,1)$ ve $L_1, L_2 \geq 0$ sayıları vardır;
(ii) J, g ye göre izometrik mesafeyi korur ve $J(Y_0) \subseteq Z_0$ dir.
(iii) g, $\emptyset \neq Y_0 \subseteq g(Y_0)$ olan bir izometridir.
Bu durumda

$$S(gx, gx, Jx) = \Delta_{YZ}^S \tag{4.7}$$

olacak şekilde bir $x \in Y$ noktası vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0 \in Y_0$ için,

$$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{x_n\} \subseteq Y_0$ dizisi $x \in Y$ noktasına yakınsar.
Ek olarak eğer $\alpha + L_1 < 1$ ve $\beta + L_2 < 1$ ise bu takdirde (4.7) denklemini sağlayan bir tek x elemanı vardır.

İspat

Teorem 4.5. in ispatındakine benzer olarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^S$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinin $x \in Y$ noktasına yakınsadığı gösterilebilir. J, ikinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümü olduğundan ve g ye göre izometrik mesafeyi koruduğundan,

$$\begin{aligned} S(Jx_n, Jx_n, Jx_{n+1}) &= S(Jgx_n, Jgx_n, Jgx_{n+1}) \\ &\leq \beta S\left(Jgx_{n-1}, Jgx_{n-1}, Jgx_n\right) \\ &\qquad + L_2 \min\{S(Jgx_{n-1}, Jgx_{n-1}, Jgx_{n+1}), S(Jgx_n, Jgx_n, Jgx_n)\} \\ &= \beta S(Jgx_{n-1}, Jgx_{n-1}, Jgx_n) \\ &= \beta S(Jx_{n-1}, Jx_{n-1}, Jx_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.5. in ispatındakine benzer olarak $\{Jx_n\}$ bir Cauchy dizisi ve böylece bir $y \in Z$ ye yakınsadığı gösterilebilir. Bundan dolayı

$$S(gx, gx, y) = \lim_{n\to\infty} S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^S$$

olur, yani $gx \in Y_0$ dır. $Y_0 \subseteq (Y_0)$ olduğundan $gx = gz$ olacak şekilde $z \in Y_0$ vardır ve böylece $S(gx, gx, gz) = 0$ dır. g nin bir izometri olmasından $S(x, x, z) = S(gx, gx, gz) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $x = z \in Y_0$ ve böylece $Jx \in J(Y_0) \subseteq Z_0$ olur. Bu durumda

$$S(gu, gu, Jx) = \Delta_{YZ}^S$$

olacak şekilde $u \in Y$ vardır.

J birinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümü olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} S(gu, gu, gx_{n+1}) &\leq \alpha S(gx, gx, gx_n) + L_1 \min\{S(gx, gx, gx_{n+1}), S(gx_n, gx_n, u)\} \\ &\leq \alpha S(gx, gx, gx_n) + L_1 S(gx, gx, gx_{n+1}) \qquad (4.8) \end{aligned}$$

sağlanır. (4.8) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alındığında, $gu = gx$ sonucuna varılır. Bundan dolayı x noktası (g, J) ikilisinin bir çakışma en iyi yakınlık noktasıdır. Bu x noktasının tek olduğunun ispatı Teorem 4.5. teki gibidir.

Aşağıdaki örnek bu çakışma en iyi yakınlık noktası teoremini açıklamaktadır.

Örnek 4.11.

$X = \mathbb{R}$ ve $S(x, y, z) = \max\{|x - y|, |y - z|, |z - x|\}$ olsun. Bu durumda $(\mathbb{R}, S)$ bir S-metrik uzaydır. $Y = [-2,2]$ ve $Z = \{-3\} \cup [3,4]$ olsun. Bu durumda $\Delta_{YZ}^S = 1$, $Y_0 = \{-2,2\}$ ve $Z_0 = \{-3,3\}$ olur. $J : Y \to Z$ ve $g : Y \to Y$ dönüşümleri

$$Jx = \begin{cases} 3, & x \text{ rasyonel ise} \\ 4, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad \text{ve} \quad gx = -x$$

olarak tanımlansın. Açıkça, $Y_0 = g(Y_0)$, $J(Y_0) = \{3\} \subset Z_0$ ve g bir izometridir. Ayrıca J dönüşümü g ye göre izometrik mesafeyi korur ve bu dönüşüm birinci türden ve ikinci türden bir S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümüdür. Böylece Teorem 4.10. un tüm koşulları sağlanır ve Y de -2 noktası (g,J) ikilisinin tek çakışma en iyi yakınlık noktasıdır.

Eğer Teorem 4.10. da $L_1 = 0$ ve $L_2 = 0$ alınırsa, aşağıdaki çakışma en iyi yakınlık noktası teoremi elde edilir.

Teorem 4.12.

X, Y, Z, Y_0, Z_0, J ve g Teorem 4.10. un hipotezlerini sağlasın. Bu durumda

$$S(gx, gx, Jx) = \Delta_{YZ}^{S}$$

olacak şekilde bir tek $x \in Y$ noktası vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0 \in Y_0$ için,

$$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^{S} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar.

Eğer Teorem 4.10. da her $x \in Y$ için $gx = x$ alınırsa, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.13.

X, Y, Z, Y_0, Z_0 ve J Teorem 4.10. un hipotezlerini sağlasın. Bu durumda

$$S(x, x, Jx) = \Delta_{YZ}^{S}$$

olacak şekilde bir $x \in Y$ noktası vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0 \in Y_0$ için,

$$S(x_{n+1}, x_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^{S} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar.

Ek olarak, eğer $\alpha + L_1 < 1$ ve $\beta + L_2 < 1$ ise bu takdirde x noktası J nin tek en iyi yakınlık noktasıdır.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu bölümde, çalışmada elde edilen sonuçlara yer verilecektir.

Bulunan sonuçlar şunlardır:

Sonuç 5.1.

(X,S) bir tam S-metrik uzay ve Y,Z X in boş olmayan kapalı iki alt kümeleri olsun. $J:Y\to Z,\ T:Z\to Y$ ve $g:Y\cup Z\to Y\cup Z$ dönüşümleri aşağıdaki koşulları sağlasın:
(i) J ve T birinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümleridir, yani sırasıyla J ve T dönüşümleri, (4.1) eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\alpha,\beta\in[0,1)$ ve $L_1,L_2\geq 0$ sayıları vardır;
(ii) $J(Y_0)\subseteq Z_0$ ve $T(Z_0)\subseteq Y_0$;
(iii) g, $\emptyset\neq Y_0\subseteq g(Y_0)$ ve $Z_0\subseteq g(Z_0)$ olan bir izometridir;
(iv) (J,T) ikilisi bir S-yakınsal Berinde g-döngüsel daralmadır.
Bu durumda

$$S(gx,gx,Jx)=S(gy,gy,Ty)=S(x,x,y)=\Delta_{YZ}^{S} \tag{5.1}$$

olacak şekilde bir $x\in Y$ ve bir $y\in Z$ noktaları vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0\in Y_0$ için,

$$S(gx_{n+1},gx_{n+1},Jx_n)=\Delta_{YZ}^{S}$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi her $n\in\mathbb{N}$ için x elemanına yakınsar ve herhangi bir sabit $y_0\in Z_0$ için,

$$S(gy_{n+1},gy_{n+1},Ty_n)=\Delta_{YZ}^{S}$$

ile tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için y elemanına yakınsar.
Ek olarak, eğer $\alpha + L_1 < 1$ ve $\beta + L_2 < 1$ ise, bu takdirde (5.1) denklemini sağlayan (x, y) ikilisi (g, J, T) üçlüsünün tek çakışma en iyi yakınlık noktasıdır.

Sonuç 5.2.

X, Y, Z, Y_0, Z_0, J,T ve g Sonuç 5.1. in hipotezlerini sağlasın. Ayrıca $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ ve $L = 0$ olsun. Bu durumda

$$S(gx, gx, Jx) = S(gy, gy, Ty) = S(x, x, y) = \Delta_{YZ}^S$$

olacak şekilde bir tek $x \in Y$ noktası ve bir tek $y \in Z$ noktası vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0 \in Y_0$ için,

$$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar ve herhangi bir sabit $y_0 \in Z_0$ için,

$$S(gy_{n+1}, gy_{n+1}, Ty_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi y noktasına yakınsar.

Sonuç 5.3.

X, Y, Z, Y_0, Z_0, J ve T Sonuç 5.1. in hipotezlerini sağlasın. Ayrıca her $x \in Y \cup Z$ için $gx = x$ olsun. Bu durumda

$$S(x, x, Jx) = S(y, y, Ty) = S(x, x, y) = \Delta_{YZ}^S$$

olacak şekilde bir $x \in Y$ noktası ve bir $y \in Z$ noktası vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0 \in Y_0$ için,

$S(x_{n+1}, x_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar ve herhangi bir sabit $y_0 \in Z_0$ için,

$S(y_{n+1}, y_{n+1}, Ty_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ile tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi y noktasına yakınsar.
Ek olarak, eğer $\alpha + L_1 < 1$ ve $\beta + L_2 < 1$ alınırsa, bu takdirde x ve y noktaları sırasıyla J ve T nin tek en iyi yakınlık noktaları olur.

Sonuç 5.4.

(X, S) bir tam S-metrik uzay ve Y, Z X in boş olmayan kapalı iki alt kümeleri olsun. $J : Y \to Z,\ T : Z \to Y$ ve $g : Y \cup Z \to Y \cup Z$ dönüşümleri aşağıdaki koşulları sağlasın:
(i) J ve T birinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümleridir; yani sırasıyla J ve T dönüşümleri, (4.1) eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\alpha, \beta \in [0,1)$ ve $L_1, L_2 \geq 0$ sayıları vardır;
(ii) J ve T sürekli dönüşümler ve $J(Y_0) \subseteq Z_0$ ve $T(Z_0) \subseteq Y_0$ dir.
(iii) g, $\emptyset \neq Y_0 \subseteq g(Y_0)$ ve $Z_0 \subseteq g(Z_0)$ olan bir izometridir.
Bu durumda

$$S(gx, gx, Jx) = S(gy, gy, Ty) = \Delta_{YZ}^S \tag{5.2}$$

olacak şekilde bir $x \in Y$ noktası ve bir $y \in Z$ noktası vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0 \in Y_0$ için,

$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar ve herhangi bir sabit $y_0 \in Z_0$ için,

$S(gy_{n+1}, gy_{n+1}, Ty_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ile tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi y noktasına yakınsar.
Ek olarak, eğer $\alpha + L_1 < 1$ ve $\beta + L_2 < 1$ ise bu takdirde (5.2) denklemini sağlayan bir tek x elemanı ve bir tek y elemanı vardır.

Sonuç 5.5.

(X, S) bir tam S-metrik uzay ve Y, Z X in boş olmayan kapalı iki alt kümeleri olsun. $J : Y \to Z$ ve $g : Y \to Y$ dönüşümleri aşağıdaki koşulları sağlasın:
(i) J birinci türden ve ikinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümüdür, yani J dönüşümü sırasıyla (4.1) ve (4.2) eşitsizliklerini sağlayacak şekilde $\alpha, \beta \in [0,1)$ ve $L_1, L_2 \geq 0$ sayıları vardır;
(ii) J, g ye göre izometrik mesafeyi korur ve $J(Y_0) \subseteq Z_0$ dir.
(iii) g, $\emptyset \neq Y_0 \subseteq g(Y_0)$ olan bir izometridir.
Bu durumda

$$S(gx\,, gx\,, Jx\,) = \Delta_{YZ}^{S} \tag{5.3}$$

olacak şekilde bir $x \in Y$ noktası vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0 \in Y_0$ için,

$$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^{S} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{x_n\} \subseteq Y_0$ dizisi $x \in Y$ noktasına yakınsar.
Ek olarak eğer $\alpha + L_1 < 1$ ve $\beta + L_2 < 1$ ise bu takdirde (5.3) denklemini sağlayan x noktası (g, J) ikilisinin tek çakışma en iyi yakınlık noktasıdır.

Sonuç 5.6.

X, Y, Z, Y_0, Z_0, J ve g Sonuç 5.5. in hipotezlerini sağlasın. Ayrıca $L_1 = 0$ ve $L_2 = 0$ olsun. Bu durumda

$$S(gx, gx, Jx) = \Delta_{YZ}^{S}$$

olacak şekilde bir tek $x \in Y$ noktası vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0 \in Y_0$ için,

$$S(gx_{n+1}, gx_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar.

Sonuç 5.7.

X, Y, Z, Y_0, Z_0 ve J Sonuç 5.5. in hipotezlerini sağlasın. Ayrıca her $x \in Y$ için $gx = x$ olsun. Bu durumda

$$S(x, x, Jx) = \Delta_{YZ}^S$$

olacak şekilde bir $x \in Y$ noktası vardır.
Ayrıca, herhangi bir sabit $x_0 \in Y_0$ için,

$$S(x_{n+1}, x_{n+1}, Jx_n) = \Delta_{YZ}^S \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar.
Ek olarak, eğer $\alpha + L_1 < 1$ ve $\beta + L_2 < 1$ ise bu takdirde x noktası J nin tek en iyi yakınlık noktasıdır.

Birinci türden yakınsal daralma dönüşümü ve birinci türden yakınsal Berinde g-daralma dönüşümü, birinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümünün özel durumları olduğundan Sonuç $5.1. - 5.3.$ birinci türden hem yakınsal daralma hem de yakınsal Berinde g-daralma dönüşümleri için karşılık gelen sonuçları genelleştirir. Birinci türden ve ikinci türden S-yakınsal Berinde g-daralma dönüşümünü ele alan Sonuç $5.5. - 5.7.$ içinde durum aynıdır.

Elde edilen bu sonuçlar metrik uzayların farklı genelleştirmeleri üzerinde benzer şekilde ispat edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Banach, S., Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals. Fundam. Math., 3, 133-181, 1922.

[2] Berinde, V., Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration. Nonlinear Anal., Forum 9(1), 43-53, 2004.

[3] Fan, K., Extensions of two fixed point theorems of F.E. Browder. Math. Z., 122, 234-240, 1969.

[4] Kirk, W.A., Srinivasan, P.S., Veeramani, P., Fixed points for mapping cyclic contractions. Fixed Point Theory 4, 79-89, 2003.

[5] Eldred, A.A., Veeramani, P., Existence and convergence of best proximity points. J. Math. Anal. Appl., 323(2), 1001-1006, 2006.

[6] Basha, S.S., Best proximity point theorems generalizing the contraction principle. Nonlinear Anal., 74, 5844-5850, 2011.

[7] Klanarong, C., Chaiya, I., Coincidence best proximity point theorems for proximal Berinde g-cyclic contractions in metric spaces. J. Inequal. Appl. 2021, Article ID 21, 16 pages, 2021.

[8] Sedghi, S., Shobe, N., Aliouche, A., A generalization of fixed point theorems in S-metric spaces. Mat. Vesnik, 64(3), 258-266, 2012.

[9] Nantadilok, J., Best proximity point results in S-metric spaces. Int. J. Math. Anal., 10(27), 1333-1346, 2016.

[10] Khanpanuk, T., Coincidence best proximity points for generalized MT-proximal cyclic contractive mappings in S-metric space. Thai J. Math., 18(4), 1787-1799, 2020.

[11] Karaçay, T., Genel Topoloji, Başkent Üniversitesi Yayınevi, 2009.

[12] Soykan, Y., Metrik Uzaylar ve Topolojisi, Nobel Yayıncılık, 2012.

[13] Curtain, R.F., Pritchard, A.J., Functional in Modern Applied Mathematics, Academic Press, London, 1977.

[14] Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz, Genelleştirilmiş ve Yeniden Düzenlenmiş 2. Basım, Nobel Yayıncılık, 2012.

[15] Brown, A.L., Page, A., Elements of Functional Analysis, Van Nostrand-Reinhold, London, 1970.

[16] Özgür, N.Y., Taş, N., Some new contractive mappings on S-metric spaces and their relationships with the mapping (S25). Math. Sci., 11, 7-16, 2017.

[17] Özgür, N.Y., Taş, N., Some fixed point theorems on S-metric spaces. Mat Vesnik, 69(1), 39-52, 2017.

[18] Özgür, N.Y., Taş, N., The Picard theorem on S-metric spaces. Acta Math. Sci., 38B(4), 1245-1258, 2018.

[19] Gupta, A., Cyclic contraction on S-metric spaces. Int. J. Anal. Appl., 3 (2), 119-130, 2013.

[20] Berinde, V., Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[21] Granas, A., Dugundji, J., Fixed Point Theory, Springer Monographs in Mathematics, 2002.

[22] Gabeleh, M., Global optimal solutions of non-self mappings. UPB Sci. Bull., 75(3), 67-74, 2013.

[23] Berinde, V., Pacurar, M., Fixed points and continuity of almost contractions. Fixed Point Theory, 9(1), 23-34, 2008.

[24] Gabeleh, M., Abkar, A., Best proximity points for semi-cyclic contractive pairs in Banach spaces. Int. Math., Forum 6, 2179-2186, 2011.

[25] Sedghi, S, Dung, N.V., Fixed point theorems on S-metric spaces. Mat. Vesnik, 66(1), 113-124, 2014.

[26] Hieu, N.T., Thanh Ly, N.T., Dung, N.V., A generalization of Ciric quasi-contractions for maps on S-metric spaces. Thai J. Math., 13(2), 369-380, 2015.

[27] Goebel K., Kirk, W.A., Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[28] Şahin A., Şamdanlı K., Some coincidence best proximity point results in S-metric spaces. Proc. Int. Math. Sci., 3(2), 75-87, 2021.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Kadir ŞAMDANLI

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Yılı**
Yüksek Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik	Devam ediyor
Lisans	Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi / Fen Edebiyat Fakültesi / Matematik	2019
Lise	Karacabey Anadolu Lisesi	2009

YABANCI DİL

İngilizce

ESERLER

1. Şahin, A., Şamdanlı, K., Some coincidence best proximity point results in S-metric spaces. Proc. Int. Math. Sci., 3(2), 75-87, 2021.