T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE YENİ YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ VE ASİMPTOTİK DENK FONKSİYONLAR

DOKTORA TEZİ

Bayram SÖZBİR

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Selma ALTUNDAĞ**

Ocak 2022

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE YENİ YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ VE ASİMPTOTİK DENK FONKSİYONLAR

DOKTORA TEZİ

Bayram SÖZBİR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : FONKSİYONLAR TEORİSİ VE FONKSİYONEL ANALİZ

Bu tez 25/01/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı **Üye** **Üye**

Üye **Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Bayram SÖZBİR
25.01.2022

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca bana her konuda yardımcı olan, yol gösteren, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak gelişimime katkı sağlayan çok değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Selma Altundağ'a, ihtiyaç duyduğumda içtenlikle bana yardımcı olan, fikirlerinden yararlandığım değerli hocalarım Sayın Doç. Dr. Mahpeyker Öztürk'e, Sayın Prof. Dr. Emrah Evren Kara'ya, Sayın Prof. Dr. Hüseyin Altundağ'a, üzerimdeki emeklerinden dolayı tüm akademisyen hocalarıma ve öğretmenlerime çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca hayatımın her anında yanımda olan, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, varlıklarından güç aldığım değerli aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Son olarak, doktora eğitimim boyunca 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\lvert A \rvert$	: A kümesinin eleman sayısı
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\delta(A)$	: A kümesinin yoğunluğu
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{T}$	: Keyfi zaman skalası
σ	: İleri sıçrama operatörü
ρ	: Geri sıçrama operatörü
μ	: Graininess fonksiyonu
g^{Δ}	: g fonksiyonunun $\Delta-$türevi (Hilger türevi)
$\mu_{\Delta}(A)$	: A kümesinin μ_{Δ} ölçüsü
$C_b(\mathbb{T})$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki sınırlı fonksiyonların kümesi
$S_{\mathbb{T}}$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi
$S_{\theta-\mathbb{T}}$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki lacunary istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi
$N_{\theta-\mathbb{T}}$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki kuvvetli lacunary Cesàro toplanabilir fonksiyonların kümesi
$S_{\mathbb{T}}^{f}$	: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki $f-$istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi

$S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki $f-$lacunary istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi

$N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki kuvvetli $f-$lacunary Cesàro toplanabilir fonksiyonların kümesi

$g \overset{S_{\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki L katlı asimptotik istatistiksel denk g ve h fonksiyonları

$g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki L katlı asimptotik lacunary istatistiksel denk g ve h fonksiyonları

$g \overset{N_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki L katlı kuvvetli asimptotik lacunary denk g ve h fonksiyonları

$g \overset{S_{\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki L katlı asimptotik $f-$istatistiksel denk g ve h fonksiyonları

$g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki L katlı asimptotik $f-$lacunary istatistiksel denk g ve h fonksiyonları

$g \overset{N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki L katlı kuvvetli asimptotik $f-$lacunary denk g ve h fonksiyonları

$S_{\mathbb{T}}(B)$: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki istatistiksel sınırlı fonksiyonların kümesi

$S_{\theta-\mathbb{T}}(B)$: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerindeki lacunary istatistiksel sınırlı fonksiyonların kümesi

$h.h._{\theta-\mathbb{T}}\ t$: $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde $\theta=(k_r)$ lacunary dizisine göre hemen hemen her t için

ÖZET

Anahtar kelimeler: Zaman skalası, istatistiksel yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel denk fonksiyonlar, istatistiksel sınırlılık

Bu çalışmada, literatürde sayı dizileri için verilmiş istatistiksel yakınsaklık ve toplanabilme teorisine ait bazı kavramlar keyfi bir zaman skalası üzerinde çalışılmıştır. Doktora tezi olarak sunulan bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

İlk kısım giriş bölümüne ayrılmış olup, toplanabilme teorisinin ve zaman skalası teorisinin tarihi gelişimi hakkında kısa bir bilgi verilmiştir.

İkinci kısımda, toplanabilme teorisi ve zaman skalası ile ilgili temel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

Diğer kısımlar tezin orijinal sonuçlarını içermektedir.

Üçüncü bölümde, zaman skalası üzerinde tanımlı reel değerli delta ölçülebilir fonksiyonlar için yeni yakınsaklık çeşitleri sunulmuştur. Bu bölümün ilk kısmında, $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli $\alpha\beta$-Cesàro toplanabilirlik kavramları tanıtılmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında ise, modülüs fonksiyonları kullanılarak, f-lacunary istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli f-lacunary Cesàro toplanabilirlik kavramları tanımlanmış ve bu kavramlarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, zaman skalası üzerinde tanımlı pozitif reel değerli delta ölçülebilir iki fonksiyon göz önüne alınarak, asimptotik istatistiksel denklik, asimptotik lacunary istatistiksel denklik, asimptotik f-istatistiksel denklik, asimptotik f-lacunary istatistiksel denklik, kuvvetli asimptotik lacunary denklik ve kuvvetli asimptotik f-lacunary denklik kavramları tanımlanarak, bu kavramlar arasındaki ilişkileri inceleyen teorem ve ispatlara yer verilmiştir.

Beşinci bölümde, zaman skalası üzerinde lacunary istatistiksel sınırlılık kavramı tanıtılmıştır. Ayrıca bu kavramın lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ve istatistiksel sınırlılık kavramı ile olan ilişkileri incelenmiştir.

Son bölüm ise, sonuç ve öneriler kısmına ayrılmıştır.

NEW TYPES OF CONVERGENCE AND ASYMPTOTICALLY EQUIVALENT FUNCTIONS ON TIME SCALES

SUMMARY

Keywords: Time scale, statistical convergence, lacunary statistical convergence, asymptotically statistical equivalent functions, statistical boundedness

In this study, some concepts related to statistical convergence and summability theory given for number sequences in the literature are studied on arbitrary time scales. This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction, and brief information is given about the historical development of summability theory and time scale theory.

In the second chapter, some basic definitions, theorems and examples regarding the theory of summability and time scales are given. The other chapters contain the original results of the thesis.

In the third chapter, new convergence types are presented for the real valued delta measurable functions defined on time scales. In the first part of this chapter, the concepts of $\alpha\beta$-statistical convergence and strong $\alpha\beta$-Cesàro summability are introduced and the relationships between these concepts are examined. In the second part of this chapter, the concepts of f-lacunary statistical convergence and strong f-lacunary Cesàro summability are defined by using modulus functions and some results related to these concepts are obtained.

In the fourth chapter, by using two positive real valued delta measurable functions defined on time scales, the concepts of asymptotically statistical equivalence, asymptotically lacunary statistical equivalence, asymptotically f-statistical equivalence, asymptotically f-lacunary statistical equivalence, strong asymptotically lacunary equivalence and strong asymptotically f-lacunary equivalence are introduced. In addition, some results related to these concepts are obtained.

In the fifth chapter, the concept of lacunary statistical boundedness on time scales is introduced. In addition, the relationships of this concept with the concept of lacunary statistical convergence and the concept of statistical boundedness has been examined.

The last section is devoted to the conclusion and recommendations.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematiksel analizin en geniş uygulama ve araştırma alanlarından birisi istatistiksel yakınsaklık ve toplanabilme teorisidir. İstatistiksel yakınsaklık, alışılmış yakınsaklığın bir genellemesi olup, pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanmaktadır. Bu kavram ilk olarak Zygmund [1] tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra 1951 yılında istatistiksel yakınsaklık kavramı, birbirlerinden bağımsız olarak Fast [2] ve Steinhaus [3] tarafından tanımlanmıştır. Zaman içerisinde bu kavram ve genellemeleri Schoenberg [4], Šalát [63], Fridy [7], Connor [10], Rath ve Tripathy [62], Freedman ve ark. [6] ve birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır [5-18, 22, 27-29]. Ayrıca, Fridy ve Orhan [8] tarafından istatistiksel yakınsaklık ve lacunary dizi kavramları kullanılarak, lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmış ve istatistiksel yakınsaklık ile olan ilişkisi incelenmiştir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramının genelleştirilmesinde ve yeni dizi uzaylarının oluşturulmasında kullanılan diğer bir önemli kavram da modülüs fonksiyonlardır. Modülüs fonksiyonu, ilk kez Nakano [23] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra bu kavram yardımıyla, Ruckle [24], Maddox [25,26], Connor [11] ve birçok araştırmacı tarafından bazı dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzayların çeşitli özelliklerini inceleyen çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca, Aizpuru ve ark. [27] tarafından sınırlı olmayan bir f modülüs fonksiyonu kullanılarak, yeni bir yoğunluk tanımı verilmiş ve bu yoğunluk kavramından yararlanılarak f-istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır. f-istatistiksel yakınsaklık, alışılmış yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasında kalan bir kavramdır. Bu tanımdan yararlanılarak, Bhardwaj ve Dhawan tarafından [28] de α. dereceden f-istatistiksel yakınsaklık ve α. dereceden kuvvetli f-Cesàro toplanabilirlik; [29] da f-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları verilmiştir.

Diğer yandan, dizilerin yakınsaklık oranını karşılaştırmak amacıyla, 1980 yılında, Pobyvanets [30] tarafından negatif terimli olmayan iki sayı dizisinin asimptotik denkliğini koruyan asimptotik regüler matris tanımı verilmiştir. Fakat dizilerde sıfır değerli terimlerin sık görülmesi, birçok durumda dizi terimlerinin $\frac{x_k}{y_k}$ şeklinde oranlanmasını imkansız hale getirmektedir. Bu nedenle, Fridy [31] yakınsaklık oranlarının karşılaştırılması için yeni yollar tanıtmıştır. Fridy [31] nin bu çalışmasından sonra, Marouf [32] asimptotik regüler matris olmanın bazı gerek ve yeter şartlarını çalışmıştır. Li [60] ise dizilerin ve toplanabilirliğin asimptotik denkliğini incelemiştir. 2003 yılında Patterson [33] asimptotik denklik ve istatistiksel yakınsaklık kavramlarını birleştirerek asimptotik istatistiksel denklik kavramını tanıtmış ve [30] daki teoremlerin istatistiksel benzerlerini vererek bu kavramları daha da genişletmiştir. Ayrıca, Patterson ve Savaş [34] asimptotik lacunary istatistiksel denklik kavramını tanıtmıştır. Bununla birlikte literatürde bu kavramlar birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır [35-39].

Diziler için istatistiksel sınırlılık kavramı ilk olarak Fridy ve Orhan [9] tarafından çalışılmıştır. Bhardwaj ve Gupta [19] istatistiksel sınırlılığın bazı genellemelerini; Bhardwaj ve ark. [20] lacunary istatistiksel sınırlılığı; Et ve ark. [21] $\alpha.$ dereceden lacunary istatistiksel sınırlılığı çalışmıştır.

Son zamanların oldukça dikkat çeken yeni çalışma alanlarından birisi de zaman skalası teorisidir. Zaman skalası teorisi, 1988 yılında Alman matematikçi Stefan Hilger [41] tarafından ortaya konmuştur. Stefan Hilger, bu teoriyle birlikte ayrık analiz ile sürekli analizi aynı çatı altında toplamayı amaçlamıştır. Bu amaç doğrultusunda her ikisini de kapsayan bir küme ile çalışılmış ve bu kümeye de zaman skalası ismi verilmiştir. Zaman skalası reel sayılar kümesi alındığında sürekli analiz ile tam sayılar kümesi alındığında ise ayrık analiz ile çakışmaktadır. Böylelikle zaman skalası, üzerinde tanımlanan türev kavramı ile birlikte diferansiyel ve fark denklemlerini birlikte ifade etme imkanı sağlanmaktadır. Bu ise, $\mathbb{R}$ de tanımlı diferansiyel denklemler veya $\mathbb{Z}$ de tanımlı fark denklemleri için ayrı ayrı sonuçlar vermek yerine, reel sayıların boştan farklı kapalı bir alt kümesi olan zaman skalası üzerinde tanımlanan genel bir dinamik denklem ile birlikte çalışılarak ortak sonuçlar elde edilmesi olanağı tanımaktadır. Burada hemen şu belirtilmelidir ki zaman skalası sadece $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ için değil aynı zamanda zaman skalası tanımına uyan diğer uzaylar için de sonuçlar vermektedir. Zaman skalası teorisi sağladığı tüm bu kolaylıklarla birlikte farklı alanlarda çalışmalar yapan birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve popüler hale gelmiştir. Zaman skalası için temel tanım ve teoremlere Bohner ve Peterson [42] kitabından ulaşılabilir.

Son zamanlarda ise zaman skalası teorisi ile birlikte istatistiksel yakınsaklık ve toplanabilme teorisinin birleştirilmesi amaçlanmıştır. Bu doğrultudaki ilk çalışmalar Turan ve Duman [46] ile Seyyidoğlu ve Tan [45] tarafından birbirinden bağımsız olarak aynı dönemlerde yapılmıştır. Seyyidoğlu ve Tan [45] tarafından zaman skalası üzerinde yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy kavramları tanıtılmıştır. Turan ve Duman [46] zaman skalası üzerinde istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Sonrasında bu çalışmalar ışığında birçok çalışma yapılmıştır. Örneğin, Turan ve Duman tarafından [47] de lacunary istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli lacunary Cesàro toplanabilirlik kavramları, [48] de lacunary istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki; Altın ve ark. tarafından [49] da düzgün istatistiksel yakınsaklık, [50] de λ-istatistiksel yakınsaklık ve λ-toplanabilirlik kavramları zaman skalası üzerinde çalışılmıştır. Ayrıca Seyyidoğlu ve Tan [51] zaman skalası üzerinde tanımlı delta ölçülebilir bir fonksiyon için Δ-limit noktası ve Δ-kaplama noktası kavramlarını çalışmıştır.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır ve istatistiksel yakınsaklık ve toplanabilme teorisine ait bazı kavramların zaman skalası üzerine taşınması amaçlanmaktadır. İlk olarak, bu çalışmaya temel teşkil etmesi amacıyla zaman skalası ve toplanabilme teorisiyle ilgili bazı temel tanım, örnek ve sonuçlar hatırlatılmıştır. Çalışmanın diğer kısımlarında ise elde edilen orijinal sonuçlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, zaman skalası üzerinde yeni yakınsaklık çeşitleri tanıtılmıştır. Bu bölümün ilk kısmında, zaman skalası üzerinde $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli $\alpha\beta$-Cesàro toplanabilirlik kavramları tanıtılmış ve bu kavramlarla ilgili bazı sonuçlar incelenmiştir. İkinci kısımda ise, modülüs fonksiyonları yardımıyla zaman skalası üzerinde f-lacunary istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli f-lacunary Cesàro toplanabilirlik kavramları tanımlanmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Ayrıca f-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramının, f-istatistiksel yakınsaklık ile olan ilişkisi incelenmiştir. Dördüncü bölümde, zaman skalası üzerinde tanımlı pozitif reel değerli delta ölçülebilir fonksiyonlar için asimptotik istatistiksel denklik, asimptotik lacunary istatistiksel denklik, asimptotik f-istatistiksel denklik, asimptotik f-lacunary istatistiksel denklik, kuvvetli asimptotik lacunary denklik ve kuvvetli asimptotik f-lacunary denklik kavramları tanıtılarak, bu kavramlarla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Buna ek olarak, bu yeni kavramlar arasındaki kapsama bağıntıları sunulmuştur. Beşinci bölümde, zaman skalası üzerinde lacunary istatistiksel sınırlılık kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca bu kavramın lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ve istatistiksel sınırlılık kavramı ile olan ilişkisi incelenmiştir. Çalışmanın son kısmında ise, tez kapsamında elde edilen sonuçlar genel olarak sunulmuştur.

BÖLÜM 2. GENEL BİLGİLER

2.1. Toplanabilme Teorisinde Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda toplanabilme teorisi ve istatistiksel yakınsaklık kavramına dair bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1.1. İstatistiksel yakınsaklık

Tanım 2.1.1.1. Bir $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için $K_n := \{k \leq n : k \in K\}$ olmak üzere K_n kümesinin eleman sayısı $|K_n|$ ile gösterilsin. Eğer

$$\lim_n \frac{|K_n|}{n}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K kümesinin yoğunluğu veya doğal yoğunluğu denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir [61].

Yukarıdaki yoğunluk tanımından $\delta(\mathbb{N}) = 1$, $\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = 0$ ve $\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ olduğu kolaylıkla elde edilebilir.

Ayrıca doğal sayılar kümesinin her bir sonlu alt kümesinin sıfır yoğunluklu olduğu da görülür.

Bir $K \subset \mathbb{N}$ kümesi için $\delta(K)$ mevcut ise, bu durumda $\delta(\mathbb{N}-K)=1-\delta(K)$ eşitliği geçerlidir [61].

Tanım 2.1.1.2. Eğer $x=(x_k)$ dizisinin terimleri yoğunluğu sıfır olan bir küme dışındaki her k için bir P özelliğini sağlıyorsa, $x=(x_k)$ dizisi P özelliğini hemen hemen her k için sağlıyor denir ve bu durum kısaca "$h.h.\,k$" ile gösterilir [7].

Tanım 2.1.1.3. $x=(x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için $K_\varepsilon := \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin yoğunluğu sıfır, yani

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right) = \lim_n \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, yani $h.h.\,k$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise, $x=(x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st-\lim x = L$ şeklinde gösterilir [2].

Alışılmış anlamda yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir:

Eğer $x=(x_k)$ dizisi bir L sayısına yakınsak ise, bu durumda L sayısının herhangi bir $\varepsilon>0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken, bu komşuluğun dışında dizinin en fazla sonlu sayıda terimi bulunabilir. Dolayısıyla bu sonlu sayıdaki terimlerin indislerinin oluşturacağı küme, doğal sayıların sonlu bir alt kümesi olup, yoğunluğu sıfırdır. Böylece x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olur. Dolayısıyla, istatistiksel yakınsaklık, alışılmış yakınsaklıktan daha genel bir kavramdır. Yani, yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat istatistiksel yakınsak olan diziler, yakınsak olmak zorunda değildir. Bu durum aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.1.1.4. $x=(x_k)$ dizisi

$$x_k=\begin{cases}1 & , \quad k=m^2\\ 0 & , \quad k\neq m^2\end{cases} \quad , \quad (m=1,2,...)$$

biçiminde tanımlansın. Her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\{k\leq n:|x_k|\geq\varepsilon\}\right|\leq \lim_n \frac{1}{n}\left|\{k\leq n:x_k\neq 0\}\right|\leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n}=0$$

olduğundan, $st-\lim x=0$ dir. Fakat, x dizisi yakınsak değildir.

Ayrıca Klasik Analizden bilindiği üzere yakınsak her dizi aynı zamanda sınırlıdır. Fakat istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı olması gerekmez. Bu durum aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.1.1.5.

$$x_k=\begin{cases}\sqrt{k} & , \quad k=m^2\\ 1 & , \quad k\neq m^2\end{cases} \quad , \quad (m=1,2,...)$$

ile tanımlanan $x=(x_k)$ dizisi için $st-\lim x=1$ dir. Fakat bu dizi sınırsız ve ıraksaktır.

Tanım 2.1.1.6. $x=(x_k)$ bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-L|=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda $x=(x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilirdir denir [6].

2.1.2. Lacunary istatistiksel yakınsaklık

Tanım 2.1.2.1. $\theta = (k_r)$, negatif olmayan tam sayıların artan bir dizisi olsun. Eğer $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ ise, $\theta = (k_r)$ dizisine bir lacunary dizisi denir ve θ ile belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ biçimindedir [6].

Tanım 2.1.2.2. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi için $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_\theta - \lim x = L$ şeklinde gösterilir [8].

Tanım 2.1.2.3. $\theta = (k_r)$ bir lacunay dizisi olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli lacunary toplanabilirdir denir [6].

2.1.3. $\alpha\beta$ – İstatistiksel yakınsaklık

Bu kısımda literatürdeki birçok yakınsaklık kavramını genelleyen $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık kavramı hatırlatılacaktır. Bunun için öncelikle belirli koşulları sağlayan $\alpha(n)$ ve $\beta(n)$ dizi çifti tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.3.1. $\alpha(n)$ ve $\beta(n)$ dizileri

K_1 : α ve β azalmayan iki dizi

K_2 : $\beta(n) \geq \alpha(n)$ (her $n \in \mathbb{N}$ için)

K_3 : $\beta(n) - \alpha(n) \to \infty$ ($n \to \infty$ iken)

koşullarını sağlayan pozitif terimli iki dizi olsun. K_1, K_2 ve K_3 koşullarını sağlayan pozitif terimli (α, β) dizi çiftlerinin kümesi Λ ile gösterilir [18].

Tanım 2.1.3.2. $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ ve $0 < \gamma \leq 1$ olsun. $P_n^{\alpha,\beta}$ ile $\left[\alpha(n), \beta(n)\right]$ kapalı aralığı gösterilmek üzere, $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin γ ıncı mertebeden $\alpha\beta$ -yoğunluğu

$$\delta^{\alpha,\beta}(K, \gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|K \cap P_n^{\alpha,\beta}\right|}{\left(\beta(n) - \alpha(n) + 1\right)^{\gamma}}$$

ile tanımlanır [18].

Tanım 2.1.3.3. $(\alpha, \beta) \in \Lambda$ ve $0 < \gamma \leq 1$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta^{\alpha,\beta}\left(\left\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}, \gamma\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{k \in \left[\alpha(n), \beta(n)\right] : |x_k - L| \geq \varepsilon\right\}\right|}{\left(\beta(n) - \alpha(n) + 1\right)^{\gamma}} = 0$$

ise, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına γ ıncı mertebeden $\alpha\beta$ -istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_{\alpha\beta}^{\gamma} - \lim x_n = L$ şeklinde gösterilir. Burada $\gamma = 1$ seçilirse, x dizisi L sayısına $\alpha\beta$ -istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_{\alpha\beta} - \lim x_n = L$ ile gösterilir [18].

Bu tanım bazı özel seçimler altında literatürde bilinen kavramlara indirgenir:

Uyarı 2.1.3.4. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(n)=1$ ve $\beta(n)=n$ seçilirse,

$$\delta^{\alpha,\beta}\left(\left\{k:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\},\gamma\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\in\left[\alpha(n),\beta(n)\right]:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{\left(\beta(n)-\alpha(n)+1\right)^{\gamma}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\in\left[1,n\right]:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\leq n:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{n}$$

elde edilir. Bu durumda, $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık kavramı istatistiksel yakınsaklığa indirgenir [18].

Uyarı 2.1.3.5. $\lambda=(\lambda_n)$ pozitif terimli azalmayan, ∞ a ıraksayan,

$\lambda_{n+1}\leq\lambda_n+1$ ($\forall n\in\mathbb{N}$ için) ve $\lambda_1=1$

koşullarını sağlayan bir dizi olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha(n)=n-\lambda_n+1$ ve $\beta(n)=n$ seçilirse,

$$\delta^{\alpha,\beta}\left(\left\{k:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\},\gamma\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\in\left[\alpha(n),\beta(n)\right]:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{\left(\beta(n)-\alpha(n)+1\right)^{\gamma}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\in\left[n-\lambda_n+1,n\right]:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{\lambda_n}$$

elde edilir. Bu durumda, $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık kavramı λ-istatistiksel yakınsaklığa indirgenir [18].

Uyarı 2.1.3.6. $\theta=(k_n)$ bir lacunary dizisi olmak üzere, her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha(n)=k_{n-1}+1$ ve $\beta(n)=k_n$ seçilsin. Bu durumda, $\left[k_{n-1}+1,k_n\right]\cap\mathbb{N}=\left(k_{n-1},k_n\right]\cap\mathbb{N}$ olduğundan

$$\delta^{\alpha,\beta}\left(\left\{k:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\},\gamma\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\in\left[\alpha(n),\beta(n)\right]:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{\left(\beta(n)-\alpha(n)+1\right)^{\gamma}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\in\left[k_{n-1}+1,k_n\right]:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{k_n-k_{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\in\left(k_{n-1},k_n\right]:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{k_n-k_{n-1}}$$

bulunur. Bu durumda, $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık kavramı, lacunary istatistiksel yakınsaklığa indirgenir [18].

2.1.4. f – İstatistiksel yakınsaklık

Bu kısımda sayı dizileri için modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış f-istatistiksel yakınsaklık kavramı verilecektir. Bunun için öncelikle modülüs fonksiyonun tanımı ve temel özellikleri hatırlatılacaktır.

Tanım 2.1.4.1. $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu

a. $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ dır,

b. Her $x,y\geq 0$ için $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ dir,

c. f fonksiyonu artandır,

d. f fonksiyonu 0 noktasında sağdan süreklidir,

şartlarını gerçekliyorsa f ye bir modülüs fonksiyonu denir [23]. Yukarıdaki (b) ve (d) özelliklerinden dolayı f fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığında her yerde sürekli olduğu görülür. Ayrıca f modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir. Örneğin, $f(x)=x^p$ $(0<p\leq 1)$ modülüs fonksiyonu sınırsızdır, fakat $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ modülüs fonksiyonu sınırlıdır.

Lemma 2.1.4.2. f bir modülüs fonksiyonu ve $0<\delta<1$ olmak üzere, her $x\geq\delta$ için, $f(x)\leq 2f(1)\delta^{-1}x$ dir [25].

Lemma 2.1.4.3. f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu durumda $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}$ limiti mevcuttur [25].

Tanım 2.1.4.4. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $A\subseteq\mathbb{N}$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\left|\{k\leq n : k\in A\}\right|\right)}{f(n)}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine A kümesinin f-yoğunluğu denir ve $\delta^{f}(A)$ ile gösterilir [27].

Uyarı 2.1.4.5. $f(x)=x$ durumunda, f-yoğunluk kavramı doğal yoğunluk kavramına dönüşür. Doğal yoğunluk kavramı için $\delta(A)+\delta(\mathbb{N}-A)=1$ dir. Fakat bu eşitlik f-yoğunluk kavramı için genellikle doğru değildir, yani $\delta^{f}(A)+\delta^{f}(\mathbb{N}-A)=1$ eşitliği genellikle sağlanmaz. Örneğin, $f(x)=\log(x+1)$ ve $A=\{2n : n\in\mathbb{N}\}$ alınırsa, $\delta^{f}(A)=\delta^{f}(\mathbb{N}-A)=1$ dir. Ancak, f-yoğunluk kavramı için $\delta^{f}(A)=0$ ise, $\delta^{f}(\mathbb{N}-A)=1$ dir. Diğer taraftan, doğal yoğunluk kavramında olduğu gibi sonlu kümeler sıfır f-yoğunluğa sahiptir [27].

Uyarı 2.1.4.6. Herhangi bir sınırsız f modülüs fonksiyonu ve $A\subseteq\mathbb{N}$ için $\delta^{f}(A)=0$ ise, $\delta(A)=0$ dır. Fakat bunun tersinin doğru olması gerekmez, yani sıfır doğal yoğunluğa sahip bir küme, sınırsız bir f modülüsüne göre sıfır olmayan f-yoğunluğa sahip olabilir. Örneğin, $f(x)=\log(x+1)$ ve $A=\{1,4,9,\ldots\}$ alınırsa, $\delta(A)=0$ dır ancak $\delta^{f}(A)=\frac{1}{2}$ dir [27].

Tanım 2.1.4.7. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $x=(x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için,

$$\delta^f\left(\{k\in\mathbb{N}:|x_k-L|\geq\varepsilon\}\right)=0,$$

yani

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(n)}f\left(\left|\{k\leq n:|x_k-L|\geq\varepsilon\}\right|\right)=0$$

ise, x dizisi L sayısına f-istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st^f-\lim x=L$ ile gösterilir [27].

Uyarı 2.1.4.8. Her $x\in[0,\infty)$ için $f(x)=x$ seçilirse, f-istatistiksel yakınsaklık kavramı, istatistiksel yakınsaklık kavramına dönüşür.

Uyarı 2.1.4.9. Tanım 2.1.4.7 ve Uyarı 2.1.4.6 dikkate alınırsa, her f-istatistiksel yakınsak dizi, istatistiksel yakınsaktır. Fakat istatistiksel yakınsak dizinin, her sınırsız f modülüs fonksiyonu için f-istatistiksel yakınsak olması gerekmez.

Tanım 2.1.4.10. f sınırlı veya sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $x=(x_k)$ bir dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(|x_k-L|\right)=0$$

olacak şekilde $L\in\mathbb{R}$ varsa, bu durumda x dizisi L sayısına kuvvetli f-Cesàro toplanabilirdir denir [25].

Tanım 2.1.4.11. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{f(h_r)}f\left(\left|\left\{k\in I_r:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\right)=0$$

oluyor ise, $x=(x_k)$ dizisi $L\in\mathbb{R}$ sayısına f -lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_\theta^f-\lim x=L$ şeklinde gösterilir [29].

2.1.5. Asimptotik denk diziler

Tanım 2.1.5.1. $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ negatif terimli olmayan iki dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_k}{y_k}=1$$

ise, x ve y dizilerine asimptotik denk diziler denir ve $x\sim y$ ile gösterilir [32].

Tanım 2.1.5.2. $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ negatif terimli olmayan iki dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\leq n:\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise, x ve y dizilerine L katlı asimptotik istatistiksel denk diziler denir ve $x\overset{S^L}{\sim}y$ ile gösterilir [33].

Tanım 2.1.5.3. $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi ve $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ negatif terimli olmayan iki dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r:\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

oluyor ise, x ve y dizilerine L katlı asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler denir ve $x\overset{S_\theta^L}{\sim}y$ ile gösterilir [34].

Tanım 2.1.5.4. $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi ve $x=(x_k)$ ve $y=(y_k)$ negatif terimli olmayan iki dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}\left|\frac{x_k}{y_k}-L\right|=0$$

ise, x ve y dizilerine L katlı kuvvetli asimptotik lacunary denktir denir ve $x\overset{N_\theta^L}{\sim}y$ ile gösterilir [34].

2.1.6. İstatistiksel sınırlılık

Bu kısımda istatistiksel sınırlılık ve lacunary istatistiksel sınırlılık kavramları verilecektir.

Tanım 2.1.6.1. $x=(x_k)$ bir sayı dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\leq n:|x_k|>M\right\}\right|=0\,,$$

yani,

$$|x_k| \leq M \ \ (h.h.\, k \text{ için})$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı var ise, $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel sınırlıdır denir. İstatistiksel sınırlı dizilerin kümesi $S(B)$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.1.6.2. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve $x = (x_k)$ bir sayı dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k| > M \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı var ise, $x = (x_k)$ dizisi lacunaru istatistiksel sınırlıdır denir ve $S_\theta(B)$ ile tüm lacunary istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi gösterilir [20].

Teorem 2.1.6.3. Her sınırlı dizi lacunary istatistiksel sınırlıdır [20].

Teorem 2.1.6.3 ün tersinin doğru olması gerekmez. Bunun için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.1.6.4. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun ve $x = (x_i)$ dizisi

$$x_i = \begin{cases} k_{r-1} + 1, & i = k_{r-1} + 1; \quad r = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlansın. x dizisi sınırlı değildir. Fakat

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k| > \frac{1}{2} \right\} \right| = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} = 0$$

olduğundan, x dizisi lacunary istatistiksel sınırlıdır [20].

Teorem 2.1.6.5. Her lacunary istatistiksel yakınsak dizi lacunary istatistiksel sınırlıdır [20].

$\left((-1)^k\right)$ dizisi lacunary istatistiksel yakınsak değildir fakat lacunary istatistiksel sınırlıdır.

2.2. Zaman Skalası Analizi

2.2.1. Zaman skalası üzerinde temel tanım ve kavramlar

Tanım 2.2.1.1. Reel sayıların boş olmayan keyfi kapalı bir alt kümesine zaman skalası (time scale) denir ve zaman skalası genel olarak $\mathbb{T}$ sembolü ile gösterilir. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $[0,1]$ ve Cantor kümesi birer zaman skalası örneği iken $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $(0,1)$ kümeleri birer zaman skalası örneği değildirler [42].

Aşağıda bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde ileri sıçrama operatörü, geri sıçrama operatörü ve Graininess fonksiyonu tanımları verilmiştir.

Tanım 2.2.1.2. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için, $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

ve $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

şeklinde tanımlanır [42]. Bu tanımda, $\varnothing$ boş küme olmak üzere,

$\inf \varnothing = \sup \mathbb{T}$ (yani $\sigma(t) = t$, eğer $\mathbb{T}$, bir t maksimumuna sahipse) ve

$\sup \varnothing = \inf \mathbb{T}$ (yani $\rho(t) = t$, eğer $\mathbb{T}$, bir t minimumuna sahipse)

olarak kabul edilir.

Tanım 2.2.1.3. Eğer $\sigma(t) > t$ ise, t noktası sağdan saçılımlı nokta; $\rho(t) < t$ ise, t noktası soldan saçılımlı nokta olarak adlandırılır. Hem sağdan saçılımlı hem soldan saçılımlı noktalara izole nokta denir. Ayrıca $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise, t noktasına sağda yoğun; $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise, t noktasına solda yoğun denir. Hem solda hem de sağda yoğun olan noktalara yoğundur denir [42].

Tanım 2.2.1.4. $t \in \mathbb{T}$ için, $\mu(t) = \sigma(t) - t$ şeklinde tanımlanan $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonuna, Graininess fonksiyonu (veya sıçrama fonksiyonu) denir [42].

Örnek 2.2.1.5. $\mathbb{T}$ zaman skalasının sırasıyla $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ olduğu özel durumlarda, ileri sıçrama operatörü, geri sıçrama operatörü ve Graininess fonksiyonu incelenerek, bu kümelere ait noktaların türleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

a. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise, $t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{ s \in \mathbb{R} : s > t \} = \inf (t, \infty) = t$$

ve

$$\rho(t) = \sup \{ s \in \mathbb{R} : s < t \} = \sup (-\infty, t) = t$$

olduğundan, her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğundur. Ayrıca, μ Graininess fonksiyonu da her $t \in \mathbb{R}$ için $\mu(t) = 0$ dır.

b. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise, $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf\{t+1, t+2, t+3, ...\} = t+1$$

ve

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup\{t-1, t-2, t-3, ...\} = t-1$$

bulunduğundan, her $t \in \mathbb{Z}$ noktası izole noktadır. Aynı zamanda her $t \in \mathbb{Z}$ için $\mu(t) = 1$ dir [42].

Tanım 2.2.1.6. $U \subset \mathbb{T}$ olsun. $U_\varepsilon(t) = \{s \in \mathbb{T} : |s-t| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0\}$ kümesine t noktasının ε-komşuluğu denir [42].

Tanım 2.2.1.7. $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $t \in U_\delta(t_0)$ için, $|g(t) - g(t_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcut ise, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t = t_0$ noktasında süreklidir denir [42].

Aşağıdaki tanımda delta türev tanımında ihtiyaç duyulacak olan $\mathbb{T}^k$ kümesi verilmiştir.

Tanım 2.2.1.8. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere, $\mathbb{T}^k$ kümesi

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus \left(\rho\left(\sup \mathbb{T}\right), \sup \mathbb{T}\right] & , \quad \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & , \quad \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

dir [42].

Tanım 2.2.1.9. $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ olmak üzere her $s \in U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ için

$$\left|g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)\left[\sigma(t)-s\right]\right|\leq\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|$$

olacak şekilde t noktasının bir U komşuluğu mevcut ise, $g^{\Delta}(t)$ ifadesine g fonksiyonunun t noktasındaki delta (Δ) türevi (veya Hilger türevi) denir [42].

Eğer her $t\in\mathbb{T}^k$ için $g^{\Delta}(t)$ sayısı varsa, g fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ kümesi üzerinde delta türevlenebilirdir denir [42]. Δ-türev lineerdir ve g^{Δ} türev fonksiyonu iyi tanımlıdır.

Bu çalışma boyunca, aksi belirtilmediği sürece Δ-türevlenebilme yerine kısaca türevlenebilme ifadesi kullanılacaktır.

Teorem 2.2.1.10. $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^k$ olsun. Bu durumda

a. g fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise, g fonksiyonu t noktasında süreklidir.

b. g fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktası sağ saçılımlı ise, g fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve

$$g^{\Delta}(t)=\frac{g(\sigma(t))-g(t)}{\sigma(t)-t}$$

dir.

c. t noktası sağdan yoğun bir nokta olmak üzere, g fonksiyonunun t noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s\to t}\frac{g(t)-g(s)}{t-s}$$

limitinin mevcut ve sonlu olmasıdır. Bu durumda

$$g^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{g(t)-g(s)}{t-s}$$

dir.

d. g fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise,

$$g(\sigma(t))=g(t)+\mu(t)g^{\Delta}(t)$$

dir [42].

Aşağıda, $\mathbb{T}$ zaman skalasının özel olarak $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ kümeleri seçildiği durumlarda Δ-türevin hangi özel hallere indirgeneceği incelenecektir:

a. $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ olsun. Her $t\in\mathbb{R}$ noktası yoğun bir nokta olduğundan, Teorem 2.2.1.10 (c) den, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $t\in\mathbb{R}$ noktasındaki Δ-türevi

$$g^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{g(t)-g(s)}{t-s}=g'(t)$$

olarak elde edilir. Burada $g'(t)$ ile g nin klasik anlamdaki türevi temsil edilmektedir.

b. $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ olsun. Her $t\in\mathbb{Z}$ noktasının izole nokta (ve dolayısıyla da sağa saçılmış nokta) olduğundan, Teorem 2.2.1.10 (b) den, $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ fonksiyonun $t\in\mathbb{Z}$ noktasındaki Δ-türevi

$$g^{\Delta}(t)=\frac{g(\sigma(t))-g(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{g(t+1)-g(t)}{t+1-1}=g(t+1)-g(t)=\Delta g(t)$$

olarak bulunur. Burada $\Delta g(t)=g(t+1)-g(t)$ ile tanımlanan $\Delta g(t)$ ile g nin ileri fark operatörü temsil edilmektedir.

2.2.2. Zaman skalası üzerinde ölçü teorisi

Bu kısımda, ilk olarak zaman skalası üzerinde tanımlanan Lebesgue Δ-ölçü tanımı hatırlatılacak ve temel özelliklerine değinilecektir. Sonrasında ise Δ-ölçülebilir fonksiyonların Lebesgue Δ-integrali kavramı verilecektir.

$\mathbb{T}$ keyfi bir zaman skalası olsun. F_1 ile de $[a,b)_{\mathbb{T}}=\{t\in\mathbb{T}:a\le t<b\}$ şeklinde tanımlanan soldan kapalı ve sağdan açık tüm aralıkların ailesi gösterilsin. Burada $[a,a)_{\mathbb{T}}$ aralığı boş kümeyi ifade etmektedir.

$$\begin{aligned} m_1 &: F_1 \to [0,+\infty] \\ &[a,b)_{\mathbb{T}} \to m_1\left([a,b)_{\mathbb{T}}\right)=b-a \end{aligned}$$

ile tanımlanan m_1 küme fonksiyonu F_1 ailesi üzerinde sayılabilir toplamsal bir ölçüdür. Şimdi m_1 küme fonksiyonunun μ_{Δ} Carathéodary genişlemesinin elde edilme süreci anlatılacaktır. İlk olarak (F_1,m_1) ikilisi kullanılarak $\mathbb{T}$ nin tüm alt kümeleri için bir m_1^* dış ölçüsü aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$\mathbb{T}$ nin herhangi bir alt kümesi A olsun. $j=1,2,\ldots$ için I_j ler F_1 in elemanı olan aralıklar olmak üzere, bu aralıkların sonlu veya sayılabilir birleşimleri yardımıyla A kümesi örtülür öyle ki

$$A\subset \bigcup_j I_j$$

dir. $P(\mathbb{T})$ kümesi ile $\mathbb{T}$ nin tüm alt kümelerinin kümesi gösterilmek üzere,

$$m_1^*: P(\mathbb{T}) \to [0,+\infty]$$
$$A \to m_1^*(A) = \inf\left\{\sum_j m_1(I_j) : A \subset \bigcup_j I_j\right\}$$

şeklinde tanımlanan m_1^* fonksiyonuna, m_1 küme fonksiyonunun ürettiği dış ölçü denir. Eğer A kümesini örten I_j aralıkları yoksa, bu durumda $m_1^*(A) = \infty$ olarak kabul edilmektedir.

A, $\mathbb{T}$ nin herhangi bir alt kümesi olsun. Eğer her $E \subset \mathbb{T}$ için,

$$m_1^*(E) = m_1^*(E \cap A) + m_1^*(E \cap A^c)$$

oluyor ise, A kümesi m_1^*-ölçülebilirdir denir. Burada ve tüm çalışma boyunca A^c, A kümesinin tümleyenini temsil etmektedir. $M(m_1^*)$ ile $\mathbb{T}$ nin tüm alt kümelerinin ailesi gösterilmek üzere, $M(m_1^*)$ bir σ-cebridir. Böylece m_1^*-dış ölçüsünün $M(m_1^*)$ kümesi üzerine kısıtlanışına Lebesgue Δ-ölçüsü denir ve bu ölçü μ_Δ ile gösterilir [43].

Teorem 2.2.2.1. $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ olmak üzere, $\{t_0\}$ tek nokta kümesi Δ-ölçülebilirdir ve

$$\mu_\Delta(\{t_0\}) = \sigma(t_0) - t_0$$

dir [43].

Uyarı 2.2.2.2. Tek nokta kümelerinin Lebesgue ölçüsü sıfırdır. Fakat Teorem 2.2.2.1 dikkate alınırsa zaman skalası üzerinde tek nokta kümelerinin Δ-ölçüsü sıfır olmak zorunda değildir.

Teorem 2.2.2.3. $a,b\in\mathbb{T}$ ve $a\le b$ olsun. Bu durumda,

a. $\mu_\Delta\left([a,b)_\mathbb{T}\right)=b-a$,

b. $\mu_\Delta\left((a,b)_\mathbb{T}\right)=b-\sigma(a)$

dır. Eğer $a,b\in\mathbb{T}\setminus\{\max\mathbb{T}\}$ ve $a\le b$ ise

c. $\mu_\Delta\left((a,b]_\mathbb{T}\right)=\sigma(b)-\sigma(a)$,

d. $\mu_\Delta\left([a,b]_\mathbb{T}\right)=\sigma(b)-a$

olur [43].

Uyarı 2.2.2.4. Yukarıdaki teorem göstermektedir ki μ_Δ ölçüsü, aralıkların uç noktalarına bağlı olarak farklı değerler almaktadır.

Tanım 2.2.2.5. $g:\mathbb{T}\to[-\infty,+\infty]$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\alpha\in\mathbb{R}$ için,

$$g^{-1}\left([-\infty,\alpha]\right)=\{t\in\mathbb{T}:g(t)<\alpha\}$$

kümesi Δ-ölçülebilir ise, g fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde Δ-ölçülebilirdir denir [44].

Tanım 2.2.2.6. $S:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $j=1,2,\ldots,n$ için c_j ler birbirinden farklı olmak üzere $A_j=\{t\in\mathbb{T}:S(t)=c_j\}$ kümeleri tanımlansın. χ_{A_j} fonksiyonu A_j kümelerinin karakteristik fonksiyonunu göstersin, yani

$$\chi_{A_j}(t)=\begin{cases}1, & t\in A_j\\ 0, & t\notin A_j\end{cases}$$

olsun. Eğer $S=\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$ olacak şekilde yazılabiliyorsa, S fonsiyonuna basit fonksiyon denir [44].

Tanım 2.2.2.7. E, $\mathbb{T}$ nin Δ-ölçülebilir bir alt kümesi ve $S:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir basit fonksiyon olsun. Yani S fonksiyou, Tanım 2.2.2.6 da ifade edilen A_j kümeleri ve c_j sayıları ile

$$S=\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$$

biçiminde yazılabilsin. Bu durumda, S fonksiyonunun E kümesi üzerindeki Lebesgue Δ-integrali

$$\int_E S(t)\Delta t=\sum_{j=1}^{n} c_j \mu_\Delta\left(A_j \cap E\right)$$

olarak tanımlanır [44].

Sonuç 2.2.2.8. Ω, $\mathbb{T}$ nin Δ-ölçülebilir bir alt kümesi olsun ve $c\in\mathbb{R}$ olmak üzere $g(s)=c$ olacak şekilde g sabit fonksiyonu verilsin. Bu durumda, g fonksiyonunun Ω üzerinden Lebesgue Δ-integrali

$$\int_\Omega S(t)\Delta t=\int_\Omega c\Delta t=c\mu_\Delta(\Omega)$$

dir [44].

Tanım 2.2.2.9. E, $\mathbb{T}$ nin Δ-ölçülebilir bir alt kümesi ve $g:\mathbb{T}\to[0,+\infty]$, Δ- ölçülebilir bir fonksiyon olsun. g fonksiyonunun E kümesi üzerindeki Lebesgue Δ-integrali

$$\int_E g(t)\Delta t = \sup\left\{\int_E g(t)\Delta t : 0 \le S \le g \text{ ve } S \text{ basit fonksiyon}\right\}$$

dir [44].

Tanım 2.2.2.10. E, $\mathbb{T}$ nin Δ-ölçülebilir bir alt kümesi ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ- ölçülebilir bir fonksiyon olsun. g fonksiyonunun pozitif parçası $g^+ := \max\{g,0\}$ ve negatif parçası $g^- := \max\{-g,0\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\int_E g^+(t)\Delta t \text{ veya } \int_E g^-(t)\Delta t$$

integrallerinden en az bir tanesi sonlu olmak şartıyla, g fonksiyonunun E kümesi üzerindeki Lebesgue Δ-integrali

$$\int_E g(t)\Delta t = \int_E g^+(t)\Delta t - \int_E g^-(t)\Delta t$$

dir [44].

2.2.3. Zaman skalası üzerinde istatistiksel yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık

Bu kısımda, Duman ve Ceylan [46,47] tarafından zaman skalaları üzerinde çalışılan istatistiksel yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları hatırlatılacaktır.

Bu çalışma boyunca kullanılacak olan $\mathbb{T}$ zaman skalası için $\inf\mathbb{T} = t_0 > 0$ ve $\sup\mathbb{T} = \infty$ olarak kabul edilecektir. Ayrıca, $C_b(\mathbb{T})$ ile $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı sınırlı reel değerli Δ-ölçülebilir tüm fonksiyonların kümesi gösterilecektir.

Ω, $\mathbb{T}$ nin Δ-ölçülebilir bir alt kümesi olsun. $t \in \mathbb{T}$ için, $\Omega(t)$ kümesi

$$\Omega(t) := \left\{ s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : s \in \Omega \right\}$$

şeklinde tanımlansın.

Tanım 2.2.3.1. Ω, $\mathbb{T}$ nin Δ-ölçülebilir bir alt kümesi olsun. Eğer

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\mu_\Delta\left(\Omega(t)\right)}{\mu_\Delta\left([t_0, t]_{\mathbb{T}}\right)}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine Ω kümesinin $\mathbb{T}$ üzerindeki yoğunluğu denir ve $\delta_{\mathbb{T}}(\Omega)$ şeklinde gösterilir [46].

Tanım 2.2.3.2. $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta_{\mathbb{T}}\left(\left\{ t \in \mathbb{T} : \left| g(t) - L \right| \geq \varepsilon \right\}\right) = 0$$

veya başka bir ifadeyle

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\mu_\Delta\left(\left\{ s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : \left| g(s) - L \right| \geq \varepsilon \right\}\right)}{\mu_\Delta\left(\left\{ [t_0, t]_{\mathbb{T}} \right\}\right)} = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, g fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st_{\mathbb{T}} - \lim_{t \to \infty} g(t) = L$ ile gösterilir [46].

Tanım 2.2.3.3. $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{[t_0,t]_{\mathbb{T}}}\left|g(s)-L\right|^p\Delta s=0$$

olacak şekilde bir $L\in\mathbb{R}$ varsa, bu durumda g fonksiyonu $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde L sayısına kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir denir [46].

Tanım 2.2.3.4. $\theta=(k_r)$, negatif olmayan tam sayıların artan bir dizisi $\mathbb{T}$ içerisinde bulunmak üzere $k_0=0$ ve $r\to\infty$ iken $\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})\to\infty$ şartlarını sağlıyor ise, $\theta=(k_r)$ dizisine $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde lacunary dizisi denir [47].

Tanım 2.2.3.5. $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, g fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st_{\theta-\mathbb{T}}-\lim g(t)=L$ ile gösterilir [47].

Tanım 2.2.3.6. $\theta=(k_r)$ bir lacunary dizisi ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}}\left|g(s)-L\right|\Delta s=0$$

olacak şekilde bir $L\in\mathbb{R}$ varsa, bu durumda g fonksiyonu $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde L sayısına kuvvetli lacunary Cesàro toplanabilirdir denir. $N_{\theta-\mathbb{T}}$ ile tüm kuvvetli lacunary Cesàro toplanabilir fonksiyonların kümesi gösterilir [47].

2.2.4. Zaman skalası üzerinde $f-$istatistiksel yakınsaklık

Tanım 2.2.4.1. f sınırsız bir modülüs fonksiyon ve Ω, $\mathbb{T}$ nin Δ-ölçülebilir bir alt kümesi olsun. Eğer

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f\left(\mu_\Delta\left(\Omega(t)\right)\right)}{f\left(\mu_\Delta\left(\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}\right)\right)}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine Ω kümesinin $\mathbb{T}$ üzerindeki Δ_f -yoğunluğu denir ve $\delta_{\mathbb{T}}^f\left(\Omega\right)$ şeklinde gösterilir [53].

Tanım 2.2.4.2. f sınırsız bir modülüs fonksiyon ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left(\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}\right)\right)}f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}:\left|g\left(s\right)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)=0$$

ise, g fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde L sayısına f-istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st_{\mathbb{T}}^f-\lim g\left(t\right)=L$ şeklinde gösterilir [53]. Ayrıca, $S_{\mathbb{T}}^f$ ile $\mathbb{T}$ üzerindeki tüm f-istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi gösterilir.

2.2.5. Zaman skalası üzerinde istatistiksel sınırlılık

Tanım 2.2.5.1. $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}:\left|g\left(s\right)\right|>M\right\}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}\right)}=0$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa, g fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde istatistiksel sınırlıdır denir. $\mathbb{T}$ üzerindeki tüm istatistiksel sınırlı fonksiyonların kümesi $S_{\mathbb{T}}(B)$ ile gösterilir [51].

Örnek 2.2.5.2. $\mathbb{T} = [0,1]$ olmak üzere, $g(s) = \frac{1}{s}$, $\mathbb{T}$ üzerinde bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\delta_{\mathbb{T}}\{s \in \mathbb{T} : |g(s)| > 1\} = 0$ olduğundan, g fonksiyonu $[0,1]$ aralığında istatistiksel sınırlıdır [52].

Teorem 2.2.5.3. Zaman skalası üzerindeki her istatistiksel yakınsak fonksiyon istatistiksel sınırlıdır [52].

BÖLÜM 3. ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE YENİ YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ

Bu bölümde, zaman skalası üzerinde yeni yakınsaklık çeşitleri tanıtılacak ve bu kavramların temel özellikleri incelenip, özel hallerine değinilecektir. Ayrıca bu kavramlarla ilgili bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

3.1. $\alpha\beta$ – İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, zaman skalası üzerinde $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık ve $\alpha\beta$-Cesàro toplanabilirlik kavramları çalışılacaktır.

Bunun için öncelikle aşağıdaki koşulları sağlayan iki fonksiyon seçilecektir.

$\alpha:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $\beta:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ pozitif değerli Δ-ölçülebilir ve aşağıdaki koşulları sağlayan iki fonksiyon olsun:

$T_1:\alpha$ ve β azalmayan iki fonksiyondur,

$T_2:\beta(t)>\alpha(t)\geq t_0$ $\left(\text{her } t\in\mathbb{T} \text{ için}\right)$ dır,

$T_3:\sigma\left(\beta(t)\right)-\sigma\left(\alpha(t)\right)\to\infty$ $\left(t\to\infty \text{ iken}\right)$ dir.

T_1, T_2 ve T_3 koşullarını sağlayan tüm (α,β) fonksiyon çiftlerinin kümesi $\Lambda_{\mathbb{T}}$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.1. $g:\mathbb{T}\rightarrow\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon ve $(\alpha,\beta)\in\Lambda_{\mathbb{T}}$ olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_{\Delta}\left(\left\{s\in\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)=0$$

olacak şekilde bir $L\in\mathbb{R}$ sayısı varsa, g fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde L sayısına $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st_{\mathbb{T}-\alpha\beta}-\lim g(t)=L$ ile gösterilir.

Bu tanım literatürde bulunan bazı kavramları içinde barındırır:

a. Eğer her $t\in\mathbb{T}$ için $\alpha(t)=t_0$ ve $\beta(t)=t$ alınırsa, bu tanım [46] da tanımlanan zaman skalası üzerindeki istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

b. $\lambda=(\lambda_n)$, pozitif sayıların sonsuza ıraksayan ve azalmayan bir dizisi olsun öyle ki $\lambda_{n+1}\leq\lambda_n+1$ ve $\lambda_1=1$ koşulları sağlansın. Eğer her $t\in\mathbb{T}$ için $\alpha(t)=t+\lambda_t-t_0$ ve $\beta(t)=t$ alınırsa, zaman skalası üzerindeki $\alpha\beta$-istatistiksel yakınsaklık kavramı, [50] de tanımlanmış olan zaman skalası üzerindeki λ-istatistiksel yakınsaklık kavramına indirgenir.

c. $\theta=(k_r)$, $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi ve $\gamma_{r-1}=\min\{s>0:s+k_{r-1}\in\mathbb{T}\}$ olsun. Eğer her $t\in\mathbb{T}$ için $\alpha(t)=k_{t-1}+\gamma_{t-1}$ ve $\beta(t)=k_t$ alınırsa, bu tanım [47] de verilmiş olan zaman skalası üzerindeki lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramına indirgenir.

Tanım 3.1.2. $g:\mathbb{T}\rightarrow\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon ve $(\alpha,\beta)\in\Lambda_{\mathbb{T}}$ olsun. Eğer

$$\lim_{t\rightarrow\infty}\frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}}\left|g(s)-L\right|\Delta s=0$$

olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ varsa, bu durumda g fonksiyonu $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde L sayısına kuvvetli $\alpha\beta$ -Cesàro toplanabilirdir denir.

Teorem 3.1.3. $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon ve $(\alpha, \beta) \in \Lambda_{\mathbb{T}}$ olsun. Bu takdirde,

a. Eğer g fonksiyonu L sayısına kuvvetli $\alpha\beta$-Cesàro toplanabilir ise, $st_{\mathbb{T}-\alpha\beta} - \lim g(t) = L$ dir.

b. Eğer $st_{\mathbb{T}-\alpha\beta} - \lim g(t) = L$ ve g sınırlı ise, bu durumda g fonksiyonu L sayısına kuvvetli $\alpha\beta$ -Cesàro toplanabilirdir.

İspat. a. g fonksiyonu L sayısına kuvvetli $\alpha\beta$ -Cesàro toplanabilir olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}\int_{[\alpha(t),\beta(t)]_{\mathbb{T}}} |g(s) - L| \Delta s &\geq \int_{[\alpha(t),\beta(t)]_{\mathbb{T}} : |g(s)-L| \geq \varepsilon} |g(s) - L| \Delta s \\ &\geq \varepsilon \mu_{\Delta} \left(\left\{ s \in [\alpha(t), \beta(t)]_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \geq \varepsilon \right\} \right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada eşitsizliğin her iki tarafı $\mu_{\Delta}\left([\alpha(t), \beta(t)]_{\mathbb{T}} \right)$ sayısına bölünüp, $t \to \infty$ iken limit alınırsa $st_{\mathbb{T}-\alpha\beta} - \lim g(t) = L$ olduğu bulunur.

b. $st_{\mathbb{T}-\alpha\beta} - \lim g(t) = L$ ve g sınırlı olsun. g sınırlı olduğundan, her $t \in \mathbb{T}$ için $|g(t)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mu_{\Delta}\left([\alpha(t), \beta(t)]_{\mathbb{T}} \right)} \int_{[\alpha(t),\beta(t)]_{\mathbb{T}}} |g(s) - L| \Delta s \\ &= \frac{1}{\mu_{\Delta}\left([\alpha(t), \beta(t)]_{\mathbb{T}} \right)} \int_{[\alpha(t),\beta(t)]_{\mathbb{T}} : |g(s)-L| \geq \varepsilon} |g(s) - L| \Delta s\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|<\varepsilon}\left|g(s)-L\right|\Delta s$$

$$\leq\frac{M+\left|L\right|}{\mu_\Delta\left(\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon}\Delta s+\frac{\varepsilon}{\mu_\Delta\left(\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}}\Delta s$$

$$=\left(M+\left|L\right|\right)\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}\right)}+\varepsilon\,.$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $t\to\infty$ iken limit durumuna geçilirse, ε keyfi olduğundan, g fonksiyonu L sayısına kuvvetli $\alpha\beta$ -Cesàro toplanabilirdir.

Teorem 3.1.4. Eğer $\liminf_{t\to\infty}\frac{\sigma\left(\beta(t)\right)}{\alpha(t)}>1$ ise, bu durumda $st_{\mathbb{T}}-\lim g(t)=L$ ise $st_{\mathbb{T}-\alpha\beta}-\lim g(t)=L$ dir.

İspat. $\liminf_{t\to\infty}\frac{\sigma\left(\beta(t)\right)}{\alpha(t)}>1$ olsun. Bu takdirde yeterince büyük bir t için bir $\delta>0$ sayısı vardır öyle ki $\frac{\sigma\left(\beta(t)\right)}{\alpha(t)}\geq1+\delta$ dir ve dolaysıyla da $\frac{\sigma\left(\beta(t)\right)-\alpha(t)}{\sigma\left(\beta(t)\right)}\geq\frac{\delta}{1+\delta}$ olur. Şimdi $st_{\mathbb{T}}-\lim g(t)=L$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Böylelikle

$$\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left[t_0,\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}\right)}$$

$$\geq\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)}{\sigma\left(\beta(t)\right)-t_0}$$

$$\geq\frac{\sigma\left(\beta(t)\right)-\alpha(t)}{\sigma\left(\beta(t)\right)}\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left[\alpha(t),\beta(t)\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)}{\sigma\left(\beta(t)\right)-\alpha(t)}$$

$$\geq \frac{\delta}{1+\delta} \frac{\mu_{\Delta}\left(\left\{s \in [\alpha(t), \beta(t)]_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)}{\sigma(\beta(t)) - \alpha(t)}$$

olup, buradan da $st_{\mathbb{T}-\alpha\beta} - \lim g(t) = L$ elde edilir.

Teorem 3.1.5. $\lim_{t\to\infty} \frac{\alpha(t) - t_0}{\sigma(\beta(t)) - t_0} = 0$ olsun. Bu takdirde, eğer $st_{\mathbb{T}-\alpha\beta} - \lim g(t) = L$ ise $st_{\mathbb{T}} - \lim g(t) = L$ dir.

İspat. $\lim_{t\to\infty} \frac{\alpha(t) - t_0}{\sigma(\beta(t)) - t_0} = 0$ ve $st_{\mathbb{T}-\alpha\beta} - \lim g(t) = L$ olsun. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{\mu_{\Delta}\left(\left\{s \in [t_0, \beta(t)]_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)}{\mu_{\Delta}\left([t_0, \beta(t)]_{\mathbb{T}}\right)}$$

$$= \frac{\mu_{\Delta}\left(\left\{s \in [t_0, \alpha(t))_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)}{\mu_{\Delta}\left([t_0, \beta(t)]_{\mathbb{T}}\right)} + \frac{\mu_{\Delta}\left(\left\{s \in [\alpha(t), \beta(t)]_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)}{\mu_{\Delta}\left([t_0, \beta(t)]_{\mathbb{T}}\right)}$$

$$= \frac{\mu_{\Delta}\left(\left\{s \in [t_0, \alpha(t))_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)}{\sigma(\beta(t)) - t_0} + \frac{\mu_{\Delta}\left(\left\{s \in [\alpha(t), \beta(t)]_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)}{\sigma(\beta(t)) - t_0}$$

$$\leq \frac{\alpha(t) - t_0}{\sigma(\beta(t)) - t_0} + \frac{\mu_{\Delta}\left(\left\{s \in [\alpha(t), \beta(t)]_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)}{\sigma(\beta(t)) - \alpha(t)}$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikte $t \to \infty$ iken limit alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu_{\Delta}\left(\left\{s \in [t_0, \beta(t)]_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)}{\mu_{\Delta}\left([t_0, \beta(t)]_{\mathbb{T}}\right)} = 0$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.6. $(\alpha,\beta)\in\Lambda_{\mathbb{T}}$ ve $(\alpha',\beta')\in\Lambda_{\mathbb{T}}$ olmak üzere, her $t\in\mathbb{T}$ için $\alpha(t)\le\alpha'(t)<\beta'(t)\le\beta(t)$ koşulu sağlansın ve $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sigma(\beta'(t))-\alpha'(t)}{\sigma(\beta(t))-\alpha(t)}>0$ olsun. Eğer $st_{\mathbb{T}-\alpha\beta}-\lim g(t)=L$ ise $st_{\mathbb{T}-\alpha'\beta'}-\lim g(t)=L$ dir.

İspat. Verilen bir $\varepsilon>0$ için

$$\left\{s\in[\alpha'(t),\beta'(t)]_{\mathbb{T}}:|g(s)-L|\ge\varepsilon\right\}\subseteq\left\{s\in[\alpha(t),\beta(t)]_{\mathbb{T}}:|g(s)-L|\ge\varepsilon\right\}$$

kapsaması sağlanır ve buradan da

$$\mu_\Delta\left(\left\{s\in[\alpha'(t),\beta'(t)]_{\mathbb{T}}:|g(s)-L|\ge\varepsilon\right\}\right)\le\mu_\Delta\left(\left\{s\in[\alpha(t),\beta(t)]_{\mathbb{T}}:|g(s)-L|\ge\varepsilon\right\}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle

$$\begin{aligned}&\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in[\alpha(t),\beta(t)]_{\mathbb{T}}:|g(s)-L|\ge\varepsilon\right\}\right)}{\mu_\Delta\left([\alpha(t),\beta(t)]_{\mathbb{T}}\right)}\\ &\qquad\ge\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in[\alpha'(t),\beta'(t)]_{\mathbb{T}}:|g(s)-L|\ge\varepsilon\right\}\right)}{\mu_\Delta\left([\alpha(t),\beta(t)]_{\mathbb{T}}\right)}\\ &\qquad=\frac{\sigma(\beta'(t))-\alpha'(t)}{\sigma(\beta(t))-\alpha(t)}\,\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in[\alpha'(t),\beta'(t)]_{\mathbb{T}}:|g(s)-L|\ge\varepsilon\right\}\right)}{\sigma(\beta'(t))-\alpha'(t)}\end{aligned}$$

bulunur. $st_{\mathbb{T}-\alpha\beta}-\lim g(t)=L$ olduğundan, $st_{\mathbb{T}-\alpha'\beta'}-\lim g(t)=L$ bulunarak ispat tamamlanmış olur.

3.2. f – Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, modülüs fonksiyonu yardımıyla, zaman skalası üzerinde tanımlı reel değerli Δ-ölçülebilir fonksiyonlar için f-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ve kuvvetli f-lacunary Cesàro toplanabilirlik kavramları tanıtılacaktır.

Tanım 3.2.1. f sınırsız bir modülüs fonksiyon, $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)\right)}f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)=0$$

ise, g fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde L sayısına f-lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st_{\theta-\mathbb{T}}^{f}-\lim g(t)=L$ şeklinde gösterilir. Ayrıca, $S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ ile $\mathbb{T}$ üzerindeki tüm f-lacunary istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi gösterilsin.

Teorem 3.2.2. $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\lim_{t\to\infty}g(t)=L$ ise $st_{\theta-\mathbb{T}}^{f}-\lim_{t\to\infty}g(t)=L$ dir.

İspat. $\lim_{t\to\infty}g(t)=L$ olsun. Bu durumda verilen bir $\varepsilon>0$ sayısı için, $\left\{s\in\mathbb{T}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}$ kümesi sınırlıdır. Ayrıca

$$\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\subseteq\left\{s\in\mathbb{T}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}$$

kapsaması sağlandığından ve modülüs fonksiyonu artan olduğundan bu son bağıntıdan

$$\frac{f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)}{f\left(\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)\right)}\leq\frac{f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in\mathbb{T}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)}{f\left(\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)\right)}$$

elde edilir. Burada $r \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)\right)}{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)} = 0$$

olur. Bunun anlamı $st^f_{\theta-\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} g(t) = L$ dir.

Teorem 3.2.3. $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$st^f_{\theta-\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} g(t) = L \text{ ise } st_{\theta-\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} g(t) = L$$

dir.

İspat. $st^f_{\theta-\mathbb{T}} - \lim_{t\to\infty} g(t) = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Limit tanımı ve modülüs fonksiyonunun alt toplamsallık özelliği kullanılırsa, her $p \in \mathbb{N}$ ve yeterince büyük bir $t \in \mathbb{T}$ için,

$$\begin{aligned} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)\right) &\leq \frac{1}{p} f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{p} pf\left(\frac{\mu_\Delta\left((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}\right)}{p}\right) \\ &= f\left(\frac{\mu_\Delta\left((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}\right)}{p}\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Modülüs fonksiyonu artan olduğundan

$$\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \geq \varepsilon\right\}\right)}{\mu_\Delta\left((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}\right)} \leq \frac{1}{p}$$

olur ve dolayısıyla $st_{\theta-\mathbb{T}}-\lim_{t\to\infty} g(t)=L$ bulunmuş olur.

Teorem 3.2.2 ve 3.2.3 birleştirilerek aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.2.4. $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\lim_{t\to\infty} g(t)=L \Rightarrow st_{\theta-\mathbb{T}}^{f}-\lim_{t\to\infty} g(t)=L \Rightarrow st_{\theta-\mathbb{T}}-\lim_{t\to\infty} g(t)=L$$

dir.

Uyarı 3.2.5. Yukarıdaki sonuçtan f-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramının, alışılmış yakınsaklık ile lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları arasında kalan bir kavram olduğu görülür.

Tanım 3.2.6. f bir (sınırlı veya sınırsız) modülüs fonksiyon, $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)-L\right|\right)\Delta s=0$$

ise, g fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde L sayısına kuvvetli f-lacunary Cesàro toplanabilirdir denir.

Ayrıca, $N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ ile tüm kuvvetli f-lacunary Cesàro toplanabilir fonksiyonların kümesi gösterilir.

Şimdi $N_{\theta-\mathbb{T}}$ ve $N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ kümeleri arasındaki ilişki incelenecektir.

Teorem 3.2.7. f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde,

a. $N_{\theta-\mathbb{T}} \subset N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ dir.

b. Eğer $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{t} > 0$ ise, o zaman $N_{\theta-\mathbb{T}}^{f} \subset N_{\theta-\mathbb{T}}$ dir.

İspat. a. $g \in N_{\theta-\mathbb{T}}$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}} \left|g(s) - L\right| \Delta s = 0$$

olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ vardır. Modülüs fonksiyonu sürekli olduğundan, verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, $0 < \delta < 1$ olacak şekilde bir δ sayısı seçilebilir öyle ki $0 \le t \le \delta$ koşulunu sağlayan her t için $f(t) < \varepsilon$ olur. Buradan Lemma 2.1.4.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s) - L\right|\right) \Delta s \\
&\quad = \frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\substack{\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}} \\ \left|g(s)-L\right| \le \delta}} f\left(\left|g(s) - L\right|\right) \Delta s + \frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\substack{\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}} \\ \left|g(s)-L\right| > \delta}} f\left(\left|g(s) - L\right|\right) \Delta s \\
&\quad \le \varepsilon + 2 f(1) \delta^{-1} \frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}} \left|g(s) - L\right| \Delta s
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $r \to \infty$ iken, $g \in N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ elde edilir.

b. $g \in N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s) - L\right|\right) \Delta s = 0$$

olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ vardır. Şimdi $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ olsun. $\beta > 0$ olduğundan, [26] daki Önerme 1'den her $t \geq 0$ için $f(t) \geq \beta t$ olur. Böylece

$$\beta^{-1} \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s) - L\right|\right) \Delta s \geq \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}} \left|g(s) - L\right| \Delta s$$

olup, $r \to \infty$ iken $g \in N_{\theta-\mathbb{T}}$ elde edilir.

Sonuç 3.2.8. f bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ise, $N_{\theta-\mathbb{T}}^{f} = N_{\theta-\mathbb{T}}$ dir.

Şimdi bazı özel koşullar altında zaman skalası üzerinde f-lacunary istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli f-lacunary Cesàro toplanabilirlik kavramları arasındaki ilişki verilecektir:

Teorem 3.2.9. $\theta = (k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda,

a. Her $x, y \geq 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti mevcut olmak üzere, f sınırsız modülüs fonksiyonu $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ koşulunu sağlasın. Ayrıca herhangi bir Δ-ölçülebilir $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\int_{\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}} f(\phi(s)) \Delta s \geq f\left(\int_{\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}} \phi(s) \Delta s \right)$ olsun. Eğer g fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde L sayısına kuvvetli f-lacunary Cesàro toplanabilir ise, $st_{\theta-\mathbb{T}}^{f} - \lim_{t\to\infty} g(t) = L$ dir. Fakat bunun tersinin doğru olması gerekmez.

b. Herhangi bir sınırsız f modülüs fonksiyonu için, eğer $g \in C_b(\mathbb{T})$ ve $st_{\theta-\mathbb{T}}^{f} - \lim_{t\to\infty} g(t) = L$ ise, g fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde L sayısına kuvvetli f-lacunary Cesàro toplanabilirdir.

İspat. a. g fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde L sayısına kuvvetli f-lacunary Cesàro toplanabilir ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)-L\right|\right)\Delta s \\
&\geq \frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)} f\left(\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} \left|g(s)-L\right|\Delta s \right) \\
&\geq \frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)} f\left(\int_{\substack{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} \\ |g(s)-L|\geq\varepsilon}} \left|g(s)-L\right|\Delta s \right) \\
&\geq \frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{ s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)-L\right| \geq \varepsilon \right\} \right)\varepsilon \right) \\
&\geq \frac{c}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{ s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)-L\right| \geq \varepsilon \right\} \right)\right) f(\varepsilon) \\
&= c\,\frac{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)} \frac{f\left(\mu_\Delta\left(\left\{ s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)-L\right| \geq \varepsilon \right\} \right)\right)}{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)} f(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Burada $r\to\infty$ iken limit durumuna geçilirse, $st_{\theta-\mathbb{T}}^{f} - \lim_{t\to\infty} g(t) = L$ olduğu görülür.

Tersinin her zaman doğru olmadığını göstermek için aşağıdaki örnek verilebilir: $u_r = \sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})$ olmak üzere, g fonksiyonu her bir $\left(k_{r-1}, \sigma(k_r)\right]_{\mathbb{T}}$ aralığında

$$g(t)=\begin{cases}2, & t\in\left(k_{r-1},\sigma\left(k_{r-1}\right)+1\right)_{\mathbb{T}}, \\ 2m, & t\in\left[\sigma\left(k_{r-1}\right)+m-1,\sigma\left(k_{r-1}\right)+m\right)_{\mathbb{T}} \quad \left(m=2,3,\ldots,\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right] \text{ için}\right), \\ 0, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

ile tanımlansın. Burada ve tüm çalışma boyunca $\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]$ ile $\sqrt{u_r}$ sayısının tam kısmı gösterilmektedir.

Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-0\right|\ge\varepsilon\right\}\right)\right) \\
&\le \frac{f\left(\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},\sigma\left(k_{r-1}\right)+\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]\right)_{\mathbb{T}}\right)\right)}{f\left(u_r\right)} \\
&= \frac{f\left(\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]\right)}{\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]}\frac{u_r}{f\left(u_r\right)}\frac{\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]}{u_r}\to 0 \quad \left(r\to\infty \text{ iken}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $st_{\theta-\mathbb{T}}^{f}-\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=0$ dir.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)-0\right|\right)\Delta s \\
&= \frac{f(2)}{u_r}\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},\sigma\left(k_{r-1}\right)+1\right)_{\mathbb{T}}\right)+\frac{1}{u_r}\sum_{m=2}^{\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]} f(2m)\mu_\Delta\left(\left[\sigma\left(k_{r-1}\right)+m-1,\sigma\left(k_{r-1}\right)+m\right)_{\mathbb{T}}\right) \\
&= \frac{1}{u_r}\sum_{m=1}^{\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]} f(2m) \\
&\ge \frac{1}{u_r} f\left(\sum_{m=1}^{\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]} 2m\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{f\left(2\left(1+2+\ldots+\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]\right)\right)}{u_r}$$

$$= \frac{f\left(\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]\left(\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]+1\right)\right)}{\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]\left(\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]+1\right)} \frac{\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]\left(\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]+1\right)}{u_r} \not\to 0 \quad \left(r \to \infty \text{ iken}\right)$$

elde edilir. Böylece $st_{\theta-\mathbb{T}}^{f} - \lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ ve fakat 0 sayısına kuvvetli f-lacunary Cesàro toplanabilir olmayan bir g fonksiyonunun mevcut olduğu görülür.

b. $g \in C_b(\mathbb{T})$ ve $st_{\theta-\mathbb{T}}^{f} - \lim_{t\to\infty} g(t) = L$ olsun. Bu takdirde, her $t \in \mathbb{T}$ için $\left|g(t) - L\right| \le M$ ve dolayısıyla da $f\left(\left|g(t)-L\right|\right) \le f(M)$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcuttur. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)-L\right|\right)\Delta s$$

$$= \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\substack{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}} \\ \left|g(s)-L\right|\ge\varepsilon}} f\left(\left|g(s)-L\right|\right)\Delta s + \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\substack{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}} \\ \left|g(s)-L\right|<\varepsilon}} f\left(\left|g(s)-L\right|\right)\Delta s$$

$$\le \frac{f(M)}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\substack{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}} \\ \left|g(s)-L\right|\ge\varepsilon}} \Delta s + \frac{f(\varepsilon)}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}} \Delta s$$

$$= \frac{f(M)}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \mu_\Delta\left(\left\{s \in \left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)-L\right| \ge \varepsilon\right\}\right) + f(\varepsilon)$$

olur. Burada $r \to \infty$ iken limit durumuna geçilip, Teorem 3.2.3 kullanılırsa, g fonksiyonunun L sayısına kuvvetli f-lacunary Cesàro toplanabilir olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi verilecek teoremlerle, zaman skalası üzerinde f-lacunary istatistiksel yakınsaklık ve f-istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki ilişki incelenecektir:

Teorem 3.2.10. $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi olsun. Her $x,y\geq 0$ için $f(xy)\geq cf(x)f(y)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti mevcut olmak üzere, f sınırsız modülüs fonksiyonu $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}>0$ koşulunu sağlasın. Ayrıca herhangi bir Δ-ölçülebilir $\phi:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için $\int\limits_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} f(\phi(s))\Delta s\geq f\left(\int\limits_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}}\phi(s)\Delta s\right)$ olsun. Bu durumda,

$$S_{\mathbb{T}}^{f}\subset S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}\Leftrightarrow \liminf_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}>1$$

dir.

İspat. Yeterlilik. $\liminf\limits_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}>1$ olsun. Bu durumda, yeterince büyük bir r için, $\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}\geq\delta$ ve dolayısıyla da $\frac{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})}{\sigma(k_r)}\geq\frac{\delta}{1+\delta}$ eşitsizliğini sağlayan bir $\delta>0$ vardır. Şimdi $st_{\mathbb{T}}^{f}-\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=L$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Buradan yeterince büyük bir r için

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left([t_0,k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)}f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in[t_0,k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)\\
&\geq\frac{1}{f\left(\sigma(k_r)-t_0\right)}f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)\\
&\geq\frac{1}{f\left(\sigma(k_r)\right)}f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)\\
&=\frac{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})}{\sigma(k_r)}\frac{f\left(\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})\right)}{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})}\frac{\sigma(k_r)}{f\left(\sigma(k_r)\right)}\\
&\quad\times\frac{f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)}{f\left(\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})\right)}
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{\delta}{1+\delta} \frac{f\left(\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})\right)}{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})} \frac{\sigma(k_r)}{f\left(\sigma(k_r)\right)} \frac{f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s \in (k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)-L\right| \geq \varepsilon\right\}\right)\right)}{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)}$$

olur. Bu son eşitsizlikten

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s \in (k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)-L\right| \geq \varepsilon\right\}\right)\right) = 0$$

elde edilir. O halde $st_{\theta-\mathbb{T}}^{f} - \lim_{t\to\infty} g(t) = L$ dir.

Gereklilik. $\liminf_{r\to\infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} = 1$ olsun. Bu durumda [48] de olduğu gibi $\theta = (k_r)$ lacunary dizisinin bir $\left(k_{r(j)}\right)$ alt dizisi seçilsin öyle ki $r(j) > r(j-1)+1$ olmak üzere,

$$\frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-t_0}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0} < 1+\frac{1}{j} \text{ ve } \frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0}{\sigma\left(k_{r(j-1)}\right)-t_0} > j$$

koşulları sağlansın. İspatın bu kısmında [48] de verilen

$$g(s) = \begin{cases} 1, & s \in \left(k_{r(j)-1}, k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}} \quad (\text{j=2,3,}\ldots) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir fonksiyonu ele alınsın. Tanımlanan bu g fonksiyonu için $g \in S_{\mathbb{T}}^{f}$ ve $g \notin S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ olduğu gösterilecektir. Bunun için öncelikle $g \notin N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ olduğu gösterilecektir:

Herhangi bir $L \in \mathbb{R}$ sayısı verilsin. Eğer $r = r(j)$ ise, bu durumda

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)-L\right|\right)\Delta s=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|1-L\right|\right)\Delta s$$
$$= f\left(\left|1-L\right|\right)$$

olur. Eğer $r\neq r(j)$ ise,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)-L\right|\right)\Delta s=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|L\right|\right)\Delta s$$
$$= f\left(\left|L\right|\right)$$

olur. Bazı L reel sayıları için $\left|1-L\right|\neq\left|L\right|$ ve modülüs fonksiyonu bire-bir olduğundan $f\left(\left|1-L\right|\right)\neq f\left(\left|L\right|\right)$ bulunur. Böylece $g\notin N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ elde edilir. g fonksiyonu sınırlı olduğundan, Teorem 3.2.9 gereğince $g\notin S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ olur.

Diğer taraftan, yeterince büyük bir $t\in\mathbb{T}$ için bir tek j sayısı seçilebilir öyle ki $k_{r(j)-1}<t\leq k_{r(j+1)-1}$ olur. Bu durumda,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)\right|\right)\Delta s$$
$$\leq\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,k_{r(j)-1}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left[t_0,k_{r(j-1)}\right]_{\mathbb{T}}} f(1)\Delta s+\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,k_{r(j)-1}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}} f(1)\Delta s$$
$$= f(1)\frac{\mu_\Delta\left(\left[t_0,k_{r(j-1)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,k_{r(j)-1}\right]_{\mathbb{T}}\right)}+f(1)\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,k_{r(j)-1}\right]_{\mathbb{T}}\right)}$$
$$= f(1)\frac{\sigma\left(k_{r(j-1)}\right)-t_0}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0}+f(1)\frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0}$$
$$< f(1)\left(\frac{1}{j}+\frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-t_0}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0}-1\right)$$

$$< f(1)\left(\frac{1}{j}+\frac{1}{j}\right)=\frac{2f(1)}{j}\to 0 \quad \left(j\to\infty \text{ iken}\right)$$

elde edilir. Bunun anlamı ise g fonksiyonunun 0 sayısına f-Cesàro toplanabilir olduğudur. Ayrıca g sınırlı olduğundan, $g\in S_{\mathbb{T}}^{f}$ dir. Böylece $S_{\mathbb{T}}^{f}\not\subset S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ bulunmuş olur ki bu da $S_{\mathbb{T}}^{f}\subset S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ olmasıyla çelişir. Böylece baştaki kabul yanlış olup, $\liminf\limits_{r\to\infty}\dfrac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}>1$ bulunur.

Teorem 3.2.11. $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi ve her $t\in\mathbb{T}$ için $\mu(t)\le Kt$ olacak şekilde bir $K>0$ olsun. Her $x,y\ge 0$ için $f(xy)\ge cf(x)f(y)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti mevcut olmak üzere, f sınırsız modülüs fonksiyonu $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t}>0$ koşulunu sağlasın. Ayrıca herhangi bir Δ-ölçülebilir $\phi:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için $\displaystyle\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} f(\phi(s))\Delta s\ge f\left(\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}}\phi(s)\Delta s\right)$ olsun. Bu durumda,

$$S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}\subset S_{\mathbb{T}}^{f}\Leftrightarrow \limsup_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}<\infty$$

dir.

İspat. Yeterlilik. $\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}<\infty$ olsun. Bu durumda $\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\sigma(k_r)-t_0}{\sigma(k_{r-1})-t_0}<\infty$ olur. Böylece her $r\in\mathbb{N}$ için $\dfrac{\sigma(k_r)-t_0}{\sigma(k_{r-1})-t_0}\le H$ olacak şekilde bir $H>0$ vardır. Şimdi $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{f(r)}{r}=l$ ve $st_{\theta-\mathbb{T}}^{f}-\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=L$ olsun. f-lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımından, verilen bir $\varepsilon>0$ için, $B_r:=B_r(\varepsilon)=\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right)$

olmak üzere, $\lim_{r\to\infty} \frac{f(B_r)}{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)} = 0$ dir. Bu takdirde bir $r_0 = r_0(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır öyle ki her $r > r_0$ için $\frac{f(r)}{r} < l + \varepsilon$ ve $\frac{f(B_r)}{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)} < \varepsilon$ dir. Verilen bir $t \in \mathbb{T}$ için, t noktasını içeren bir $(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}$ aralığı bulunabilir. $B = \max\left\{f(B_1), f(B_2), \ldots, f\left(B_{r_0}\right)\right\}$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s \in [t_0,t]_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \ge \varepsilon\right\}\right)\right) \\
&\le \frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left([t_0,k_{r-1}]_{\mathbb{T}}\right)\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s \in [t_0,k_r]_{\mathbb{T}} : |g(s) - L| \ge \varepsilon\right\}\right)\right) \\
&\le \frac{1}{f\left(\sigma(k_{r-1}) - t_0\right)} f\left(B_1 + B_2 + \ldots + B_{r_0} + B_{r_0+1} + \ldots + B_r\right) \\
&\le \frac{f(B_1) + f(B_2) + \ldots + f\left(B_{r_0}\right) + f\left(B_{r_0+1}\right) + \ldots + f(B_r)}{f\left(\sigma(k_{r-1}) - t_0\right)} \\
&\le \frac{r_0 B}{f\left(\sigma(k_{r-1}) - t_0\right)} + \frac{1}{f\left(\sigma(k_{r-1}) - t_0\right)}\left\{f\left(U_{r_0+1}\right) + \ldots + f(U_r)\right\} \\
&= \frac{r_0 B}{f\left(\sigma(k_{r-1}) - t_0\right)} \\
&\quad + \frac{1}{f\left(\sigma(k_{r-1}) - t_0\right)}\left\{\frac{f\left(B_{r_0+1}\right)}{f\left(\sigma\left(k_{r_0+1}\right) - \sigma\left(k_{r_0}\right)\right)} \frac{f\left(\sigma\left(k_{r_0+1}\right) - \sigma\left(k_{r_0}\right)\right)}{\sigma\left(k_{r_0+1}\right) - \sigma\left(k_{r_0}\right)}\left(\sigma\left(k_{r_0+1}\right) - \sigma\left(k_{r_0}\right)\right)\right. \\
&\quad \left. + \ldots + \frac{f(B_r)}{f\left(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})\right)} \frac{f\left(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})\right)}{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})}\left(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})\right)\right\} \\
&\le \frac{r_0 B}{f\left(\sigma(k_{r-1}) - t_0\right)} \\
&\quad + \frac{1}{f\left(\sigma(k_{r-1}) - t_0\right)}\left[\varepsilon(l+\varepsilon)\left(\sigma\left(k_{r_0+1}\right) - \sigma\left(k_{r_0}\right)\right) + \ldots + \varepsilon(l+\varepsilon)\left(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{r_0 B}{f\left(\sigma\left(k_{r-1}\right)-t_0\right)} + \frac{1}{f\left(\sigma\left(k_{r-1}\right)-t_0\right)} \varepsilon\left(l+\varepsilon\right)\left[\sigma\left(k_r\right)-\sigma\left(k_{r_0}\right)\right]$$

$$\leq \frac{r_0 B}{f\left(\sigma\left(k_{r-1}\right)-t_0\right)} + \varepsilon\left(l+\varepsilon\right)\frac{\sigma\left(k_r\right)-t_0}{f\left(\sigma\left(k_{r-1}\right)-t_0\right)}$$

$$= \frac{r_0 B}{f\left(\sigma\left(k_{r-1}\right)-t_0\right)} + \varepsilon\left(l+\varepsilon\right)\frac{\sigma\left(k_r\right)-t_0}{\sigma\left(k_{r-1}\right)-t_0}\frac{\sigma\left(k_{r-1}\right)-t_0}{f\left(\sigma\left(k_{r-1}\right)-t_0\right)}$$

$$\leq \frac{r_0 B}{f\left(\sigma\left(k_{r-1}\right)-t_0\right)} + \varepsilon\left(l+\varepsilon\right)H\,\frac{\sigma\left(k_{r-1}\right)-t_0}{f\left(\sigma\left(k_{r-1}\right)-t_0\right)}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left(\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}\right)\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}} : \left|g\left(s\right)-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)=0$$

elde edilir ki bu da $st_{\mathbb{T}}^{f}-\lim_{t\to\infty} g\left(t\right)=L$ olması demektir.

Gereklilik. $S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}\subset S_{\mathbb{T}}^{f}$ olsun ve tersine $\limsup_{r\to\infty}\frac{\sigma\left(k_r\right)}{\sigma\left(k_{r-1}\right)}=\infty$ olduğu kabul edilsin. Her $t\in\mathbb{T}$ için $\mu\left(t\right)=\sigma\left(t\right)-t\leq Kt$ olduğundan $\sigma\left(t\right)\leq\left(K+1\right)t$ olur. Buradan

$$\frac{k_r}{\sigma\left(k_{r-1}\right)}=\frac{k_r}{\sigma\left(k_r\right)}\frac{\sigma\left(k_r\right)}{\sigma\left(k_{r-1}\right)}\geq\frac{1}{\left(K+1\right)}\frac{\sigma\left(k_r\right)}{\sigma\left(k_{r-1}\right)}$$

olur ve buradan da $\limsup_{r\to\infty}\frac{k_r}{\sigma\left(k_{r-1}\right)}=\infty$ elde edilir. Bu durumda $\theta=\left(k_r\right)$ lacunary dizisinin bir $\left(k_{r(j)}\right)$ alt dizisi seçilebilir öyle ki $\frac{k_{r(j)}}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}>j$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, [48] de verilen

$$g(s)=\begin{cases}1, & s\in\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}} \quad (j=1,2,\ldots)\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ile tanımlı sınırlı, Δ-ölçülebilir bir $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ele alınsın. Şimdi g fonksiyonunun $S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ kümesinin bir elemanı ve fakat $S_{\mathbb{T}}^{f}$ kümesinin bir elemanı olmadığı gösterilecektir. Bunun için ilk olarak g fonksiyonunun 0 sayısına kuvvetli f-lacunary Cesàro toplanabilir olduğu gösterilecektir: Gösterimde ve takipte kolaylık olması için

$$\xi_r := \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)\right|\right)\Delta s$$

olsun. Eğer $r\neq r(j)$ ise, $\xi_r=0$ bulunur.

Eğer $r=r(j)$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}\xi_r &= \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)\right|\right)\Delta s\\ &= \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}} f(1)\Delta s\\ &= f(1)\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\end{aligned}$$

bulunur. Burada eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\in\mathbb{T}$ ise, $\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)=\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)$ olur. Eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\notin\mathbb{T}$ ise, $\alpha_j := \max\left\{s\in\mathbb{T}: s<2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right\}$ olmak üzere, $\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}=\left(k_{r(j)-1},\alpha_j\right]_{\mathbb{T}}$ olur. Buradan

$$\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right) = \mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1}, \alpha_j\right]_{\mathbb{T}}\right)$$

$$= \sigma\left(\alpha_j\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)$$

$$\leq \left(K+1\right)\alpha_j - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)$$

$$\leq 2\left(K+1\right)\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)$$

$$= \left(2K+1\right)\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)$$

yazılabilir. Bu durumda eğer $r = r\left(j\right)$ ve $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) \in \mathbb{T}$ ise,

$$\xi_{r(j)} = f\left(1\right)\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1}, k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}$$

$$= f\left(1\right)\frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}$$

$$= f\left(1\right)\frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{k_{r(j)} - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}$$

$$< f\left(1\right)\frac{1}{1-j} \to 0 \quad \left(j \to \infty \text{ iken}\right)$$

bulunur. Diğer taraftan eğer $r = r\left(j\right)$ ve $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) \notin \mathbb{T}$ ise

$$\xi_{r(j)} = f\left(1\right)\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1}, k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}$$

$$= f\left(1\right)\frac{\left(2K+1\right)\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}$$

$$< f\left(1\right)\frac{\left(2K+1\right)}{j-1} \to 0 \quad \left(j \to \infty \text{ iken}\right)$$

bulunur. Böylece g fonksiyonunun 0 sayısına kuvvetli f-lacunary Cesàro toplanabilir olduğu gösterilmiş olur, yani $g \in N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ bulunur. Buradan, Teorem 3.2.9 gereğince $g \in S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}$ elde edilir.

Şimdi g fonksiyonunun sırasıyla 1 ve 0 sayılarına kuvvetli f-Cesàro toplanabilir olmadığı gösterilecektir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left[t_0,k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left[t_0,k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)-1\right|\right)\Delta s &\geq \frac{1}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-t_0}\int_{\left[2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right),k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|0-1\right|\right)\Delta s\\ &\geq f(1)\frac{\mu_{\Delta}\left(\left[2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right),k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)}\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\in\mathbb{T}$ ise,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left[t_0,k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left[t_0,k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)-1\right|\right)\Delta s &\geq f(1)\frac{\mu_{\Delta}\left(\left[2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right),k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)}\\ &= f(1)\frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)}\\ &= f(1)\left(1-\frac{2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)}\right)\\ &\geq f(1)\left(1-\frac{2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{k_{r(j)}}\right)\\ &> f(1)\left(1-\frac{2}{j}\right)\to f(1)\quad\left(j\to\infty\text{ iken}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\notin\mathbb{T}$ ise,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left[t_0,k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)-1\right|\right)\Delta s \geq f(1)\frac{\mu_\Delta\left(\left[2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right),k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)}$$

$$= f(1)\frac{\mu_\Delta\left(\left[\alpha_j,k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)}$$

$$= f(1)\frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-\sigma\left(\alpha_j\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)}$$

$$\geq f(1)\frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-(K+1)\alpha_j}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)}$$

$$\geq f(1)\frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-2(K+1)\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)}$$

$$= f(1)\left(1-2(K+1)\frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)}\right)$$

$$> f(1)\left(1-2(K+1)\frac{1}{j}\right)\to f(1)\quad \left(j\to\infty \text{ iken}\right)$$

olur. Böylece g fonksiyonunun 1 sayısına kuvvetli f-Cesàro toplanabilir olmadığı gösterilmiş olur. Diğer taraftan,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)\right|\right)\Delta s$$

$$\geq \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}} f(1)\Delta s$$

$$= f(1)\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)}$$

dir. Burada eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\in\mathbb{T}$ ise,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)\right|\right)\Delta s \geq f(1)\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)}$$

$$= f(1)\frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)-t_0}$$

$$\geq f(1)\frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{2(K+1)\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}$$

$$=\frac{f(1)}{2(K+1)}\not\to 0 \quad \left(j\to\infty \text{ iken}\right)$$

olur. Eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\notin\mathbb{T}$ ise, $\beta_j:=\min\left\{s\in\mathbb{T}:s>2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right\}$ olmak üzere, $\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}=\left(k_{r(j)-1},\beta_j\right)_{\mathbb{T}}$ olur. Böylelikle,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|g(s)\right|\right)\Delta s \geq f(1)\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)}$$

$$= f(1)\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},\beta_j\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,\alpha_j\right]_{\mathbb{T}}\right)}$$

$$= f(1)\frac{\beta_j-\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(\alpha_j\right)-t_0}$$

$$\geq f(1)\frac{2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{(K+1)\alpha_j}$$

$$\geq f(1)\frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{2(K+1)\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}$$

$$= \frac{f(1)}{2(K+1)} \nrightarrow 0 \quad (j \to \infty \text{ iken})$$

bulunur. Yani, g fonksiyonu 0 sayısına kuvvetli f-Cesàro toplanabilir değildir. Sonuç olarak $g \notin N_{\mathbb{T}}^{f}$ dir. g fonksiyonu sınırlı olduğundan, buradan $g \notin S_{\mathbb{T}}^{f}$ elde edilir. Böylelikle $S_{\theta-\mathbb{T}}^{f} \not\subset S_{\mathbb{T}}^{f}$ bulunmuş olur ki bu da bir çelişkidir. O halde baştaki kabul yanlış olup, $\limsup_{r\to\infty} \frac{k_r}{\sigma(k_{r-1})} < \infty$ bulunarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.10 ve 3.2.11 birleştirilerek aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.2.12. $\theta = (k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi ve her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) \le Kt$ olacak şekilde bir $K > 0$ olsun. Her $x, y \ge 0$ için $f(xy) \ge cf(x) f(y)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti mevcut olmak üzere, f sınırsız modülüs fonksiyonu $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ koşulunu sağlasın. Ayrıca herhangi bir Δ-ölçülebilir $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} f(\phi(s))\Delta s \ge f\left(\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} \phi(s)\Delta s \right)$ olsun. Bu durumda,

$$S_{\theta-\mathbb{T}}^{f} = S_{\mathbb{T}}^{f} \Leftrightarrow 1 < \liminf_{r\to\infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} \le \limsup_{r\to\infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} < \infty$$

dir.

BÖLÜM 4. ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE ASİMPTOTİK DENK FONKSİYONLAR

Bu bölümün ilk kısmında literatürde sayı dizileri için verilmiş olan asimptotik istatistiksel denklik, asimptotik lacunary istatistiksel denklik ve kuvvetli asimptotik lacunary denklik kavramları zaman skalası üzerinde tanımlı pozitif reel değerli delta ölçülebilir fonksiyonlar için tanımlanacaktır. İkinci kısımda ise, bu kavramlar modülüs fonksiyonları yardımıyla genişletilecektir.

4.1. Zaman Skalası Üzerinde Asimptotik Lacunary İstatistiksel Denk Fonksiyonlar

Bu kısımda, zaman skalası üzerinde asimptotik istatistiksel denk, asimptotik lacunary istatistiksel denk ve kuvvetli asimptotik lacunary denk fonksiyonlar tanıtılacaktır.

Tanım 4.1.1. $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $h:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ pozitif değerli Δ-ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)=0$$

oluyorsa, g ve h fonksiyonları zaman skalası üzerinde L katlı asimptotik istatistiksel denk fonksiyonlardır denir ve $g\overset{S_{\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ ile gösterilir. Eğer burada $L=1$ ise, kısaca, g ve h fonksiyonlarına asimptotik istatistiksel denk fonksiyonlardır denir ve bu durum $g\overset{S_{\mathbb{T}}}{\sim}h$ ile gösterilir. Ayrıca, $S_{\mathbb{T}}(L)$ ile $g\overset{S_{\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ şartını sağlayan tüm g ve h fonksiyonlarının kümesi gösterilir.

Uyarı 4.1.2.

a. Eğer Tanım 4.1.1 de, her $t \in \mathbb{T}$ için $h(t)=1$ alınırsa, zaman skalası üzerindeki asimptotik istatistiksel denklik kavramı, zaman skalası üzerinde Duman ve Turan [46] tarafından tanımlanmış istatistiksel yakınsaklık kavramına indirgenir.
b. Eğer Tanım 4.1.1 de, $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ seçilirse, zaman skalası üzerindeki asimptotik istatistiksel denklik, sayı dizileri için Patterson [33] tarafından verilmiş asimptotik istatistiksel denkliğe dönüşür.

Tanım 4.1.3. $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi, $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $h:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ pozitif değerli Δ-ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Eğer, her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)=0$$

ise, g ve h fonksiyonlarına zaman skalası üzerinde L katlı asimptotik lacunary istatistiksel denk fonksiyonlardır denir ve $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ ile gösterilir. Eğer burada $L=1$ ise, g ve h fonksiyonlarına asimptotik lacunary istatistiksel denk fonksiyonlardır denir ve bu durum $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}}{\sim} h$ ile gösterilir. Ayrıca, $S_{\theta-\mathbb{T}}(L)$ ile $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ şartını sağlayan tüm g ve h fonksiyonlarının kümesi temsil edilir.

Uyarı 4.1.4.

a. Eğer Tanım 4.1.3 de, her $t \in \mathbb{T}$ için $h(t)=1$ alınırsa, zaman skalası üzerindeki asimptotik lacunary istatistiksel denklik kavramı, zaman skalası üzerinde Duman ve Turan [47] tarafından tanımlanmış lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramına indirgenir.
b. Eğer Tanım 4.1.3 de, $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ seçilirse, zaman skalası üzerindeki asimptotik lacunary istatistiksel denklik, sayı dizileri için Patterson ve Savaş [34] tarafından verilmiş asimptotik lacunary istatistiksel denkliğe dönüşür.

Tanım 4.1.5. $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi, $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $h:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ pozitif değerli Δ-ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}}\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\Delta s=0$$

ise, g ve h fonksiyonlarına zaman skalası üzerinde L katlı kuvvetli asimptotik lacunary denk fonksiyonlardır denir ve $g\overset{N_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ ile gösterilir. Eğer burada $L=1$ ise, g ve h fonksiyonlarına kuvvetli asimptotik lacunary denk fonksiyonlardır denir ve bu durum $g\overset{N_{\theta-\mathbb{T}}}{\sim}h$ ile gösterilir. Ayrıca, $N_{\theta-\mathbb{T}}(L)$ ile $g\overset{N_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ şartını sağlayan tüm g ve h fonksiyonlarının kümesi gösterilecektir.

Şimdi verilecek teoremde zaman skalası üzerinde asimptotik lacunary istatistiksel denklik ve kuvvetli asimptotik lacunary denklik kavramları arasındaki ilişki incelenecektir.

Teorem 4.1.6. $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi, $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $h:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ pozitif değerli Δ-ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

a. i) Eğer $g\overset{N_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ ise, $g\overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ dir.

ii) $N_{\theta-\mathbb{T}}(L)$, $S_{\theta-\mathbb{T}}(L)$ nin öz alt kümesidir.

b. $g,h\in C_b(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $g\overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ ise, $g\overset{N_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ dir.

c. $S_{\theta-\mathbb{T}}(L)\cap C_b(\mathbb{T})=N_{\theta-\mathbb{T}}(L)\cap C_b(\mathbb{T})$ dir.

İspat. a. i) $g\overset{N_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}}\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\Delta s \geq \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\substack{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\\ \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon}}\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\Delta s$$

$$\geq \varepsilon\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)$$

olur ve buradan $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ dir.

a. ii) $N_{\theta-\mathbb{T}}(L)$, $S_{\theta-\mathbb{T}}(L)$ nin öz alt kümesi olduğunu göstermek için aşağıdaki örnek göz önüne alınabilir: $u_r=\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})$ olmak üzere, g ve h fonksiyonları her bir $\left(k_{r-1},\sigma(k_r)\right]_{\mathbb{T}}$ aralığında

$$g(t)=\begin{cases}2, & t\in\left(k_{r-1},\sigma(k_{r-1})+1\right)_{\mathbb{T}},\\ m+1, & t\in\left[\sigma(k_{r-1})+m-1,\sigma(k_{r-1})+m\right)_{\mathbb{T}} \quad \left(m=2,3,\ldots,\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right] \text{ için}\right),\\ 1, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

ve

$$h(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & t\in\left(k_{r-1},\sigma(k_{r-1})+1\right)_{\mathbb{T}},\\ \frac{1}{m+1}, & t\in\left[\sigma(k_{r-1})+m-1,\sigma(k_{r-1})+m\right)_{\mathbb{T}} \quad \left(m=2,3,\ldots,\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right] \text{ için}\right),\\ 1, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

ile tanımlansın. Buradan

$$\frac{g(t)}{h(t)}=\begin{cases}2^2, & t\in\left(k_{r-1},\sigma(k_{r-1})+1\right)_{\mathbb{T}},\\ (m+1)^2, & t\in\left[\sigma(k_{r-1})+m-1,\sigma(k_{r-1})+m\right)_{\mathbb{T}} \quad \left(m=2,3,\ldots,\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right] \text{ için}\right),\\ 1, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

yazılabilir.

Bu takdirde,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-1\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\leq\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},\sigma(k_{r-1})+\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]\right)_{\mathbb{T}}\right)}{u_r}$$

$$=\frac{\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]}{u_r}\to 0 \quad (r\to\infty \text{ iken})$$

elde edilir. Yani, $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}}{\sim} h$ dir.

Diğer taraftan,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}}\left|\frac{g(s)}{h(s)}-1\right|\Delta s$$

$$=\frac{3}{u_r}\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},\sigma(k_{r-1})+1\right)_{\mathbb{T}}\right)+\frac{1}{u_r}\sum_{m=3}^{\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]+1}\left(m^2-1\right)\mu_\Delta\left(\left[\sigma(k_{r-1})+m-2,\sigma(k_{r-1})+m-1\right)_{\mathbb{T}}\right)$$

$$=\frac{1}{u_r}\sum_{m=2}^{\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]+1}\left(m^2-1\right)$$

$$=\frac{3+8+\ldots+\left(\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]+1\right)^2-1}{u_r}$$

$$=\frac{\frac{\left(\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]+1\right)\left(\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]+2\right)\left(2\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]+3\right)}{6}-\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]-1}{u_r}\to\infty \quad (r\to\infty \text{ iken})$$

bulunur ve $g \overset{N_{\theta-\mathbb{T}}}{\nsim} h$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

b. $g,h \in C_b(\mathbb{T})$ ve $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ olsun. Bu takdirde, her $t \in \mathbb{T}$ için $\left|\dfrac{g(t)}{h(t)} - L\right| \le M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcuttur. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}} \left|\frac{g(s)}{h(s)} - L\right| \Delta s \\
&= \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\substack{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}} \\ \left|\frac{g(s)}{h(s)} - L\right| \ge \varepsilon}} \left|\frac{g(s)}{h(s)} - L\right| \Delta s + \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\substack{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}} \\ \left|\frac{g(s)}{h(s)} - L\right| < \varepsilon}} \left|\frac{g(s)}{h(s)} - L\right| \Delta s \\
&\le \frac{M}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\substack{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}} \\ \left|\frac{g(s)}{h(s)} - L\right| \ge \varepsilon}} \Delta s + \frac{\varepsilon}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}} \Delta s \\
&= \frac{M}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \mu_\Delta\left(\left\{ s \in \left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}} : \left|\frac{g(s)}{h(s)} - L\right| \ge \varepsilon \right\}\right) + \varepsilon
\end{aligned}
$$

olur. Burada $r \to \infty$ iken limit durumuna geçilip, $\varepsilon > 0$ sayısının keyfi olduğu kullanılırsa, $g \overset{N_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ elde edilir.

c. (a) ve (b) nin bir sonucudur.

Aşağıdaki iki teoremde, $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi üzerine bazı koşullar konularak, zaman skalası üzerinde tanımlanmış asimptotik istatiksel denklik ve asimptotik lacunary istatiksel denklik kavramları karşılaştırılacaktır.

Teorem 4.1.7. $\theta = (k_r)$, $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde $\liminf_{r\to\infty} \dfrac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} > 1$ koşulunu sağlayan bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda, eğer $g \overset{S_{\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ ise $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ dir.

İspat. $\liminf_{r\to\infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} > 1$ olsun. Bu durumda, yeterince büyük bir r için, $\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} \geq \delta$ ve dolayısıyla da $\frac{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})}{\sigma(k_r)} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ vardır.

Şimdi $g \overset{S_{\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Buradan yeterince büyük bir r için

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_\Delta\left([t_0,k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in[t_0,k_r]_{\mathbb{T}} : \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right) \\
&\geq \frac{1}{\sigma(k_r)-t_0}\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right) \\
&\geq \frac{1}{\sigma(k_r)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right) \\
&= \frac{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})}{\sigma(k_r)} \frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)}{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})} \\
&\geq \frac{\delta}{1+\delta} \frac{f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}
\end{aligned}
$$

olur. Bu son eşitsizlikte $r\to\infty$ iken limit durumuna geçilir ve $g \overset{S_{\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ olduğu kullanılırsa, $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ elde edilir.

Teorem 4.1.8. $\theta = (k_r)$, $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde $\limsup_{r\to\infty} \frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} < \infty$ koşulunu sağlayan bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda, eğer $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ ise $g \overset{S_{\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ dir.

İspat. $\limsup_{r\to\infty}\dfrac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}<\infty$ olsun. Buradan $\limsup_{r\to\infty}\dfrac{\sigma(k_r)-t_0}{\sigma(k_{r-1})-t_0}<\infty$ olur. Bu durumda her $r\in\mathbb{N}$ için $\dfrac{\sigma(k_r)-t_0}{\sigma(k_{r-1})-t_0}\leq H$ olacak şekilde bir $H>0$ vardır. Şimdi $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ olsun. Asimptotik lacunary istatistiksel denklik tanımından, verilen bir $\varepsilon>0$ için, $B_r := B_r(\varepsilon)=\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|\dfrac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)$ olmak üzere, $\lim_{r\to\infty}\dfrac{B_r}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}=0$ dir. Bu takdirde bir $r_0=r_0(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır öyle ki her $r>r_0$ için $\dfrac{B_r}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}<\varepsilon$ dir. Verilen bir $t\in\mathbb{T}$ için, t noktasını içeren bir $(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}$ aralığı bulunabilir. $B=\max\left\{B_1,B_2,\ldots,B_{r_0}\right\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_\Delta\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in[t_0,t]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\\
&\leq\frac{1}{\mu_\Delta\left([t_0,k_{r-1}]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in[t_0,k_r]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\\
&\leq\frac{B_1+B_2+\ldots+B_{r_0}+B_{r_0+1}+\ldots+B_r}{\sigma(k_{r-1})-t_0}\\
&\leq\frac{r_0B}{\sigma(k_{r-1})-t_0}+\frac{B_{r_0+1}+\ldots+B_r}{\sigma(k_{r-1})-t_0}\\
&=\frac{r_0B}{\sigma(k_{r-1})-t_0}+\frac{1}{\sigma(k_{r-1})-t_0}\left\{\frac{B_{r_0+1}}{\sigma(k_{r_0+1})-\sigma(k_{r_0})}\left(\sigma(k_{r_0+1})-\sigma(k_{r_0})\right)\right.\\
&\qquad\left.+\ldots+\frac{B_r}{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})}\left(\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})\right)\right\}\\
&\leq\frac{r_0B}{\sigma(k_{r-1})-t_0}+\frac{1}{\sigma(k_{r-1})-t_0}\left(\varepsilon\left(\sigma(k_{r_0+1})-\sigma(k_{r_0})\right)+\ldots+\varepsilon\left(\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})\right)\right)\\
&=\frac{r_0B}{\sigma(k_{r-1})-t_0}+\frac{1}{\sigma(k_{r-1})-t_0}\varepsilon\left(\sigma(k_r)-\sigma(k_{r_0})\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{r_0 B}{\sigma(k_{r-1})-t_0}+\varepsilon\frac{\sigma(k_r)-t_0}{\sigma(k_{r-1})-t_0}$$

$$\leq \frac{r_0 B}{\sigma(k_{r-1})-t_0}+\varepsilon H$$

yazılabilir. Buradan,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in[t_0,t]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)=0$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Şimdi zaman skalası üzerinde tanımlı asimptotik lacunary istatiksel denk fonksiyonlar için bazı denklik sonuçları verilecektir.

$g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $h:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ pozitif değerli ve Δ-ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Eğer her $t\in\mathbb{T}$ için $g(t)\leq h(t)$ sağlanıyorsa, bu durum $g\prec h$ şeklinde gösterilmiştir.

Teorem 4.1.9. $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi olsun. Eğer $g_3\prec g_1$ ve $(g_1-g_3)\overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L')}{\sim}g_2$ ise, bu takdirde $g_1\overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}g_2$ ise $g_3\overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L-L')}{\sim}g_2$ dir.

İspat. $g_3\prec g_1$ ve $(g_1-g_3)\overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L')}{\sim}g_2$ olsun. $g_3\prec g_1$ olduğundan, her $s\in\mathbb{T}$ için

$$\left|\frac{g_3(s)}{g_2(s)}-(L-L')\right|\leq\left|\frac{g_1(s)}{g_2(s)}-L\right|+\left|\frac{g_1(s)-g_3(s)}{g_2(s)}-L'\right|$$

olur. Buradan, μ_Δ bir ölçü olduğundan, verilen bir $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g_3(s)}{g_2(s)}-\left(L-L'\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\right)$$

$$\leq\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g_1(s)}{g_2(s)}-L\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

$$+\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g_1(s)-g_3(s)}{g_2(s)}-L'\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikten $r\rightarrow\infty$ iken, $g_3 \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L-L')}{\sim} g_2$ olduğu görülür.

Teorem 4.1.10. $\theta=\left(k_r\right)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi, $g_2 \prec g_3$ ve $g_1 \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L')}{\sim} \left(g_3-g_2\right)$ olsun. Bu durumda $L'':=\frac{1}{L}+\frac{1}{L'}$ olmak üzere, eğer $g_1 \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} g_2$ ise, $g_1 \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(1/L'')}{\sim} g_3$ dir.

İspat. $g_2 \prec g_3$ ve $g_1 \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L')}{\sim} \left(g_3-g_2\right)$ olsun. $g_2 \prec g_3$ olduğundan, $g_3-g_2=\left(g_3-g_2\right)(s)=g_3(s)-g_2(s)$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde pozitif değerli Δ-ölçülebilir bir fonksiyondur. Ayrıca her $s\in\mathbb{T}$ için

$$\left|\frac{g_3(s)}{g_1(s)}-L''\right|\leq\left|\frac{g_3(s)-g_2(s)}{g_1(s)}-\frac{1}{L'}\right|+\left|\frac{g_2(s)}{g_1(s)}-\frac{1}{L}\right|$$

olur. Buradan, μ_Δ bir ölçü olduğundan, verilen bir $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g_3(s)}{g_1(s)}-L''\right|\geq\varepsilon\right\}\right)$$

$$\leq\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g_3(s)-g_2(s)}{g_1(s)}-\frac{1}{L'}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

$$+\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g_2(s)}{g_1(s)}-\frac{1}{L}\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

yazılabilir. Böylelikle $r\to\infty$ iken $g_1 \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(1/L'')}{\sim} g_3$ elde edilir.

Bir sonraki tanımı vermeden önce zaman skalası üzerinde bir kümenin lacunary yoğunluk kavramı hatırlatılmıştır:

A, $\mathbb{T}$ nin Δ-ölçülebilir bir alt kümesi olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:s\in A\right\}\right)$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine A kümesinin $\mathbb{T}$ üzerindeki lacunary yoğunluğu denir ve $\delta_{\theta-\mathbb{T}}(A)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.11. $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer g fonksiyonu zaman skalası üzerinde lacunary yoğunluğu sıfır olan bir küme dışındaki her t için bir P özelliğini sağlıyorsa, g fonksiyonu P özelliğini hemen hemen her t için sağlıyor denir ve bu durum kısaca "$h.h._{\theta-\mathbb{T}}\ t$" ile gösterilir.

Teorem 4.1.12. $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi olsun. Eğer $g_3=g_1\ \left(h.h._{\theta-\mathbb{T}}\ t\right)$ ve $g_1 \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} g_2$ ise, $g_3 \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} g_2$ dir.

İspat. $g_3=g_1\ \left(h.h._{\theta-\mathbb{T}}\ t\right)$ ve $g_1 \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} g_2$ olsun. Böylece, $A:=\left\{s\in\mathbb{T}:g_3(s)\neq g_1(s)\right\}$ olmak üzere, $\delta_{\theta-\mathbb{T}}(A)=0$ olur. Verilen bir $\varepsilon>0$ için,

$$\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g_3(s)}{g_2(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}$$

$$=\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g_3(s)}{g_2(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\cap\left(A^c\cup A\right)$$

$$\subseteq\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g_3(s)}{g_2(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\cap A^c\right)\cup\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g_3(s)}{g_2(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\cap A\right)$$

$$\subseteq\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g_1(s)}{g_2(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\cup\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:s\in A\right\}$$

kapsaması sağlanır ve buradan da

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g_3(s)}{g_2(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)$$

$$\leq\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g_1(s)}{g_2(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)$$

$$+\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:s\in A\right\}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle $g_3 \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} g_2$ bulunmuş olur ve ispat tamamlanır.

4.2. Zaman Skalası Üzerinde Asimptotik $f-$Lacunary İstatistiksel Denk Fonksiyonlar

Bu bölümde, bir önceki kısımda verilen kavramlar, modülüs fonksiyonları yardımıyla genelleştirilecektir.

Tanım 4.2.1. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $h:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ pozitif değerli Δ-ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left(\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}\right)\right)}f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)=0$$

oluyorsa, g ve h fonksiyonlarına $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde L katlı asimptotik f-istatistiksel denk fonksiyonlar denir ve $g\overset{S_{\mathbb{T}}^f(L)}{\sim}h$ ile gösterilir. Eğer burada $L=1$ ise, g ve h fonksiyonlarına asimptotik f-istatistiksel denk fonksiyonlar denir ve bu durum $g\overset{S_{\mathbb{T}}^f}{\sim}h$ ile gösterilir. Ayrıca, $g\overset{S_{\mathbb{T}}^f(L)}{\sim}h$ şartını sağlayan tüm g ve h fonksiyonlarının kümesi $S_{\mathbb{T}}^f(L)$ ile temsil edilir.

Uyarı 4.2.2.

a. Eğer Tanım 4.2.1 de her $t\in\mathbb{T}$ için $h(t)=1$ alınırsa, zaman skalası üzerindeki asimptotik f-istatistiksel denklik kavramı, zaman skalası üzerinde Turan ve Başarır [53] tarafından tanımlanmış Δ_f-istatistiksel yakınsaklık kavramına indirgenir.
b. Eğer Tanım 4.2.1 de $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ seçilirse, zaman skalası üzerindeki asimptotik f-istatistiksel denklik, sayı dizileri için Konca ve Küçükaslan [39] tarafından verilmiş asimptotik f-istatistiksel denkliğe dönüşür.
c. Eğer Tanım 4.2.1 de $f(x)=x$ alınırsa, zaman skalası üzerindeki asimptotik f-istatistiksel denklik kavramı, Sözbir ve Altundağ [57] tarafından verilmiş zaman skalası üzerindeki asimptotik istatistiksel denklik kavramına indirgenir.

Tanım 4.2.3. f sınırsız bir modülüs fonksiyonu, $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $h:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ pozitif değerli Δ-ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)\right)}f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)=0$$

ise, g ve h fonksiyonlarına $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde L katlı asimptotik f-lacunary istatistiksel denk fonksiyonlar denir ve $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$ ile gösterilir. Eğer burada $L=1$ ise, g ve h fonksiyonlarına asimptotik f-lacunary istatistiksel denk fonksiyonlar denir ve bu durum $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}}{\sim} h$ ile gösterilir. Ayrıca, $S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)$ ile $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$ şartını sağlayan tüm g ve h fonksiyonlarının kümesi gösterilir.

Uyarı 4.2.4

a. Eğer Tanım 4.2.3 de her $t \in \mathbb{T}$ için $h(t)=1$ alınırsa, zaman skalası üzerindeki asimptotik f-lacunary istatistiksel denklik kavramı, zaman skalası üzerinde Sözbir ve ark. [56] tarafından tanımlanmış Δ_f-lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramına indirgenir.

b. Eğer Tanım 4.2.3 de $f(x)=x$ alınırsa, zaman skalası üzerindeki asimptotik f-lacunary istatistiksel denklik kavramı, Sözbir ve Altundağ [57] tarafından verilmiş zaman skalası üzerindeki asimptotik lacunary istatistiksel denklik kavramına indirgenir.

c. Eğer Tanım 4.2.3 de $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ ve $f(x)=x$ seçilirse, zaman skalası üzerindeki asimptotik f-istatistiksel denklik, sayı dizileri için Patterson ve Savaş [34] tarafından verilmiş asimptotik lacunary istatistiksel denkliğe dönüşür.

Teorem 4.2.5. $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $h:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ pozitif değerli Δ-ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Bu durumda, $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$ ise $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ dir.

İspat. $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$ olsun ve $\varepsilon>0$ verilsin. Bu durumda, limit tanımı ve modülüs fonksiyonunun alt toplamsallık özelliğinden, her $p\in\mathbb{N}$ ve yeterince büyük r için,

$$f\left(\mu_{\Delta}\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)\leq\frac{1}{p}f\left(\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)\right)$$

$$\leq\frac{1}{p}pf\left(\frac{\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}{p}\right)$$

$$=f\left(\frac{\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}{p}\right)$$

elde edilir. Buradan, f modülüs fonksiyonu artan olduğundan

$$\frac{\mu_{\Delta}\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)}{\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\leq\frac{1}{p}$$

elde edilir. Bunun anlamı ise $g\overset{S_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ olmasıdır.

Teorem 4.2.6. f sınırsız modülüs fonksiyonu $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}>0$ koşulunu sağlasın ve $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde $\liminf\limits_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}>1$ koşulunu sağlayan bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda, $g\overset{S_{\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim}h$ ise $g\overset{S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim}h$ dir.

İspat. $\liminf\limits_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}>1$ olsun. Bu durumda, yeterince büyük bir r için, $\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}\geq\delta$ ve dolayısıyla da $\frac{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})}{\sigma(k_r)}\geq\frac{\delta}{1+\delta}$ eşitsizliğini sağlayan bir $\delta>0$ vardır. Şimdi $g\overset{S_{\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim}h$ olsun ve $\varepsilon>0$ verilsin. Buradan yeterince büyük bir r için

$$\frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left([t_0,k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in[t_0,k_r]_{\mathbb{T}} : \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)$$

$$\geq \frac{1}{f\left(\sigma(k_r)-t_0\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)$$

$$\geq \frac{1}{f\left(\sigma(k_r)\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)$$

$$= \frac{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})}{\sigma(k_r)} \frac{f\left(\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})\right)}{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})} \frac{\sigma(k_r)}{f\left(\sigma(k_r)\right)}$$

$$\times\frac{f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)}{f\left(\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})\right)}$$

$$\geq \frac{\delta}{1+\delta} \frac{f\left(\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})\right)}{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})} \frac{\sigma(k_r)}{f\left(\sigma(k_r)\right)}$$

$$\times\frac{f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)}{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)}$$

olur. Bu son eşitsizlikte $r\to\infty$ iken limit durumuna geçilip, $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}>0$ ve $g\overset{S_{\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim}h$ olduğu kullanılırsa,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)=0$$

elde edilir. Bunun anlamı ise $g\overset{S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim}h$ dir.

Teorem 4.2.7. f sınırsız modülüs fonksiyonu $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t}>0$ koşulunu sağlasın ve $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde $\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}<\infty$ koşulunu sağlayan bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda, $g\overset{S^f_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ ise $g\overset{S^f_{\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ dir.

İspat. $\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}<\infty$ olsun. Buradan $\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\sigma(k_r)-t_0}{\sigma(k_{r-1})-t_0}<\infty$ olur. Bu durumda, her $r\in\mathbb{N}$ için $\dfrac{\sigma(k_r)-t_0}{\sigma(k_{r-1})-t_0}\le H$ olacak şekilde bir $H>0$ vardır. Şimdi $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{f(r)}{r}=l$ ve $g\overset{S^f_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ olsun. Asimptotik f-lacunary istatistiksel denklik tanımından, verilen bir $\varepsilon>0$ için, $B_r:=B_r(\varepsilon)=\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|\dfrac{g(s)}{h(s)}-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right)$ olmak üzere, $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{f(U_r)}{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)}=0$ dir. Bu takdirde bir $r_0=r_0(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır öyle ki her $r>r_0$ için $\dfrac{f(r)}{r}<l+\varepsilon$ ve $\dfrac{f(U_r)}{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)}<\varepsilon$ dir. Verilen bir $t\in\mathbb{T}$ için, t noktasını içeren bir $(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}$ aralığı bulunabilir. $B=\max\left\{f(B_1),f(B_2),\ldots,f(B_{r_0})\right\}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)\right)}f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in[t_0,t]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right)\right)$$

$$\le\frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left([t_0,k_{r-1}]_{\mathbb{T}}\right)\right)}f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in[t_0,k_r]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\ge\varepsilon\right\}\right)\right)$$

$$\le\frac{1}{f\left(\sigma(k_{r-1})-t_0\right)}f\left(B_1+B_2+\ldots+B_{r_0}+B_{r_0+1}+\ldots+B_r\right)$$

$$\leq \frac{f(B_1)+f(B_2)+\ldots+f(B_{r_0})+f(B_{r_0+1})+\ldots+f(B_r)}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}$$

$$\leq \frac{r_0 B}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}+\frac{1}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}\left\{f(B_{r_0+1})+\ldots+f(B_r)\right\}$$

$$=\frac{r_0 B}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}$$

$$+\frac{1}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}\left\{\frac{f(U_{r_0+1})}{f(\sigma(k_{r_0+1})-\sigma(k_{r_0}))}\frac{f(\sigma(k_{r_0+1})-\sigma(k_{r_0}))}{\sigma(k_{r_0+1})-\sigma(k_{r_0})}(\sigma(k_{r_0+1})-\sigma(k_{r_0}))\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{f(U_r)}{f(\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1}))}\frac{f(\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1}))}{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})}(\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1}))\right\}$$

$$\leq \frac{r_0 B}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}$$

$$+\frac{1}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}\left[\varepsilon(l+\varepsilon)(\sigma(k_{r_0+1})-\sigma(k_{r_0}))+\ldots+\varepsilon(l+\varepsilon)(\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1}))\right]$$

$$=\frac{r_0 B}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}+\frac{1}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}\varepsilon(l+\varepsilon)\left[\sigma(k_r)-\sigma(k_{r_0})\right]$$

$$\leq \frac{r_0 B}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}+\varepsilon(l+\varepsilon)\frac{\sigma(k_r)-t_0}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}$$

$$=\frac{r_0 B}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}+\varepsilon(l+\varepsilon)\frac{\sigma(k_r)-t_0}{\sigma(k_{r-1})-t_0}\frac{\sigma(k_{r-1})-t_0}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}$$

$$\leq \frac{r_0 B}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}+\varepsilon(l+\varepsilon)H\frac{\sigma(k_{r-1})-t_0}{f(\sigma(k_{r-1})-t_0)}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{f(\mu_\Delta([t_0,t]_{\mathbb{T}}))}f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in[t_0,t]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)=0$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.6 ve 4.2.7 birleştirilerek aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.8. f sınırsız modülüs fonksiyonu $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}>0$ koşulunu sağlasın ve $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde $1<\liminf_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}\leq\limsup_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}<\infty$ koşulunu sağlayan bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda, $g\overset{S^f_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h\Leftrightarrow g\overset{S^f_{\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ dir.

Tanım 4.2.9. f (sınırlı veya sınırsız) bir modülüs fonksiyonu ve $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi olsun. $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $h:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ pozitif değerli Δ-ölçülebilir iki fonksiyon olmak üzere, eğer

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\right)\Delta s=0$$

ise, g ve h fonksiyonlarına zaman skalası üzerinde L katlı kuvvetli asimptotik f-lacunary denk fonksiyonlar denir ve $g\overset{N^f_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ ile gösterilir. Eğer burada $L=1$ ise, g ve h fonksiyonlarına kuvvetli asimptotik f-lacunary denk fonksiyonlar denir ve bu durum $g\overset{N^f_{\theta-\mathbb{T}}}{\sim}h$ ile gösterilir. Ayrıca, $g\overset{N^f_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ şartını sağlayan tüm g ve h fonksiyonlarının kümesi $N^f_{\theta-\mathbb{T}}(L)$ ile gösterilir.

Teorem 4.2.10. $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda,

a. Her $x,y\geq 0$ için $f(xy)\geq cf(x)f(y)$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti mevcut olmak üzere, f sınırsız modülüs fonksiyonu $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}>0$ koşulunu sağlasın. Ayrıca herhangi bir Δ-ölçülebilir $\phi:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için $\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} f(\phi(s))\Delta s \geq f\left(\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} \phi(s)\Delta s\right)$ olsun. Bu takdirde,

i) Eğer $g \overset{N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$ ise $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$ dir.

ii) $N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)$, $S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)$ nın özalt kümesidir.

b. Herhangi bir sınırsız f modülüs fonksiyonu için, eğer $g,h\in C_b(\mathbb{T})$ ve $g \overset{S_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$ ise $g \overset{N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$ dir.

İspat. a. i) $g \overset{N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$ olsun ve $\varepsilon>0$ verilsin. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\right)\Delta s \\
&\geq \frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)} f\left(\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}}\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\Delta s\right) \\
&\geq \frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)} f\left(\int_{\substack{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} \\ \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon}}\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\Delta s\right) \\
&\geq \frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\varepsilon\right) \\
&\geq \frac{c}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right) f(\varepsilon) \\
&= c\,\frac{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}\,\frac{f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)\right)}{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)}\, f(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Buradan da $g \overset{S^f_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ elde edilir.

a. ii) $N^f_{\theta-\mathbb{T}}(L)$ nin $S^f_{\theta-\mathbb{T}}(L)$ nın bir özalt kümesi olduğunu göstermek için aşağıdaki örnek verilebilir:

$u_r = \sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})$ olmak üzere, g ve h fonksiyonları olarak Teorem 4.1.6 nın ispatında tanımlanan fonksiyonlar alınsın.

Bu takdirde,

$$\frac{1}{f\left(\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)\right)} f\left(\mu_\Delta\left(\left\{s \in (k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}} : \left|\frac{g(s)}{h(s)} - 1\right| \geq \varepsilon\right\}\right)\right)$$

$$\leq \frac{f\left(\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1}, \sigma(k_{r-1}) + \left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]\right)_{\mathbb{T}}\right)\right)}{f(u_r)}$$

$$= \frac{f\left(\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]\right)}{\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]} \frac{u_r}{f(u_r)} \frac{\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]}{u_r} \to 0 \quad (r \to \infty)$$

elde edilir. Yani, $g \overset{S^f_{\theta-\mathbb{T}}}{\sim} h$ dir.

Diğer taraftan,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|\frac{g(s)}{h(s)} - 1\right|\right) \Delta s$$

$$= \frac{f(3)}{u_r} \mu_\Delta\left(\left(k_{r-1}, \sigma(k_{r-1}) + 1\right)_{\mathbb{T}}\right)$$

$$+ \frac{1}{u_r} \sum_{m=3}^{\left[\!\left[\sqrt{u_r}\right]\!\right]+1} f\left(m^2 - 1\right) \mu_\Delta\left(\left[\sigma(k_{r-1}) + m - 2, \sigma(k_{r-1}) + m - 1\right)_{\mathbb{T}}\right)$$

$$=\frac{1}{u_r}\sum_{m=2}^{[\![\sqrt{u_r}]\!]+1} f\left(m^2-1\right)$$

$$\geq \frac{f\left(3+8+\ldots+\left([\![\sqrt{u_r}]\!]+1\right)^2-1\right)}{u_r}$$

$$=\frac{f\left(\dfrac{\left([\![\sqrt{u_r}]\!]+1\right)\left([\![\sqrt{u_r}]\!]+2\right)\left(2[\![\sqrt{u_r}]\!]+3\right)}{6}-[\![\sqrt{u_r}]\!]-1\right)}{\dfrac{\left([\![\sqrt{u_r}]\!]+1\right)\left([\![\sqrt{u_r}]\!]+2\right)\left(2[\![\sqrt{u_r}]\!]+3\right)}{6}-[\![\sqrt{u_r}]\!]-1}$$

$$\times\frac{\dfrac{\left([\![\sqrt{u_r}]\!]+1\right)\left([\![\sqrt{u_r}]\!]+2\right)\left(2[\![\sqrt{u_r}]\!]+3\right)}{6}-[\![\sqrt{u_r}]\!]-1}{u_r}$$

Burada $r\to\infty$ iken limit durumuna geçilirse $g \overset{N^f_{\theta-\mathbb{T}}}{\nsim} h$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

b. $g,h\in C_b\left(\mathbb{T}\right)$ ve $g \overset{S^f_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ olsun. Bu takdirde, her $t\in\mathbb{T}$ için $\left|\frac{g(t)}{h(t)}-L\right|\leq M$ ve dolayısıyla da $f\left(\left|\frac{g(t)}{h(t)}-L\right|\right)\leq f\left(M\right)$ olacak şekilde bir $M>0$ sayısı mevcuttur. Verilen bir $\varepsilon>0$ için,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\right)\Delta s$$

$$=\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\substack{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\\ \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon}} f\left(\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\right)\Delta s+\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\substack{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\\ \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|<\varepsilon}} f\left(\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\right)\Delta s$$

$$\leq\frac{f\left(M\right)}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\substack{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\\ \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon}}\Delta s+\frac{f\left(\varepsilon\right)}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}}\Delta s$$

$$=\frac{f(M)}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)+f(\varepsilon)$$

olur. Burada $r\to\infty$ iken limit durumuna geçilip, Teorem 4.2.5 kullanılırsa, $g\overset{N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim}h$ elde edilir.

Teorem 4.2.11. f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde,

a. Eğer $g\overset{N_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ ise, $g\overset{N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim}h$ dir.

b. Eğer $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}>0$ ise, o zaman $g\overset{N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim}h$ ise $g\overset{N_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ dir.

İspat. a. $g\overset{N_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim}h$ olsun. Modülüs fonksiyonu sürekli olduğundan, verilen bir $\varepsilon>0$ sayısı için, $0<\delta<1$ olacak şekilde bir δ sayısı seçilebilir öyle ki $0\leq t\leq\delta$ koşunu sağlayan her t için $f(t)<\varepsilon$ olur. Buradan Lemma 2.1.4.2 kullanılarak,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}}f\left(\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\right)\Delta s$$

$$=\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\substack{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\\ \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\leq\delta}}f\left(\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\right)\Delta s+\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\substack{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\\ \left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|>\delta}}f\left(\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\right)\Delta s$$

$$\leq\varepsilon+2f(1)\delta^{-1}\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\int_{\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}}\left|\frac{g(s)}{h(s)}-L\right|\Delta s$$

yazılabilir. Burada $r\to\infty$ iken, $g\overset{N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim}h$ elde edilir.

b. $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \beta > 0$ ve $g \overset{N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$ olsun. $\beta > 0$ olduğundan, her $t \geq 0$ için $f(t) \geq \beta t$ olur. Böylece

$$\beta^{-1} \frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}} f\left(\left|\frac{g(s)}{h(s)} - L\right|\right) \Delta s \geq \frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \int_{\left(k_{r-1}, k_r\right]_{\mathbb{T}}} \left|\frac{g(s)}{h(s)} - L\right| \Delta s$$

olur. Burada $r \to \infty$ iken limit durumuna geçilip, $g \overset{N_{\theta-\mathbb{T}}^{f}(L)}{\sim} h$ olduğu kullanılırsa $g \overset{N_{\theta-\mathbb{T}}(L)}{\sim} h$ elde edilir.

BÖLÜM 5. ZAMAN SKALASI ÜZERİNDE LACUNARY İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

Bu kısımda zaman skalası üzerinde tanımlı Δ-ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar için lacunary istatistiksel sınırlılık tanımı verilecektir. Sonrasında ise bu kavramla ilgili bazı sonuçlar incelenecek ve istatistiksel sınırlılık ile arasındaki ilişki sunulacaktır.

Tanım 5.1. $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}=0,$$

başka bir deyişle,

$$\left|g(s)\right|\le M \quad (h.h._{\theta-\mathbb{T}}\ s \text{ için})$$

olacak şekilde bir $M>0$ sayısı varsa, g fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde lacunary istatistiksel sınırlıdır denir. $\mathbb{T}$ üzerindeki lacunary istatistiksel sınırlı fonksiyonların kümesi $S_{\theta-\mathbb{T}}(B)$ ile gösterilir.

Uyarı 5.2.

a. Eğer Tanım 5.1 de $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ alınırsa, zaman skalası üzerindeki lacunary istatistiksel sınırlılık kavramı, [20] de diziler için verilen lacunary istatistiksel sınırlılık kavramına indirgenir.

b. Eğer $\mathbb{T}=[a,\infty)$ $(a>1)$ seçilirse, bu durumda zaman skalası üzerindeki lacunary istatistiksel sınırlılık kavramı, [40] da Lebesque ölçülebilir fonksiyonlar için tanıtılan lacunary istatistiksel sınırlılık kavramına indirgenir.

Teorem 5.3. Zaman skalası üzerindeki her lacunary istatistiksel yakınsak fonksiyon lacunary istatistiksel sınırlıdır. Fakat tersinin doğru olması gerekmez.

İspat. $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu M sayısına lacunary istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda her bir $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-M\right|>\varepsilon\right\}\right)}{\mu_\Delta\left((k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}\right)}=0$$

dir. Buradan

$$\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>\varepsilon+M\right\}\subseteq\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)-M\right|>\varepsilon\right\}$$

kapsaması kullanılarak, $\left|g(s)\right|\leq M$ $(h.h._{\theta-\mathbb{T}}\ s$ için) elde edilir ki, bu da istenen sonuçtur. Tersi için, $s\in\mathbb{T}=\mathbb{N}$ olmak üzere, $g(s)=(-1)^s$ ile tanımlanan fonksiyon lacunary istatistiksel sınırlıdır ve fakat lacunary istatistiksel yakınsak değildir.

Teorem 5.4. $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, Δ-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda g fonksiyonunun lacunary istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şart $h.h._{\theta-\mathbb{T}}\ s$ için $g(s)=h(s)$ olacak şekilde sınırlı bir $h:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun olmasıdır.

İspat. g fonksiyonu lacunary istatistiksel sınırlı olsun. Bu durumda, $K=\{s\in\mathbb{T}:|g(s)|>M\}$ olmak üzere, $\delta_{\theta-\mathbb{T}}(K)=0$ olacak şekilde bir $M\geq 0$ sayısı vardır. $h:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$h(s)=\begin{cases} g(s), & s\notin K \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. h fonksiyonunun Δ-ölçülebilir sınırlı bir fonksiyon olduğu ve $h.h._{\theta-\mathbb{T}}$ s için $h(s)=g(s)$ olduğu açıktır. Tersine, h fonksiyonu sınırlı olsun. Bu takdirde her $s\in\mathbb{T}$ için $|h(s)|\leq L$ olacak şekilde bir $L\geq 0$ sayısı vardır. $D=\{s\in\mathbb{T}:g(s)\neq h(s)\}$ olsun. $\delta_{\theta-\mathbb{T}}(D)=0$ olduğundan, $h.h._{\theta-\mathbb{T}}$ s için $|g(s)|\leq L$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.5. $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda,

$$S_{\mathbb{T}}(B)\subset S_{\theta-\mathbb{T}}(B)\Leftrightarrow \liminf_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}>1$$

dir.

İspat. Yeterlilik. $\liminf_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}>1$ olsun. Bu takdirde yeterince büyük r ler için $\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}\geq 1+\delta$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Buradan $\frac{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})}{\sigma(k_r)}\geq\frac{\delta}{1+\delta}$ bulunur. Şimdi $g\in S_{\mathbb{T}}(B)$ olsun. Böylece, bir $M>0$ sayısı için

$$\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in[t_0,k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)}{\mu_\Delta\left([t_0,k_r]_{\mathbb{T}}\right)}$$

$$\geq\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)}{\sigma(k_r)-t_0}$$

$$\geq\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)}{\sigma(k_r)}$$

$$\geq\frac{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})}{\sigma(k_r)}\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)}{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})}$$

$$\geq\frac{\delta}{1+\delta}\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in(k_{r-1},k_r]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)}{\sigma(k_r)-\sigma(k_{r-1})}$$

yazılabilir. Burada $r\to\infty$ iken limit durumuna geçilirse $g\in S_{\theta-\mathbb{T}}(B)$ bulunur ve ispat tamamlanır.

Gereklilik. Tersine, $\liminf\limits_{r\to\infty}\dfrac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}=1$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda [48] de olduğu gibi $\theta=(k_r)$ lacunary dizisinin bir $\left(k_{r(j)}\right)$ alt dizisi seçilsin öyle ki $r(j)>r(j-1)+1$ olmak üzere,

$$\frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-t_0}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0}<1+\frac{1}{j}\text{ ve }\frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0}{\sigma\left(k_{r(j-1)}\right)-t_0}>j$$

koşulları sağlansın. Şimdi Δ-ölçülebilir bir $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(s)=\begin{cases}s, & s\in\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\quad (\text{j=1,2,3,}\dots\text{ için});\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda herhangi bir $M>0$ sayısı için, $k_{r(j_0)-1}>M$ olacak şekilde bir $j_0\in\mathbb{N}$ vardır. Eğer $r=r(j)$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j_0)-1},k_{r(j_0)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r(j_0)-1},k_{r(j_0)}\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)\\&\qquad\geq\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j_0)-1},k_{r(j_0)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r(j_0)-1},k_{r(j_0)}\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>k_{r(j_0)-1}\right\}\right)=1\end{aligned}$$

dir. Buradan her $j\geq j_0$ için

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)=1$$

elde edilir.

Eğer $r\neq r(j)$ ise,

$$\frac{\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}=0$$

dir. Böylece $g\notin S_{\theta-\mathbb{T}}(B)$ elde edilir.

Diğer taraftan, yeterince büyük $t\in\mathbb{T}$ ler için, $k_{r(j)-1}<t\leq k_{r(j+1)-1}$ olacak şekilde bir tek $j\in\mathbb{N}$ bulunabilir. Buradan

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left[t_0,t\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>\frac{t_0}{2}\right\}\right)$$

$$\leq \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,k_{r(j)-1}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left[t_0,k_{r(j-1)}\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>\frac{t_0}{2}\right\}\right)$$

$$+\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,k_{r(j)-1}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>\frac{t_0}{2}\right\}\right)$$

$$=\frac{\sigma\left(k_{r(j-1)}\right)-t_0}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0}+\frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0}$$

$$\leq \frac{1}{j}+\frac{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-t_0}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-t_0}-1$$

$$<\frac{1}{j}+\frac{1}{j}=\frac{2}{j}$$

yazılabilir. $t\to\infty$ iken $j\to\infty$ olduğundan, $g\in S_{\mathbb{T}}(B)$ elde edilir. Böylece, $S_{\mathbb{T}}(B)\not\subset S_{\theta-\mathbb{T}}(B)$ bulunur. Bu ise hipotezle çelişir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 5.6. Teorem 5.5 in gereklilik kısmının ispatında verilen $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu istatistiksel sınırlı ve fakat lacunary istatistiksel sınırlı olmayan bir fonksiyondur.

Teorem 5.7. $\theta=(k_r)$ dizisi $\mathbb{T}$ üzerinde bir lacunary dizisi olsun ve her $t\in\mathbb{T}$ için $\mu(t)\leq Kt$ olacak şekilde bir $K>0$ mevcut olsun. Bu durumda,

$$S_{\theta-\mathbb{T}}(B)\subset S_{\mathbb{T}}(B)\Leftrightarrow \limsup_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}<\infty$$

dir.

İspat. Yeterlilik. $\limsup_{r\to\infty} \dfrac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})} < \infty$ olsun. Bu durumda, $\limsup_{r\to\infty} \dfrac{\sigma(k_r)-t_0}{\sigma(k_{r-1})-t_0} < \infty$ olur ve buradan da her $r \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{\sigma(k_r)-t_0}{\sigma(k_{r-1})-t_0} \le H$ olacak şekilde bir $H>0$ vardır.

Şimdi $g \in S_{\theta-\mathbb{T}}(B)$ olsun. Bu durumda, en az bir $M>0$ sayısı için, $B_r := \mu_\Delta\left(\left\{s \in (k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}} : |g(s)| > M\right\}\right)$ olmak üzere $\lim_{r\to\infty} \dfrac{U_r}{\mu_\Delta\left((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}\right)} = 0$ dir. Böylece limit tanımından herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $r_0 = r_0(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır öyle ki her $r > r_0$ için $\dfrac{U_r}{\mu_\Delta\left((k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}\right)} < \varepsilon$ olur. Verilen bir $t \in \mathbb{T}$ için, t noktasını içeren bir $(k_{r-1}, k_r]_{\mathbb{T}}$ aralığı bulunabilir. $B = \max\left\{B_1, B_2, \ldots, B_{r_0}\right\}$ olmak üzere, yeterince büyük r ler için,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_\Delta\left([t_0, t]_{\mathbb{T}}\right)} \mu_\Delta\left(\left\{s \in [t_0, t]_{\mathbb{T}} : |g(s)| > M\right\}\right) \\
&\le \frac{1}{\mu_\Delta\left([t_0, k_{r-1}]_{\mathbb{T}}\right)} \mu_\Delta\left(\left\{s \in [t_0, k_r]_{\mathbb{T}} : |g(s)| > M\right\}\right) \\
&\le \frac{B_1 + B_2 + \ldots + B_{r_0} + B_{r_0+1} + \ldots + B_r}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \\
&\le \frac{r_0 B}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} + \frac{B_{r_0+1} + \ldots + B_r}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \\
&= \frac{r_0 B}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} + \frac{1}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \left\{ \frac{B_{r_0+1}}{\sigma(k_{r_0+1}) - \sigma(k_{r_0})} \left(\sigma(k_{r_0+1}) - \sigma(k_{r_0})\right) \right. \\
&\qquad \left. + \ldots + \frac{B_r}{\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})} \left(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})\right) \right\} \\
&\le \frac{r_0 B}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} + \frac{1}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \left(\varepsilon\left(\sigma(k_{r_0+1}) - \sigma(k_{r_0})\right) + \ldots + \varepsilon\left(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r-1})\right) \right) \\
&= \frac{r_0 B}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} + \frac{1}{\sigma(k_{r-1}) - t_0} \varepsilon\left(\sigma(k_r) - \sigma(k_{r_0})\right)
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{r_0 B}{\sigma(k_{r-1})-t_0}+\varepsilon\frac{\sigma(k_r)-t_0}{\sigma(k_{r-1})-t_0}$$

$$\leq \frac{r_0 B}{\sigma(k_{r-1})-t_0}+\varepsilon H$$

yazılabilir. Burada, $r\to\infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mu_\Delta\left([t_0,t]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in[t_0,t]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)=0$$

elde edilir. Yani, $g\in S_{\mathbb{T}}(B)$ dir.

Gereklilik. $S_{\theta-\mathbb{T}}(B)\subset S_{\mathbb{T}}(B)$ iken $\limsup_{r\to\infty}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}=\infty$ olsun. Hipotezden,

$$\frac{k_r}{\sigma(k_{r-1})}=\frac{k_r}{\sigma(k_r)}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}\geq\frac{1}{(K+1)}\frac{\sigma(k_r)}{\sigma(k_{r-1})}$$

dir ve buradan da

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{k_r}{\sigma(k_{r-1})}=\infty$$

elde edilir. $\theta=(k_r)$ lacunary dizisinin bir $\left(k_{r(j)}\right)$ alt dizisi seçilsin öyle ki

$$\frac{k_{r(j)}}{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}>j$$

eşitsizliği sağlansın. Şimdi Δ-ölçülebilir bir $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(s)=\begin{cases} s, & s\in\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}} \quad (\text{j=1,2,3,}\ldots); \\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

ile tanımlansın ve

$$\zeta_r=\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>\frac{t_0}{2}\right\}\right)$$

ile gösterilsin. Eğer $r\neq r(j)$ ise, $\zeta_r=0$ bulunur. Eğer $r=r(j)$ ise,

$$\begin{aligned}\zeta_r&=\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>\frac{t_0}{2}\right\}\right)\\ &=\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>\frac{t_0}{2}\right\}\right)\\ &=\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\in\mathbb{T}$ ve $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\notin\mathbb{T}$ olmak üzere iki durum söz konusudur. Eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\in\mathbb{T}$ ise

$$\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)=\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)$$

bulunur ve buradan da

$$\zeta_r=\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)}$$

$$= \frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}$$

$$\leq \frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{k_{r(j)}-\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)} < \frac{1}{j-1} \to 0 \quad \left(j \to \infty \text{ iken}\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) \notin \mathbb{T}$ ise, $\alpha_j := \max\left\{s \in \mathbb{T} : s < 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right\}$ olmak üzere,

$$\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}} = \left(k_{r(j)-1}, \alpha_j\right]_{\mathbb{T}}$$

ve

$$\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right) = \mu_{\Delta}\left(\left(k_{r(j)-1}, \alpha_j\right]_{\mathbb{T}}\right) \leq (2K+1)\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)$$

olduğu yukarıda gösterilmişti. Böylece,

$$\zeta_r = \frac{\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_{\Delta}\left(\left(k_{r(j)-1}, k_{r(j)}\right]_{\mathbb{T}}\right)} \leq \frac{(2K+1)\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(k_{r(j)}\right)-\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)} < \frac{2K+1}{j-1} \to 0 \quad \left(j \to \infty \text{ iken}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak her iki durumda da $g \in S_{\theta-\mathbb{T}}\left(B\right)$ olur.

Diğer yandan, herhangi bir $M > 0$ sayısı için bir $j_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $j \geq j_0$ için $k_{r(j)-1} > M$ dir. Bu takdirde, her $j \geq j_0$ için

$$\frac{1}{\mu_{\Delta}\left(\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)} \mu_{\Delta}\left(\left\{s \in \left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)\right| > M\right\}\right)$$

$$\geq \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)} \mu_\Delta\left(\left\{s \in \left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}} : \left|g(s)\right| > k_{r(j)-1}\right\}\right)$$

$$= \frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)}$$

yazılabilir. Eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) \in \mathbb{T}$ ise,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)} \mu_\Delta\left(\left\{s \in \left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)\right| > M\right\}\right)$$

$$= \frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)}$$

$$= \frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\sigma\left(2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right) - t_0}$$

$$\geq \frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{2(K+1)\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{2(K+1)}$$

elde edilir. Eğer $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) \notin \mathbb{T}$ ise, $\alpha_j := \max\left\{s \in \mathbb{T} : s < 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right\}$ ve $\beta_j := \min\left\{s \in \mathbb{T} : s > 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right\}$ olmak üzere,

$$\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1}, 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right) = \mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1}, \beta_j\right)_{\mathbb{T}}\right) = \beta_j - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)$$

$$\geq 2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right) - \sigma\left(k_{r(j)-1}\right)$$

ve

$$\mu_\Delta\left(\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)=\mu_\Delta\left(\left[t_0,\alpha_j\right]_{\mathbb{T}}\right)=\sigma\left(\alpha_j\right)-t_0\geq\sigma\left(\alpha_j\right)\geq\left(K+1\right)\alpha_j$$

bulunur. Buradan $2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\notin\mathbb{T}$ ise,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}:\left|g\left(s\right)\right|>M\right\}\right)\\
&\qquad=\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)\right]_{\mathbb{T}}\right)}\\
&\qquad=\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r(j)-1},\beta_j\right)_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left[t_0,\alpha_j\right]_{\mathbb{T}}\right)}\\
&\qquad\geq\frac{2\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)-\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{\left(K+1\right)\alpha_j}\\
&\qquad\geq\frac{\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}{2\left(K+1\right)\sigma\left(k_{r(j)-1}\right)}\\
&\qquad=\frac{1}{2\left(K+1\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $g\notin S_{\mathbb{T}}\left(B\right)$ olur. Böylece $S_{\theta-\mathbb{T}}\left(B\right)\not\subset S_{\mathbb{T}}\left(B\right)$ bulunur. Bu ise hipotezle çelişir.

Uyarı 5.8. Teorem 5.7 nin gereklilik kısmının ispatında verilen $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu lacunary istatistiksel sınırlı ve fakat istatistiksel sınırlı olmayan bir fonksiyondur.

Teorem 5.9. $\theta=\left(k_r\right)$ ve $\theta'=\left(l_r\right)$, $\mathbb{T}$ üzerinde iki lacunary dizisi olsun öyle ki her $r\in\mathbb{N}$ için $\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\subset\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}$ olsun. Bu takdirde,

a. Eğer $\liminf_{r\to\infty} \frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} > 0$ ise, $S_{\theta'-\mathbb{T}}(B) \subseteq S_{\theta-\mathbb{T}}(B)$ dir.

b. Eğer $\lim_{r\to\infty} \frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} = 1$ ise, $S_{\theta-\mathbb{T}}(B) \subseteq S_{\theta'-\mathbb{T}}(B)$ dir.

İspat. a. $\liminf_{r\to\infty} \frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} > 0$ olsun. Hipotezden, herhangi bir $M > 0$ sayısı ve her $r \in \mathbb{N}$ için,

$$\left\{s \in \left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)\right| > M\right\} \subseteq \left\{s \in \left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)\right| > M\right\}$$

kapsaması sağlanır. Buradan

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \mu_\Delta\left(\left\{s \in \left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)\right| > M\right\}\right)$$
$$\leq \frac{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \left\{s \in \left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)\right| > M\right\}$$

elde edilir. Burada $r \to \infty$ iken limit alınır ve $\liminf_{r\to\infty} \frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} > 0$ olduğu kullanılırsa, $S_{\theta'-\mathbb{T}}(B) \subseteq S_{\theta-\mathbb{T}}(B)$ elde edilir.

b. $\lim_{r\to\infty} \frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} = 1$ olsun. Herhangi bir $M > 0$ sayısı için,

$$\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \mu_\Delta\left(\left\{s \in \left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)\right| > M\right\}\right)$$
$$= \frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)} \mu_\Delta\left(\left\{s \in \left(l_{r-1},k_{r-1}\right]_{\mathbb{T}} : \left|g(s)\right| > M\right\}\right)$$

$$+\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)$$

$$+\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_r,l_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)$$

$$\leq\frac{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},k_{r-1}\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}+\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)+\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_r,l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}$$

$$=\frac{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)-\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}+\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)$$

$$\leq\left(1-\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\right)+\frac{1}{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}\mu_\Delta\left(\left\{s\in\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}:\left|g(s)\right|>M\right\}\right)$$

yazılabilir. Burada $r\to\infty$ iken limit durumuna geçilir ve $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\mu_\Delta\left(\left(k_{r-1},k_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}{\mu_\Delta\left(\left(l_{r-1},l_r\right]_{\mathbb{T}}\right)}=1$ olduğu kullanılırsa, $g\in S_{\theta-\mathbb{T}}(B)$ iken $g\in S_{\theta'-\mathbb{T}}(B)$ elde edilir. Bunun anlamı $S_{\theta-\mathbb{T}}(B)\subseteq S_{\theta'-\mathbb{T}}(B)$ dir ve böylece ispat tamamlanır.

BÖLÜM 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, ilk olarak zaman skalası üzerinde yeni yakınsaklık çeşitleri tanıtılmış ve bu kavramların bazı özel durumlarda literatürde var olan hangi kavramlara indirgendiği gösterilmiştir. Ayrıca bu kavramlarla ilgili bazı sonuç ve kapsama bağıntıları verilmiştir.

İkinci olarak, sayı dizileri için literatürde var olan asimptotik istatistiksel denklik, asimptotik lacunary istatistiksel denklik ve kuvvetli asimptotik lacunary denklik kavramları zaman skalası üzerine taşınmıştır. Bu doğrultuda zaman skalası üzerinde tanımlı pozitif reel değerli delta ölçülebilir iki fonksiyon göz önüne alınarak, asimptotik istatistiksel denk fonksiyonlar, asimptotik lacunary istatistiksel denk fonksiyonlar ve kuvvetli asimptotik lacunary denk fonksiyonlar tanımlanmıştır. Buna ek olarak, modülüs fonksiyonları kullanılarak bu kavramlar daha da genişletilmiştir.

Son olarak da zaman skalası üzerinde lacunary istatistiksel sınırlılık kavramı tanıtılmıştır. Ayrıca, zaman skalası üzerindeki her lacunary istatistiksel yakınsak fonksiyonun lacunary istatistiksel sınırlı olduğu ispat edilmiş ve bunun tersinin doğru olmadığı durum bir örnekle ifade edilmiştir. Bunun yanı sıra, zaman skalası üzerinde lacunary istatistiksel sınırlılık ve istatistiksel sınırlılık kavramları arasındaki ilişkiler sunulmuştur.

Bu tez kapsamında yapılan çalışmaların, toplanabilme teorisinde sayı dizileri ve Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar için ayrı ayrı verilmiş bazı kavramları tek bir çatı altında toplama düşüncesine katkı sağlayacağı inanılarak, toplanabilme teorisinde var olan bazı kavramların genelleştirilerek zaman skalası üzerine taşınması öneri olarak sunulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Zygmund, A., Trigonometric series. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.

[2] Fast, H., Sur la convergence statistique. Colloq. Math., 2, 241–244, 1951.

[3] Steinhaus, H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. Colloq. Math., 2(1), 73–74, 1951.

[4] Schoenberg, I.J., The integrability of certain functions and related summability methods. Amer. Math. Monthly, 66, 361–375, 1959.

[5] Borwein, D., Linear functionals with strong Cesàro summability. J. Lond. Math. Soc., 40, 628–634, 1965.

[6] Freedman, A. R., Sember, J. J., Raphael, M., Some Cesàro-type summability spaces. Proc. Lond. Math. Soc., 37(3), 508–520, 1978.

[7] Fridy, J. A., On statistical convergence. Analysis, 5, 301–313, 1985.

[8] Fridy, J. A., Orhan, C., Lacunary statistical convergence. Pacific J. Math., 160, 43–51, 1993.

[9] Fridy, J. A., Orhan, C., Statistical limit superior and limit inferior. Proc. Amer. Math. Soc., 125(12), 3625–3631, 1997.

[10] Connor, J. S., The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences. Analysis, 8, 47–63, 1988.

[11] Connor, J. S., On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. Canad. Math. Bull., 32, 194–198, 1989.

[12] Mursaleen, M., λ-statistical convergence. Math. Slovaca, 50(1), 111–115, 2000.

[13] Móricz, F., Statistical limits of measurable functions. Analysis, 24(1), 1–18, 2004.

[14] Tripathy, B. C., On statistically convergent and statistically bounded sequences. Bull. Malays. Math. Soc., 20(1), 31–33, 1997.

[15] Belen, C, Mohiuddine, S. A., Generalized weighted statistical convergence and application. Appl. Math. Comput., 219(18), 9821–9826, 2013.

[16] Nuray, F., Aydin, B., Strongly summable and statistically convergent functions. Inform. Technol. Valdymas, 1(30), 74–76, 2004.

[17] Nuray, F., λ-strongly summable and λ-statistically convergent functions. Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci., 34(4), 335–338, 2010.

[18] Aktuglu, H., Korovkin type approximation theorems proved via $\alpha\beta$-statistical convergence. J. Comput. Appl. Math., 259, 174–181, 2014.

[19] Bhardwaj, V. K., Gupta, S., On some generalizations of statistical boundedness. J. Inequal. Appl., 2014(1), 1–11, 2014.

[20] Bhardwaj, V. K., Gupta, S., Mohiuddine, S. A., Kılıçman, A., On lacunary statistical boundedness. J. Inequal. Appl., 2014(1), 1–11, 2014.

[21] Et, M, Mohiuddine, S. A., Şengül, H., On lacunary statistical boundedness of order α. Facta Univ. Ser. Math. Inform., 31(3), 707–716, 2016.

[22] Srivastava, H. M., Et, M., Lacunary statistical convergence and strongly lacunary summable functions of order α. Filomat, 31(6), 1573–1582, 2017.

[23] Nakano, H., Concave modulars. J. Math. Soc. Japan, 5, 29–49, 1953.

[24] Ruckle, W. H., FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded. Can. J. Math., 25, 973–978, 1973.

[25] Maddox, I. J., Sequence spaces defined by a modulus. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 100(1), 161–166, 1986.

[26] Maddox, I. J., Inclusions between FK spaces and Kuttner's theorem. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 101(3), 523–527, 1987.

[27] Aizpuru, A., Listan-Garcia, M. C., Rambla-Barreno, F., Density by moduli and statistical convergence. Quaestiones Mathematicae, 37(4), 525–530, 2014.

[28] Bhardwaj, V. K., Dhawan, S., f-statistical convergence of order α and strong Cesàro summability of order α with respect to a modulus. J. Ineq. Appl., 2015(332), 2015.

[29] Bhardwaj, V. K., Dhawan, S., Density by moduli and lacunary statistical convergence. Abstr. Appl. Anal., 2016, 2016.

[30] Pobyvanets, I. P., Asymptotic equivalence of some linear transformation defined by a non-negative matrix and reduced to generalized equivalence in the sense of Cesàro and Abel. Math. Fiz., 28(123), 83–87, 1980.

[31] Fridy, J. A., Minimal rates of summability. Canad. J. Math., 30(4), 808–816, 1978.

[32] Marouf, M., Asymptotic equivalence and summability. Internat. J. Math. Math. Sci., 16, 755–762, 1993.

[33] Patterson, R. F., On asymptotically statistical equivalent sequences. Demonstratio Math., 36(1), 149–153, 2003.

[34] Patterson, R. F., Savas, E., On asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. Thai J. Math., 4, 267–272, 2006.

[35] Basarir, M., Altundag, S., On Δ-lacunary statistical asymptotically equivalent sequences. Filomat, 22(1), 161–172, 2008.

[36] Basarir, M., Altundag, S., On asymptotically equivalent difference sequences with respect to a modulus function. Ricerche di matematica, 60(2), 299–311, 2011.

[37] Kosar, C., Kucukaslan, M., Et, M., On asymptotically deferred statistical equivalence of sequences. Filomat, 31(16), 5139–5150, 2017.

[38] Savas, E., On asymptotically lacunary statistical equivalent functions via ideals. J. Math. Computer Sci., 19, 35–40, 2019.

[39] Konca, S., Kucukaslan, M., On asymptotically f-statistical equivalent sequences. J. Indonesian Math. Soc., 24(2), 54–61, 2018.

[40] Savaş, R., Lacunary statistical boundedness of measurable functions. Math. Nat. Sci., 6, 15–19, 2020.

[41] Hilger, S., Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus. Results Math., 18(1-2), 18–56, 1990.

[42] Bohner, M., Peterson, A., Dynamic equations on time scales: An introduction with applications. Birkhäuser, Boston, 2001.

[43] Guseinov, G. S., Integration on time scales. J. Math. Anal. Appl., 285(1), 107–127, 2003.

[44] Cabada, A., Vivero, D. R., Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral: Application to the calculus of Δ-antiderivatives. Math. Comput. Model., 43(1-2), 194–207, 2006.

[45] Seyyidoglu, M. S., Tan, N. O., A note on statistical convergence on time scale. J. Inequal. Appl., 2012(1), 219, 2012.

[46] Turan, C., Duman, O., Statistical convergence on time scales and its characterizations. Springer Proc. Math. Stat., 41, 57–71, 2013.

[47] Turan, C., Duman, O., Convergence methods on time scales. AIP Conf. Proc., 1558(1), 1120-1123, 2013.

[48] Turan, C., Duman, O., Fundamental properties of statistical convergence and lacunary statistical convergence on time scales. Filomat, 31(14), 4455–4467, 2017.

[49] Altin, Y., Koyunbakan, H., Yilmaz, E., Uniform statistical convergence on time scales. J. Appl. Math., 2014, 2014.

[50] Yilmaz, E., Altin, Y., Koyunbakan, H., λ-statistical convergence on time scales. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal., 23(1), 69–78, 2016.

[51] Seyyidoglu, M. S., Tan, N. O., On a generalization of statistical cluster and limit points. Adv. Differ. Equ., 2015(55), 2015.

[52] Altin, Y., Er, B. N., Yilmaz, E., Δ_λ-statistical boundedness on time scales. Communications in Statistics-Theory and Methods, 50(3), 738–746, 2021.

[53] Turan, N., Basarir, M., On the Δ_g-statistical convergence of the function defined time scale. AIP Conference Proceedings, 2183, 040017, 2019. https://doi.org/10.1063/1.5136137.

[54] Sozbir, B., Altundag, S., Weighted statistical convergence on time scale, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal., 26(2), 137–143, 2019.

[55] Sozbir, B., Altundag, S., $\alpha\beta$-statistical convergence on time scales. Facta Univ. Ser. Math. Inform., 35(1), 141–150, 2020.

[56] Sozbir, B., Altundag, S., Basarir, M., On the (Delta, f)-lacunary statistical convergence of the functions. Maltepe Journal of Mathematics, 2(1), 1–8, 2020.

[57] Sozbir, B., Altundag, S., Asymptotically lacunary statistical equivalent functions on time scales. Proceeding Book of ICRAPAM (2020), 84–90, 2020.

[58] Sözbir, B., Altundağ, S., On asymptotically statistical equivalent functions on time scales. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2021. doi: 10.1002/mma.7587.

[59] Sözbir, B., Altundağ, S., Lacunary statistical boundedness on time scales. Adv. Differ. Equ., 513 (2021), 2021. https://doi.org/10.1186/s13662-021-03656-7.

[60] Li, J., Asymptotic equivalence of sequences and summability. Internat. J. Math. & Math. Sci., 20 (4), 749–758, 1997.

[61] Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L., An introduction to the theory of numbers. Fifth Ed., John Wiley & Sons, New York, 1991.

[62] Rath, D., Tripathy, B. C., On statistically convergent and statistically Cauchy sequences. Indian J. Pure Appl. Math., 25, 381–386, 1994.

[63] Šalát, T., On statistically convergent sequences of real numbers. Math. Slovaca, 30, 139–150, 1980.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Bayram SÖZBİR

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Yılı**
Doktora	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik	Devam ediyor
Yüksek Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik	2015
Lisans	İstanbul Üniversitesi / Fen Fakültesi / Matematik	2012
Lise	Darıca Neşet Yalçın Anadolu Lisesi	2008

YABANCI DİL

İngilizce