YENİDEN ÇÖZÜLEBİLİR DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLAR

[1]Hülya BAYRAK [2]Nermin AVŞAR
[1]Gazi Üniversitesi, Fen – Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Beşevler, Ankara, Türkiye
[2]Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trafik Planlaması ve Uygulaması ABD, Maltepe, Ankara, Türkiye.
[1]hbayrak@gazi.edu.tr, [2]navsar@gazi.edu.tr.

ÖZET

Bir (v,k,λ) *dengeli tamamlanmamış blok tasarımı (DTBT),* v *elemanlarının* k *elemanlı blokladaki bir düzenidir. Burada, her eleman çifti* λ *blokta içerilir.* $(v,k,1)-$*DTBT'yi, eğer bloklar* v/k *karşılıklı ayrık bloklardan oluşan* $(v-1)/(k-1)$ *ailelerine bölünebiliyorsa yeniden çözülebilir olarak adlandırılır. Bu çalışmada Tasarım Teorisinde önemli yeri olan çözülebilir tasarımlar üzerinde durulmuştur.*

Anahtar kelimeler: *Dengeli tamamlanmamış blok tasarımı, yeniden çözülebilir tasarım, afin dengeli tamamlanmamış blok tasarımı, hadamard matris.*

RESOLVABLE BALANCED INCOMPLETE BLOCK DESIGNS

ABSTRACT

A balanced incomplete block design (v,k,λ)*-BIBD is an arrangement of* v *elements in blocks of* k *elements each, such that every pair of elements is contained in exactly* λ *blocks. A* $(v,k,1)-$*BIBD is called resolvable if the blocks can be petitioned into* $(v-1)/(k-1)$ *families each consisting of* v/k *mutually disjoint blocks. In this study solvable designs that have an importance into the design theory have been emphasized.*

Key words*: Balanced incomplete block design, resolvable design, affine balanced incomplete block design, hadamard matrix.*

1. GİRİŞ

Tasarım teorisinin temel sorusu, verilen parametrelerle tasarımın var olup olmadığıdır. Bununla ilgili var olma sonuçları kadar var olmama sonuçları da mevcuttur.

Sonlu projektif ve afin geometriler, eğer boyut en azından üç ise çeşitli yollardan özel tasarımlar gibi yorumlanabilir. O nedenle kombinatöryel yapıların analizi için olan metodlar bu geometrileri çalışmak için de kullanılabilir.

Furino, Miao ve Yin çözülebilir DTBT ve ilişkili tasarımlar üzerine bir çalışma yapmıştır [1].

$\lambda = 2$ ve $k = 5$ olmak üzere v noktalarındaki bir yeniden çözülebilir DTBT'in varlığı için önemli bir koşul $v \equiv 5(\mathrm{mod}\,10)$ dır [2].

Shrikhande ve Raghavarao yeniden çözülebilirlik kavramını α -yeniden çözülebilirliğe genellemişlerdir [3].

Shrikhande afin çözülebilir tasarımlar üzerine çalışmıştır [4].

Bose tarafından dengeli tamamlanmamış blok tasarımları için geliştirilen yeniden çözülebilirlik ve afin yeniden çözülebilirlik kavramlarıyla ilişkili olan ikili dengeli tasarımları Ionin ve Shrikhande tarafından çalışılmıştır [5]. Bu çalışmada, dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarından başka, afin yeniden çözülebilir ikili dengeli tasarımların sunabileceği ilginç düzenli bir yapıyı gösteren bazı örnekler yer almaktadır.

2. YENİDEN ÇÖZÜLEBİLİR DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARI

Noktalar yada işlemler olarak adlandırılan $v \geq 2$ elemanlarının bir seti X ve blok olarak adlandırılan X 'in alt setlerinin koleksiyonu $b > 0$ olan "Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları" aşağıdaki koşulları sağlar.

Her blok k nokta içerir, $v > k > 0$
Her nokta r blokta gözükür, $r > 0$

Noktaların her çifti aynı zamanda λ blokta gözükür, $\lambda > 0$ [6].

Bir başka ifade ile X 'in alt setlerinin koleksiyonu A, blok olmak üzere; (X, A) çifti bir $(v, k, \lambda) -$ DTBT dir. (X, A)'da bir paralel sınıf A'daki ayrık blokların alt setidir. A'nın r paralel sınıflarına parçalanması "yeniden çözülebilirlik" olarak adlandırılır. Eğer A'nın en azından bir yeniden çözülebilirliği varsa (X, A)'nın yeniden çözülebilir olduğu söylenir.

(X, A) çifti bir $(v, k, \lambda) -$ DTBT ve $A_1 \subseteq A$ olsun. Herhangi bir $x \in X$ için eğer x, A_1'in kesin olarak tek bir bloğunda görülürse, A_1'e DTBT'nin bir paralel sınıfıdır denilir. Eğer A, ayrık paralel sınıflara parçalanabilirse, DTBT yeniden çözülebilirdir ve $(v, k, \lambda) -$ YÇDTBT olarak gösterilebilir. Eğer bir $(v, k, \lambda) -$ YÇDTBT mevcut ise; $v \equiv 0 (\mathrm{mod}\, k), \lambda(v-1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, k-1)$ dır [7].

Bir paralel sınıfın v/k blok içerdiği bilinir. Ayrıca DTBT yalnızca $v \equiv 0 \bmod k$ ise bir paralel sınıfa sahip olabilir.

Yeniden çözülebilir $(v, k, \lambda) -$ DTBT'lerin geometrik yapıları ile ilgili olarak koset kavramına ihtiyaç vardır. (H, Δ) bir grup ve (G, Δ) de H'ın bir alt grubu olsun. $\alpha \in \mathrm{H}$ olmak üzere $\alpha \Delta \mathrm{G} = \{\alpha \Delta x \mid x \in \mathrm{G}\}$ setine G'nin H'daki bir *"Koset"* i denir.

Örnek 2.1.

Yeniden çözülebilir (6,2,1)-DTBT'nin paralel sınıfları aşağıdaki gibidir.

$$\Pi_0 = \{\{\infty,0\} \quad , \quad \{1,4\} \quad , \quad \{2,3\}\}$$
$$\Pi_1 = \{\{\infty,1\} \quad , \quad \{2,0\} \quad , \quad \{3,4\}\}$$
$$\Pi_2 = \{\{\infty,2\} \quad , \quad \{3,1\} \quad , \quad \{4,0\}\}$$
$$\Pi_3 = \{\{\infty,3\} \quad , \quad \{4,2\} \quad , \quad \{0,1\}\}$$
$$\Pi_4 = \{\{\infty,4\} \quad , \quad \{0,3\} \quad , \quad \{1,2\}\}$$

Blokların paralel olması için gerek ve yeter koşul onların, aynı alt uzayın kosetleri olmasıdır. Eğer B, B' paralel olmayan bloklar ise $\mathrm{B} \cap \mathrm{B}'$; bir $(m-2)-$boyutlu alt uzayın kosetidir, q^{n-2} elemana sahiptir. Bu tasarım, F_q üzerinde $m-$ boyutlu afin uzayıdır. F_q, q mertebeden sonlu bir cisimdir.

q asal kuvvet olsun. $m \geq 2$ ve $X = (F_q)^m$ alınsın. $1 \leq d \leq m-1$ olsun. X'de d-flat, d boyuta sahip olan X'in alt uzayıdır ya da alt uzayın toplanır koset'idir Yani, X'in kendisi üzerinde m boyutlu vektör uzayıdır. X nokta seti ve $1 \leq d \leq m-1$ için X'in tüm d-flatlarının seti olmak üzere F_q üzerindeki m-boyutlu afin geometriyi meydana getirir. Bu da $AG_m(q)$ ile tanımlanır. $1 \leq d \leq m-1$ için $\begin{bmatrix} m \\ d \end{bmatrix}_q$ Gauss Katsayısı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} m \\ d \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \dfrac{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\cdots(q^{m-d+1}-1)}{(q^d-1)(q^{d-1}-1)\cdots(q-1)} & d \neq 0 \\ 1 & d = 0 \end{cases}$$

$AG_m(q)$ geometri çeşitli yeniden çözülebilir DTBT'leri verir.

Teorem 2.1.

q asal kuvvet ve $m \geq 2$, $1 \leq d \leq m-1$ olsun. X, $AG_m(q)$'da noktaların setini göstersin ve A, $AG_m(q)$'da bütün d-flatların setini göstersin. O zaman (X, A), parametreleri aşağıda verilen bir yeniden çözülebilir $(q^m, b, r, q^d, \lambda)-$DTBT dir [8].

$$b = q^{m-d}\begin{bmatrix} m \\ d \end{bmatrix}_q \quad , \quad r = \begin{bmatrix} m \\ d \end{bmatrix}_q \quad \text{ve} \quad \lambda = \begin{bmatrix} m-1 \\ d-1 \end{bmatrix}_q$$

Yukarıdaki yapı $d = 1$, $m = 2$ özel durumunda afin düzlemleri içerir. Afin düzlemde doğru $AG_m(q)$'da 1-flat gibi düşünülür. Eğer $d \geq 1$ ise verilen formda parametrelere sahip olan yeniden çözülebilir olmayan DTBT'leri vardır. Örneğin; (8,4,3)-DTBT mevcuttur fakat yeniden çözülebilir değildir.

3. AFİN DÜZLEMLERİN YENİDEN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Afin düzlemler, yeniden çözülebilir DTBT'lerinin ilginç örnekleridir. Her bir afin düzlemin yeniden çözülebilir olduğu yapılan çalışmalarla gösterilmiştir.

(P, ∂) çifti n. mertebeden afin düzleme ait nokta ve doğru kümesini göstersin. $L \in \partial$, $x \in P$ ve $x \notin L$ olsun. Bu takdirde $x \in M$ ve $L \cap M = \emptyset$ ve $M \in \partial$ olan bir blok kesinlikle vardır.

(P, ∂) n. mertebeden afin düzlem olsun. O zaman $\approx$ ile tanımlanan bir denklik ilişkisi mevcutur. Bu $\approx$'nın her bir denklik sınıfı (P, ∂)'da paralel sınıftır.

Teorem 3.1.

Her afin düzlem yeniden çözülebilirdir [8].

Fakat bu sonuç Teorem 2.1.'de verilen parametrelere sahip olan bütün tasarımlar için düşünülemez.

Örnek 3.1.

$q = 2$ alındığında $PG_3(2)$ ait noktalar, doğrular ve düzlemler Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1. $PG_3(2)$ 'nin noktaları ve uzayları

Noktalar:	0001 , 0010 , 0011 , 0100 , 0101 , 0110 , 0111 , 1000 , 1001 , 1010 , 1011 , 1100 , 1101 , 1110 , 1111
Doğrular:	0001 , 0010 , 0011 0010 , 0100 , 0110 0011 , 0101 , 0110 0001 , 0100 , 0101 0010 , 0101 , 0111 0011 , 1000 , 1011 0001 , 0110 , 0111 0010 , 1000 , 1010 0011 , 1001 , 1010 0001 , 1000 , 1001 0010 , 1001 , 1011 0011 , 1100 , 1111 0001 , 1010 , 1011 0010 , 1100 , 1110 0011 , 1101 , 1110 0001 , 1100 , 1101 0010 , 1101 , 1111 0100 , 1000 , 1100 0001 , 1110 , 1111 0011 , 0100 , 0111 0100 , 1001 , 1101 0100 , 1010 , 1110 0110 , 1001 , 1111 0100 , 1011 , 1111 0110 , 1010 , 1100 0101 , 1000 , 1101 0110 , 1011 , 1101 0101 , 1001 , 1100 0111 , 1000 , 1111 0101 , 1010 , 1111 0111 , 1001 , 1110 0101 , 1011 , 1110 0111 , 1010 , 1101 0110 , 1000 , 1110 0111 , 1011 , 1100
Düzlemler:	0001 , 0010 , 0011 , 0100 , 0101 , 0110 , 0111 0001 , 0010 , 0011 , 1000 , 1001 , 1010 , 1011 0001 , 0010 , 0011 , 1100 , 1101 , 1110 , 1111 0001 , 0100 , 0101 , 1000 , 1001 , 1100 , 1101 0001 , 0100 , 0101 , 1010 , 1011 , 1110 , 1111 0001 , 0110 , 0111 , 1000 , 1001 , 1110 , 1111 0001 , 0110 , 0111 , 1010 , 1011 , 1100 , 1101 0010 , 0100 , 0110 , 1000 , 1010 , 1100 , 1110 0010 , 0100 , 0110 , 1001 , 1011 , 1101 , 1111 0010 , 0101 , 0111 , 1000 , 1010 , 1101 , 1111 0010 , 0101 , 0111 , 1001 , 1011 , 1100 , 1110 0011 , 0100 , 0111 , 1000 , 1011 , 1100 , 1111 0011 , 0100 , 0111 , 1001 , 1010 , 1101 , 1110 0011 , 0101 , 0110 , 1000 , 1011 , 1101 , 1110 0011 , 0101 , 0110 , 1001 , 1010 , 1100 , 1111

$PG_3(2)$ ait düzlemler blokları, düzlemlerin üzerinde yer alan noktalar ise denemeleri ifade etmektedir.

Bose eşitsizliği, yeniden çözülebilir DTBT varlığı için gerekli koşulu sağlar. Eğer yeniden çözülebilir $(v,b,r,k,\lambda)-$DTBT mevcutsa, o zaman $b \geq v+r-1$ dir [9]. Bose 'un eşitsizliği durumunun alternatifi şöyle ifade edilir. $(v,b,r,k,\lambda)-$DTBT düşünülsün. Bu takdirde $b \geq v+r-1$ olması için gerek ve yeter koşul $r \geq k+\lambda$ olmasıdır. Eğer yeniden çözülebilir $(v,b,r,k,\lambda)-$DTBT mevcutsa, o zaman $r \geq k+\lambda$ dır.

Tanım 3.1.

$b = v+r-1$ (ya da eş değer olarak $r = k+\lambda$) parametreli bir yeniden çözülebilir DTBT bir afin yeniden çözülebilir DTBT olarak adlandırılır. $r = n+1 = k+\lambda$ olduğundan dolayı afin düzlemler afin yeniden çözülebilirdir. $d = m-1$ olduğunda Teorem 2.1. kullanılarak bir afin yeniden çözülebilir DTBT elde edilebilir ve aşağıdaki eşitlikleri yazmak mümkündür.

$$\frac{q^m-1}{q-1} = \begin{bmatrix} m \\ m-1 \end{bmatrix}_q = q^{m-1} + \begin{bmatrix} m-1 \\ m-2 \end{bmatrix}_q = q^{m-1} + \frac{q^{m-1}-1}{q-1}$$

Böylece şu sonuçlar verilebilir.

Sonuç 3.1.

q asal kuvvet ve $m \geq 2$ olsun. O zaman $\lambda = \dfrac{q^{m-1}-1}{q-1}$ olan afin yeniden çözülebilir $(q^m, q^{m-1}, \lambda)-$DTBT vardır [8].

Afin yeniden çözülebilir DTBT'nin bir sonsuz sınıfı Hadamard Matrislerinden türetilir. 4t mertebeden HM'in simetrik $(4t-1, 2t-1, t-1)-$DTBT'ye eşdeğerdir. Ayrıca 4t mertebeden HM mevcutsa, o zaman afin yeniden çözülebilir $(4t, 2t, 2t-1)-$DTBT mevcuttur [8].

Örnek 3.2.

$(4t-1\,,\,2t-1\,,t-1)-$DTBT, $t=2$ için (7,3,1)-DTBT'yi oluşturur. Burada elde edilen simetrik DTBT'nin 2.mertebeden projektif düzlem olduğuna dikkat edilmelidir. Aynı şekilde bu DTBT'nin blok tamamlayıcısının (7,4,2)-DTBT yani $(4t-1\,,\,2t-1\,,t-1)-$ parametrelerine sahip simetrik DTBT olduğu görülür.

$\infty \notin X$ olsun ve tanım, $X' = X \cup \{\infty\}$ dır. Her $\mathrm{A} \in A$ için $\mathrm{A}' = \mathrm{A} \cup \{\infty\}$ ve $A' = \{\mathrm{A}' : \mathrm{A} \in A\}$ tanımlansın. $(X', A' \cup B)$'nin bir afin yeniden çözülebilir $(4t\,,8t-2,4t-1,\,2t\,,2t-1)-$DTBT olduğunu görmek zor değildir. Burada her bir paralel sınıf iki blok ihtiva eder.

Simetrik DTBT'de her bir iki ayrı blok λ noktalarında kesişir.

Afin yeniden çözülebilir $(v,k,\lambda)-$DTBT'nin farklı paralel sınıflardan her iki blok kesinlikle k^2/v noktada kesişir [8].

Örneğin; yeniden çözülebilir (28,7,2)-DTBT $r=9$ ve $b=63$ parametrelerine sahip olabilir, çünkü $r=k+\lambda$ olduğu için yeniden çözülebilir (28,7,2)-DTBT, afin yeniden çözülebilirdir. Farklı paralel sınıflardan her bir iki blok k^2/v noktada kesişir. 7/4 tam sayı olmadığı için yeniden çözülebilir (28,7,2)-DTBT mevcut değildir, fakat yeniden çözülebilir olmayan (28,7,2)-DTBT'leri mevcuttur.

Afin yeniden çözülebilir DTBT'de $\mu = k^2/v$ bir tam sayı olmalıdır. Paralel sınıftaki blokların sayısı $\dfrac{v}{k} = \dfrac{k}{\mu}$ dür, bu durumda $k \equiv 0 \bmod \mu$ olmalıdır. Eğer $n = k/\mu$ alınırsa, o zaman $v = \dfrac{k^2}{\mu} = n^2\mu$ elde edilir. n ve μ terimleriyle λ aşağıdaki gibi elde edilir. $\lambda(v-1) = r(k-1)$ ve $r = k+\lambda$ olduğu için, $\lambda(v-1) = (k+\lambda)(k-1)$ bulunur. Böylece,

$\lambda(v-k)=k(k-1)$ dır. Gerekli düzeltmeler yapıldığında $\lambda=\dfrac{k(k-1)}{v-1}=\dfrac{n\mu(n\mu-1)}{n^2\mu-n\mu}=\dfrac{n\mu-1}{n-1}$ elde edilir.

Her afin yeniden çözülebilir DTBT $(n^2\mu\,,\,n\mu\,,\,\dfrac{n\mu-1}{n-1})-$ parametrelerine sahip olmalıdır ve tersine bu parametrelere sahip olan her yeniden çözülebilir $(n^2\mu\,,\,n\mu\,,\,\dfrac{n\mu-1}{n-1})-$DTBT afin yeniden çözülebilirdir. Bunun gibi DTBT'yi $(\,n,\mu)-$afin yeniden çözülebilir DTBT diye gösterilir. 4t mertebeden hadamard matris (HM) mevcutsa, o zaman afin yeniden çözülebilir $(4t\,,\,2t\,,2t-1)-$DTBT mevcuttur. Buna göre verilen tasarımlar $(\,2,m)-$afin yeniden çözülebilir DTBT'lerdir. Sonuç 3.1.'den bulunan $(\,q,q^{m-1})-$afin yeniden çözülebilir DTBT'lerdir.

Örnek 3.3.

4t mertebeden HM mevcut olsun, afin yeniden çözülebilir $(4t\,,\,2t\,,2t-1)-$DTBT vurguladığına göre $(4t\,,\,2t\,,\,2t-1)-$DTBT , $t=2$ için (8,4,3)-DTBT'nin afin yeniden çözülebilirdir ve DTBT $r=7\,,\,b=14$ parametrelerine sahiptir. $\mu=\dfrac{k^2}{v}=\dfrac{4^2}{8}=2$, $n=\dfrac{k}{\mu}=\dfrac{4}{2}=2$ ile bu tasarımın parametreleri $(n^2\mu,\quad n\mu,\quad \dfrac{n\mu-1}{n-1})$ biçimindedir. $(n,\mu)-$afin yeniden çözülebilir DTBT dir. Bu tasarıma ait işlemler ve bloklar aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 2. (8,4,3)-DTBT

İşlemler	Bloklar													
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}
1	X		X		X		X		X		X		X	
2	X		X			X		X	X			X		X
3	X			X	X			X		X	X			X
4	X			X		X	X			X		X	X	
5		X		X		X		X	X		X		X	
6		X		X	X		X		X			X		X
7		X	X			X	X			X	X			X
8		X	X		X			X		X		X	X	

(8,4,3)-DTBT'nin yedi paralel sınıfa sahip olduğu yukarıdaki tablodan görülebilir.

4. AFİN $\alpha -$ YENİDEN ÇÖZÜLEBİLİR TASARIMLAR

Tanım 4.1.

Farklı çözüm sınıflarından herhangi iki blok q_2 (q_2>0) noktada kesişiyorsa yeniden çözülebilir bir tasarım "afin yeniden çözülebilir" dir.

Her nokta (işlem) her sınıfta α defa görünecek şekilde blok kümeleri sınıflar içine bölünmüşse tasarım " $\alpha -$yeniden çözülebilir" dir. $\alpha -$yeniden çözülebilir bir DTBT'de; $v\alpha = \beta k$, $b = \beta c$, $r = c\alpha$ dır.

Herhangi iki blok aynı sınıfta q_1 noktada kesişiyorsa ve herhangi iki blok farklı sınıflarda q_2 (q_2>0) noktada kesişiyorsa, $\alpha -$yeniden çözülebilir bir tasarım "afin $\alpha -$yeniden çözülebilir" dir [10].

Örnek 4.1.

Çizelge 3'deki (9,3,1) tasarımı $q_2 = 1$ ile afin yeniden çözülebilirdir. Dikey çizgi sınıfları birbirinden ayırmaktadır, ayrıca her sınıf içindeki bir satır, bir bloğu tanımlar.

Çizelge 3. (9,3,1) tasarımı

1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 4 7 2 5 8 3 6 9	1 5 9 2 6 7 3 4 8	1 6 8 2 4 9 3 5 7

Teorem 4.1.

$\alpha -$yeniden çözülebilir bir DTBT'de $b \geq v + c - 1$ dir [11]. Bu eşitsizlik Bose (1942) tarafından bulunmuştur.

Afin $\alpha -$yeniden çözülebilir bir DTBT'de ; $q_1 = k(\alpha - 1)/(\beta - 1)$ ve $q_2 = k\alpha/\beta = k^2/v$ dür.

$\alpha -$yeniden çözülebilir bir DTBT'nin, afin $\alpha -$yeniden çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $b = v + c - 1$ olmasıdır.

Afin $\alpha -$yeniden çözülebilir bir DTBT'de ; $q_1 = k + \lambda - r$ dir [10].
Afin $\alpha -$yeniden çözülebilir tasarımlarda $x = k$, $y = q_1$, $z = q_2$ olarak alınan bir $\mathrm{M} = I_c \otimes \{(x - y)I_\beta + (y - z)J_\beta\} + z\ J_c \otimes J_\beta$ matrisi $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ matrisinin bulunmasında kullanılabilir. Buradaki $\otimes$, kronoker çarpımıdır ve boyutları farklı olan herhangi iki matrisi çarpmaya olanak sağlar. I_i, $i \times i$ boyutlu birim matris ve J_i, $i \times i$ boyutlu 1'lerden oluşan matristir.

Örnek 4.2.

Örnek 4.1'deki afin 1-yeniden çözülebilir (9,3,1) tasarımı için M matrisi şöyle olur:

$$x = k = 3\,, \quad y = q_1 = 0\,, \quad z = q_2 = 1\,, \quad c = 4\,, \quad \beta = 3$$

$$\mathrm{M} = I_4 \otimes \{(3-0)I_3 + (0-1)J_3\} + 1 \cdot J_4 \otimes J_3$$

$$= I_4 \otimes \{3I_3 - J_3\} + J_{12}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & & . & & & & & \\ . & & & . & & & & \\ . & & & & . & & & \\ . & & & & & . & & \\ . & & & & & & . & 1 \\ 1 & 1 & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}_{12\times 12}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}$$

(9,3,1) tasarımının isabet matrisi A aşağıdaki şekilde verilir.

$$
\mathrm{A}=\begin{bmatrix}
1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\
0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0
\end{bmatrix}
$$

Teorem 4.2.

Her pozitif n tam sayısı için $v=2n$, $b=n(2n-1)$, $r=2n-1$, $k=2$, $\lambda=1$ parametreli DTBT yeniden çözülebilirdir [10].

Örneğin; 12, 34, 13, 24, 14, 23 bloklarını sahip $(4,2,1)$ tasarımı düşünülsün. $n=2$ alınırsa bu tasarım, Teorem 4.2.'deki parametrelere uyduğu için yeniden çözülebilirdir. $v=4$, $b=6$, $r=3$, $k=2$, $\lambda=1$ Ayrıca bu tasarım, $q_2=1$ ile afin yeniden çözülebilirdir.

Bir afin yeniden çözülebilir $2-(v,k,\lambda)$ tasarımının var olduğu düşünülsün. Bu takdirde parametreleri $v'=(r+1)v$, $k'=kr$, $\lambda'=k\lambda$ olan simetrik bir $2-(v',k',\lambda')$ tasarımı olduğu gösterilmiştir [12]. Wallis, bunun için güçlü düzgün grafları (strongly regular graph- SRG) kullanmıştır.

Örneğin; (9,3,1) $(b=12$, $r=4$, $c=4)$ afin yeniden çözülebilir tasarımın varlığı, simetrik (45,12,3) tasarımının varlığını belirtir.

5. SONUÇ

Yeniden çözülebilir ve $\alpha-$yeniden çözülebilir tasarımların kullanımı Fisher ve Yates tarafından tartışılmıştır. Yeniden çözülebilirlik varsayımları geçerli ise o zaman yeniden çözülebilir bir tasarımın analizinin, rastgele tam blok tasarımı gibi işlem karşılaştırmaları için hatanın yansız tahminini verdiği Yates tarafından gösterilmiştir. Yeniden çözülebilir olmayan tamamlanmamış blok tasarımı rastgele tamamlanmış bloklardan daha az etkili olmasına rağmen, yeniden çözülebilir bir tasarım her zaman rastgele tamamlanmış bloklar kadar etkindir.

KAYNAKLAR

[1]. Furino, S., Miao Y., Yin J., *"Frames and Resolvable Designs: Uses, Constructions, and Existence"*, CRC Press, Boca Raton, 1996.

[2]. Julian, R., Abel, R., Ge, G., Greig, M., Zhu, L., "*Resolvable Balanced Incomplete Block Designs with Block Size 5*", J.Statistical Planning and Inference, 95, 49-65, 2001.

[3]. Shrikhande, S.S., Raghavarao, D., "*Affine* α*-Resolvable Incomplete Block Designs*", Pergamon Press, Oxford, 471-480, 1964.

[4]. Shrikhande, S.S., "*Afine Resolvable Balanced Incomplete Block Designs: A Survey*", Aequationes Math., 14, 251-269, 1976.

[5]. Ionin, Y.J., Shrikhande, M.S., "*Resolvable Pairwise Balanced Designs*", J. Statistical Planning and Inference, 72, 393-405, 1998.

[6]. Cherowitzo, W., "*Comb. Structures Notes on Block Designs*" (http://math.ucdenver.edu/~wcherowi/courses/m6406/m6406f.html), 2002.

[7]. Chang, Y., "*The Existence of Resolvable DTBT with k Even and* $\lambda = 1$", Discrete Math., 218, 9-23, 2000.

[8]. Stinson, D.R., "*Combinatorial Designs: Constructions and Analysis*", Springer-Verlag, New York, 27-29,73-98, 101-114, 2000.

[9]. Tonchev, V.D., "*Combinatorial Configuration Designs, Codes, Graphs*", Longman, London, 55-76, 1988.

[10].Street, A.P., Street, D.J., "*Combinatorics of Experimental Design*", Clarendon Press, Oxford, 1-12, 28-34, 164-173, 1987.

[11].Raghavarao, D., "*Construction and Combinatorial Problems in Design of Experiments*", John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.

[12].Wallis, W.D., "*Construction of Strongly Regular Graphs Using Afine Designs*", Bull. Austr. Math. Soc., 4, 41-49, 1971.