# CW TABANRIYLA VERİLEN SERBEST SİMPLİŞIL GRUPLARIN KULLANIMIYLA İKİNCİ MERTEBEDEN SİMPLİŞIL ÖRTÜLER

Ali MUTLU[1] Berrin MUTLU[2] Emel ÜNVER[1] Emine USLU[1],

[1]*Celal Bayar Üniversitesi Fen edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Muradiye Kampüsü 45030 Manisa/TÜRKİYE*

[2] *Hasan Türek Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni Manisa TÜRKİYE*

*E-posta: ali.mutlu@bayar.edu.tr*

***ÖZET***

*Bilinen teori simplişıl uzayın, temel gruplarının simplişıl gruplar üzerindeki etkilerinin kategorileri ve bir simplişıl uzayın simplişıl kategorisi arasındaki denkliği sunar. Bir serbest simplişıl uzayın serbest simplişıl örtü dönüşümlerinin kategorisi ve uzayın temel serbest simplişıl grubu üzerindeki etkilerinin serbest simplişıl kategoriler arasındaki bir denkliğini verir. CW-tabanlarıyla serbest simplişıl Galois teorisinin bir sonucu olarak CW-tabanlarıyla verilen serbest simplişıl gruplar için ikinci boyuta karşılık gelen bir teori veririz. Bu, bir* $F$ *CW-tabanlarıyla verilen serbest simplişıl grubunun ikinci serbest simplişıl örtü dönüşümlerinin bir serbest simplişıl kategorisi ve* $F$ *'den oluşturulan bir çift serbest simplişıl grubunun üzerindeki etkilerinin bir serbest simplişıl kategorileri arasında bir denklik meydana getirir.*

***Anahtar Kelimeler:*** *Serbest Simplişıl Kategori Teorisi, Homolojik Cebir, Serbest Simplişıl Gruplar.*

# SECOND ORDER SIMPLICIAL COVERINGS OF USING FREE SIMPLICIAL GROUPS WITH GIVEN CW-BASES

***ABSTRACT***

*A theory of known present an equivalence between the category of free simplicial covering maps of a free simplicial space and the free simplicial category of actions on free simplicial groups of the fundamental free simplicial group of the free simplicial space with given CW-bases. We give a corresponding theory in* *dimension two for free simplicial groups with given CW-bases as a consequence of a free simplicial Galois theory. This yields an equivalence between a category of two free simplicial covering maps of a free simplicial group with given CW-bases $F$ and a free simplicial category of actions on free simplicial group of a certain double free simplicial group constructed from $F$.*

***Key words***: *Simplicial Category, Homological Algebra, Free Simplicial Groups CW-Bases.*

***2000 Math. Subj. Class.*: 55U10; 18G55**

## 1. GİRİŞ

$F$, CW-tabanlarıyla verilen serbest simplişıl grubunun $\pi_1(F, f)$ temel simplişıl grubunun etkilerinin terimlerinde bir iyi $F$ simplişıl uzayının simplişıl örtü dönüşümlerinin bir tarifi vardır. Bu tarif temel simplişıl grubun bir tanımı olarak kullanılabilir.

Temel simplişıl grubun ikinci mertebeden benzerleri vardır. Bunlar, sadece ikinci homotopi grubunu değil ayrıca [1]'de Mac Lane ve Whitehead ve [2]'de Whitehead tarafından göz önüne alınan temel grup ve ikinci relatif homotopi grubu tarafından oluşturulan kross modülü de içerir. Quillen (bir faybreşınının kross modülü), Brown ve Higgins ([3]'de bir çiftin çift grupoidi, [4]'de grupoidler üzerindeki kross modüller), Loday ([5,6]'da bir dönüşümün temel $\mathrm{cat}^1$ –grubu), ve diğerleri tarafından birçok yakın bağlantılı yapılar önerilmiştir.

Bununla birlikte ikinci mertebeden örtü dönüşümlerinin Galois teorisinin bir karşılığı simplişıl kümeler kullanılarak [7]'de verildi. Fakat Brown ve Janelizde bu teoride [8,9]'da sunulan CW-tabanlarıyla verilen serbest simplişıl gruplar kategorisini kullanmadılar. Bu nedenle makalenin amacı CW-tabanlarıyla verilen serbest simplişıl gruplar kategorisinde [10]'na göre özel bir durum olan bu teoriyi geliştirmektir. Böylece bir faybreşının CW-tabanlarıyla serbest simplişıl Galois grubunun temel simplişıl grubunda ikinci mertebeden simplişıl örtü dönüşümlerinin kavramı bir kros modül olarak göz önüne alınan ikinci relatif homotopi grup kavramıyla aynı olduğunu ortaya çıkartır.

Bu çalışma üç bölümden oluşur. Birinci bölümde CW-tabanlarıyla serbest simplişıl Galois teorisinin bir hatırlatması yapılır. İkinci bölümde [8,9]'a göre CW-tabanlarıyla verilen serbest simplişıl gruplar ile grupoidler kategorisinde arasındaki esas sonuçlar verilir. Üçüncü bölümde ikinci mertebeden simplişıl örtü ve ikinci mertebeden temel simplişıl çift grup kavramının karşılığını verir; ikinci mertebeden bu simplişıl örtü dönüşümleri, simplişıl grubun kategorisindeki bu çift simplişıl grubun faybrenışı olarak tarif edilir.

## 2.CW-TABANLARIYLA SERBEST SİMPLİŞIL GALOİS KATEGORİLERİ TEORİSİ

Pullbackler ile birlikte bir CW-tabanlarıyla verilen serbest simplişıl gruplar kategorisi $FrSimpGrps$, ve $FrSimpGrps$'deki bütün izomorfizmleri içeren ve bileşkeler altında kapalı ve pullbacki sabit morfizmlerin bir sınıfı $\mathcal{F}$ olsun. $\mathcal{F}$, aşağıdaki gibi tanımlanan bir $\mathcal{F} : FrSimpGrps^{op} \to SimpGrps$ yarı fanktörü olarak göz önüne alınabilir ve burada simplişıl grupların bir kategorisi $SimpGrps$'dir. $FrSimpGrps$'deki bir $F$ nesnesi verilsin, $\mathcal{F}(F)$'nin nesneleri $\mathcal{F}$'deki bir morfizm $\alpha : G \to F$ olmak üzere bütün $(G,\alpha)$ ikilileri ve morfizmler $FrSimpGrps$'deki bütün değişmeli üçgenler aşağıdaki diagram gibidir.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha"'] & & G' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}(F) = (FrSimpGrps \downarrow F)$ şeklinde yazarız. $\mathcal{F}$'deki herhangi bir $p : E \to F$ morfizmi için, yani $(FrSimpGrps \downarrow E)$'deki verilen bir $(D,\delta)$ nesnesi nenesi ile birlikte

$$\mathcal{F}(p) = p^{*} = (FrSimpGrps \downarrow F) \to (FrSimpGrps \downarrow E)$$

$$(G,\alpha) \mapsto (E \times_F G, pr_1)$$

pullback fanktörünün, $p$ ile bileşkesi olan bir $p_{*} : (FrSimpGrps \downarrow E) \to (FrSimpGrps \downarrow G)$ sol adjointine sahip olduğuna dikkat edelim. $p_*(D,\delta)=(D,p\delta)$'yı elde ederiz. Böylece $p^*$ monadic ise, bu takdirde $p:E\to F$'nin bir $\mathcal{F}$ azalan morfizm olduğunu söyleriz.

Pullbackler ile birlikte *FrSimpGrps* ve *SimpGrps* kategorileri arasındaki bir adjunction

$$FrSimpGrps \rightleftarrows SimpGrps,$$

$$\eta : 1_{FrSimpGrps} \to HI,\ \ \varepsilon : IH \to 1_{SimpGrps}{}'$$

*FrSimpGrps*'deki morfizmlerin sınıfları $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}'$ olsun, ve yukarıdaki koşulları sırasıyla sağlasın. $I(\mathcal{F})\subseteq\mathcal{F}'$ ve $H(\mathcal{F}')\subseteq\mathcal{F}$ ise bu takdirde herhangi bir $F\in FrSimpGrps$ nesnesi için

$$\begin{tikzcd}
F\times_{HI(F)}H(SG) \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] & F \arrow[d, "\eta_F"] \\
H(SG) \arrow[r, "H(\phi)"'] & HI(F)
\end{tikzcd}$$

pullbacki vasıtası ile

$$I^F(G,\alpha)=(I(G),I(\alpha));$$

$$H^F(SG,\phi)=(F\times_{HI(F)}H(SG),pr_1)$$

olacak şekilde bir

$$(FrSimpGrps\downarrow F)\underset{H^F}{\overset{I^F}{\rightleftarrows}}(SimpGrps\downarrow I(F)),$$

$$\eta^F : 1_{(FrSimpGrps\downarrow F)} \to H^F I^F,\ \varepsilon^F : I^F H^F \to 1_{(SimpGrps\downarrow I(F))}$$

morfizmini elde ederiz; $(SimpGrps\downarrow I(F))$'deki herhangi bir $(SG,\phi)$ için

$$\eta^F_{(G,\alpha)} = <\alpha,\eta_G>: G\to F\times_{HI(F)}HI(G);$$

$$\varepsilon^F_{(SG,\phi)}=\varepsilon_{SG}I(pr_2),$$

yani

$$I(F\times_{HI(F)}HI(SG))\xrightarrow{I(pr_2)}IH(SG)\xrightarrow{\varepsilon_{SG}}SG$$

bileşkesidir.

Yukarıdaki veri $\Gamma=(FrSimpGrps,SimpGrps,I,H,\eta,\varepsilon,\mathcal{F},\mathcal{F}')$ olsun; $\Gamma$'nın [10]'daki gibi bir Galois yapısı olduğunu söyleriz.

$p : E \to F$ bir etkili $\mathcal{F}$ azalan morfizm, yani $(E, p)$ [10, Tanım 6.7]'ye göre bir monadic genişleme olsun ve

$$FSGal_I(E,p) = I(E \times_F E \times_F E) \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow} I(E \times_F E) \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow} I(E)$$

[10]'na göre onun serbest simplişıl Galois grubu olsun. [10, Teorem 6.8]'e göre serbest simplişıl Galois teorisinin temel teoremi, nesneleri $(E, p)$ üzerinde bölünen örtüler olarak tanımlanabilen $(FrSimpGrps \downarrow F)$'nin bir full alt kategorisi ve $SimpGrps$'teki eş bölünen $FSGal_I(E, p)$'nin bir kesin

$$Cosimpl_\Gamma(FSGal_I(E,p), SimpGrps)$$

kategorisi arasında bir

$$Simpl_\Gamma(E,p) \sim Cosimpl_\Gamma(FSGal_I(E,p), SimpGrps) \qquad \textbf{(*}_1\textbf{)}$$

kategori denkliğini kurar. Bu çalışmada sadece

$$Simpl_\Gamma(E,p) = \{(G,\alpha) \in (FrSimpGrps \downarrow F) \mid \eta^{E}_{(E \times_F G, pr_1)} \text{ bir izomorfizm}\} \qquad \textbf{(*}_2\textbf{)}$$

ve

$$Cosimpl_\Gamma(FSGal_I(E,p), SimpGrps) = SimpGrps^{FSGal_I(E,p)} \cap (SimpGrps \downarrow I(E)) \qquad \textbf{(*}_3\textbf{)}$$

özel durumunu göz önüne alacağız, ayrıntılar için [10]'na bakınız. [10]'nun sonuçlarına göre aşağıdaki sonucu elde ederiz.

**SONUÇ 2.1.** $\varepsilon^{E}, \varepsilon^{E \times_F E}$ ve $\varepsilon^{E \times_F E \times_F E}$ morfizmleri izomorfizmdir.

## 3.İKİNCİ MERTEBEDEN SERBEST SİMPLİŞIL ÖRTÜ DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SERBEST SİMPLİŞIL GALOİS YAPISI

Aşağıdaki $\Gamma = (FrSimpGrps, SimpGrps, I, H, \eta, \varepsilon, \mathcal{F}, \mathcal{F}')$ serbest simplişıl Galois yapısını göz önüne alalım. Burada $FrSimpGrps = SimpGrps^{\Lambda^{op}}$ CW-tabanlarıyla verilen serbest simplişıl grupların kategorisidir ve simplişıl gruplar için aşağıdaki terminolojiyi ve [11]'deki Gabriel ve Ziesman'ın kavramını kullanırız. $H : SimpGrps \to FrSimpGrps$, genellikle nerve fanktörü olarak adlandırılan kanonik kapsamadır ve [11]'deki gibi $D^I$ biçiminde yazılır.

([11]'deki $\prod : \Delta^{\circ}\mathcal{E} \to Gr$ biçiminde yazılan ) $I = \pi_1 : FrSimpGrps \to SimpGrps$, aşikâr $\eta$ ve $\varepsilon$ ile birlikte $H : SimpGrps \to FrSimpGrps$ kanonik kapsamasının sol adjointidir.

Kan [11, s. 65]'e göre $\mathcal{F}$ faybreşın sınıfıdır ve böylece $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap SimpGrps$ [12]'ye göre serbest simplişıl grubun faybreşınların sınıfıdır, böylece tanımdan $H(\mathcal{F}') \subset \mathcal{F}$, ve ayrıca $I(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}'$ olduğu da açıktır.

Bir $F$ CW-tabanlarıyla verilen serbest simplişıl grubunun bir Kan kompleksi olması için gerek ve yeter şart $F \to \mathbb{I}$ tek dönüşümünün [11, s. 65]'e göre bir faybreşın olmasıdır.

**SONUÇ 3.1.** *Kan kompleksinin bir örten faybreşını* $p : E \to F$ *olsun, bu takdirde bir*

$$Simpl_{\Gamma}(E, p) \sim SimpGrps^{FSGal_I(E,p)} \cap (SimpGrps \downarrow I(E))$$

*kategori denkliği vardır; burada,*

$$\begin{array}{ccc} E \times_F G & \xrightarrow{pr_1} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_{E \times_F G}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_E} \\ HI(E \times_F G) & \xrightarrow[HI(pr_1)]{} & HI(E) \end{array} \qquad (*_4)$$

*diyagramı bir pullback olmak üzere* $Simpl_{\Gamma}(E, p)$, $(G, \alpha)$ *ikililerinden oluşan nesnelerle birlikte* $(FrSimpGrps \downarrow F)$ *'nin full alt kategorisidir.*

Bundan dolayı aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

**ÖNERME 3.2.** $E$ *'nin her bir bağlantılı bileşeni geri çekilebilir olacak şekilde Kan kompleksinin örten faybreşınları* $p : E \to F$ *ve* $p' : E' \to F$ *olsun. Bu takdirde* $Simpl_{\Gamma}(E', p') \subset Simpl_{\Gamma}(E, p)$.

**İSPAT:** $p'f' = p$ ile birlikte bir $f' : E' \to E$ morfizminin var olduğunu göstermemiz gerekir. Bu, $E$'nin her bir bileşeni üzerindeki standart lifting özelliğidir.

**ÖNERME 3.3.** *Kan kompleksinin bir örten faybreşını $p : E \to B$ olsun, bu takdirde $FSGal_I(E, p)$ serbest simplişıl Galois grubu serbest simplişıl gruplar üzerinde bir çift gruptur.*

**İSPAT:** [11, 5.5c]'de bahsedildiği gibi

$$I((E \times_F E) \times_E (E \times_F E)) \to I(E \times_F E) \times_{I(E)} I(E \times_F E)$$

$$I((E \times_F E) \times_E (E \times_F E) \times_E (E \times_F E)) \to$$

$$I(E \times_F E) \times_{I(E)} I(E \times_F E) \times_{I(E)} I(E \times_F E)$$

kanonik morfizmlerinin izomorfizm olduklarını göstermek yeterlidir. Bununla birlikte, bu bilinen daha genel ifadeden elde edilir (bu ifade, bir faybrenışının tam dizisini içeren standart özellikleri tekrar kullanarak ispatlanabilir): $I = \pi_1$ fanktörü $L$, $K$'nın Kan kompleks ve $\hat{f}$'nin hem bir faybreşın hem de bir simplişıl örten olduğu durumda

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow[\hat{f}]{} & N \end{array}$$

diyagramındaki bütün pullbackleri korur.

$FSGal_I(E, p)$'nin, $p : E \to F$ faybreşınının $\pi_1(E \times_F E, *) \overset{\rightarrow}{\longrightarrow} \pi_1(E, *)$ Loday cat¹ –grubunu bir nesne grubu olarak ihtiva ettiği açıktır. Bu cat¹ –grubunun benzer diğer yapılara denk olduğu bilinir, örnek olarak Quillen'den dolayı $\pi_1(\mathfrak{F}, *) \to \pi_1(E, *)$ kross modülü verir ve burada $(\phi : SG \to I(F)) \in SimpGrps$ ve $\mathfrak{F} = H(\phi^{-1})(\eta_F(f))$ ve $\eta_F(f) : F \to HI(F)$ . Ayrıntılar için [5,6]'ya bakınız.

## 4.İKİNCİ MERTEBEDEN SERBEST SİMPLİŞIL ÖRTÜ DÖNÜŞÜMLERİ VE İKİNCİ MERTEBEDEN SERBEST SİMPLİŞIL TEMEL GRUP

[10]'nun genel sonuçlarının önceki bölümde açıklanan simplişıl Galois yapısına uygulanmasıyla aşağıdaki ifade ileri sürülür:

**TANIM 4.1.** **(*4)** diyagramı bir pullback olacak şekilde örten bir $p: E \to F$ faybreşını varsa, Kan kompleksinin bir $\alpha: G \to F$ faybreşınına *ikinci mertebeden bir serbest simplişıl örtü dönüşümü* denir.

**(*4)** diyagramının bir pullback olduğunu söylemek yerine ([8,9]'daki serbest simplişıl grup olarak göz önüne alınan $HI(E)$, $E$'nin $I(E) = \pi_1(E)$ alışılmış simplişıl grubu olmak üzere) $E \to HI(E)$ boyunca geri çekerek $E \times_F A \to E$'nin $SG \to HI(E)$ simplişıl grubunun bir faybreşınından elde edilebileceğini söyleyebiliriz. Böylece ikinci mertebeden serbest simplişıl örtü dönüşümleri serbest simplişıl gruplar olarak alışılmış simplişıl örtü dönüşümleriyle aynı anlamdadır.
$2 - FrSimpCov(F)$, $F$'nin ikinci mertebeden serbest simplişıl örtü dönüşümlerinin kategorisi olsun. Önerme 3.2 ve Sonuç 3.1'den aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

**TEOREM 4.2.** *$E$'nin her bir bağlantılı bileşeni geri çekilebilir olacak şekilde Kan kompleksinin örten bir faybreşını $p: E \to F$ olsun. Bu takdirde*

**(a)** *$\Gamma$, Bölüm 2'de ifade edilen serbest simplişıl Galois yapısı olmak üzere* $2 - FrSimpCov(F) = Simpl_{\Gamma}(E, p)$.

**(b)** $2 - FrSimpCov(B)$, *$\pi: F_0 \to \pi_1(E)$ izdüşüm fanktörü bir faybreşın olmak üzere serbest simplişıl grupların kategorisindeki*

$$FSGal_I(E, p) = FSGal_{\pi_1}(E, p)$$

$$= \pi_1(E \times_F E \times_F E) \xrightarrow[\longrightarrow]{\vec{\longrightarrow}} \pi_1(E \times_F E) \xleftarrow[\longleftarrow]{\vec{\longrightarrow}} \pi_1(E)$$

*serbest simplişıl Galois grubunun* $F = F(F_0, \pi_1, \zeta)$ *kategorisine denktir.*

Önerme 3.3.'te bahsedildiği gibi $FSGal_I(E,p)$ sadece bir çift gruptur fakat onu serbest simplişıl grubun kategorisindeki bir grup olarak göz önüne almak daha iyidir, çünkü böyle bir grubu bir çift grup olarak göz önüne almanın iki yolu vardır.

Şimdi $p: E \to F$ yukarıda verilen teoremdeki gibi olmak üzere bir $F$ Kan kompleksinin ikinci mertebeden temel serbest simplişıl grubunu $FSGal_I(E,p)$ biçiminde tanımlayabiliriz. Bu denkliğe kadar tek bir biçimde belirlenir ve doğal olarak $F$'nin ikinci homotopi gruplarının $\{\pi_2(F,f)\}_{f\in F}$ ailesi üzerindeki bu grubun etkisi ile birlikte $\pi_1(F)$ temel grubunu içerir.

İkinci mertebeden simplişıl örtü dönüşümlerinin bütün faybreşınlarının simplişıl grup olduğuna ve bu sebeple bu teoride [8,9]'a göre CW-tabanlarıyla verilen serbest simplişıl grup $G$ olmak üzere bir $K(G,1)$ faybresi ile birlikte faybre bohçalarının sınıflandırmasıyla bağlantılı olduğuna dikkat edelim.

**KAYNAKLAR**


[1] Mac Lane, S. and Whitehead J.H.C., "*On the 3 type of a complex*", Proc. Nat. Acad. Sci., 41–48, 1950.

[2] Whitehead, J.H.C., "*Note on a previous paper entitled On adding relations to homotopy groups*", Ann. Math., 47, 806–810, 1946.

[3] Brown, R. and Higgins, P.J., "*On the connection between the second relative homotopy groups of some related spaces*", Proc. London Math. Soc., 36 (3), 193–212, 1978.

[4] Brown, R. and Higgins, P.J., "*Colimit theorems for relative homotopy groups*", J. Pure Appl. Algebra, 22, 11–41, 1981.

[5] Brown, R. and Loday, J.L., *Van Kampen theorems for diagrams of spaces,* Topology, 26, 311–334, 1987.

[6] Loday, J. L., "*Spaces with finitely many non-trivial homotopy group*", J. Pure Appl. Algebra, 24, I79–202, 1982.

[7] Brown, R. and Janelidze G., "*Galois theory of the second order covering maps of the simplicial sets*", Journal of Pure and Applied Algebra, 135, 23-31, 1999.

[8] Mutlu A. and Porter T. "*Freeness Conditions for 2-Crossed Modules and Complexes*", Theory and Applications of Categories, 4(8), 174-194, 1998.

[9] Mutlu A. and Porter T. "*Free crossed resolutions from simplicial resolutions with given $CW$ -basis*", Cahiers de Topologie et Géometrie Différentielle Catégoriques, XL(4), 261-283, 1999.

[10] Janelidze, G. "*Precategories and Galois Theory*" Lecture Notes in Math. 1488, Springer. Berlin, 157–173, 1991.

[11] Gabriel, P. and Zisman, M., "*Calculus of Fractions and Homotopy Theory*", Springer, Berlin, 1967.

[12] Brown, R. "*Fibrations of groupoids*", J. Algebra, 15, 103–132, 1970.