

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KARARLILIK ANALİZİ VE
BİR UYGULAMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nejdet KÖKER

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL

Eylül 2021

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KARARLILIK ANALİZİ VE
BİR UYGULAMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nejdet KÖKER

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : UYGULAMALI MATEMATİK

Bu tez 17.09.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı

Üye

Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Nejdet KÖKER

01.08.2021

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu dönemde desteklerini daima yanımda hissettiğim eşime, aileme ve Dr. Metin IŐIK'a da sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
TABLolar LİSTESİ	vii
ÖZET.....	viii
SUMMARY	ix
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.	
KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	2
2.1. Diferansiyel Denklem Sistemi ve Otonom Sistemler.....	2
2.1.1. Diferansiyel denklem sistemlerin denge noktası.....	2
2.1.2. Diferansiyel denklem sistemlerin kararlılığı	4
2.1.3. Diferansiyel denklem sistemlerin asimtotik kararlılığı	4
2.2. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri	5
2.2.1. Lineer diferansiyel denklem sistemlerin matris gösterimi	5
2.2.2. Lineer diferansiyel denklem sistemlerin denge noktalarının yapısı	6
2.2.2.1. Aynı işaretli reel ve farklı olma durumu.....	7
2.2.2.2. Ters işaretli reel ve farklı olma durumu	9
2.2.2.3. Reel ve eşit olma durumu	10
2.2.2.4. Reel kısımları sıfır olmayan kompleks eşlenik olma durumu	12

2.2.2.5. Tamamen sanal olma durumu.....	13
2.2.3. Lineer sistemlerin kararlılığı	14
2.2.4. Hemen hemen lineer sistemler	15
2.3. Hastalık Dinamikleri İçin Modeller	16
2.3.1. Bulaşıcı hastalıklar için deterministik modeller.....	16
2.3.1.1. SIR model	17
2.3.1.2. SI model.....	20
2.3.1.3. SIS model.....	20
2.3.1.4. SEIR model.....	20
BÖLÜM 3.	
COVID-19 PANDEMİSİ İÇİN BİR SALGIN MODELİ	22
3.1. Modelin Oluşumu.....	22
3.2. Diferansiyel Denklem Sisteminin Denge Noktaları.....	23
3.2.1. Hastaliksız denge noktası	23
3.2.2. Hastalıklı denge noktası	24
3.3. Modelin Kararlılığı.....	26
3.3.1. Yerel kararlılık.....	26
3.3.2. Küresel kararlılık.....	29
BÖLÜM 4.	
ARAŞTIRMA BULGULARI	30
4.1. Modelin Türkiye Verilerine Uygulanması.....	30
4.1.1. Türkiye covid-19 verilerine göre hastaliksız denge noktası.....	30
4.1.2. Türkiye covid-19 verilerine göre hastalıklı denge noktası.....	31
4.2. Modelin Kararlılığı.....	32
4.2.1. Yerel kararlılık.....	32
4.2.2. Küresel kararlılık.....	32
4.3. Modelin Simulasyonu	33
BÖLÜM 5.	
TARTIŞMA VE SONUÇ	39

KAYNAKLAR.....	40
EKLER.....	41
ÖZGEÇMİŞ	50

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

C	: Kompleks Sayılar
R	: Reel Sayılar
R_0	: Temel Üreme Numarası
RK_4	: Dördüncü Dereceden Runge Kunta Metodu
SEIR	: Susceptible-Exposed-Infected-Recovered (Duyarlı-Maruz Kalan-Enfekte-İyileşen)
SI	: Susceptible-Infected (Duyarlı-Enfekte)
SIR	: Susceptible-Infected-Recovered (Duyarlı-Enfekte-İyileşen)
SIS	: Susceptible-Infected- Susceptible (Duyarlı-Enfekte-Duyarlı)

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. v_1 ve v_2 öz vektörler ile tanımlanmış eğik uv –koordinat sistemi.	8
Şekil 2.2. Düzensiz kaynak düğümü.	8
Şekil 2.3. Düzensiz kuyu düğümü.	9
Şekil 2.4. Kararsız eyer noktası.	10
Şekil 2.5. Düzensiz kuyu düğümü.	11
Şekil 2.6. Düzensiz kaynak düğümü.	12
Şekil 2.7. Spiral kuyu.	13
Şekil 2.8. Spiral kaynak.	13
Şekil 2.9. Kararlı merkez.	14
Şekil 3.1. Modelin şematik diyagramı.	22
Şekil 4.1. Türkiye (03.07.2021) tarihli duyarlı nüfusun zamana göre değişimi.	34
Şekil 4.2. Türkiye (03.07.2021) tarihli maruz kalan nüfusun zamana göre değişimi.	34
Şekil 4.3. Türkiye (03.07.2021) tarihli enfekte nüfusun zamana göre değişimi.	35
Şekil 4.4. Türkiye (03.07.2021) tarihli entübe nüfusun zamana göre değişimi.	35
Şekil 4.5. Türkiye (03.07.2021) tarihli kurtulan nüfusun zamana göre değişimi. ..	36
Şekil 4.6. Türkiye (25.10.2020) tarihli duyarlı nüfusun zamana göre değişimi.	36
Şekil 4.7. Türkiye (25.10.2020) tarihli maruz kalan nüfusun zamana göre değişimi	37
Şekil 4.8. Türkiye (25.10.2020) tarihli enfekte nüfusun zamana göre değişimi.	37
Şekil 4.9. Türkiye (25.10.2020) tarihli entübe nüfusun zamana göre değişimi.	38
Şekil 4.10. Türkiye (25.10.2020) tarihli kurtulan nüfusun zamana göre değişimi.	38

TABLolar LİSTESİ

Tablo 2.1. İki boyutlu $x' = Ax$ (0,0) kritik noktasının sınıflandırılması.....	14
Tablo 2.2. Bir hemen hemen lineer sistemin kritik noktalanın sınıflandırılması....	16
Tablo 3.1. Parametreler ve açıklama.....	23
Tablo 4.1. Parametreler ve Türkiye verileri.....	30
Tablo 4.2. Türkiye nüfusunun sınıflandırılması.....	30

ÖZET

Anahtar Kelimeler: SEIR Model, Covid-19 Pandemisi, Kararlılık.

Yeni bir koronavirüsün neden olduğu salgın bir hastalık, tüm dünyada yüksek bir bulaşma oranıyla yayıldı. Bu tezin temel amacı, Covid-19 pandemisi için bir salgın modelini tanımlamak, Türkiye verilerine uygulamak ve yorumlamaktır. Bu doğrultuda enfekte nüfusu ve bu salgının neden olduğu ölüm sayısını hesaplamak için bir SEIR modeli oluşturuldu ve modelin kararlılığı incelendi. Kararlılığa etki eden parametrelerin tümü net olarak hesaplanamadığı için gerçekçi bir sonuca ulaşılması beklenemez. Bu nedenle ulaşılabilen parametrelerle model oluşturulmuştur. Daha sonra modelin hastalıklı ve hastaliksız denge noktaları tartışılmıştır. Hurwitz teoremi modelin yerel kararlılığını bulmak için, Lyapunov fonksiyon teorisi ise küresel kararlılığını araştırılması için kullanılmıştır. Son olarak, MATLAB programı yardımıyla bazı sayısal sonuçlar verilmiştir.

STABILITY ANALYSIS AND AN APPLICATION

SUMMARY

Keywords: SEIR Model, Covid-19 Pandemic, Stability.

An epidemic disease caused by a new coronavirus has spread all over the world with a high rate of transmission. The main purpose of this thesis is to define an epidemic model for the Covid-19 pandemic, to apply it to Turkey's data and to interpret it. Accordingly, a SEIR model was created to calculate the infected population and the number of deaths caused by this epidemic, and the stability of the model was examined. Since all the parameters affecting the stability cannot be calculated clearly, it cannot be expected to reach a realistic result. For this reason, a model was created with accessible parameters. Later, the diseased and non diseased equilibrium points of the model were discussed. The Hurwitz theorem is used to find the local stability of the model, while the Lyapunov function theory is used to investigate its global stability. Finally, some numerical results are given with the help of MATLAB program.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Adi Diferansiyel Denklemler Matematik Anabilim Dalı'nın yanı sıra birçok Uygulamalı Bilim Dallarındaki uygulamalarda yaygın bir biçimde ortaya çıkan ve kullanılan denklem türleridir. Diferansiyel denklemlerde geniş bir araştırma alanı oluşturan kararlılık kavramı 1900'lü yılların başlarında Sovyet matematikçi A. M. Lyapunov tarafından ortaya atılmıştır [1]. Kararlılık fizik, mühendislik, tıp gibi uygulamalı bilim dallarında uygulama alanına sahiptir. Matematiksel biyoloji, birçok uygulama alanı olan geniş bir daldır. Doğada en çok bulunan türler virüslerdir, bazı virüsler insanlarda ciddi bulaşıcı hastalıklara sebep olur. Bu türlerden biri de koronavirüstür. Yeni bir koronavirüsün (COVID-19) neden olduğu salgın hastalık tüm dünyada hızla yayıldı. 2020 yılında salgının İtalya'daki seyrini belirlemek için José M. Carcione ve arkadaşları tarafından bir çalışma yapıldı [2]. Dünya çapında konu ile ilgili birçok araştırmaya rastlanmasına rağmen Türkiye özelinde fazla çalışmaya rastlanmamıştır. Bu doğrultuda bu tez kapsamında Türkiye Covid-19 verileri kullanılarak bir salgın modeli oluşturulması ve yorumlanması amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda öncelikle lineer ve lineer olmayan sistemlerin çözümlerinin kararlılık tanımları verilmiştir. Sonra bu sistemlerin çözümlerinin faz portreleri sınıflandırıldı ve çözümlerinin kararlılığı için teoremler verildi. Ardından Covid-19 pandemisi ile ilgili bir diferansiyel sistemi oluşturuldu ve kararlılığı R_0 üreme sayısı hesaplanarak incelendi. Son olarak ulaşılan sonuçlar açıklandı.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Diferansiyel Denklem Sistemi ve Otonom Sistemler

Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem sistemi x-bağımlı, t-bağımsız değişken olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = F(x, t) \quad (2.1)$$

şeklinde yazılır. (2.1) denkleminde birlikte

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.2)$$

başlangıç koşulu alındığında başlangıç değer problemi elde edilir. Burada F, nx1 boyutunda lineer veya lineer olmayan vektör fonksiyonu, x ise nx1 boyutunda durum vektörüdür. Denklem (2.1)'deki sistem eğer zamana bağlı değil ise sistem özerk (otonom) yapıda olacaktır. Özerk sistemin durum denklemi,

$$\frac{dy}{dx} = F(x) \quad (2.3)$$

şeklinde yazılır.

2.1.1. Diferansiyel denklem sistemlerin denge noktası

(2.3) otonom sistemi için eğer varsa, $F(x) = 0$ denklemini sağlayan noktalara (2.3) otonom sisteminin kritik noktaları (sabit noktaları, denge noktaları) denir.

Denge noktasının kararlılığına bakılarak sistemin kararlılığı belirlenebilir. Doğrusal sistemlerde bir tane denge noktası var iken doğrusal olmayan sistemlerde birden fazla denge noktası olabilir [3].

Tanım 2.1.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (2.4)$$

Otonom sistemi verilsin. (2.4) sistemindeki F ve G fonksiyonları xy-düzleminin bir R bölgesinde sürekli ve sürekli kısmi türevlere sahip olsunlar. Bu düzleme (2.4) düzlemi için faz düzlemi denir.

Eğer (x_0, y_0) bu bölgede bir nokta ise, (2.4) sisteminin

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

başlangıç koşullarını sağlayan tek bir $x = x(t)$, $y = y(t)$ çözümü vardır. Bu durumda $x = x(t)$, $y = y(t)$ denklemleri faz düzleminde bir parametrelili çözüm eğrisi tanımlar. Bu tip çözüm eğrisine (2.4) sisteminin bir yörüngesi adı verilir ve R bölgesinin her bir noktasından kesinlikle bir yörünge geçer.

$$F(x_*, y_*) = G(x_*, y_*) = 0 \quad (2.6)$$

Eşitliğini sağlayan (x_*, y_*) noktası, (1.4) sisteminin bir kritik noktasıdır.

Eğer (x_*, y_*) sistemin bir kritik noktası ise

$$x(t) = x_*, \quad y(t) = y_* \quad (2.7)$$

Sabit değerli fonksiyonları (2.4) sistemindeki denklemleri sağlarlar. Böyle sabit değerli bir çözüme sistemin denge çözümü denir [3].

2.1.2. Diferansiyel denklem sistemlerin kararlılığı

Eğer (1.4) sisteminin (x_0, y_0) noktası (x_*, y_*) kritik noktasına yeterince yakın iken, her $t > 0$ için $(x(t), y(t))$ de (x_*, y_*) ' a yakın kalıyorsa, bu durumda (x_*, y_*) kritik noktasına kararlıdır denir. $x(t) = (x(t), y(t))$ vektör gösteriminde $x_0 = (x_0, y_0)$ ve (x_*, y_*) arasındaki uzaklık $|x_0 - x_*| = \sqrt{(x_0 - x_*)^2 + (y_0 - y_*)^2}$ tır. Böylece, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $t > 0$ için, $|x_0 - x_*| < \delta$ olduğunda $|x(t) - x_*| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise x_* kararlıdır.

(x_*, y_*) kritik noktası kararlı değilse kararsız olarak adlandırılır [3].

2.1.3. Diferansiyel denklem sistemlerin asimtotik kararlılığı

Eğer (x_*, y_*) kritik noktası kararlı ise ve bu noktaya yeterince yakın olarak başlayan her yörünge $t \rightarrow \infty$ iken yine bu noktaya yakınsıyor ise, (x_*, y_*) kritik noktasına asimtotik kararlıdır denir. Yani, $|x_0 - x_*| < \delta$ olduğunda $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_*$, sağlanacak şekilde $\delta > 0$ mevcuttur. Burada $x_0 = (x_0, y_0)$, $x_* = (x_*, y_*)$ ve $x(t) = (x(t), y(t))$, $x(0) = x_0$ özelliğinde bir çözümdür [2].

Böylece x_* 'a “yeterince yakın” başlayan yörüngeler sadece x_* 'a “yakın” kalmakla kalmaz $t \rightarrow \infty$ iken sonunda x_* 'a yaklaşmak zorundadır. Asimtotik kararlılık, kararlılıktan daha kuvvetli bir özelliktir. Çünkü bir kritik noktanın asimtotik kararlı olabilmesi için öncelikle kararlı olması gerekir. Eğer $x = 0$ kritik noktası asimtotik kararlı ise sadece orijine yakın başlayan yörüngeler değil tüm yörüngeler orijine yaklaşır. Bu durumda, $x = 0$ kritik noktasına küresel olarak asimtotik kararlıdır denir [4].

2.2. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri

2.2.1. Lineer diferansiyel denklem sistemlerin matris gösterimi

Sabit katsayılı birinci mertebeden homojen n. mertebeden lineer diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned}\quad (2.8)$$

şeklinindedir. Burada a_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) sabitlerdir. (2.8) sisteminin $n \times n$ tipindeki katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\quad (2.9)$$

dır. Ayrıca $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ve $\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}$ vektörleri göz önüne alınırsa (2.8) sistemi

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Böylece (2.8) sistemi daha kısa olarak

$$\frac{dx}{dt} = AX\quad (2.10)$$

matris gösteriminde elde edilir.

2.2.2. Lineer diferansiyel denklem sistemlerin denge noktalarının yapısı

Bu başlık altında iki boyutlu lineer bir sistemin kararlılığı öz değer-öz vektör aracılığıyla incelenecektir. A katsayı matrisi olmak üzere; $\frac{dx}{dt} = AX$, şeklinde iki boyutlu lineer ve otonom bir sistem,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlansın. (2.11) lineer sisteminin (0,0) kritik noktasını incelemek için öz değer-öz vektör yöntemini kullanabiliriz. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ katsayılar matrisinin λ_1 ve λ_2 öz değerleri,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \quad (2.12)$$

karakteristik denkleminin çözümleridir. (0,0) sisteminin bir izole edilmiş kritik noktası olduğunu kabul edelim. Böylece $ax + by = 0, cx + dy = 0$ sisteminin $ad - bc$ katsayılar determinantının sıfır olmadığı görülür. Bu durumda $\lambda = 0$, (2.11) sisteminin karakteristik denkleminin bir çözümü değildir ve böylece A matrisinin özdeğerlerinin her ikisi de sıfır değildir. O zaman (0,0) izole edilmiş kritik noktasının yapısı λ_1 ve λ_2 öz değerlerinin aşağıdaki durumlarının olup olmamasına bağlıdır.

- Aynı işaretli reel ve farklı olma durumu
- Ters işaretli reel ve farklı olma durumu
- Reel ve eşit olma durumu
- Reel kısımları sıfır olmayan kompleks eşlenik olma durumu
- Tamamen sanal olma durumu

Bu 5 duruma ayrı ayrı incelenecektir. Her bir duruma (0,0) kritik noktası aşağıdaki denge noktalarından hangisine karşılık geldiği belirlenecektir [3].

- Dügüm noktası (düzenli veya düzensiz)
- Eyer noktası
- Spiral noktası
- Merkez noktası

2.2.2.1. Aynı işaretli reel ve farklı olma durumu

Bu durumda A matrisi lineer bağımsız v_1 ve v_2 öz vektörlerine sahiptir ve (2.11) sisteminin $x(t) = [x(t), y(t)]^T$ genel çözümü

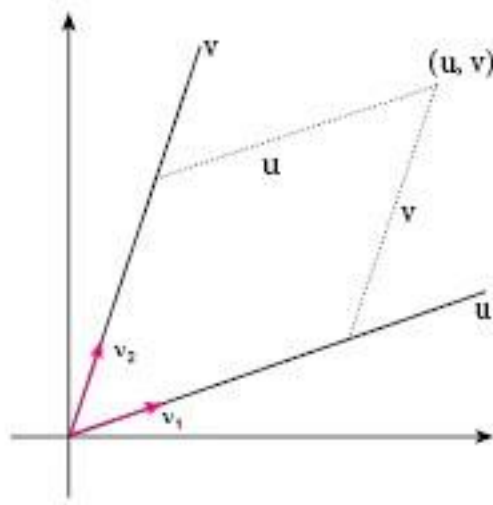
$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.13)$$

şeklindedir. Bu çözüm, çok basit olarak şekil 2.1.'de gösterilmiş eğik uv – koordinat sisteminde tanımlanmıştır. Burada u ve v eksenleri v_1 ve v_2 öz vektörleri tarafından belirlenir. O zaman hareketli $x(t)$ noktasının uv – koordinat fonksiyonları $u(t)$ ve $v(t)$, basitçe v_1 ve v_2 vektörlerine paralel yönde ölçülmüş orijine olan uzaklıklardır.

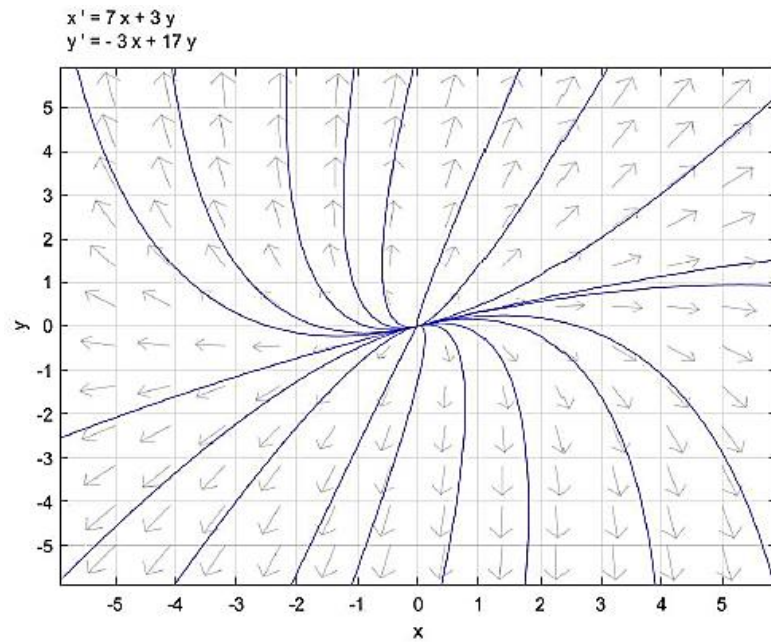
Böylece sistemin bir yörüngesinin

$$u(t) = u_0 e^{\lambda_1 t}, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda_2 t} \quad (2.14)$$

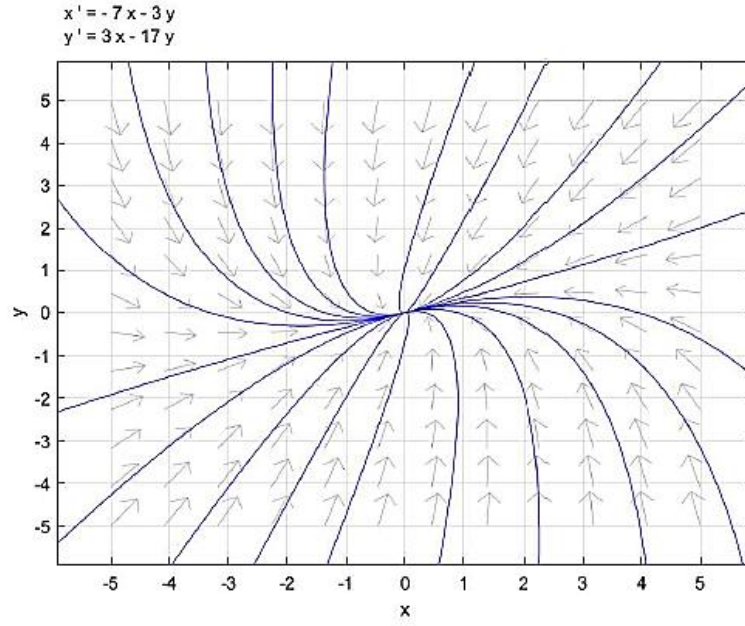
ile tanımlanacağı eşitlik (2.13)'ten görülür. Burada $u_0 = u(0)$ ve $v_0 = v(0)$ dır. Eğer $v_0 = 0$ ise bu yörünge u –ekseni üzerinde, $u_0 = 0$ ise v –ekseni üzerindedir. Aksi halde eğer u_0 ve v_0 'ın her ikisi de sıfır değilse, (2.14) parametrik eğrisi $v = C u^k$ açık formunu alır. Burada $k = \lambda_1 / \lambda_2 > 0$ dır. Bu çözüm eğrileri $(0,0)$ da $k > 1$ ise u –eksenine, $0 < k < 1$ ise v –eksenine teğettir. Böylece, bu durumda bir düzensiz düğüme sahip oluruz. Eğer λ_1 ve λ_2 nin her ikisi de pozitif ise o zaman (2.13) ve (2.14) den bu çözüm eğrilerinin t artarken orijinden ayrılacağını görürüz. Böylece $(0,0)$ Şekil 2.2.'de olduğu gibi bir kaynak düğümdür. Fakat λ_1 ve λ_2 nin her ikisi negatif ise o zaman bu çözüm eğrileri t artarken orijine yaklaşır. Böylece $(0,0)$ Şekil 2.3.'de olduğu gibi bir (düğümsel kuyu) kuyu düğümdür [3].



Şekil 2.1. v_1 ve v_2 öz vektörler ile tanımlanmış eğik uv –koordinat sistemi.



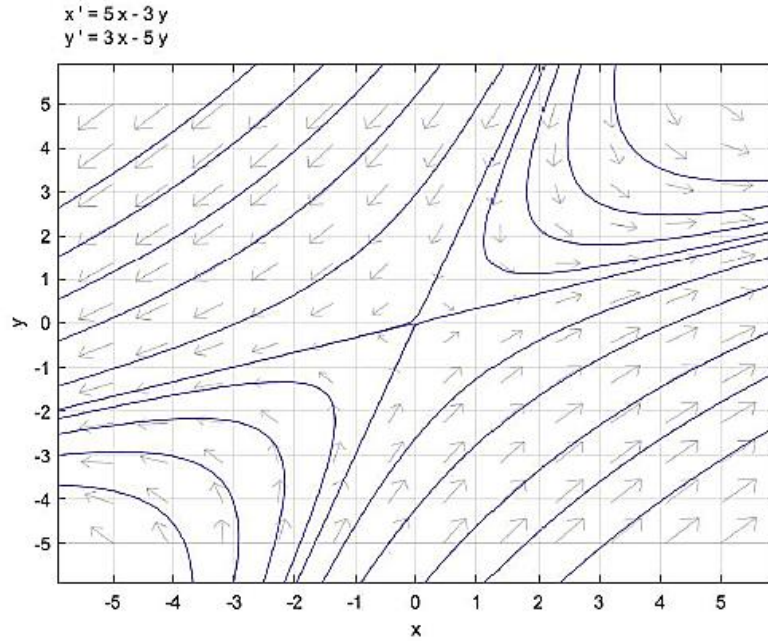
Şekil 2.2. Düzensiz kaynak düğümü.



Şekil 2.3. Düzensiz kuyu düğümü.

2.2.2.2. Ters işaretli reel ve farklı olma durumu

Burada durum, (2.14) de $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ olması hariç, önceki durumla aynıdır. $u_0 = 0$ veya $v_0 = 0$ lı yörüngeler, $(0,0)$ kritik noktasından geçen u – ve v – eksenleri üzerindedir. u_0 ve v_0 'ın her ikisinin de sıfır olmaması durumunda, $k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$ olmak üzere $v = Ce^{ku}$ açık formunda eğrilerdir. Bu durumda lineer olmayan yörüngeler hiperbollere benzer ve bu yüzden $(0,0)$ kiritik noktası Şekil 2.4.'de olduğu gibi bir kararsız eyer noktasıdır [3].



Şekil 2.4. Kararsız eyer noktası.

2.2.2.3. Reel ve eşit olma durumu

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ durumun'da, $(0,0)$ kritik noktasının karakteri, A katsayı matrisinin iki lineer bağımsız v_1 ve v_2 öz vektörlerine sahip olup olmamasına bağlıdır. Eğer sahip ise, o zaman Şekil 2.1.'de olduğu gibi eğik uv –koordinatlarına sahibiz ve yörüngeler (2.14)'deki gibi

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t}, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda t} \quad (2.15)$$

olarak tanımlanır. Fakat şimdi $k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1$ dir. Böylece $u_0 \neq 0$ 'lı yörüngelerin hepsi $v = Cu$ formundadır ve orijinden geçen doğrular üzerinde kalırlar. Bu nedenle, $(0,0)$ Şekil 2.2.'de gösterildiği gibi bir düzenli düğüm (veya yıldız) dir ve eğer $\lambda > 0$ ise bir kaynak, $\lambda < 0$ ise bir kuyudur.

Eğer katlı $\lambda \neq 0$ öz değeri sadece bir tek v_1 öz vektörüne sahip ise yine de $(A - \lambda I)v_2 = v_1$ şeklinde bir genelleştirilmiş v_2 öz vektörü mevcuttur öyle ki $x' = Ax$ lineer sistemi,

$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda t}, \quad x_2(t) = (v_1 t + v_2) e^{\lambda t} \quad (2.16)$$

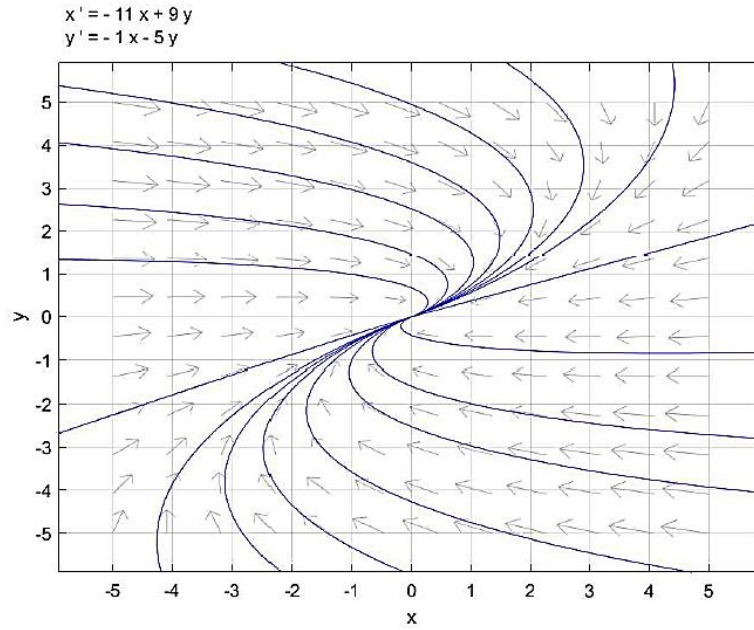
şeklinde iki lineer bağımsız çözüme sahiptir. Şekil 2.1.'de olduğu gibi eğik uv –koordinatlarını oluşturmak için v_1 ve v_2 vektörlerini kullanabiliriz. O zaman, bir yörünge üzerinde hareketli $x(t)$ noktasının $u(t)$ ve $v(t)$ koordinat fonksiyonlarının

$$u(t) = (u_0 + v_0 t) e^{\lambda t}, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda t} \quad (2.17)$$

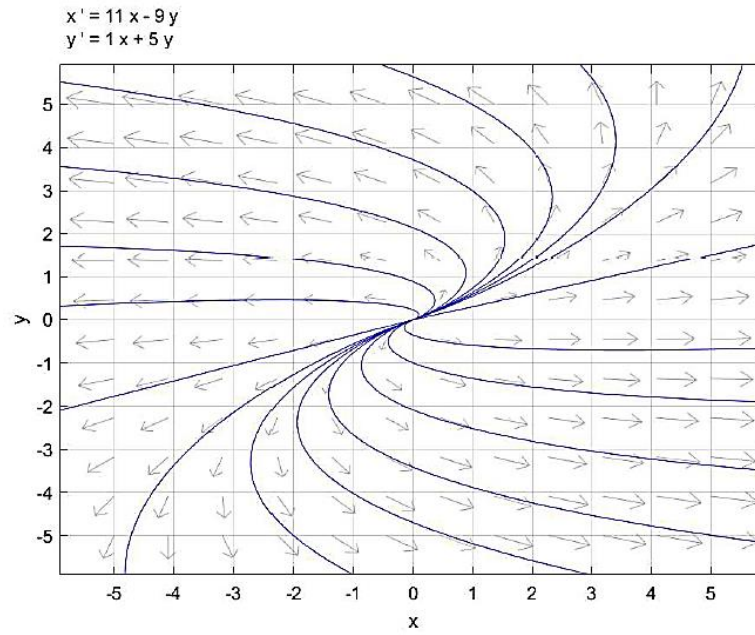
ile verileceği (2.16)'dan görülür. Buradan $u_0 = u(0)$ ve $v_0 = v(0)$ dir.

Eğer $v_0 = 0$ ise bu yörünge u –ekseni üzerindedir.

Aksi halde $\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = \frac{\lambda v_0 e^{\lambda t}}{v_0 e^{\lambda t} + \lambda(u_0 + v_0 t) e^{\lambda t}} = \frac{\lambda v_0}{v_0 + \lambda(u_0 + v_0 t)}$ ile bir lineer olmayan yörüngeye sahip oluruz. $t \rightarrow \mp\infty$, $\frac{dv}{du} \rightarrow 0$ olur. Böylece her bir yörüngeyi u –eksenine teğet olduğu görülür. Bu nedenle $(0,0)$ bir düzensiz düğüm dır. Eğer $\lambda < 0$ ise o zaman bu düğümün Şekil 2.5.'de olduğu gibi, bir kuyu olduğu fakat $\lambda > 0$ ise Şekil 2.6.'da olduğu gibi, bir kaynak olduğu (2.17)'den görülür [3].



Şekil 2.5. Düzensiz kuyu düğümü.



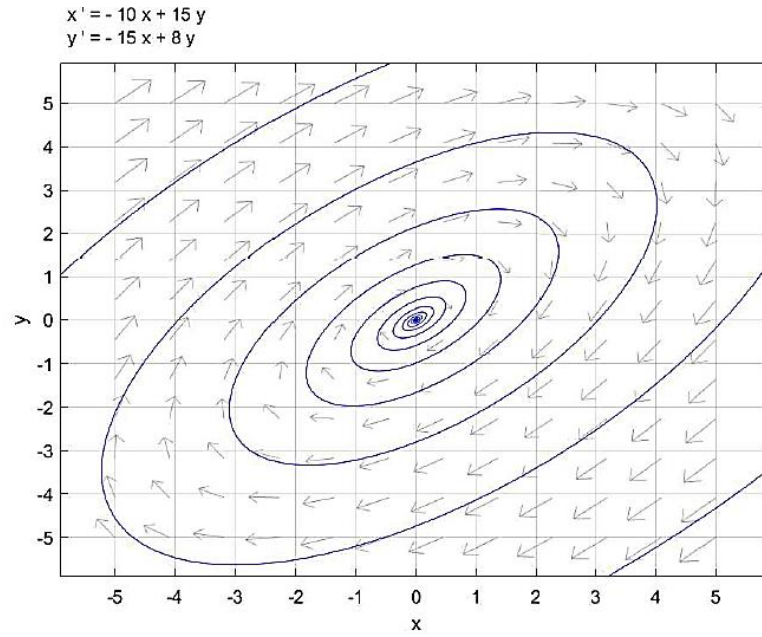
Şekil 2.6. Düzensiz kaynak düğümü.

2.2.2.4. Reel kısımları sıfır olmayan kompleks eşlenik olma durumu

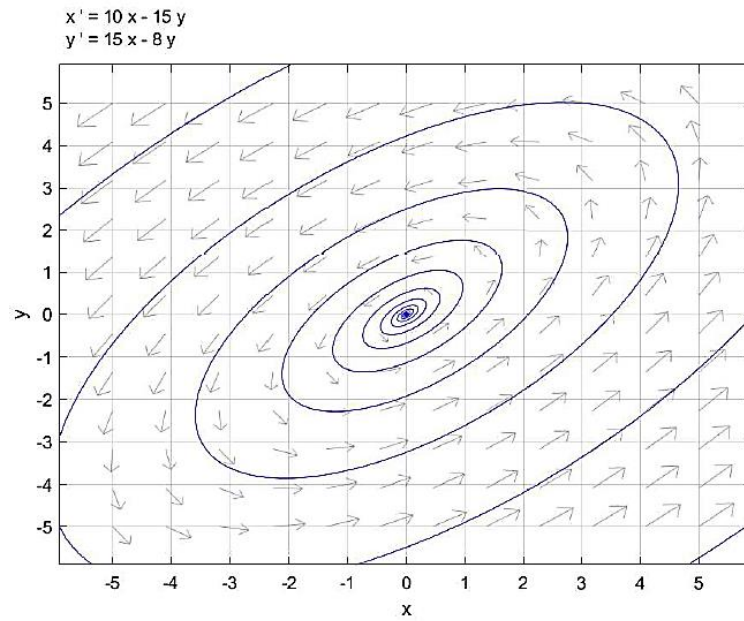
A matrisinin $\lambda = p + qi$ ve $\bar{\lambda} = p - qi$ özdeğerlerinin (p ve q her ikisi de sıfırdan farklı) ile $v = a + bi$ ve $\bar{v} = a - bi$ kompleks eşlenik öz vektörlerine sahip olduğunu kabul edelim. Bu $x' = Ax$ lineer sistemi iki lineer bağımsız, reel değerli,

$$x_1(t) = e^{pt}(a \cos qt - b \sin qt), \quad x_2(t) = e^{pt}(a \cos qt + b \sin qt) \quad (2.17)$$

Çözümlerine sahiptir. Herhangi $x(t)$ ve $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ çözümünün $x(t)$ ve $y(t)$ bileşenleri, t artarken pozitif ve negatif değerler arasında salınım yaptığından, $(0,0)$ kiritik noktası bir spiral noktadır. Eğer özdeğerlerin reel kısmı negatif ise $t \rightarrow \infty$ iken $x(t) \rightarrow 0$ olacağı (2.17)'den açıktır. Böylece orijin Şekil 2.7.'de olduğu gibi bir spiral kuyu olur. Fakat p pozitif ise o zaman kritik nokta Şekil 2.8.'de olduğu gibi bir spiral kaynaktır [3].



Şekil 2.7. Spiral kuyu.



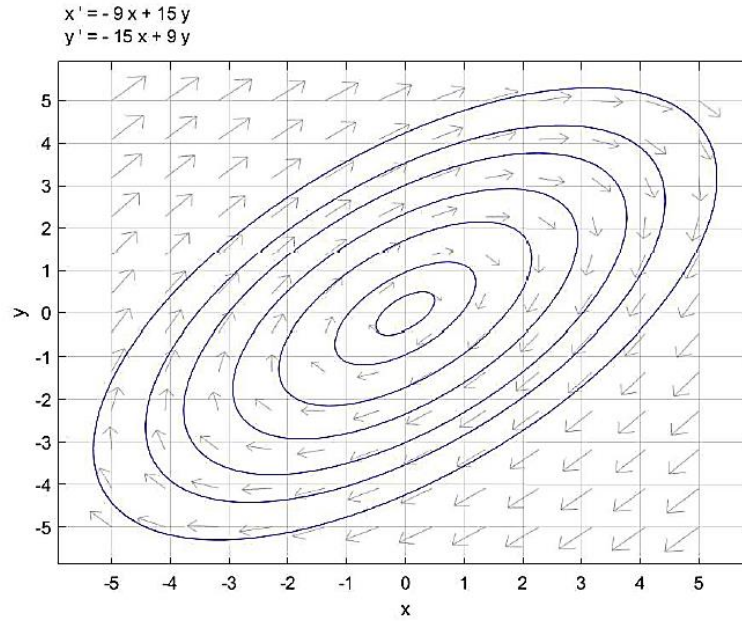
Şekil 2.8. Spiral kaynak.

2.2.2.5. Tamamen sanal olma durumu

Eğer A matrisi eşlenik sanal $\lambda = qi$ ve $\bar{\lambda} = -qi$ özdeğerleri ile kompleks eşlenik $v = a + bi$ ve $\bar{v} = a - bi$ öz vektörlerine sahip ise o zaman $p = 0$ ile (2.17) ; $x' = Ax$ lineer sisteminin lineer bağımsız

$$x_1(t) = a \cos qt - b \sin qt, \quad x_2(t) = a \cos qt + b \sin qt \quad (2.18)$$

çözümlerini verir. Herhangi $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ çözümü, xy –düzleminde merkezi orijinde bir elips tanımlar. Böylece $(0,0)$ bir kararlı veya kararsız merkezdir [3].



Şekil 2.9. Kararlı merkez.

Tablo 2.1. İki boyutlu $x' = Ax$ $(0,0)$ kritik noktasının sınıflandırılması [3].

A'nın Öz değerleri	Kritik Noktanın Tipi
Reel, farklı, aynı işaretli	Düzensiz düğüm
Reel, farklı, ters işaretli	Eyer noktası
Reel ve eşit	Düzenli veya düzensiz düğüm
Kompleks eşlenik	Spiral nokta
Tamamen sanal	Merkez

2.2.3. Lineer sistemlerin kararlılığı

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (2.19)$$

iki boyutlu lineer sistemin $(ad - bc \neq 0)$ olmak üzere) A katsayı matrisinin özdeğerleri λ_1 ve λ_2 olsun. O zaman $(0,0)$ kritik noktası;

- Eğer λ_1 ve λ_2 nin reel kısımlarının her ikisi negatif ise asimptotik kararlı.
- Eğer λ_1 ve λ_2 nin reel kısımlarının her ikisi sıfır (yani $\lambda_1, \lambda_2 = \mp qi \in C$) ise kararlı fakat asimptotik kararlı değil.
- Eğer λ_1 ve λ_2 bir pozitif reel kısma sahip ise kararsızdır.

2.2.4. Hemen hemen lineer sistemler

Şimdi tekrar $ad - bc \neq 0$ ile $(0,0)$ izole edilmiş kritik noktasına sahip,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + r(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + s(x, y) \end{cases} \quad (2.20)$$

hemen hemen lineer sistemine ele alalım. İspatsız olarak vereceğimiz Teorem temelde $(0,0)$ kritik noktasının kararlılığı ve tipi açısından $r(x, y)$ ve $s(x, y)$ küçük lineer olmayan terimlerinin etkisinin karşılık gelen (2.19) lineer sisteminin katsayılarında küçük bir pertürbasyonun etkisine eşdeğer olduğunu ifade eder [3].

Teorem 2.2.4.1. λ_1 ve λ_2 (2.20) hemen hemen lineer sistemine karşılık gelen (2.19) lineer sisteminin katsayı matrisinin özdeğerleri olsun. Bu takdirde;

- $\lambda_1 = \lambda_2$ eşit reel özdeğerler ise (2.20) denkleminin $(0,0)$ kritik noktası ya bir düğüm veya bir spiral noktadır ve eğer $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ise asimptotik kararlı, $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ise kararsızdır.
- λ_1 ve λ_2 tamamen sanal ise o zaman $(0,0)$ ya bir merkez ya da spiral noktadır ve asimptotik kararlı, kararlı veya kararsız olabilir.

- Aksi halde, yani λ_1 ve λ_2 reel eşit veya tamamen sanal değilse, (2.20) hemen hemen lineer sisteminin (0,0) kritik noktası (2.19) lineer sistemi' nin (0,0) kritik noktası ile aynı tip ve kararlılığa sahiptir.

Böylece $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ve $Re(\lambda_1) \neq 0$ ise o zaman (2.20) hemen hemen lineer sisteminin kritik noktasının kararlılığı ve tipi (2.19) lineer sisteminin analizi ile belirlenebilir ve sadece tamamen sanal özdeğerler durumunda (0,0) ın kararlılığı lineer sistemden belirlenemez. $\lambda_1 = \lambda_2$ ve $Re(\lambda_2) = 0$ hassas durumları hariç, (0,0) civarında yörüngeler, nitelik olarak karşılık gelen lineer sistemin yörüngelerine benzeyecektir. Onlar aynı yolla kiritik noktaya girer ve ayrılırlar. Fakat lineer olmayan anlamda "bozulmuş" olabilirler. Tablo 2.2.'de durum özetlenmektedir.

Teorem 2.2.4.1.'de sınıflandırılan durumların önemli bir sonucu şudur: Bir hemen hemen lineer sistemin kritik noktası, eğer lineerleştirilmiş sistemin bir asimtotik kararlı kritik noktası ise asimtotik kararlıdır. Üstelik hemen hemen lineer sistemin bir kritik noktası, eğer lineerleştirilmiş sistemin bir kararsız kritik noktası ise kararsızdır. Eğer bir hemen hemen lineer sistem bir fiziksel olayın modeli olarak kullanılmışsa o zaman bahsedilen hassas durumlar hariç, sistemin bir kritik nokta civarında nitel davranışının, onun lineerleştirilmişinin incelenmesi ile belirlenebileceği görülür [3].

Tablo 2.2. Bir hemen hemen lineer sistemin kritik noktalanın sınıflandırılması [3].

Lineerleştirilmiş Sistemin λ_1, λ_2 Özdeğerleri	Hemen Hemen Lineer Sistemin Kritik Noktasının Tipi
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Kararlı düzensiz düğüm
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Kararlı düğüm veya spiral nokta
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Kararsız eyer nokta
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Kararsız düğüm veya spiral nokta
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Kararsız düzensiz düğüm
$\lambda_1 = \lambda_2 = a \mp bi$ ($a < 0$)	Kararlı spiral nokta
$\lambda_1 = \lambda_2 = a \mp bi$ ($a > 0$)	Kararsız spiral nokta
$\lambda_1, \lambda_2 = \mp bi$	Kararlı veya kararsız, merkez

2.3. Hastalık Dinamikleri İçin Modeller

2.3.1. Bulaşıcı hastalıklar için deterministik modeller

Deterministik modeller, sistemin gelecek durumlarının belirlenmesinde hiçbir rastgelelik olmayan sistemlerdir. Deterministik modelde sistemin herhangi bir

zamanda, nasıl davranacağı önceden dinamik modeli üzerinden hesaplanabilir. Belirli bir model bu nedenle her zaman belirli bir başlangıç koşulundan veya başlangıç durumundan aynı çıktıyı üretirler. Diferansiyel denklemler tarafından tanımlanan fiziksel kanunlar belirli bir noktadaki sistemin durumu açıkça tanımlanmasının zor olmasına rağmen deterministik sistemleri temsil eder.

Bulaşıcı hastalıklar ile ilgili yapılmış çalışmalar göz önüne alındığında, bu modellerde bireyleri sınıflara ayırmışlardır. Örneğin, hassas bireyler, korunmasız bireyler, bulaştırıcı bireyler, iyileşen bireyler gibi sınıflara ayrılırlar. Hassas bireyler, başlangıçta enfeksiyona duyarlıdır. Bireyde mikrop mevcut değildir. Bireyde sadece düşük seviyeli çok özel olmayan bağışıklık vardır. Korunmasız bireyler, enfeksiyonun erken aşamalarında belirli belirtileri gösterebilir veya göstermeyebilir. Bulaştırıcı bireyler, etkeni hassas ve korunmasız bireylere bulaştıran kişilerdir. Bulaştırıcı kişi, bireyle karşılaşır virüsü yayar. Virüsün miktarı zamanla artar. İyileşen hastalar virüsten tedavi olup, başkalarına artık bulaştıramayan kişilerdir [5].

2.3.1.1. SIR model

SIR model akış diyagramı $S \rightarrow I \rightarrow R$ şeklindedir. Bireyler hassas sınıf içinde doğarlar. Hassas bireyler hastalık ile asla temas etmez. Hassas bireylerin bulaştırıcı sınıfa geçtikten sonra hastalığa yakalanmaları mümkündür. Virüslü bireylerden hassaslara hastalık yayılır ve geçirenler sınıfına geçmeden önce birey bulaştırıcı sınıfta kalır. Geçirenler sınıfındaki bireyler ömür boyu bağışık olarak kabul edilir [5].

Demografi olmadan SIR model formülasyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

Klasik bir SIR model kapalı bir nüfus için bir sınıftan ayrılan bireylerin başka bir sınıfa girmesinin zorunlu olduğunu kabul eder (Doğum, ölüm, göç yok.). S, I, R sırasıyla hassasların, bulaştırıcıların ve geçirenlerin oranıdır.

$$S + I + R = 1$$

Hassasların herhangi bir zamandaki enfeksiyon hızı, hassaslarla bulaştırıcıların ilişkilerine bağlıdır. Yani, SI çarpımı ile orantılıdır. Hassas popülasyon azalacağından (bulaştırıcı olacağından) değişim hızı negatif olur.

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

Hastalığı geçirenlerin bulaşıcı popülasyondan çıkma hızı, bulaştırıcı sayısı ile doğru orantılıdır ve $\gamma > 0$ dır. Yani,

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Bulaştırıcı insanların değişim hızı, hassasların bulaştırıcı olma hızından bulaştırıcı insanların geçirenler grubuna geçme hızı arasındaki fark ile elde edilir.

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

Başlangıç koşulları $S(0) > 0, I(0) > 0, R(0) = 0$ dır.

R_0 temel çoğalma sayısı, sağlıklı bir nüfusta bir tipik hastalıklı birey tarafından oluşturulan ikincil enfeksiyonların ortalama sayısıdır. Enfeksiyon bir hassas nüfusun içine yerleştikten sonra başlangıç aşaması göz önünde bulundurulursa ya bir salgın ortaya çıkacaktır ya da virüsün varlığı ortadan kalkacaktır.

$$\frac{dI}{dt} = I(\beta S - \gamma)$$

Eğer $S(0) < 0$ ise $\frac{dI}{dt} < 0$

Bu durumda, enfeksiyon ölür. Böylece, enfeksiyonun hassasları işgal etmesi için kritik bir eşik değerini aşması gerekir. Bu eşik değeri temel çoğalma sayısıdır ve

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$$

Kapalı bir nüfus için eğer hassasların oranı $\frac{1}{R_0}$ 'dan büyük ise bulaşıcı bir hastalık vücudu istila edebilir ve birey virüslü olur.

Aşı politikasında ise eğer hassasların oranı $\frac{1}{R_0}$ 'ın altına düşürülebilirse aşı hastalığı ortadan kaldırabilir [5].

Demografi ile SIR model ise aşağıdaki gibi formülize edilir.

Her bir sınıftaki bireylerin maruz kaldığı doğal doğum ve ölüm oranı μ olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0 \\ \frac{dS}{dt} = \mu - \beta SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases}$$

diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Tüm nüfusun hassas olduğu kabul edilirse

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu} \text{ olur.}$$

Modelde iki tür denge söz konusudur. Bunlar hastalısız denge ve hastalıklı dentedir. Hastalısız dengede virüs mevcut değildir ve nüfusta herkes hassastır. Hastalıklı denge ise yeniden giriş olmadan hastalığın her zaman mevcut olduğu dentedir.

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\beta SI - (\gamma + \mu)I = 0 \text{ ise } I(\beta S - (\gamma + \mu)) = 0$$

olur. $I^* = 0$ veya $S^* = \frac{\gamma + \mu}{\beta}$ olduğunda yukarıdaki eşitlik sağlanır.

$I^* = 0$ hastalısız dentedir.

$S^* = \frac{\gamma + \mu}{\beta} = \frac{1}{R_0}$ hastalıklı dengedir. Bu nedenle, hastalıklı denge R_0 'ın tersi olan bir nüfusta hassasların bir kısmı ile karakterize edilir. Bu denge sadece $R_0 > 1$ olduğunda mümkündür. $S^* = \frac{1}{R_0}$ olduğunda

$$(S^*, I^*, R^*) = \left(\frac{1}{R_0}, \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1), 1 - \frac{1}{R_0} - \frac{\mu}{\beta} (R_0 - 1) \right)$$

Eğer $R_0 > 0$ ise hastalıklı denge karardır, aksi takdirde hastaliksız denge karardır [5].

2.3.1.2. SI model

SI model akış diyagramı $S \rightarrow I$ şeklindedir. Bulaşıcı hastalığın seviyesi bulaştırıcı sınıfa geçen hassas bireylerin oranını etkiler. Enfeksiyon ölümcüldür. Örneğin; kuş gribi (H5N1) [5].

2.3.1.3. SIS model

SIS model akış diyagramı $S \rightarrow I \rightarrow S$ şeklindedir. Bulaşıcı hastalığın seviyesi bulaştırıcı sınıfa geçen hassas bireylerin oranını etkiler. Bir SIS modeli için, enfekte kişiler iyileşme üzerine duyarlı sınıfa geri döner çünkü hastalık yeniden enfeksiyona karşı bağışıklık sağlamaz. Örneğin; cinsel yolla bulaşan hastalıklar [5].

2.3.1.4. SEIR model

SEIR model akış diyagramı $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$ şeklindedir. Bulaşıcı hastalığın seviyesi bulaştırıcı sınıfa geçen hassas bireylerin oranını etkiler. Virüs bireylerde mevcut olduğu zaman gizil evre ortaya çıkar, fakat diğer hassaslara iletilemez (Bulaşıcı değildir.)

- S duyarlı bireylerin oranıdır (hastalığa yakalanabilenler),

- E maruz kalan bireylerin oranıdır (enfekte olmuş ancak henüz bulaşıcı olmayanlar),
- I enfekte bireylerin oranıdır (hastalığı bulaştırabilenler),
- R iyileşmiş bireylerin (bağışıklık kazanmış olanların) oranıdır.

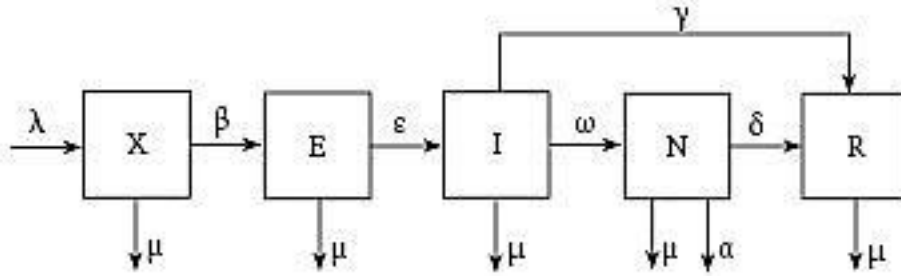
Bireylerin belirli bir bulaşıcı hastalığa karşı bağışıklığı, bu hastalık için geliştirilmiş aşılarda sağlanır. Ayrıca örneğin 6 aylıktan daha küçük bebeklerde annenin plasenta ve kolostrum sütünden geçen IgG antikoru, belirli bir süre yeni doğanların bazı hastalıklara karşı bağışıklık kazanmasını sağlayabilir. Bu şekilde bağışıklığı olmayan yeni doğanlar ise doğrudan S kompartımanına katılmaktadır. Modelde S ve I kompartımanları arasında yeni bir kompartımana yer verilmiştir. Bir patojene maruz kalan birey henüz bulaştırıcılık özelliğine sahip olmaması nedeni ile belirtilen ortalama süre içerisinde bu kompartımanda yer alacaktır. Belirti göstermeme süresi (Latent Period) olarak isimlendirilen bu süre, kuluçka süresine birçok açıdan benzemekle birlikte, bazı bulaşıcı hastalıkların uzun yıllar uyku halinde kalabilmesi nedeni ile farklılık göstermektedir [5].

BÖLÜM 3. COVID-19 PANDEMİSİ İÇİN BİR SALGIN MODELİ

Bu bölümün temel amacı, bir salgın modeli tanımlamak ve yorumlamaktır. Daha sonra Türkiye'deki bazı kayıtlı verileri kullanarak modeli Covid-19 pandemisine uygulamaktır.

3.1. Modelin Oluşumu

Nufusu beş sınıfa ayırdık. $X(t)$, $E(t)$, $I(t)$, $N(t)$, $R(t)$, duyarlı hassas nüfus sınıfı, maruz kalanlar sınıfı, enfekte (bulaşıcı) sınıfı, entübe (ağır hasta) sınıfı, iyileşenler sınıfı olarak, (t) zamanında model oluşturuldu.



Şekil 3.1. Modelin şematik diyagramı.

Modeli oluşturan diferansiyel denklemler aşağıdaki gibidir ve kullanılan parametrelerin tamamı pozitif reel sayılar olup Tablo 3.1.'de parametreler açıklanmıştır.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \lambda - \mu X - \beta XE \\ \frac{dE}{dt} = \beta XE - \varepsilon EI - \mu E \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon EI - (\mu + \omega + \gamma)I \\ \frac{dN}{dt} = \omega I - (\mu + \alpha + \delta)N \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I + \delta N - \mu R \end{cases} \quad (3.1)$$

Tablo 3.1. Parametreler ve açıklama.

Semboller	Tanım
λ	Kişi başına doğum oranı.
μ	Kişi başına doğal ölüm oranı.
α	Virüs kaynaklı ortalama ölüm oranı.
β	Duyarlı nüfusun maruzkalanlar sınıfına geçme hızı.
ε	Maruziyetten enfeksiyöze ilerleme hızı.
ω	Enfekte olanların entübe (ağır hasta) dönüşme hızı.
γ	Enfekte olanların iyileşme oranı.
δ	Entübe hastaların iyileşme oranı.

(3.1) sisteminin ilk dört denklemi bağımsız olduğundan, genelliği kaybetmeden $R(t)$ 'yi atlıyoruz ve sonra sistem (3.1) aşağıdaki diferansiyel denklem sistemine indirgeniyor.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \lambda - \mu X - \beta XE \\ \frac{dE}{dt} = \beta XE - \varepsilon EI - \mu E \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon EI - (\mu + \omega + \gamma)I \\ \frac{dN}{dt} = \omega I - (\mu + \alpha + \delta)N \end{cases} \quad (3.2)$$

3.2. Diferansiyel Denklem Sisteminin Denge Noktaları

3.2.1. Hastalısız denge noktası

Hastalıklı birey olmaması için $E = I = N = 0$ alınırsa ve sistemin sağ tarafındaki ifadeler sıfıra eşitlenirse $\lambda - \mu X = 0 \rightarrow X = \frac{\lambda}{\mu}$ olur.

Ve denge noktası $E_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ elde edilir.

Sistem (3.2)'nin Jacobian matrisi;

$$J = \begin{bmatrix} -\mu - \beta E & -\beta X & 0 & 0 \\ \beta E & \beta X - \varepsilon I - \mu & -\varepsilon E & 0 \\ 0 & \varepsilon I & \varepsilon E - (\mu + \omega + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\mu + \alpha + \delta) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Jacobian matrisi E_0 denge noktasındayken

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta\lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta\lambda}{\mu} - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \omega + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\mu + \alpha + \delta) \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Üreme numarası için aşağıdaki matrisler yazılır.

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\beta\lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \omega + \gamma & 0 \\ 0 & -\omega & \mu + \alpha + \delta \end{pmatrix}$$

Burada FV^{-1} matrisinin baskın özdeğeri $\frac{\beta\lambda}{\mu^2}$ dir, yani gerekli üreme numarası

$$R_0 = \frac{\beta\lambda}{\mu^2} \quad (3.3)$$

şeklinde elde edilir [6-7].

3.2.2. Hastalıklı denge noktası

Teorem 3.2.2.1. $R_0 > 1$ ise, bulaşıcı hastalığın pozitif denge noktası vardır.

İspat. Pozitif denge noktası E_0^* bulalım. (3.2) diferansiyel denklem sisteminin sol tarafı sıfır'a eşitlenerek aşağıdaki ifadeler elde edilir.

(3.2) diferansiyel denklem sisteminin birinci denkleminde,

$$\lambda - \mu X^* - \beta X^* E^* = 0$$

$$X^*(\mu + \beta E^*) = \lambda$$

$$X^* = \frac{\lambda}{\mu + \beta E^*}$$

(3.2) diferansiyel denklem sisteminin ikinci denkleminde,

$$\beta X^* E^* - \varepsilon E^* I^* - \mu E^* = 0$$

$$E^*(\beta X^* - \varepsilon I^* - \mu) = 0$$

$$\beta X^* - \varepsilon I^* - \mu = 0$$

$$I^* = \frac{\beta X^* - \mu}{\varepsilon}$$

(3.2) diferansiyel denklem sisteminin üçüncü denkleminde,

$$\varepsilon E^* I^* - (\mu + \omega + \gamma) I^* = 0$$

$$I^*[\varepsilon E^* - (\mu + \omega + \gamma)] = 0$$

$$\varepsilon E^* - (\mu + \omega + \gamma) = 0$$

$$E^* = \frac{\mu + \omega + \gamma}{\varepsilon}$$

(3.2) diferansiyel denklem sisteminin dördüncü denkleminde,

$$\omega I^* - (\mu + \alpha + \delta) N^* = 0$$

$$N^* = \frac{\omega I^*}{\mu + \alpha + \delta}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
I^* &= \frac{\beta X^* - \mu}{\varepsilon} = \frac{\beta \frac{\lambda}{\mu + \beta E^*} - \mu}{\varepsilon} = \frac{\beta \frac{\lambda}{\mu + \beta \frac{\mu + \omega + \gamma}{\varepsilon}} - \mu}{\varepsilon} = \\
&= \frac{\beta \lambda \varepsilon}{\mu \varepsilon + \beta(\mu + \omega + \gamma)} - \mu = \frac{\beta \lambda \varepsilon - \mu^2 \varepsilon - \beta \mu(\mu + \omega + \gamma)}{\varepsilon^2 \mu + \varepsilon \beta(\mu + \omega + \gamma)} = \\
&= \frac{\mu^2 \varepsilon \left(\frac{\beta \lambda}{\mu^2} - 1 \right) - \beta \mu(\mu + \omega + \gamma)}{\varepsilon^2 \mu + \varepsilon \beta(\mu + \omega + \gamma)} = \frac{\mu^2 \varepsilon (R_0 - 1) - \beta \mu(\mu + \omega + \gamma)}{\varepsilon^2 \mu + \varepsilon \beta(\mu + \omega + \gamma)}
\end{aligned}$$

(3.3)'den elde edilir. $\mu^2 \varepsilon (R_0 - 1) > \beta \mu(\mu + \omega + \gamma)$ olması için $R_0 > 1$ olması gerekir. Böylece I^* değeri pozitif olur. Yani $R_0 > 1$ ise gerekli pozitif denge noktası

$$E_0^* = (X^*, E^*, I^*, N^*) = \left(\frac{\varepsilon I^* + \mu}{\beta}, \frac{\mu + \omega + \gamma}{\varepsilon}, \frac{\mu^2 \varepsilon (R_0 - 1) - \beta \mu(\mu + \omega + \gamma)}{\varepsilon^2 \mu + \varepsilon \beta(\mu + \omega + \gamma)}, \frac{\omega I^*}{\mu + \alpha + \delta} \right) \text{ dir [7].}$$

3.3. Modelin Kararlılığı

3.3.1. Yerel kararlılık

Teorem 3.3.1.1. $R_0 < 1$ ise E_0 denge noktasında (3.2) diferansiyel denklem sistemi yerel olarak karardır. Eğer $R_0 > 1$ ise (3.2) diferansiyel denklem sistemi kararsızdır.

İspat. E_0 denge noktasındayken (3.2) diferansiyel denklem sisteminin jacobian matrisini yazalım

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta \lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta \lambda}{\mu} - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \omega + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\mu + \alpha + \delta) \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ aşağıdaki gibidir.

$$\lambda_1 = -\mu < 0$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta\lambda}{\mu} - \mu = \mu^2(R_0 - 1)$$

$$\lambda_3 = -(\mu + \omega + \gamma) < 0$$

$$\lambda_4 = -(\mu + \alpha + \delta) < 0$$

Özdeğerlerin tümü negatif ise diferansiyel denklem sistemi kararlıdır. $\lambda_2 < 0$ olması için $R_0 < 1$ olmalıdır. $R_0 = 1$ veya $R_0 > 1$ ise $\lambda_2 < 0$ olamaz, böylece (3.2) diferansiyel denklem sistemi kararsız olur. Buda gerekli kanıttır.

Teorem 3.3.1.2. Eğer $R_0 > \frac{\varepsilon\lambda}{\mu(\mu+\omega+\gamma)}$ ise E_0^* denge noktasında (3.2) diferansiyel denklem sistemi yerel olarak kararlıdır. Aksi durum da E_0^* denge noktasında (3.2) diferansiyel denklem sistemi kararsızdır.

İspat. E_0^* denge noktasındayken (3.2) diferansiyel denklem sisteminin jacobian matrisini yazalım

$$J(E_0^*) = \begin{bmatrix} \mu - \beta E^* & -\beta X^* & 0 & 0 \\ \beta E^* & \beta X^* - \varepsilon I^* - \mu & -\varepsilon E^* & 0 \\ 0 & \varepsilon I^* & \varepsilon E^* - (\mu + \omega + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\mu + \alpha + \delta) \end{bmatrix}$$

$$J(E_0^*) = \begin{bmatrix} \mu - \beta E^* & -\beta X^* & 0 & 0 \\ \beta E^* & 0 & -\varepsilon E^* & 0 \\ 0 & \varepsilon I^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\mu + \alpha + \delta) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \\ \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \end{array}$$

$$J(E_0^*) = \begin{bmatrix} \mu - \beta E^* & -\beta X^* & 0 & 0 \\ -\mu & -\beta X^* & -\varepsilon E^* & 0 \\ \beta X^* & \varepsilon I^* & -\varepsilon E^* & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\mu + \alpha + \delta) \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + \frac{\mu R_3}{\beta E^*}}$$

$$J(E_0^*) = \begin{bmatrix} \mu - \beta E^* & -\beta X^* & 0 & 0 \\ 0 & -\beta X^* + \frac{\mu \varepsilon I^*}{\beta E^*} & -\varepsilon E^* - \frac{\mu \varepsilon}{\beta} & 0 \\ \beta X^* & \varepsilon I^* & -\varepsilon E^* & 0 \\ 0 & 0 & \omega & -(\mu + \alpha + \delta) \end{bmatrix}$$

Daha basit olması için bu matrisi aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$J(E_0^*) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Burada,

$$A = \begin{bmatrix} \mu - \beta E^* & -\beta X^* \\ 0 & -\beta X^* + \frac{\mu \varepsilon I^*}{\beta E^*} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\varepsilon E^* - \frac{\mu \varepsilon}{\beta} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \beta X^* & \varepsilon I^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -\varepsilon E^* & 0 \\ \omega & -(\mu + \alpha + \delta) \end{bmatrix} \text{şeklindedir [7].}$$

$J(E_0^*)$ matrisinin özdeğerleri, A ve D matrislerinin özdeğerlerine bağlı olarak değişir.

A matrisinin özdeğerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\lambda_1 = -\mu - \beta E^* < 0$$

$$\lambda_2 = -\beta X^* + \frac{\mu \varepsilon I^*}{\beta E^*} = -\beta \frac{\varepsilon I^* + \mu}{\beta} + \frac{\mu \varepsilon I^*}{\beta E^*} = -\varepsilon I^* - \mu + \frac{\mu \varepsilon I^*}{\beta E^*}$$

$$\lambda_2 = -\mu + \frac{\mu \varepsilon I^*}{\beta E^* \lambda} \left(\lambda - \frac{\beta E^* \lambda}{\mu} \right) = -\mu + \frac{\mu \varepsilon I^*}{\beta E^* \lambda} \left(\lambda - \frac{\beta (\mu + \omega + \gamma) \lambda}{\varepsilon} \right)$$

$$\lambda_2 = -\mu + \frac{\mu \varepsilon I^*}{\beta E^* \lambda} \left(\lambda - \frac{\mu (\mu + \omega + \gamma) \beta \lambda}{\varepsilon \mu^2} \right) = -\mu + \frac{\mu \varepsilon I^*}{\beta E^* \lambda} \left(\lambda - \frac{\mu (\mu + \omega + \gamma)}{\varepsilon} R_0 \right)$$

Eğer $R_0 > \frac{\varepsilon \lambda}{\mu (\mu + \omega + \gamma)}$ ise $\lambda_2 < 0$ dır. D matrisinin özdeğerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\lambda_3 = -\varepsilon E^* < 0$$

$$\lambda_4 = -(\mu + \alpha + \delta) < 0$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3.2. Küresel kararlılık

Teorem 3.3.2.1. Eğer $R_0 < 1$ ise (3.2) diferansiyel denklem sistemi küresel olarak kararlıdır.

İspat. Bu teoremin ispatı için, öncelikle Lyapunov fonksiyonunu L olarak oluşturalım.

$$L = \ln \frac{X}{X_0} + \ln \frac{E}{E_0} + I + N \quad (3.4)$$

(3.4) denklemi zamana göre türevlenirse; Lyapunov kararlılık kriterine göre ,

$$L' = \frac{X'}{X} + \frac{E'}{E} + I' + N'$$

$$L' = \frac{\lambda}{X} - \mu - \beta E + \beta X - \varepsilon I - \mu + \varepsilon EI - (\mu + \omega + \gamma)I + \omega I - (\mu + \alpha + \delta)N$$

$$L' = \frac{\lambda}{X} - 2\mu - \beta E + \beta X + \varepsilon EI - (\mu + \varepsilon + \gamma)I - (\mu + \alpha + \delta)N$$

Elde edilir. Yukarıdaki denklemde E_0 yerine yazarak,

$$L' = \mu - 2\mu + \beta \frac{\lambda}{\mu} = \beta \frac{\lambda}{\mu} - \mu = \mu \left(\frac{\beta\lambda}{\mu^2} - 1 \right) = \mu(R_0 - 1) \quad \text{bulunur.} \quad L' < 0 \text{ olması}$$

için $R_0 < 1$ olması gereklidir. Bu durumda (3.2) diferansiyel denklem sistemi küresel olarak kararlıdır.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Modelin Türkiye Verilerine Uygulanması

Tez çalışmasının bu bölümünde Bölüm 3.1.'de oluşturulan modelin parametre değerlerine karşılık gelen 25.10.2020 ve 03.07.2021 tarihli Türkiye verileri [8,9,10,11] Tablo 4.1.'de Türkiye nüfusunun sınıflandırılması da Tablo 4.2.'de verilmiştir.

Tablo 4.1. Parametreler ve Türkiye verileri.

Semboller	Tanım	Türkiye Verileri (25.10.2020)	Türkiye Verileri (03.07.2021)
λ	Kişi başına doğum oranı.	0,015	0,013
μ	Kişi başına doğal ölüm oranı.	0,053	0,053
α	Virüs kaynaklı ortalama ölüm oranı.	0,084	0,062
β	Duyarlı nüfusun maruzkalanlar sınıfına geçme hızı.	0,192	0,078
ε	Maruziyetten enfeksiyöze ilerleme hızı.	0,166	0,023
ω	Enfekte olanların entübe (ağır hasta) dönüşme hızı.	0,033	0,010
γ	Enfekte olanların iyileşme oranı.	0,843	0,887
δ	Entübe hastaların iyileşme oranı.	0,687	0,785

Tablo 4.2. Türkiye nüfusunun sınıflandırılması.

Sınıf	Tanımlı	Türkiye Verileri (25.10.2020)	Türkiye Verileri (03.07.2021)
X(t)	Duyarlı Nüfus	57.999.210 (0,987)	52.875.643 (0,829)
E(t)	Maruz Kalanlar	361.801 (0,006)	5.440.368 (0,085)
I(t)	Enfekte (Bulaşıcı)	47.411 (0,001)	129.599 (0,002)
N(t)	Entübe (Ağır Hasta)	15.751 (0,0003)	75.293 (0,001)
R(t)	İyileşenler	314.390 (0,0057)	5.310.769 (0,083)

4.1.1. Türkiye covid-19 verilerine göre hastalısız denge noktası

Tablo 4.1.'de verilen verilere göre denge noktası

$E_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}; 0; 0; 0\right) = \left(\frac{0,013}{0,053}, 0, 0, 0\right) = (0,245; 0; 0; 0)$ dır. Buna göre sistemin jacobian matrisi denge noktasında 25.10.2020 tarihli veriler yazılırsa

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -0,053 & -0,054 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,927 & 0 \\ 0 & 0 & 0,033 & -0,824 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

Buradan üreme numarası (3.3)'e göre $R_0 = \frac{\beta\lambda}{\mu^2} = \frac{(0,015) \cdot (0,192)}{(0,053)^2} \cong 1,025$ bulunur.

03.07.2021 tarihli veriler yazılırsa

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -0,053 & -0,019 & 0 & 0 \\ 0 & -0,034 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,94 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 & -0,89 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

Buradan üreme numarası (3.3)'e göre $R_0 = \frac{\beta\lambda}{\mu^2} = \frac{(0,078) \cdot (0,013)}{(0,053)^2} \cong 0,361$ bulunur.

4.1.2. Türkiye covid-19 verilerine göre hastalıklı denge noktası

Türkiye için 25.10.2020 tarihli verilere göre bulduğumuz $R_0 \cong 1,025$ olduğu için pozitif denge noktasına sahiptir bu nokta

$$E_0^* = \left(\frac{\varepsilon I^* + \mu}{\beta}, \frac{\mu + \omega + \gamma}{\varepsilon}, \frac{\mu^2 \varepsilon (R_0 - 1) - \beta \mu (\mu + \omega + \gamma)}{\varepsilon^2 \mu + \varepsilon \beta (\mu + \omega + \gamma)}, \frac{\omega I^*}{\mu + \alpha + \delta} \right)$$

$E_0^* \cong (0,277; 5,596; -0,125; 0,000037)$ elde edilir.

Türkiye için 03.07.2021 tarihli verilere göre bulduğumuz $R_0 \cong 0,361 < 1$ olduğu için sistem (3.2) pozitif denge noktasına sahip değildir.

4.2. Modelin Kararlılığı

4.2.1. Yerel kararlılık

Türkiye için 03.07.2021 tarihli verilere göre $E_0 = (0,245; 0; 0; 0)$ denge noktasında sistem (3.2)'nin jacobian matrisi

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -0,053 & -0,019 & 0 & 0 \\ 0 & -0,034 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,94 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 & -0,89 \end{bmatrix} \text{ bulunmuştur.}$$

Bu matrisin öz değerleri;

$$\lambda_1 = -0,053 < 0$$

$$\lambda_2 = -0,034 < 0$$

$$\lambda_3 = -0,940 < 0$$

$$\lambda_4 = -0,890 < 0$$

şeklinde hesaplanır. Bulduğumuz $R_0 \cong 0,361 < 1$ olduğu için Teorem 3.3.1.1.'e göre sistem (3.2) yerel olarak kararlıdır.

Türkiye için 25.10.2020 tarihli verilere göre $E_0^* \cong (0,277; 5,596; -0,125; 0,000037)$ denge noktasında bulduğumuz $R_0 \cong 1,025$ ve $\frac{\varepsilon\lambda}{\mu(\mu+\omega+\gamma)} = \frac{(0,166) \cdot (0,015)}{(0,053) \cdot (0,929)} \cong 0,051$ değerleri için; Teorem 3.3.1.2.'e göre $R_0 > \frac{\varepsilon\lambda}{\mu(\mu+\omega+\gamma)}$ olduğundan sistem (3.2) yerel olarak kararlıdır.

4.2.2. Küresel kararlılık

Lyapunov fonksiyonuna göre

$$L' = \frac{X'}{X} + \frac{E'}{E} + I' + N'$$

$$L' = \frac{\lambda}{X} - \mu - \beta E + \beta X - \varepsilon I - \mu + \varepsilon EI - (\mu + \omega + \gamma)I + \omega I - (\mu + \alpha + \delta)N$$

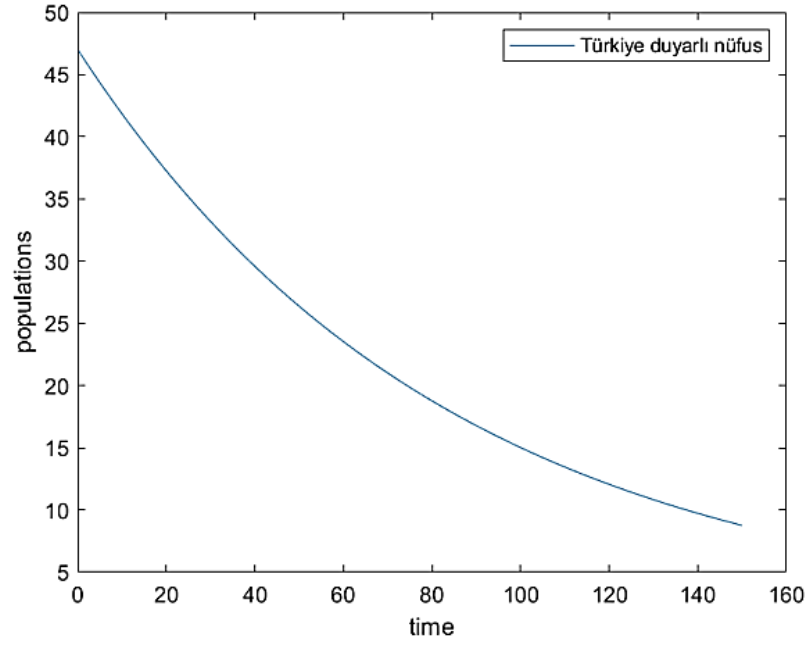
$$L' = \frac{\lambda}{X} - 2\mu - \beta E + \beta X + \varepsilon EI - (\mu + \varepsilon + \gamma)I - (\mu + \alpha + \delta)N$$

Yukarıdaki denklemde $E_0 = (0,245; 0; 0; 0)$ yerine yazarak, $L' = \beta \frac{\lambda}{\mu} - \mu = \beta \cdot 0,245 - \mu$ bulunur, Türkiye için 03.07.2021 tarihli verilere göre burada β ve μ değerleri yazılırsa $L' = (0,078) \cdot (0,245) - 0,053 = -0,03389$ elde edilir. Lyapunov kararlılık kriterine göre (3.2) diferansiyel denklem sistemi küresel olarak kararlıdır.

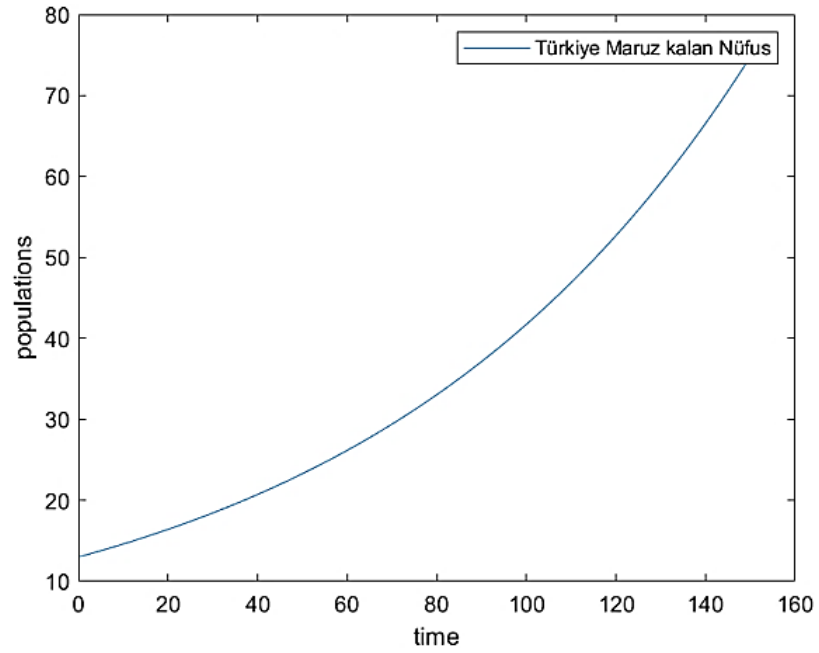
Ayrıca Teorem 3.3.2.1.'e göre $R_0 \cong 0,361 < 1$ olduğu için sistem (3.2) küresel olarak kararlıdır.

4.3. Modelin Simulasyonu

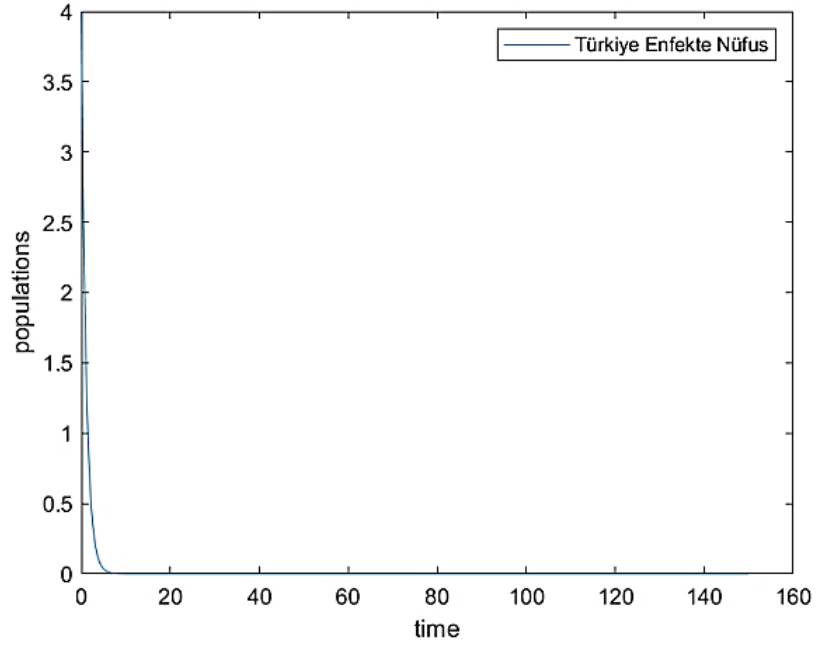
Diferansiyel denklem sistemi (3.1)'in sonucunun RK₄ yöntemi ile Matlab programında Türkiye 03.07.2021 tarihli veriler kullanılarak grafikleri çizdirilmiştir. Bu grafiklere göre duyarlı, enfekte ve entübe sınıflarının nüfusu giderek azalmakta, hastalığa maruz kalanlar ve kurtulan sınıflarının nüfusu ise giderek artmaktadır.



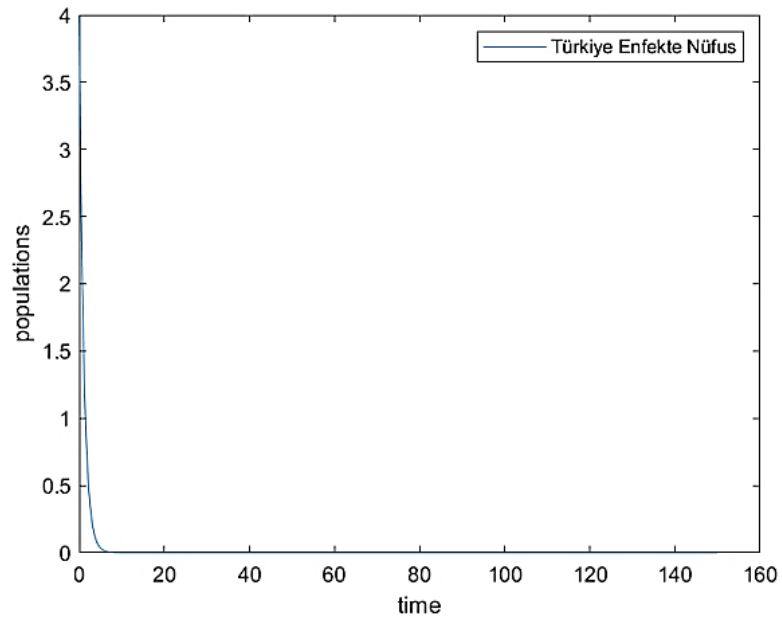
Şekil 4.1. Türkiye (03.07.2021) tarihli duyarlı nüfusun zamana göre değişimi.



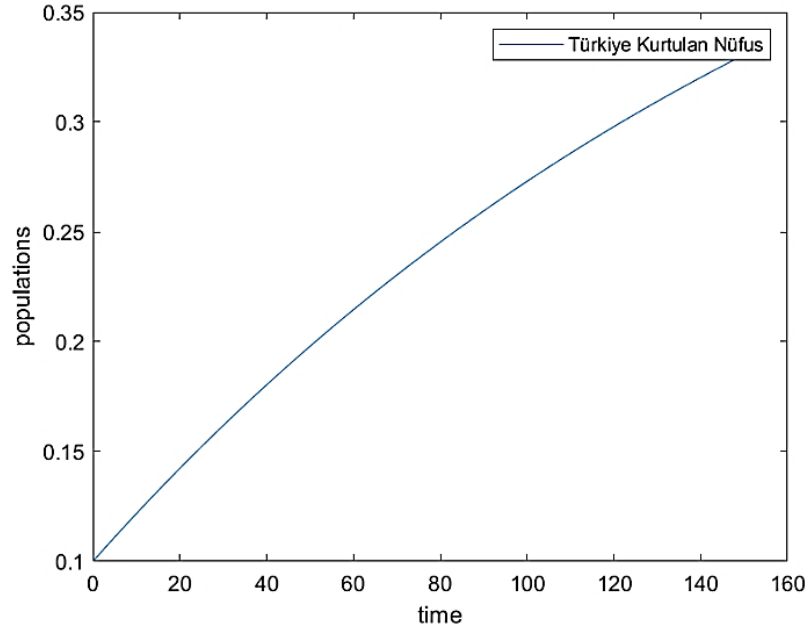
Şekil 4.2. Türkiye (03.07.2021) tarihli maruz kalan nüfusun zamana göre değişimi.



Şekil 4.3. Türkiye (03.07.2021) tarihli enfekte nüfusun zamana göre değişimi.

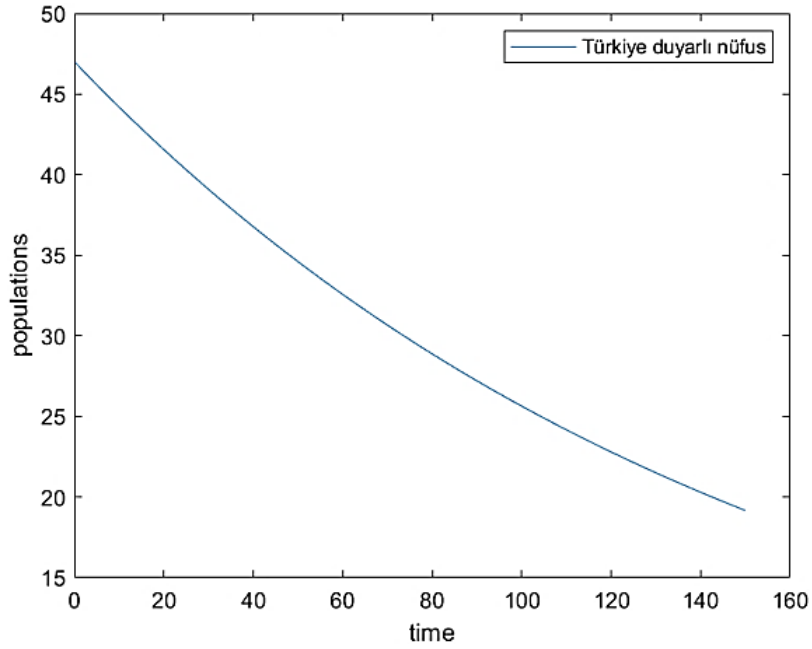


Şekil 4.4. Türkiye (03.07.2021) tarihli entübe nüfusun zamana göre değişimi.

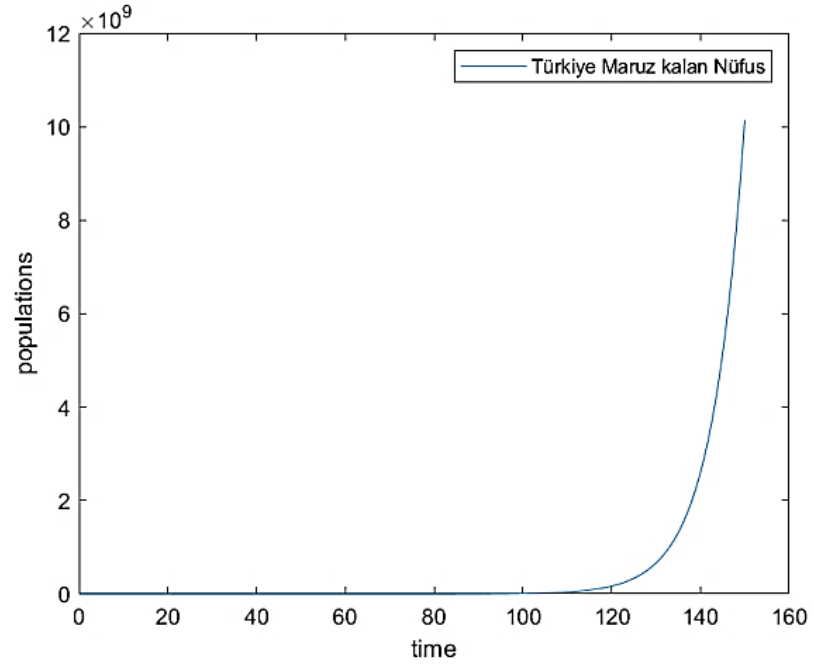


Şekil 4.5. Türkiye (03.07.2021) tarihli kurtulan nüfusun zamana göre değişimi.

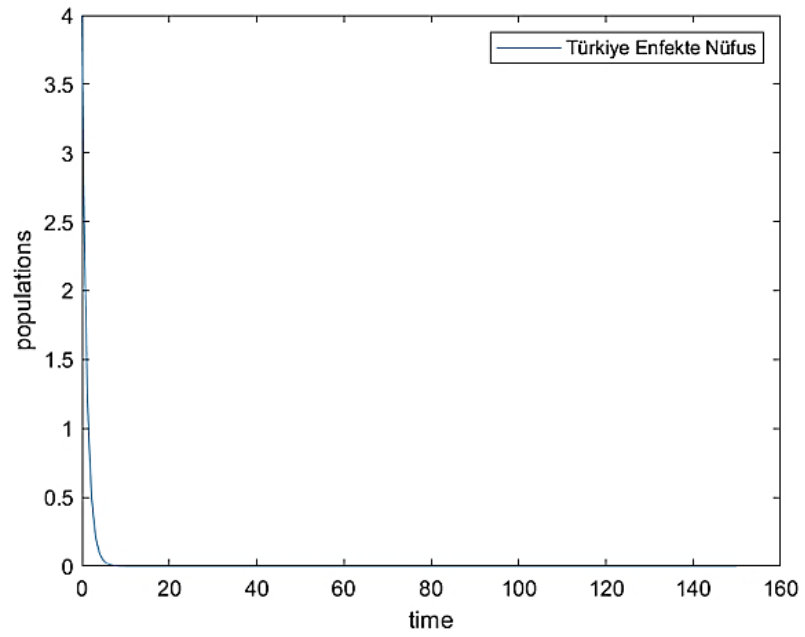
Diferansiyel denklem sistemi (3.1)'in sonucunun RK₄ yöntemi ile Matlab programında Türkiye 25.10.2020 tarihli veriler kullanılarak grafikleri çizdirilmiştir. Bu grafiklere göre duyarlı, enfekte ve entübe sınıflarının nüfusu giderek azalmakta, hastalığa maruz kalanlar ve kurtulan sınıflarının nüfusu ise giderek artmaktadır.



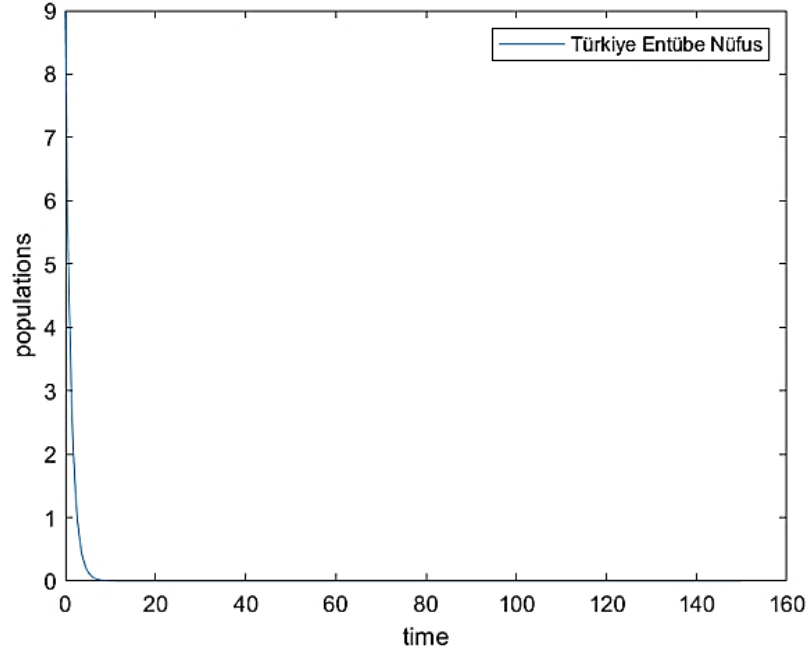
Şekil 4.6. Türkiye (25.10.2020) tarihli duyarlı nüfusun zamana göre değişimi.



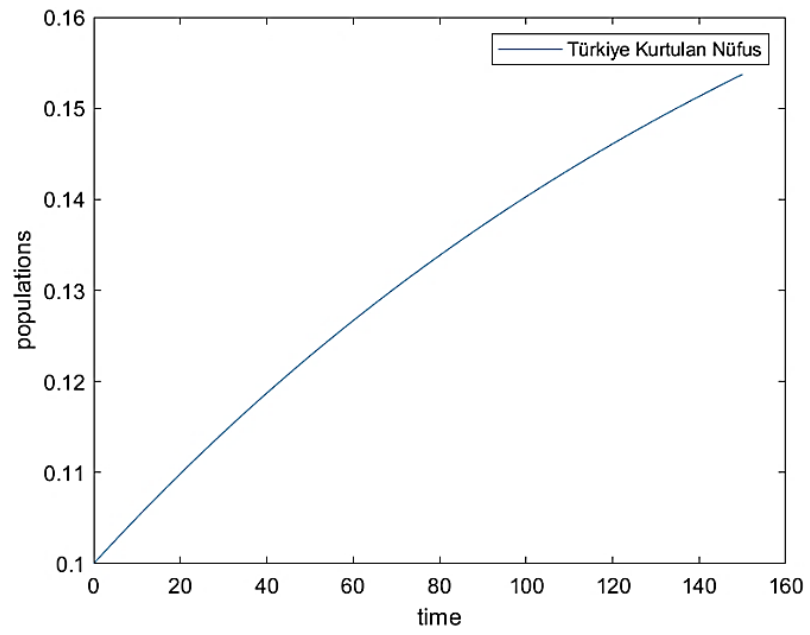
Şekil 4.7. Türkiye (25.10.2020) tarihli maruz kalan nüfusun zamana göre değişimi.



Şekil 4.8. Türkiye (25.10.2020) tarihli enfekte nüfusun zamana göre değişimi.



Şekil 4.9. Türkiye (25.10.2020) tarihli entübe nüfusun zamana göre değişimi.



Şekil 4.10. Türkiye (25.10.2020) tarihli kurtulan nüfusun zamana göre değişimi.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Herhangi bir bulaşıcı hastalıkla ilgili en önemli endişelerden biri, hastalığın nüfusu istila etme yeteneğidir. Birçok epidemiyolojik model, popülasyonun hastalık yokluğunda kaldığı hastalısız bir dengeye sahiptir. Bu modeller genellikle bir eşik parametresine sahiptir, temel üreme numarası olarak bilinen R_0 bu eşik parametresi olarak tanımlanır. Bir Matematiksel modelin R_0 üreme sayısı, salgının artıp azalması hakkında bize oldukça önemli bilgiler sunmaktadır. R_0 modelin parametrelerinden oluşmaktadır. Bizim modelimizde $R_0 = \frac{\beta\lambda}{\mu^2}$ bulunmuştur. $R_0 < 1$ ise salgın zamanla bitmeye yakındır. $R_0 = 1$ ise salgın dengededir hiçbir zaman yok olmaz. $R_0 > 1$ ise, bulaşıcılık zaman geçtikçe artmaktadır. R_0 bize modelin kararlılığı hakkında da bilgi sunmaktadır. $R_0 < 1$ ise diferansiyel denklem sistemi kararlıdır. $R_0 = 1$ veya $R_0 > 1$ ise sistem kararsızdır. Covid-19 küresel pandemisi için hesaplanacak R_0 üreme sayısı alınacak tedbirler içinde bize yol gösterebilir. Kısıtlamaların artırılıp azaltılması kararları için R_0 değeri analiz edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Lyapunov, A.M., The General Problem of the Stability of Motion, Üniv. Kharkov, PhD thesis, 1892.
- [2] Carcione J.M., Santos J.E., Bagaini C., Ba J., A Simulation of a COVID-19 Epidemic Based on a Deterministic SEIR Model, *Frontiers in Public Health*, 8: 2296-2565, 2020.
- [3] Edwards C.M. ve Penney D.E., Diferansiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri (çev. Prof. Dr. Ömer Akın). İçinde: *Lineer Olmayan Sistemler ve Olaylar (Fenomenler)*. 3.Baskıdan Çeviri, Palme Yayıncılık, Ankara, 366-434, 2005.
- [4] Boyce W. E. ve DiPrima R. C., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. İçinde: *Nonlinear Differential Equations and Stability*. 7. Baskı, John Wiley & Sons Inc., New York, 459-540, 2001.
- [5] Haran M., *An introduction to models for disease Dynamics*, SAMSI, Kuzey Karolina, 5-25, 2009.
- [6] Van den Driessche P., Watmough J., *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*, *Mathematical Biosciences*, 180(1-2), 29-48, 2002.
- [7] Alzahrani E., Zeb A., *Stability analysis and prevention strategies of tobacco smoking model*, *Bound Value Probl.*, 3, 2020.
- [8] <https://corona.cbddo.gov.tr/Home/DeathConfirmedRatio>, Erişim Tarihi: 04.07.2021.
- [9] <https://data.tuik.gov.tr/Bulten/Index?p=Dogum-Istatistikleri-2020-33706>, Erişim Tarihi: 04.07.2021.
- [10] <https://www.nufusu.com/turkiye-nufusu-yas-gruplari>, Erişim Tarihi: 04.07.2021.
- [11] <https://data.tuik.gov.tr/Bulten/Index?p=Olum-ve-Olum-Nedeni-Istatistikleri-2019-33710>, Erişim Tarihi: 04.07.2021.

EKLER

EK A: Türkiye Covid -19 pandemi modelinin 03.07.2021 tarihli verilere göre runge-kutta dördüncü dereceden metoduyla matlab simülasyonu.

```
dX/dt= λ-βXE-μX; βE=a μ = b alındı.  
% Runge Kutta code to solve predator-prey problem  
% dx/dt = 0.013- ax- bx %Türkiye Duyarlı nüfus  
% Constants  
a=0.00663;  
b=0.0053;  
% Define function handles  
fx = @(t, x) 0.013- a*x- b*x ;  
% initial Conditions  
t(1) = 0 ;  
x(1) = 47;  
% step size  
h= 0.00001 ;  
tfinal= 150;  
N = ceil(tfinal/h);  
% update loop  
for a=1:N  
% update time  
t(a+1)= t(a)+h;  
% update x  
k1x = fx(t(a) , x(a));  
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);  
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);  
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);  
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);  
end  
% plot the solution 48  
figure (1); clf (1)  
plot(t,x)  
hold on  
xlabel ('time')  
ylabel ('populations')  
legend ('Türkiye duyarlı nüfus')  
set(gca, 'FontSize')  
0×0 empty cell array  
Published with MATLAB® R2021a
```

```

dE/dt= βXE-εEI-μE; βX = a , εI = b, E=x alınmıştır.
% Runge Kutta code to solve predator-prey problem
% dx/dt = ax-bx-0.053x %Türkiye Maruz Kalan Nüfus
% Constants
a= 0.064662;
b= 0,000046;
% Define function handles
fx = @(t, x) a*x-b*x-0.053*x ;
% initial Conditions
t(1) = 0 ;
x(1) = 13;
% step size
h= 0.00001 ;
49
tfinal= 150;
N = ceil(tfinal/h);
% update loop
for a=1:N
% update time
t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Türkiye Maruz kalan Nüfus')
set(gca, 'FontSize')
0×0 empty cell array
Published with MATLAB® R2021a

```

```

dI/dt =εEI-(μ+ω+γ)I; ωE = a, (μ+ω+γ) = b, I= x olarak alınmıştır.
Runge Kutta code to solve predator-prey problem
% dx/dt = ax-bx %Türkiye Enfekte Nüfus
% Constants
a=0.00085;
b=0.95;
% Define function handles
fx = @(t, x) a*x -b*x ;
% initial Conditions

```

```

t(1) = 0 ;
x(1) = 4;
% step size
h= 0.00001 ;
tfinal= 150;
N = ceil(tfinal/h);
% update loop
for a=1:N
% update time
t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
51
legend ('Türkiye Enfekte Nüfus')
set(gca, 'FontSize')
0×0 empty cell array
Published with MATLAB® R2021a

```

$\frac{dN}{dt} = \omega I - (\mu + \alpha + \delta)N$; $\omega I = a$, $(\mu + \alpha + \delta) = b$, $N = x$ olarak alınmıştır.

% Runge Kutta code to solve predator-prey problem

% $\frac{dx}{dt} = a - bx$ %Türkiye Entübe Nüfus

% Constants

a= 0.00002;

b=0.9;

% Define function handles

fx = @(t, x) a-b*x;

% initial Conditions

t(1) = 0 ;

x(1) = 9;

% step size

h= 0.00001 ;

tfinal= 150;

N = ceil(tfinal/h);

% update loop **52**

```

for a=1:N
% update time
t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Türkiye Entübe Nüfus')
set(gca, 'FontSize')
0×0 empty cell array
Published with MATLAB® R2021a

```

$dR/dt = \gamma I + \delta N - \mu R$; $\gamma I + \delta N = a$, $\mu = b$, $R = x$ olarak alınmıştır.

```

% Runge Kutta code to solve predator-prey problem
% dx/dt = a-bx %Türkiye Kurtulan Nüfus
% Constants
a= 0.002559;
b=0.0053;
% Define function handles
fx = @(t, x) a-b*x ;
% initial Conditions
t(1) = 0 ;
x(1) = 0.1;
% step size
h= 0.00001 ;
tfinal= 150;
N = ceil(tfinal/h);
% update loop
for a=1:N
% update time
t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution

```



```
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Türkiye Kurtulan Nüfus')
set(gca, 'FontSize')
0×0 empty cell array
54
Published with MATLAB® R2021a
```

EK B: Türkiye Covid -19 pandemi modelinin 25.10.2020 tarihli verilere göre runge-kutta dördüncü dereceden metoduyla matlab simülasyonu.

```

dX/dt= λ-βXE-μX; βE=a μ = b alındı.
% Runge Kutta code to solve predator-prey problem
% dx/dt = 0.015- ax- bx %Türkiye Duyarlı nüfus
% Constants
a=0.0012;
b=0.0053;
% Define function handles
fx = @(t, x) 0.015- a*x- b*x ;
% initial Conditions
t(1) = 0 ;
x(1) = 47;
% step size
h= 0.00001 ;
tfinal= 150;
N = ceil(tfinal/h);
% update loop
for a=1:N
% update time
t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution 48
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Türkiye duyarlı nüfus')
set(gca, 'FontSize')
0×0 empty cell array
Published with MATLAB® R2021a

```

```

dE/dt= βXE-εEI-μE; βX = a , εI = b, E=x alınmıştır.
% Runge Kutta code to solve predator-prey problem
% dx/dt = ax-bx-0.053x %Türkiye Maruz Kalan Nüfus
% Constants
a= 0.189504;
b= 0,000166;
% Define function handles

```

```

fx = @(t, x) a*x-b*x-0.053*x ;
% initial Conditions
t(1) = 0 ;
x(1) = 13;
% step size
h= 0.00001 ;
49
tfinal= 150;
N = ceil(tfinal/h);
% update loop
for a=1:N
% update time
t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Türkiye Maruz kalan Nüfus')
set(gca, 'FontSize')
0×0 empty cell array
Published with MATLAB® R2021a

```

$dI/dt = \epsilon EI - (\mu + \omega + \gamma)I$; $\omega E = a$, $(\mu + \omega + \gamma) = b$, $I = x$ olarak alınmıştır.

Runge Kutta code to solve predator-prey problem

% dx/dt = ax-bx %Türkiye Enfekte Nüfus

% Constants

a=0.000198;

b=0.929;

% Define function handles

fx = @(t, x) a*x -b*x ;

% initial Conditions

t(1) = 0 ;

x(1) = 4;

% step size

h= 0.00001 ;

tfinal= 150;

N = ceil(tfinal/h);

% update loop

for a=1:N

```

% update time
t(a+1)= t(a)+h;
% update x
k1x = fx(t(a) , x(a));
k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);
k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);
k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);
x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);
end
% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
51
legend ('Türkiye Enfekte Nüfus')
set(gca, 'FontSize')
0×0 empty cell array
Published with MATLAB® R2021a

```

$dN/dt = \omega I - (\mu + \alpha + \delta)N$; $\omega I = a$, $(\mu + \alpha + \delta) = b$, $N = x$ olarak alınmıştır.

% Runge Kutta code to solve predator-prey problem

% $dx/dt = a - bx$ %Türkiye Entübe Nüfus

% Constants

a= 0.000033;

b=0.824;

% Define function handles

fx = @(t, x) a-b*x;

% initial Conditions

t(1) = 0 ;

x(1) = 9;

% step size

h= 0.00001 ;

tfinal= 150;

N = ceil(tfinal/h);

% update loop **52**

for a=1:N

% update time

t(a+1)= t(a)+h;

% update x

k1x = fx(t(a) , x(a));

k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);

k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);

k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);

x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);

end

```

% plot the solution
figure (1); clf (1)
plot(t,x)
hold on
xlabel ('time')
ylabel ('populations')
legend ('Türkiye Entübe Nüfus')
set(gca, 'FontSize')
0×0 empty cell array
Published with MATLAB® R2021a

```

$dR/dt = \gamma I + \delta N - \mu R$; $\gamma I + \delta N = a$, $\mu = b$, $R = x$ olarak alınmıştır.

```

% Runge Kutta code to solve predator-prey problem

```

```

% dx/dt = a-bx %Türkiye Kurtulan Nüfus

```

```

% Constants

```

```

a= 0.0010491;

```

```

b=0.0053;

```

```

% Define function handles

```

```

fx = @(t, x) a-b*x ;

```

```

% initial Conditions

```

```

t(1) = 0 ;

```

```

x(1) = 0.1;

```

```

% step size

```

```

h= 0.00001 ;

```

```

tfinal= 150;

```

```

N = ceil(tfinal/h);

```

```

% update loop

```

```

for a=1:N

```

```

% update time

```

```

t(a+1)= t(a)+h;

```

```

% update x

```

```

k1x = fx(t(a) , x(a));

```

```

k2x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k1x);

```

```

k3x = fx (t(a)+h/2 , x(a)+h/2*k2x);

```

```

k4x = fx (t(a)+h , x(a)+h *k3x);

```

```

x(a+1)= x(a) + h/6 * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x);

```

```

end

```

```

% plot the solution

```

```

figure (1); clf (1)

```

```

plot(t,x)

```

```

hold on

```

```

xlabel ('time')

```

```

ylabel ('populations')

```

```

legend ('Türkiye Kurtulan Nüfus')

```

```

set(gca, 'FontSize')

```

```

0×0 empty cell array

```

```

54

```

```

Published with MATLAB® R2021a

```

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nejdet KÖKER

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik	Devam ediyor
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi / Fen Edebiyat Fakültesi / Matematik	1999
Lise	Yerköy Lisesi	1994

İŞ DENEYİMİ

Yıl	Yer	Görev
2021-Halen	Yaşar Acar Fen Lisesi	Öğretmen
2010-2021	Büyükçekmece Atatürk Anadolu Lisesi	Öğretmen
2007-2010	Hadımköy Örfi Çetinkaya Anadolu Lisesi	Öğretmen
2005-2007	Beylikdüzü 75.yıl Cumhuriyet Lisesi	Öğretmen
1999-2005	Ahmediye Doğu İlköğretim Okulu	Öğretmen

YABANCI DİL

İngilizce

HOBİLER

Spor, Satranç