T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAFIZA TERİMLİ LİNEER OLMAYAN HİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI VE PATLAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yılmaz YILMAZ

Enstitü Anabilim Dalı : **MATEMATİK**

Enstitü Bilim Dalı : **UYGULAMALI MATEMATİK**

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Metin YAMAN**

Temmuz 2020

BEYAN

Tez içerisindeki bütün verilerin akademik kurallar kullanılarak tarafımdan elde edildiğini, yazılı ve görsel tüm bilgilerin ve sonuçların etik ve akademik kurallara uygun bir şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde hiçbir tahrifat yapılmadığını, başka yazarların eserlerinden faydanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bunulduğunu, tezde bulunan verilerin bu üniversite ya da herhangi başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Yılmaz YILMAZ

09.07.2020

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitim hayatım boyunca kıymetli bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, birçok konuda destek aldığım, araştırmanın hazırlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, her fırsatta bilimsel çalışmalar yapmama teşvik eden, yönlendiren kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Metin YAMAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

α	: Alfa
β	: Beta
χ	: Chi
Δ	: Delta
δ	: Delta
ε	: Epsilon
Γ	: Gama
γ	: Gama
κ	: Kappa
∂	: Kısmi Türev Operatörü
ξ	: Ksi
λ	: Lambda
μ	: Mu
∇	: Nabla Operatörü
ν	: Nu
ω	: Omega
Ω	: Omega
ϕ	: Phi
φ	: Phi
ψ	: Psi
ρ	: Ro
τ	: Tau
θ	: Teta

ÖZET

Anahtar kelimeler: Ters problem, Asimptotik davranış, Lineer olmayan hiperbolik denklemler, Çözümlerin patlaması, Hafıza terimi

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezde kullanılan notasyonlar ve temel eşitsizlikler verilmiştir. Aynı zamanda Genelleştirilmiş Konkavlık Lemması ve ispatı verilmiştir. Ayrıca Sobolev uzayının tanımı ve bazı teoremleri ile Sobolev-Poincare eşitsizliği ve ispatı verilmiştir.

İkinci bölümde, ters problem örnekleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, hafıza terimli lineer olmayan hiperbolik denklemler için ters problemin çözümünün asimptotik davranışı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, hafıza terimli lineer olmayan hiperbolik denklemler için ters problemin çözümünün patlaması incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise tez çalışmasından elde edilen sonuçlar ve öneriler belirtilmiştir.

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR AND BLOW UP OF THE SOLUTION OF THE INVERSE WITH MEMORY TERM PROBLEM FOR NONLINEAR HYPERBOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

Keywords: Inverse problem, Asymptotic stability, Nonlinear hyperbolic equations, Blow up, Memory term

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, notations and main equalities used in the thesis are given. Furthermore, Generalized Concavity Lemma and it's proof are given. In addition to, definitions and theorems of Sobolev Spaces, Sobolev-Poincare Inequality and proof of Poincare Inequality are given.

In the second chapter, inverse problem examples are given.

In the third chapter, asymptotic behaviour of the solution of the inverse with memory term problem for nonlinear hyperbolic partial differential equations is examined.

In the fourth chapter, blow up of the solution of the inverse with memory term problem for nonlinear hyperbolic partial differential equations is examined.

Finally in the fifth chapter, the results and suggestions are stated gained through the study of thesis.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Notasyonlar

Bu bölümde semboller ve işaretler tanıtılacaktır.

$\mathbb{R}^n$, n boyutlu Öklid uzayıdır.

Ω , $\mathbb{R}^n$ de sınırlı bir bölgedir.

$\partial\Omega$, Ω bölgesinin düzgün sınırıdır.

C^m, m. mertebeye kadar türevli ve sürekli fonksiyonlar uzayıdır.

$u = u(x, y, z)$ $\mathbb{R}^3$ ten bir fonksiyon ve $F = (F_1, F_2, F_3)$ vektör olsun.

$\nabla u = gradu = (u_x , u_y, u_z)$,

$\nabla. F = divF = (F_x ,\ F_y , F_z)$

$\Delta u = div(gradu) = \nabla. \nabla u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

$|\nabla u|^2 = u_x{}^2 + u_y{}^2 + u_z{}^2$,

$\nabla.\nabla = \nabla^2 = \Delta$

$L_P(\Omega)$, $(p \geq 1)$ Ω bölgesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonları içeren Banach uzayıdır ve

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{1/p} \tag{1.1}$$

sonlu norma sahiptir.

$L_2(\Omega)$ deki norm, $\|\,.\,\|$ şeklinde gösterilmiştir. u ile v nin skaler çarpımı,

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega uv\, dx \tag{1.2}$$

şeklinde gösterilir.

$$\|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

$$\|\nabla u\|_2 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2} \tag{1.4}$$

Green Özdeşliği,

$\frac{\partial u}{\partial n}$, n dış normaline göre türevi göstermek üzere özdeşlik kısmi integrasyonun genelleştirilmiş halidir ve

$$\int_\Omega u\Delta v\ dx = -\int_\Omega \nabla u . \nabla v\, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n}\, ds \tag{1.5}$$

şeklindedir.

Leibniz Formülü,

$F(x) = \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy$ iken

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\, dy\right)$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} f_x(x, y)\, dy + f(y_1)\, y_1' - f(y_0)\, y_0'$$

şeklindedir.

1.2. Temel Eşitsizlikler

1) Cauchy Eşitsizliği:

a, b sabit reel sayılar olmak üzere

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \tag{1.6}$$

dir.

2) ε-Young Eşitsizliği:

a_1, b, ε pozitif reel sayılar ve $q, q' > 1$ için $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ olmak üzere,

$$a_1 b \leq \frac{\varepsilon^q \, {a_1}^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q' \varepsilon^q} \tag{1.7}$$

şeklindedir.

3) Hölder Eşitsizliği:

$1 \leq p, q \leq \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere, $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$ ise bölge üzerinde

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q \tag{1.8}$$

dir. Eşitsizlikte özel olarak $p = q = 2$ alınırsa, Cauchy-Schwarz eşitsizliği elde edilir.

4) Genelleştirilmiş Konkavlık Lemması:

Bir $\psi(t) \epsilon C^2$, $\psi(t) > 0$ fonksiyonu, $\gamma > 0$, $c_1, c_2 \geq 0$ reel sayıları için

$$\psi''(t)\psi(t) - (1+\gamma)(\psi'(t))^2 \geq -2c_1 \psi(t)\psi'(t) - c_2 \psi^2(t) \tag{1.9}$$

eşitsizliğini sağlarsa

(i) $\gamma_{1=} - c_1 + \sqrt{{c_1}^2 + \gamma c_2}$

$$\gamma_{2=} - c_1 - \sqrt{{c_1}^2 + \gamma c_2} \tag{1.10}$$

olmak üzere

$$\psi(0) > 0,\ \psi'(0) > -\gamma_2\,\gamma^{-1}\psi(0)\ ,\ c_1 + c_2\ > 0 \tag{1.11}$$

olması halinde t_2 sayısı

$$t_2\ = \frac{1}{\sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}} \ln\ \frac{\gamma_1\,\psi(0)+\gamma\psi'(0)}{\gamma_2\,\psi(0)+\gamma\psi'(0)} \tag{1.12}$$

formülünden hesaplanmak üzere öyle bir $t_1\ <\ t_2$ pozitif reel sayısı vardır ki

$$t \to t_1\ \ \text{için}\quad \psi(t) \to \infty \tag{1.13}$$

olur.

(ii) $\psi(0) > 0,\ \psi'(0)\ \ c_1\ = c_2\ = 0$ olması halinde t_2 sayısı

$$t_2\ = \frac{\psi(0)}{\gamma\psi'(0)} \tag{1.14}$$

formülünden hesaplanmak üzere öyle bir $t_1\ <\ t_2$ pozitif reel sayısı vardır ki

$$t \to t_1\ \ \text{için}\quad \psi(t) \to \infty \tag{1.15}$$

olur.

İspat.

(i) $$\phi(t) = \psi^{-\gamma}(t) \tag{1.16}$$

olsun. Buradan türev alınırsa

$$\phi'(t) =\ -\gamma\,\frac{\psi'(t)}{\psi^{1+\gamma}(t)}$$

$$\phi''(t) = -\gamma\ \frac{\psi''(t)\psi'(t) - (1+\gamma)\ (\psi'(t))^2}{\psi^{2+\gamma}(t)} \tag{1.17}$$

elde edilir. (1.16)-(1.17) eşitlikleri (1.9) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\phi''(t) + 2\ c_1\ \phi'(t) - \gamma c_2\,\phi(t) = f(t) < 0 \tag{1.18}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin $c_1 + c_2\ > 0$ olması halinde çözümü

β_1 , β_2 sayıları

$$\beta_1 + \beta_2 = \phi(0)$$

$$\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 = \phi'(0) \tag{1.19}$$

sisteminin çözümleri olmak üzere ve

$$\phi(t) = \beta_1 e^{\gamma_1 t} + \beta_2 e^{\gamma_2 t} + \frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}\int_0^t f(\tau)(e^{\gamma_2(t-2)} - e^{\gamma_1(t-2)})d(\tau) \tag{1.20}$$

ile (1.19) un çözümü

$$\beta_1 = \frac{1}{\gamma_2-\gamma_1}[\gamma\psi'(0) + \gamma_2\psi(0)]\ \psi^{-1-\gamma}(0)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}[\gamma\psi'(0) + \gamma_1\psi(0)]\ \psi^{-1-\gamma}(0) \tag{1.21}$$

elde edilir. (1.10) ve (1.11) eşitlikleri kullanılarak

$$\gamma_1 - \gamma_2 > 0, \quad \gamma\psi'(0) + \gamma_2\psi(0) > 0 \tag{1.22}$$

olacağından $\beta_2 > 0$ bulunur.

$\beta_1 < 0$, $\gamma_1 > \gamma_2$ ve $\psi(0) > 0$

olması sebebiyle

$$\gamma_1 - \gamma_2 > 0, \quad \gamma\psi'(0) + \gamma_1\psi(0) > 0 \tag{1.23}$$

olacağından $\beta_2 > 0$ bulunur.

Diğer taraftan (1.20) eşitliğinin sağındaki integralli terimin integrandı pozitif, çarpanı $\gamma_2 - \gamma_1 < 0$ olduğundan

$$0 < \phi(t) \leq \beta_1 e^{\gamma_1 t} + \beta_2 e^{\gamma_2 t} \tag{1.24}$$

elde edilir.

$\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 0$

olmasından dolayı

$$\beta_1 e^{\gamma_1 t} + \beta_2 e^{\gamma_2 t} = 0 \tag{1.25}$$

denkleminin

$$t = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \ln(-\frac{\beta_2}{\beta_1}) \tag{1.26}$$

gibi pozitif sonlu bir çözümü vardır.

$t \to t_1$ için $\phi(t) \to 0$

olur ki

$\phi(t) = \psi^{-\gamma}(t)$

olmasından dolayı

$t \to t_1$ için $\psi(t) \to \infty$

elde edilir.

(ii) $c_1 = 0,\ c_2 = 0$ olması halinde hipotez fonksiyonu $\gamma > 0,\ c_1 = c_2 = 0$ sayıları için (1.18) eşitliğinden,

$\phi''(t) \leq 0$

olur. İki defa integrasyon ile

$\phi'(t) - \phi'(0) \leq 0$

$$\phi(t) - \phi'(0)t - \phi(0) \leq 0 \tag{1.27}$$

bulunur ki,

$$0 \leq \phi(t) \leq \phi'(0)t + \phi(0) \tag{1.28}$$

eşitsizliğinden,

$$t_1 = -\frac{\phi(0)}{\phi'(0)} \tag{1.29}$$

pozitif zamanında $t \to t_1$ için $\phi(t) \to 0$

olur ki bu da $t \to t_1$ için ve $\psi(t) \to \infty$ demektir. Böylece ispat tamamlanır.

1.3. Sobolev Uzayları

Tanım 1.1. Ω ve $\Omega', \Omega' \subset \Omega$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ de iki bölge olsun. $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ ise Ω' bölgesine Ω bölgesinin kesin iç bölgesidir denir ve $\overline{\Omega'} \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir.

Yani hem Ω' hem de Ω' nün kapanışı Ω bölgesinin alt kümesidir.

Örnek 1. $\Omega_1 = (1,7)$ ve $\Omega_2 = (2,4)$ olsun. Burada $\overline{\Omega_2} = [2,4]$ olur.

$\Omega_2 \subset \Omega_1$ ve $\overline{\Omega_2} \subset \Omega_1$

olduğundan

$\Omega_2 \subset\subset \Omega_1$

olur.

Tanım 1.2.

$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : u \in L^p(\Omega'), \ \forall \Omega' \subset\subset \Omega\}$

Sonuç 1. $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ olur.

Tanım 1.3. (Zayıf Türev)

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu indisi verilsin. $\forall \varphi \epsilon C_0^\infty(\Omega)$ için

$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, D^{|\alpha|} \varphi dx$

ise $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u nun α. zayıf (genelleştirilmiş) türevi denir ve

$v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.4. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de bir bölge, m negatif olmayan herhengi bir tamsayı ve

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \,\epsilon\, L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$

olacak şekilde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Kendisi ve $m.$ mertebeye kadar bütün genelleştirilmiş türevleri $L^p(\Omega)$ uzayında olan uzaya Sobolev uzayı denir.

Sobolev uzayında normlar: $1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \| D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{m,\infty} = \max_{0\leq\alpha\leq m} \| D^\alpha u\|^p_{L^\infty(\Omega)}$$

olarak tanımlanır.

Not1. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında

$m = 0$ ise $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ ile

$p = 2$ ise $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ ile gösterilir.

$\|u\|_{H_1^0(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$

Ağırlıklı Lebesgue ($L^p_\omega(\Omega)$) ve Sobolev ($W^{m,p}_\omega(\Omega)$) Uzayları

Tanım 1.5. Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\omega(x) > 0$ olacak şekilde lokal integrallenebilir $\omega(x)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

Tanım 1.6. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık bir bölge $0 < p < \infty$ ve $\omega(x)$ fonksiyonu ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\int_\Omega \omega(x)\, |u(x)|^p dx < \infty$$

şartını sağlayan ölçülebilir $u(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa ağırlıklı Lebesgue uzayı denir ve $L^p_\omega(\Omega)$ ile gösterilir.

Bu uzayda norm

$$\|u\|_{p,\omega} = \left(\int_\Omega \omega(x)\, |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Tanım 1.7. (Sobolev Uzayı). $\Omega, \mathbb{R}^n de$ bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tam sayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$W_{\omega}^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_{\omega}^{p}(\Omega) : \ D^{\alpha}u \in L_{\omega}^{p}(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$ şeklinde tanımlanan uzaya ağırlıklı Sobolev uzayı denir.

Sobolev uzayında norm $(1 \leq p \leq \infty)$

$$\|u\|_{W_{\omega}^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p,\omega} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \| D^{\alpha}u\|_{L_{\omega}^{p}(\Omega)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

olarak tanımlanıyor.

1.4. Sobolev Gömme Teoremleri

Tanım 1.8. $X \ ve \ Y$ iki normlu uzay olsun. Eğer

i. X in bütün elemanları Y de ise $(X \subset Y)$ ve

ii. u dan bağımsız bir c sabiti ve her $u \in X$ için

$\|u\|_Y \leq c\|u\|_X$

oluyorsa X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.9. Koni Koşulu. $\mathbb{R}^n de \ \ B_{\Gamma_1}(x)$ ve x noktasını içermeyen $B_{\Gamma_2}(y)$ açık yuvarları için

$K_x = B_{\Gamma_1}(x) \cap \{x + \lambda(z - x) : z \in B_{\Gamma_2}(y), \lambda > 0\}$ kümesine tepe noktası x olan bir sonlu koni denir. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de açık bir bölge olmak üzere, eğer Ω bölgesinin her x noktası bir $K_x \subset \Omega$ konisinin tepesi ise ve bütün K_x konileri bir sonlu K konisinden izomorfik ve izometrik dönüşümlerle elde edilebiliyorsa, o zaman Ω bölgesi koni koşulunu sağlar denir.

Teorem 1.1. (Sobolev Gömme Teoremi). $\Omega, \mathbb{R}^n$ de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ tam sayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

i. $mp > n$ ise

$W_{\omega}^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$

gömülmesi elde edilir.

ii. $mp = n$ ise

$W_{\omega}^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$

ya da $j = 0$ ise

$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q < \infty$

gömülmesi elde edilir. Ayrıca $p = 1$ alınırsa

$W_{\omega}^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$

elde edilir.

iii. $mp < n$ ise

$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$

ya da $j = 0$ ise

$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad p \leq q \leq p^*$

gömülmesi elde edilir. Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp} & , n > mp \\ +\infty & , n \leq mp \end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem 1.2. (Sobolev-Poincare Eşitsizliği). $2 \leq q < \infty$ ve $2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}$ $(n \geq 3)$ olsun. Bu durumda $u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_q \leq c\|\nabla u\|_2$$

olur. Burada $c = c(\Omega, p)$ dır.

İspat. Sobolev gömme teoreminden

$$p \leq q \leq \begin{cases} \frac{np}{n-mp} & ,n > mp \\ +\infty & ,n \leq mp \end{cases}$$

için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

dır. $m = 1$ ve $p = 2$ alınırsa

$$2 \leq q \leq \begin{cases} \frac{2n}{n-2} & ,n > 2 \\ +\infty & ,n \leq 2 \end{cases}$$

için

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

yani

$$\|u\|_q \leq c\|\nabla u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

olur. Ayrıca

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur.

$c = \beta_q$ alınırsa $\|u\|_{q,\Gamma_1} \leq \beta_q \|\nabla u\|_2$

olarak yazılabilir.

Teorem 1.3. (Poincare Eşitsizliği). $u \in W_0^{1,2}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ için

$\|u\|_2 \leq c\|u'\|_2$

dir. Burada $c = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ dir.

İspat. $u \in W_0^{1,2}(a, \mathrm{b})$ olduğundan

$u(a) = u(b) = 0$ dır.

$u(x) = \int_a^x u'(\tau)\,d\tau$

olduğundan, Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$u(x) \leq (\int_a^x 1^2\,d\tau)^{\frac{1}{2}}(\int_a^x (u'(\tau))^2\,d\tau)^{\frac{1}{2}}$,

$u(x) \leq \sqrt{x-a}\,\|u'\|_2$

bulunur. Her iki tarafın karesi alınır ve (a, b) aralığında integrallenirse

$\int_a^b u^2(x)\,dx \leq \int_a^b (x-a)\,\|u'\|_2^2 dx$

$=\|u'\|_2^2 \int_a^b (x-a)\,dx$

$= \frac{(b-a)^2}{2}\|u'\|_2^2$

$\|u'\|_2^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2}\|u'\|_2^2$

bulunur. Böylece

$\|u\|_2 \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}}\|u'\|_2$

eşitsizliği elde edilir. Üstteki eşitsizlikte $\theta = \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ ve $\|u'\|_2 = \|\nabla u\|_2$ alınırsa

$\|u\|^2 \leq \theta^2\|\nabla u\|^2$

bulunur.

BÖLÜM 2. TERS PROBLEMLER

Bu bölümde birbirine ters olan bazı basit örnekler sunulacaktır.

Örnek 2.1.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ kökleri verilen n. dereceden bir p polinomunun bulunması problemiyle verilen bir p polinomunun bulunması problemi birbirine ters problemlerdir. Bunun çözümü c keyfi bir sabit olmak üzere,

$p(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ şeklindedir.

Örnek 2.2.

A_{nxn} matrisi ile $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ özdeğerlerine sahip $A + D$ şeklindeki bir D köşegen matrisinin bulunması problemi ile verilen $A + D$ matrisinin özdeğerlerinin hesaplanması problemi birbirine ters problemlerdir.

Örnek 2.3.

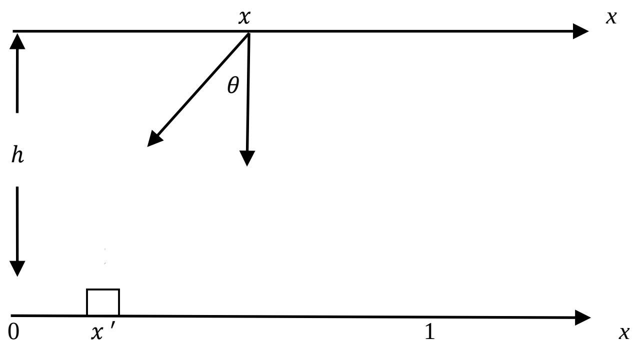
Genellikle yeryüzünden ölçüm yaparak jeolojik bulguların yerini, şeklini ve parametrelerini hesaplama problemidir. Bir boyutlu basit bir problem ele alalım ve aşağıdaki ters problemi ifade edelim. x değişim kuvvetinin $f_v\,(x)$ düşey bileşeninin ölçümlerinden h derinliğindeki farklı bir bölgenin kütle yoğunluğunun $p = p(x)$ $0 \leq x \leq 1$ değişimleri belirlenir. $p(x')\Delta x'$, x' in bir hacim elemanının kütlesi ve $\sqrt{(x - x')^2 + h^2}$ uzaklığıdır. Yer çekimi değişimi, γ yer çekimi sabit olmak üzere $f = \gamma \frac{m}{r^2}$ Newton'un yerçekimi kanunu ile tanımlanmıştır.

Düşey bileşen için,

$$\Delta f_v\,(x) = \gamma \frac{p(x')\Delta x'}{(x-x')^2+h^2} \cos\theta = \gamma \frac{hp(x')\Delta x'}{[(x-x')^2+h^2]^{3/2}}$$

yazılır.

Böylelikle,



Şekil 2.1 Jeolojik bulgulardan değişim kuvvetinin düşey bileşenine ait şema (Tunç, 2009).

Bu eşitlik, p nin belirlenmesi için aşağıdaki integral denklemini verir.

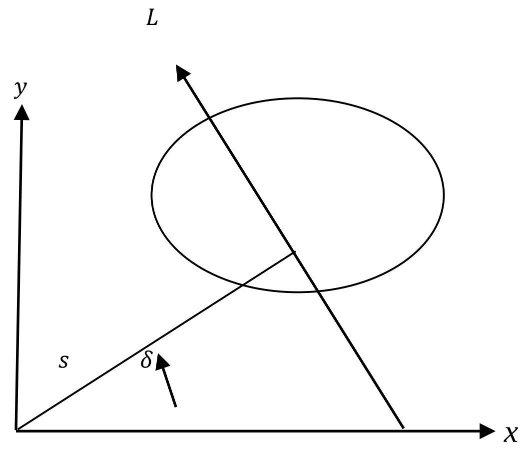
$$f_v\,(x) = \gamma h \int_0^1 \frac{p(x')}{[(x-x')^2+h^2]^{3/2}}\,dx', \qquad 0 \le x \le 1 \tag{2.1}$$

Örnek 2.4. (Ters Saçılma Problemi)

Elektromanyetik dalga veya sesin yoğunluğu verldiğinde saçılan cismin şeklini bulma problemi ters problemdir. Direk problem ise verilen cismin saçılan dalgaların hesaplanması problemidir. Ters saçılma problemleri yıkıcı olmayan materyallerin testinde, jeofizikte, sismik ve elektromanyetik araştırmalarda, tomografide çeşitli kullanımlara sahiptir.

Örnek 2.5. (Bilgisayar Tomografisi)

Radon dönüşümünün en göze çarpan kullanımı tıbbi görüntülemedir. Örneğin, bir insan vücudunda bir bölge ele alındığında $(p(x,y),(x,y))$ noktasındaki yoğunluk değişimini göstersin ve L, düzlemde bir doğru olsun. L boyunda vücuda bir X dalgası gönderildiğinde vücuttan akan yoğunluğun ne kadar olduğu ölçülür.



Şekil 2.2. Bilgisayar tomografisine ait şema (Tunç, 2009).

L, (s,δ) ile parametrize edilmiştir. Burada $s \in R$ ve $\delta \in [0,\pi)$ dir. $L_{s,\delta}$ ışınının koordinatları:

$$se^{i\delta} + iue^{i\delta} \in C,\ u \in R \tag{2.2}$$

I yoğunluğunun değişimi yaklaşık olarak γ sabit olmak üzere

$$dI = -\gamma pIdu$$

ile belirlenir. Işın boyunca integral alınırsa

$$lnI(u) = -\gamma \int_{u_0}^{u} p(se^{i\delta} + iue^{i\delta})du$$

veya, p nin bir kompakt destek olduğunu kabl ederek yoğunluk kaybı

$$lnI(\infty) = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} p(se^{i\delta} + iue^{i\delta})du$$

ile hesaplanır. Prensipte, azalma faktörlerinden tüm çizgi integralleri hesaplanabilir:

$$(R_p)(s,\delta) := \int_{-\infty}^{\infty} p(se^{i\delta} + iue^{i\delta})du,\ s \in R \tag{2.3}$$

R_p , p nin radon dönüşümü olarak adlandırılır. Direk problem, p verildiği zaman R_p radon dönüşümünün hesaplanmasıdır. Ters problem ise verilen bir R_p radon dönüşümü için p yoğunluğunun belirlenmesidir. p nin açısal olarak simetrik kabul edildiği yerde sadece düşey ışınlar alınır. O zaman $p = p(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $(x,0)$ noktasından geçen L_x ışını $(x,u), u \in R$ ile parametrize edilebilir.

$(V,x) := lnI(\infty) = -2\gamma \int_0^\infty p(\sqrt{x^2+u^2})du$

$p, \{x: |x| \leq R\}$ de kompakt destek olsun. $u = \sqrt{r^2 - x^2}$ değişken değişimi ile

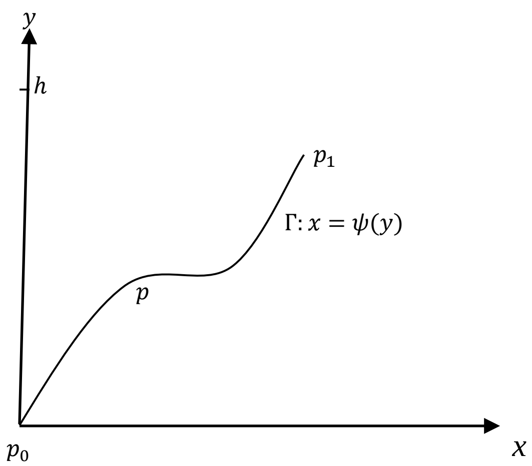
$$V(x) = -2\gamma \int_x^\infty \frac{\mathrm{r}}{\sqrt{r^2-x^2}} p(r)d\mathrm{r} = -2\gamma \int_x^R \frac{\mathrm{r}}{\sqrt{r^2-x^2}} p(r)d\mathrm{r} \quad (2.4)$$

yazılır. $z = R^2 - r^2$ ve $y = R^2 - x^2$ değişken dönüşümü $z \to p(\sqrt{R^2-z})$ fonksiyonu için aşağıdaki Abel integral denklemi elde edilir:

$$V\left(\sqrt{R^2-y}\right) = -\gamma \int_0^y \frac{p(\sqrt{R^2-z})}{\sqrt{y-z}} d\mathrm{z},\ 0 \leq y \leq R \quad (2.5)$$

Örnek 2.6. (Abel İntegral Denklemi)

$h > 0$ seviyesinde bir p_1 noktasından $h = 0$ seviyesindeki bir p_0 noktasına Γ eğrisi boyunca bir kütlenin hareketini ele alalım. Bu kütleye etkiyen tek kuvvet mg yer çekim kuvvetidir.



Şekil 2.3. Eğri boyunca bir kütlenin hareket şeması (Tunç, 2009).

Direk problem, Γ eğrisi verildiği zaman p_1 den p_0 a hareket eden elemanın T zamanının belirlenmesidir. Ters problem ise, çeşitli h değerleri için $T = T(h)$ zamanının ölçülmesi ve Γ eğrisinin belirlenmesi problemidir. Eğri $x = \psi(y)$ ile parametrize edilsin. p nin koordinatları: $(\psi(y), y)$ olur. Enerjinin korunması yasası ile,

$$E + U = \frac{m}{z}v^2 + mgy = sabit$$

yazılır. Buradan hız denklemi,

$$\frac{ds}{dt} = v = 2g\sqrt{(h-y)}$$

elde edilir. p_1 den p_0 a kadar toplam T zamanı

$$T = T(h) = \int_{p_0}^{p_1} \frac{ds}{v} = \int_0^h \sqrt{\frac{1+(\psi'(y))^2}{2g(h-y)}}\,dy,\ h > 0$$

şeklindedir.

$$\psi(y) = \sqrt{1+(\psi'(y))^2}$$

olsun ve $f(h) := T(h)\sqrt{2g}$ verilen fonksiyondur. O zaman

$$\int_0^h \frac{U(y)}{\sqrt{h-y}}\text{dy} = f(h),\ h > 0 \tag{2.6}$$

Abel integral denkleminden bilinmeyen φ fonksiyonu belirlenmek zorundadır. Bir benzer problem de sismolojide yer almaktadır. Bu, sismik dalgaların varış süresi ölçümlerinden, dünyanın c hız dağılımının belirlenmesi problemidir.

Örnek 2.7. (Geri Isı Denklemi)

Bir boyutlu ısı denklemini ele alalım.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.7}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0 \tag{2.8}$$

$$u(x,0) = u_0\,(x) = 0,\ 0 \leq x \leq \pi \tag{2.9}$$

(2.8) sınır koşulları ve (2.9) başlangıç koşuludur. Değişkenlerine ayırma metodu ile

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} + sin(nx) \tag{2.10}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_0\,(y) sin(ny)dy$$

çözümü elde edilir. Direk problem başlangıç sınır değer probleminin çözülmesidir. Verilen u_0 başlangıç sıcaklık dağılımı ve son T zamanı ile $u(.,T)$ belirlenir. Ters problemde ise, $u(.,T)$ son sıcaklık dağılımı ölçülür ve $t < T$ daha önceki zamanlarda sıcaklık belirlenmeye çalışılır, örneğin $u(.,0)$ başlangıç sıcaklığı gibi. (2.10) ve aşağıdaki integral denklemden u_0 belirlenir.

$$u(x,T) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} k(x,y)u_0\,(y)dy,\ \ 0 \le x \le \pi \qquad (2.11)$$

Burada,

$$k(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2T}\, sin(nx)\, sin(ny) \qquad (2.12)$$

Örnek 2.8.

Homojen olmayan bir ortamdaki ısı yayılımı

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{c} div\big(kgradu(x,t)\big), x \in D, t > 0 \qquad (2.13)$$

denklemi ile tanımlanır. Burada c bir sabittir ve $k = k(x)$ ortamla ilgili bir parametredir. k sabit olması durumunda, D bölgesinde

$$div(kgradu) = 0 \qquad (2.14)$$

denklemine indirgenir. Direk problem, verilen $u|\partial D$ sınır değeri ve k fonksiyonu için bir sınır değer probleminin çözülmesidir. Ters problem ise, u ve ∂D sınırı üzerindeki $\frac{\partial u}{\partial v}$ akısını ve D deki bilinmeyen k fonksiyonunu belirleme problemidir.

BÖLÜM 3. HAFIZA TERİMLİ LİNEER OLMAYAN HİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

Bu bölümde aşağıdaki ters problemin $\{u(x,t), f(t)\}$ çözümlerinin asimptotik davranışı incelenecektir.

$$u_{tt} - \Delta u - div(|\nabla u|^m \nabla u) + \int_0^t g_1(t-\tau)\,\Delta u(\tau)d\tau + u_t + \alpha|u|^p u$$
$$= h(x,t,u,\nabla u) + f(t)\omega(x),\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &u(x,t) = 0, && x \in \Gamma_0,\ t > 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = \int_0^t g_1(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau)d\tau - |\nabla u|^m \nabla u + au, && x \in \Gamma_1,\ t > 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.3}$$

$$\int_\Omega u(x,t)\omega(x)dx = \phi(t), \quad t > 0, \tag{3.4}$$

Burada Ω, $\mathbb{R}^n(n \geq 1)$de sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega$, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ olacak şekilde düzgün sınırıdır. α reel bir sayı, a ise negatif olmayan sabit bir sayıdır. Ayrıca p, m pozitif reel sayılardır. Diğer yandan $\phi(t), \omega(x), g_1(t), h(x,t,u,\nabla u)$ fonksiyonları özel şartlarda daha sonra tanımlanacaktır.

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega) \cap L^{m+2}(\Omega),\ \ u_1 \in L^2(\Omega),\ \ \int_\Omega u_0(x)\omega(x)dx = 1; \tag{3.5}$$

$$\omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\, L^{p+2}(\Omega) \cap L^{m+2}(\Omega), \qquad \int_\Omega \omega^2(x)dx = 1; \tag{3.6}$$

$$|h(x,t,u,\nabla u| \leq L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}} + |u|^{\frac{p}{2}}), \tag{3.7}$$

Burada $L > 0$ dır. Kullanılacak olan tüm fonksiyonlar gerçek değerli olarak düşünülecektir.

$\|\,.\,\|_{\Gamma_i}$ de Γ_i sınırlarında normları ifade etmektedir.

Ayrıca, $(.,.)$ L^2 de iç çarpımı temsil eder. $H^1_{\Gamma_0}, H^2$ bilinen fonksiyon uzaylarını ifade edecektir.

$$u_{tt} - \Delta u - div(|\nabla u|^m \nabla u) + \int_0^t g_1\,(t-\tau)\,\Delta u(\tau)d\tau + \; u_t + \; \alpha|u|^p u$$

$$= h(x,t,u,\nabla u) + f(t)\omega\,(x), \qquad x \in \Omega, t > 0, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} &u(x,t) = 0, && x \in \Gamma_0,\ t > 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = \int_0^t g_1\,(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau)d\tau - |\nabla u|^m \nabla u + au, && x \in \Gamma_1,\ t > 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{3.10}$$

(3.8) eşitliğinin her iki yanı $\omega(x)$ ile çarpılıp Ω bölgesinde integre edilirse

$$(u_{tt},\omega) - (\Delta u,\omega) - ((div(|\nabla u|^m \nabla u),\omega) + \int_\Omega (\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,\Delta u(\tau))\omega d\tau)dx$$
$$+(u_t,\omega) + \alpha(|u|^p u,\omega) = (h(x,t,u,\nabla u),\omega) + (f(t)\omega\,(x),\omega) \tag{3.11}$$

olur. (3.4) eşitliğinin t ye göre iki kez türevi alınırsa

$$(u_t,\omega) = \; \phi'(t), \tag{3.12}$$

$$(u_{tt},\omega) = \phi''(t) \tag{3.13}$$

olur.

$$(f(t)\omega(x),\omega(x)) = \; f(t)\int_\Omega \omega^2(x)dx$$

(3.6) şartından

$$(f(t)\omega(x),\omega(x)) = f(t) \tag{3.14}$$

bulunur. $(\Delta u,\omega)$ için Green özdeşliği uygulanırsa

$$(\Delta u,\omega) = \; \int_\Omega \omega\Delta u dx = -\int_\Omega \nabla\omega\nabla u dx + \int_{\partial\Omega} \omega\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)ds$$

olur. Üstteki eşitlikte son terim (3.6) dan 0 a eşit olur ve

$$(\Delta u,\omega) = -(\nabla u,\nabla\omega) \tag{3.15}$$

bulunur.

$\int_{\Omega}\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\Delta u\,(\tau)\omega d\tau\right)dx$ eşitliğinde parantez içine Green özdeşliği uygulanırsa

$\int_{\Omega}\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\Delta u\,(\tau)\omega d\tau\right)dx$

$= \int_{\Omega}(-\int_0^t g_1\,(t-\tau)\nabla\omega\nabla u(\tau)d\tau + \int_{\partial\Omega} g_1\,(t-\tau)\omega\frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau)ds)dx$

olur. Üstteki eşitliğin son terimi (3.6) dan sıfıra eşit olur ve

$\int_{\Omega}(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\Delta u\,(\tau)d\tau)\omega dx = -\int_{\Omega}(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\nabla\omega\nabla u(\tau)d\tau)dx$

bulunur. Üstteki eşitliğin sağında integrallerin yeri değiştirilirse

$$\int_{\Omega}\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\Delta u\,(\tau)\omega d\tau\right)dx = -\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\int_{\Omega}\nabla\omega\,\nabla u(\tau)dx)d\tau$$

$$= -\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla\omega)\,d\tau \qquad (3.16)$$

olarak yazılır.

$((div(|\nabla u|^m\nabla u),\omega) = \int_{\Omega}\nabla.(|\nabla u|^m\nabla u)\omega dx$

Üstteki eşitliğe Green özdeşliği uygulanırsa

$((div(|\nabla u|^m\nabla u),\omega) = -\int_{\Omega}\nabla\omega|\nabla u|^m\nabla u dx + \int_{\partial\Omega}\omega\frac{\partial u^{m+1}}{\partial n}(x,t)ds$

bulunur. Üstteki eşitliğin son terimi (3.6) dan $\omega = 0$ olacağından 0 a eşit olur ve

$((div(|\nabla u|^m\nabla u),\omega) = -\int_{\Omega}\nabla\omega|\nabla u|^m\nabla u dx$

$$((div(|\nabla u|^m\nabla u),\omega) = -(|\nabla u|^m\nabla u,\nabla\omega) \qquad (3.17)$$

şeklinde yazılır.

$$\hat{h}\,(t,u) := h(x,t,u,\nabla u) \qquad (3.18)$$

Şimdi de (3.12)-(3.18) eşitlikleri (3.11) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\phi''(t) + (\nabla u, \nabla\omega) + (|\nabla u|^m \nabla u, \nabla\omega) - \int_0^t g_1(t-\tau)(\nabla u(\tau), \nabla\omega)\, d\tau + \phi'(t)$$

$$+\alpha(|u^p|u, \omega) = (\hat{h}\,(t,u), \omega) + f(t)$$

$$f(t) = \phi''(t) + \phi'(t) + (\nabla u, \nabla\omega) + (|\nabla u|^m \nabla u, \nabla\omega)$$

$$-\int_0^t g_1(t-\tau)(\nabla u(\tau), \nabla\omega) d\tau + \alpha(|u|^p u, \omega) - (\hat{h}\,(t,u), \omega) \tag{3.19}$$

elde edilir.

$g_1(s) = e^{\lambda s} g(s)$ eşitliği kabul edilirse

$$g(s) \geq 0, \qquad g'(s) \leq -\lambda\, g(s); \tag{3.20}$$

$$1 - \int_0^\infty g_1(t) dt = l > 0 \tag{3.21}$$

olur. Asimptotik kararlılık ispatını kolaylaştırmak için $\alpha = 1$ alınır ve (3.8) eşitliği

nin her iki yanı u_t ile çarpılıp Ω bölgesinde integre edilirse

$$\int_\Omega u_{tt} u_t dx - \int_\Omega \Delta u u_t dx - (div(|\nabla u|^m \nabla u), u_t)$$

$$+\int_\Omega u_t \left(\int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau) d\tau\right) dx + \int_\Omega u_t u_t dx$$

$$\int_\Omega 1 u_t |u|^p u dx = \int_\Omega u_t (h(x,t,u,\nabla u)\, dx + \int_\Omega f(t)\omega(x) u_t dx \tag{3.22}$$

bulunur.

$$\int_\Omega u_{tt} u_t dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega {u_t}^2 dx = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\|u_t\|^2) \tag{3.23}$$

$$\int_\Omega 1 u_t |u|^p u dx = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{p+2}\int_\Omega u^{p+2} dx) = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2}) \tag{3.24}$$

$\int_\Omega f(t)\omega(x) u_t dx$ eşitliği için (3.4) eşitliğinden yararlanılırsa

$$\int_\Omega f(t)\omega(x) u_t dx = f(t)\frac{\partial}{\partial t}\phi(t) = f(t)\,\phi'(t) \tag{3.25}$$

bulunur.

$\int_\Omega u_t h(x,t,u,\nabla u) dx$ ifadesinde (3.18) dikkate alınırsa

$$\int_\Omega u_t h(x,t,u,\nabla u)dx = \int_\Omega u_t \hat{h}(t,u)dx \tag{3.26}$$

olur.

$$\int_\Omega u_t u_t dx = \int_\Omega {u_t}^2 dx \ = \|u_t\|^2 \tag{3.27}$$

$$-(div(|\nabla u|^m \nabla u), u_t) = -\int_\Omega \nabla.(|\nabla u|^m \nabla u)u_t dx$$

Üstteki eşitliğe Green özdeşliği uygulanırsa ve $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ eşitliği dikkate alınırsa

$$-(div(|\nabla u|^m \nabla u), u_t) = \int_\Omega \nabla u_t(|\nabla u|^{m+1})dx - \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u^{m+1}}{\partial n}(x,t)ds$$

$$-(div(|\nabla u|^m \nabla u), u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{m+2}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}\right) - \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u^{m+1}}{\partial n}(x,t)ds \tag{3.28}$$

bulunur.

$-\int_\Omega \Delta u u_t dx$ ifadesinde Green özdeşliği uygulanır ve $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ eşitliği dikkate alınırsa

$$-\int_\Omega \Delta u u_t dx = \int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx - \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau)ds$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma_0} u_t \frac{\partial u}{\partial n}(x,t)ds - \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau)ds$$

olur. Üstteki eşitliğin 2. terimi (3.9) dan sıfıra eşit olacağından

$$-\int_\Omega \Delta u u_t dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2\right) - \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial n}(x,t)ds \tag{3.29}$$

şeklinde yazılır.

$\int_\Omega u_t \left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\Delta u\,(\tau)d\tau\right)dx$ ifadesinde integrallerin yeri değiştirilirse

$$\int_\Omega u_t \left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\Delta u\,(\tau)d\tau\right)dx = \ \int_0^t g_1\,(t-\tau)\int_\Omega u_t \Delta u(\tau)dx\,d\tau$$

bulunur. $\int_\Omega u_t \Delta u(\tau)dx$ ifadesinde Green özdeşliği uygulanıp $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ eşitliği ve (3.9) dikkate alınırsa

$$\int_\Omega u_t \Delta u(\tau)dx = -\int_\Omega \nabla u_t \nabla u(\tau)dx + \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau)ds$$

$$= -\int_\Omega \nabla u_t \nabla u(\tau) dx + \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau) ds$$

olarak yazılır. Üstteki eşitliğin her iki yanı $g_1\,(t-\tau)$ ile çarpılıp 0 dan t ye integre edilirse

$$\int_0^t g_1\,(t-\tau) \int_\Omega u_t \Delta u(\tau) dx\, d\tau$$

$$= \int_0^t g_1\,(t-\tau)\big(-\int_\Omega \nabla u_t \nabla u(\tau) dx + \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau) ds\big)\, d\tau$$

$$= -\int_0^t g_1\,(t-\tau) \int_\Omega \nabla u_t \nabla u(\tau) dx d\tau + \int_0^t g_1\,(t-\tau) \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau) ds)\, d\tau \qquad (3.30)$$

bulunur.

$$\int_0^t g_1\,(t-\tau) \int_\Omega \nabla u_t \nabla u(\tau) dx d\tau = \int_0^t g_1\,(t-\tau) \int_\Omega \nabla u_t(t)[\nabla u(\tau) - \nabla u(t)] dx d\tau$$

$$+ \int_0^t g_1\,(t-\tau) \int_\Omega \nabla u_t(t) \nabla u(t) dx d\tau \qquad (3.31)$$

Üstteki eşitliğin son teriminde $t - \tau = \tau'$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^t g_1\,(t-\tau) \int_\Omega \nabla u_t(t) \nabla u(t) dx d\tau = \int_0^t g_1\,(\tau') \int_\Omega \nabla u_t(t) \nabla u(t) dx d\,\tau'$$

Üstteki eşitlikte $\tau = \tau'$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^t g_1\,(t-\tau) \int_\Omega \nabla u_t(t) \nabla u(t) dx d\tau = \int_0^t g_1\,(\tau) \int_\Omega \nabla u_t(t) \nabla u(t) dx d\tau$$

olur. Üstteki eşitlik (3.31) de yerine yazılırsa

$$\int_0^t g_1\,(t-\tau) \int_\Omega \nabla u_t \nabla u(\tau) dx d\tau = \int_0^t g_1\,(t-\tau) \int_\Omega \nabla u_t(t)[\nabla u(\tau) - \nabla u(t)] dx d\tau$$

$$+ \int_0^t g_1\,(\tau) \int_\Omega \nabla u_t(t) \nabla u(t) dx d\tau$$

olarak yazılır. Üstteki eşitlikte türev operatörü yardımıyla

$$\int_0^t g_1\,(t-\tau) \int_\Omega \nabla u_t \nabla u(\tau) dx d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^t g_1\,(t-\tau) \frac{\partial}{\partial t}\big(\int_\Omega |\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|^2 dx d\tau$$

$$+ \int_0^t g_1\,(\tau)\big(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx d\tau \qquad (3.32)$$

bulunur. Üstteki eşitliğin ilk terimini bulmak için Leibniz formülü uygulanırsa

$\frac{\partial}{\partial t}(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx d\tau)$

$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}(g_1\,(t-\tau)\,(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx)d\tau$

$+g_1\,(t-t)\int_\Omega |\nabla u(t)-\nabla u(t)|^2 dx1 - g_1\,(t-0)\int_\Omega |\nabla u(0)-\nabla u(t)|^2 dx0$

$=\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}(g_1\,(t-\tau)\,(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx)d\tau$

bulunur. Üstteki eşitlikte çarpımının türevi alınırsa

$\frac{\partial}{\partial t}(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx d\tau)$

$= \int_0^t g_1{}'(t-\tau)\,(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx)d\tau$

$+\int_0^t (g_1\,(t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx)d\tau$ (3.33)

olur. İkinci terime Leibniz formülü uygulanırsa

$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (g_1\,(\tau)\,(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx)d\tau$

$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}(g_1\,(\tau)\,(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx)d\tau$

$+(g_1\,(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx)1 - (g_1\,(0)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx)0$

$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (g_1\,(\tau)\,(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx)d\tau$

$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}(g_1\,(\tau)\,(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx)d\tau + (g_1\,(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx)$ (3.34)

bulunur. Üstteki eşitliğin sağında çarpımın türevi kullanılırsa

$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (g_1\,(\tau)\,(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx)d\tau$

$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}(g_1\,(\tau))\,(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx)d\tau + \int_0^t g_1\,(\tau)\frac{\partial}{\partial t}(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx)d\tau$

$+(g_1\,(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx)$

olur. Üstteki eşitliğin ilk terimi sıfır olacağından

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (g_1(\tau)\left(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx\right) d\tau = \int_0^t g_1(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx\right) d\tau$$

$$+g_1(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \tag{3.35}$$

bulunur. (3.33) ten

$$\int_0^t (g_1(t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx\right) d\tau$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t g_1(t-\tau)\left(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx d\tau\right)\right.$$

$$-\int_0^t g_1{}'(t-\tau)\left(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx\right) d\tau \tag{3.36}$$

olur. (3.35) te eşitliğin sağındaki ilk terim yalnız bırakılırsa

$$\int_0^t g_1(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx\right) d\tau$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (g_1(\tau)\left(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx\right) d\tau - g_1(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \tag{3.37}$$

olur. (3.36) ve (3.37) eşitlikleri (3.31) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \nabla u_t \nabla u(\tau) dx d\tau$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t g_1(t-\tau)\left(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx d\tau\right)\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t g_1{}'(t-\tau)\left(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx\right) d\tau$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (g_1(\tau)\left(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx\right) d\tau - \frac{1}{2}g_1(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \tag{3.38}$$

olur.

$$(g_1 * v)(t) = \int_0^t g_1(t-s)\|v(t)-v(s)\|^2 ds$$

alınırsa

$$\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \nabla u_t \nabla u(\tau) dx d\tau$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(g_1 * \nabla u)(\mathrm{t}) - \frac{1}{2}\int_0^t g_1(s) ds \|\nabla u(t)\|^2\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(g_1 * \nabla u)(\mathrm{t}) - \frac{1}{2}\int_0^t g_1(s) ds \|\nabla u(t)\|^2\right)$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t g_1{}'(t-\tau)\,(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx)d\tau - \frac{1}{2}g_1\,(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx\,) \qquad (3.39)$$

olur. Üstteki eşitlik (3.30) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\int_0^t g_1\,(t-\tau)\int_\Omega u_t \Delta u(\tau) dx d\tau$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(g_1 \, * \nabla u)(\mathrm{t}) - \frac{1}{2}\int_0^t g_1\,(s)ds.\, \|\nabla u(t)\|^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g_1{}'(t-\tau)\,(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx)d\tau + \frac{1}{2}g_1\,(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx$$

$$+\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau)ds)\, d\tau \qquad (3.40)$$

bulunur. Üstteki eşitlikteki son terimde integraller yer değiştirilirse

$$\int_0^t g_1\,(t-\tau)\int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau)ds)\, d\tau = \int_{\Gamma_1} u_t \int_0^t g_1\,(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau)ds\, d\tau$$

olur. Üstteki eşitlikte (3.9) şartı uygulanılırsa

$$\int_0^t g_1\,(t-\tau)\int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau)ds)\, d\tau$$

$$= \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial n}(x,t)d\tau + \int_{\Gamma_1} u_t |\nabla u|^m \nabla u d\tau - \alpha \int_{\Gamma_1} u_t u d\tau \qquad (3.41)$$

bulunur.

$$\alpha \int_{\Gamma_1} u_t u d\tau = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\alpha}{2}\|u\|^2{}_{\Gamma_1}) \qquad (3.42)$$

olur. Sonuç olarak (3.41)-(3.42) eşitlikleri (3.40) da yerine yazılırsa

$$\int_0^t g_1\,(t-\tau)\int_\Omega u_t \Delta u(\tau) dx\, d\tau$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(g_1 \, * \nabla u)(\mathrm{t}) - \frac{1}{2}\int_0^t g_1\,(s)ds\|\nabla u(t)\|^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g_1{}'(t-\tau)\,(\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dx)d\tau + \frac{1}{2}g_1\,(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx$$

$$+\int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial n}(x,t)d\tau + \int_{\Gamma_1} u_t |\nabla u|^{m+1} d\tau - \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\alpha}{2}\|u\|^2{}_{\Gamma_1}) \qquad (3.43)$$

bulunur. (3.23)-(3.43) eşitlikleri (3.22) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u_t\|^2+\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla u\|^2-\int_{\Gamma_1}u_t\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)ds+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{m+2}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}\right)$$

$$-\int_{\Gamma_1}u_t\frac{\partial u^{m+1}}{\partial n}(x,t)ds+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(g_1 \ast \nabla u)(t)-\frac{1}{2}\int_0^t g_1(s)ds\|\nabla u(t)\|^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g_1{}'(t-\tau)\,(\int_\Omega|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2dx)d\tau+\frac{1}{2}g_1(t)\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dx$$

$$+\int_{\Gamma_1}u_t\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)d\tau+\int_{\Gamma_1}u_t|\nabla u|^{m+1}d\tau-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha}{2}\|u\|^2{}_{\Gamma_1}\right)+\ \|u(t)\|^2+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{p+2}u_{p+2}^{p+2}\right)$$

$$=\int_\Omega u_t(\hat{h}\,(t,u)dx+f(t)\,\phi'(t)$$

olarak yazılır. Üstteki eşitlikte düzenleme yapılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}(1-\int_0^t g_1(s)ds)\|\nabla u(t)\|^2+\frac{1}{2}(g_1 \ast \nabla u)(t)+\frac{1}{m+2}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}$$

$$+\frac{1}{p+2}u_{p+2}^{p+2}-\frac{\alpha}{2}\|u\|^2{}_{\Gamma_1}\Big]+\|u(t)\|^2-\int_{\Gamma_1}u_t\frac{\partial u}{\partial n}(x,t)d\tau+\int_{\Gamma_1}u_t|\nabla u|^{m+1}d\tau$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g_1{}'(t-\tau)(\int_\Omega|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2dx)d\tau+\frac{1}{2}g_1(t)\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dx$$

$$=\int_\Omega u_t(\hat{h}\,(t,u)dx+f(t)\,\phi'(t)$$

bulunur. Türev parantezi içindeki ifade sistemin enerji denklemi olarak alınır

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}(1-\int_0^t g_1(s)ds)\|\nabla u(t)\|^2+\frac{1}{2}(g_1 \ast \nabla u)(t)+\ \frac{1}{m+2}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}$$
$$+\frac{1}{p+2}u_{p+2}^{p+2}-\frac{\alpha}{2}\|u\|^2{}_{\Gamma_1}$$

şeklinde yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t)=-\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\int_0^t g_1{}'(t-\tau)\,(\int_\Omega|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2dx)d\tau$$

$$-\frac{1}{2}g_1(t)\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dx+\int_\Omega u_t(\hat{h}\,(t,u)dx+f(t)\,\phi'(t) \tag{3.44}$$

olur.

Teorem 3.1.

(3.5)-(3.7) ve (3.20)-(3.21) şartlarını sağlayan ϕ, ϕ', ϕ'' fonksiyonları, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar, ϕ'' sınırlı bir fonksiyon ve ϕ, ϕ' fonksiyonları da t sonsuza giderken 0 a yaklaşan fonksiyonlardır. M ve N yeterince büyük ve α, ξ ve δ ise

$\delta < min\left\{2, \frac{l}{3\theta^2}, \frac{2N}{M}\right\}$, $\alpha < \frac{l-3\delta\theta^2}{2B^2}$, $\int_0^\infty g_1(s)ds \leq \frac{2\xi}{1+2\xi}$ iken

(3.1)-(3.4) probleminin çözümü asimptotik olarak kararlı ve

$$\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0 \tag{3.45}$$

dır.

$\phi(t) = k$ ve $\alpha = -1$ için (3.1)-(3.4) probleminde $v(x,t) = e^{-\lambda t}\, u(x,t)$ dönüşümü yapılırsa $u = ve^{\lambda t}$ olur. Dönüşümün x ve t ye göre türevleri alınırsa

$$u_t = v\lambda e^{\lambda t} + v_t e^{\lambda t}$$

$$u_{tt} = e^{\lambda t}(\lambda^2 v + 2\lambda v_t + v_{tt}) \tag{3.46}$$

$$\Delta u = \Delta\left(ve^{\lambda t}\right) = e^{\lambda t}\Delta v \tag{3.47}$$

$$|u|^{p+1} = \left|ve^{\lambda t}\right|^{p+1}$$

$$= |v|^p v e^{\lambda p t} e^{\lambda t} \tag{3.48}$$

bulunur.

$\alpha|u|^p u$ ifadesinde $\alpha = -1$ alınır ve $u = ve^{\lambda t}$ dönüşümü yapılırsa

$$\alpha|u|^p u = -\,|u|^{p+1} = -|v|^{p+1}\,(e^{\lambda t})^{p+1} \tag{3.49}$$

elde edilir.

$$div(|\nabla u|^m \nabla u) = div(\left|e^{\lambda t}\nabla v\right|^{m+1}) = e^{\lambda m t} e^{\lambda t} div(|\nabla v|^m \nabla v) \tag{3.50}$$

şeklinde yazılabilir.

$g_1(s) = e^{\lambda s} g(s)$ eşitliğinde $s = t - \tau$ alınırsa

$$g_1(t-\tau) = e^{\lambda(t-\tau)} g(t-\tau) \tag{3.51}$$

olur. (3.47) ve (3.51) eşitliklerinden

$$\int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} g(t-\tau) e^{\lambda t}\Delta v(\tau)d\tau$$

$$= e^{\lambda t}\int_0^t g(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau \tag{3.52}$$

bulunur. (3.46)-(3.52) eşitlikleri (3.1) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 v + 2\lambda v_t + v_{tt}) - e^{\lambda t}\Delta v - e^{\lambda m t} e^{\lambda t} div(|\nabla v|^m \nabla v)$$

$$+e^{\lambda t}\int_0^t g(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau + v\lambda\, e^{\lambda t} + v_t e^{\lambda t} - |v|^{p+1}\left(e^{\lambda t}\right)^{p+1}$$

$$= u_t(\hat{h}\,(t, e^{\lambda t} v) + f(t)\,\omega(x)$$

elde edilir. Üstteki eşitliğin her iki yanı $e^{-\lambda t}$ile çarpılırsa

$$\lambda^2 v + 2\lambda v_t + v_{tt} - \Delta v - e^{\lambda m t} div(|\nabla v|^m \nabla v) + \int_0^t g(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau + v\lambda$$

$$v_t - |v|^{p+1} e^{\lambda p t} = e^{-\lambda t}(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t} v\right) + e^{-\lambda t} f(t)\,\omega(x)$$

olur. Üstteki eşitlikte düzenleme yapılırsa sonuç olarak

$$v_{tt} + (2\lambda+1)v_t + \lambda(\lambda+1)\,v - \Delta v - e^{\lambda m t} div(|\nabla v|^m \nabla v)\int_0^t g(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau$$

$$= e^{-\lambda t}(\hat{h}\,(t, e^{\lambda t} v) + e^{\lambda p t}|v|^p v + e^{-\lambda t} f(t)\,\omega(x), \qquad x \in \Omega, t > 0 \tag{3.53}$$

bulunur. (3.2) eşitliğinde $v(x,t) = e^{-\lambda t} u(x,t)$ dönüşümü yapılırsa

$$v(x,t) = 0, \qquad x \in \Gamma_0\,,\ t > 0$$

$$e^{\lambda t}\frac{\partial v}{\partial n}(x,t) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} g\,(t-\tau) e^{\lambda t}\frac{\partial v}{\partial n}(x,\tau)d\tau - (e^{\lambda t}|\nabla v|)^{m+1} + \alpha e^{\lambda t} v$$

$$= \int_0^t e^{\lambda t} g\,(t-\tau)\frac{\partial v}{\partial n}(x,\tau)d\tau - e^{\lambda t(m+1)}|\nabla v|^{m+1} + \alpha v e^{\lambda t}$$

olur. Üstteki eşitliğin her iki tarafı $e^{-\lambda t}$ ile çarpılırsa

$$v(x,t)=0, \qquad x\in\Gamma_0,\ t>0$$
$$\frac{\partial v}{\partial n}(x,t)=\int_0^t g\,(t-\tau)\frac{\partial v}{\partial n}(x,\tau)d\tau-e^{\lambda mt}|\nabla v|^{m+1}+\ \alpha v, \qquad x\in\Gamma_1,\ t>0 \tag{3.54}$$

bulunur. (3.3) eşitliğinde $v(x,t)=e^{-\lambda t}u(x,t)$ dönüşümü yapılırsa

$$v(x,0)=u(x,0)=u_0(x)$$

olur. $v(x,t)=e^{-\lambda t}\,u(x,t)$ eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa

$$v_t(x,t)=-\lambda e^{-\lambda t}u(x,t)+e^{-\lambda t}u_t(x,t)$$

olur. Üstteki eşitlikte $t=0$ yazılırsa

$$v_t(x,0)=-\lambda u(x,0)+u_t(x,0)$$

olur. Üstteki eşitlikte (3.3) dikkate alınırsa

$$v_t(x,0)=-\lambda u_0(x)+\ u_1(x)$$

$$v_t(x,0)=u_1(x)-\lambda u_0(x) \tag{3.55}$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde $\phi(t)=k$ alınır ve $v(x,t)=e^{-\lambda t}u(x,t)$ dönüşümü uygulanırsa

$$\int_\Omega v(x,t)e^{\lambda t}\omega(x)dx=k$$

$$\int_\Omega v(x,t)\omega(x)dx=ke^{-\lambda t} \tag{3.56}$$

olur. (3.53) eşitliğinin her iki yanı ω ile çarpılıp Ω bölgesinde integre edilirse $(v_{tt},\omega)+(2\lambda+1)(v_t,\omega)+\lambda(\lambda+1)(v,\omega)-(\Delta v,\omega)$

$$-e^{\lambda mt}((div(|\nabla v|^m\nabla v),\omega)+\left(\int_0^t g\,(t-\tau)\,\Delta v(\tau)d\tau,\omega\right)$$

$$=e^{\lambda pt}(|v|^p v,\omega)+e^{-\lambda t}\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),\omega\right)+(e^{-\lambda t}f(t)\,\omega\,(x),\omega(x)) \tag{3.57}$$

bulunur. Üstteki eşitlikteki terimler ayrı ayrı incelenirse

$$\left(e^{-\lambda t}f(t)\omega\,(\mathrm{x}),\omega(x)\right)=e^{-\lambda t}f(t)\int_\Omega\omega^2dx$$

dir. Üstteki eşitlikte (3.6) eşitliğinden

$$\left(e^{-\lambda t} f(t)\omega\,(x), \omega(x)\right) = e^{-\lambda t} f(t) \tag{3.58}$$

olur.

$(\Delta v, \omega)$ ifadesinde Green özdeşliği uygulanırsa

$$(\Delta v, \omega) = -\int_{\Omega} \nabla\omega \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \omega \Delta v \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

olur. (3.6) eşitliğinden $\omega = 0$ olacağından üstteki eşitlikteki son terim 0 a eşit olur ve

$$(\Delta v, \omega) = -(\nabla v, \nabla\omega) \tag{3.59}$$

bulunur.

$$e^{\lambda mt}((div(|\nabla v|^m \nabla v), \omega) = e^{\lambda mt} \int_{\Omega} \nabla.\,(|\nabla v|^{m+1}\omega) dx$$

$$= e^{\lambda mt}\left(-\int_{\Omega} \nabla\omega(|\nabla v|^{m+1}) dx + \int_{\partial\Omega} \omega \frac{\partial(|v|^{m+1})}{\partial n} ds\right)$$

Üstteki eşitliğin son terimi (3.6) eşitliğinden $\omega = 0$ olacağından

$$e^{\lambda mt}((div(|\nabla v|^m \nabla v), \omega) = -e^{\lambda mt}(|\nabla v|^m \nabla v, \nabla\omega) \tag{3.60}$$

olur.

$$\left(\int_0^t g\,(t-\tau)\,\Delta v(\tau) d\tau, \omega\right) = \int_{\Omega} \omega(\int_0^t g\,(t-\tau)\Delta v(\tau) d\tau) dx$$

Üstteki eşitliğe Green özdeşliği uygulanırsa

$$\left(\int_0^t g\,(t-\tau)\,\Delta v(\tau) d\tau, \omega\right) = -\int_{\Omega} \nabla\omega(\int_0^t g\,(t-\tau)\nabla v(\tau) d\tau) dx + \int_{\partial\Omega} \omega \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

bulunur. Üstteki eşitliğin son terimi (3.6) eşitliğinden $\omega = 0$ olacağından

$$\left(\int_0^t g\,(t-\tau)\,\Delta v(\tau) d\tau, \omega\right) = -\int_0^t g\,(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla\omega) d\tau \tag{3.61}$$

olur. (3.56) eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevleri alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} v(x,t)\omega(x) dx = \frac{\partial}{\partial t}(ke^{-\lambda t})$$

$$\int_{\Omega} v_t(x,t)\omega(x) dx = -\lambda k e^{-\lambda t}$$

$\int_\Omega v_{tt}(x,t)\omega(x)dx = \lambda^2 k e^{-\lambda t}$

bulunur. Üstteki eşitliklerden

$(v_{tt},\omega) + (2\lambda+1)(v_t,\omega) + \lambda(\lambda+1)(v,\omega)$

$$= \lambda^2 k e^{-\lambda t} + (2\lambda+1)\left(-\lambda k e^{-\lambda t}\right) + \lambda(\lambda+1)k e^{-\lambda t} = 0 \qquad (3.62)$$

elde edilir. (3.58)-(3.62) eşitlikleri (3.57) de yerine yazılırsa

$0 - \left(-(\nabla v,\nabla\omega)\right) - (-e^{\lambda m t}(|\nabla v|^m \nabla v,\nabla\omega)) - \int_0^t g\,(t-\tau)(\nabla v(\tau),\nabla\omega)d\tau$

$= e^{-\lambda t}\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),\omega\right) + e^{\lambda p t}(|v|^p v,\omega) + e^{-\lambda t} f(t)$

bulunur. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$e^{-\lambda t} f(t) = (\nabla v,\nabla\omega) + e^{\lambda m t}(|\nabla v|^m \nabla v,\nabla\omega) - \int_0^t g\,(t-\tau)(\nabla v(\tau),\nabla\omega)d\tau$

$$-e^{\lambda p t}(|v|^p v,\omega) - e^{-\lambda t}\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),\omega\right) \qquad (3.63)$$

olarak yazılır.

(3.53) eşitliğinin her iki tarafı v_t ile çarpılıp Ω bölgesinde integre edilirse

$(v_{tt},v_t) + (2\lambda+1)(v_t,v_t) + \lambda(\lambda+1)(v,v_t) - (\Delta v,v_t)$

$-e^{\lambda m t}((div(|\nabla v|^m \nabla v),v_t) + \int_\Omega v_t \int_0^t g\,(t-\tau)\,\Delta v(\tau)d\tau dx$

$$= \int_\Omega e^{-\lambda t} v_t \hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right)dx + \int_\Omega e^{\lambda p t}|v|^p v v_t dx + \int_\Omega e^{-\lambda t} f(t) v_t\,\omega(x)dx \qquad (3.64)$$

olur. Üstteki eşitlikteki terimler ayrı ayrı incelenirse

$$(v_{tt},v_t) = \int_\Omega v_{tt}v_t dx = \frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\|v_t\|^2) \qquad (3.65)$$

$$(2\lambda+1)(v_t,v_t) = (2\lambda+1)\|v_t\|^2 \qquad (3.66)$$

$$\lambda(\lambda+1)(v,v_t) = \lambda(\lambda+1)\int_\Omega v v_t dx = \frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{\lambda(\lambda+1)}{2}\|v\|^2) \qquad (3.67)$$

olarak yazılır.

$(\Delta v, v_t) = \int_\Omega v_t \Delta v dx$

Üstteki eşitlikte Green özdeşliği ve $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ eşitliğinden

$(\Delta v, v_t) = -\int_\Omega \nabla v_t \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} v_t \frac{\partial v}{\partial n} ds$

$= \frac{\partial}{\partial t}(-\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 + \int_{\Gamma_0} v_t \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_{\Gamma_1} v_t \frac{\partial v}{\partial n} ds$

olur. Üstteki eşitliğin 2. terimi, (3.54) ten $v_t = 0$ olacağından 0 a eşit olur.

$$-(\Delta v, v_t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2\right) - \int_{\Gamma_1} v_t \frac{\partial v}{\partial n} ds \tag{3.68}$$

şeklinde yazılır.

$$e^{-\lambda t} \int_\Omega v_t \hat{h}\left(t, e^{\lambda t} v\right) dx = e^{-\lambda t}(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t} v\right), v_t) \tag{3.69}$$

(3.56) eşitliğinin t ye göre türevi alınırsa

$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega v(x,t)\omega(x) dx = \frac{\partial}{\partial t}(ke^{-\lambda t})$

$\int_\Omega v_t(x,t)\omega(x) dx = -\lambda k e^{-\lambda t}$

bulunur. Üstteki eşitliğin her iki yanı $e^{-\lambda t} f(t)$ ile çarpılırsa

$$\int_\Omega e^{-\lambda t} f(t)\, v_t(x,t)\omega(x) dx = e^{-\lambda t} f(t)\,(-\lambda k e^{-\lambda t}) = -\lambda k f(t) e^{-2\lambda t} \tag{3.70}$$

şeklinde yazılır.

$\frac{e^{\lambda p t}}{p+2}\|v\|_{p+2}^{p+2}$ ifadesinin her iki yanının t ye göre türevi alınırsa

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{\lambda p t}}{p+2}\|v\|_{p+2}^{p+2}\right) = \frac{\lambda p e^{\lambda p t}}{p+2}\|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{e^{\lambda p t}}{p+2}(p+2)\|v\|_{p+1}^{p+1} v_t$

olur. Üstteki eşitlikte son terim yalnız bırakılırsa

$$\int_\Omega e^{\lambda p t}|v|^p v v_t dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{\lambda p t}}{p+2}\|v\|_{p+2}^{p+2}\right) - \frac{\lambda p}{p+2} e^{\lambda p t}\|v\|_{p+2}^{p+2} \tag{3.71}$$

bulunur.

$-e^{\lambda m t}(div(|\nabla v|^m \nabla v), v_t) = -e^{\lambda m t}\int_\Omega \nabla(|\nabla v|^m \nabla v) v_t dx$

olur. Üstteki eşitlikte Green özdeşliği uygulanırsa

$$-e^{\lambda mt}(div(|\nabla v|^m\nabla v), v_t) = e^{\lambda mt}\int_\Omega |\nabla v|^{m+1}\nabla v_t dx - e^{\lambda mt}\int_{\partial\Omega} v_t \frac{\partial v^{m+1}}{\partial n} ds$$

bulunur. $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ eşitliğinden

$$-e^{\lambda mt}(div(|\nabla v|^m\nabla v), v_t)$$

$$= e^{\lambda mt}(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{m+2}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}) - e^{\lambda mt}\int_{\Gamma_1} v_t \frac{\partial v^{m+1}}{\partial n} ds$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\lambda mt}\left(\frac{1}{m+2}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}\right)\right) - \lambda m e^{\lambda mt}\frac{1}{m+2}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} - e^{\lambda mt}\int_{\Gamma_1} v_t \frac{\partial v^{m+1}}{\partial n} ds$$

olarak yazılır. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$-e^{\lambda mt}(div(|\nabla v|^m\nabla v), v_t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{\lambda mt}}{m+2}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}\right) - \frac{\lambda m}{m+2}e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} - e^{\lambda mt}\int_{\Gamma_1} v_t \frac{\partial v^{m+1}}{\partial n} ds \qquad (3.72)$$

bulunur.

$\int_\Omega v_t \int_0^t g\,(t-\tau)\,\Delta v(\tau) d\tau dx$ terimi için integrallerin sırası değiştirilirse

$$\int_\Omega v_t \int_0^t g\,(t-\tau)\,\Delta v(\tau) d\tau dx = \int_0^t g\,(t-\tau)\int_\Omega v_t\,\Delta v(\tau) dx d\tau$$

olur. $\int_\Omega v_t\,\Delta v(\tau) dx$ ifadesinde Green özdeşliği uygulanırsa

$$\int_\Omega v_t\,\Delta v(\tau) dx = -\int_\Omega \nabla v_t\,\nabla v(\tau) dx + \int_{\partial\Omega} v_t \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

$$= -\int_\Omega \nabla v_t\,\nabla v(\tau) dx + \int_{\Gamma_1} v_t \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

bulunur. Üstteki eşitliğin her iki yanı $g\,(t-\tau)$ ile çarpılıp 0 dan t ye integre edilirse

$$\int_0^t g\,(t-\tau)\int_\Omega v_t\,\Delta v(\tau) dx d\tau = \int_0^t g\,(t-\tau)\,(-\int_\Omega \nabla v_t\,\nabla v(\tau) dx + \int_{\Gamma_1} v_t \frac{\partial v}{\partial n} ds) d\tau$$

$$\int_0^t g\,(t-\tau)\int_\Omega v_t\,\Delta v(\tau) dx d\tau = -\int_0^t g\,(t-\tau)\int_\Omega \nabla v_t\,\nabla v(\tau) dx d\tau$$

$$+\int_0^t g\,(t-\tau)\int_{\Gamma_1} v_t \frac{\partial v}{\partial n} ds\, d\tau \qquad (3.73)$$

olarak yazılır. (3.40) eşitliğinde u yerine v ve g_1 yerine g yazılırsa

$$\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega v_t \Delta v(\tau)dxd\tau = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(g*\nabla v)(\mathrm{t}) - \frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds.\|\nabla v(t)\|^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\left(\int_\Omega |\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 dx\right)d\tau$$

$$+\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx + \int_0^t g(t-\tau)\left(\int_{\Gamma_1} v_t \frac{\partial v}{\partial n}(x,\tau)ds\right)d\tau$$

olur. Üstteki eşitliğin son teriminde integrallerin sırası değiştirilirse

$$\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega v_t \Delta v(\tau)dxd\tau = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(g*\nabla v)(\mathrm{t}) - \frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla v(t)\|^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\left(\int_\Omega |\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 dx\right)d\tau + \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx$$

$$+\int_{\Gamma_1} v_t \int_0^t g(t-\tau)\frac{\partial v}{\partial n}(x,\tau)dsd\tau$$

olarak yazılır. Üstteki eşitliğin son teriminde (3.54) eşitliğinden

$$\int_0^t g\,(t-\tau)\frac{\partial v}{\partial n}(x,\tau)d\tau = \frac{\partial v}{\partial n}(x,t) + e^{\lambda mt}|\nabla v|^{m+1} - \alpha v$$

eşitliği kullanılırsa

$$\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega v_t \Delta v(\tau)dxd\tau = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(g*\nabla v)(\mathrm{t}) - \frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla v(t)\|^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\left(\int_\Omega |\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 dx\right)d\tau + \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx$$

$$+\int_{\Gamma_1} v_t\left(\frac{\partial v}{\partial n}(x,t) + e^{\lambda mt}|\nabla v|^{m+1} - \alpha v\right)d\tau$$

olur. Üstteki eşitlikte düzenleme yapılırsa

$$\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega v_t \Delta v(\tau)dxd\tau = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(g*\nabla v)(\mathrm{t}) - \frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla v(t)\|^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\left(\int_\Omega |\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 dx\right)d\tau + \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx$$

$$+\int_{\Gamma_1} v_t\left(\frac{\partial v}{\partial n}(x,t)d\tau + \int_{\Gamma_1} e^{\lambda mt} v_t|\nabla v|^{m+1}d\tau - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha}{2}\|v\|_{\Gamma_1}^2\right)\right. \tag{3.74}$$

bulunur. (3.65)-(3.74) eşitlikleri (3.64) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\|v_t\|^2\right)+(2\lambda+1)\|v_t\|^2+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\|v\|^2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2\right)-\int_{\Gamma_1} v_t\frac{\partial v}{\partial n}ds$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\lambda mt}\left(\frac{1}{m+2}\|v\|_{m+2}^{m+2}\right)\right)-\lambda m e^{\lambda mt}\frac{1}{m+2}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}-e^{\lambda mt}\int_{\Gamma_1} v_t\frac{\partial v^{m+1}}{\partial n}ds$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}(g*\nabla v)(\mathrm{t})-\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\|\nabla v(t)\|^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\left(\int_\Omega|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2dx\right)d\tau\ +\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega|\nabla v(t)|^2dx$$

$$+\int_{\Gamma_1} v_t\left(\frac{\partial v}{\partial n}(x,t)d\tau+\int_{\Gamma_1} e^{\lambda mt}v_t|\nabla v|^{m+1}d\tau-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha}{2}\|v\|_{\Gamma_1}^2\right)\right.$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\lambda t}\int_\Omega v\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right)dx\right)+\lambda e^{-\lambda t}\int_\Omega v\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right)dx+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{\lambda pt}}{p+2}\|v\|_{p+2}^{p+2}\right)$$

$$-\frac{\lambda p}{p+2}e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}-k\lambda f(t)e^{-2\lambda t}$$

bulunur. Üstteki eşitlikte düzenleme yapılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{\lambda pt}}{p+2}\|v\|_{p+2}^{p+2}+\frac{\alpha}{2}\|v\|_{\Gamma_1}^2-\frac{1}{2}(\|v_t\|^2+\lambda(\lambda+1)\|v\|^2\right.$$

$$\left.+(1-\int_0^t g(s)ds)\|\nabla v(t)\|^2+(g*\nabla v)(t)+\frac{2e^{\lambda mt}}{m+2}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}\right)$$

$$=(2\lambda+1)\|v_t\|^2-\frac{\lambda m}{m+2}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\left(\int_\Omega|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2dx\right)d\tau$$

$$+\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega|\nabla v(t)|^2dx-e^{-\lambda t}\int_\Omega v_t\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right)dx+\lambda p\frac{e^{\lambda pt}}{p+2}\|v\|_{p+2}^{p+2}+k\lambda f(t)e^{-2\lambda t}$$

$$+\lambda p\frac{e^{\lambda pt}}{p+2}\|v\|_{p+2}^{p+2}+k\lambda f(t)e^{-2\lambda t} \tag{3.75}$$

olarak yazılır. Üstteki eşitlikte $-\frac{1}{2}$ nin çarpanı olan ifade

$$I\big(v(t)\big):=(\|v_t\|^2+\lambda(\lambda+1)\|v\|^2$$

$$+(1-\int_0^t g(s)ds)\|\nabla v(t)\|^2+(g*\nabla v)(t)+\frac{2e^{\lambda mt}}{m+2}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} \tag{3.76}$$

alınırsa ve $\frac{\partial}{\partial t}$ parantezindeki ifade sistemin enerji denklemi olarak alınırsa

$$E_\lambda(t) = \frac{e^{\lambda pt}}{p+2}\|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{\alpha}{2}\|v\|_{\Gamma_1}^2 - \frac{1}{2}I(v(t)) \tag{3.77}$$

şeklinde yazılabilir. Böylelikle

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t) = (2\lambda+1)\|v_t\|^2 - \frac{\lambda m}{m+2}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} - e^{-\lambda t}\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), v_t\right)$$

$$+\frac{\lambda p}{p+2}\, e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} + k\lambda f(t)e^{-2\lambda t} - \frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\left(\int_\Omega |\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|^2 dx\right)d\tau$$

$$+\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx \tag{3.78}$$

eşitliği bulunur.

Lemma 3.1.

Teorem 3.1. şartları altında (3.44) eşitliğindeki $E(t)$ enerji fonksiyonu

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t) \le \|u_t\|^2 + \int_\Omega u(t)\hat{h}\,(t,u)dx + f(t)\,\phi'(t) \tag{3.79}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat.

(3.20) den

$$g_1(s) = e^{\lambda s}g(s) \ge 0$$

olur ve

$$-\frac{1}{2}g_1(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \le 0 \tag{3.80}$$

bulunur.

$g_1(s) = e^{\lambda s}g(s)$ eşitliğinin her iki yanının s ye göre türevi alınırsa

$$g_1{}'(s) = e^{\lambda s}g'(s) + \lambda e^{\lambda s}g(s)$$

olur. Üstteki eşitliğin ilk terimi için (3.20) den

$$g_1{}'(s) \le -\lambda e^{\lambda s}g(s) + \lambda e^{\lambda s}g(s)$$

bulunur. $\lambda > 0$, $g(s) \ge 0$ olduğu için

$g_1{}'(s) \leq 0$

olur. Dolayısıyla

$$\frac{1}{2}\int_0^t g_1{}'(t-\tau)\left(\int_\Omega |\nabla u(\tau) - \nabla u(t)|^2 dx\right)d\tau \leq 0 \tag{3.81}$$

olur. (3.80) - (3.81) eşitlikleri (3.44) te dikkate alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t) \leq -\|u_t\|^2 + \int_\Omega u_t(\hat{h}\,(t,u)dx + f(t)\,\phi'(t) \tag{3.82}$$

bulunur. Böylece Lemma 3.1. ispatı tamamlanmış olur.

Lemma 3.2.

Teorem 3.1. şartları altında ve (3.19) eşitliğinde tanımlanan $f(t)$ fonksiyonu,

$M, N > 0$ ve $\gamma_0, \gamma_1 > 0$ iken

$$|M\phi'(t) + N\phi(t)|f(t) \leq \left(\frac{\delta N\theta^2}{2} + \frac{M\gamma_0}{2} + \frac{1-l}{2}\right)\|\nabla u\|^2 + \frac{M\gamma_0}{2}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2} + \frac{M\gamma_1}{2}\|u\|_{p+2}^{p+2}$$

$$+\frac{1-l}{2l}(g_1 * \nabla u)(t) + H(t) \tag{3.83}$$

eşitsizliğini sağlar. Bu eşitsizlikte $\delta > 0$ ve

$$H(t) = |M\phi'(t) + N\phi(t)||\phi''(t) + \phi'(t)| + \frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta N\theta^2}\right)\|\nabla\omega\|^2$$

$$+\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^{m+2}}{(m+2)\left[\frac{M\gamma_0\,(m+2)}{4m+4}\right]^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2} + \frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^{p+2}}{(p+2)\left[\frac{M\gamma_1(p+2)}{4p+4}\right]^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2}$$

$$+\frac{L^2|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2}{M}\left(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1}\right)\|\omega\|^2 \tag{3.84}$$

şeklindedir.

İspat. (3.19) eşitliğinde tanımlanan $f(t)$ nin her iki tarafı $|M\phi'(t) + N\phi(t)|$ ile çarpılır ve $\alpha = 1$ alınırsa

$$|M\phi'(t) + N\phi(t)|f(t)$$

$$= |M\phi'(t) + N\phi(t)|(\phi''(t) + \phi'(t)) + |M\phi'(t) + N\phi(t)|\,(|\nabla u^m|\nabla u, \nabla\omega)$$

$$-|M\phi'(t)+N\phi(t)|\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla\omega)d\tau-|M\phi'(t)+N\phi(t)|\;(\hat{\mathrm{h}}\;(t,u),\omega)$$

$$+|M\phi'(t)+N\phi(t)|(|u|^p u,\omega)+|M\phi'(t)+N\phi(t)|(\nabla u,\nabla\omega) \qquad (3.85)$$

bulunur.

(3.85) eşitliğinin sağındaki terimlerin her birine Hölder ve $\varepsilon-$Young eşitsizlikleri uygulanacaktır.

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(\nabla u,\nabla\omega)=\int_\Omega \nabla u|M\phi'(t)+N\phi(t)|\nabla\omega dx$$

dir. Üstteki eşitlikte $q=q'=2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(\nabla u,\nabla\omega)$$

$$\leq|M\phi'(t)+N\phi(t)|\left(\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|\nabla\omega|^2dx\right)^{1/2}$$

olur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(\nabla u,\nabla\omega)\leq|M\phi'(t)+N\phi(t)|\|\nabla u\|_2\|\nabla\omega\|_2$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte $a_1=\|\nabla u\|_2$, $b=|M\phi'(t)+N\phi(t)|\|\nabla\omega\|_2$, $q=q'=2,\ \varepsilon=(\delta N\theta^2)^{1/2}$ için $\varepsilon-$Young eşitsizliği uygulanırsa

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(\nabla u,\nabla\omega)\leq(\delta N\theta^2)^{1/2}\,\|\nabla u\|_2\|\nabla\omega\|_2\,\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|}{(\delta N\theta^2)^{1/2}}$$

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(\nabla u,\nabla\omega)\leq\frac{\delta N\theta^2}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2}{2\delta N\theta^2}\;\|\nabla\omega\|^2 \qquad (3.86)$$

elde edilir.

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(|u|^p u,\omega)=|M\phi'(t)+N\phi(t)|\int_\Omega|u|^{p+1}\omega dx$$

Üstteki eşitlikte $q=\frac{p+2}{p+1},\ q'=p+2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(|u|^p u,\omega)$$

$$\leq|M\phi'(t)+N\phi(t)|\left(\int_\Omega|u|^{p+1\left(\frac{p+2}{p+1}\right)}dx\right)^{\frac{p+1}{p+2}}\;\left(\int_\Omega|\omega|^{p+2}dx\right)^{\frac{1}{p+2}}$$

$\leq |M\phi'(t)+N\phi(t)|(\int_\Omega |u|^{p+2}dx)^{\frac{p+1}{p+2}}\ \ \|\omega\|_{p+2}$

$\leq |M\phi'(t)+N\phi(t)|\|u\|_{p+2}^{p+1}\|\omega\|_{p+2}$

bulunur.

Üstteki eşitsizlikte $a_1=\|u\|_{p+2}^{p+1}$, $b=|M\phi'(t)+N\phi(t)|\|\omega\|_{p+2}$, $q=\frac{p+2}{p+1}$,

$q'=p+2,\ \varepsilon=(\frac{M\gamma_1}{4}\frac{p+2}{p+1})^{\frac{p+1}{p+2}}$ için ε −Young eşitsizliği uygulanırsa

$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(|u|^p u,\omega)\leq(\frac{M\gamma_1}{4}\frac{p+2}{p+1})^{\frac{p+1}{p+2}}\|u\|_{p+2}^{p+1}\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|}{(\frac{M\gamma_1}{4}\frac{p+2}{p+1})^{\frac{p+1}{p+2}}}\|\omega\|_{p+2}$

$\leq\left(\frac{M\gamma_1}{4}\frac{p+2}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{p+2}(\frac{p+2}{p+1})}\|u\|_{p+2}^{p+1\left(\frac{p+2}{p+1}\right)}+\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^{p+2}}{(p+2)(\frac{M\gamma_1}{4}\frac{p+2}{p+1})^{\frac{p+1}{p+2}(p+2)}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2}$

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(|u|^p u,\omega)\leq\frac{M\gamma_1}{4}\|u\|_{p+2}^{p+2}+\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^{p+2}}{(p+2)(\frac{M\gamma_1(p+2)}{4p+4})^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2} \qquad (3.87)$$

elde edilir.

$|M\phi'(t)+N\phi(t)|\ (|\nabla u^m|\nabla u,\nabla\omega)=|M\phi'(t)+N\phi(t)|\int_\Omega|\nabla u|^{m+1}\nabla\omega dx$

Üstteki eşitlikte $q=\frac{m+2}{m+1},\ q'=m+2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(|\nabla u|^m\nabla u,\nabla\omega)$

$\leq|M\phi'(t)+N\phi(t)|(\int_\Omega|\nabla u|^{(m+1)(\frac{m+2}{m+1})}dx)^{\frac{m+1}{m+2}}\ \ (\int_\Omega|\nabla\omega|^{m+2}dx)^{\frac{1}{m+2}}$

$\leq|M\phi'(t)+N\phi(t)|(\int_\Omega|\nabla u|^{m+2}dx)^{\frac{m+1}{m+2}}\ \ \|\nabla\omega\|_{m+2}$

$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(|\nabla u|^m\nabla u,\nabla\omega)\leq|M\phi'(t)+N\phi(t)|\|\nabla u\|_{m+2}^{m+1}\|\nabla\omega\|_{m+2}$

olur. Üstteki eşitsizlikte $a_1=\|\nabla u\|_{m+2}^{m+1}$, $b=|M\phi'(t)+N\phi(t)|\|\nabla\omega\|_{m+2}$, $q=\frac{m+2}{m+1},\ q'=m+2$, $\varepsilon=(\frac{M\gamma_0}{4}\frac{m+2}{m+1})^{\frac{m+1}{m+2}}$ için ε -Young eşitsizliği uygulanırsa

$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(|\nabla u|^m\nabla u,\nabla\omega)$

$$\leq \left(\frac{M\gamma_0}{4}\frac{m+2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m+2}}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+1}\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|}{\left(\frac{M\gamma_0}{4}\frac{m+2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m+2}}}\|\nabla\omega\|_{m+2}$$

$$\leq \left(\frac{M\gamma_0}{4}\frac{m+2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m+2}\left(\frac{m+2}{m+1}\right)}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+1\left(\frac{m+2}{m+1}\right)} + \frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^{m+2}}{(m+2)\left(\frac{M\gamma_0}{4}\frac{m+2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m+2}(m+2)}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2}$$

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(|\nabla u|^m\nabla u,\nabla\omega)$$

$$\leq \frac{M\gamma_0}{4}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}+\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^{m+2}}{(m+2)\left(\frac{M\gamma_0(m+2)}{4m+4}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2} \qquad (3.88)$$

bulunur. (3.7) eşitliği ve (3.18) eşitliklerinden

$$\hat{h}\,(t,u)\leq L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}}+|u|^{\frac{p}{2}})$$

olur. Üstteki eşitsizliğin sağındaki pozitif ifadenin üsleri 1 artılırsa

$$\hat{h}\,(t,u)\leq L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}+1}+|u|^{\frac{p}{2}+1})$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı ω ile çarpılıp Ω da integre edilirse

$$(\hat{h}\,(t,u),\omega)\leq \int_\Omega L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}+1}+|u|^{\frac{p}{2}+1})\omega dx)$$

olur. Üstteki eşitsizliğin her iki yanı $|M\phi'(t)+N\phi(t)|$ ile çarpılırsa

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|\left(\hat{h}\,(t,u),\omega\right)$$

$$\leq |M\phi'(t)+N\phi(t)|\int_\Omega L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}+1}+|u|^{\frac{p}{2}+1})\omega dx)$$

$$\leq L|M\phi'(t)+N\phi(t)|\int_\Omega|\nabla u|^{\frac{m+2}{2}}\omega dx+\ L|M\phi'(t)+N\phi(t)|\int_\Omega|u|^{\frac{p+2}{2}}\omega dx$$

olarak yazılabilir. $q=q'=2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|(\hat{h}\,(t,u),\omega)$$

$$\leq L|M\phi'(t)+N\phi(t)|\left(\int_\Omega|\nabla u|^{m+2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\ \left(\int_\Omega\omega^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$L|M\phi'(t)+N\phi(t)|\left(\int_\Omega|u|^{p+2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\ \left(\int_\Omega\omega^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafı $\left(\frac{M\gamma_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ve $\left(\frac{M\gamma_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ile çarpıp düzenlenirse

$$|M\phi'(t) + N\phi(t)|\left(\hat{h}\,(t,u),\omega\right) \leq \left(\frac{M\gamma_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{m+2}^{m+2} \frac{L|M\phi'(t)+N\phi(t)|\|\omega\|_2}{\left(\frac{M\gamma_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\left(\frac{M\gamma_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}} \frac{L|M\phi'(t)+N\phi(t)|\|\omega\|_2}{\left(\frac{M\gamma_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

olarak yazılabilir. Üstteki eşitsizliğin sağındaki ilk terime $a_1 = \|\nabla u\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}}$,

$b = L|M\phi'(t) + N\phi(t)|\|\omega\|_2$, $q = q' = 2 \quad \varepsilon = \left(\frac{M\gamma_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

2.terime $a_2 = \|u\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}$, $b = L|M\phi'(t) + N\phi(t)|\|\omega\|_2,\ q = q' = 2,\ \varepsilon = \left(\frac{M\gamma_1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, için ε −Young eşitsizliği uygulanırsa

$$|M\phi'(t) + N\phi(t)|\left(\hat{h}\,(t,u),\omega\right) \leq \frac{M\gamma_0}{4}\ \|\nabla u\|_{m+2}^{m+2} + \frac{M\gamma_1}{4}\|u\|_{p+2}^{p+2}$$

$$+\frac{L^2|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2}{M}\left(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\|\omega\|^2 \tag{3.89}$$

bulunur.

$$|M\phi'(t) + N\phi(t)| \int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla\omega)d\tau$$

$$= |M\phi'(t) + N\phi(t)| \int_0^t g_1\,(t-\tau) \int_\Omega \nabla u(\tau)\nabla\omega dx d\tau$$

$$= |M\phi'(t) + N\phi(t)| \int_\Omega \nabla\omega dx\ \int_\Omega \int_0^t g_1\,(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau\, dx$$

olarak yazılan eşitlikte $q = q' = 2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$|M\phi'(t) + N\phi(t)| \int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla\omega)d\tau$$

$$\leq |M\phi'(t) + N\phi(t)|\left(\int_\Omega |\nabla\omega|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\ \left(\int_\Omega \left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

olur. Üstteki eşitsizlikte $q = q' = 2$ olacak şekilde ε −Young eşitsizliği uygulanırsa

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla\omega)d\tau$$

$$\leq \frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2\|\nabla\omega\|^2}{2}+\frac{\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau\right)^2dx}{2} \quad (3.90)$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin son teriminde üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$|a+b|\leq|a|+|b|$ den

$|\nabla u(\tau)|=|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)+\nabla u(t)|$

$|\nabla u(\tau)|\leq|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|+|\nabla u(t)|$

olarak yazılabilir. Üstteki eşitsizlik (3.90) eşitsizliğinde uygulanırsa

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla\omega)d\tau$$

$$\leq \frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2\|\nabla\omega\|^2}{2}+\frac{\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)(|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|+|\nabla u(t)|)d\tau\right)^2dx}{2} \quad (3.91)$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte düzenleme yapılırsa

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla\omega)d\tau$$

$$\leq \frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2\|\nabla\omega\|^2}{2}+\frac{\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau+\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(t)|d\tau\right)^2dx}{2} \quad (3.92)$$

olur. Üstteki eşitsizliğin son teriminde Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$\|x+y\|^2\leq\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2$ den

$$\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau+\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)^2dx$$

$$\leq \int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2dx+\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)^2dx$$

$$2\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)dx \quad (3.93)$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin son teriminde

$a_1=\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau,\ b=\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau$

$q = q' = 2, \;\; \varepsilon = (\frac{1-l}{l})^{\frac{1}{2}}$ olacak şekilde $\varepsilon -$Young eşitsizliği uygulanırsa

$$2\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)$$

$$= 2\left((\frac{1-l}{l})^{\frac{1}{2}}\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\,(\frac{l}{1-l})^{\frac{1}{2}}\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)$$

$$\leq \left(\frac{1-l}{l}\right)\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2 + \frac{l}{1-l}\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)^2 \quad (3.94)$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı Ω bölgesinde integre edilirse

$$2\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)dx$$

$$\leq \left(\frac{1-l}{l}\right)\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$+\frac{l}{1-l}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx \quad (3.95)$$

bulunur. Üstteki eşitsizlik (3.93) ün son teriminde yerine yazılırsa

$$\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)(|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|+|\nabla u(t)|)d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx + \int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\left(\frac{1-l}{l}\right)\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$+\frac{l}{1-l}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx$$

olur. Üstteki eşitsizlikte düzenleme yapılırsa

$$\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)(|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|+|\nabla u(t)|)d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{l}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$+\frac{1}{1-l}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx \quad (3.96)$$

olur. Üstteki eşitliğin son teriminde $t-\tau=s$ değişken değişimi yapılırsa

$$\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau = |\nabla u(t)|\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,d\tau$$

$$= |\nabla u(t)|\int_0^t g_1\,(s)\,ds$$

bulunur. Üstteki eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$$\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)^2 = |\nabla u(t)|^2\left(\int_0^t g_1\,(s)\,ds\right)^2$$

olarak yazılır. Üstteki eşitliğin her iki tarafı Ω bölgesinde integre edilip $\frac{1}{1-l}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{1-l}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx = \frac{1}{1-l}|\nabla u(t)|^2\left(\int_0^t g_1\,(s)\,ds\right)^2 \tag{3.97}$$

olur.

$\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2$ terimi çarpanlara ayrılıp Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2$$

$$= \left(\int_0^t \left(g_1\,(t-\tau)\right)^{\frac{1}{2}}\left(g_1\,(t-\tau)\right)^{\frac{1}{2}}|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2$$

$$\leq \int_0^t g_1\,(s)\,ds\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 d\tau$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı Ω bölgesinde integre edilip $\frac{1}{l}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{l}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{l}\int_\Omega\int_0^t g_1\,(s)\,ds\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 d\tau\,dx \tag{3.98}$$

olur. Üstteki eşitsizliğin soluna (3.97) eşitliğinin solundaki terim, sağına da (3.97) eşitliğinin sağındaki terim eklenirse

$$\frac{1}{1-l}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx+\frac{1}{l}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq\frac{1}{l}\int_\Omega\int_0^t g_1\,(s)\,ds\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 d\tau\,dx$$

$$+\frac{1}{1-l}|\nabla u(t)|^2\left(\int_0^t g_1\,(s)\,ds\right)^2$$

bulunur. Üstteki eşitsizlik düzenlendiğinde

$$\frac{1}{1-l}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx+\frac{1}{l}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq\frac{1}{l}\int_0^t g_1\,(s)\,ds\int_\Omega\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 d\tau\,dx$$

$$+\frac{1}{1-l}\|\nabla u(t)\|^2\left(\int_0^t g_1\,(s)\,ds\right)^2 \tag{3.99}$$

olur. Sistemin enerjisinde kullanılan

$$(g_1\ *v)(t)=\int_0^t g_1\,(t-s)\|v(t)-v(s)\|^2 ds$$

eşitliğinde v yerine, ∇u ve s yerine τ yazılırsa

$$(g_1\ *\nabla u)(t)=\int_0^t g_1\,(t-\tau)\|\nabla u(t)-\nabla u(\tau)\|^2 d\tau$$

$$(g_1\ *\nabla u)(t)=\int_\Omega\int_0^t g_1\,(t-\tau)|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 d\tau\,dx \tag{3.100}$$

olarak yazılabilir. (3.21) ifadesinden

$$\int_0^t g_1(s)ds\leq\int_0^\infty g_1(s)ds$$

$$\int_0^t g_1(s)ds\leq 1-l \tag{3.101}$$

olur. (3.100) ve (3.101), (3.99) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{1-l}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx+\frac{1}{l}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\,|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq\frac{1-l}{l}(g_1\ *\nabla u)(t)+\frac{1}{1-l}\|\nabla u(t)\|^2(1-l)^2$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sol tarafı (3.96) eşitsizliğinin sağ tarafı olduğu için

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)(|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|+|\nabla u(t)|)d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq (1-l)\,\|\nabla u(t)\|^2+\frac{1-l}{l}(g_1\,*\nabla u)(t) \tag{3.102}$$

olur. (3.92) eşitsizliğinin en sağındaki terim (3.102) nin ilk terimi olduğundan (3.102), (3.92) de yerine yazılırsa

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla\omega)d\tau$$

$$\leq \frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2\|\nabla\omega\|^2}{2}+\frac{1-l}{2}\|\nabla u(t)\|^2+\frac{1-l}{2l}(g_1\,*\nabla u)(t) \tag{3.103}$$

bulunur. (3.86)-(3.89) ve (3.103) eşitsizlikleri, (3.85) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|f(t)$$

$$\leq |M\phi'(t)+N\phi(t)|(\phi''(t)+\ \phi'(t))+\frac{\delta N\theta^2}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2}{2\delta N\theta^2}\ \|\nabla\omega\|^2$$

$$+\frac{M\gamma_1}{4}\|u\|_{p+2}^{p+2}+\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^{p+2}}{(p+2)(\frac{M\gamma_1(p+2)}{4p+4})^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2}+\frac{M\gamma_0}{4}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}+\frac{1-l}{2l}(g_1\,*\nabla u)(t)$$

$$+\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^{m+2}}{(m+2)(\frac{M\gamma_0(m+2)}{4m+4})^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2}+\frac{M\gamma_0}{4}\ \ \|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}+\frac{M\gamma_1}{4}\|u\|_{p+2}^{p+2}$$

$$+\frac{L^2|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2}{M}\left(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\|\omega\|^2+\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2\|\nabla\omega\|^2}{2}+\frac{1-l}{2}\|\nabla u\|^2$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$|M\phi'(t)+N\phi(t)|f(t)$$

$$\leq \left(\frac{\delta N\theta^2}{2}+\frac{M\gamma_0}{2}+\frac{1-l}{2}\right)\|\nabla u\|^2+\frac{M\gamma_0}{2}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}+\frac{M\gamma_1}{2}\|u\|_{p+2}^{p+2}+\frac{1-l}{2l}(g_1\,*\nabla u)(t)$$

$$+|M\phi'(t)+N\phi(t)|(\phi''(t)+\ \phi'(t))+\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2}{2}(1+\frac{1}{\delta N\theta^2}\ \|\nabla\omega\|^2)$$

$$+\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^{m+2}}{(m+2)\left(\frac{M\gamma_0(m+2)}{4m+4}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2}+\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^{p+2}}{(p+2)\left(\frac{M\gamma_1(p+2)}{4p+4}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2}$$

$$+\frac{L^2|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2}{M}\left(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\|\omega\|^2$$

şeklinde yazılabilir. Üstteki eşitsizliğin son 5 terimi $H(t)$ olarak alındığında

$$H(t) = |M\phi'(t) + N\phi(t)|(\phi''(t) + \phi'(t)) + \frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2}{2}(1 + \frac{1}{\delta N\theta^2}\|\nabla\omega\|^2)$$

$$+\frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^{m+2}}{(m+2)\left(\frac{M\gamma_0(m+2)}{4m+4}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2} + \frac{|M\phi'(t)+N\phi(t)|^{p+2}}{(p+2)\left(\frac{M\gamma_1(p+2)}{4p+4}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2}$$

$$+\frac{L^2|M\phi'(t)+N\phi(t)|^2}{M}\left(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1}\right)\|\omega\|^2$$

olur. Üstteki eşitlikten

$$|M\phi'(t) + N\phi(t)|f(t) \leq \left(\frac{\delta N\theta^2}{2} + \frac{M\gamma_0}{2} + \frac{1-l}{2}\right)\|\nabla u\|^2 + \frac{M\gamma_0}{2}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2} + \frac{M\gamma_1}{2}\|u\|_{p+2}^{p+2}$$

$$+\frac{1-l}{2l}(g_1 * \nabla u)(t) + H(t)$$

elde edilir. Böylelikle Lemma 3.2 nin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.1. in İspatı

$\xi > 0,\ \int_0^\infty g_1(s)ds \leq \frac{2\xi}{1+2\xi}$

ve

$$\psi_1(t) = \int_\Omega uu_t\, dx + \frac{1}{2}\|u\|^2$$

$$\psi_2(t) = -\int_0^t \int_0^s g_1(s-\tau)\|(\nabla u(s) - \nabla u(\tau)\|^2\, d\tau\, ds \qquad (3.104)$$

olacak şekilde

$$F(t) = ME(t) + N(\psi_1(t) + \xi\psi_2(t)) \qquad (3.105)$$

tanımlansın.

(3.104) ifadesinin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa

$$\psi_1{}'(t) = \int_\Omega u_t\, u_t\, dx + \int_\Omega u\, u_{tt}\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega 2u\, u_t\, dx$$

$$= \|u_t\|^2 + \int_\Omega u\, u_{tt}\, dx + \int_\Omega u\, u_t\, dx \tag{3.106}$$

$$\psi_2{}'(t) = \int_0^s g_1\,(s-\tau)\|(\nabla u(s) - \nabla u(\tau)\|^2\, d\tau$$

olur. Üstteki eşitlikte s yerine t yazılırsa

$$\psi_2{}'(t) = \int_0^t g_1\,(t-\tau)\|(\nabla u(t) - \nabla u(\tau)\|^2\, d\tau$$

olarak yazılabilir. Üstteki eşitlikte τ yerine s yazılırsa

$$\psi_2{}'(t) = \int_0^t g_1\,(t-s)\|(\nabla u(t) - \nabla u(s)\|^2\, ds$$

olur. Üstteki eşitlikte (3.100) dikkate alınırsa

$$\psi_2{}'(t) = -(g_1 * \nabla u)(t) \tag{3.107}$$

şeklinde yazılır. (3.105) eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa

$$F'(t) = ME'(t) + N\psi_1{}'(t) + N\xi\, \psi_2{}'(t) \tag{3.108}$$

olur. (3.82), (3.106) ve (3.107) eşitlikleri üstteki eşitlikte yerine yazılırsa

$$F'(t) \le -M\|u_t\|^2 + M\int_\Omega u_t(\hat{h}\,(t,u)dx + Mf(t)\phi'(t)\psi_1{}'(t)$$

$$+N\big(\|u_t\|^2 + \int_\Omega u\, u_{tt}\, dx + \int_\Omega u\, u_t\, dx\big) + N\xi\,(-(g_1 * \nabla u)(t))$$

bulunur. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$F'(t) \le (N-M)\|u_t\|^2 - N\xi\,(g_1 * \nabla u)(t) + N\int_\Omega u\, u_t\, dx + N(u_{t\,t}, u)$$

$$+M\big(\hat{h}\,(t,u), u_t\big) + M\phi'(t)f(t) \tag{3.109}$$

olur. (3.8) de u_{tt} terimi yalnız bırakılırsa

$$u_{tt} = \Delta u + div(|\nabla u|^m \nabla u) - \int_0^t g_1\,(t-\tau)\,\Delta u(\tau)d\tau - u_t - \alpha|u|^p u$$
$$+h(x,t,u,\nabla u) + f(t)\omega\,(\mathrm{x})$$

bulunur. Üstteki eşitliğin her iki tarafı u ile çarpılıp Ω bölgesinde integre edilirse

$$(u_{tt}, u) = (u, \Delta u) + (u, div(|\nabla u|^m \nabla u)) - (u, \int_0^t g_1\,(t-\tau)\,\Delta u(\tau) d\tau) - (u, u_t)$$
$$-(\alpha |u|^p u, u) + (h(x,t,u,\nabla u), u) + (u, f(t)\omega\,(\mathrm{x})\,) \qquad (3.110)$$

bulunur. Üstteki eşitliğin sağında terimler tek tek incelenirse

$$-(u, u_t) = -\int_\Omega u_t\, u\, dx \qquad (3.111)$$

$\alpha = 1$ için $-(\alpha |u|^p u, u) = -\int_\Omega u|u|^p u\, dx$

$$= -\|u\|_{p+2}^{p+2} \qquad (3.112)$$

olur. (3.18) den

$$(h(x,t,u,\nabla u), u) = (\hat{h}\,(t,u), u) \qquad (3.113)$$

olarak yazılır.

$$\big(u, f(t)\omega\,(\mathrm{x})\big) = -\int_\Omega u f(t)\omega\,(\mathrm{x})\, dx$$

Üstteki eşitlikte (3.4) ten

$$(u, f(t)\omega\,(\mathrm{x})\,) = \phi(t) f(t) \qquad (3.114)$$

bulunur.

$$(u, \Delta u) = \int_\Omega u \Delta u\, dx$$

dir. Üstteki eşitlikte Green özdeşliğinden

$$(u, \Delta u) = -\int_\Omega \nabla u \nabla u\, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n}(x,t) ds$$

bulunur. Üstteki eşitliğin en sağındaki terimde (3.9) kullanılırsa

$$(u, \Delta u) = -\|\nabla u\|^2 + \int_{\partial\Omega} u(\int_0^t g_1\,(t-\tau) \frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau) d\tau - |\nabla u|^m \nabla u + \alpha u) ds$$

olur. $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ eşitliğinden

$$(u, \Delta u) = -\|\nabla u\|^2 + \int_{\Gamma_1} (\int_0^t u(t) g_1\,(t-\tau) \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial n} d\tau) ds - \int_{\Gamma_1} u|\nabla u|^{m+1} ds$$
$$+\alpha \|u\|_{\Gamma_1}^2 \qquad (3.115)$$

olarak yazılır.

$$\left(u, div(|\nabla u|^m \nabla u)\right) = \int_\Omega \nabla(|\nabla u|^m \nabla u).u\,dx$$

Üstteki eşitlikte Green özdeşliğinden

$$\left(u, div(|\nabla u|^m \nabla u)\right) = -\int_\Omega \nabla u.|\nabla u|^m \nabla u\,dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial(u^{m+1})(x,t)}{\partial n} ds$$

olur. $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ eşitliğinden

$$\left(u, div(|\nabla u|^m \nabla u)\right) = -\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2} + \int_{\Gamma_1} u \frac{\partial(u^{m+1})(x,t)}{\partial n} ds \tag{3.116}$$

olarak yazılır.

$$-\left(u, \int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau\right) = -\int_\Omega u(\int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau)dx$$

$$= -\int_\Omega(\int_0^t g_1(t-\tau)u(t)\Delta u(\tau)d\tau)dx$$

Üstteki eşitlikte integrallerin sırası yer değiştirilirse

$$-\left(u, \int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau\right) = -\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega u(t)\ \Delta u(\tau)dxd\tau \tag{3.117}$$

şeklinde yazılır.

$\int_\Omega u(t)\ \Delta u(\tau)dx$ teriminde Green özdeşliği uygulanırsa

$$\int_\Omega u(t)\ \Delta u(\tau)dx = -\int_\Omega \nabla u(t)\nabla u(\tau)\,dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial n} ds$$

olur. Üstteki eşitlik $-g_1(t-\tau)$ ile çarpılıp $(0,t)$ aralığında integre edilirse

$$-\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega u(t)\ \Delta u(\tau)dxd\tau = \int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(t)\nabla u(\tau)\,dxd\tau$$

$$-\int_0^t g_1(t-\tau)\int_{\Gamma_1} u \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial n} ds\ d\tau \tag{3.118}$$

bulunur. (3.117)-(3.118) eşitliklerinden

$$-\left(u, \int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau\right) = \int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \nabla u(t)\nabla u(\tau)\,dxd\tau$$

$$-\int_0^t g_1\,(t-\tau)\int_{\Gamma_1} u\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial n}ds\;d\tau$$

bulunur. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$-\left(u,\int_0^t g_1\,(t-\tau)\Delta u\,(\tau)d\tau\right)=\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u,\nabla u(\tau))d\tau$$

$$-\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\int_{\Gamma_1} u\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial n}ds\,)\,d\tau \qquad (3.119)$$

olarak yazılır. (3.111)-(3.119) eşitlikleri (3.110) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(u,\Delta u)=-\|\nabla u\|^2+\int_{\Gamma_1}(\int_0^t u(t)g_1\,(t-\tau)\frac{\partial u}{\partial n}(x,\tau)d\tau)ds-\int_{\Gamma_1} u|\nabla u|^{m+1}ds$$

$$+\alpha\|u\|_{\Gamma_1}^2-\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}+\int_{\Gamma_1} u\frac{\partial(u^{m+1})(x,t)}{\partial n}ds+\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u,\nabla u(\tau))d\tau$$

$$-\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\int_{\Gamma_1} u\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial n}ds\,)\,d\tau-\int_\Omega u_t\,u\,dx-\|u\|_{p+2}^{p+2}+(\hat{h}\,(t,u),u)$$

$$+\phi(t)f(t)$$

bulunur. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$(u,\Delta u)=-\|\nabla u\|^2-\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}+\alpha\|u\|_{\Gamma_1}^2-\|u\|_{p+2}^{p+2}-\int_\Omega u_t\,u\,dx$$

$$+\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u,\nabla u(\tau))d\tau+(\hat{h}\,(t,u),u)\;+\phi(t)f(t) \qquad (3.120)$$

olur. (3.105) ve (3.109) dan

$$F'(t)+\delta F(t)\le\delta ME(t)+\delta N\psi_1(t)+\delta\xi N\psi_2\,(t)+(N-M)\|u_t\|^2$$

$$-N\xi\,(g_1\,*\nabla u)(t)+N\int_\Omega u\,u_t\,dx+N(u_{t\,t},u)+M\big(\hat{h}\,(t,u),u_t\big)+M\phi'(t)f(t)$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte (3.104) ve (3.120) eşitlikleri kullanılırsa

$$F'(t)+\delta F(t)\le\delta ME(t)+\delta N\left(\int_\Omega uu_t\;dx+\frac{1}{2}\|u\|^2\right)$$

$$+\delta\xi N(-\int_0^t(\int_0^s g_1\,(s-\tau)\|(\nabla u(s)-\nabla u(\tau)\|^2\,d\tau)\,ds+(N-M)\|u_t\|^2$$

$$-N\xi\,(g_1\,*\nabla u)(t)+N\int_\Omega u\,u_t\,dx-N\,\|\nabla u\|^2-N\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}+N\alpha\|u\|_{\Gamma_1}^2$$

$-N\|u\|_{p+2}^{p+2} - N\int_\Omega u_t\, u\, dx \;\; + N\int_0^t g_1\,(t-\tau)\big(\nabla u, \nabla u(\tau)\big)d\tau + N(\hat{h}\,(t,u),u)$

$+N\phi(t)f(t) + M\big(\hat{h}\,(t,u),u_t\big) + M\phi'(t)f(t)$

bulunur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$F'(t) + \delta F(t)$

$\leq \delta M E(t) + \delta N\int_\Omega u u_t\; dx + \frac{\delta N}{2}\|u\|^2 + |M\phi'(t) + N\phi(t)|f(t)$

$-\delta\xi N\int_0^t(\int_0^s g_1\,(s-\tau)\|(\nabla u(s) - \nabla u(\tau)\|^2\, d\tau)\, ds - (M-N)\|u_t\|^2$

$-N\xi\,(g_1\; * \nabla u)(t) + M\big(\hat{h}\,(t,u),u_t\big) - N\|\nabla u\|^2 - N\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2} + N\alpha\|u\|_{\Gamma_1}^2$

$-N\|u\|_{p+2}^{p+2} + N\int_0^t g_1\,(t-\tau)\big(\nabla u, \nabla u(\tau)\big)d\tau + N(\hat{h}\,(t,u),u)$ (3.121)

elde edilir. Sistemin enerjisi olan

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}(1-\int_0^t g_1\,(s)ds)\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2}(g_1\; * \nabla u)(\mathrm{t}) + \frac{1}{m+2}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2} + \frac{1}{p+2}u_{p+2}^{p+2} - \frac{\alpha}{2}\|u\|^2{}_{\Gamma_1}$$

eşitliği, $(g_1\; * v)(t) = \int_0^t g_1\,(t-s)\|v(t) - v(\mathrm{s})\|^2 ds$ eşitliği ve

$1 - \int_0^t\; g_1(s)ds \leq 1$ eşitsizliği için (3.121) eşitsizliği düzenlenirse

$F'(t) + \delta F(t)$

$\leq \delta M(\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}(1-\int_0^t g_1\,(s)ds)\|\nabla u(t)\|^2 + \frac{1}{2}(g_1\; * \nabla u)(\mathrm{t}) + \frac{1}{m+2}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}$

$+\frac{1}{p+2}u_{p+2}^{p+2} - \frac{\alpha}{2}\|u\|^2{}_{\Gamma_1}) + \delta N\int_\Omega u u_t\; dx + \frac{\delta N}{2}\|u\|^2 + |M\phi'(t) + N\phi(t)|f(t)$

$-\delta\xi N\int_0^t(\int_0^s g_1\,(s-\tau)\|(\nabla u(s) - \nabla u(\tau)\|^2\, d\tau)\, ds - (M-N)\|u_t\|^2$

$-N\xi\,(g_1\; * \nabla u)(t) + M\big(\hat{h}\,(t,u),u_t\big) - N\|\nabla u\|^2 - N\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2} + N\alpha\|u\|_{\Gamma_1}^2$

$-N\|u\|_{p+2}^{p+2} + N\int_0^t g_1\,(t-\tau)\big(\nabla u, \nabla u(\tau)\big)d\tau + N(\hat{h}\,(t,u),u)$

bulunur. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$F'(t) + \delta F(t)$

$\leq -(M - \frac{\delta M}{2} - N)\|u_t\|^2 - (N - \frac{\delta M}{2})\|\nabla u\|^2 - (N\xi - \frac{\delta M}{2})(g_1 * \nabla u)(t)$

$+M\left(\hat{h}\,(t,u), u_t\right) - \left(N - \frac{\delta M}{m+2}\right)\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2} + \left(\frac{\delta M}{p+2} - N\right)\|u\|_{p+2}^{p+2} + (\alpha N - \frac{\alpha\delta M}{2})\|u\|_{\Gamma_1}^2$

$+N\left(\hat{h}\,(t,u), u\right) + N\int_0^t g_1\,(t-\tau)\left(\nabla u, \nabla u(\tau)\right)d\tau + \delta N\int_\Omega u u_t\; dx$

$+|M\phi'(t) + N\phi(t)|f(t)$

$+\frac{\delta N}{2}\|u\|^2 - \delta\xi N\int_0^t(\int_0^s g_1\,(s-\tau)\|(\nabla u(s) - \nabla u(\tau)\|^2\; d\tau)\; ds$ (3.122)

$\delta N\int_\Omega u u_t\; dx$ ifadesinde $q = q' = 2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$\delta N\int_\Omega u u_t\; dx \leq \delta N(\int_\Omega |u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}\,(\int_\Omega |u_t\,|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$

olur. Üstteki eşitsizlikte $q = q' = 2$ olacak şekilde $\varepsilon -$ Young eşitsizliği uygulanırsa

$\delta N\int_\Omega u u_t\; dx \leq \frac{\delta N}{2}\|u\|^2 + \frac{\delta N}{2}\|u_t\,\|^2$

bulunur. Teorem3. ten

$\frac{\delta N}{2}\|u\|^2 \leq \frac{\delta N}{2}\theta^2\|\nabla u\|^2$

olur. Böylelikle

$\delta N\int_\Omega u u_t\; dx \leq \frac{\delta N}{2}\|u_t\,\|^2 + \frac{\delta N\theta^2}{2}\|\nabla u\|^2$ (3.123)

olur. Mutlak değer tanımından

$\hat{h}\,(t,u) \leq \left|\hat{h}\,(t,u)\right|$ eşitsizliği, (3.7) ve (3.18) den

$\left|\hat{h}\,(t,u)\right| \leq L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}} + |u|^{\frac{p}{2}})$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağındaki pozitif ifadenin üsleri 1 artılırsa

$$\left|\hat{h}\,(t,u)\right| \le L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}+1} + |u|^{\frac{p}{2}+1}) \tag{3.124}$$

olur. Üstteki eşitsizlik u_t ile çarpılıp Ω da integre edilir ve M ile çarpılırsa

$$M\left|(\hat{h}\,(t,u), u_t\,)\right| \le M\int_\Omega L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}+1} + |u|^{\frac{p}{2}+1})u_t\,dx)$$

bulunur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$M\left|(\hat{h}\,(t,u), u_t\,)\right| \le LM\int_\Omega |\nabla u|^{\frac{m+2}{2}} u_t dx + \; LM\int_\Omega |u|^{\frac{p+2}{2}} u_t dx$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizliğe $q = q' = 2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$M\left|(\hat{h}\,(t,u), u_t\,)\right| \le LM(\int_\Omega |\nabla u|^{m+2} dx)^{\frac{1}{2}} \;\; (\int_\Omega |u_t|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$+LM(\int_\Omega |u|^{p+2} dx)^{\frac{1}{2}} \;\; (\int_\Omega |u_t|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafı $(M\gamma_0)^{\frac{1}{2}}$ ve $(M\gamma_1)^{\frac{1}{2}}$ ile çarpıp düzenlenirse

$$M\left|(\hat{h}\,(t,u), u_t\,)\right| \le (M\gamma_0)^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}} \frac{LM\|u_t\|_2}{(M\gamma_0)^{\frac{1}{2}}} + (M\gamma_1)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}} \frac{LM\|u_t\|_2}{(M\gamma_1)^{\frac{1}{2}}}$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağındaki ilk terime $a_1 = \|\nabla u\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}}$, $b = LM\|u_t\|_2$,

$q = q' = 2,\; \varepsilon = (M\gamma_0)^{\frac{1}{2}}$, 2.terime $a_2 = \|u\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}$, $b = LM\|u_t\|_2,\; q = q' = 2,$

$\varepsilon = (M\gamma_1)^{\frac{1}{2}}$ için $\varepsilon -$Young eşitsizliği uygulanırsa

$$M\left|\left(\hat{h}\,(t,u), u_t\right)\right| \le \frac{M\gamma_0}{2} \;\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2} + \frac{M\gamma_1}{2}\|u\|_{p+2}^{p+2} + \frac{L^2 M}{2}(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1})\|u_t\|^2 \tag{3.125}$$

bulunur. (3.124) eşitsizliğinin her iki tarafı u ile çarpılıp Ω da integre edilir ve N ile çarpılırsa

$$N\left|(\hat{h}\,(t,u), u\,)\right| \le N\int_\Omega L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}+1} + |u|^{\frac{p}{2}+1})u\,dx)$$

olur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$N\left|(\hat{h}\,(t,u),u\,)\right| \leq LN\int_{\Omega}|\nabla u|^{\frac{m+2}{2}}udx + \; LN\int_{\Omega}|u|^{\frac{p+2}{2}}udx$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğe $q = q' = 2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$N\left|(\hat{h}\,(t,u),u\,)\right| \leq LN(\int_{\Omega}|\nabla u|^{m+2}dx)^{\frac{1}{2}} \;\; (\int_{\Omega}|u|^{2}dx)^{\frac{1}{2}}$$
$$+LN(\int_{\Omega}|u|^{p+2}dx)^{\frac{1}{2}} \;\; (\int_{\Omega}|u|^{2}dx)^{\frac{1}{2}}$$

olur. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafı $(N\gamma_0)^{\frac{1}{2}}$ ve $(N\gamma_1)^{\frac{1}{2}}$ ile çarpıp düzenlenirse

$$N\left|(\hat{h}\,(t,u),u\,)\right| \leq (N\gamma_0)^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}}\frac{LN\|u\|_2}{(N\gamma_0)^{\frac{1}{2}}} + (N\gamma_1)^{\frac{1}{2}}\|u\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}\frac{LN\|u\|_2}{(N\gamma_1)^{\frac{1}{2}}}$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağındaki ilk terime $a_1 = \|\nabla u\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}},\; b = LN\|u\|_2,$

$q = q' = 2,\; \varepsilon = (N\gamma_0)^{\frac{1}{2}}$, 2.terime $a_2 = \|u\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}, b = LN\|u\|_2\,, q = q' = 2,$

$\varepsilon = (N\gamma_1)^{\frac{1}{2}}$ için ε −Young eşitsizliği uygulanırsa

$$N\left|(\hat{h}\,(t,u),u\,)\right| \leq \frac{N\gamma_0}{2}\;\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2} + \frac{N\gamma_1}{2}\|u\|_{p+2}^{p+2} + \frac{L^2\mathrm{N}}{2}(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1})\|u\|^2$$

olur. Teorem 1.3. ten

$$\frac{L^2N}{2}(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1})\|u\|^2 \leq \frac{L^2N}{2}\theta^2\|\nabla u\|^2$$

olur. Böylelikle

$$N\left|(\hat{h}\,(t,u),u\,)\right| \leq \frac{N\gamma_0}{2}\;\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2} + \frac{N\gamma_1}{2}\|u\|_{p+2}^{p+2} + \frac{L^2N\theta^2}{2}(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1})\|\nabla u\|^2 \qquad (3.126)$$

$$N\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla u)d\tau = N\int_0^t g_1\,(t-\tau)\int_{\Omega}\nabla u(\tau)\nabla u dx d\tau$$
$$= N\int_{\Omega}\nabla u dx\;\int_{\Omega}\int_0^t g_1\,(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau\,dx$$

eşitliği bulunur. Üstteki eşitlikte $q = q' = 2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$N\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla u)d\tau$$

$$\leq N(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}\ \left(\int_\Omega \left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte $q=q'=2$ olacak şekilde $\varepsilon-$ Young eşitsizliği uygulanırsa

$$N\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla u)d\tau$$

$$\leq N\left(\frac{\|\nabla u\|^2}{2}+\frac{\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau\right)^2 dx}{2}\right)$$

$$\leq \frac{N}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{N}{2}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)\nabla u(\tau)d\tau\right)^2 dx \tag{3.127}$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin son teriminde üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$|a+b|\leq|a|+|b|$ den

$$|\nabla u(\tau)|=|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)+\nabla u(t)|$$

$$|\nabla u(\tau)|\leq|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|+|\nabla u(t)|$$

olur. Üstteki eşitsizlik (3.127) de yerine yazılırsa

$$N\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla u)d\tau$$

$$\leq \frac{N}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{N}{2}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1\,(t-\tau)(|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|+|\nabla u(t)|)d\tau\right)^2 dx \tag{3.128}$$

olur. Üstteki eşitsizliğin en sağındaki terimde (3.102) den

$$N\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla u)d\tau$$

$$\leq \frac{N}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{N}{2}(1-l)\ \|\nabla u\|^2+\frac{N}{2}\frac{1-l}{l}(g_1\ *\nabla u)(t)$$

olarak yazılabilir. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$N\int_0^t g_1\,(t-\tau)(\nabla u(\tau),\nabla u)d\tau$$

$$\leq N\left(1-\frac{l}{2}\right)\|\nabla u\|^2+\frac{N(1-l)}{2l}(g_1 * \nabla u)(t) \tag{3.129}$$

bulunur. (3.123), (3.125), (3.126), (3.129) ve (3.83) eşitsizlikleri (3.122) de yerine yazılırsa

$$F'(t)+\delta F(t)$$

$$\leq -(M-\frac{\delta M}{2}-N)\|u_t\|^2-(N-\frac{\delta M}{2})\|\nabla u\|^2-(N\xi-\frac{\delta M}{2})(g_1 * \nabla u)(t)$$

$$+\frac{M\gamma_0}{2}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}+\frac{M\gamma_1}{2}\|u\|_{p+2}^{p+2}++\frac{L^2 M}{2}(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1})\|u_t\|^2$$

$$-\left(N-\frac{\delta M}{m+2}\right)\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}+\left(\frac{\delta M}{p+2}-N\right)\|u\|_{p+2}^{p+2}+(\alpha N-\frac{\alpha\delta M}{2})\|u\|_{\Gamma_1}^2$$

$$+\frac{N\gamma_0}{2}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}+\frac{N\gamma_1}{2}\|u\|_{p+2}^{p+2}+\frac{L^2 N\theta^2}{2}(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1})\|\nabla u\|^2+N\left(1-\frac{l}{2}\right)\|\nabla u\|^2$$

$$+\frac{N(1-l)}{2l}(g_1 * \nabla u)(t)+\frac{\delta N}{2}\|u_t\|^2+\frac{\delta N\theta^2}{2}\|\nabla u\|^2+H(t)$$

$$+\left(\frac{\delta N\theta^2}{2}+\frac{M\gamma_0}{2}+\frac{1-l}{2}\right)\|\nabla u\|^2+\frac{M\gamma_0}{2}\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}+\frac{M\gamma_1}{2}\|u\|_{p+2}^{p+2}+\frac{1-l}{2l}(g_1 * \nabla u)(t)$$

$$+\frac{\delta N}{2}\|u\|^2-\delta\xi N\int_0^t(\int_0^s g_1(s-\tau)\|(\nabla u(s)-\nabla u(\tau)\|^2\,d\tau)\,ds$$

olur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$F'(t)+\delta F(t)$$

$$\leq -\left(N-\frac{\delta M}{m+2}-\delta N\theta^2-\frac{M\gamma_0}{2}-N\left(1-\frac{l}{2}\right)-\frac{1-l}{2}-\frac{L^2 N\theta^2}{2}(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1})\right)\|\nabla u\|^2$$

$$+\alpha(N-\frac{\delta M}{2})\|u\|_{\Gamma_1}^2-\left(M-\frac{\delta(M+N)}{2}-N-\frac{L^2 M}{2}(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1})\right)\|u_t\|^2$$

$$-\left(N\xi-\frac{\delta M}{2}-(N+1)(\frac{1-l}{2l})\right)(g_1 * \nabla u)(t)-\left(N-\frac{\delta M}{m+2}-M\gamma_0-\frac{N\gamma_0}{2}\right)\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}$$

$$-\left(N-\frac{\delta M}{p+2}-M\gamma_1-\frac{N\gamma_1}{2}\right)\|u\|_{p+2}^{p+2}+H(t)+\frac{\delta N}{2}\|u\|^2$$

$$-\delta\xi N\int_0^t(\int_0^s g_1(s-\tau)\|(\nabla u(s)-\nabla u(\tau)\|^2\,d\tau)\,ds \tag{3.130}$$

elde edilir.

$\delta < \frac{2N}{M}$ için $N - \frac{\delta M}{2} > 0$ (3.131)

olur. Sobolev-Poincare eşitsizliğinden $c = B_q$, $q = 2$ için

$\|u\|_{2,\Gamma_1} \leq B_2\|\nabla u\|_2$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$\|u\|_{\Gamma_1}^2 \leq {B_2}^2\|\nabla u\|^2$

olur. Üstteki eşitliğin her iki tarafı $\alpha(N - \frac{\delta M}{2})$ ile çarpılırsa

$$\alpha(N - \frac{\delta M}{2})\ \|u\|_{\Gamma_1}^2 \leq \alpha {B_2}^2(N - \frac{\delta M}{2})\ \|\nabla u\|^2 \tag{3.132}$$

şeklinde yazılır. (3.130)-(3.131) eşitsizlikleri (3.130) da yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&F'(t) + \delta F(t) \\
&\leq -\frac{1}{2M}\left[2\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)M^2 - 2\left(N + \frac{\delta N}{2}\right)M - L^2M^2\left(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1}\right)\right]\|u_t\|^2 \\
&-\left(N\xi - \frac{\delta M}{2} - (N+1)\left(\frac{1-l}{2l}\right)\right)(g_1 * \nabla u)(t) \\
&-\frac{1}{2N}\left[\left(L - 2\alpha {B_2}^2 - 2\delta\theta^2\right)N^2 + (\alpha\delta M{B_2}^2 + L - 1 - \delta M - M\gamma_0)N\right. \\
&\left.-L^2N^2\theta^2\left(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1}\right)\right]\|\nabla u\|^2 - \left(N - \frac{\delta M}{m+2} - M\gamma_0 - \frac{N\gamma_0}{2}\right)\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2} \\
&-\left(N - \frac{\delta M}{p+2} - M\gamma_1 - \frac{N\gamma_1}{2}\right)\|u\|_{p+2}^{p+2} + H(t) \\
&+\frac{\delta N}{2}\|u\|^2 - \delta\xi N\int_0^t\left(\int_0^s g_1(s-\tau)\|(\nabla u(s) - \nabla u(\tau)\|^2\, d\tau\right) ds
\end{aligned} \tag{3.133}
$$

Poincare eşitsizliğinden $\|u\|^2 \leq \theta^2\|\nabla u\|^2$ nin her iki yanı $\frac{\delta N}{2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{\delta N}{2}\|u\|^2 \leq \frac{\delta N\theta^2}{2}\|\nabla u\|^2$$

olur. Üstteki eşitsizlik (3.133) te yerine yazılırsa

$F'(t)+\delta F(t)$

$\leq -\frac{1}{2M}\left[2\left(1-\frac{\delta}{2}\right)M^2-2\left(N+\frac{\delta N}{2}\right)M-L^2M^2\left(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\right]\|u_t\|^2$

$-\left(N\xi-\frac{\delta M}{2}-(N+1)\left(\frac{1-l}{2l}\right)\right)(g_1 * \nabla u)(t)$

$-\frac{1}{2N}\left[\left(l-2\alpha {B_2}^2-3\delta\theta^2\right)N^2+(\alpha\delta M{B_2}^2+l-1-\delta M-M\gamma_0)N\right.$

$\left.-L^2N^2\theta^2\left(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\right]\|\nabla u\|^2-\left(N-\frac{\delta M}{m+2}-M\gamma_0-\frac{N\gamma_0}{2}\right)\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}$

$-\left(N-\frac{\delta M}{p+2}-M\gamma_1-\frac{N\gamma_1}{2}\right)\|u\|_{p+2}^{p+2}+H(t)$

$-\delta\xi N\int_0^t\left(\int_0^s g_1(s-\tau)\|(\nabla u(s)-\nabla u(\tau)\|^2\,d\tau\right)ds$ (3.134)

olur. Üstteki eşitsizliğin son terimi, (3.20) den $g_1(s-\tau)>0$, $\xi>0$ ve Lemma (3.2) den $\delta, N>0$ olduğundan negatif bir terim olacağından

$-\delta\xi N\int_0^t\left(\int_0^s g_1(s-\tau)\|(\nabla u(s)-\nabla u(\tau)\|^2\,d\tau\right)ds \leq 0$ (3.135)

olur. Üstteki eşitsizlik (3.134) te yerine yazılırsa

$F'(t)+\delta F(t)$

$\leq -\frac{1}{2M}\left[2\left(1-\frac{\delta}{2}\right)M^2-2\left(N+\frac{\delta N}{2}\right)M-L^2M^2\left(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\right]\|u_t\|^2$

$-\left(N\xi-\frac{\delta M}{2}-(N+1)\left(\frac{1-l}{2l}\right)\right)(g_1 * \nabla u)(t)$

$-\frac{1}{2N}\left[\left(l-2\alpha {B_2}^2-3\delta\theta^2\right)N^2+(\alpha\delta M{B_2}^2+l-1-\delta M-M\gamma_0)N\right.$

$\left.-L^2N^2\theta^2\left(\frac{1}{\gamma_0}+\frac{1}{\gamma_1}\right)\right]\|\nabla u\|^2-\left(N-\frac{\delta M}{m+2}-M\gamma_0-\frac{N\gamma_0}{2}\right)\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}$

$-\left(N-\frac{\delta M}{p+2}-M\gamma_1-\frac{N\gamma_1}{2}\right)\|u\|_{p+2}^{p+2}+H(t)$ (3.136)

elde edilir. Üstteki eşitsizlikte $\gamma_0=\gamma_1=1$ için

$\|u\|_{p+2}^{p+2}$ nin katsayısının kökü; $N = \frac{2M(\delta+p+2)}{p+2}$, $\|\nabla u\|_{m+2}^{m+2}$ nin katsayısının kökü;

$N = \frac{2M(\delta+m+2)}{m+2}$, $(g_1 * \nabla u)(t)$ nin katsayısının kökü; $N = \frac{\delta Ml-l+1}{2\xi l+l-1}$ bulunur.

M^2 nin katsayısının kökü; $\delta = 2$, N^2 nin katsayısının kökü; $\alpha = \frac{L-3\delta\theta^2}{2{B_2}^2}$, $\delta = \frac{L}{3\theta^2}$ olur.

$\|\nabla u\|^2$ nin katsayısı;

$$\left(l - 2\alpha {B_2}^2 - 3\delta\theta^2\right)N^2 + (\alpha\delta M{B_2}^2 + l - 1 - \delta M - M\gamma_0) - 2L^2N^2\theta^2$$

$\|u_t\|^2$ nin katsayısı; $2\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)M^2 - 2\left(N + \frac{\delta N}{2}\right)M - 2L^2M^2$ dir.

$$\left(l - 2\alpha {B_2}^2 - 3\delta\theta^2\right)N^2 + (\alpha\delta M{B_2}^2 + l - 1 - \delta M - M\gamma_0) - 2L^2N^2\theta^2 = 0$$

$$2\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)M^2 - 2\left(N + \frac{\delta N}{2}\right)M - 2L^2M^2 = 0$$

Üstteki denklemlerin maksimum kökleri N_0 ve M_0 olmak üzere

$\gamma_0 = \gamma_1 = 1$ alınır ve

$$\delta < min\left\{2, \frac{L}{3\theta^2}, \frac{2N}{M}\right\}, \alpha < \frac{L-3\delta\theta^2}{2{B_2}^2}, \int_0^\infty g_1(s)\, ds \le \frac{2\xi}{1+2\xi}$$

$$N > max\left\{\frac{2M(\delta+p+2)}{p+2}, \frac{2M(\delta+m+2)}{m+2}, \frac{\delta Ml-l+1}{2\xi l+l-1}, N_0\right\}, \ M > M_0$$

alınırsa

$$F'(t) + \delta F(t) \le H(t) \tag{3.137}$$

elde edilir. (3.84) eşitliğinde

$t \to \infty$ iken $\phi(t) \to 0$ ve $\phi'(t) \to 0$ alınırsa

$H(t) \to 0$ iken

(3.137) nin her iki tarafı $e^{\delta t}$ ile çarpılırsa

$$e^{\delta t}(F'(t) + \delta F(t)) \le e^{\delta t}H(t)$$

olur. Çarpımın türevinden

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{\delta t}F(t)) \le e^{\delta t}H(t)$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı $(0, t)$ aralığında integre edilirse

$$e^{\delta t}F(t) - F(0) \le e^{\delta t}H(t)$$

olur. $H(t) \to 0$ iken

$$e^{\delta t}F(t) \le F(0)$$

$$F(t) \le e^{-\delta t}F(0)$$

olur. $t \to \infty$ iken $e^{-\delta t} = 0$ olacağından

$$F(t) \le 0$$

bulunur. Pozitif bir C sabiti için

$$E(t) \le CF(t)$$

olur. Yani

$$\lim_{t \to \infty} E(t) = 0$$

elde edilir. Böylelikle Teorem 3.1. in ispatı tamamlanmış olur.

BÖLÜM 4. HAFIZA TERİMLİ LİNEER OLMAYAN HİPERBOLİK DENKLEMLER İÇİN TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN PATLAMASI

Bu bölümde yeterince büyüklükteki başlangıç şartları için sonlu bir zamandaki patlama çözümlerinin bazılarının ispatı yapılacaktır. (3.53)-(3.55) problemi için bir lemma tanımlanıp pozitif başlangıç enerjisi ile Teorem 4.1. ispatlanacaktır.

Teorem 4.1.

$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega) \cap L^{m+2}(\Omega)\,, \quad u_1 \in L^2(\Omega), \quad \int_\Omega u_0(x)\omega(x)dx = 1;$

$\omega \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\, L^{p+2}(\Omega) \cap L^{m+2}(\Omega), \qquad \int_\Omega \omega^2(x)dx = 1;$

$|h(x,t,u,\nabla u| \leq L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}} + |u|^{\frac{p}{2}}),$

$g_1(s) = e^{\lambda s} g(s)$ eşitliği kabul edilirse

$g(s) \geq 0, \qquad g'(s) \leq -\lambda\, g(s);$

$1 - \int_0^\infty g_1(t)dt = l > 0$

şartları altında

$$D_1 = k^2\lambda^2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{l\lambda(p+m)}\right)\|\nabla\omega\|^2 + k\lambda\left(\frac{2L^2(p+m+4)}{\lambda(p-m)}\right)\|\omega\|^2 + \frac{k^{m+2}\lambda}{(m+2)\left(\frac{(p-m)}{8m+8}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2} + \frac{k^{p+2}\lambda}{(p+2)\left(\frac{(p-m)}{8p+8}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2} \tag{4.1}$$

$$D_2 = \frac{k^2(4+l(p+m))}{2l(p+m)}\|\nabla\omega\|^2 + \left(\frac{2kL^2(p+m+4)}{p-m}\right)\|\omega\|^2 + \frac{k^{m+2}}{(m+2)\left(\frac{(p-m)}{4m+4}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2} + \frac{k^{p+2}}{(p+2)\left(\frac{(p-m)}{4p+4}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2} \tag{4.2}$$

$\lambda \geq max\left\{\lambda_0\,,\lambda_1,\frac{2(1-l)}{l(p+m)}\right\}$, $\lambda_0\,,\lambda_1 > 0$ ve $p > m \geq 2$

$\alpha \leq min\left\{-\frac{p+m+12}{2{\beta_2}^2(p+m)},\frac{l(4-p-m)-4}{2{\beta_2}^2(p+m)}\right\}$

$\int_0^\infty g(s)\,ds \leq min\left\{\frac{p+m+4}{p+m+8},\frac{p+m+12+2\alpha{\beta_2}^2(p+m)}{p+m-8},\frac{\lambda(p+m)}{\lambda(p+m)+2}\right\}$

için

$$\|u_0\| > 0,\; E_\lambda(0) \geq \frac{2(D_1+\lambda D_2)}{\lambda(p+m+4)} \tag{4.3}$$

eşitsizliği sağlanır. Ve öyle bir t_1 sonlu zamanı vardır ki (3.1)-(3.4) probleminin çözümü sonlu bir zamanda patlar.

$$t \to t_1 \text{ iken } \|u(t)\| \to \infty \tag{4.4}$$

olur.

Lemma 4.1.

(3.5)-(3.7) ve (3.20)-(3.21) şartları altında

$\alpha \leq \frac{l(4-p-m)-4}{2{B_2}^2(p+m)},\int_0^\infty g(s)\,ds \leq \frac{\lambda(p+m)}{\lambda(p+m)+2}$ ve

$(p-m)(p+m+8)\lambda^2 + 4(p-m)\lambda - 4L^2(p+m+4) = 0$

eşitliğinin maksimum kökü λ_0 olmak üzere

$\lambda \geq max\left\{\lambda_0\,,\frac{2(1-l)}{l(p+m)}\right\}$ için

$E_\lambda(t) \geq E_\lambda(0) - \frac{2D_1}{\lambda(p+m+4)}$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

(3.78) eşitliğinde, $\lambda > 0$ ve (3.20) den

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\left(\int_\Omega |\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|^2 dx\right)d\tau \geq 0 \tag{4.5}$$

olur ve (3.20) den

$$\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx \geq 0 \tag{4.6}$$

olur. (3.78) eşitliğinde (4.5)-(4.6) dan

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t) \geq (2\lambda+1)\|v_t\|^2 + \frac{\lambda p}{p+2}\, e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} - \frac{\lambda m}{m+2}\, e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$-e^{-\lambda t}\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), v_t\right) + k\lambda f(t)e^{-2\lambda t} \tag{4.7}$$

bulunur. (3.63) ün her iki tarafı $k\lambda e^{-\lambda t}$ ile çarpılırsa

$$k\lambda e^{-2\lambda t}f(t)$$

$$= k\lambda e^{-\lambda t}(\nabla v, \nabla\omega) + k\lambda e^{\lambda(m-1)t}(|\nabla v|^m\nabla v, \nabla\omega) - k\lambda e^{\lambda(p-1)t}(|v|^p v, \omega)$$

$$-k\lambda e^{-2\lambda t}\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), \omega\right) - k\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t g\,(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla\omega)d\tau$$

olarak yazılır. Üstteki eşitlik (4.7) nin son teriminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t) \geq (2\lambda+1)\|v_t\|^2 + \frac{\lambda p}{p+2}\, e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} - \frac{\lambda m}{m+2}\, e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$-e^{-\lambda t}\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), v_t\right) + k\lambda e^{-\lambda t}(\nabla v, \nabla\omega) + k\lambda e^{\lambda(m-1)t}(|\nabla v|^m\nabla v, \nabla\omega)$$

$$-k\lambda e^{\lambda(p-1)t}(|v|^p v, \omega) - k\lambda e^{-2\lambda t}\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), \omega\right)$$

$$-k\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t g\,(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla\omega)d\tau$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin son teriminde integrallerin sırası değiştirilirse

$$\int_0^t g\,(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla\omega)d\tau = \int_0^t g\,(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\nabla\omega dx\, d\tau$$

$$= \int_\Omega \nabla\omega(x)\int_0^t g\,(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\, d\tau\, dx$$

olarak yazılır. Üstteki eşitlik eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t)$$

$$\geq (2\lambda+1)\|v_t\|^2 + \frac{\lambda p}{p+2}\, e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} - \frac{\lambda m}{m+2}\, e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} - e^{-\lambda t}\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), v_t\right)$$

$$+k\lambda e^{-\lambda t}(\nabla v,\nabla\omega)+k\lambda e^{\lambda(m-1)t}(|\nabla v|^m\nabla v,\nabla\omega)-k\lambda e^{\lambda(p-1)t}(|v|^p v,\omega)$$

$$-k\lambda e^{-2\lambda t}\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),\omega\right)-k\lambda e^{-\lambda t}\int_\Omega\nabla\omega(x)\int_0^t g\,(t-\tau)\int_\Omega\nabla v(\tau)\,d\tau\,dx \qquad (4.8)$$

bulunur. (3.7) eşitliği ve (3.18) eşitliklerinden

$$\left|\hat{h}\,(t,u)\right|\le L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}}+|u|^{\frac{p}{2}})$$

olur. Üstteki eşitsizliğin sağındaki pozitif ifadenin üsleri 1 artılırsa

$$\left|\hat{h}\,(t,u)\right|\le L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}+1}+|u|^{\frac{p}{2}+1})$$

olarak yazılır. $v(x,t)=e^{-\lambda t}\,u(x,t)$ dönüşümünden

$$\left|\hat{h}\,(t,e^{\lambda t}v)\right|\le L(\left|\nabla v e^{\lambda t}\right|^{\frac{m}{2}+1}+\left|v e^{\lambda t}\right|^{\frac{p}{2}+1})$$

olur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı v_t ile çarpılıp Ω da integre edilirse

$$\left|\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),v_t\right)\right|\le Le^{\lambda(\frac{m+2}{2})t}\int_\Omega|\nabla v|^{\frac{m+2}{2}}v_t dx+Le^{\lambda(\frac{p+2}{2})t}\int_\Omega|v|^{\frac{p+2}{2}}v_t dx$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte $q=q'=2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),v_t\right)\right|\le Le^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t}(\int_\Omega|\nabla v|^{m+2}dx)^{\frac{1}{2}}\,(\int_\Omega|v_t|^2dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$+Le^{\lambda(\frac{p+2}{2})t}(\int_\Omega|v|^{p+2}dx)^{\frac{1}{2}}\,(\int_\Omega|v_t|^2dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le Le^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}}\|v_t\|_2+Le^{\lambda\left(\frac{p+2}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}\|v_t\|_2$$

bulunur. $e^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t}=e^{\lambda\left(\frac{m+1}{2}\right)t}e^{\frac{\lambda t}{2}}$ ve $e^{\lambda\left(\frac{p+2}{2}\right)t}=e^{\lambda\left(\frac{p+1}{2}\right)t}e^{\frac{\lambda t}{2}}$ şeklinde parçalanırsa

$$\left|\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),v_t\right)\right|\le e^{\lambda\left(\frac{m+1}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}}L\|v_t\|_2e^{\frac{\lambda t}{2}}+e^{\lambda\left(\frac{p+1}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}L\|v_t\|_2e^{\frac{\lambda t}{2}}$$

olur. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafı $(\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}$ ve $(\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}$ ile çarpıp düzenlenirse

$$\left|\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),v_t\right)\right|\le(\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}e^{\lambda\left(\frac{m+1}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}}\frac{L\|v_t\|_2e^{\frac{\lambda t}{2}}}{(\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+(\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}\ e^{\lambda\left(\frac{p+1}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}\frac{L\|v_t\|_2 e^{\frac{\lambda t}{2}}}{(\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}}$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizliğin sağındaki ilk terime

$$a_1 = e^{\lambda\left(\frac{m+1}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}},\ b = L\|v_t\|_2 e^{\frac{\lambda t}{2}},\ q = q' = 2,\ \varepsilon = (\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}$$

2.terime $\quad a_2 = e^{\lambda\left(\frac{p+1}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}\quad,\quad b = L\|v_t\|_2 e^{\frac{\lambda t}{2}}\quad,\quad q = q' = 2,\quad \varepsilon = (\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}$

için ε −Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), v_t\right)\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon_0}{2}\ e^{\lambda(m+1)t}\ \|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{L^2\|v_t\|^2 e^{\lambda t}}{2\varepsilon_0} + \frac{\varepsilon_1}{2}\ e^{\lambda(p+1)t}\ \|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{L^2\|v_t\|^2 e^{\lambda t}}{2\varepsilon_1}$$

olur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı $e^{-\lambda t}$ ile çarpılırsa

$$e^{-\lambda t}\left|\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}\ v\right), v_t\right)\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon_0}{2}\ e^{\lambda m t}\ \|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{L^2\|v_t\|^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\varepsilon_1}{2}\ e^{\lambda p t}\ \|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{L^2\|v_t\|^2}{2\varepsilon_1}$$

olur. Üstteki eşitsizlikte düzenleme yapılırsa

$$e^{-\lambda t}\left|\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), v_t\right)\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon_0}{2}\ e^{\lambda m t}\ \|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{\varepsilon_1}{2}\ e^{\lambda p t}\ \|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{L^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\|v_t\|^2 \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) eşitsizliği (4.8) de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t) \geq (2\lambda + 1)\|v_t\|^2 + \frac{\lambda p}{p+2}\ e^{\lambda p t}\|v\|_{p+2}^{p+2} - \frac{\lambda m}{m+2}\ e^{\lambda m t}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$-\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\ e^{\lambda m t}\ \|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{\varepsilon_1}{2}\ e^{\lambda p t}\ \|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{L^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\|v_t\|^2\right)$$

$$+k\lambda e^{-\lambda t}(\nabla v, \nabla \omega) + k\lambda e^{\lambda(m-1)t}(|\nabla v|^m \nabla v, \nabla \omega) - k\lambda e^{\lambda(p-1)t}(|v|^p v, \omega)$$

$$-k\lambda e^{-2\lambda t}\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), \omega\right) - k\lambda e^{-\lambda t}\int_\Omega \nabla\omega(x)\int_0^t g\,(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\,d\tau\,dx$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte düzenleme yapılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t) \geq \left(2\lambda - \frac{L^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)+1\right)\|v_t\|^2 + \left(\frac{\lambda p}{p+2}-\frac{\varepsilon_1}{2}\right) e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}$$

$$-\left(\frac{\lambda m}{m+2}+\frac{\varepsilon_0}{2}\right) e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + +k\lambda e^{-\lambda t}(\nabla v, \nabla\omega) + k\lambda e^{\lambda(m-1)t}(|\nabla v|^m \nabla v, \nabla \omega)$$

$$-k\lambda e^{\lambda(p-1)t}(|v|^p v, \omega) - k\lambda e^{-2\lambda t}\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), \omega\right)$$

$$-k\lambda e^{-\lambda t}\int_\Omega \nabla\omega(x)\int_0^t g(t-\tau)\nabla v(\tau)d\tau dx \tag{4.10}$$

bulunur. (4.10) eşitsizliğinin her iki tarafından $(\lambda p - \varepsilon_1(p+2))E_\lambda(t)$ terimi çıkarılır ve (3.76)-(3.77) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t) - (\lambda p - \varepsilon_1(p+2))E_\lambda(t)$$

$$\geq \left(2\lambda - \frac{L^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)+1\right)\|v_t\|^2 + \left(\frac{\lambda p}{p+2}-\frac{\varepsilon_1}{2}\right) e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}$$

$$-\left(\frac{\lambda m}{m+2}+\frac{\varepsilon_0}{2}\right) e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + k\lambda e^{-\lambda t}(\nabla v, \nabla\omega) + k\lambda e^{\lambda(m-1)t}(|\nabla v|^m \nabla v, \nabla \omega)$$

$$-k\lambda e^{\lambda(p-1)t}(|v|^p v, \omega) - k\lambda e^{-2\lambda t}\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), \omega\right)$$

$$-k\lambda e^{-\lambda t}\int_\Omega \nabla\omega(x)\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\, d\tau\, dx - (\lambda p - \varepsilon_1(p+2))$$

$$.\left[\frac{e^{\lambda pt}}{p+2}\|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{\alpha}{2}\|v\|_{\Gamma_1}^2 - \frac{1}{2}\left(\|v_t\|^2 + \lambda(\lambda+1)\|v\|^2 + (1-\int_0^t g(s)ds)\|\nabla v(t)\|^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1-\int_0^t g(s)ds)\|\nabla v(t)\|^2 + (g*\nabla v)(t) + \frac{2e^{\lambda mt}}{m+2}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}\right)\right]$$

olur. Üstteki eşitsizlikte düzenleme yapılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t) - (\lambda p - \varepsilon_1(p+2))E_\lambda(t)$$

$$\geq \left(\frac{\lambda p}{p+2} - \frac{\lambda p - \varepsilon_1(p+2)}{p+2} - \frac{\varepsilon_1}{2}\right) e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} - \frac{\alpha}{2}(\lambda p - \varepsilon_1(p+2))\|v\|_{\Gamma_1}^2$$

$$+\left(\frac{\lambda p - \varepsilon_1(p+2)}{m+2} - \frac{\lambda m}{m+2} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right) e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$+\left(2\lambda + \frac{\lambda p - \varepsilon_1(p+2)}{2} - \frac{L^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)+1\right)\|v_t\|^2$$

$$\frac{\lambda p - \varepsilon_1(p+2)}{2}(g*\nabla v)(t) + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda p - \varepsilon_1(p+2))}{2}\|v\|^2$$

$\frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{2}(1-\int_0^t g(s)ds)\|\nabla v\|^2+k\lambda e^{-\lambda t}(\nabla v,\nabla\omega)+k\lambda e^{\lambda(m-1)t}(|\nabla v|^m\nabla v,\nabla\omega)$

$-k\lambda e^{\lambda(p-1)t}(|v|^p v,\omega)-k\lambda e^{-2\lambda t}\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),\omega\right)$

$$-k\lambda e^{-\lambda t}\int_\Omega \nabla\omega(x)\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\,d\tau\,dx \tag{4.11}$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağındaki son 5 terim için kestirimler yapılacaktır.

$k\lambda e^{-\lambda t}|(\nabla v,\nabla\omega)|$ ifadesi için $q=q'=2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$k\lambda e^{-\lambda t}|(\nabla v,\nabla\omega)|\leq k\lambda e^{-\lambda t}(\int_\Omega|\nabla v|^2dx)^{\frac{1}{2}}\,(\int_\Omega|\nabla\omega|^2dx)^{\frac{1}{2}}$

$\leq k\lambda e^{-\lambda t}\|\nabla v\|_2\|\nabla\omega\|_2$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki terimler

$\left(\frac{l(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ile çarpılıp bölünürse

$k\lambda e^{-\lambda t}|(\nabla v,\nabla\omega)|\leq\left(\frac{l(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_2\,\frac{k\lambda e^{-\lambda t}}{\left(\frac{l(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\,\|\nabla\omega\|_2$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizliğe $q=q'=2$, $\varepsilon=\left(\frac{l(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ için $\varepsilon-$Young eşitsizliği uygulanırsa

$$k\lambda e^{-\lambda t}|(\nabla v,\nabla\omega)|\leq\frac{l(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))}{4}\|\nabla v\|^2+\frac{k^2\lambda^2e^{-2\lambda t}}{l(\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}\|\nabla\omega\|^2 \tag{4.12}$$

bulunur.

$k\lambda e^{\lambda(m-1)t}|(|\nabla v|^m\nabla v,\nabla\omega)|$ ifadesi için

$k\lambda e^{\lambda(m-1)t}|(\nabla v|^m\nabla v,\nabla\omega)|=\int_\Omega k\lambda e^{\lambda(m-1)t}|\nabla v|^{m+1}|\nabla\omega|dx$

olarak yazılır. Üstteki eşitlikte $q=\frac{m+2}{m+1}$, $q'=m+2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$k\lambda e^{\lambda(m-1)t}|(\nabla v|^m\nabla v,\nabla\omega)|$

$$\leq k\lambda e^{\lambda(m-1)t}\left(\int_\Omega |\nabla v|^{m+1\left(\frac{m+2}{m+1}\right)}dx\right)^{\frac{m+1}{m+2}} \quad \left(\int_\Omega |\nabla \omega|^{m+2}dx\right)^{\frac{1}{m+2}}$$

$$\leq k\lambda e^{\lambda(m-1)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+1}\|\nabla \omega\|_{m+2}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte $e^{\lambda(m-1)t} = e^{\lambda mt\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}e^{\frac{-2\lambda t}{m+2}}$ şeklinde çarpanlarına ayrılırsa

$$k\lambda e^{\lambda(m-1)t}|(|\nabla v|^m\nabla v, \nabla\omega)| \leq e^{\lambda mt\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+1}k\lambda e^{\frac{-2\lambda t}{m+2}}\|\nabla \omega\|_{m+2}$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağındaki terim $\left(\frac{\varepsilon_0(m+2)}{4(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{m+2}}$ ile çarpılıp bölünürse

$$k\lambda e^{\lambda(m-1)t}|(|\nabla v|^m\nabla v, \nabla\omega)| \leq \left(\frac{\varepsilon_0(m+2)}{4(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{m+2}} e^{\lambda mt\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+1}\frac{k\lambda e^{\frac{-2\lambda t}{m+2}}\|\nabla \omega\|_{m+2}}{\left(\frac{\varepsilon_0(m+2)}{4(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{m+2}}}$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizlikte $q = \frac{m+2}{m+1}$, $q' = m+2$, $\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon_0(m+2)}{4(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{m+2}}$ için ε −Young eşitsizliği uygulanırsa

$$k\lambda e^{\lambda(m-1)t}|(|\nabla v|^m\nabla v, \nabla\omega)|$$

$$\leq \frac{\left(\left(\frac{\varepsilon_0(m+2)}{4(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{m+2}}e^{\lambda mt\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+1}\right)^{\frac{m+2}{m+1}}}{\frac{m+2}{m+1}} + \frac{1}{m+2}\left(\frac{k\lambda e^{\frac{-2\lambda t}{m+2}}\|\nabla\omega\|_{m+2}}{\left(\frac{\varepsilon_0(m+2)}{4(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{m+2}}}\right)^{m+2}$$

olur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$k\lambda e^{\lambda(m-1)t}|(|\nabla v|^m\nabla v, \nabla\omega)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon_0}{4}e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{k^{m+2}\lambda^{m+2}e^{-2\lambda t}}{(m+2)\left(\frac{\varepsilon_0(m+2)}{4m+4}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2} \tag{4.13}$$

olarak yazılır.

$k\lambda e^{-2\lambda t}\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), \omega\right)$ ifadesi için (3.7) ve (3.18) eşitliklerinden

$$\left|\hat{h}\,(t,u)\right| \leq L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}} + |u|^{\frac{p}{2}})$$

olur. Üstteki eşitsizliğin sağındaki pozitif ifadenin üsleri 1 artılırsa

$$\left|\hat{h}\ (t,u)\right| \leq L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}+1} + |u|^{\frac{p}{2}+1})$$

olarak yazılır. $v(x,t) = e^{-\lambda t}\ u(x,t)$ dönüşümünden

$$\left|\hat{h}\ (t, e^{\lambda t}v)\right| \leq L(\left|\nabla v e^{\lambda t}\right|^{\frac{m}{2}+1} + \left|v e^{\lambda t}\right|^{\frac{p}{2}+1})$$

olarak yazılabilir. Üstteki eşitsizlik ω ile çarpılıp Ω da integre edilirse

$$\left|(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right),\ \omega\ )\right| \leq L e^{\lambda(\frac{m+2}{2})t} \int_\Omega |\nabla v|^{\frac{m+2}{2}} |\omega| dx + L e^{\lambda(\frac{p+2}{2})t} \int_\Omega |v|^{\frac{p+2}{2}} |\ \omega| dx$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte $q = q' = 2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), \omega\ )\right| \leq L e^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t} (\int_\Omega |\nabla v|^{m+2} dx)^{\frac{1}{2}}\ (\int_\Omega |\omega|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ L e^{\lambda(\frac{p+2}{2})t} (\int_\Omega |v|^{p+2} dx)^{\frac{1}{2}}\ (\int_\Omega |\omega|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq L e^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t} \|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}} \|\omega\|_2 + L e^{\lambda\left(\frac{p+2}{2}\right)t} \|v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}} \|\omega\|_2$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafı $(\frac{\varepsilon_0}{2})^{\frac{1}{2}}$ ve $(\frac{\varepsilon_1}{2})^{\frac{1}{2}}$ ile çarpıp düzenlenirse

$$\left|(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), \omega\ )\right| \leq (\frac{\varepsilon_0}{2})^{\frac{1}{2}} e^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t} \|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}} \frac{L\|\omega\|_2}{(\frac{\varepsilon_0}{2})^{\frac{1}{2}}} + (\frac{\varepsilon_1}{2})^{\frac{1}{2}} e^{\lambda\left(\frac{P+2}{2}\right)t} \|v\|_{P+2}^{\frac{P+2}{2}} \frac{L\|\omega\|_2}{(\frac{\varepsilon_1}{2})^{\frac{1}{2}}}$$

şeklinde yazılabilir. Üstteki eşitsizlikte $a_1 = e^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t} \|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}}$, $b = L\|\omega\|_2$,

$q = q' = 2, \quad \varepsilon = (\frac{\varepsilon_0}{2})^{\frac{1}{2}}$

2.terime $a_2 = e^{\lambda\left(\frac{p+2}{2}\right)t} \|\nabla v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}$, $b = L\|\omega\|_2$, $q = q' = 2, \quad \varepsilon = (\frac{\varepsilon_1}{2})^{\frac{1}{2}}$ için ε −Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), \omega\ )\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon_0}{4}\ e^{\lambda(m+2)t}\ \|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{L^2\|\omega\|^2}{\varepsilon_0} + \frac{\varepsilon_1}{4}\ e^{\lambda(p+2)t} \|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{L^2\|\omega\|^2}{\varepsilon_1}$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı $k\lambda e^{-2\lambda t}$ ile çarpılıp düzenlenirse

$k\lambda e^{-2\lambda t}\left|\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), \omega\right)\right|$

$$\leq \frac{k\lambda\varepsilon_0}{4}\, e^{\lambda mt}\, \|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{k\lambda\varepsilon_1}{4}\, e^{\lambda pt}\, \|v\|_{p+2}^{p+2} + L^2 k\lambda\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\|\omega\|^2 \qquad (4.14)$$

elde edilir.

$k\lambda e^{-\lambda t}\int_\Omega \nabla\omega(x)\int_0^t g\,(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\, d\tau\, dx$ ifadesinde integrallerin sırası değiştirilirse

$k\lambda e^{-\lambda t}\int_\Omega \nabla\omega(x)\int_0^t g\,(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\, d\tau\, dx$

$$= k\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t g(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla\omega(x))d\tau \qquad (4.15)$$

olarak yazılabilir. Üstteki eşitlikte (3.103) teki $|M\phi'(t) + N\phi(t)|$ terimi yerine $k\lambda e^{-\lambda t}$, $g_1\,(t-\tau)$ yerine $g\,(t-\tau)$ ve $\nabla u(\tau)$ yerine $\nabla v(\tau)$ yazılırsa

$k\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t g(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla\omega(x))d\tau$

$$\leq \frac{(k\lambda e^{-\lambda t})^2\|\nabla\omega\|^2}{2} + \frac{(1-l)}{2}\|\nabla v\|^2 + \frac{1-l}{2l}(g_1 * \nabla u)(t)$$

olur. Üstteki eşitsizlik düzenlenir ve (4.15) dikkate alınırsa

$k\lambda e^{-\lambda t}\int_\Omega \nabla\omega(x)\int_0^t g\,(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\, d\tau\, dx$

$$\leq \frac{k^2\lambda^2 e^{-2\lambda t}\|\nabla\omega\|^2}{2} + \frac{(1-l)}{2}\|\nabla v\|^2 + \frac{1-l}{2l}(g_1 * \nabla u)(t) \qquad (4.16)$$

bulunur.

$k\lambda e^{\lambda(p-1)t}|(|v|^p v, \omega)|$

ifadesinin sağında $q = \frac{p+2}{p+1}$, $q' = p+2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\leq k\lambda e^{\lambda(p-1)t}\left(\int_\Omega |v|^{p+1\left(\frac{p+2}{p+1}\right)}dx\right)^{\frac{p+1}{p+2}}\ \left(\int_\Omega |\omega|^{p+2}dx\right)^{\frac{1}{p+2}}$$

$$\leq k\lambda e^{\lambda(p-1)t}\|v\|_{p+2}^{p+1}\|\omega\|_{p+2}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağında $e^{\lambda(p-1)t} = e^{\lambda pt(\frac{p+2}{p+1})} e^{\frac{-2\lambda t}{p+2}}$ olarak çarpanlara ayrılırsa

$$k\lambda e^{\lambda(p-1)t}|(|v|^p v, \omega)| \leq e^{\lambda pt(\frac{p+2}{p+1})} \|v\|_{p+2}^{p+1} k\lambda e^{\frac{-2\lambda t}{p+2}} \|\omega\|_{p+2}$$

olarak yazılabilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafı $(\frac{\varepsilon_1(p+2)}{4(p+1)})^{\frac{p+1}{p+2}}$ ile çarpıp düzenlenirse

$$k\lambda e^{\lambda(p-1)t}|(|v|^p v, \omega)| \leq (\frac{\varepsilon_1(p+2)}{4(p+1)})^{\frac{p+1}{p+2}} e^{\lambda pt(\frac{p+2}{p+1})} \|v\|_{p+2}^{p+1} \frac{k\lambda e^{\frac{-2\lambda t}{p+2}} \|\omega\|_{p+2}}{(\frac{\varepsilon_1(p+2)}{4(p+1)})^{\frac{p+1}{p+2}}} \|\omega\|_{p+2}$$

Üstteki eşitsizlikte $a_1 = e^{\lambda pt(\frac{p+2}{p+1})} \|v\|_{p+2}^{p+1}$, $b = k\lambda e^{\frac{-2\lambda t}{p+2}} \|\omega\|_{p+2}$,

$q = \frac{p+2}{p+1}$, $q' = p+2$ $\quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_1(p+2)}{4(p+1)}$ için ε −Young eşitsizliği uygulanırsa

$$k\lambda e^{\lambda(p-1)t}|(|v|^p v, \omega)|$$

$$\leq \frac{\left(\left(\frac{\varepsilon_1(p+2)}{4(p+1)}\right)^{\frac{p+1}{p+2}} e^{\lambda pt\left(\frac{p+2}{p+1}\right)} \|v\|_{p+2}^{p+1}\right)^{\frac{p+2}{p+1}}}{\frac{p+2}{p+1}} + \frac{1}{p+2}\left(\frac{k\lambda e^{\frac{-2\lambda t}{p+2}} \|\omega\|_{p+2}}{(\frac{\varepsilon_1(p+2)}{4(p+1)})^{\frac{p+1}{p+2}}} \|\omega\|_{p+2}\right)^{p+2}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$k\lambda e^{\lambda(p-1)t}|(|v|^p v, \omega)| \leq \frac{\varepsilon_1}{4} e^{\lambda pt} \|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{k^{p+2}\lambda^{p+2} e^{-2\lambda t}}{(p+2)\left(\frac{\varepsilon_1(p+2)}{4p+4}\right)^{p+1}} \|\omega\|_{p+2}^{p+2} \tag{4.17}$$

elde edilir.

(4.12) de $|a| \leq b$ ise $a \leq b$ den

$$k\lambda e^{-\lambda t}(\nabla v, \nabla\omega) \geq -\frac{l(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))}{4} \|\nabla v\|^2 - \frac{k^2\lambda^2 e^{-2\lambda t}}{l(\lambda p-\varepsilon_1(p+2)} \|\nabla\omega\|^2 \tag{4.18}$$

olarak yazılabilir.

(4.13) te $|a| \leq b$ ise $a \geq -b$ den

$$k\lambda e^{\lambda(m-1)t}(|\nabla v|^m \nabla v, \nabla\omega)$$

$$\geq -\frac{\varepsilon_0}{4} e^{\lambda m t}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} - \frac{k^{m+2}\lambda^{m+2}e^{-2\lambda t}}{(m+2)\left(\frac{\varepsilon_0(m+2)}{4m+4}\right)^{m+1}}\|\nabla \omega\|_{m+2}^{m+2} \tag{4.19}$$

olur. (4.14) te $|a| \leq b$ ise $-a \geq -b$ den

$$-k\lambda e^{-2\lambda t}(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), \omega)$$

$$\geq -\frac{k\lambda\varepsilon_0}{4} e^{\lambda m t}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} - \frac{k\lambda\varepsilon_1}{4} e^{\lambda p t}\|v\|_{p+2}^{p+2} - k\lambda L^2\left(\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\|\omega\|^2 \tag{4.20}$$

olarak yazılabilir. (4.16) eşitsizliğinin her iki tarafı (-1) ile çarpılırsa

$$-k\lambda e^{-\lambda t}\int_\Omega \nabla\omega(x)\int_0^t g\,(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\,d\tau\,dx$$

$$\geq -\frac{k^2\lambda^2 e^{-2\lambda t}\|\nabla\omega\|^2}{2} - \frac{(1-l)}{2}\|\nabla v\|^2 - \frac{1-l}{2l}(g_1 * \nabla u)(t) \tag{4.21}$$

şeklinde yazılır.

(4.17) de $|a| \leq b$ ise $-a \geq -b$ den

$$-k\lambda e^{\lambda(p-1)t}(|v|^p v, \omega)$$

$$\geq -\frac{\varepsilon_1}{4} e^{\lambda p t}\|v\|_{p+2}^{p+2} - \frac{k^{p+2}\lambda^{p+2}e^{-2\lambda t}}{(p+2)\left(\frac{\varepsilon_1(p+2)}{4p+4}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2} \tag{4.22}$$

olarak yazılır.

$\|u\|_{q,\Gamma_1} \leq \beta_q\|\nabla u\|_2$ Sobolev-Poincare eşitsizliğinde $q = 2$ alınıp

$v(x,t) = e^{-\lambda t}u(x,t)$ dönüşümü yapılıp eşitsizliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$$\|v\|_{\Gamma_1}^2 \leq {\beta_2}^2\|\nabla v\|^2$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin her iki yanı $-\frac{\alpha}{2}(\lambda p - \varepsilon_1(p+2)$ ile çarpılırsa

$$-\frac{\alpha}{2}(\lambda p - \varepsilon_1(p+2))\|v\|_{\Gamma_1}^2 \geq -\frac{\alpha}{2}(\lambda p - \varepsilon_1(p+2)){\beta_2}^2\|\nabla v\|^2 \tag{4.23}$$

şeklinde yazılabilir. (3.20) ve (3.21) ve $g_1(s) = e^{\lambda s}g(s)$ den

$$1 - \int_0^t g(s)ds > 0 \tag{4.24}$$

olur. $\varepsilon_1 = \frac{\lambda(p-m)}{2p+4}$ alınırsa

$$\frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{2} = \frac{\lambda(p+m)}{4} \geq 0 \tag{4.25}$$

bulunur. (4.24) ve (4.25) ten

$$\frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla v\|^2 \geq 0 \tag{4.26}$$

elde edilir. (4.12)-(4.26), (4.11) de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t) - (\lambda p - \varepsilon_1(p+2))E_\lambda(t)$$

$$\geq \left(\frac{\lambda p}{p+2} - \frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{p+2} - \frac{\varepsilon_1}{2}\right)e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} - \frac{\alpha}{2}(\lambda p - \varepsilon_1(p+2)){\beta_2}^2\|\nabla v\|^2$$

$$+\left(\frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{m+2} - \frac{\lambda m}{m+2} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$+\left(2\lambda + \frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{2} - \frac{L^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)+1\right)\|v_t\|^2$$

$$+\frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{2}(g*\nabla v)(t) + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))}{2}\|v\|^2 - \frac{l(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))}{4}\|\nabla v\|^2$$

$$-\frac{k^2\lambda^2e^{-2\lambda t}}{l(\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}\|\nabla\omega\|^2 - \frac{\varepsilon_0}{4}e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} - \frac{k^{m+2}\lambda^{m+2}e^{-2\lambda t}}{(m+2)\left(\frac{\varepsilon_0(m+2)}{4m+4}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2}$$

$$-\frac{\varepsilon_1}{4}e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} - \frac{k^{p+2}\lambda^{p+2}e^{-2\lambda t}}{(p+2)\left(\frac{\varepsilon_1(p+2)}{4p+4}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2}$$

$$-\frac{k\lambda\varepsilon_0}{4}\,e^{\lambda mt}\,\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} - \frac{k\lambda\varepsilon_1}{4}\,e^{\lambda pt}\,\|v\|_{p+2}^{p+2} - k\lambda L^2\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\|\omega\|^2$$

$$-\frac{k^2\lambda^2e^{-2\lambda t}\|\nabla\omega\|^2}{2} - \frac{(1-l)}{2}\|\nabla v\|^2 - \frac{1-l}{2l}(g_1 * \nabla u)(t) \tag{4.27}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t) - (\lambda p - \varepsilon_1(p+2))E_\lambda(t)$$

$$\geq \left(2\lambda + \frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{2} - \frac{L^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)+1\right)\|v_t\|^2 + \left(\frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{2} - \frac{1-l}{2l}\right)(g*\nabla v)(t)$$

$$+\left(\frac{\lambda(p-m)-\varepsilon_1(p+2)}{m+2}-\frac{3\varepsilon_0}{4}-\frac{k\lambda\varepsilon_0}{4}\right)e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}+\left[\frac{-l}{4}\left(\lambda p-\varepsilon_1(p+2)\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha{\beta_2}^2}{2}(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))-\frac{1-l}{2}\right]\|\nabla v\|^2+\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))}{2}\|v\|^2$$

$$\left(\frac{\lambda p}{p+2}-\frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{p+2}-\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{\varepsilon_1}{4}-\frac{k\lambda\varepsilon_1}{4}\right)e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}$$

$$e^{-2\lambda t}\left[k^2\lambda^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{l(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))}\right)\|\nabla\omega\|^2+k\lambda L^2\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\|\omega\|^2\right.$$

$$\left.+\frac{k^{m+2}\lambda^{m+2}e^{-2\lambda t}}{(m+2)\left(\frac{\varepsilon_0(m+2)}{4m+4}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2}-\frac{k^{p+2}\lambda^{p+2}e^{-2\lambda t}}{(p+2)\left(\frac{\varepsilon_1(p+2)}{4p+4}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2}\right] \tag{4.28}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte son terimin içinde $\varepsilon_0=\frac{\lambda(p-m)}{2m+4}$ ve $\varepsilon_1=\frac{\lambda(p-m)}{2p+4}$ alınıp düzenlenirse

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t)-(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))E_\lambda(t)$$

$$\geq\left(2\lambda+\frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{2}-\frac{L^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)+1\right)\|v_t\|^2+\left(\frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{2}-\frac{1-l}{2l}\right)(g*\nabla v)(t)$$

$$+\left(\frac{\lambda(p-m)-\varepsilon_1(p+2)}{m+2}-\frac{3\varepsilon_0}{4}-\frac{k\lambda\varepsilon_0}{4}\right)e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}+\left[\frac{-l}{4}\left(\lambda p-\varepsilon_1(p+2)\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha{\beta_2}^2}{2}(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))-\frac{1-l}{2}\right]\|\nabla v\|^2+\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))}{2}\|v\|^2$$

$$+\left(\frac{\lambda p}{p+2}-\frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{p+2}-\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{\varepsilon_1}{4}-\frac{k\lambda\varepsilon_1}{4}\right)e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}$$

$$-e^{-2\lambda t}\left[k^2\lambda^2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{l\lambda(p+m)}\right)\|\nabla\omega\|^2+2k\lambda L^2\left(\frac{p+m+4}{\lambda(p-m)}\right)\|\omega\|^2\right.$$

$$\left.+\frac{k^{m+2}\lambda}{(m+2)\left(\frac{p-m}{8m+8}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2}-\frac{k^{p+2}\lambda}{(p+2)\left(\frac{p-m}{8p+8}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2}\right] \tag{4.29}$$

olarak yazılır. (4.29) ve (4.1) den

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t)-(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))E_\lambda(t)$$

$$\geq\left(2\lambda+\frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{2}-\frac{L^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0}+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)+1\right)\|v_t\|^2+\left(\frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{2}-\frac{1-l}{2l}\right)(g*\nabla v)(t)$$

$$+\left(\frac{\lambda(p-m)-\varepsilon_1(p+2)}{m+2}-\frac{3\varepsilon_0}{4}-\frac{k\lambda\varepsilon_0}{4}\right)e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}+\left[\frac{-l}{4}\left(\lambda p-\varepsilon_1(p+2)\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha{\beta_2}^2}{2}(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))-\frac{1-l}{2}\right]\|\nabla v\|^2+\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))}{2}\|v\|^2$$

$$+\left(\frac{\lambda p}{p+2}-\frac{\lambda p-\varepsilon_1(p+2)}{p+2}-\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{\varepsilon_1}{4}-\frac{k\lambda\varepsilon_1}{4}\right)e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}-e^{-2\lambda t}D_1 \qquad (4.30)$$

bulunur. (4.30) da $\varepsilon_0=\frac{\lambda(p-m)}{2m+4}$ ve $\varepsilon_1=\frac{\lambda(p-m)}{2p+4}$ alınıp düzenlenirse

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t)-(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))E_\lambda(t)$$

$$\geq\left(2\lambda+\frac{\lambda p-\frac{\lambda(p-m)}{2p+4}(p+2)}{2}-\frac{L^2}{2}\left(\frac{2m+2p+8}{\lambda(p-m)}\right)+1\right)\|v_t\|^2$$

$$+\left(\frac{\frac{\lambda(p-m)}{2m+4}}{4}(1-k\lambda)\right)e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}+\left(\frac{\frac{\lambda(p-m)}{2p+4}}{4}(1-k\lambda)\right)e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}$$

$$\left[\frac{-l}{4}\left(\lambda p-\frac{\lambda(p-m)}{2p+4}(p+2)\right)-\frac{\alpha{\beta_2}^2}{2}(\lambda p-\frac{\lambda(p-m)}{2p+4}(p+2))-\frac{1-l}{2}\right]\|\nabla v\|^2$$

$$+\frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda p-\frac{\lambda(p-m)}{2p+4}(p+2))}{2}\|v\|^2+\left(\frac{\lambda p-\frac{\lambda(p-m)}{2p+4}(p+2)}{2}-\frac{1-l}{2l}\right)(g*\nabla v)(t)-e^{-2\lambda t}D_1 \qquad (4.31)$$

bulunur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t)-(\lambda p-\varepsilon_1(p+2))E_\lambda(t)$$

$$\geq\left(\frac{(p-m)(p+m+8)+4\lambda(p-m)-4L^2(p+m+4)}{4\lambda(p-m)}\right)\|v_t\|^2+\left[\frac{p+m}{8}\left(l-2\alpha{\beta_2}^2\right)\lambda-\frac{1-l}{2}\right]\|\nabla v\|^2$$

$$\frac{\lambda^2(\lambda+1)(p+m))}{4}\|v\|^2+\left(\frac{\lambda}{4}(p+m)-\frac{1-l}{2l}\right)(g*\nabla v)(t)-e^{-2\lambda t}D_1$$

$$+\left(\frac{\frac{\lambda(p-m)}{2m+4}}{4}(1-k\lambda)\right)e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}+\left(\frac{\frac{\lambda(p-m)}{2p+4}}{4}(1-k\lambda)\right)e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} \qquad (4.32)$$

elde edilir.

$\lambda>0, p>m>2$ olduğundan

$$\frac{\lambda^2(\lambda+1)(p+m)}{4}\|v\|^2 \geq 0 \tag{4.33}$$

ve

$$\frac{p+m}{8}\left(l-2\alpha{\beta_2}^2\right)\lambda > \frac{p+m}{8}\left(l-2\alpha{\beta_2}^2\right) \tag{4.34}$$

olarak yazılabilir. (4.33)- (4.34) ve (4.32) den

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t) - (\lambda p - \varepsilon_1(p+2))E_\lambda(t)$$

$$\geq \frac{\left((p-m)(p+m+8)+4\lambda(p-m)-4L^2(p+m+4)\right)}{4\lambda(p-m)}\|v_t\|^2$$

$$\left[\frac{p+m}{8}\left(l-2\alpha{\beta_2}^2\right)-\frac{1-l}{2}\right]\|\nabla v\|^2 + \left(\frac{\lambda}{4}(p+m)-\frac{1-l}{2l}\right)(g*\nabla v)(t) \quad -e^{-2\lambda t}D_1$$

$$+\left(\frac{\frac{\lambda(p-m)}{2m+4}}{4}(1-k\lambda)\right)e^{\lambda m t}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \left(\frac{\frac{\lambda(p-m)}{2p+4}}{4}(1-k\lambda)\right)e^{\lambda p t}\|v\|_{p+2}^{p+2} \tag{4.35}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizlikte $k\lambda \leq 1$ alınırsa eşitsizliğin son terimi pozitif olacağından

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t) - \lambda\frac{(p+m)}{2}E_\lambda(t)$$

$$\geq \frac{\left((p-m)(p+m+8)+4\lambda(p-m)-4L^2(p+m+4)\right)}{4\lambda(p-m)}\|v_t\|^2$$

$$\left[\frac{p+m}{8}\left(-l-2\alpha{\beta_2}^2\right)-\frac{1-l}{2}\right]\|\nabla v\|^2 + \left(\frac{\lambda}{4}(p+m)-\frac{1-l}{2l}\right)(g*\nabla v)(t)$$

$$-e^{-2\lambda t}D_1 \tag{4.36}$$

bulunur.

$\|\nabla v\|^2$ nin katsayısının kökü $\frac{l(4-p-m)-4}{2{\beta_2}^2(p+m)}$

$(g*\nabla v)(t)$ nin katsayısının kökü $\frac{2(1-l)}{l(p+m)}$, $\|v_t\|^2$ nin katsayısının kökü λ_0,

$$(p-m)(p+m+8)+4\lambda(p-m)-4L^2(p+m+4)=0$$

denkleminin maksimum kökü olmak üzere

$\lambda \geq max\left\{\lambda_0, \frac{2(1-l)}{l(p+m)}\right\}, \alpha \leq \frac{l(4-p-m)-4}{2{\beta_2}^2(p+m)}, \int_0^\infty g(s)ds \leq \frac{\lambda(p+m)}{\lambda(p+m)+2}$

iken (4.36) da kökler yerleştirilirse

$$\frac{\partial}{\partial t}E_\lambda(t) - \frac{\lambda(p+m)}{2}E_\lambda(t) \geq -e^{-2\lambda t}D_1 \tag{4.37}$$

bulunur. (4.37) de $\frac{\lambda(p+m)}{2}$ yerine A ve $e^{-2\lambda t}D_1$ yerine B yazılırsa

$$E_\lambda'(t) - AE_\lambda(t) \geq -B \tag{4.38}$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı e^{-At} ile çarpılırsa

$$e^{-At}E_\lambda'(t) - e^{-At}AE_\lambda(t) \geq -Be^{-At}$$

olur. Üstteki eşitsizlikte çarpımın türevinden

$$(e^{-At}E_\lambda(t))' \geq -Be^{-At}$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı $(0, t)$ aralığında integre edilirse

$$\int_0^t (e^{-At}E_\lambda(t))'dt \geq -\int_0^t Be^{-At}\,dt$$

$$e^{-At}E_\lambda(t) \geq E_\lambda(0) - \int_0^t Be^{-At}\,dt \tag{4.39}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte A yerine $\frac{\lambda(p+m)}{2}$ ve B yerine $e^{-2\lambda t}D_1$ yazılırsa

$$e^{-\frac{\lambda(p+m)t}{2}}E_\lambda(t) \geq E_\lambda(0) - D_1\int_0^t e^{-\frac{\lambda(p+m+4)t}{2}}\,dt$$

olur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$e^{-\frac{\lambda(p+m)t}{2}}E_\lambda(t) \geq E_\lambda(0) + \frac{2D_1}{p+m+4}(e^{-\frac{\lambda(p+m+4)t}{2}} - 1)$$

bulunur. $e^{-\frac{\lambda(p+m)t}{2}} > 0$ olduğundan

$$E_\lambda(t) \geq E_\lambda(0) + \frac{2D_1}{p+m+4}\left(e^{-\frac{\lambda(p+m+4)t}{2}} - 1\right)$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte $e^{-\frac{\lambda(p+m+4)t}{2}} > 0$ olduğundan

$$E_\lambda(t) \geq E_\lambda(0) - \frac{2D_1}{p+m+4} \tag{4.40}$$

bulunur. Böylece Lemma 4.1 ispatlanmış olur.

Teorem 4.1. in İspatı

$$\psi(t) = \|v(t)\|^2 \tag{4.41}$$

olarak alınır ve (4.41) eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevleri alınırsa

$$\psi'(t) = 2(v, v_t) \tag{4.42}$$

$$\psi''(t) = 2(v, v_{tt}) + 2\|v_t\|^2 \tag{4.43}$$

bulunur. (3.53) eşitliğinin her iki yanı v ile çarpılıp Ω bölgesinde integre edilirse

$$(v_{tt}, v) = -(2\lambda+1)(v_t, v) - \lambda(\lambda+1)(v,v) + (\Delta v, v)$$

$$+(v, e^{\lambda mt}\left(div(|\nabla v|^m \nabla v)\right) - \left(v, \int_0^t g\,(t-\tau)\,\Delta v(\tau) d\tau\right)$$

$$+\left(v, e^{-\lambda t}\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right)\right) + \left(v, e^{\lambda pt}|v|^p v\right) + (v, e^{-\lambda t}f(t)\omega\,(x)) \tag{4.44}$$

bulunur. Üstteki eşitlikteki terimler ayrı ayrı incelenirse

$$-\lambda(\lambda+1)(v,v) = -\lambda(\lambda+1)\|v\|^2 \tag{4.45}$$

$$\left(v, e^{-\lambda t}\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right)\right) = e^{-\lambda t}\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), v\right) \tag{4.46}$$

$$\left(v, e^{\lambda pt}|v|^p v\right) = e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} \tag{4.47}$$

$(\Delta v, v) = \int_\Omega v \Delta v dx$ eşitliğinde Green özdeşliği uygulanırsa

$$(\Delta v, v) = -\int_\Omega \nabla v \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial v(x,t)}{\partial n} ds$$

olur. Üstteki eşitlikte (3.54) eşitliğinden

$$(\Delta v, v) = -\|v\|^2 + \int_{\Gamma_1} v\left(\int_0^t g\,(t-\tau)\frac{\partial v}{\partial n}(x,\tau)d\tau\right)ds - \int_{\Gamma_1} v\, e^{\lambda mt}|\nabla v|^{m+1} ds$$

$$+\int_{\Gamma_1} \alpha v^2\, ds$$

bulunur. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$(\Delta v, v) = -\|v\|^2 + \int_{\Gamma_1}\left(\int_0^t v(t) g\,(t-\tau)\frac{\partial v}{\partial n}(x,\tau)d\tau\right)ds - \int_{\Gamma_1} v\, e^{\lambda m t}|\nabla v|^{m+1} ds$$

$$+\alpha\|v\|_{\Gamma_1}^2 \qquad (4.48)$$

olarak yazılır.

$(v, e^{-\lambda t} f(t)\omega\,(x))$ ifadesinde (3.56) dan

$$\left(v, e^{-\lambda t} f(t)\omega\,(x)\right) = k e^{-2\lambda t} f(t) \qquad (4.49)$$

olur.

$$(v, e^{\lambda m t}\left(div(|\nabla v|^m \nabla v)\right) = e^{\lambda m t}\int_\Omega \nabla.\,(|\nabla v|^m \nabla v) v dx$$

Üstteki eşitliğe Green özdeşliği uygulanırsa

$$(v, e^{\lambda m t}\left(div(|\nabla v|^m \nabla v)\right) = e^{\lambda m t}(-\int_\Omega |\nabla v|^{m+2}\, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial(|v|^{m+1})}{\partial n} ds)$$

bulunur. Üstteki eşitlikte $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ dikkate alınıp düzenlenirse

$$(v, e^{\lambda m t}\left(div(|\nabla v|^m \nabla v)\right) = -e^{\lambda m t}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + e^{\lambda m t}\int_{\Gamma_1} v \frac{\partial(|v|^{m+1})}{\partial n} ds) \qquad (4.50)$$

olarak yazılır.

$$-\left(v, \int_0^t g(t-\tau)\Delta v\,(\tau)d\tau\right) = -\int_\Omega v(\int_0^t g(t-\tau)\Delta v\,(\tau)d\tau)dx$$

$$= -\int_\Omega(\int_0^t g(t-\tau)v(t)\Delta v\,(\tau)d\tau)dx$$

şeklindedir. Üstteki eşitlikte integrallerin sırası yer değiştirilirse

$$-\left(v, \int_0^t g(t-\tau)\Delta v\,(\tau)d\tau\right) = -\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega v(t)\ \Delta v\,(\tau)dx d\tau \qquad (4.51)$$

olur.

$\int_\Omega v(t)\ \Delta v(\tau)dx$ ifadesinde Green özdeşliği uygulanırsa

$$\int_\Omega v(t)\ \Delta v(\tau)dx\ = -\int_\Omega \nabla v(t)\nabla v(\tau)\ dx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial n}ds$$

olur. Üstteki eşitlik $-g(t-\tau)$ ile çarpılıp $(0,t)$ aralığında integre edilirse

$$-\int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega v(t)\ \Delta v\,(\tau)dxd\tau = \int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(t)\nabla v(\tau)\ dxd\tau$$
$$-\int_0^t g(t-\tau)\int_{\Gamma_1} v\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial n}ds\ d\tau \tag{4.52}$$

bulunur. (4.51) -(4.52) eşitliklerinden

$$-\left(v,\int_0^t g(t-\tau)\Delta v\,(\tau)d\tau\right) = \int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(t)\nabla v(\tau)\ dxd\tau$$
$$-\int_0^t g(t-\tau)\int_{\Gamma_1} v\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial n}ds\ d\tau$$

bulunur. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$-\left(v,\int_0^t g(t-\tau)\Delta v\,(\tau)d\tau\right) = \int_0^t g(t-\tau)(\nabla v,\nabla v(\tau))d\tau$$
$$-\int_0^t g(t-\tau)(\int_{\Gamma_1} v\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial n}ds\,)\,d\tau$$

olur. Üstteki eşitliğin son teriminde integrallerin sırası değiştirilirse

$$-\left(v,\int_0^t g(t-\tau)\Delta v\,(\tau)d\tau\right) = \int_0^t g(t-\tau)(\nabla v,\nabla v(\tau))d\tau$$
$$-\int_{\Gamma_1}\int_0^t v(t)g(t-\tau)\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial n}d\tau ds \tag{4.53}$$

olarak yazılır. (4.45)- (4.53), (4.44) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(v_{tt},v) = -(2\lambda+1)(v_t,v) - \lambda(\lambda+1)\|v\|^2 - \|\nabla v\|^2 - e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$\int_{\Gamma_1} v\left(\int_0^t g\,(t-\tau)\frac{\partial v}{\partial n}(x,\tau)d\tau\right)ds - \int_{\Gamma_1} v\,e^{\lambda mt}|\nabla v|^{m+1}ds + \alpha\|v\|_{\Gamma_1}^2$$

$$+e^{\lambda mt}\int_{\Gamma_1} v\frac{\partial(|v|^{m+1})}{\partial n}ds) + \int_0^t g(t-\tau)\big(\nabla v,\nabla v(\tau)\big)d\tau + ke^{-2\lambda t}f(t)$$

$$-\int_{\Gamma_1}\int_0^t v(t)g(t-\tau)\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial n}d\tau ds + e^{-\lambda t}\big(\hat{h}\,(t,e^{\lambda t}v),v\big) + e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}$$

olur. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$(v_{tt}, v) = -(2\lambda+1)(v_t, v) - \lambda(\lambda+1)\|v\|^2 - \|\nabla v\|^2 + \alpha\|v\|_{\Gamma_1}^2 - e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$+\int_0^t g(t-\tau)\big(\nabla v, \nabla v(\tau)\big)d\tau + e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} + e^{-\lambda t}\big(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), v\big) + ke^{-2\lambda t}f(t)$$

(4.54)

bulunur.

(3.63) ifadesi $ke^{-\lambda t}$ ile çarpılırsa (4.54) ün son terimi olur. Böylece

$$(v_{tt}, v) = -(2\lambda+1)(v_t, v) - \lambda(\lambda+1)\|v\|^2 - \|\nabla v\|^2 + \alpha\|v\|_{\Gamma_1}^2 - e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$+\int_0^t g(t-\tau)\big(\nabla v, \nabla v(\tau)\big)d\tau + e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} + e^{-\lambda t}\big(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), v\big) + ke^{-\lambda t}\ (\nabla v, \nabla\omega)$$

$$-ke^{-2\lambda t}\big(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), \omega\big) + ke^{\lambda(m-1)t}(|\nabla v|^m \nabla v, \nabla\omega)$$

$$-ke^{-2\lambda t}\int_0^t g\,(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla\omega)d\tau - ke^{\lambda(p-1)t}(|v|^p v, \omega) \qquad (4.55)$$

bulunur.

$$\int_0^t g(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla v(t))d\tau$$

$$= \int_0^t g(t-\tau)\int_\Omega \nabla v(\tau)\nabla v(t)dx d\tau$$

$$= \int_\Omega \nabla v(t)dx \int_\Omega \int_0^t g(t-\tau)\nabla v(\tau)d\tau\, dx$$

olarak yazılan eşitlikte $q = q' = 2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_0^t g(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla v(t))d\tau$$

$$\leq \left(\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\nabla v(\tau)d\tau\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

olur. Üstteki eşitsizlikte $q = q' = 2$ olacak şekilde $\varepsilon-$Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_0^t g(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla v(t))d\tau$$

$$\leq \frac{\|\nabla v(t)\|^2}{2} + \frac{\int_\Omega\left(\int_0^t g\,(t-\tau)\nabla v(\tau)d\tau\right)^2 dx}{2} \qquad (4.56)$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin son teriminde üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$|a+b| \leq |a| + |b|$ den

$|\nabla v(\tau)| = |\nabla v(\tau) - \nabla v(t) + \nabla v(t)|$

$|\nabla v(\tau)| \leq |\nabla v(\tau) - \nabla v(t)| + |\nabla v(t)|$

olarak yazılabilir. Üstteki eşitsizlik (4.56) eşitsizliğinde uygulanırsa

$$\int_0^t g\,(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla v(t))d\tau$$

$$\leq \frac{\|\nabla v(t)\|^2}{2} + \frac{\int_\Omega \left(\int_0^t g\,(t-\tau)(|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)| + |\nabla v(t)|)d\tau\right)^2 dx}{2} \tag{4.57}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte düzenleme yapılırsa

$$\int_0^t g\,(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla v(t))d\tau \leq \frac{1}{2}\|\nabla v(t)\|^2$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^t g\,(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau + \int_0^t g\,(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx \tag{4.58}$$

olur. Üstteki eşitsizliğin son teriminde Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$ den

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g\,(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau + \int_0^t g\,(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \int_\Omega \left(\int_0^t g\,(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx + \int_\Omega \left(\int_0^t g\,(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$2\int_\Omega \left(\int_0^t g\,(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau\right)\left(\int_0^t g\,(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)dx \tag{4.59}$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin son teriminde

$a_1 = \int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau, b = \int_0^t g\,(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau$

$q = q' = 2,\ \ \varepsilon = (\frac{1-l}{l})^{\frac{1}{2}}$ olacak şekilde ε –Young eşitsizliği uygulanırsa

$$2\left(\int_0^t g\,(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau\right)\left(\int_0^t g\,(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)$$

$$= 2\left(\left(\frac{1-l}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t g\,(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau \left(\frac{l}{1-l}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t g\,(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau \right)$$

$$\leq \left(\frac{1-l}{l}\right)\left(\int_0^t g\,(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau\right)^2 + \frac{l}{1-l}\left(\int_0^t g\,(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 \qquad (4.60)$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı Ω bölgesinde integre edilirse

$$2\int_\Omega \left(\int_0^t g\,(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau\right)\left(\int_0^t g\,(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)dx$$

$$\leq \left(\frac{1-l}{l}\right)\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$+\frac{l}{1-l}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx \qquad (4.61)$$

bulunur. Üstteki eşitsizlik (4.59) ün son teriminde yerine yazılırsa

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)(|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)| + |\nabla v(t)|)d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx + \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\left(\frac{1-l}{l}\right)\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx + \frac{l}{1-l}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

olur. Üstteki eşitsizlikte düzenleme yapılırsa

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)(|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)| + |\nabla v(t)|)d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{l}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$+\frac{1}{1-l}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx \qquad (4.62)$$

olur. Üstteki eşitliğin son teriminde $t - \tau = s$ değişken değişimi yapılırsa

$$\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau = |\nabla v(t)|\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau$$

$$= |\nabla v(t)|\int_0^t g(s)\,ds$$

bulunur. Üstteki eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$$\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 = |\nabla v(t)|^2\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)^2$$

olarak yazılır. Üstteki eşitliğin her iki tarafı Ω bölgesinde integre edilip $\frac{1}{1-l}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{1-l}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx = \frac{1}{1-l}|\nabla v(t)|^2\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)^2 \tag{4.63}$$

olur.

$\left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2$ terimi çarpanlara ayrılıp Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2$$

$$= \left(\int_0^t \left(g(t-\tau)\right)^{\frac{1}{2}}\left(g(t-\tau)\right)^{\frac{1}{2}}|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2$$

$$\leq \int_0^t g(s)\,ds\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 d\tau$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı Ω bölgesinde integre edilip $\frac{1}{l}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{l}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{l}\int_\Omega\int_0^t g(s)\,ds\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 d\tau\,dx \tag{4.64}$$

olur. Üstteki eşitsizliğin soluna (4.63) eşitliğinin solundaki terim, sağına da (4.63) eşitliğinin sağındaki terim eklenirse

$$\frac{1}{1-l}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx + \frac{1}{l}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{l}\int_\Omega\int_0^t g(s)\,ds\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 d\tau\,dx$$

$$+\frac{1}{1-l}|\nabla v(t)|^2\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)^2$$

bulunur. Üstteki eşitsizlik düzenlendiğinde

$$\frac{1}{1-l}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx+\frac{1}{l}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{l}\int_0^t g(s)\,ds\int_\Omega\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 d\tau\,dx$$

$$+\frac{1}{1-l}\|\nabla v(t)\|^2\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)^2 \tag{4.65}$$

olur. Sistemin enerjisinde kullanılan

$$(g*v)(t)=\int_0^t g(t-s)\|v(t)-v(\mathrm{s})\|^2 ds$$

eşitliğinde v yerine, ∇v ve s yerine τ yazılırsa

$$(g_1\ *\nabla v)(t)=\int_0^t g(t-\tau)\|\nabla v(t)-\nabla v(\tau)\|^2 d\tau$$

$$(g*\nabla v)(t)=\int_\Omega\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 d\tau\,dx \tag{4.66}$$

olarak yazılabilir. (3.20)-(3.21) den

$$\int_0^t g(s)ds\leq\int_0^\infty g(s)ds$$

$$\int_0^t g(s)ds\leq 1-l \tag{4.67}$$

olur. (4.66) ve (4.67), (4.65) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{1-l}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx+\frac{1}{l}\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq\frac{1-l}{l}(g*\nabla u)(t)+\frac{1}{1-l}\|\nabla v(t)\|^2(1-l)^2$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sol tarafı (4.62) eşitsizliğinin sağ tarafı olduğu için

$$\int_\Omega\left(\int_0^t g(t-\tau)(|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|+|\nabla v(t)|)d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq(1-l)\,\|\nabla v(t)\|^2+\frac{1-l}{l}(g*\nabla u)(t) \tag{4.68}$$

olur. (4.58) eşitsizliğinin en sağındaki terim (4.68) in ilk terimi olduğundan (4.68) (4.58) de yerine yazılırsa

$\int_0^t g(t-\tau)(\nabla v(\tau),\nabla v(t))d\tau$

$$\leq \frac{\|\nabla v(t)\|^2}{2}+\frac{1-l}{2}\|\nabla v(t)\|^2+\frac{1-l}{2l}(g*\nabla v)(t) \tag{4.69}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte $a\leq |a|$ eşitsizliğinden

$$\int_0^t g(t-\tau)|(\nabla v(\tau),\nabla v(t))|\,d\tau \leq (1-\frac{l}{2})\|\nabla v(t)\|^2+\frac{1-l}{2l}(g*\nabla v)(t) \tag{4.70}$$

olarak yazılır.

(3.7) ve (3.18) eşitliklerinden

$$\left|\hat{h}\,(t,u)\right| \leq L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}}+|u|^{\frac{p}{2}})$$

olur. Üstteki eşitsizliğin sağındaki pozitif ifadenin üsleri 1 artılırsa

$$\left|\hat{h}\,(t,u)\right| \leq L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}+1}+|u|^{\frac{p}{2}+1})$$

olarak yazılır. $v(x,t)=e^{-\lambda t}\,u(x,t)$ dönüşümünden

$$\left|\hat{h}\,(t,e^{\lambda t}v)\right| \leq L(\left|\nabla v e^{\lambda t}\right|^{\frac{m}{2}+1}+\left|v e^{\lambda t}\right|^{\frac{p}{2}+1})$$

olur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı v ile çarpılıp Ω da integre edilirse

$$\left|(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),v)\right| \leq Le^{\lambda(\frac{m+2}{2})t}\int_\Omega|\nabla v|^{\frac{m+2}{2}}v dx+Le^{\lambda(\frac{p+2}{2})t}\int_\Omega|v|^{\frac{p+2}{2}}v dx$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte $q=q'=2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),v)\right| \leq Le^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t}(\int_\Omega|\nabla v|^{m+2}dx)^{\frac{1}{2}}\,(\int_\Omega|v|^2dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$+Le^{\lambda(\frac{p+2}{2})t}(\int_\Omega|v|^{p+2}dx)^{\frac{1}{2}}\,(\int_\Omega|v|^2dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq Le^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}}\|v\|_2+Le^{\lambda\left(\frac{p+2}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}\|v\|_2$$

bulunur. $e^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t}=e^{\lambda\left(\frac{m+1}{2}\right)t}e^{\frac{\lambda t}{2}}$ ve $e^{\lambda\left(\frac{p+2}{2}\right)t}=e^{\lambda\left(\frac{p+1}{2}\right)t}e^{\frac{\lambda t}{2}}$ şeklinde parçalanırsa

$$\left|(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),v)\right| \leq e^{\lambda\left(\frac{m+1}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}}L\|v\|_2e^{\frac{\lambda t}{2}}+e^{\lambda\left(\frac{p+1}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}L\|v\|_2e^{\frac{\lambda t}{2}}$$

olur. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafı $(\frac{\mu_0}{2})^{\frac{1}{2}}$ ve $(\frac{\mu_1}{2})^{\frac{1}{2}}$ ile çarpıp düzenlenirse

$$\left|\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),v\right)\right| \leq (\frac{\mu_0}{2})^{\frac{1}{2}} e^{\lambda\left(\frac{m+1}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}} \frac{L\|v\|_2 e^{\frac{\lambda t}{2}}}{(\frac{\mu_0}{2})^{\frac{1}{2}}}$$

$$+(\frac{\mu_1}{2})^{\frac{1}{2}}\; e^{\lambda\left(\frac{p+1}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}} \frac{L\|v\|_2 e^{\frac{\lambda t}{2}}}{(\frac{\mu_1}{2})^{\frac{1}{2}}}$$

olarak yazılabilir. Üstteki eşitsizliğin sağındaki ilk terime

$$a_1 = e^{\lambda\left(\frac{m+1}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}},\ b = L\|v\|_2 e^{\frac{\lambda t}{2}},\ q = q' = 2 \quad \varepsilon = (\frac{\mu_0}{2})^{\frac{1}{2}}$$

2.terime $\quad a_2 = e^{\lambda\left(\frac{p+1}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}} \quad , \quad b = L\|v\|_2 e^{\frac{\lambda t}{2}} \quad , \quad q = q' = 2, \quad \varepsilon = (\frac{\mu_1}{2})^{\frac{1}{2}}$

için ε −Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),v\right)\right|$$

$$\leq \frac{\mu_0}{4}\; e^{\lambda(m+1)t}\;\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{L^2\|v\|^2 e^{\lambda t}}{\mu_0} + \frac{\mu_1}{4}\; e^{\lambda(p+1)t}\;\|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{L^2\|v\|^2 e^{\lambda t}}{\mu_1}$$

olur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı $e^{-\lambda t}$ ile çarpılırsa

$$e^{-\lambda t}\left|\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}\, v\right),v\right)\right|$$

$$\leq \frac{\mu_0}{4}\; e^{\lambda m t}\;\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{L^2\|v\|^2}{\mu_0} + \frac{\mu_1}{4}\; e^{\lambda p t}\;\|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{L^2\|v\|^2}{\mu_1}$$

olur. Üstteki eşitsizlikte düzenleme yapılırsa

$$e^{-\lambda t}\left|\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),v\right)\right|$$

$$\leq \frac{\mu_0}{4}\; e^{\lambda m t}\;\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{\mu_1}{4}\; e^{\lambda p t}\;\|v\|_{p+2}^{p+2} + L^2(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_1})\|v\|^2 \tag{4.71}$$

bulunur.

$ke^{-\lambda t}|(\nabla v, \nabla\omega)|$ ifadesinde $q = q' = 2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$ke^{-\lambda t}|(\nabla v, \nabla\omega)| \leq ke^{-\lambda t}(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx)^{\frac{1}{2}}\ (\int_\Omega |\nabla\omega|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le ke^{-\lambda t}\|\nabla v\|_2\|\nabla\omega\|_2$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafındaki terimler $\left(\frac{(p+m)l}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ ile çarpılıp bölünürse

$$ke^{-\lambda t}|(\nabla v,\nabla\omega)| \le \left(\frac{(p+m)l}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_2 \frac{ke^{-\lambda t}}{\left(\frac{(p+m)l}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\|\nabla\omega\|_2$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizliğe $q = q' = 2$, $\varepsilon = \left(\frac{(p+m)l}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ için $\varepsilon -$ Young eşitsizliği uygulanırsa

$$ke^{-\lambda t}|(\nabla v,\nabla\omega)| \le \frac{(p+m)l}{8}\|\nabla v\|^2 + \frac{2k^2e^{-2\lambda t}}{(p+m)l}\|\nabla\omega\|^2 \tag{4.72}$$

$ke^{\lambda(m-1)t}|(|\nabla v|^m\nabla v,\nabla\omega)|$ ifadesi için $q = \frac{m+2}{m+1}$, $q' = m+2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$ke^{\lambda(m-1)t}|(|\nabla v|^m\nabla v,\nabla\omega)|$$

$$\le ke^{\lambda(m-1)t}\left(\int_\Omega |\nabla v|^{m+1(\frac{m+2}{m+1})}dx\right)^{\frac{m+1}{m+2}} \left(\int_\Omega |\nabla\omega|^{m+2}dx\right)^{\frac{1}{m+2}}$$

$$\le ke^{\lambda(m-1)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+1}\|\nabla\omega\|_{m+2}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte $e^{\lambda(m-1)t} = e^{\lambda mt(\frac{m+1}{m+2})}e^{\frac{-2\lambda t}{m+2}}$ şeklinde çarpanlarına ayrılırsa

$$ke^{\lambda(m-1)t}|(|\nabla v|^m\nabla v,\nabla\omega)| \le e^{\lambda mt(\frac{m+1}{m+2})}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+1}ke^{\frac{-2\lambda t}{m+2}}\|\nabla\omega\|_{m+2}$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sağındaki terim $\left(\frac{\mu_0(m+2)}{2(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{m+2}}$ ile çarpılıp bölünürse

$$ke^{\lambda(m-1)t}|(|\nabla v|^m\nabla v,\nabla\omega)| \le \left(\frac{\mu_0(m+2)}{2(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{m+2}} e^{\lambda mt(\frac{m+1}{m+2})}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+1}\frac{ke^{\frac{-2\lambda t}{m+2}}\|\nabla\omega\|_{m+2}}{\left(\frac{\mu_0(m+2)}{2(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{m+2}}}$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizlikte $q = \frac{m+2}{m+1}$, $q' = m+2$, $\varepsilon = \left(\frac{\mu_0(m+2)}{2(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{m+2}}$ için $\varepsilon -$Young eşitsizliği uygulanırsa

$$ke^{\lambda(m-1)t}|(|\nabla v|^m\nabla v,\nabla\omega)|$$

$$\leq \frac{\left(\left(\frac{\mu_0(m+2)}{2(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{m+2}} e^{\lambda mt\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+1}\right)^{\frac{m+2}{m+1}}}{\frac{m+2}{m+1}} + \frac{1}{m+2}\left(\frac{ke^{\frac{-2\lambda t}{m+2}}\|\nabla\omega\|_{m+2}}{\left(\frac{\mu_0(m+2)}{2(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{m+2}}}\right)^{m+2}$$

olur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$ke^{\lambda(m-1)t}|(|\nabla v|^m\nabla v, \nabla\omega)|$

$$\leq \frac{\mu_0}{2}e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{k^{m+2}e^{-2\lambda t}}{(m+2)\left(\frac{\mu_0(m+2)}{2m+2}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2} \tag{4.73}$$

olarak yazılır.

(3.7) eşitliği ve (3.18) eşitliklerinden

$\left|\hat{h}\ (t,u)\right| \leq L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}} + |u|^{\frac{p}{2}})$

olur. Üstteki eşitsizliğin sağındaki pozitif ifadenin üsleri 1 artılırsa

$\left|\hat{h}\ (t,u)\right| \leq L(|\nabla u|^{\frac{m}{2}+1} + |u|^{\frac{p}{2}+1})$

olarak yazılır. $v(x,t) = e^{-\lambda t}\ u(x,t)$ dönüşümünden

$\left|\hat{h}\ (t,e^{\lambda t}v)\right| \leq L(\left|\nabla v e^{\lambda t}\right|^{\frac{m}{2}+1} + \left|v e^{\lambda t}\right|^{\frac{p}{2}+1})$

olur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı ω ile çarpılıp Ω da integre edilirse

$\left|(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),\omega)\right| \leq Le^{\lambda(\frac{m+2}{2})t}\int_\Omega|\nabla v|^{\frac{m+2}{2}}\omega dx + Le^{\lambda(\frac{p+2}{2})t}\int_\Omega|v|^{\frac{p+2}{2}}\omega dx$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte $q = q' = 2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),\omega)\right| \leq Le^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t}\left(\int_\Omega|\nabla v|^{m+2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|\omega|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+Le^{\lambda(\frac{p+2}{2})t}\left(\int_\Omega|v|^{p+2}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|\omega|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq Le^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}}\|\omega\|_2 + Le^{\lambda\left(\frac{p+2}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}\|\omega\|_2$$

bulunur.

$$\left|\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),\omega\right)\right| \leq e^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}}L\|\omega\|_2 e^{\frac{\lambda t}{2}} + e^{\lambda\left(\frac{p+2}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}L\|\omega\|_2 e^{\frac{\lambda t}{2}}$$

olur. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafı $(\frac{\mu_0}{2})^{\frac{1}{2}}$ ve $(\frac{\mu_1}{2})^{\frac{1}{2}}$ ile çarpıp düzenlenirse

$$\left|\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),\omega\right)\right| \leq (\frac{\mu_0}{2})^{\frac{1}{2}}e^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}}\frac{L\|\omega\|_2}{(\frac{\mu_0}{2})^{\frac{1}{2}}}$$

$$+(\frac{\mu_1}{2})^{\frac{1}{2}}\ e^{\lambda\left(\frac{p+2}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}\frac{L\|\omega\|_2}{(\frac{\mu_1}{2})^{\frac{1}{2}}}$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizliğin sağındaki ilk terime

$$a_1 = e^{\lambda\left(\frac{m+2}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{m+2}^{\frac{m+2}{2}},\ b = L\|\omega\|_2,\ q = q' = 2 \quad \varepsilon = (\frac{\mu_0}{2})^{\frac{1}{2}}$$

2.terime $a_2 = e^{\lambda\left(\frac{p+2}{2}\right)t}\|\nabla v\|_{p+2}^{\frac{p+2}{2}}$, $b = L\|\omega\|_2$, $q = q' = 2,\ \ \varepsilon = (\frac{\mu_1}{2})^{\frac{1}{2}}$

için ε −Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),\omega\right)\right|$$

$$\leq \frac{\mu_0}{4}\ e^{\lambda(m+2)t}\ \|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{L^2\|\omega\|^2}{\mu_0} + \frac{\mu_1}{4}\ e^{\lambda(p+2)t}\ \|\omega\|_{p+2}^{p+2} + \frac{L^2\|\omega\|^2}{\mu_1}$$

olur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı $ke^{-2\lambda t}$ ile çarpılırsa

$$ke^{-2\lambda t}\left|\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}\ v\right),\omega\right)\right|$$

$$\leq \frac{\mu_0}{4}\ e^{\lambda mt}\ \|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{L^2\|\omega\|^2}{\mu_0} + \frac{\mu_1}{4}\ e^{\lambda pt}\ \|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{L^2\|\omega\|^2}{\mu_1}$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizlikte düzenleme yapılırsa

$$ke^{-\lambda t}\left|\left(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),\omega\right)\right|$$

$$\leq \frac{k\mu_0}{4}\ e^{\lambda mt}\ \|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + k\frac{\mu_1}{4}\ e^{\lambda pt}\ \|v\|_{p+2}^{p+2} + ke^{-2\lambda t}L^2(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu_1})\|\omega\|^2 \qquad (4.74)$$

bulunur.

$ke^{-\lambda t}\int_0^t g(t-\tau)(\nabla v(\tau),\nabla\omega)d\tau$ ifadesi için

$= ke^{-\lambda t} \int_0^t g(t-\tau) \int_\Omega \nabla v(\tau) \nabla \omega dx d\tau$

$= ke^{-\lambda t} \int_\Omega \nabla \omega dx \; \int_\Omega \int_0^t g_1\,(t-\tau) \nabla u(\tau) d\tau \, dx$

olarak yazılan eşitlikte $q = q' = 2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$ke^{-\lambda t} \int_0^t g(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla \omega) d\tau$

$\leq ke^{-\lambda t} (\int_\Omega |\nabla \omega|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \; \left(\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) \nabla v(\tau) d\tau \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$

olur. Üstteki eşitsizlikte $q = q' = 2$ olacak şekilde $\varepsilon -$Young eşitsizliği uygulanırsa

$ke^{-\lambda t} \int_0^t g(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla \omega) d\tau$

$$\leq \frac{1}{2} (ke^{-\lambda t})^2 \|\nabla \omega\|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) \nabla v(\tau) d\tau \right)^2 dx \qquad (4.75)$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin son teriminde üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$|a+b| \leq |a| + |b|$ den

$|\nabla v(\tau)| = |\nabla v(\tau) - \nabla v(t) + \nabla v(t)|$

$|\nabla v(\tau)| \leq |\nabla v(\tau) - \nabla v(t)| + |\nabla v(t)|$

olarak yazılabilir. Üstteki eşitsizlik (4.75) eşitsizliğinde uygulanırsa

$ke^{-\lambda t} \int_0^t g(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla \omega) d\tau \leq \frac{1}{2} (ke^{-\lambda t})^2 \|\nabla \omega\|^2$

$$+ \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)(|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)| + |\nabla v(t)|) d\tau \right)^2 dx \qquad (4.76)$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte düzenleme yapılırsa

$ke^{-\lambda t} \int_0^t g(t-\tau)(\nabla v(\tau), \nabla \omega) d\tau \leq \frac{1}{2} (ke^{-\lambda t})^2 \|\nabla \omega\|^2$

$$+ \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau) |\nabla v(\tau) - \nabla v(t)| d\tau + \int_0^t g(t-\tau)\, |\nabla v(t)| d\tau \right)^2 dx \qquad (4.77)$$

olur. Üstteki eşitsizliğin son teriminde Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$ den

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau + \int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau \right)^2 dx$$

$$\leq \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau \right)^2 dx + \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau \right)^2 dx$$

$$+2\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau \right) dx \qquad (4.78)$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin son teriminde

$a_1 = \int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau,\ b = \int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau$

$q = q' = 2,\ \ \varepsilon = (\frac{1-l}{l})^{\frac{1}{2}}$ olacak şekilde ε −Young eşitsizliği uygulanırsa

$$2\left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau \right)$$

$$= 2\left((\tfrac{1-l}{l})^{\frac{1}{2}} \int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau\, (\tfrac{l}{1-l})^{\frac{1}{2}} \int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau \right)$$

$$\leq \left(\frac{1-l}{l}\right) \left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau \right)^2 + \frac{l}{1-l} \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau \right)^2 \qquad (4.79)$$

olur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı Ω bölgesinde integre edilirse

$$2\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau \right) \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau \right) dx$$

$$\leq \left(\frac{1-l}{l}\right) \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau \right)^2 dx$$

$$+ \frac{l}{1-l} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau \right)^2 dx \qquad (4.80)$$

bulunur. Üstteki eşitsizlik (4.78) in son teriminde yerine yazılırsa

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)(|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)| + |\nabla v(t)|)d\tau \right)^2 dx$$

$$\leq \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau \right)^2 dx + \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau \right)^2 dx$$

$$\left(\frac{1-l}{l}\right) \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau) - \nabla v(t)|d\tau \right)^2 dx + \frac{l}{1-l} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau \right)^2 dx$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizlikte düzenleme yapılırsa

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)(|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|+|\nabla v(t)|)d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{l}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$+\frac{1}{1-l}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx \tag{4.81}$$

olur. Üstteki eşitliğin son teriminde $t-\tau=s$ değişken değişimi yapılırsa

$$\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau = |\nabla v(t)|\int_0^t g(t-\tau)\,d\tau$$

$$= |\nabla v(t)|\int_0^t g(s)\,ds$$

bulunur. Üstteki eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$$\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 = |\nabla v(t)|^2\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)^2$$

olarak yazılır. Üstteki eşitliğin her iki tarafı Ω bölgesinde integre edilip $\frac{1}{1-l}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{1-l}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx = \frac{1}{1-l}|\nabla v(t)|^2\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)^2 \tag{4.82}$$

olur.

$\left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2$ terimi çarpanlara ayrılıp Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left(\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2$$

$$= \left(\int_0^t \left(g(t-\tau)\right)^{\frac{1}{2}}\left(g(t-\tau)\right)^{\frac{1}{2}}|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2$$

$$\leq \int_0^t g(s)\,ds\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 d\tau$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı Ω bölgesinde integre edilip $\frac{1}{l}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{l}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{l}\int_{\Omega}\int_0^t g(s)\,ds\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 d\tau\,dx \tag{4.83}$$

olur. Üstteki eşitsizliğin soluna (4.82) eşitliğinin solundaki terim, sağına da (4.82) eşitliğinin sağındaki terim eklenirse

$$\frac{1}{1-l}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx+\frac{1}{l}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{l}\int_{\Omega}\int_0^t g(s)\,ds\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 d\tau\,dx$$

$$+\frac{1}{1-l}|\nabla v(t)|^2\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)^2$$

bulunur. Üstteki eşitsizlik düzenlendiğinde

$$\frac{1}{1-l}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx+\frac{1}{l}\int_{\Omega}\left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{l}\int_0^t g(s)\,ds\int_{\Omega}\int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 d\tau\,dx$$

$$+\frac{1}{1-l}\|\nabla v(t)\|^2\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)^2 \tag{4.84}$$

olur. Sistemin enerjisinde kullanılan

$$(g_1 * v)(t)=\int_0^t g_1\,(t-s)\|v(t)-v(s)\|^2 ds$$

eşitliğinde v yerine, ∇v ve s yerine τ yazılırsa

$$(g * \nabla v)(t)=\int_0^t g\,(t-\tau)\|\nabla v(t)-\nabla v(\tau)\|^2 d\tau$$

$$(g * \nabla v)(t)=\int_{\Omega}\int_0^t g\,(t-\tau)|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 d\tau\,dx \tag{4.85}$$

olarak yazılır. (3.20)-(3.21) den

$$\int_0^t g(s)ds\leq\int_0^{\infty} g(s)ds$$

$$\int_0^t g(s)ds\leq 1-l \tag{4.86}$$

olur. (4.85) ve (4.86), (4.84) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{1-l}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx + \frac{1}{l}\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)\,|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq \frac{1-l}{l}(g * \nabla v)(t) + \frac{1}{1-l}\|\nabla v(t)\|^2(1-l)^2$$

bulunur. Üstteki eşitsizliğin sol tarafı (4.81) eşitsizliğinin sağ tarafı olduğu için

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-\tau)(|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)| + |\nabla v(t)|)d\tau\right)^2 dx$$

$$\leq (1-l)\,\|\nabla v(t)\|^2 + \frac{1-l}{l}(g * \nabla v)(t) \tag{4.87}$$

olur. (4.77) eşitsizliğinin en sağındaki terim (4.87) nin ilk terimi olduğundan (4.87) (4.77) de yerine yazılırsa

$$ke^{-\lambda t}\int_0^t g(t-\tau)(\nabla v(\tau),\nabla\omega)d\tau$$

$$\leq \frac{(ke^{-\lambda t})^2\|\nabla\omega\|^2}{2} + \frac{1-l}{2}\|\nabla v(t)\|^2 + \frac{1-l}{2l}(g * \nabla v)(t) \tag{4.88}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte $a \leq |a|$ eşitsizliğinden

$$ke^{-\lambda t}\int_0^t g(t-\tau)|(\nabla v(\tau),\nabla\omega)|d\tau \leq \frac{1-l}{2}\|\nabla v(t)\|^2 + \frac{1-l}{2l}(g * \nabla v)(t)$$

$$+\frac{k^2e^{-2\lambda t}}{2}\|\nabla\omega\|^2 \tag{4.89}$$

olarak yazılır.

$ke^{\lambda(p-1)t}|(|v|^p v,\omega)|$ ifadesi için $q = \frac{p+2}{p+1}$, $q' = p+2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$ke^{\lambda(p-1)t}|(|v|^p v,\omega)| \leq ke^{\lambda(p-1)t}\left(\int_\Omega |v|^{p+1(\frac{p+2}{p+1})}dx\right)^{\frac{p+1}{p+2}} \left(\int_\Omega |\omega|^{p+2}dx\right)^{\frac{1}{p+2}}$$

$$\leq ke^{\lambda(p-1)t}\|v\|_{p+2}^{p+1}\|\omega\|_{p+2}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte $e^{\lambda(p-1)t} = e^{\lambda pt(\frac{p+1}{p+2})}e^{\frac{-2\lambda t}{p+2}}$ şeklinde çarpanlarına ayrılırsa

$$ke^{\lambda(p-1)t}|(|v|^p v,\omega)| \le e^{\lambda pt(\frac{p+1}{p+2})}\|v\|_{p+2}^{p+1} ke^{\frac{-2\lambda t}{p+2}}\|\omega\|_{p+2}$$

olur. Üstteki eşitsizliğin sağındaki terim $\left(\frac{\mu_1(p+2)}{2(p+1)}\right)^{\frac{p+1}{p+2}}$ ile çarpılıp bölünürse

$$ke^{\lambda(p-1)t}|(|v|^p v,\omega)| \le \left(\frac{\mu_1(p+2)}{2(p+1)}\right)^{\frac{p+1}{p+2}} \; e^{\lambda pt(\frac{p+1}{p+2})}\|v\|_{p+2}^{p+1} \frac{ke^{\frac{-2\lambda t}{p+2}}\|\omega\|_{p+2}}{\left(\frac{\mu_1(p+2)}{2(p+1)}\right)^{\frac{p+1}{p+2}}}$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizlikte $q=\frac{p+2}{p+1}$, $q'=p+2$, $\varepsilon=\left(\frac{\mu_1(p+2)}{2(p+1)}\right)^{\frac{p+1}{p+2}}$ için ε −Young eşitsizliği uygulanırsa

$$ke^{\lambda(p-1)t}|(|v|^p v,\omega)| \le \frac{\left(\left(\frac{\mu_1(p+2)}{2(p+1)}\right)^{\frac{p+1}{p+2}} \; e^{\lambda pt\left(\frac{p+1}{p+2}\right)}\|v\|_{p+2}^{p+1}\right)^{\frac{p+2}{p+1}}}{\frac{p+2}{p+1}} + \frac{1}{p+2}\left(\frac{ke^{\frac{-2\lambda t}{p+2}}\|\omega\|_{p+2}}{\left(\frac{\mu_1(p+2)}{2(p+1)}\right)^{\frac{p+1}{p+2}}}\right)^{p+2}$$

olur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$ke^{\lambda(p-1)t}|(|v|^p v,\omega)| \le \frac{\mu_1}{2}e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{k^{p+2}e^{-2\lambda t}}{(p+2)\left(\frac{\mu_1(p+2)}{2p+2}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2} \quad (4.90)$$

(4.71) de $|a|\le b$ ise $a\ge -b$ den

$$e^{-\lambda t}(\hat{h}\left(t,e^{\lambda t}v\right),v) \ge \frac{-\mu_0}{4}\; e^{\lambda mt}\;\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} - \frac{\mu_1}{4}\; e^{\lambda pt}\;\|v\|_{p+2}^{p+2} - L^2\left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu_1}\right)\|v\|^2 \quad (4.91)$$

olur. (4.72) de $|a|\le b$ ise $a\ge -b$ den

$$ke^{-\lambda t}|(\nabla v,\nabla\omega)| \ge -\frac{(p+m)l}{8}\|\nabla v\|^2 - \frac{2k^2e^{-2\lambda t}}{(p+m)l}\|\nabla\omega\|^2 \quad (4.92)$$

bulunur. Benzer şekilde (4.73) ten

$$ke^{\lambda(m-1)t}(|\nabla v|^m\nabla v,\nabla\omega)$$

$$\ge -\frac{\mu_0}{2}e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} - \frac{k^{m+2}e^{-2\lambda t}}{(m+2)\left(\frac{\mu_0(m+2)}{2m+2}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2} \quad (4.93)$$

olur. (4.74) ten

$$ke^{-\lambda t}\left|\left(\hat{h}\left(t, e^{\lambda t}v\right), \omega\right)\right|$$

$$\geq -\frac{k\mu_0}{4}\, e^{\lambda mt}\, \|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} - k\frac{\mu_1}{4}\, e^{\lambda pt}\, \|v\|_{p+2}^{p+2} - ke^{-2\lambda t}L^2\left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu_1}\right)\|\omega\|^2 \tag{4.94}$$

olarak yazılır. (4.89) dan

$$ke^{-\lambda t}\int_0^t g(t-\tau)|(\nabla v(\tau), \nabla\omega)|d\tau$$

$$\geq -\frac{1-l}{2}\|\nabla v(t)\|^2 - \frac{1-l}{2l}(g * \nabla v)(t) - \frac{k^2e^{-2\lambda t}}{2}\|\nabla\omega\|^2 \tag{4.95}$$

bulunur. (4.90) dan

$$ke^{\lambda(p-1)t}|(|v|^p v, \omega)|$$

$$\geq -\frac{\mu_1}{2}e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} - \frac{k^{p+2}e^{-2\lambda t}}{(p+2)\left(\frac{\mu_1(p+2)}{2p+2}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2} \tag{4.96}$$

olur. (4.70) ten

$$\int_0^t g(t-\tau)|(\nabla v(\tau), \nabla v(t))|\, d\tau \geq -\left(1-\frac{l}{2}\right)\|\nabla v(t)\|^2 - \frac{1-l}{2l}(g * \nabla v)(t) \tag{4.97}$$

(4.91)-(4.97) eşitsizlikleri (4.55) te yerine yazılırsa

$$(v_{tt}, v) \geq -(2\lambda+1)(v_t, v) - (\lambda^2+\lambda)\|v\|^2 - \|\nabla v\|^2 + \alpha\|v\|_{\Gamma_1}^2 - e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$-\left(1-\frac{l}{2}\right)\|\nabla v(t)\|^2 - \frac{1-l}{2l}(g * \nabla v)(t) + e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} - \frac{k\mu_0}{4}\, e^{\lambda mt}\, \|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$-k\frac{\mu_1}{4}\, e^{\lambda pt}\, \|v\|_{p+2}^{p+2} - ke^{-2\lambda t}L^2\left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu_1}\right)\|\omega\|^2 - \frac{(p+m)l}{8}\|\nabla v\|^2 - \frac{2k^2e^{-2\lambda t}}{(p+m)l}\|\nabla\omega\|^2$$

$$\frac{-\mu_0}{4}\, e^{\lambda mt}\, \|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} - \frac{\mu_1}{4}\, e^{\lambda pt}\, \|v\|_{p+2}^{p+2} - L^2\left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu_1}\right)\|v\|^2 - \frac{\mu_0}{2}e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$-\frac{k^{m+2}e^{-2\lambda t}}{(m+2)\left(\frac{\mu_0(m+2)}{2m+2}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2} - \frac{1-l}{2}\|\nabla v(t)\|^2 - \frac{1-l}{2l}(g * \nabla v)(t) - \frac{k^2e^{-2\lambda t}}{2}\|\nabla\omega\|^2$$

$$-\frac{\mu_1}{2}e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} - \frac{k^{p+2}e^{-2\lambda t}}{(p+2)\left(\frac{\mu_1(p+2)}{2p+2}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2} \tag{4.98}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$(v_{tt}, v) \geq -(2\lambda+1)(v_t, v) - (\lambda^2+\lambda)\|v\|^2 - \left(\frac{(p+m)l}{8} + \frac{5}{2} - l\right)\|\nabla v\|^2 + \alpha\|v\|_{\Gamma_1}^2$$

$$-(\frac{3\mu_0}{4} + \frac{k\mu_0}{4} + 1)e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} - \frac{1-l}{l}(g * \nabla v)(t) - (\frac{3\mu_1}{4} + \frac{k\mu_1}{4} - 1)e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}$$

$$-\Bigg[(\frac{k^2}{2} + \frac{2k^2}{(p+m)l})\|\nabla\omega\|^2 + kL^2\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_1}\right)\|\nabla\omega\|^2 + \frac{k^{m+2}}{(m+2)\left(\frac{\mu_0(m+2)}{2m+2}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2}$$

$$+\frac{k^{p+2}}{(p+2)\left(\frac{\mu_1(p+2)}{2p+2}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2}\Bigg]e^{-2\lambda t} \tag{4.99}$$

bulunur. Üstteki eşitsizlikte $\mu_0 = \frac{p-m}{2m+4}$ ve $\mu_1 = \frac{p-m}{2p+4}$ olarak yazılırsa

$$(v_{tt}, v) \geq -(2\lambda+1)(v_t, v) - \left(\lambda^2 + \lambda + L^2\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_1}\right)\right)\|v\|^2$$

$$-\left(\frac{(p+m)l}{8} + \frac{5}{2} - l\right)\|\nabla v\|^2 + \alpha\|v\|_{\Gamma_1}^2 - (\frac{3\mu_0}{4} + \frac{k\mu_0}{4} + 1)e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$-\frac{1-l}{l}(g * \nabla v)(t) - (\frac{3\mu_1}{4} + \frac{k\mu_1}{4} - 1)e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}$$

$$-\Bigg[\frac{k^2(4+l(p+m))}{2l(p+m)}\|\nabla\omega\|^2 + \left(\frac{2kL^2(p+m+4)}{p-m}\right)\|\omega\|^2 + \frac{k^{m+2}}{(m+2)\left(\frac{(p-m)}{4m+4}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2}$$

$$+\frac{k^{p+2}}{(p+2)\left(\frac{(p-m)}{4p+4}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2}\Bigg]e^{-2\lambda t} \tag{4.100}$$

olur. Üstteki eşitsizlikte son terimde $e^{-2\lambda t} > 0$ ve

$$D_2 = \frac{k^2(4+l(p+m))}{2l(p+m)}\|\nabla\omega\|^2 + \left(\frac{2kL^2(p+m+4)}{p-m}\right)\|\omega\|^2 + \frac{k^{m+2}}{(m+2)\left(\frac{(p-m)}{4m+4}\right)^{m+1}}\|\nabla\omega\|_{m+2}^{m+2}$$

$$+\frac{k^{p+2}}{(p+2)\left(\frac{(p-m)}{4p+4}\right)^{p+1}}\|\omega\|_{p+2}^{p+2}$$

alınırsa

$$(v_{tt}, v) \geq -(2\lambda+1)(v_t, v) - \left(\lambda^2 + \lambda + L^2\left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_1}\right)\right)\|v\|^2$$

$$-\left(\frac{(p+m)l}{8} + \frac{5}{2} - l\right)\|\nabla v\|^2 + \alpha\|v\|_{\Gamma_1}^2 - \left(\frac{3\mu_0}{4} + \frac{k\mu_0}{4} + 1\right)e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$-\frac{1-l}{l}(g * \nabla v)(t) - \left(\frac{3\mu_1}{4} + \frac{k\mu_1}{4} - 1\right)e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} - D_2 \qquad (4.101)$$

bulunur.

(3.76) ve (3.77) den

$$E_\lambda(t) = \frac{e^{\lambda pt}}{p+2}\|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{\alpha}{2}\|v\|_{\Gamma_1}^2 - \frac{1}{2}\|v_t\|^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}\|v\|^2$$

$$-\frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla v(t)\|^2 - \frac{1}{2}(g * \nabla v)(t) - \frac{e^{\lambda mt}}{m+2}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} \qquad (4.102)$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizlik $\frac{p+m+4}{2}$ ile çarpılırsa

$$\frac{p+m+4}{2}E_\lambda(t) = \frac{p+m+4}{2p+4}\, e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{\alpha}{4}(p+m+4)\|v\|_{\Gamma_1}^2 - \frac{p+m+4}{4}\|v_t\|^2$$

$$-\frac{\lambda(\lambda+1)(p+m+4)}{4}\|v\|^2 - \frac{p+m+4}{4}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla v(t)\|^2 - \frac{p+m+4}{4}(g * \nabla v)(t)$$

$$-\frac{p+m+4}{2m+4}\, e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

olur. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$\frac{p+m+4}{2}E_\lambda(t) + \frac{\lambda(\lambda+1)(p+m+4)}{4}\|v\|^2 - \frac{\alpha}{4}(p+m+4)\|v\|_{\Gamma_1}^2$$

$$+\frac{p+m+4}{2m+4}\, e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{p+m+4}{4}(g * \nabla v)(t) - \frac{p+m+4}{2p+4}\, e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2} + \frac{p+m+4}{4}\|v_t\|^2$$

$$+\frac{p+m+4}{4}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla v(t)\|^2 = 0$$

bulunur. Üstteki eşitlik (4.101) in sağına eklenirse

$$(v_{tt}, v) \geq \frac{p+m+4}{2}E_\lambda(t) + \frac{\lambda(\lambda+1)(p+m+4)}{4}\|v\|^2 - \frac{\alpha}{4}(p+m+4)\|v\|_{\Gamma_1}^2$$

$$+\frac{p+m+4}{2m+4}\, e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2} + \frac{p+m+4}{4}(g * \nabla v)(t) - \frac{p+m+4}{2p+4}\, e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}$$

$$+\frac{p+m+4}{4}\|v_t\|^2-(2\lambda+1)(v_t,v)-\left(\lambda^2+\lambda+L^2\left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu_1}\right)\right)\|v\|^2$$

$$-\left(\frac{(p+m)l}{8}+\frac{5}{2}-l\right)\|\nabla v\|^2+\alpha\|v\|_{\Gamma_1}^2-\left(\frac{3\mu_0}{4}+\frac{k\mu_0}{4}+1\right)e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$-\frac{1-l}{l}(g*\nabla v)(t)-\left(\frac{3\mu_1}{4}+\frac{k\mu_1}{4}-1\right)e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}-D_2$$

$$+\frac{p+m+4}{4}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla v(t)\|^2 \tag{4.103}$$

$g_1(s)=e^{\lambda s}g(s)$ eşitliği, (3.20) ve (3.21) den

$$\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla v(t)\|^2\geq 0$$

olarak yazılır. Dolayısıyla (4.103) ün son terimi

$$\frac{p+m+4}{4}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla v(t)\|^2\geq 0 \tag{4.104}$$

olur. (4.103) ve (4.104) ten

$$(v_{tt},v)\geq\frac{p+m+4}{2}E_\lambda(t)-(2\lambda+1)(v_t,v)$$

$$-\left(\lambda^2+\lambda+L^2\left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu_1}\right)-\frac{\lambda(\lambda+1)(p+m+4)}{4}\right)\|v\|^2-\left(\frac{(p+m)l}{8}+\frac{5}{2}-l\right)\|\nabla v\|^2$$

$$-\frac{\alpha(p+m)}{4}\|v\|_{\Gamma_1}^2-\left(\frac{3\mu_0}{4}+\frac{k\mu_0}{4}+1-\frac{p+m+4}{2m+4}\right)e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$+\left(\frac{p+m+4}{4}-\frac{1-l}{l}\right)(g*\nabla v)(t)--\left(\frac{3\mu_1}{4}+\frac{k\mu_1}{4}-1+\frac{p+m+4}{2p+4}\right)e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}$$

$$+\frac{p+m+4}{4}\|v_t\|^2-D_2 \tag{4.105}$$

bulunur.

$\|u\|_{q,\Gamma_1}\leq\beta_q\|\nabla u\|_2$ şeklindeki Sobolev-Poincare eşitsizliğinde $q=2$ alınır ve $v(x,t)=e^{-\lambda t}u(x,t)$ dönüşümü kullanılırsa

$$-\|v\|_{\Gamma_1}^2\geq-{\beta_2}^2\|\nabla v\|^2$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{\alpha(p+m)}{4}$ ile çarpılırsa

$$-\frac{\alpha(p+m)}{4}\|v\|_{\Gamma_1}^2 \geq -\frac{\alpha{\beta_2}^2(p+m)}{4}\|\nabla v\|^2$$

olur. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafına $-\left(\frac{(p+m)l}{8}+\frac{5}{2}-l\right)\|\nabla v\|^2$ eklenirse

$$-\left(\frac{(p+m)l}{8}+\frac{5}{2}-l\right)\|\nabla v\|^2-\frac{\alpha(p+m)}{4}\|v\|_{\Gamma_1}^2$$

$$\geq -\left(\frac{\alpha{\beta_2}^2(p+m)}{4}+\frac{(p+m)l}{8}+\frac{5}{2}-l\right)\|\nabla v\|^2 \tag{4.106}$$

bulunur. (4.105) ve (4.106) dan

$$(v_{tt},v) \geq \frac{p+m+4}{2}E_\lambda(t)-(2\lambda+1)(v_t,v)-D_2$$

$$-\left(\lambda^2+\lambda+L^2\left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu_1}\right)-\frac{\lambda(\lambda+1)(p+m+4)}{4}\right)\|v\|^2$$

$$-\left(\frac{\alpha{\beta_2}^2(p+m)}{4}+\frac{(p+m)l}{8}+\frac{5}{2}-l\right)\|\nabla v\|^2-\left(\frac{3\mu_0}{4}+\frac{k\mu_0}{4}+1-\frac{p+m+4}{2m+4}\right)e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}$$

$$+\left(\frac{p+m+4}{4}-\frac{1-l}{l}\right)(g*\nabla v)(t)-\left(\frac{3\mu_1}{4}+\frac{k\mu_1}{4}+\frac{p+m+4}{2p+4}-1\right)e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}$$

$$+\frac{p+m+4}{4}\|v_t\|^2 \tag{4.107}$$

olur. Üstteki eşitsizlikte $k \leq -1$ alınırsa

$$(v_{tt},v) \geq \frac{p+m+4}{2}E_\lambda(t)-(2\lambda+1)(v_t,v)$$

$$-\left(\lambda^2+\lambda+L^2\left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu_1}\right)-\frac{\lambda(\lambda+1)(p+m+4)}{4}\right)\|v\|^2$$

$$-\left(\frac{\alpha{\beta_2}^2(p+m)}{4}+\frac{(p+m)l}{8}+\frac{5}{2}-l\right)\|\nabla v\|^2$$

$$-\left(\mu_0+1-\frac{p+m+4}{2m+4}\right)e^{\lambda mt}\|\nabla v\|_{m+2}^{m+2}+\left(\frac{p+m+4}{4}-\frac{1-l}{l}\right)(g*\nabla v)(t)$$

$$-\left(\mu_1+\frac{p+m+4}{2p+4}-1\right)e^{\lambda pt}\|v\|_{p+2}^{p+2}+\frac{p+m+4}{4}\|v_t\|^2-D_2 \tag{4.108}$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizlikte $\mu_0=\frac{p-m}{2m+4}$ ve $\mu_1=\frac{p-m}{2p+4}$ $p>m\geq 2$ alınırsa ve

$$(v_{tt},v) \geq \frac{p+m+4}{2}E_\lambda(t)-(2\lambda+1)(v_t,v)$$

$$-\left(\lambda^2+\lambda+L^2\left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu_1}\right)-\frac{\lambda(\lambda+1)(p+m+4)}{4}\right)\|v\|^2$$

$$-\left(\frac{\alpha{\beta_2}^2(p+m)}{4}+\frac{(p+m)l}{8}+\frac{5}{2}-l\right)\|\nabla v\|^2+\left(\frac{p+m+4}{4}-\frac{1-l}{l}\right)(g*\nabla v)(t)$$

$$+\frac{p+m+4}{4}\|v_t\|^2-D_2 \tag{4.109}$$

bulunur.

$\|v\|^2$ nin katsayısı olan

$$\lambda^2+\lambda+L^2\left(\frac{1}{\mu_0}+\frac{1}{\mu_1}\right)-\frac{\lambda(\lambda+1)(p+m+4)}{4}$$

ifadesinde $\mu_0=\frac{p-m}{2m+4}$ ve $\mu_1=\frac{p-m}{2p+4}$ olarak yazılırsa

$$\lambda^2+\lambda+L^2\left(\frac{2m+4}{p-m}+\frac{2p+4}{p-m}\right)-\frac{\lambda(\lambda+1)(p+m+4)}{4}$$

olur. Üstteki eşitlik düzenlenirse

$$\frac{p+m}{4}\lambda^2+\frac{p+m}{4}\lambda-\frac{2L^2}{p-m}(p+m+4)$$

bulunur. Böylece $\|v\|^2$ nin katsayısının maksimum kökü λ_1 olmak üzere

$$\frac{p+m}{4}\lambda^2+\frac{p+m}{4}\lambda-\frac{2L^2}{p-m}(p+m+4)=0 \tag{4.110}$$

alınır.

$\|\nabla v\|^2$ nin katsayısı için

$$\frac{\alpha{\beta_2}^2(p+m)}{4}+\frac{(p+m)l}{8}+\frac{5}{2}-l=0$$

eşitliği düzenlenirse

$$2\alpha{\beta_2}^2(p+m)+(p+m-8)l+20=0$$

ve

$$1-l=\frac{p+m+12+2\alpha{\beta_2}^2(p+m)}{p+m-8} \tag{4.111}$$

(3.20) ve (3.21) den

$$\int_0^{\infty} g(s)ds \leq 1 - l \tag{4.112}$$

olur. (4.111) ve (4.112) den

$$\int_0^{\infty} g(s)ds \leq \frac{p+m+12+2\alpha{\beta_2}^2(p+m)}{p+m-8} \tag{4.113}$$

bulunur.

$(g * \nabla v)(t)$ ifadesinin katsayısı için

$$\frac{p+m+4}{4} - \frac{1-l}{l} = 0$$

eşitliği düzenlenirse

$$1 - l = \frac{p+m+4}{p+m+8} \tag{4.114}$$

olur. (4.112) ve (4.114) ten

$$\int_0^{\infty} g(s)ds \leq \frac{p+m+4}{p+m+8} \tag{4.115}$$

bulunur. (4.111) in sağındaki

$$\frac{p+m+12+2\alpha{\beta_2}^2(p+m)}{p+m-8} = 0$$

eşitliğinin kökü

$$\alpha = -\frac{p+m+12}{2{\beta_2}^2(p+m)} \tag{4.116}$$

olur. (4.109) da (4.110)-(4.116) eşitsizliklerinden

$$\lambda > \lambda_1,\ \alpha \leq -\frac{p+m+12}{2{\beta_2}^2(p+m)}, \int_0^{\infty} g(s)ds \leq \min\left\{\frac{p+m+4}{p+m+8}, \frac{p+m+12+2\alpha{\beta_2}^2(p+m)}{p+m-8}\right\}$$

alınırsa

$$(v_{tt}, v) \geq \frac{p+m+4}{2} E_\lambda(t) + \frac{p+m+4}{4} \|v_t\|^2 - (2\lambda+1)(v_t, v) - D_2 \tag{4.117}$$

bulunur. (4.3) ve Lemma 4.1. den

$$E_\lambda(t) \geq \frac{2(D_1+\lambda D_2)}{\lambda(p+m+4)} - \frac{2D_1}{\lambda(p+m+4)}$$

olur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$\frac{p+m+4}{2} E_\lambda(t) - D_2 \geq 0 \tag{4.118}$$

bulunur. (4.117) ve (4.118) den

$$(v_{tt}, v) \geq \frac{p+m+4}{4} \|v_t\|^2 - (2\lambda+1)(v_t, v) \tag{4.119}$$

olarak yazılır. (4.43) ten

$$(v_{tt}, v) = \frac{\psi''(t) - 2\|v_t\|^2}{2} \tag{4.120}$$

olur. (4.42) eşitliğinin her iki tarafının karesi alınırsa

$$(\psi'(t))^2 = 4\left(\int_\Omega v v_t dx\right)^2 \tag{4.121}$$

bulunur.

$\int_\Omega v v_t dx$ ifadesinde $q = q' = 2$ olacak şekilde Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_\Omega v v_t dx \leq \left(\int_\Omega v^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega {v_t}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde yazılır.Üstteki eşitsizliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$$\left(\int_\Omega v v_t dx\right)^2 \leq \int_\Omega v^2 dx \int_\Omega {v_t}^2 dx \tag{4.122}$$

olur. (4.121) ve (4.122) den

$$4\|v_t\|^2 \|v\|^2 \geq (\psi'(t))^2 \tag{4.123}$$

bulunur. (4.119), (4.42) ve (4.120) den

$$\frac{\psi''(t) - 2\|v_t\|^2}{2} \geq \frac{p+m+4}{4} \|v_t\|^2 - (2\lambda+1)\frac{\psi'(t)}{2}$$

olur. Üstteki eşitsizlik düzenlenirse

$$\psi''(t) \geq 4\left(1+\frac{p+m}{8}\right)\|v_t\|^2 - (2\lambda+1)\psi'(t) \tag{4.124}$$

olarak yazılır. Üstteki eşitsizliğin her iki tarafı $\psi(t)$ ile çarpılırsa

$$\psi''(t)\psi(t) \geq 4\left(1+\frac{p+m}{8}\right)\|v_t\|^2\psi(t) - (2\lambda+1)\psi'(t)\psi(t) \tag{4.125}$$

olur. (4.125) ve (4.41) den

$$\psi''(t)\psi(t) \geq \left(1+\frac{p+m}{8}\right)4\|v_t\|^2\|v(t)\|^2 - (2\lambda+1)\psi'(t)\psi(t)$$

olarak yazılır. Üsteki eşitsizlikte (4.123) ten

$$\psi''(t)\psi(t) \geq \left(1+\frac{p+m}{8}\right)(\psi'(t))^2 - (2\lambda+1)\psi'(t)\psi(t) \tag{4.126}$$

bulunur. Üsteki eşitsizlikte $\gamma = \frac{p+m}{8}$, $c_1 = \frac{2\lambda+1}{2}$ ve $c_2 = 0$ alınırsa

$$\psi''(t)\psi(t) - (1+\gamma)(\psi'(t))^2 \geq -2c_1\,\psi(t)\psi'(t) - c_2\,\psi^2(t)$$

elde edilir. Böylece Genelleştirilmiş Konkav Lemması sağlanmış olur. Bu durum da (3.1)-(3.4) hafıza terimli lineer olmayan hiperbolik tipten ters probleminin çözümlerinin sonlu zamanda patladığı anlamına gelir.

Böylelikle teoremin ispatı tamamlanmış olur.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında [8] nolu kaynakçada belirtilen problem ayrıntılı biçimde çalışılmış olup belli koşullar altında hafıza terimi içeren hiperbolik tipten lineer olmayan ters problemin çözümlerinin sonlu zamanda patladığı görülmüştür. Aynı zamanda çözümlerin uygun koşullar altında $t \to \infty$ iken sıfıra yaklaştığı yani asimptotik kararlılığı incelenmiştir.

Bu sonuçların elde edilebilmesi için hangi uygun koşulların konulması gerektiği incelenmiştir.

Farklı koşullar altında buna benzer problemlerde çözümlerin asimptotik davranışı ve çözümlerin patlaması araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Adams,R.A., " Sobolev Spaces", Academic Press, N.Y., 1975.

[2] Prilepko, A.I., Orlovsky, D.G., Vasin, I.A. , "Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics", Marcel Dekker, Inc., 1999.

[3] Tunç, D., Parabolik Denklem için Ters Problem Üzerine Bir Çalışma. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2009.

[4] Messaoudi, S.A., Blow-up of positive-initial-energy solutions of a nonlinear viscoelastic hyperbolic equation. J. Math. Anal. Appl., 320, 902-915 2006.

[5] Yu SQ., On the strongly damped wave equation with nonlinear damping and source terms. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 39:1-18 2009.

[6] Tahamtani, F., Shahrouzi, M., Asymptotic stability and blow up of solutions for a Petrovsky inverse source problem with dissipative boundary condition, Math. Meth. Appl. Sci., 2013, 36 829-839.

[7] Shahrouzi, M., On the Petrovsky inverse problem with memory term and nonlinear boundary feedback, IJTS, 39A1, 1-6, 2015.

[8] Shahrouzi, M., On behavior of solutions to a class of nonlinear hyperbolic inverse source problem. Acta Mathematica Sinica, English Series, 6, 683-698 2016.

[9] Pişkin, E., Sobolev Uzayları (Eşitsizlikler, L_p Uzayları, Zayıf Türev). Seçkin Yayınları, Ankara, 2017.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Mersin'de doğdu. Lise öğrenimini Karaman Bifa Lisesinde 2003 yılında tamamladıktan sonra 2003 yılında Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde eğitime başlayıp 2007 yılında mezun oldu. 2008 yılında Sakarya Üniversitesi Eğitim Fakültesinde Matematik Öğretmenliği Bölümünde Tezsiz yüksek Lisans eğitimine başladı. 2009 yılında eğitimini tamamladı. 2012 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2007-2020 yılları arasında özel eğitim kurumlarında matematik öğretmeni olarak görev yapmıştır. Halen Adıyaman'da bir devlet okulunda çalışmaktadır.