T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ Q MATRİSLERİNİN LİNEER BİLEŞİMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aslı ÖNDÜL

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**UYGULAMALI MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR**

Eylül 2020

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Aslı ÖNDÜL

09.09.2020

TEŞEKKÜR

Lisansüstü öğrenimim süresince bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans tez çalışması boyunca yardımlarını esirgemeyen Sayın Arş. Gör. Dr. Tuğba PETİK'e teşekkür ederim.

Özellikle, eğitimim ve öğrenimim süresince maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz sevgi ve minnettarlığımı belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR i

İÇİNDEKİLER ii

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ iv

ÖZET v

SUMMARY vi

BÖLÜM 1.

ÖN BİLGİLER 1

1.1. Giriş 1

1.2. Matris Cebiri ile İlgili Bazı Kavram ve Özellikler 1

1.3. Doğrusal Denklem Sistemleri Üzerine Bazı Kavram ve Özellikler 5

BÖLÜM 2.

FİBONACCİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYILARI 8

2.1. Giriş 8

2.2. Fibonacci Sayıları, Altın Oran ve Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları 10

2.3. Fibonacci Sayıları, Altın Oran ve Genelleştirilmiş Fibonacci Sayılarının Bazı Özellikleri 11

2.4. Fibonacci ve Genelleştirilmiş Fibonacci Sayılarının Matrislerle İlişkisi 14

BÖLÜM 3.

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ Q MATRİSLERİNİN LİNEER BİLEŞİMLERİ 16

3.1. Giriş 16

3.2. Ön Bilgiler 16

3.3. $c_1 Q_{g(a_1,b_1)}^{(n)} + c_2 Q_{g(a_2,b_2)}^{(m)} = Q_{g(a_3,b_3)}^{(k)}$ Matris Denkleminin Çözümleri............ 17

BÖLÜM 4.
TARTIŞMA VE ÖNERİLER 58

KAYNAKLAR 60
ÖZGEÇMİŞ 62

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{R}^*$: Sıfırdan farklı reel sayılar kümesi; $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\mathbb{C}$:Kompleks sayılar kümesi

$\mathbb{R}^n$: n boyutlu reel vektörler kümesi

u : u vektörü

$|A|$: A matrisinin determinantı

$[A \mid \mathbf{b}]$: Katsayılar matrisi A, sabitler vektörü $\mathbf{b}$ olan doğrusal denklem sisteminin genişletilmiş matrisi

Q : Fibonacci Q matrisi

F_n : Fibonacci dizisinin $n.$ terimi

G_n : Genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin $n.$ terimi

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Fibonacci Q matrisi, genelleştirilmiş Fibonacci sayıları.

Bu çalışmada genel olarak Fibonacci Q matrisinden hareketle tanımlanan bir $m-$ genelleştirilmiş Fibonacci matrisi $Q_{g(a,b)}^{(m)}$ ve bir $n-$genelleştirilmiş Fibonacci matrisi $Q_{g(a,b)}^{(n)}$'nin doğrusal bileşimlerinin bir $k-$ genelleştirilmiş Fibonacci matrisi $Q_{g(a,b)}^{(k)}$ olmasının karakterizasyonu ele alınmıştır.

İlk bölümde, önce konu hakkında kısaca bazı bilgilere değinilmektedir. Sonra, çalışmanın devamında kullanılacak olan matrisler cebiri ve doğrusal denklem sistemleri ile ilgili bazı temel kavramlar ve ispatsız olarak bazı özellikler verilmektedir.

Sonraki bölümde, Fibonacci sayıları, altın oran ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili temel tanım, teorem ve bazı özdeşlikler ispatsız olarak verilmektedir.

Üçüncü bölümde, $a_i, b_i \in \mathbb{R}^*$, $i = 1,2$, $m,n,k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere bir $n-$ genelleştirilmiş Fibonacci $Q_{g(a,b)}^{(n)}$ matrisi ile bir $m-$ genelleştirilmiş Fibonacci $Q_{g(a_2,b_2)}^{(m)}$ matrisinin doğrusal bileşiminin bir $k-$ genelleştirilmiş Fibonacci $Q_{g(a_3,b_3)}^{(k)}$ matrisi olmasının karakterizasyonu problemi ele alınmaktadır. Ayrıca bu kısımda, doğrusal bileşimdeki matrislerin ve doğrusal bileşim matrisinin, genelliği bozmaksızın, $l-$ Fibonacci Q matrisi olması özel durumları ile ilgili sonuçlar da verilmektedir.

Son bölüm, çalışma ile ilgili bazı tartışma ve önerilerden oluşmaktadır.

LINEAR COMBINATIONS OF GENERALIZED FIBONACCI MATRICES

SUMMARY

Keywords: Fibonacci numbers, Fibonacci Q Matrix, generalized Fibonacci numbers.

In this study, it is handled the characterization of being a $k-$generalized Fibonacci matrix $Q_{g(a,b)}^{(k)}$ of linear combinations of an $m-$ generalized Fibonacci matrix $Q_{g(a,b)}^{(m)}$, which is generally defined by via the Fibonacci matrix Q, and an $n-$ generalized Fibonacci matrix $Q_{g(a,b)}^{(n)}$.

In the first chapter, some information about the subject is briefly mentioned first. Then, some basic concepts related to matrix algebra and linear equation systems to be used in the rest of the study and some features without proof are given.

In the next chapter, basic definitions, theorems and some identities related to Fibonacci numbers, golden ratio and generalized Fibonacci numbers are given without proof.

In the third chapter, it is handled the characterization of being a $k-$generalized Fibonacci matrix $Q_{g(a,b)}^{(k)}$ of linear combinations of an $m-$generalized Fibonacci matrix $Q_{g(a,b)}^{(m)}$, which is generally defined by via the Fibonacci matrix Q, and an $n-$ generalized Fibonacci matrix $Q_{g(a,b)}^{(n)}$, where $a_i, b_i \in \mathbb{R}^*$, $i=1,2$, $m,n,k \in \mathbb{Z}$. Also, in this section, it is given the results related to the special cases where the linear combination matrix and the matrices in the linear combination are , without loos of generality, $l-$ Fibonacci Q matrices.

Last section involves some discussions and suggestions about the study.

BÖLÜM 1. ÖN BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu bölümde, öncelikle matris cebiri ile ilgili bazı temel kavramlar ve ispatsız olarak bazı özellikler verilecektir. Devamında doğrusal denklem sistemleri üzerine bazı kavramlar tanıtılacak ve genel olarak söylemek gerekirse, matris denklemleri ile ilgili bazı temel özellikler ispatsız olarak verilecektir.

1.2. Matris Cebiri ile İlgili Bazı Kavram ve Özellikler

Bu kısımda vektör ve matris cebiri ve matris denklemleri ile ilgili bazı temel kavramlar ve ispatsız olarak bazı temel özellikler verilecektir.

Tanım 1.1. $u_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ şeklinde tüm sıralı m'lilerin kümesi $\mathbb{R}^m$ ile gösterilir. $\mathbb{R}^m$'nin elemanları vektör ya da m-vektör olarak adlandırılır. $u_1, u_2, ..., u_m$ sayılarına $\mathbf{u}$ vektörünün bileşenleri denir [1].

Tanım 1.2. (Vektör Toplamı) $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, $\mathbb{R}^m$ üzerinde tanımlı vektörler olsun. $\mathbf{u}$ ile $\mathbf{v}$ vektörlerinin toplamı

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_m + v_m)$$

vektörü olarak tanımlanır. Yani $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ vektörü $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin karşılıklı bileşenlerinin karşılıklı toplanması ile elde edilir [1].

Üzerinde çalışılan cismin elemanlarına skaler denir. Bu çalışma $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde yapılmaktadır.

Tanım 1.3. (Skaler Çarpım) c bir reel skaler ve $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_m)$ vektörü $\mathbb{R}^m$ üzerinde tanımlı olsun. $\mathbf{u}$ vektörünün c ile skaler çarpımı

$$c\mathbf{u}=(cu_1,cu_2,\ldots,cu_m)$$

vektörüdür. $c\mathbf{u}$ vektörü, $\mathbf{u}$ vektörünün her bileşeninin c skaleri ile çarpılmasıyla elde edilir [1].

Tanım 1.4. $c_1,c_2,\ldots,c_m$ skalerler ve $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v_m}$ vektörler olmak üzere,

$$\mathbf{x}=c_1\mathbf{v_1}+c_2\mathbf{v_2}+\ldots+c_m\mathbf{v_m}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbf{x}$ vektörüne $\mathbf{v}_1,\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v_m}$ vektörlerinin bir doğrusal bileşimi denir [2].

Tanım 1.5. $c_1,c_2,\ldots,c_m$ skalerler ve $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v_m}$ vektörler olmak üzere,

$$c_1\mathbf{v_1}+c_2\mathbf{v_2}+\ldots+c_m\mathbf{v_m}=\mathbf{0}$$

eşitliğini sağlayan ve hepsi birden sıfır olmayan $c_1,c_2,\ldots,c_m$ sayıları varsa $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v_m}$ vektörlerine doğrusal bağımlıdır denir. Aksi halde, yani sadece $c_1=c_2=\ldots=c_m=0$ şeklinde tek çözüm var ise, $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\ldots,\mathbf{v_m}$ vektörlerine doğrusal bağımsızdır denir [3].

Sayıların dikdörtgensel bir düzenlemesine bir matris denir. Her bir yatay sıradaki sayıların oluşturduğu düzene bir satır ve her bir dikey sıradaki sayıların oluşturduğu düzene bir sütun denir. Bir matrisin boyutları, matristeki satır ve sütun sayılarıyla tanımlanır. Önce verilen sayı satır, sonra verilen sayı sütun sayısıdır. m satırlı ve n sütunlu matrise $m\times n$ boyutlu bir matris denir. Boyutu $n\times n$ olan bir matrise kısaca n

mertebeli matris denir. Bu matris bir kare matris olarak da adlandırılır. Matristeki her bir sayıya matrisin bir elemanı denir. Matrisler genellikle büyük harflerle ve elemanları, altlarında elemanın matrisindeki konumunu gösteren indisler ile birlikte aynı harfin küçükleriyle gösterilir. Örneğin, A matrisinin $i.$satırı ve $j.$sütunundaki elemanı a_{ij} ile gösterilir. A matrisinin elemanlarını göstermek için $A=(a_{ij})$ notasyonu da yaygın olarak kullanılır. Aşağıda $m\times n$ boyutlu bir matris gösterimi verilmiştir [4].

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})$$

Tanım 1.6. A, $m\times n$ boyutlu bir matris ve B, $n\times p$ boyutlu bir matris olsun. $A=B$ olmasının gerek ve yeter koşulu tanım olarak $m=p,\ n=q$ ve tüm $i,\ j$ 'ler için $a_{ij}=b_{ij}$ olmasıdır [4].

Tanım 1.7. A ve B aynı boyutlu matrisler olsun. $A+B$ bu iki matrisin karşılıklı elemanlarının toplanması ile bulunur. Toplam matrisi

$$(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

ile gösterilir [4].

Tanım 1.8. A bir matris, c bir skaler olsun. cA skaler çarpım matrisi A matrisinin her bir elemanının c skaleriyle çarpılmasıyla elde edilir. Çarpım matrisi

$$(cA)_{ij}=ca_{ij}$$

ile gösterilir [1].

Tanım 1.9. A, $m \times k$ boyutlu bir matris ve B, $s \times n$ boyutlu bir matris olsun. AB matrisi $k = s$ olması koşuluyla tanımlı olan ij. elemanı

$$(AB)_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$$

ile verilen $m \times k$ boyutlu matristir [4].

Bu kısmı matrisler üzerindeki elementer işlemler, satırca denk matris kavramı, bir matrisin satır indirgenmiş eşelon biçimi ve rank tanımını vererek tamamlayalım.

Tanım 1.10. Bir matrisin bir satırını sıfır olmayan bir skaler ile çarpmak, iki satırın yerini değiştirmek ve bir satırın yerine bu satır ile diğer bir satırın bir skaler katının toplamını yazmak işlemlerinden her birine matrisler üzerinde bir elementer işlem denir [1].

Tanım 1.11. Bir matris sonlu tane elementer satır işlemi vasıtasıyla diğer bir matristen elde edilebiliyorsa bu iki matrise satırca denktir denir [1].

Tanım 1.12. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir matrise, satırca indirgenmiş eşelon biçimindedir.

i) Tüm elemanları sıfır olmayan herhangi bir satırda, sıfırdan farklı ilk eleman 1'dir (bu eleman bir 1 baş elemanı olarak adlandırılır).
ii) 1 baş elemanını içeren herhangi bir sütundaki diğer tüm elemanlar sıfırdır.
iii) Sıfırdan farklı eleman içeren herhangi iki satırda, daha büyük numaralı satırın 1 baş elemanı daha sağda bulunur.
iv) Sadece sıfır elemanlarından ibaret olan herhangi bir satır, sıfırdan farklı eleman içeren diğer satırlardan daha sonra gelir [1].

Tanım 1.13. Bir A matrisinin satırca indirgenmiş matrisi B olsun. B'nin sıfırdan farklı satırlarının sayısına A'nın rankı denir. $rankA$ olarak yazılır [5].

1.3. Doğrusal Denklem Sistemleri Üzerine Bazı Kavram ve Özellikler

Tanım 1.14. $a_1, a_2, \ldots, a_p, b \in \mathbb{R}$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_p$ değişkenler olmak üzere, $a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b$ biçimindeki bir denkleme doğrusal denklem denir. Burada a_j skalerleri katsayılar ve b skaleri sabit terimdir.

Bir doğrusal denklemler sistemi ya da kısaca doğrusal sistem, aynı değişkenlere sahip bir veya daha fazla doğrusal denklemler takımıdır. Örneğin,

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ &a_{21}x_1 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ &a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mp}x_p = b_m \end{aligned} \tag{1.1}$$

p değişkenli m denklemli bir doğrusal sistemdir. a_{ij} sayısı i. denklemdeki j. bilinmeyenin katsayısıdır. Her j için $x_j = c_j$ şeklinde, (1.1)'in her denklemini sağlayan $(c_1, \ldots, c_p)$ $p-$vektörüne (1.1) sisteminin bir çözümü denir. Sistemin tüm çözümlerinden oluşan kümeye sistemin çözüm kümesi denir. Sistemin, en az bir çözümü varsa sisteme tutarlı aksi takdirde tutarsızdır denir. Aynı çözüm kümesine sahip sistemlere denk sistemler denir. Eğer tüm j'ler için $b_j = 0$ ise sisteme homojen veya ikinci yansız sistem denir. Çözüm kümesindeki her vektörü karakterize eden vektöre genel çözüm denir. (1.1) doğrusal sistemi için

$m \times p$ boyutlu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}$ matrisi katsayılar matrisi, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ vektörü sabitler vektörü ve $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$ vektörü bilinmeyenler vektörü olarak adlandırılır. Böylece (1.1) sistemi matris gösterimi ile $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ şeklinde de gösterilebilir. $m \times (p+1)$

boyutlu $\left[A \mid \mathbf{b}\right]$ matrisi (1.1) doğrusal sisteminin genişletilmiş matrisi olarak tanımlanır. $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ matris denklemi (1.1) doğrusal sistemini gösterir. $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$ sütun vektörünün $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ denklemini sağlamasının gerek ve yeter koşulu $(c_1,\ldots,c_p)$ vektörünün (1.1) doğrusal sisteminin çözümü olmasıdır [6].

Teorem 1.15. Eğer iki genişletilmiş matris satırca denk ise karşılık gelen doğrusal sistemler de denktir, yani bu sistemler aynı çözüme sahiptir [1].

Teorem 1.16. (1.1)'in $m \times p$ boyutlu katsayılar matrisi A, sağ taraf bilinmeyenler vektörü $\mathbf{b}$ bilinmeyenler vektörü $\mathbf{x}$ ve genişletilmiş matris $\left[A \mid \mathbf{b}\right]$ olmak üzere, $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ doğrusal sisteminin tutarlı olmasının gerek ve yeter şartı $\text{rank}A=\text{rank}\left[A \mid \mathbf{b}\right]$ olmasıdır. Sistemin tutarlı olması durumunda

(1) $\text{rank}A=n$ ise sistemin bir tek çözümü vardır.

(2) $\text{rank}A<n$ ise sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır [5].

Sonuç 1.17. Tutarlı bir doğrusal sistem, denklem sayısından daha fazla bilinmeyene sahip ise sistem sonsuz sayıda çözüme sahiptir [5].

Tanım 1.18. $A=[a_{ij}]$ bir $m \times n$ matris olsun. A'nın determinantı

i) $n=1$ ise $|A|=a_{11}$

ii) $n=2$ ise $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

iii) $n>2$ ise

$$|A|=a_{11}\left|A_{11}\right|-a_{12}\left|A_{12}\right|+\cdots+(-1)^{n+1}a_{1n}\left|A_{1n}\right|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\left|A_{1j}\right|$$

ile verilir [1].

Determinantın bu tanımı ardışık bir tanımdır. Genel olarak determinantın tanımı kaynaklarda bu şekilde verilmemektedir. Aslında kaynaklarda verildiği halinin bir sonucu olarak elde edilir. Bu tanım aşağıdaki sonucun özel bir durumu olarak elde edilir.

Teorem 1.19. $n>2$ olmak üzere, A bir n mertebeli matris olsun. i herhangi sabitlenmiş bir satır numarası olsun. Bu durumda

$$|A|=(-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}|+(-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}|+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}|A_{ik}|$$

dir. j herhangi sabitlenmiş bir sütun numarası olsun. Bu durumda

$$|A|=(-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}|+(-1)^{2+j}a_{2j}|A_{2j}|+\cdots+(-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}|A_{kj}|$$

dır [1].

Tanım 1.20. $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ doğrusal sisteminde bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşitse sisteme bir kare sistem denir [1].

Teorem 1.21. A bir kare matris olsun. Bu durumda $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ doğrusal sisteminin her $\mathbf{b}$ için bir tek çözüme sahip olmasının gerek ve yeter koşulu $|A|\neq 0$ olmasıdır.

$|A|\neq 0$ ise $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ kare sistemine Cramer sistemi demek gelenekselleşmiştir [1].

Teorem 1.22.(Cramer Yöntemi) A, $n\times n$ boyutlu bir matris olmak üzere $\det A\neq 0$ ise $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ kare sistemi tek çözüme sahip olup, bu çözüm

$$x_i=\frac{|A(i)|}{|A|},\; i=1,2,\ldots,n$$

ile verilir. Burada $A(i)$, A matrisinde $i.$ sütunun silinerek yerine $\mathbf{b}$ vektörünün yazılmasıyla elde edilen matristir [1].

BÖLÜM 2. FİBONACCİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYILARI

2.1. Giriş

Bu bölümde, Leonardo Fibonacci hakkında, Fibonacci sayıları, altın oran ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili temel bilgiler verilecektir. Sonraki bölümlerde önce Fibonacci sayıları ile matrisler arasındaki ilişkilerden bahsedilecektir. Bu gösterim yardımıyla, çalışmada $Q_{g(a,b)}^{(n)}$ ile gösterilecek olan $n-$ genelleştirilmiş Fibonacci Q matrisi tanımlanacaktır. Sonra, $a_i, b_i \in \mathbb{R}^*$, $i=1,2$, $m,n,k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere bir $n-$ genelleştirilmiş Fibonacci $Q_{g(a,b)}^{(n)}$ matrisi ile bir $m-$ genelleştirilmiş Fibonacci $Q_{g(a_2,b_2)}^{(m)}$ matrisinin doğrusal bileşiminin bir $k-$ genelleştirilmiş Fibonacci $Q_{g(a_3,b_3)}^{(k)}$ matrisi olmasının karakterizasyonu problemi ele alınacaktır.

Fibonacci sayıları ile bu sayıların oluşturduğu sayı dizisi matematikçilerin ilgi duyduğu bir alan olmuştur. Fibonacci sayıları, matematiğin hemen hemen her dalında, özellikler sayılar teorisinde, diferansiyel denklemler, olasılık, istatistik, sayısal analiz ve doğrusal cebirde de görülür. Ayrıca fizik, biyoloji, kimya, elektrik mühendisliği gibi birçok uygulamalı bilimde de Fibonacci sayılarını görmek mümkündür [7].

Fibonacci sayıları ile ilişkili çok sayıda farklı çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar sonucu Fibonacci dizisinin terimleri ile ilgili çeşitli özellikler bulunmuştur ve yeni özellikler ortaya koyulmaya devam edilmektedir.

Leonardo Fibonacci (Leonardo of Pisa), orta çağın en göze çarpan matematikçilerindendir. Matematiksel yazılarında verdiği birkaç detay dışında hayatı hakkında çok az şey bilinmektedir. İronik bir şekilde, çağdaşlarından hiçbiri günümüze gelen herhangi bir belgede Fibonacci'den bahsetmemektedir [8].

1170'li yıllarda Pisa'nın Bonacci ailesinde doğan Leonardo Fibonacci, oğlunun kendi izinden gitmesini isteyen zengin tüccar Guglielmo'nun oğludur. Bu nedenle, Guglielmo 1190'lı yıllarda Cezayir şehri olan Bugia'a (günümüzdeki adı Bejaia) gümrük memuru olarak atandığında Leonardo'yu da yanında getirmiştir. Fibonacci burada kendisini Hint-Arap hesaplama yöntemleriyle birlikte Hint-Arap sayı sistemi ile tanıştıran Müslüman bir tüccar ile çalışmıştır. Daha sonra, Leonardo iş hayatına devam ederken kendisini Constantinople (İstanbul), Mısır, Fransa, Yunanistan, Roma ve Suriye'ye seyahat ederken bulmuş ve bu ülkelerde de çeşitli aritmetik sistemlerini araştırmaya devam etmiştir [9].

Sonuç olarak, Leonardo 1200 yılları civarında Pisa'ya döndükten sonra kendini Hint-Arap sayı sisteminin zarif sadeliğini ve pratik avantajının savunucusu olarak buldu (özellikle İtalya'da kullanılan Romen rakamları ile karşılaştırıldığında). 1240 yılında öldüğü zaman, İtalyan tüccarlar Hint-Arap sayı sisteminin değerinin farkına varmaya ve yavaş yavaş ticari işlemler için kullanmaya başladılar. On altıncı yüzyılın sonunda, Avrupa'nın çoğu Hint-Arap sayı sistemine adapte olmuştu [9].

1202'de Leonardo öncü başyapıtı Liber Abaci'yi (Hesap Kitabı) yayımladı. Kitapta Hint-Arap sayı sistemini ve aritmetik algoritmaları Avrupa kıtasına tanıttı. Leonardo, dokuz Hint, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sembollerini Arapların "zephirum"(sıfır) olarak adlandırdıkları 0 sembolü birlikte Hint-Arap rakamlarının tanıtımını yaparak çalışmalarına başladı [9].

Orta çağın en iyi matematikçilerinden Leonardo Fibonacci'nin Liber Abaci adlı kitabındaki tavşan problemi ile bağlantılı olarak Fibonacci sayıları olarak bilinen $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ldots$ sayıları 19. yüzyıl Fransız matematikçisi Edouard Lucas tarafından adlandırılmıştır [7].

Fibonacci'nin klasik kitabında (Liber Abaci) ele alınan tavşan problemini inceleyelim.

Tavşan problemi şu şekilde verilmektedir:

Biri erkek diğeri dişi olmak üzere iki yeni doğmuş tavşan olduğunu varsayalım. Aşağıdaki koşullar ile birlikte bir yılda üretilen tavşan sayısını bulalım.
1) Her çiftin olgunlaşması bir ay sürüyor,
2) Her çift ikinci aydan itibaren bir erkek bir dişi tavşan yavru üretiyor,
3) Yıl boyunca hiçbir tavşan ölmüyor.

Kolaylık sağlamak için ilk tavşan çiftinin 1 Ocak'ta doğduğunu varsayalım. Bu çiftin olgunlaşması 1 ay sürer bu yüzden 1 Şubat'ta hala sadece 1 çift vardır. 1 Mart'ta iki aylık olan çift bir yeni çift üretir ve toplam iki çift olur. Bu şekilde devam edilirse 1 Nisan'da 3 çift, 1 Mayıs'ta 5 çift olur. Benzer şekilde devam eder. Örneğin 8 aylık süreci aşağıdaki gibi gösterelim.

Çift Sayısı	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz	Ağustos
Yetişkin	0	1	1	2	3	5	8	13
Bebek	1	0	1	1	2	3	5	8
Toplam	1	1	2	3	5	8	13	21

Bu gösterimin son satırındaki sayılara Fibonacci sayıları denir. $1,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$ sayı dizisi Fibonacci dizisidir [10].

2.2. Fibonacci Sayıları, Altın Oran ve Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları

Tanım 2.1. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $n \geq 2$ tamsayıları için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan diziye Fibonacci dizisi denir [9].

Tanım 2.2. $n \geq 1$ olmak üzere $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ bağıntısı kullanılarak negatif indisli Fibonacci sayıları

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

bağıntısı ile bulunur. $F_{-n} = F_n$ yalnız ve yalnız n tek ise doğru olur [8].

Tanım 2.3. $x^2 - x - 1 = 0$ kuadratik denkleminin kökleri $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ şeklindedir. α pozitif köküne altın oran denir. Altın oran genellikle ϕ ile sembolize edilir. Ancak bu çalışmada α ile sembolize edilmektedir [11].

α ve β sayıları arasında $\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1,\ \alpha^2 = \alpha + 1,\ \beta^2 = \beta + 1$ bağıntıları mevcuttur [8].

Fibonacci yineleme ilişkisini sağlayan ama başlangıç koşulları herhangi iki sayı olan dizi incelenerek, bu sayı dizisinin Fibonacci sayıları ile ortak özelliklerinin mevcut olduğu görülebilir.

Tanım 2.4. a ve b herhangi reel sayılar olmak üzere $\{G_n\}$ sayı dizisi

$$G_1 = a\,,\ G_2 = b \text{ ve } G_n = G_{n-1} + G_{n-2}\,,\ n \geq 3$$

ile tanımlanan $\{G_n\}$ sayı dizisine genelleştirilmiş Fibonacci dizisi denir. Bu sayı dizisinin elemanları açık olarak,

$$a,\ b,\ a+b,\ a+2b,\ 2a+3b,\ 3a+5b, \ldots$$

şeklindedir. Bu sayı dizisinin katsayılarına yakından bakılırsa ilginç bir örüntüyü takip ettikleri görülür. a ve b sayılarının katsayıları Fibonacci sayılarıdır [10].

2.3. Fibonacci Sayıları, Altın Oran ve Genelleştirilmiş Fibonacci Sayılarının Bazı Özellikleri

Daha önce de belirtildiği gibi, şimdi daha sonraki bölümler ve kısımlarda kullanılacak olan bazı özellikler ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 2.5. (Binet Formülü) $n \geq 1$ tamsayı olsun. $\alpha, x^2 - x - 1 = 0$ kuadratik denkleminin pozitif kökü ve β negatif kökü olsun. Bu durumda

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir. F_n'nin bu açık formülüne Binet formülü denir [8].

Yardımcı Teorem 2.6. $n \geq 0$ tamsayısı için $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$'dir [8].

Sonuç 2.7. $n \geq 0$ tamsayısı için $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$'dir [8].

Sonuç 2.8. $n \geq 1$ tamsayısı için $\alpha^{-n} = (-1)^{n+1}(\alpha F_n - F_{n+1})$'dir [8].

Sonuç 2.9. $n \geq 1$ tamsayısı için $\beta^{-n} = (-1)^{n+1}(\beta F_n - F_{n+1})$'dir [8].

Teorem 2.10. G_n, genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin n. terimini belirtsin. Bu durumda,

$$G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1},\ n \geq 3$$

dir [10].

Teorem 2.11. $a, b, c, d, r \in \mathbb{Z}$ ve $a + b = c + d$ olmak üzere;

$$F_a F_b - F_c F_d = (-1)^r (F_{a-r} F_{b-r} - F_{c-r} F_{d-r})$$

dir [12].

Teorem 2.12. $n, m \in \mathbb{Z}$ için $F_{m+n} = F_{m+1} F_{n+1} - F_{m-1} F_{n-1}$ dir [8].

Teorem 2.13. $n, m \in \mathbb{Z}$ için $F_n = F_m F_{n-m+1} - F_{m-1} F_{n-m}$ dir [10].

Teorem 2.14. (Binet Formülü). $c = a + (a-b)\beta$ ve $d = a + (a-b)\alpha$ olsun.

$$G_n = \frac{c\alpha^n - d\beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir [10].

Dikkat edilirse;

$$\begin{aligned} cd &= [a + (a-b)\beta][a + (a-b)\alpha] \\ &= a^2 + (a-b)^2 \alpha\beta + a(a-b)(\alpha + \beta) \\ &= a^2 - (a-b)^2 + a(a-b) \\ &= a^2 + ab - b^2 \end{aligned}$$

olur. Bu sabit, genelleştirilmiş Fibonacci sayılarıyla ilgili birçok formülde ortaya çıkar. Bu sabite genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin karakteristiği adı verilir. Bu sabit Yunan alfabesinden μ ile sembolize edilir [10]:

$$\mu = a^2 + ab - b^2$$

Teorem 2.15. $n, m \in \mathbb{Z}$ için $G_{m-1}G_n - G_m G_{n-1} = \mu(-1)^{n-1} F_{m-n}$ dir [10].

Teorem 2.16. $n, m \in \mathbb{Z}$ için $G_{m+n} = G_m F_{n+1} + G_{m-1} F_n$ dir [10].

2.4. Fibonacci ve Genelleştirilmiş Fibonacci Sayılarının Matrislerle İlişkisi

Bu bölümde Fibonacci ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının matrislerle olan ilişkileri incelenecektir.

2.4.1. Fibonacci Q Matrisi

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

ile tanımlanan Q matrisini alalım. Bu matrisin bazı özellikleri San Jose State College, California'da 1960 yılında Charles H. King'in yüksek lisans tezinde araştırılmıştır. $n=2,3,4$ ve 5 için Q^n değerlerini hesaplayalım:

$$Q^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$
$$Q^3=QQ^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$
$$Q^4=QQ^3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$
$$Q^5=QQ^4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 5 & 3\end{pmatrix}$$

Bu matrislerin elemanlarının Fibonacci sayıları olduğu görülmektedir. Genel durum aşağıdaki teoremde içerilmektedir [9].

Teorem 2.17. $Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ve $n\in\mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda

$$Q^n=\begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$$

dir [13], [14].

Çalışma boyunca Q matrisi $n-$ Fibonacci Q matrisi olarak adlandırılacaktır.

Teorem 2.18. $n \geq 1$ tamsayısı için $\left|Q^n\right| = (-1)^n$ 'dir [11].

Sonuç 2.19. (Cassini Formülü) $n \geq 1$ tamsayı için

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

dir [11].

BÖLÜM 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ Q MATRİSLERİNİN LİNEER BİLEŞİMLERİ

3.1. Giriş

Bu bölümde, Fibonacci Q matrisinden hareketle $Q_{g(a,b)}^{(n)}$ ile sembolize edilecek olan $n-$genelleştirilmiş Fibonacci Q matrisi tanımlanacak ve bir $n-$genelleştirilmiş Fibonacci Q matrisi ile bir $m-$genelleştirilmiş Fibonacci Q matrisinin doğrusal bileşiminin bir $k-$genelleştirilmiş Fibonacci Q matrisi olmasının karakterizasyonu genel problemi ele alınacaktır.

Önce bazı hazırlık bilgileri, daha sonra ise esas sonuçlar verilecektir.

3.2. Ön Bilgiler

Teorem 2.10 yardımıyla $n.$ genelleştirilmiş Fibonacci sayısının katsayıları belirlenebilir ve $G_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$ ile gösterilir. Çalışmanın devamında kısalık olması adına a ve b sayılarına bağlı olarak tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin elemanları kısaca $G_{(a,b)}^{(n)}$ olarak gösterilecektir.

Teorem 2.17'den hareketle oluşturulan Q^{n-2} ve Q^{n-1} matrislerinin $a,b \in \mathbb{R}^*$ olmak üzere $aQ^{n-2} + bQ^{n-1}$ doğrusal bileşimleri alınırsa elemanları genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan

$$aQ^{n-2} + bQ^{n-1} = a\begin{bmatrix} F_{n-1} & F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aF_{n-1} + bF_n & aF_{n-2} + bF_{n-1} \\ aF_{n-2} + bF_{n-1} & aF_{n-3} + bF_{n-2} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

matrisi elde edilir. (3.1) matrisi çalışmanın devamında $n-$ genelleştirilmiş Fibonacci Q matrisi olarak adlandırılacak ve $Q_{g(a,b)}^{(n)}$ ile gösterilecektir. Bu matris

$$Q_{g(a,b)}^{(n)}=\begin{bmatrix} aF_{n-1}+bF_n & aF_{n-2}+bF_{n-1} \\ aF_{n-2}+bF_{n-1} & aF_{n-3}+bF_{n-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_{(a,b)}^{(n+1)} & G_{(a,b)}^{(n)} \\ G_{(a,b)}^{(n)} & G_{(a,b)}^{(n-1)}\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir.

3.3. $c_1Q_{g(a_1,b_1)}^{(n)}+c_2Q_{g(a_2,b_2)}^{(m)}=Q_{g(a_3,b_3)}^{(k)}$ Matris Denkleminin Çözümleri

$c_1,c_2\in\mathbb{C}^*$ bilinmeyenler, n, m ve k birer tamsayı ve $a_i,b_i\in\mathbb{R}^*,\ i=1,2,3$ olmak üzere $Q_{g(a_3,b_3)}^{(k)}$ matrisinin $Q_{g(a_1,b_1)}^{(n)}$ ve $Q_{g(a_2,b_2)}^{(m)}$ matrislerinin doğrusal bileşimi şeklinde yazılması problemini inceleyelim:

$$c_1Q_{(a_1,b_1)}^{(n)}+c_2Q_{(a_2,b_2)}^{(m)}=Q_{(a_3,b_3)}^{(k)} \tag{3.3}$$

(3.3) matris denkleminde $Q_{g(a_1,b_1)}^{(n)}$, $Q_{g(a_2,b_2)}^{(m)}$ve $Q_{g(a_3,b_3)}^{(k)}$ matrislerinin (3.2) gösterimi dikkate alınarak matris gösterimi biçiminde yazılırsa, (3.3)'e denk olarak

$$c_1\begin{bmatrix} a_1F_{n-1}+b_1F_n & a_1F_{n-2}+b_1F_{n-1} \\ a_1F_{n-2}+b_1F_{n-1} & a_1F_{n-3}+b_1F_{n-2}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} a_2F_{m-1}+b_2F_m & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} \\ a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_3F_{k-1}+b_3F_k & a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} & a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2}\end{bmatrix} \tag{3.4}$$

denklemi elde edilir. (3.4) düzenlenirse

$$\begin{bmatrix} c_1(a_1F_{n-1}+b_1F_n)+c_2(a_2F_{m-1}+b_2F_m) & c_1(a_1F_{n-2}+b_1F_{n-1})+c_2(a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1}) \\ c_1(a_1F_{n-2}+b_1F_{n-1})+c_2(a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1}) & c_1(a_1F_{n-3}+b_1F_{n-2})+c_2(a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_3F_{k-1}+b_3F_k & a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} & a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2}\end{bmatrix} \tag{3.5}$$

bulunur. Matris eşitliği yardımıyla (3.5)'ten

$$\begin{aligned}
&c_1(a_1F_{n-1}+b_1F_n)+c_2(a_2F_{m-1}+b_2F_m)=a_3F_{k-1}+b_3F_k\\
&c_1(a_1F_{n-2}+b_1F_{n-1})+c_2(a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1})=a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1}\\
&c_1(a_1F_{n-3}+b_1F_{n-2})+c_2(a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2})=a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

doğrusal denklemler sistemi yazılabilir. (3.6) doğrusal denklemler sisteminde ikinci ve üçüncü denklem taraf tarafa toplanırsa birinci denkleme ulaşılır. O halde, birinci denklem ikinci ve üçüncü denklem ile doğrusal bağlıdır. (3.6) denklem sistemine denk olarak sadece ikinci ve üçüncü denklemden oluşan

$$\begin{aligned}
&c_1(a_1F_{n-2}+b_1F_{n-1})+c_2(a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1})=a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1}\\
&c_1(a_1F_{n-3}+b_1F_{n-2})+c_2(a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2})=a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

denklemler sistemi yazılabilir. (3.6) ve denk olarak (3.3) matris denkleminin çözümü için (3.7) denklem sistemini çözmek yeterli olacaktır. (3.7) denklem sistemi matris denklemi biçiminde yazılırsa

$$\begin{bmatrix} a_1F_{n-2}+b_1F_{n-1} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} \\ a_1F_{n-3}+b_1F_{n-2} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

olur. Burada bazı özel durumlardan genele doğru ilerleyeceğimizi belirtelim. Bu nedenle (3.8) matris denklemini çözmek için a_1,a_2,a_3 ve b_1,b_2,b_3 katsayılarının

Durum 1: $a_1=a_2=a_3=a,\ b_1=b_2=b_3=b$

Durum 2: $a_1=a_2=a\neq a_3,\ b_1=b_2=b\neq b_3$

Durum 3: $a_1=a_3=a\neq a_2,\ b_1=b_3=b\neq b_2$

özel durumları ve

Durum 4: $a_i,b_i\in\mathbb{R}^*,\ i=1,2,3$

genel durumlarını ele alacağız.

Durum 1: $a_1 = a_2 = a_3 = a,\ b_1 = b_2 = b_3 = b$ olması durumu

Verilen şartlar (3.8) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} aF_{n-2} + bF_{n-1} & aF_{m-2} + bF_{m-1} \\ aF_{n-3} + bF_{n-2} & aF_{m-3} + bF_{m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aF_{k-2} + bF_{k-1} \\ aF_{k-3} + bF_{k-2} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

matris denklemi elde edilir. (3.9) matris denkleminin çözümü katsayılar matrisinin determinantı ile ilişkilidir. Katsayılar matrisinin determinantı hesaplanırsa

$$\begin{vmatrix} aF_{n-2} + bF_{n-1} & aF_{m-2} + bF_{m-1} \\ aF_{n-3} + bF_{n-2} & aF_{m-3} + bF_{m-2} \end{vmatrix} = (aF_{n-2} + bF_{n-1})(aF_{m-3} + bF_{m-2}) - (aF_{m-2} + bF_{m-1})(aF_{n-3} + bF_{n-2}) \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.10) determinantının Teorem 2.15 yardımıyla

$$G_{(a,b)}^{(n)} G_{(a,b)}^{(m-1)} - G_{(a,b)}^{(m)} G_{(a,b)}^{(n-1)} = \mu(-1)^{n-1} F_{m-n} \tag{3.11}$$

olduğu görülür. (3.11) determinantı $\mu(-1)^{n-1} F_{m-n} \neq 0$ olması durumunda tek çözüme sahiptir. $\mu = 0$ veya $m = n$ olması durumunda $\mu(-1)^{n-1} F_{m-n}$ determinantı sıfır olur. Bu durumu da alt durumlara parçalayarak irdeleyelim.

Durum 1.1: $\mu(-1)^{n-1} F_{m-n} \neq 0$ olması durumu

Bu durum $\mu \neq 0$ ve $m \neq n$ olması durumu ile denktir. Bu durumda Cramer yöntemi kullanılarak Teorem 2.15 yardımıyla negatif indisli Fibonacci tanımı dikkate alındığında (3.9) matris denkleminin çözümleri

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} aF_{k-2} + bF_{k-1} & aF_{m-2} + bF_{m-1} \\ aF_{k-3} + bF_{k-2} & aF_{m-3} + bF_{m-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} aF_{n-2} + bF_{n-1} & aF_{m-2} + bF_{m-1} \\ aF_{n-3} + bF_{n-2} & aF_{m-3} + bF_{m-2} \end{vmatrix}} = \frac{\mu(-1)^{k-1} F_{m-k}}{\mu(-1)^{n-1} F_{m-n}} = \frac{(-1)^{k-n} F_{m-k}}{F_{m-n}} = \frac{F_{k-m}}{F_{n-m}}$$

ve

$$c_2=\frac{\begin{vmatrix} aF_{n-2}+bF_{n-1} & aF_{k-2}+bF_{k-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & aF_{k-3}+bF_{k-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} aF_{n-2}+bF_{n-1} & aF_{m-2}+bF_{m-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & aF_{m-3}+bF_{m-2} \end{vmatrix}}=\frac{\mu(-1)^{n-1}F_{k-n}}{\mu(-1)^{n-1}F_{m-n}}=\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}}$$

olarak bulunur. O halde, $\mu(-1)^{n-1}F_{m-n}\neq 0$ olması durumunda (3.9) matris denkleminin $(c_1,c_2)=(\frac{F_{k-m}}{F_{n-m}},\frac{F_{k-n}}{F_{m-n}})$ şeklinde tek çözümü vardır.

Durum 1.2: $\mu=0$ veya $m=n$ *olması durumu*

Bu koşul altında (3.11)'i sıfır yapan üç farklı durum yazılabilir. Bu durumlar:

i) $m=n,\ \mu\neq 0$

ii) $m=n,\ \mu=0$

iii) $m\neq n,\ \mu=0$

şeklindedir.

i) $m=n,\ \mu\neq 0$ o*lması durumu*

(3.9) matris denkleminin genişletilmiş matrisinde $m=n$ yazılırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} aF_{n-2}+bF_{n-1} & aF_{n-2}+bF_{n-1} & aF_{k-2}+bF_{k-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & aF_{n-3}+bF_{n-2} & aF_{k-3}+bF_{k-2} \end{array}\right] \tag{3.12}$$

matrisine eşit olur. (3.12)'de $aF_{n-2}+bF_{n-1}\neq 0$ koşulu ile birinci satır $-\dfrac{aF_{n-3}+bF_{n-2}}{aF_{n-2}+bF_{n-1}}$ ile çarpılarak ikinci satıra eklenirse ve $2.$ satır $3.$ sütun elemanı payda eşitlenerek m yerine k yazılarak Teorem 2.15 yardımıyla düzenlenirse

$$\left[\begin{array}{cc|c} aF_{n-2}+bF_{n-1} & aF_{n-2}+bF_{n-1} & aF_{k-2}+bF_{k-1} \\ 0 & 0 & \dfrac{\mu(-1)^{n-1}F_{k-n}}{aF_{n-2}+bF_{n-1}} \end{array}\right] \tag{3.13}$$

matrisi elde edilir. (3.13) genişletilmiş matrisinin tutarlı olması $\dfrac{\mu(-1)^{n-1}F_{k-n}}{aF_{n-2}+bF_{n-1}}=0$ olması ile mümkündür. $m=n,\ \mu\neq 0$ koşulu altında çalıştığımız için bu durum yalnızca $k=n$ olması durumunda mümkündür. O halde,

1. $k=n$ için sonsuz çözüm vardır. (3.13) genişletilmiş matrisinin ilk satırında $k=n$ yazılırsa $(c_1+c_2)(aF_{n-2}+bF_{n-1})=aF_{n-2}+bF_{n-1}$ elde edilir. $aF_{n-2}+bF_{n-1}\neq 0$ koşulu ile çalışıldığından sadeleştirme yapılarak $c_1+c_2=1$ olduğu görülür. Burada $c_1=t$ alınırsa $(c_1,c_2)=(t,1-t)$ sonsuz çözümü bulunur.
2. $k\neq n$ olması durumunda ise çözüm yoktur.

Eğer $aF_{n-2}+bF_{n-1}=0$ ise (3.12) matrisi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & aF_{k-2}+bF_{k-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & aF_{n-3}+bF_{n-2} & aF_{k-3}+bF_{k-2} \end{array}\right] \tag{3.14}$$

matrisine eşit olur. (3.14)'ün tutarlı olması için $aF_{k-2}+bF_{k-1}=0$ olmalıdır. $aF_{n-2}+bF_{n-1}=0$ için $n\neq 2$ olmalıdır çünkü aksi halde $aF_0+bF_1=0$ olur ve buradan $b=0$ çelişkisi elde edilir. Benzer inceleme $aF_{k-2}+bF_{k-1}=0$ için yapılırsa $k\neq 2$

olduğu görülür. O halde, ikinci satırda eşitliğin sol tarafında $a=-\dfrac{bF_{n-1}}{F_{n-2}}$ ve eşitliğin sağ tarafında $a=-\dfrac{bF_{k-1}}{F_{k-2}}$ yazılır ve payda eşitlenerek Sonuç 2.19 yardımıyla sırası ile n yerine $n-2$ ve k yerine $k-2$ alınarak düzenlenirse $c_1+c_2=\dfrac{(-1)^{2-n}F_{n-2}}{(-1)^{2-k}F_{k-2}}$ elde edilir. Negatif indisli Fibonacci sayısı tanımı yardımıyla $F_{n-2}=(-1)^{3-n}F_{2-n}$ ve benzer şekilde $F_{k-2}=(-1)^{3-k}F_{2-k}$ yazılarak $c_1+c_2=\dfrac{F_{2-n}}{F_{2-k}}$ olarak bulunur. Burada $c_1=t$ alınırsa $(c_1,c_2)=(t,\dfrac{F_{2-n}}{F_{2-k}}-t)$ sonsuz çözümü bulunur.

ii. $m=n,\ \mu=0$ *olması durumu*

$\mu=0$ olması $a=-b\alpha$ veya $a=-b\beta$ olması ile sağlanır. Verilen şartlar (3.9)'un genişletilmiş matrisinde yazılırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} -b\alpha F_{n-2}+bF_{n-1} & -b\alpha F_{n-2}+bF_{n-1} & -b\alpha F_{k-2}+bF_{k-1} \\ -b\alpha F_{n-3}+bF_{n-2} & -b\alpha F_{n-3}+bF_{n-2} & -b\alpha F_{k-3}+bF_{k-2} \end{array}\right] \tag{3.15}$$

matrisi elde edilir. (3.15) $-b$ parantezine alınır ve Sonuç 2.8 ile $\alpha F_{n-2}-F_{n-1}$ yerine $-\alpha^2(-\alpha)^{-n}$ ve $\alpha F_{n-3}-F_{n-2}$ yerine $\alpha^3(-\alpha)^{-n}$ yazılarak düzenlenirse

$$\left[\begin{array}{cc|c} b\alpha^2(-\alpha)^{-n} & b\alpha^2(-\alpha)^{-n} & b\alpha^2(-\alpha)^{-k} \\ -b\alpha^3(-\alpha)^{-n} & -b\alpha^3(-\alpha)^{-n} & -b\alpha^3(-\alpha)^{-k} \end{array}\right] \tag{3.16}$$

genişletilmiş matrisine ulaşılır. (3.16)'nın birinci satırı α ile çarpılıp ikinci satıra eklenirse elde edilen denk matris

$$\left[\begin{array}{cc|c} b\alpha^2(-\alpha)^{-n} & b\alpha^2(-\alpha)^{-n} & b\alpha^2(-\alpha)^{-k} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.17}$$

olur. Birinci satırdan $(c_1+c_2)(-\alpha)^{-n}=(-\alpha)^{-k}$ yazılır. $c_1=t$ alınırsa $(c_1,c_2)=(t,(-\alpha)^{n-k}-t)$ sonsuz çözümü elde edilir. $a=-b\beta$ alınır ve Sonuç 2.9 yardımıyla düzenlemeler benzer şekilde yapılırsa $(c_1,c_2)=(t,(-\beta)^{n-k}-t)$ elde edilir.

iii. $m\neq n,\mu=0$ *olması durumu*

$\mu=0$ olması $a=-b\alpha$ veya $a=-b\beta$ olması ile sağlanır. $a=-b\alpha$ ve $m\neq n$ şartı (3.9) matris denkleminin genişletilmiş matrisinde yerine yazılırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} -b\alpha F_{n-2}+bF_{n-1} & -b\alpha F_{m-2}+bF_{m-1} & -b\alpha F_{k-2}+bF_{k-1} \\ -b\alpha F_{n-3}+bF_{n-2} & -b\alpha F_{m-3}+bF_{m-2} & -b\alpha F_{k-3}+bF_{k-2} \end{array}\right] \tag{3.18}$$

olur. (3.18) genişletilmiş matrisinin elemanları $-b$ parantezine alınıp Sonuç 2.8 yardımıyla düzenlenirse

$$\left[\begin{array}{cc|c} b\alpha^2(-\alpha)^{-n} & b\alpha^2(-\alpha)^{-m} & b\alpha^2(-\alpha)^{-k} \\ -b\alpha^3(-\alpha)^{-n} & -b\alpha^3(-\alpha)^{-m} & -b\alpha^3(-\alpha)^{-k} \end{array}\right] \tag{3.19}$$

matrisi elde edilir. (3.19) matrisinde ikinci satırın birinci satırın $-\alpha$ katı olduğu açıkça görülmektedir. Birinci satır α ile çarpılıp ikinci satıra eklenirse

$$\left[\begin{array}{cc|c} b\alpha^2(-\alpha)^{-n} & b\alpha^2(-\alpha)^{-m} & b\alpha^2(-\alpha)^{-k} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{3.20}$$

matrisi bulunur. (3.20)'nin birinci satırı $b\alpha^2\neq 0$ olduğu için sadeleştirme yapılarak düzenlenirse $c_1(-\alpha)^{-n}+c_2(-\alpha)^{-m}=(-\alpha)^{-k}$ yazılabilir. Burada $c_1=t$ alınırsa $(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{(-\alpha)^{-k}-t(-\alpha)^{-n}}{(-\alpha)^{-m}}\right),\ t\in\mathbb{R}^*$ şeklinde sonsuz çözüm bulunur.

Eğer $m \neq n,\ \mu = 0$ olması $a = -b\beta$ durumunda gerçekleniyorsa Sonuç 2.9 yardımıyla benzer işlemler yapılarak ilerlenirse $(c_1, c_2) = \left(t, \dfrac{(-\beta)^{-k} - t(-\beta)^{-n}}{(-\beta)^{-m}} \right),\ t \in \mathbb{R}^*$ şeklinde sonsuz çözüm elde edilir.

Yukarıda yapılan tüm bu işlemler aşağıdaki teoremin ispatıdır.

Teorem 3.1. n, m ve k tamsayı, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ bilinmeyenler, $a, b \in \mathbb{R}^*$ ve $\mu = a^2 + ab - b^2$ olmak üzere $c_1 Q_{g(a,b)}^{(n)} + c_2 Q_{g(a,b)}^{(m)} = Q_{g(a,b)}^{(k)}$ denkleminin çözümleri için aşağıdakiler doğrudur.

1. $m \neq n$ ve $\mu \neq 0$ olması durumunda $(c_1, c_2) = \left(\dfrac{F_{k-m}}{F_{n-m}}, \dfrac{F_{k-n}}{F_{m-n}} \right)$ şeklinde tek çözümü vardır.
2. $m = n$ ve $\mu \neq 0$ olması durumunda

   $aF_{n-2} + bF_{n-1} \neq 0$ ise

   i. $k = n$ için $(c_1, c_2) = (t, 1-t),\ t \in \mathbb{R}^*$ olacak şekilde sonsuz çözüm vardır.

   ii. $k \neq n$ olması durumunda çözüm yoktur.

   $aF_{n-2} + bF_{n-1} = 0$ ise $(c_1, c_2) = (t, \dfrac{F_{2-n}}{F_{2-k}} - t),\ t \in \mathbb{R}^*$ olacak şekilde sonsuz çözüm vardır.
3. $m = n$ ve $\mu = 0$ olması durumunda

   $a = -b\alpha$ için $(c_1, c_2) = (t, (-\alpha)^{n-k} - t),\ t \in \mathbb{R}^*$ ve $a = -b\beta$ için $(c_1, c_2) = (t, (-\beta)^{n-k} - t),\ t \in \mathbb{R}^*$ şeklinde sonsuz çözüm vardır.
4. $m \neq n$ ve $\mu = 0$ olması durumunda

   $a = -b\alpha$ için $(c_1, c_2) = \left(t, \dfrac{(-\alpha)^{-k} - t(-\alpha)^{-n}}{(-\alpha)^{-m}} \right),\ t \in \mathbb{R}^*$ ve $a = -b\beta$ için $(c_1, c_2) = \left(t, \dfrac{(-\beta)^{-k} - t(-\beta)^{-n}}{(-\beta)^{-m}} \right),\ t \in \mathbb{R}^*$ şeklinde parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

Örnek 3.2. $c_1 Q_{g(2,3)}^{(4)} + c_2 Q_{g(2,3)}^{(5)} = Q_{g(2,3)}^{(6)}$ eşitliğini sağlayan c_1, c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $n = 4,\ m = 5,\ k = 6,\ a_1 = a_2 = a_3 = 2,\ b_1 = b_2 = b_3 = 3$ ifadelerini (3.4)'te yerine yazalım. Buradan

$$c_1 \begin{bmatrix} 2F_3 + 3F_4 & 2F_2 + 3F_3 \\ 2F_2 + 3F_3 & 2F_1 + 3F_2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2F_4 + 3F_5 & 2F_3 + 3F_4 \\ 2F_3 + 3F_4 & 2F_2 + 3F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2F_5 + 3F_6 & 2F_4 + 3F_5 \\ 2F_4 + 3F_5 & 2F_3 + 3F_4 \end{bmatrix}$$

yani,

$$c_1 \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 21 & 13 \\ 13 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 21 \\ 21 & 13 \end{bmatrix}$$

veya matris eşitliğinden,

$$\begin{aligned} 13c_1 + 21c_2 &= 34 \\ 8c_1 + 13c_2 &= 21 \\ 5c_1 + 8c_2 &= 13 \end{aligned}$$

denklem sistemi yazılır. Bu denklem sistemi çözülürse $c_1 = 1$ ve $c_2 = 1$ olarak bulunur. Gerçekten, Teorem 3.1 kullanılarak $m \neq n$ ve $\mu \neq 0$ olması dikkate alındığında $(c_1, c_2) = \left(\frac{F_{6-5}}{F_{4-5}}, \frac{F_{6-4}}{F_{5-4}} \right) = \left(\frac{F_1}{F_{-1}}, \frac{F_2}{F_1} \right) = (1,1)$ elde edilir.

Örnek 3.3. $c_1 Q_{g(2,3)}^{(5)} + c_2 Q_{g(2,3)}^{(5)} = Q_{g(2,3)}^{(5)}$ eşitliğini sağlayan c_1, c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $n = m = k = 5,\ a_1 = a_2 = a_3 = 2,\ b_1 = b_2 = b_3 = 3$ ifadeleri (3.4)'te yerine yazılırsa

$$c_1 \begin{bmatrix} 2F_4 + 3F_5 & 2F_3 + 3F_4 \\ 2F_3 + 3F_4 & 2F_2 + 3F_3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2F_4 + 3F_5 & 2F_3 + 3F_4 \\ 2F_3 + 3F_4 & 2F_2 + 3F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2F_4 + 3F_5 & 2F_3 + 3F_4 \\ 2F_3 + 3F_4 & 2F_2 + 3F_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan da,

$$c_1\begin{bmatrix}21 & 13\\ 13 & 8\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}21 & 13\\ 13 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & 13\\ 13 & 8\end{bmatrix}$$

olur. Ortak çarpan parantezine alınarak düzenleme yapılırsa,

$$(c_1+c_2)\begin{bmatrix}21 & 13\\ 13 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & 13\\ 13 & 8\end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $c_1+c_2=1$ olduğu görülür. Buradan $c_1=t$ olmak üzere $(c_1,c_2)=(t,1-t),\ t\in\mathbb{R}^*$ olarak genel çözüm elde edilir.
Gerçekten, Teorem 3.1'e göre $m=n,\mu\neq 0$ olması durumunda $2F_3+3F_4=13\neq 0$ ise $k=n$ için $(c_1,c_2)=(t,1-t)$ sonsuz çözümü elde edilir.

Eğer $n=m=5,\ k=6,\ a_1=a_2=a_3=2,\ b_1=b_2=b_3=3$ olursa yani az önce çözülen örnekten farklı k değeri $m,\ n$'den farklı olarak alalım ve bu ifadeler (3.3)'te yazılarak elde edilen $c_1Q_{g(2,3)}^{(5)}+c_2Q_{g(2,3)}^{(5)}=Q_{g(2,3)}^{(6)}$ problemi için c_1,c_2 değerlerini bulmaya çalışalım.
$c_1Q_{g(2,3)}^{(5)}+c_2Q_{g(2,3)}^{(5)}=Q_{g(2,3)}^{(6)}$ sistemine denk olarak

$$c_1\begin{bmatrix}2F_4+3F_5 & 2F_3+3F_4\\ 2F_3+3F_4 & 2F_2+3F_3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2F_4+3F_5 & 2F_3+3F_4\\ 2F_3+3F_4 & 2F_2+3F_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2F_5+3F_6 & 2F_4+3F_5\\ 2F_4+3F_5 & 2F_3+3F_4\end{bmatrix}$$

sistemi yazılır. Burada Fibonacci sayılarının değerleri yerine yazılırsa

$$c_1\begin{bmatrix}21 & 13\\ 13 & 8\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}21 & 13\\ 13 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}34 & 21\\ 21 & 13\end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$(c_1+c_2)\begin{bmatrix} 21 & 13 \\ 13 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 21 \\ 21 & 13 \end{bmatrix}$$

matris denklemi veya denk olarak doğrusal sistem şeklinde yazılırsa

$$\begin{aligned} &21(c_1+c_2)=34 \\ &13(c_1+c_2)=21 \\ &8(c_1+c_2)=13 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemini elde edilir. Bu denklem sistemini sağlayan c_1, c_2 bulunamaz. Yani bu sistem tutarsızdır.

Gerçekten, Teorem 3.1'e göre $m=n, \mu \neq 0$ olması durumunda $2F_3+3F_4=13\neq 0$ ise $k\neq n$ için çözüm yoktur.

Örnek 3.4. $c_1 Q^{(5)}_{g(-3\alpha,3)} + c_2 Q^{(5)}_{g(-3\alpha,3)} = Q^{(6)}_{g(-3\alpha,3)}$ eşitliğini sağlayan c_1, c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $m=n=5,\ k=6,\ a_1=a_2=a_3=-3\alpha,\ b_1=b_2=b_3=3$ ifadelerini (3.4)'te yazarak sistemi düzenleyelim.

$$c_1\begin{bmatrix} -3\alpha F_4+3F_5 & -3\alpha F_3+3F_4 \\ -3\alpha F_3+3F_4 & -3\alpha F_2+3F_3 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -3\alpha F_4+3F_5 & -3\alpha F_3+3F_4 \\ -3\alpha F_3+3F_4 & -3\alpha F_2+3F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha F_5+3F_6 & -3\alpha F_4+3F_5 \\ -3\alpha F_4+3F_5 & -3\alpha F_3+3F_4 \end{bmatrix}$$

$$(c_1+c_2)\begin{bmatrix} -3\alpha F_4+3F_5 & -3\alpha F_3+3F_4 \\ -3\alpha F_3+3F_4 & -3\alpha F_2+3F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\alpha F_5+3F_6 & -3\alpha F_4+3F_5 \\ -3\alpha F_4+3F_5 & -3\alpha F_3+3F_4 \end{bmatrix}$$

$$(c_1+c_2)\begin{bmatrix} -9\alpha+15 & -6\alpha+9 \\ -6\alpha+9 & -3\alpha+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15\alpha+24 & -9\alpha+15 \\ -9\alpha+15 & -6\alpha+9 \end{bmatrix}$$

veya denk olarak

$$\begin{aligned} &(c_1+c_2)(-9\alpha+15)=-15\alpha+24 \\ &(c_1+c_2)(-6\alpha+9)=-9\alpha+15 \\ &(c_1+c_2)(-3\alpha+6)=-6\alpha+9 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan c_1+c_2'yi bulmak için genişletilmiş matris yazılır ve elementer satır işlemleri uygulanırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} -9\alpha+15 & -9\alpha+15 & -15\alpha+24 \\ -6\alpha+9 & -6\alpha+9 & -9\alpha+15 \\ -3\alpha+6 & -3\alpha+6 & -6\alpha+9 \end{array}\right] \sim\cdots\sim \left[\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 3\alpha-3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

bulunur. Buradan $t\in\mathbb{R}^*$ olmak üzere $(c_1,c_2)=(t,1-\alpha-t)$ olarak elde edilir. Gerçekten, Teorem 3.1'e göre $m=n$ ve $\mu=0$ olması durumunda $a=-b\alpha$ için $(c_1,c_2)=(t,(-\alpha)^{5-6}-t)=(t,(-\alpha)^{-1}-t),\ t\in\mathbb{R}^*$ olur.

Örnek 3.5. $c_1Q^{(4)}_{g(-3\alpha,3)}+c_2Q^{(5)}_{g(-3\alpha,3)}=Q^{(6)}_{g(-3\alpha,3)}$ eşitliğini sağlayan c_1,c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $n=4,\ m=5,\ k=6,\ a_1=a_2=a_3=-3\alpha,\ b_1=b_2=b_3=3$ seçelim ve (3.4)'te eşitlerinin yerine yazılarak düzenleyelim. Böylece

$$c_1\begin{bmatrix} -3\alpha F_3+3F_4 & -3\alpha F_2+3F_3 \\ -3\alpha F_2+3F_3 & -3\alpha F_1+3F_2 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} -3\alpha F_4+3F_5 & -3\alpha F_3+3F_4 \\ -3\alpha F_3+3F_4 & -3\alpha F_2+3F_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3\alpha F_5+3F_6 & -3\alpha F_4+3F_5 \\ -3\alpha F_4+3F_5 & -3\alpha F_3+3F_4 \end{bmatrix}$$

$$c_1\begin{bmatrix} -6\alpha+9 & -3\alpha+6 \\ -3\alpha+6 & -3\alpha+3 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} -9\alpha+15 & -6\alpha+9 \\ -6\alpha+9 & -3\alpha+6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -15\alpha+24 & -9\alpha+15 \\ -9\alpha+15 & -6\alpha+9 \end{bmatrix}$$

veya denk olarak

$$\begin{aligned} &c_1(-6\alpha+9)+c_2(-9\alpha+15)=-15\alpha+24 \\ &c_1(-3\alpha+6)+c_2(-6\alpha+9)=-9\alpha+15 \\ &c_1(-3\alpha+3)+c_2(-3\alpha+6)=-6\alpha+9 \end{aligned}$$

doğrusal sistemine ulaşırız. Doğrusal sistemden c_1+c_2'yi bulmak için genişletilmiş matris yazılır ve elementer satır işlemleri uygulanırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} -6\alpha+9 & -9\alpha+15 & -15\alpha+24 \\ -3\alpha+6 & -6\alpha+9 & -9\alpha+15 \\ -3\alpha+3 & -3\alpha+6 & -6\alpha+9 \end{array}\right] \sim\cdots\sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3\alpha+3 & -3\alpha+6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

denk genişletilmiş matrisine ulaşılır.

Birinci satırdan $c_1+(1-\alpha)c_2=2-\alpha$ olmak üzere $(c_1,c_2)=(t,\dfrac{2-\alpha-t}{1-\alpha}),\ t\in\mathbb{R}^*$ olarak bulunur.

Gerçekten, Teorem 3.1'e göre $m\neq n$ ve $\mu=0$ olması durumunda $a=-b\alpha$ için $t\in\mathbb{R}^*$ olmak üzere $(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{(-\alpha)^{-6}-t(-\alpha)^{-4}}{(-\alpha)^{-5}}\right)=\left(t,\dfrac{(-\alpha)^{-2}-t}{(-\alpha)^{-1}}\right)$ olarak bulunur.

Durum 2: $a_1=a_2=a\neq a_3,\ b_1=b_2=b\neq b_3$ *olması durumu*

Verilen şartlar (3.8) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} aF_{n-2}+bF_{n-1} & aF_{m-2}+bF_{m-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & aF_{m-3}+bF_{m-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

matris denklemi elde edilir. (3.21) matris denkleminin katsayılar matrisi (3.9) ile aynı olduğundan, determinantı $\mu(-1)^{n-1}F_{m-n}$ ifadesine eşit olur. $\mu(-1)^{n-1}F_{m-n}\neq 0$ ise tek çözümü vardır. Determinantın sıfır olması $\mu=0$ veya $m=n$ olması durumunda gerçekleşir. Bu durumda ise çözüm bulunamaz ya da sonsuz çözüm vardır.

Durum 2.1: $\mu(-1)^{n-1}F_{m-n}\neq 0$ *olması durumu*

Bu durumda Cramer yöntemi kullanılarak Teorem 2.11 yardımıyla (3.21) matris denkleminin çözümleri

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} & aF_{m-2}+bF_{m-1} \\ a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2} & aF_{m-3}+bF_{m-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} aF_{n-2}+bF_{n-1} & aF_{m-2}+bF_{m-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & aF_{m-3}+bF_{m-2} \end{vmatrix}} = \frac{(-1)^k(-a_3G_{(a,b)}^{(m-k+2)}+b_3G_{(a,b)}^{(m-k+1)})}{\mu(-1)^{n-1}F_{m-n}}$$

ve

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} aF_{n-2}+bF_{n-1} & a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} aF_{n-2}+bF_{n-1} & aF_{m-2}+bF_{m-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & aF_{m-3}+bF_{m-2} \end{vmatrix}} = \frac{(-1)^n(-aG_{(a_3,b_3)}^{(k-n+2)}+bG_{(a_3,b_3)}^{(k-n+1)})}{\mu(-1)^{n-1}F_{m-n}}$$

olarak bulunur. O halde, $\mu(-1)^{n-1}F_{m-n} \neq 0$ olması durumunda (3.21) matris denkleminin $(c_1, c_2) = \left(\frac{(-1)^k(-a_3G_{(a,b)}^{(m-k+2)}+b_3G_{(a,b)}^{(m-k+1)})}{\mu(-1)^{n-1}F_{m-n}}, \frac{(-1)^n(-aG_{(a_3,b_3)}^{(k-n+2)}+bG_{(a_3,b_3)}^{(k-n+1)})}{\mu(-1)^{n-1}F_{m-n}} \right)$ şeklinde tek çözümü vardır.

Durum 2.2: $\mu(-1)^{n-1}F_{m-n} = 0$ *olması durumu*

(3.21) matris denkleminin katsayılar matrisini (3.9) ile aynı olduğu için determinantı sıfır yapan değerler DURUM 1.1 ile aynı olacaktır. Tüm mümkün durumlar şunlardır:

i) $m = n,\ \mu \neq 0$

ii) $m = n,\ \mu = 0$

iii) $m \neq n,\ \mu = 0$

Şimdi bu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $m = n,\ \mu \neq 0$ durumu:

Verilen şartlar (3.21) matris denkleminin genişletilmiş matrisinde yerine yazılırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} aF_{n-2}+bF_{n-1} & aF_{n-2}+bF_{n-1} & a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & aF_{n-3}+bF_{n-2} & a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2} \end{array}\right] \tag{3.22}$$

matrisi elde edilir. (3.22) genişletilmiş matrisinde $aF_{n-2}+bF_{n-1}\neq 0$ koşulu ile birinci satır $-\dfrac{aF_{n-3}+bF_{n-2}}{aF_{n-2}+bF_{n-1}}$ ile çarpılarak ikinci satıra eklenir ve ikinci satır üçüncü sütun elemanı Teorem 2.11 yardımıyla düzenlenirse

$$\left[\begin{array}{cc|c} aF_{n-2}+bF_{n-1} & aF_{n-2}+bF_{n-1} & a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ 0 & 0 & \dfrac{(-1)^n(-aG_{(a_3,b_3)}^{(k-n+2)}+bG_{(a_3,b_3)}^{(k-n+1)})}{aF_{n-2}+bF_{n-1}} \end{array}\right] \tag{3.23}$$

matrisi elde edilir.

1. $-aG_{(a_3,b_3)}^{(k-n+2)}+bG_{(a_3,b_3)}^{(k-n+1)}\neq 0$ olması durumunda çözüm yoktur.
2. $-aG_{(a_3,b_3)}^{(k-n+2)}+bG_{(a_3,b_3)}^{(k-n+1)}=0$ için sonsuz çözüm vardır. (3.23) genişletilmiş matrisinin birinci satırında $a=\dfrac{bG_{(a_3,b_3)}^{(k-n+1)}}{G_{(a_3,b_3)}^{(k-n+2)}}$, $G_{(a_3,b_3)}^{(k-n+2)}\neq 0$ kabulü ile yazılır ve Teorem 2.16'da m yerine $k-n+2$, n yerine de $n-2$ yazılarak düzenlenirse $c_1=t\in\mathbb{R}^*$ alınarak $(c_1,c_2)=(t,\dfrac{G_{(a_3,b_3)}^{(k)}}{b}-t)$ sonsuz çözümü elde edilir.

Eğer $m=n,\mu\neq 0$ iken $aF_{n-2}+bF_{n-1}=0$ ise (3.22) matrisi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & aF_{n-3}+bF_{n-2} & a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2} \end{array}\right] \tag{3.24}$$

matrisine eşit olur. (3.24)'ün tutarlı olması için $a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1}=0$ olmalıdır. $aF_{n-2}+bF_{n-1}=0$ için $n\neq 2$ olmalıdır çünkü aksi halde $aF_0+bF_1=0$ olur ve buradan $b=0$ çelişkisi elde edilir. Benzer inceleme $a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1}=0$ için yapılırsa $k\neq 2$ olduğu görülür. O halde, ikinci satırda eşitliğin sol tarafında $a=-\dfrac{bF_{n-1}}{F_{n-2}}$ ve eşitliğin sağ tarafında $a_3 = -\dfrac{b_3 F_{k-1}}{F_{k-2}}$ yazılır ve payda eşitlenerek Sonuç 2.19 yardımıyla sırası ile n yerine $n-2$ ve k yerine $k-2$ alarak düzenlenirse $c_1 + c_2 = \dfrac{(-1)^n b_3 F_{n-2}}{(-1)^k b F_{k-2}}$ elde edilir. Negatif indisli Fibonacci sayısı tanımından $F_{n-2} = (-1)^{3-n} F_{2-n}$ ve $F_{k-2} = (-1)^{3-k} F_{2-k}$ eşit ifadeleri yazılırsa $c_1 = t \in \mathbb{R}^*$ alınarak $(c_1, c_2) = (t, \dfrac{b_3 F_{2-n}}{b F_{2-k}} - t)$ sonsuz çözümü elde edilir.

ii) $m = n,\ \mu = 0$ durumu;

(3.21) genişletilmiş matrisinde $\mu = 0$ olması şartını yazalım. $\mu = 0$ olması $a = -b\alpha$ ya da $a = -b\beta$ olması durumunda sağlanır. $a = -b\alpha$ yazılırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} -b\alpha F_{n-2} + bF_{n-1} & -b\alpha F_{n-2} + bF_{n-1} & a_3 F_{k-2} + b_3 F_{k-1} \\ -b\alpha F_{n-3} + bF_{n-2} & -b\alpha F_{n-3} + bF_{n-2} & a_3 F_{k-3} + b_3 F_{k-2} \end{array}\right] \tag{3.25}$$

matrisi elde edilir. Burada terimler $-b$ parantezine alınır ve Sonuç 2.8 dikkate alınarak $\alpha F_{n-2} - F_{n-1}$ yerine $-\alpha^2(-\alpha)^{-n}$ ve $\alpha F_{n-3} - F_{n-2}$ yerine $\alpha^3(-\alpha)^{-n}$ yazılarak düzenlenirse denk olarak

$$\left[\begin{array}{cc|c} b\alpha^2(-\alpha)^{-n} & b\alpha^2(-\alpha)^{-n} & a_3 F_{k-2} + b_3 F_{k-1} \\ -b\alpha^3(-\alpha)^{-n} & -b\alpha^3(-\alpha)^{-n} & a_3 F_{k-3} + b_3 F_{k-2} \end{array}\right] \tag{3.26}$$

matrisine ulaşılır. (3.26)'nın birinci satırı α ile çarpılıp ikinci satıra eklenirse

$$\left[\begin{array}{cc|c} b\alpha^2(-\alpha)^{-n} & b\alpha^2(-\alpha)^{-n} & a_3 F_{k-2} + b_3 F_{k-1} \\ 0 & 0 & a_3 F_{k-3} + b_3 F_{k-2} + \alpha(a_3 F_{k-2} + b_3 F_{k-1}) \end{array}\right] \tag{3.27}$$

matrisi elde edilir. (3.27) genişletilmiş matrisine karşılık gelen sistem $a_3 F_{k-3} + b_3 F_{k-2} + \alpha(a_3 F_{k-2} + b_3 F_{k-1}) = 0$ olması durumunda tutarlı olur. Birinci satırda

$(a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1})=\dfrac{a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2}}{-\alpha}$ yazılırsa $c_1=t\in\mathbb{R}^*$ olmak üzere $(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2}}{b\alpha^2(-\alpha)^{-n+1}}-t\right)$ parametreye bağlı sonsuz çoklukta çözüm elde edilir. $a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2}+\alpha(a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1})\neq 0$ durumunda ise çözüm yoktur. $\mu=0$ koşulu $a=-b\beta$ için de sağlandığından benzer işlemler yapılarak $(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2}}{b\beta^2(-\beta)^{-n+1}}-t\right)$, t $\in\mathbb{R}^*$ parametreye bağlı çözümü bulunur.

iii) $m\neq n,\ \mu=0$ durumu:

Verilen şartlar (3.21) matris denkleminin genişletilmiş matrisinde yerine yazılırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} -b\alpha F_{n-2}+bF_{n-1} & -b\alpha F_{m-2}+bF_{m-1} & a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ -b\alpha F_{n-3}+bF_{n-2} & -b\alpha F_{m-3}+bF_{m-2} & a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2} \end{array}\right] \tag{3.28}$$

matrisi elde edilir. (3.28) matrisi $-b$ parantezine alınıp $\alpha F_{n-2}-F_{n-1}$ yerine $-\alpha^2(-\alpha)^{-n}$ ve $\alpha F_{n-3}-F_{n-2}$ yerine $\alpha^3(-\alpha)^{-n}$ yazılarak Sonuç 2.8 yardımıyla düzenlenirse

$$\left[\begin{array}{cc|c} b\alpha^2(-\alpha)^{-n} & b\alpha^2(-\alpha)^{-m} & a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ -b\alpha^3(-\alpha)^{-n} & -b\alpha^3(-\alpha)^{-m} & a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2} \end{array}\right] \tag{3.29}$$

bulunur. (3.29) matrisinin birinci satırı α ile çarpılıp ikinci satıra eklenirse

$$\left[\begin{array}{cc|c} b\alpha^2(-\alpha)^{-n} & b\alpha^2(-\alpha)^{-m} & a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ 0 & 0 & a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2}+\alpha(a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1}) \end{array}\right] \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30) genişletilmiş matrisine karşılık gelen sistemin, $a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2}+\alpha(a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1})=0$ olması durumunda sonsuz çoklukta çözümü vardır aksi halde çözüm yoktur. Birinci satırda $G^{(k)}_{(a_3,b_3)} = \dfrac{G^{(k-1)}_{(a_3,b_3)}}{-\alpha}$ yazılırsa, $c_1 = t \in \mathbb{R}^*$ olmak üzere $(c_1,c_2) = \left(t, \dfrac{G^{(k-1)}_{(a_3,b_3)} + tb\alpha^3(-\alpha)^{-n}}{b\alpha^2(-\alpha)^{-m+1}} \right)$ şeklinde parametreye bağlı sonsuz çoklukta çözüm bulunur. $a = -b\beta$ yazılırsa benzer işlemler yapılarak $c_1 = t \in \mathbb{R}^*$ olmak üzere $(c_1,c_2) = \left(t, \dfrac{G^{(k-1)}_{(a_3,b_3)} + tb\beta^3(-\beta)^{-n}}{b\beta^2(-\beta)^{-m+1}} \right)$, $t \in \mathbb{R}^*$ elde edilir.

Buraya kadar yapılanlar aşağıdaki teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.6. n,m ve k tamsayı, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^*$ bilinmeyenler ve $a,b,a_3,b_3 \in \mathbb{R}^*$ olmak üzere $c_1 Q^{(n)}_{g(a,b)} + c_2 Q^{(m)}_{g(a,b)} = Q^{(k)}_{g(a_3,b_3)}$ matris denklemi için aşağıdakiler doğrudur. Sistem,

1. $m \neq n,\ \mu \neq 0$ yani $\mu(-1)^{n-1}F_{m-n} \neq 0$ durumunda

   $$(c_1,c_2) = \left(\frac{(-1)^k(-a_3 G^{(m-k+2)}_{(a,b)} + b_3 G^{(m-k+1)}_{(a,b)})}{\mu(-1)^{n-1}F_{m-n}}, \frac{(-1)^n(-aG^{(k-n+2)}_{(a_3,b_3)} + bG^{(k-n+1)}_{(a_3,b_3)})}{\mu(-1)^{n-1}F_{m-n}} \right)$$

   şeklinde tek çözüme sahiptir.

2. $m = n,\ \mu \neq 0$ olması durumunda

   i. $-aG^{(k-n+2)}_{(a_3,b_3)} + bG^{(k-n+1)}_{(a_3,b_3)} = 0$ için $a = \dfrac{bG^{(k-n+1)}_{(a_3,b_3)}}{G^{(k-n+2)}_{(a_3,b_3)}}$, $G^{(k-n+2)}_{(a_3,b_3)} \neq 0$ kabulü ile $t \in \mathbb{R}^*$ olmak üzere $(c_1,c_2) = \left(t, \dfrac{a_3 F_{k-n} + b_3 F_{k-n+1}}{b} - t \right)$ çözümüne sahiptir.

   ii. $-aG^{(k-n+2)}_{(a_3,b_3)} + bG^{(k-n+1)}_{(a_3,b_3)} \neq 0$ olması durumunda çözüme sahip değildir ve $aF_{n-2} + bF_{n-1} = 0$ ise $(c_1,c_2) = (t, \dfrac{b_3 F_{2-n}}{bF_{2-k}} - t)$ çözümü vardır.

3. $m = n, \mu = 0$ olması durumunda

   i. $a = -b\alpha$ için $a_3F_{k-3} + b_3F_{k-2} + \alpha(a_3F_{k-2} + b_3F_{k-1}) = 0$ iken $t \in \mathbb{R}^*$ olmak üzere

   $\mu = 0$ koşulu $a = -b\alpha$ için sağlanıyorsa $c_1 = t \in \mathbb{R}^*$ olmak üzere $(c_1,c_2) = \left(t, \dfrac{a_3F_{k-3} + b_3F_{k-2}}{b\alpha^2(-\alpha)^{-n+1}} - t \right)$ çözümüne sahiptir. $\mu = 0$ koşulu $a = -b\beta$ için sağlanıyorsa $c_1 = t \in \mathbb{R}^*$ olmak üzere $(c_1, c_2) = \left(t, \dfrac{a_3 F_{k-3} + b_3 F_{k-2}}{b\beta^2 (-\beta)^{-n+1}} - t \right)$ çözümüne sahiptir.

ii. $a_3 F_{k-3} + b_3 F_{k-2} + \alpha(a_3 F_{k-2} + b_3 F_{k-1}) \neq 0$ olması durumunda çözüme sahip değildir.

4. $m \neq n, \mu = 0$ olması durumunda

i. $a_3 F_{k-3} + b_3 F_{k-2} + \alpha(a_3 F_{k-2} + b_3 F_{k-1}) = 0$ için $t \in \mathbb{R}^*$ olmak üzere,

$\mu = 0$ koşulu $a = -b\alpha$ için sağlanıyorsa $(c_1, c_2) = \left(t, \dfrac{G_{(a_3,b_3)}^{(k-1)} + tb\alpha^3 (-\alpha)^{-n}}{b\alpha^2 (-\alpha)^{-m+1}} \right)$

çözümüne sahiptir. $\mu = 0$ koşulu $a = -b\beta$ için sağlanıyorsa $c_1 = t \in \mathbb{R}^*$ olmak üzere $(c_1, c_2) = \left(t, \dfrac{G_{(a_3,b_3)}^{(k-1)} + tb\beta^3 (-\beta)^{-n}}{b\beta^2 (-\beta)^{-m+1}} \right)$ çözümüne sahiptir.

ii. $a_3 F_{k-3} + b_3 F_{k-2} + \alpha(a_3 F_{k-2} + b_3 F_{k-1}) \neq 0$ olması durumunda çözüme sahip değildir.

Örnek 3.7. $c_1 Q_{g(2,3)}^{(4)} + c_2 Q_{g(2,3)}^{(5)} = Q_{g(5,7)}^{(6)}$ eşitliğini sağlayan c_1, c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $m = 5,\ n = 4,\ k = 6,\ a_1 = a_2 = 2,\ a_3 = 5,\ b_1 = b_2 = 3,\ b_3 = 7$ ifadelerini (3.4)'te yerine yazalım. Buradan

$$c_1 \begin{bmatrix} 2F_3 + 3F_4 & 2F_2 + 3F_3 \\ 2F_2 + 3F_3 & 2F_1 + 3F_2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2F_4 + b_2 F_5 & 2F_3 + b_2 F_4 \\ 2F_3 + b_2 F_4 & 2F_2 + b_2 F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5F_5 + 7F_6 & 5F_4 + 7F_5 \\ 5F_4 + 7F_5 & 5F_3 + 7F_4 \end{bmatrix}$$

sistemi yazılır. Burada Fibonacci sayılarının değerleri yerine yazılırsa

$$c_1 \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 21 & 13 \\ 13 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 & 50 \\ 50 & 31 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu matris denklemine denk olarak doğrusal sistem şeklinde yazılırsa

$$13c_1 + 21c_2 = 56$$
$$8c_1 + 13c_2 = 50$$
$$5c_1 + 8c_2 = 31$$

denklem sistemi yazılır. Bu denklem sistemi çözülürse $c_1 = 3$ ve $c_2 = 2$ olarak bulunur. Gerçekten, Teorem 3.6 kullanılarak $m \neq n$ ve $\mu \neq 0$ olması dikkate alındığında $(c_1, c_2) = \left(\dfrac{(-1)^6(-5G_{(2,3)}^{(1)} + 7G_{(2,3)}^{(0)})}{1(-1)^3 F_1}, \dfrac{(-1)^4(-2G_{(5,7)}^{(4)} + 3G_{(5,7)}^{(3)})}{1(-1)^3 F_1} \right) = (3, 2)$ elde edilir.

Örnek 3.8. $c_1 Q_{g(2,3)}^{(5)} + c_2 Q_{g(2,3)}^{(5)} = Q_{g(5,7)}^{(6)}$ eşitliğini sağlayan c_1, c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $m = n = 5,\ k = 6,\ a_1 = a_2 = 2,\ a_3 = 5,\ b_1 = b_2 = 3,\ b_3 = 7$ ifadeleri (3.4)'te yerine yazılırsa

$$c_1 \begin{bmatrix} 2F_4 + b_2 F_5 & 2F_3 + b_2 F_4 \\ 2F_3 + b_2 F_4 & 2F_2 + b_2 F_3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2F_4 + b_2 F_5 & 2F_3 + b_2 F_4 \\ 2F_3 + b_2 F_4 & 2F_2 + b_2 F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5F_5 + 7F_6 & 5F_4 + 7F_5 \\ 5F_4 + 7F_5 & 5F_3 + 7F_4 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan da ortak çarpan parantezine alınır ve Fibonacci sayılarının değerleri yerine yazılarak düzenleme yapılırsa,

$$(c_1 + c_2) \begin{bmatrix} 21 & 13 \\ 13 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 50 \\ 50 & 31 \end{bmatrix}$$

olur. Matris denklemi veya denk olarak doğrusal sistem şeklinde yazılırsa

$$21(c_1 + c_2) = 81$$
$$13(c_1 + c_2) = 50$$
$$8(c_1 + c_2) = 31$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemini sağlayan $c_1,\ c_2$ bulunamaz. Yani bu sistem tutarsızdır. Gerçekten, Teorem 3.6 kullanılarak $m=n$ ve $\mu \neq 0$ olması dikkate alındığında $-2G^{(3)}_{(5,7)}+3G^{(2)}_{(5,7)}=-3\neq 0$ olduğundan çözüm yoktur.

Eğer $c_1 Q^{(5)}_{g(14,24)}+c_2 Q^{(5)}_{g(14,24)}=Q^{(6)}_{g(5,7)}$ eşitliğini sağlayan c_1, c_2 değerlerini bulmak istersek yani $m=n=5,\ k=6,\ a_1=a_2=14,\ a_3=5,\ b_1=b_2=24,\ b_3=7$ ifadeleri (3.4) ’te yerine yazılırsa denk olarak

$$c_1\begin{bmatrix}14F_4+24F_5 & 14F_3+24F_4\\ 14F_3+24F_4 & 14F_2+24F_3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}14F_4+24F_5 & 14F_3+24F_4\\ 14F_3+24F_4 & 14F_2+24F_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5F_5+7F_6 & 5F_4+7F_5\\ 5F_4+7F_5 & 5F_3+7F_4\end{bmatrix}$$

sistemi bulunur. Burada Fibonacci sayılarının değerleri yerine yazılırsa

$$(c_1+c_2)\begin{bmatrix}162 & 100\\ 100 & 62\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}81 & 50\\ 50 & 31\end{bmatrix}$$

matris denklemi veya denk olarak doğrusal sistem şeklinde yazılırsa

$$162(c_1+c_2)=81$$
$$100(c_1+c_2)=50$$
$$62(c_1+c_2)=31$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Buradan $c_1+c_2=\dfrac{1}{2}$ olduğu görülür. $c_1=t,\ t\in\mathbb{R}^*$ olmak üzere $(c_1,c_2)=(t,\dfrac{1}{2}-t)$ olarak genel çözüm elde edilir.

Gerçekten, Teorem 3.6 kullanılarak $m=n$ ve $\mu \neq 0$ olması dikkate alındığında $-14G^{(3)}_{(5,7)} + 24G^{(2)}_{(5,7)} = 0$ olduğundan. $(c_1, c_2) = \left(t, \dfrac{5F_1 + 7F_2}{24} - t\right) = \left(t, \dfrac{1}{2} - t\right)$ sonsuz çözümü elde edilir.

Örnek 3.9. $c_1 Q^{(5)}_{g(-3\alpha,3)} + c_2 Q^{(5)}_{g(-3\alpha,3)} = Q^{(6)}_{g(-(11+5\sqrt{5}),(7+3\sqrt{5}))}$ eşitliğini sağlayan $c_1,\ c_2$ değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $m=n=5,\ k=6$ $a_1 = a_2 = -3\alpha,\ a_3 = -(11+5\sqrt{5}),\ b_1 = b_2 = 3,\ b_3 = 7+3\sqrt{5}$ ifadelerini (3.4)'te yazarak sistemi Fibonacci sayılarının değerlerini yerine yazılarak düzenlenirse

$$c_1\begin{bmatrix} -3\alpha F_4 + 3F_5 & -3\alpha F_3 + 3F_4 \\ -3\alpha F_3 + 3F_4 & -3\alpha F_2 + 3F_3 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -3\alpha F_4 + 3F_5 & -3\alpha F_3 + 3F_4 \\ -3\alpha F_3 + 3F_4 & -3\alpha F_2 + 3F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(11+5\sqrt{5})F_5 + (7+3\sqrt{5})F_6 & -(11+5\sqrt{5})F_4 + (7+3\sqrt{5})F_5 \\ -(11+5\sqrt{5})F_4 + (7+3\sqrt{5})F_5 & -(11+5\sqrt{5})F_3 + (7+3\sqrt{5})F_4 \end{bmatrix}$$

$$(c_1 + c_2)\begin{bmatrix} -9\alpha + 15 & -6\alpha + 9 \\ -6\alpha + 9 & -3\alpha + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} & 2 \\ 2 & -1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

veya denk olarak

$$\begin{aligned} &(c_1 + c_2)(-9\alpha + 15) = 1-\sqrt{5} \\ &(c_1 + c_2)(-6\alpha + 9) = 2 \\ &(c_1 + c_2)(-3\alpha + 6) = -1-\sqrt{5} \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Buradan $c_1 + c_2$'yi bulmak için genişletilmiş matris yazılır ve elementer satır işlemleri uygulanırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} -9\alpha + 15 & -9\alpha + 15 & 1-\sqrt{5} \\ -6\alpha + 9 & -6\alpha + 9 & 2 \\ -3\alpha + 6 & -3\alpha + 6 & -1-\sqrt{5} \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 4+2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

bulunur. Buradan $t \in \mathbb{R}^*$ olmak üzere $(c_1, c_2) = (t, \frac{-2(2+\sqrt{5})}{3} - t)$ olarak bulunur.

Gerçekten, Teorem 3.6'ya göre $m = n$ ve $\mu = 0$ olması durumunda $a = -b\alpha$ ise $-(11+5\sqrt{5})F_3 + (7+3\sqrt{5})F_4 + \alpha(-(11+5\sqrt{5})F_4 + (7+3\sqrt{5})F_5) = 0$ için

$$(c_1, c_2) = \left(t, \frac{-(11+5\sqrt{5})F_3 + (7+3\sqrt{5})F_4}{3\alpha^2(-\alpha)^{-5+1}} - t\right) = \left(t, \frac{-1-\sqrt{5}}{3\alpha^2(-\alpha)^{-4}} - t\right) = \left(t, \frac{-2\alpha^3}{3} - t\right)$$
$$= \left(t, \frac{-2(2+\sqrt{5})}{3} - t\right),\ t \in \mathbb{R}^* \text{ olur.}$$

Örnek 3.10. $c_1 Q^{(4)}_{g(-3\alpha,3)} + c_2 Q^{(5)}_{g(-3\alpha,3)} = Q^{(6)}_{g(-(11+5\sqrt{5}),(7+3\sqrt{5}))}$ eşitliğini sağlayan c_1, c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $m = 5,\ n = 4,\ k = 6,\ a_1 = a_2 = -3\alpha,$ $a_3 = -(11+5\sqrt{5}),\ b_1 = b_2 = 3,\ b_3 = 7+3\sqrt{5}$ seçelim ve (3.4).'te eşitlerinin yerine yazarak düzenleyelim. Böylece

$$c_1\begin{bmatrix} -3\alpha F_3 + 3F_4 & -3\alpha F_2 + 3F_3 \\ -3\alpha F_2 + 3F_3 & -3\alpha F_1 + 3F_2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -3\alpha F_4 + 3F_5 & -3\alpha F_3 + 3F_4 \\ -3\alpha F_3 + 3F_4 & -3\alpha F_2 + 3F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(11+5\sqrt{5})F_5 + (7+3\sqrt{5})F_6 & -(11+5\sqrt{5})F_4 + (7+3\sqrt{5})F_5 \\ -(11+5\sqrt{5})F_4 + (7+3\sqrt{5})F_5 & -(11+5\sqrt{5})F_3 + (7+3\sqrt{5})F_4 \end{bmatrix}$$

$$c_1\begin{bmatrix} -6\alpha + 9 & -3\alpha + 6 \\ -3\alpha + 6 & -3\alpha + 3 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -9\alpha + 15 & -6\alpha + 9 \\ -6\alpha + 9 & -3\alpha + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} & 2 \\ 2 & -1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

veya denk olarak

$$\begin{aligned} &c_1(-6\alpha+9) + c_2(-9\alpha+15) = 1-\sqrt{5} \\ &c_1(-3\alpha+6) + c_2(-6\alpha+9) = 2 \\ &c_1(-3\alpha+3) + c_2(-3\alpha+6) = -1-\sqrt{5} \end{aligned}$$

doğrusal sistemine ulaşırız. Doğrusal sistemden $c_1 + c_2$'yi bulmak için genişletilmiş matris yazılır ve elementer satır işlemleri uygulanırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} -6\alpha+9 & -9\alpha+15 & 1-\sqrt{5} \\ -3\alpha+6 & -6\alpha+9 & 2 \\ -3\alpha+3 & -3\alpha+6 & -1-\sqrt{5} \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|c} -3 & -3\alpha+3 & 3+\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

denk genişletilmiş matrisine ulaşılır. Birinci satırdan $-3c_1+(-3\alpha+3)c_2=3+\sqrt{5}$ olmak üzere $(c_1,c_2)=(t,\dfrac{3+\sqrt{5}+3t}{-3\alpha+3}),\ t\in\mathbb{R}^*$ olarak bulunur. Gerçekten, Teorem 3.6'ya göre $\mu=0$ olması $a=-b\alpha$ için sağlanıyorsa ve $m\neq n$ olması durumunda $-(11+5\sqrt{5})F_3+(7+3\sqrt{5})F_4+\alpha(-(11+5\sqrt{5})F_4+(7+3\sqrt{5})F_5)=0$ için $(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{G^{(5)}_{(-(11+5\sqrt{5}),7+3\sqrt{5})}+t3\alpha^3(-\alpha)^{-4}}{3\alpha^2(-\alpha)^{-4}}\right),\ t\in\mathbb{R}^*$ çözümü vardır. Bu ifade düzenlenirse $(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{-1-\sqrt{5}+3t\alpha^3(-\alpha)^{-4}}{3\alpha^2(-\alpha)^{-4}}\right),\ t\in\mathbb{R}^*$ olarak bulunur.

Eğer $c_1Q^{(4)}_{g(-3\alpha,3)}+c_2Q^{(5)}_{g(-3\alpha,3)}=Q^{(6)}_{g(5,7)}$ eşitliğini sağlayan c_1,c_2 değerlerini bulunmak istenirse yani $m=5,\ n=4,\ k=6,\ a_1=a_2=-3\alpha,\ a_3=5,\ b_1=b_2=3,\ b_3=7$ ifadelerini (3.4)'te yazarak sistemi düzenleyelim.

$$c_1\begin{bmatrix} -3\alpha F_3+3F_4 & -3\alpha F_2+3F_3 \\ -3\alpha F_2+3F_3 & -3\alpha F_1+3F_2 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} -3\alpha F_4+3F_5 & -3\alpha F_3+3F_4 \\ -3\alpha F_3+3F_4 & -3\alpha F_2+3F_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5F_5+7F_6 & 5F_4+7F_5 \\ 5F_4+7F_5 & 5F_3+7F_4 \end{bmatrix}$$

$$c_1\begin{bmatrix} -6\alpha+9 & -3\alpha+6 \\ -3\alpha+6 & -3\alpha+3 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} -9\alpha+15 & -6\alpha+9 \\ -6\alpha+9 & -3\alpha+6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 81 & 50 \\ 50 & 36 \end{bmatrix}$$

veya denk olarak

$$c_1(-6\alpha+9)+c_2(-9\alpha+15)=81$$
$$c_1(-3\alpha+6)+c_2(-6\alpha+9)=50$$
$$c_1(-3\alpha+3)+c_2(-3\alpha+6)=36$$

elde edilir. Buradan $c_1,\ c_2$ 'yi bulmak için genişletilmiş matris yazılır ve elementer satır işlemleri uygulanırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} -6\alpha+9 & -9\alpha+15 & 81 \\ -3\alpha+6 & -6\alpha+9 & 50 \\ -3\alpha+3 & -3\alpha+6 & 36 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2+S_3\to S_2} \left[\begin{array}{cc|c} -6\alpha+9 & -9\alpha+15 & 81 \\ -6\alpha+9 & -9\alpha+15 & 86 \\ -3\alpha+3 & -3\alpha+6 & 36 \end{array}\right]$$

bulunur. Burada elde edilen denk matrisin birinci ve ikinci satırına dikkat edilirse denklem sistemini sağlayan $c_1,\ c_2$ bulunamaz. Gerçekten, Teorem 3.6'ya göre $m \neq n$ ve $\mu = 0$ olması durumunda $a = -b\alpha$ ise $5F_3 + 7F_4 + \alpha(5F_4 + 7F_5) \neq 0$ olduğundan çözüm yoktur.

Durum 3: $a_1 = a_3 = a \neq a_2,\ b_1 = b_3 = b \neq b_2$ olması durumu:

Verilen şartlar (3.8) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} aF_{n-2}+bF_{n-1} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aF_{k-2}+bF_{k-1} \\ aF_{k-3}+bF_{k-2} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

matris denklemi elde edilir. (3.31) matris denkleminin katsayılar matrisinin determinantı

$$(aF_{n-2}+bF_{n-1})(a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2}) - (aF_{n-3}+bF_{n-2})(a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1})$$

olur. Bu determinant ortak katsayı parantezine alınıp Teorem 2.11 dikkate alınarak düzenlenirse

$$\begin{vmatrix} aF_{n-2}+bF_{n-1} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2} \end{vmatrix} = (-1)^n(-aG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)} + bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+1)}) \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.32) determinantı $-aG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}+bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+1)}=0$ olması durumunda sıfır aksi halde sıfırdan faklı olur. Şimdi bu durumları inceleyelim.

Durum 3.1: $-aG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}+bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+1)}\neq 0$ *olması durumu*

Bu durumda Cramer kuralı ile Teorem 2.11'den

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix} aF_{k-2}+bF_{k-1} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} \\ aF_{k-3}+bF_{k-2} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} aF_{n-2}+bF_{n-1} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2}\end{vmatrix}}=\frac{(-1)^k(-aG_{(a_2,b_2)}^{(m-k+2)}+bG_{(a_2,b_2)}^{(m-k+1)})}{(-1)^n(-aG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}+bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+1)})}$$

ve

$$c_2=\frac{\begin{vmatrix} aF_{n-2}+bF_{n-1} & aF_{k-2}+bF_{k-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & aF_{k-3}+bF_{k-2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} aF_{n-2}+bF_{n-1} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} \\ aF_{n-3}+bF_{n-2} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2}\end{vmatrix}}=\frac{(-1)^{n-1}\mu F_{k-n}}{(-1)^n(-aG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}+bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+1)})}$$

olarak bulunur. $-aG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}+bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+1)}\neq 0$ için (3.31) matris denkleminin tek çözümü vardır.

Durum 3.2: $aG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}=bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+1)}$ *olması durumu*

Bu koşul altında (3.32) determinantı sıfır olur. $G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}\neq 0$ olmak üzere $a=\dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+1)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}}$ ifadesi (3.31) matris denkleminin genişletilmiş matrisinde yerine yazılırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+1)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}}F_{n-2}+bF_{n-1} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} & \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+1)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}}F_{k-2}+bF_{k-1} \\ \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+1)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}}F_{n-3}+bF_{n-2} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2} & \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+1)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}}F_{k-3}+bF_{k-2} \end{array}\right] \tag{3.33}$$

genişletilmiş matrisi elde edilir. (3.33) genişletilmiş matrisinde payda eşitlensin. Payda eşitlemek için birinci satır birinci sütun elemanının Teorem 2.16 yardımıyla m yerine $m-n+2$, n yerine $n-2$ alınarak düzenlenirse $G_{(a_2,b_2)}^{(m)}$ ifadesine ve benzer şekilde Teorem 2.16 yardımıyla ikinci satır birinci sütun elemanının m yerine $m-n+2$, n yerine $n-3$ alınarak düzenlenirse $G_{(a_2,b_2)}^{(m-1)}$ ifadesine eşit olduğu görülür. Aynı şekilde birinci satır üçüncü sütun elemanı ve ikinci satır üçüncü sütun elemanı için Teorem 2.16 yardımıyla uygun m ve n değerleri yazılarak eşit ifadeler elde edilir ve elde edilen eşit ifadeler (3.33)'te yazılırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} & \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+k)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}} \\ \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m-1)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2} & \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+k-1)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}} \end{array}\right] \tag{3.34}$$

genişletilmiş matrisine ulaşılır. $G_{(a_2,b_2)}^{(m)} \neq 0$ olmak üzere birinci satır $-\dfrac{G_{(a_2,b_2)}^{(m-1)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m)}}$ ile çarpılıp ikinci satıra eklenirse

$$\left[\begin{array}{cc|c} \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} & \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+k)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}} \\ 0 & 0 & \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+k-1)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}} - \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+k)}G_{(a_2,b_2)}^{(m-1)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}G_{(a_2,b_2)}^{(m)}} \end{array}\right] \tag{3.35}$$

genişletilmiş matrisi bulunur. (3.35)'in ikinci satır üçüncü sütun elemanında payda eşitlenir ve Teorem 2.15 de x yerine m, y yerine $m-n+k$ alınarak düzenlenirse

$$\left[\begin{array}{cc|c} \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} & \dfrac{bG_{(a_2,b_2)}^{(m-n+k)}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}} \\ 0 & 0 & \dfrac{b\mu(-1)^{m-1}F_{k-n}}{G_{(a_2,b_2)}^{(m)}G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}} \end{array}\right] \tag{3.36}$$

bulunur.

(3.36)’ya göre, aşağıdakiler doğrudur. Sistemin,

1. $\mu \neq 0$ ve $k \neq n$ için çözüm yoktur.
2. $k = n$ ve $\mu \neq 0$ için parametreye bağlı çözüm bulunur.
3. $k = n$ ve $\mu = 0$ için parametreye bağlı çözüm bulunur.
4. $k \neq n$ ve $\mu = 0$ için parametreye bağlı çözüm bulunur.

Şimdi 2, 3 ve 4 durumlarına ilişkin parametreye bağlı çözümleri bulalım.
2. durum, yani $k = n$ ve $\mu \neq 0$ durumu (3.36) genişletilmiş matrisinde yazılarak gerekli işlemler yapılırsa,

$$(c_1, c_2) = \left(t, \frac{b - tb}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}} \right) = \left(t, \frac{b(1-t)}{G_{(a_2,b_2)}^{(m-n+2)}} \right) \tag{3.37}$$

şeklinde $t \in \mathbb{R}^*$ parametresine bağlı sonsuz çoklukta çözüm bulunur.

3. durumda verilen $\mu = 0$ ve $k = n$ olması $a_2 = -b_2\alpha$ ya da $a_2 = -b_2\beta$ olması durumunda mümkün olur. Böylece (3.37)’de $a_2 = -b_2\alpha$ için

$$(c_1, c_2) = \left(t, \frac{b(1-t)}{b_2(-\alpha)^{n-m}} \right), \ t \in \mathbb{R}^*$$

$a_2 = -b_2\beta$ için

$$(c_1, c_2) = \left(t, \frac{b(1-t)}{b_2(-\beta)^{n-m}} \right), \ t \in \mathbb{R}^*$$

parametrik çözümleri bulunur.

4. durumu (3.36)’da yazılırsa $a_2 = -b_2\alpha$ için

$$(c_1,c_2)=\left(t,\frac{b((-\alpha)^{n-k}-t)}{b_2(-\alpha)^{n-m}}\right),\ t\in\mathbb{R}^*$$

$a_2=-b_2\beta$ için

$$(c_1,c_2)=\left(t,\frac{b((-\beta)^{n-k}-t)}{b_2(-\beta)^{n-m}}\right),\ t\in\mathbb{R}^*$$

elde edilir.

Eğer (3.34)'te $G^{(m)}_{(a_2,b_2)}=0$ ise

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \dfrac{bG^{(m-n+k)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}} \\ \dfrac{bG^{(m-1)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2} & \dfrac{bG^{(m-n+k-1)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}} \end{array}\right] \tag{3.38}$$

matrisi elde edilir. (3.38)'in tutarlı olması için $\dfrac{bG^{(m-n+k)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}}=0$ olmalıdır. $b\in\mathbb{R}^*$ olduğundan bu durum $G^{(m-n+k)}_{(a_2,b_2)}=0$ halinde mümkün olur. O halde $G^{(m)}_{(a_2,b_2)}=a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1}=0$ ve $G^{(m-n+k)}_{(a_2,b_2)}=a_2F_{m-n+k-2}+b_2F_{m-n+k-1}=0$ olmasını ikinci satırda yazalım. Burada $m=2$ için $b_2=0$ çelişkisi elde edileceğinden $m\neq 0$, benzer şekilde $m-n+k\neq 2$ olmalıdır. İkinci satırda denklemde $a_2=-\dfrac{b_2F_{m-1}}{F_{m-2}}$ yazılır ve Teorem 2.11, Sonuç 2.19 yardımıyla düzenlenirse $(c_1,c_2)=(t,\dfrac{b(F_{k-n-1}-t)F_{m-2}}{(-b_2)(-1)^{m-2}F_{2-n}})$ olarak bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.11. n,m ve k birer tam sayı, $c_1,c_2\in\mathbb{C}^*$ bilinmeyenler ve $a_i,b_i\in\mathbb{R}^*$, $i=1,2,3$ olmak üzere $c_1Q^{(n)}_{g(a,b)}+c_2Q^{(m)}_{g(a_2,b_2)}=Q^{(k)}_{g(a,b)}$ matris denklemini çözümleri için aşağıdakiler doğrudur. Matris denklemi

1. $-aG^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}+bG^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)}\neq 0$ olması durumunda

$$(c_1,c_2)=\left(\frac{(-1)^k(-aG^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)}+bG^{(m-k+1)}_{(a_2,b_2)})}{(-1)^n(-aG^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}+bG^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)})},\frac{(-1)^{n-1}\mu F_{k-n}}{(-1)^n(-aG^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}+bG^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)})}\right)$$

şeklinde tek çözüme sahiptir.

2. $aG^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}=bG^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)}$ olması durumunda $G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}\neq 0$ olmak üzere

$G^{(m)}_{(a_2,b_2)}=0$ ise $(c_1,c_2)=(t,\dfrac{b(F_{k-n-1}-t)F_{m-2}}{(-b_2)(-1)^{m-2}F_{2-n}})$ şeklinde $t\in\mathbb{R}^*$ parametresine bağlı sonsuz çoklukta çözüme sahiptir. $G^{(m)}_{(a_2,b_2)}\neq 0$ ise

i. $\mu\neq 0$ ve $k\neq n$ için çözüme sahip değildir.

ii. $k=n$ ve $\mu\neq 0$ için $(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{b-tb}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}}\right)=\left(t,\dfrac{b(1-t)}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}}\right)$ şeklinde $t\in\mathbb{R}^*$ parametresine bağlı sonsuz çoklukta çözüme sahiptir.

iii. $k=n$ ve $\mu=0$ iken $a_2=-b_2\alpha$ için $(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{b(1-t)}{b_2(-\alpha)^{n-m}}\right)$, $t\in\mathbb{R}^*$ ve $a_2=-b_2\beta$ için

$(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{b(1-t)}{b_2(-\beta)^{n-m}}\right)$, $t\in\mathbb{R}^*$ şeklinde $t\in\mathbb{R}^*$ parametresine bağlı sonsuz çözüm bulunur.

iv. $k\neq n$ ve $\mu=0$ iken $a_2=-b_2\alpha$ için $(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{b((-\alpha)^{n-k}-t)}{b_2(-\alpha)^{n-m}}\right)$, $t\in\mathbb{R}^*$

ve $a_2=-b_2\beta$ için $(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{b((-\beta)^{n-k}-t)}{b_2(-\beta)^{n-m}}\right)$, $t\in\mathbb{R}^*$ şeklinde $t\in\mathbb{R}^*$ parametresine bağlı sonsuz çözüm bulunur.

Örnek 3.12. $c_1Q^{(4)}_{g(2,3)}+c_2Q^{(5)}_{g(5,7)}=Q^{(6)}_{g(2,3)}$ eşitliğini sağlayan c_1,c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $m=5,\ n=4,\ k=6,\ a_1=a_3=2,\ a_2=5,\ b_1=b_3=3,\ b_2=7$ ifadeleri (3.4)'te yerine yazalım. Buradan

$$c_1\begin{bmatrix}2F_3+3F_4 & 2F_2+3F_3\\ 2F_2+3F_3 & 2F_1+3F_2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}5F_4+7F_5 & 5F_3+7F_4\\ 5F_3+7F_4 & 5F_2+7F_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2F_5+3F_6 & 2F_4+3F_5\\ 2F_4+3F_5 & 2F_3+3F_4\end{bmatrix}$$

yani,

$$c_1\begin{bmatrix}13 & 8\\ 8 & 5\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}50 & 31\\ 31 & 19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}34 & 21\\ 21 & 13\end{bmatrix}$$

veya matris eşitliğinden,

$$\begin{aligned}13c_1+50c_2&=34\\ 8c_1+31c_2&=21\\ 5c_1+19c_2&=13\end{aligned}$$

denklem sistemi yazılır. Bu denklem sistemi çözülürse $c_1=\frac{4}{3}, c_2=\frac{1}{3}$ olarak bulunur. Gerçekten, Teorem 3.11 kullanılarak $-2G_{(5,7)}^{(3)}+7G_{(5,7)}^{(2)}=-3\neq 0$ olması dikkate alındığında $(c_1,c_2)=\left(\frac{(-1)^6(-2G_{(5,7)}^{(1)}+3G_{(5,7)}^{(0)})}{(-1)^4(-3)},\frac{(-1)^3F_2}{(-1)^4(-3)}\right)=(\frac{4}{3},\frac{1}{3})$ elde edilir.

Örnek 3.13. $c_1Q_{g(14,24)}^{(4)}+c_2Q_{g(5,7)}^{(5)}=Q_{g(14,24)}^{(6)}$ eşitliğini sağlayan c_1,c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $m=5,\ n=4,\ k=6,\ a_1=a_3=14,\ a_2=5,$ $b_1=b_3=24,\ b_2=7$ ifadeleri (3.4)'te yerine yazılırsa

$$c_1\begin{bmatrix}14F_3+24F_4 & 14F_2+24F_3\\ 14F_2+24F_3 & 14F_1+24F_2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}5F_4+7F_5 & 5F_3+7F_4\\ 5F_3+7F_4 & 5F_2+7F_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14F_5+24F_6 & 14F_4+24F_5\\ 14F_4+24F_5 & 14F_3+24F_4\end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan da,

$$c_1\begin{bmatrix}100 & 62\\ 62 & 38\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}50 & 31\\ 31 & 19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}262 & 162\\ 162 & 100\end{bmatrix}$$

olur. Matris denklemi doğrusal sistem şeklinde yazılırsa

$$100c_1+50c_2=262$$
$$62c_1+31c_2=162$$
$$38c_1+19c_2=100$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemini sağlayan c_1, c_2 bulunamaz. Yani bu sistem tutarsızdır. Gerçekten, Teorem 3.11 kullanılarak $-14G_{(5,7)}^{(3)}+24G_{(5,7)}^{(2)}=0$ olması durumunda $G_{(5,7)}^{(4)}=5F_2+7F_3=19\neq 0$ olmak üzere $G_{(5,7)}^{(5)}\neq 0$ ise $\mu\neq 0$ ve $k\neq n$ için çözüm yoktur.

Eğer $\mu\neq 0$ ve $k=n$ olsaydı yani $c_1Q_{g(14,24)}^{(4)}+c_2Q_{g(5,7)}^{(5)}=Q_{g(14,24)}^{(4)}$ eşitliğini sağlayan c_1, c_2 değerlerini bulmaya çalışırsak (3.4) ifadesine denk olarak

$$c_1\begin{bmatrix}14F_3+24F_4 & 14F_2+24F_3\\ 14F_2+24F_3 & 14F_1+24F_2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}5F_4+7F_5 & 5F_3+7F_4\\ 5F_3+7F_4 & 5F_2+7F_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14F_3+24F_4 & 14F_2+24F_3\\ 14F_2+24F_3 & 14F_1+24F_2\end{bmatrix}$$

sistemi yazılır. Burada Fibonacci sayılarının değerleri yerine yazılırsa

$$c_1\begin{bmatrix}100 & 62\\ 62 & 38\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}50 & 31\\ 31 & 19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100 & 62\\ 62 & 38\end{bmatrix}$$

matris denklemi veya denk olarak doğrusal sistem şeklinde yazılırsa

$$100c_1+50c_2=100$$
$$62c_1+31c_2=62$$
$$38c_1+19c_2=38$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Buradan $2c_1+c_2=2$ olduğu görülür. $c_1=t\in\mathbb{R}^*$ olmak üzere $(c_1,c_2)=(t,2-2t)=(t,2(1-t))$ genel çözüm elde edilir. Gerçekten, Teorem 3.11 kullanılarak $-14G_{(5,7)}^{(3)}+24G_{(5,7)}^{(2)}=0$ olması durumunda

$G^{(4)}_{(5,7)} = 5F_2 + 7F_3 = 19 \neq 0$ olmak üzere $G^{(5)}_{(5,7)} \neq 0$ ise $\mu \neq 0$ ve $k = n$ için $(c_1, c_2) = \left(t, \dfrac{24(1-t)}{G^{(3)}_{(5,7)}} \right) = \left(t, \dfrac{24(1-t)}{12} \right) = (t, 2(1-t))$, $t \in \mathbb{R}^*$ sonsuz çözümü elde edilir.

Örnek 3.14. $c_1 Q^{(4)}_{g(1,1-\alpha)} + c_2 Q^{(5)}_{g(-7\alpha,7)} = Q^{(4)}_{g(1,1-\alpha)}$ eşitliğini sağlayan c_1, c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $m = 5,\ n = k = 4,\ a_1 = a_3 = 1,\ a_2 = -7\alpha$ $b_1 = b_3 = 1-\alpha,\ b_2 = 7$ seçelim ve (3.4)'te eşitlerinin yerine yazılarak düzenleyelim. Böylece

$$c_1 \begin{bmatrix} 1F_3 + (1-\alpha)F_4 & 1F_2 + (1-\alpha)F_3 \\ 1F_2 + (1-\alpha)F_3 & 1F_1 + (1-\alpha)F_2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} (-7\alpha)F_4 + 7F_5 & (-7\alpha)F_3 + 7F_4 \\ (-7\alpha)F_3 + 7F_4 & (-7\alpha)F_2 + 7F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1F_3 + (1-\alpha)F_4 & 1F_2 + (1-\alpha)F_3 \\ 1F_2 + (1-\alpha)F_3 & 1F_1 + (1-\alpha)F_2 \end{bmatrix}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 5-3\alpha & 3-2\alpha \\ 3-2\alpha & 2-\alpha \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -21\alpha + 35 & -14\alpha + 21 \\ -14\alpha + 21 & -7\alpha + 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-3\alpha & 3-2\alpha \\ 3-2\alpha & 2-\alpha \end{bmatrix}$$

veya denk olarak

$$\begin{aligned} c_1(5-3\alpha) + c_2(-21\alpha + 35) &= 5 - 3\alpha \\ c_1(3-2\alpha) + c_2(-14\alpha + 21) &= 3 - 2\alpha \\ c_1(2-\alpha) + c_2(-7\alpha + 14) &= 2 - \alpha \end{aligned}$$

doğrusal sistemine ulaşırız. Doğrusal sistemden c_1 ve c_2'yi bulmak için genişletilmiş matris yazılır ve elementer satır işlemleri uygulanırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5-3\alpha & -21\alpha + 35 & 5-3\alpha \\ 3-2\alpha & -14\alpha + 21 & 3-2\alpha \\ 2-\alpha & -7\alpha + 14 & 2-\alpha \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

denk genişletilmiş matrisine ulaşılır. Birinci satırdan $c_1 + 7c_2 = 1$ olmak üzere $(c_1, c_2) = (t, \dfrac{1-t}{7}),\ t \in \mathbb{R}^*$ olarak bulunur.

Gerçekten, Teorem 3.11 kullanılarak $1G^{(3)}_{(-7\alpha,7)} = (1-\alpha)G^{(2)}_{(-7\alpha,7)}$ olması durumunda $G^{(3)}_{(-7\alpha,7)} \neq 0$ olmak üzere $G^{(5)}_{(-7\alpha,7)} \neq 0$ ise $k = n$ ve $\mu = 0$ iken $a_2 = -b_2\alpha$ için $(c_1, c_2) = \left(t, \dfrac{(1-\alpha)(1-t)}{7(-\alpha)^{-1}} \right) = (t, \dfrac{1-t}{7}),\ t \in \mathbb{R}^*$ olarak bulunur.

Örnek 3.15. $c_1 Q^{(4)}_{g(1,1-\alpha)} + c_2 Q^{(5)}_{g(-7\alpha,7)} = Q^{(6)}_{g(1,1-\alpha)}$ eşitliğini sağlayan c_1, c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $n = 4,\ m = 5,\ k = 6,\ a_1 = a_3 = 1,\ a_2 = -7\alpha,$ $b_1 = b_3 = 1-\alpha,\ b_2 = 7$ ifadeleri (3.4)'te yazılırsa.

$$c_1 \begin{bmatrix} 1F_3 + (1-\alpha)F_4 & 1F_2 + (1-\alpha)F_3 \\ 1F_2 + (1-\alpha)F_3 & 1F_1 + (1-\alpha)F_2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} (-7\alpha)F_4 + 7F_5 & (-7\alpha)F_3 + 7F_4 \\ (-7\alpha)F_3 + 7F_4 & (-7\alpha)F_2 + 7F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1F_5 + (1-\alpha)F_6 & 1F_4 + (1-\alpha)F_5 \\ 1F_4 + (1-\alpha)F_5 & 1F_3 + (1-\alpha)F_4 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan da,

$$c_1 \begin{bmatrix} 5-3\alpha & 3-2\alpha \\ 3-2\alpha & 2-\alpha \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -21\alpha+35 & -14\alpha+21 \\ -14\alpha+21 & -7\alpha+14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13-8\alpha & 8-5\alpha \\ 8-5\alpha & 5-3\alpha \end{bmatrix}$$

matris denklemi veya denk olarak doğrusal sistem şeklinde yazılırsa

$$\begin{aligned} c_1(5-3\alpha) + c_2(-21\alpha+35) &= 13-8\alpha \\ c_1(3-2\alpha) + c_2(-14\alpha+21) &= 8-5\alpha \\ c_1(2-\alpha) + c_2(-7\alpha+14) &= 5-3\alpha \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Doğrusal sistemden c_1 ve c_2'yi bulmak için genişletilmiş matris yazılır ve elementer satır işlemleri uygulanırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5-3\alpha & -21\alpha+35 & 13-8\alpha \\ 3-2\alpha & -14\alpha+21 & 8-5\alpha \\ 2-\alpha & -7\alpha+14 & 5-3\alpha \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -7 & -2+\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

denk genişletilmiş matrisine ulaşılır. Birinci satırdan $c_1+7c_2=-\alpha+2$ olmak üzere $(c_1,c_2)=(t,\dfrac{2-\alpha-t}{7}),\ t\in\mathbb{R}^*$ olarak bulunur.

Gerçekten, Teorem 3.11 kullanılarak $1G^{(3)}_{(-7\alpha,7)}=(1-\alpha)G^{(2)}_{(-7\alpha,7)}$ olması durumunda $G^{(3)}_{(-7\alpha,7)}\neq 0$ olmak üzere $G^{(5)}_{(-7\alpha,7)}\neq 0$ ise $k\neq n$ ve $\mu=0$ iken $a_2=-b_2\alpha$ için $(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{(1-\alpha)((-\alpha)^{-2}-t)}{7(-\alpha)^{-1}}\right)=\left(t,\dfrac{(-\alpha)^{-2}-t}{7}\right),\ t\in\mathbb{R}^*$ olarak bulunur.

Durum 4: $a_i,b_i\in\mathbb{R}^*,\ i=1,2,3$ durumu:

Şartlar (3.8)'e denk olan durumu içerir. (3.8) matris denkleminin katsayılar matrisinin determinantı

$$\begin{vmatrix} a_1F_{n-2}+b_1F_{n-1} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} \\ a_1F_{n-3}+b_1F_{n-2} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2} \end{vmatrix}=(a_1F_{n-2}+b_1F_{n-1})(a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2})-(a_1F_{n-3}+b_1F_{n-2})(a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1})$$

olur. Bu determinant Teorem 2.11 ile düzenlenirse

$$\begin{vmatrix} a_1F_{n-2}+b_1F_{n-1} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} \\ a_1F_{n-3}+b_1F_{n-2} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2} \end{vmatrix}=(-1)^n(-a_1G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}+b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)}) \tag{3.39}$$

bulunur. O halde (3.39) determinantı, $a_1G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}=b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)}$ olması durumunda sıfır aksi halde sıfırdan faklı olur. Sıfırdan faklı olmasını inceleyelim.

Durum 4.1: $-a_1G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}+b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)}\neq 0$ *olması durumu*

Bu durumda (3.39) determinantı sıfırdan farklı olur. Cramer metodu ve Teorem 2.11 kullanılırsa,

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix} a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} \\ a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1F_{n-2}+b_1F_{n-1} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} \\ a_1F_{n-3}+b_1F_{n-2} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2}\end{vmatrix}}=\frac{(-1)^k(-a_3G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)}+b_3G^{(m-k+1)}_{(a_2,b_2)})}{(-1)^n(-a_1G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}+b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)})}$$

ve

$$c_2=\frac{\begin{vmatrix} a_1F_{n-2}+b_1F_{n-1} & a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ a_1F_{n-3}+b_1F_{n-2} & a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1F_{n-2}+b_1F_{n-1} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} \\ a_1F_{n-3}+b_1F_{n-2} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2}\end{vmatrix}}=\frac{(-1)^n(-a_1G^{(k-n+2)}_{(a_3,b_3)}+b_1G^{(k-n+1)}_{(a_3,b_3)})}{(-1)^n(-a_1G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}+b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)})}$$

$$=\frac{(-a_1G^{(k-n+2)}_{(a_3,b_3)}+b_1G^{(k-n+1)}_{(a_3,b_3)})}{(-a_1G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}+b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)})}$$

şeklinde tek çözüm bulunur.

Durum 4.2: $-a_1G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}+b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)}=0$ *olması durumu*

Bu durumda (3.39) determinantı sıfıra eşit olur. $G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}\neq 0$ olması şartı ile (3.8) matris denkleminin genişletilmiş matrisinde $a_1=\dfrac{b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}}$ yazılırsa

$$\left[\begin{array}{cc|c} \dfrac{b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}}F_{n-2}+b_1F_{n-1} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} & a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ \dfrac{b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}}F_{n-3}+b_1F_{n-2} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2} & a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2}\end{array}\right] \tag{3.40}$$

matrisi elde edilir. (3.40) genişletilmiş matrisinin elemanlarında payda eşitlenir ve Teorem 2.16 kullanılarak düzenlenirse

$$\left[\begin{array}{cc|c} \dfrac{b_1G^{(m)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}} & a_2F_{m-2}+b_2F_{m-1} & a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ \dfrac{b_1G^{(m-1)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2} & a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2}\end{array}\right] \tag{3.41}$$

matrisi elde edilir. (3.41) genişletilmiş matrisinde birinci satır $G^{(m)}_{(a_2,b_2)} \neq 0$ şartıyla $-\dfrac{G^{(m-1)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m)}_{(a_2,b_2)}}$ ile çarpılıp ikinci satıra eklenirse denk olarak

$$\left[\begin{array}{cc|c} \dfrac{b_1 G^{(m)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}} & G^{(m)}_{(a_2,b_2)} & G^{(k)}_{(a_3,b_3)} \\ 0 & 0 & \dfrac{(-1)^k \left(a_3 G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)} - b_3 G^{(m-k+1)}_{(a_2,b_2)}\right)}{G^{(m)}_{(a_2,b_2)}} \end{array}\right] \tag{3.42}$$

matrisi elde edilir. Böylece sistemin $a_3 G^{(m-k+2)}_{(a_3,b_3)} - b_3 G^{(m-k+1)}_{(a_3,b_3)} \neq 0$ olması durumunda çözümü yoktur aksi halde sonsuz çoklukta çözüm vardır. Şimdi $a_3 G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)} = b_3 G^{(m-k+1)}_{(a_2,b_2)}$ olsun. $G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)} \neq 0$ olmak üzere $a_3 = \dfrac{b_3 G^{(m-k+1)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)}}$ ifadesi (3.42)'nin birinci satırında yerine yazılırsa

$$c_1 b_1 \frac{G^{(m)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}} + c_2 G^{(m)}_{(a_2,b_2)} = b_3 \frac{G^{(m-k+1)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)}} F_{k-2} + b_3 F_{k-1} \tag{3.43}$$

bulunur. (3.43) eşitliğinin sağ tarafında payda eşitlenir ve Teorem 2.16 kullanılarak düzenlenirse

$$c_1 b_1 \frac{G^{(m)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}} + c_2 G^{(m)}_{(a_2,b_2)} = b_3 \frac{G^{(m)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)}} \tag{3.44}$$

eşitliği elde edilir. $G^{(m)}_{(a_2,b_2)} \neq 0$ olduğundan sadeleştirme yapılırsa (3.44) denklemi

$$c_1 b_1 + c_2 G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)} = b_3 \frac{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)}} \tag{3.45}$$

haline gelir. Buradan $(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{b_3}{G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)}}-\dfrac{tb_1}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}}\right)$ olacak şekilde $t\in\mathbb{R}^*$ parametresine bağlı sonsuz çoklukta çözüm bulunur.

$G^{(m)}_{(a_2,b_2)}=0$ olması durumunu ele alalım. Bu durumda (3.41) genişletilmiş matrisi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1} \\ \dfrac{b_1G^{(m-1)}_{(a_2,b_2)}}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}} & a_2F_{m-3}+b_2F_{m-2} & a_3F_{k-3}+b_3F_{k-2} \end{array}\right] \tag{3.46}$$

matrisine dönüşür. (3.46) genişletilmiş matrisine karşılık gelen sistemin tutarlı olması $a_3F_{k-2}+b_3F_{k-1}=0$ ile mümkündür. $k=2$ için $b_3=0$ çelişkisi olacağından $k\neq 2$ olduğu açıktır. (3.46)'nın ikinci satırında $a_3=-\dfrac{b_3F_{k-1}}{F_{k-2}}$ yazılır, Teorem 2.11 ve Sonuç 2.19 ile düzenlenirse

$$(c_1,c_2)=\left(t,\left(\frac{(-b_3(-1)^{k-2})}{F_{k-2}}-\frac{tb_1}{F_{2-n}}\right)\frac{F_{m-2}}{(-b_2)(-1)^{m-2}}\right),\ \mathrm{t}\in\mathbb{R}^*$$

çözümü bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremin ispatı yapılmış oldu.

Teorem 3.16. n,m ve k birer tamsayı, $c_1,c_2\in\mathbb{C}^*$ bilinmeyenler ve $a_i,b_i\in\mathbb{R}^*,\ i=1,2,3$ olmak üzere $c_1Q^{(n)}_{g(a_1,b_1)}+c_2Q^{(m)}_{g(a_2,b_2)}=Q^{(k)}_{g(a_3,b_3)}$ matris denkleminin çözümleri için aşağıdakiler doğrudur. Sistem

1. $-a_1G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}+b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)}\neq 0$ olması durumunda
$$(c_1,c_2)=\left(\frac{(-1)^k(-a_3G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)}+b_3G^{(m-k+1)}_{(a_2,b_2)})}{(-1)^n(-a_1G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}+b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)})},\frac{(-a_1G^{(k-n+2)}_{(a_3,b_3)}+b_1G^{(k-n+1)}_{(a_3,b_3)})}{(-a_1G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}+b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)})}\right)$$ şeklinde tek çözüme sahiptir.

2. $-a_1G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}+b_1G^{(m-n+1)}_{(a_2,b_2)}=0$ olması durumunda, $G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}\neq 0$ ise

i. $a_3G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)}-b_3G^{(m-k+1)}_{(a_2,b_2)}\neq 0$ ise çözüm yoktur.

ii. $a_3G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)}-b_3G^{(m-k+1)}_{(a_2,b_2)}=0$ ise $G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)}\neq 0$ koşuluyla

$(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{b_3}{G^{(m-k+2)}_{(a_2,b_2)}}-\dfrac{tb_1}{G^{(m-n+2)}_{(a_2,b_2)}}\right),\ t\in\mathbb{R}^*$ şeklinde sonsuz çoklukta çözüme sahiptir.

Örnek 3.17. $c_1Q^{(4)}_{g(2,3)}+c_2Q^{(5)}_{g(5,7)}=Q^{(6)}_{g(6,4)}$ eşitliğini sağlayan c_1,c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. $m=5,\ n=4,\ k=6,\ a_1=2,\ a_2=5,\ a_3=6\ b_1=3,\ b_2=7,\ b_3=4$ ifadelerini (3.4).'te yerine yazalım. Buradan

$$c_1\begin{bmatrix}2F_3+3F_4 & 2F_2+3F_3\\ 2F_2+3F_3 & 2F_1+3F_2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}5F_4+7F_5 & 5F_3+7F_4\\ 5F_3+7F_4 & 5F_2+7F_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6F_5+4F_6 & 6F_4+4F_5\\ 6F_4+4F_5 & 6F_3+4F_4\end{bmatrix}$$

yani,

$$c_1\begin{bmatrix}13 & 8\\ 8 & 5\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}50 & 31\\ 31 & 19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}62 & 38\\ 38 & 24\end{bmatrix}$$

veya matris eşitliğinden,

$$13c_1+50c_2=62$$
$$8c_1+31c_2=38$$
$$5c_1+19c_2=24$$

denklem sistemi yazılır. Bu denklem sistemi çözülürse $c_1=\dfrac{22}{3},c_2=-\dfrac{2}{3}$ olarak bulunur.

Gerçekten, Teorem 3.16 kullanılarak $-2G^{(3)}_{(5,7)}+3G^{(2)}_{(5,7)}=-3\neq 0$ olduğundan

$(c_1,c_2)=\left(\dfrac{(-1)^6(-6G^{(1)}_{(5,7)}+4G^{(0)}_{(5,7)})}{(-1)^4(-3)},\dfrac{(-2G^{(4)}_{(6,4)}+3G^{(4)}_{(6,4)})}{(-3)}\right)=\left(\dfrac{22}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ elde edilir.

Örnek 3.18. $c_1Q^{(4)}_{g(14,24)} + c_2Q^{(5)}_{g(5,7)} = Q^{(6)}_{g(6,4)}$ eşitliğini sağlayan c_1, c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $n = 4,\ m = 5,\ k = 6,\ a_1 = 14,\ a_2 = 5,\ a_3 = 6\ b_1 = 24,\ b_2 = 7,\ b_3 = 4$ ifadeleri (3.4)'te yerine yazılırsa

$$c_1\begin{bmatrix} 14F_3 + 24F_4 & 14F_2 + 24F_3 \\ 14F_2 + 24F_3 & 14F_1 + 24F_2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 5F_4 + 7F_5 & 5F_3 + 7F_4 \\ 5F_3 + 7F_4 & 5F_2 + 7F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6F_5 + 4F_6 & 6F_4 + 4F_5 \\ 6F_4 + 4F_5 & 6F_3 + 4F_4 \end{bmatrix}$$

sistemi yazılır. Burada Fibonacci sayılarının değerleri yerine yazılırsa

$$c_1\begin{bmatrix} 100 & 62 \\ 62 & 38 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 50 & 31 \\ 31 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 & 38 \\ 38 & 24 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matris denklemi veya denk olarak doğrusal sistem şeklinde yazılırsa

$$\begin{aligned} 100c_1 + 50c_2 &= 62 \\ 62c_1 + 31c_2 &= 38 \\ 38c_1 + 19c_2 &= 24 \end{aligned}$$

ya da denk olarak

$$\begin{aligned} 50(2c_1 + c_2) &= 62 \\ 31(2c_1 + c_2) &= 38 \\ 19(2c_1 + c_2) &= 24 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemini sağlayan $c_1,\ c_2$ bulunamaz. Yani bu sistem tutarsızdır.

Gerçekten, Teorem 3.16 kullanılarak $-14G^{(3)}_{(5,7)} + 24G^{(2)}_{(5,7)} = 0$ olması durumunda, $G^{(3)}_{(5,7)} \neq 0$ ise $6G^{(1)}_{(5,7)} - 4G^{(0)}_{(5,7)} = 22 \neq 0$ için çözüm yoktur.

Örnek 3.19. $c_1 Q^{(4)}_{g(14,24)} + c_2 Q^{(5)}_{g(5,7)} = Q^{(6)}_{g(6,15)}$ eşitliğini sağlayan c_1, c_2 değerlerini bulmaya çalışalım. Burada, $n=4,\ m=5,\ k=6,\ a_1=14,\ a_2=5,\ a_3=6\ b_1=24,\ b_2=7,\ b_3=15$ ifadelerini (3.4)'te yazarak sistemi düzenleyelim.

$$c_1\begin{bmatrix}14F_3+24F_4 & 14F_2+24F_3\\ 14F_2+24F_3 & 14F_1+24F_2\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}5F_4+7F_5 & 5F_3+7F_4\\ 5F_3+7F_4 & 5F_2+7F_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6F_5+15F_6 & 6F_4+15F_5\\ 6F_4+15F_5 & 6F_3+15F_4\end{bmatrix}$$

$$c_1\begin{bmatrix}100 & 62\\ 62 & 38\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}50 & 31\\ 31 & 19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}150 & 93\\ 93 & 57\end{bmatrix}$$

veya denk olarak,

$$\begin{aligned}100c_1+50c_2&=150\\ 62c_1+31c_2&=93\\ 38c_1+19c_2&=57\end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Buradan $2c_1+c_2=3$ olduğu görülür. $c_1=t\in\mathbb{R}^*$ olmak üzere $(c_1,c_2)=(t,3-2t)$ genel çözüm elde edilir.

Gerçekten, Teorem 3.16 kullanılarak $-14G^{(3)}_{(5,7)}+24G^{(2)}_{(5,7)}=0$ olması durumunda, $G^{(3)}_{(5,7)}\neq 0$ olmak üzere $6G^{(1)}_{(5,7)}-15G^{(0)}_{(5,7)}=0$ ise $G^{(1)}_{(5,7)}\neq 0$ koşuluyla $(c_1,c_2)=\left(t,\dfrac{15}{G^{(1)}_{(5,7)}}-\dfrac{t24}{G^{(3)}_{(5,7)}}\right)=\left(t,3-2t\right),\ t\in\mathbb{R}^*$ şeklinde sonsuz çözümü elde edilir.

BÖLÜM 4. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın ikinci bölümünde Fibonacci sayıları ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili temel kavramlar, bazı özellikler ve teoremler verilmiştir. Devamında Fibonacci sayılarının Q matrisi ile ilişkisi ve bazı özelliklerine de yer verilmiştir.

Q matrisinin kuvvetleri alınarak Q^n matrisi [King'in Tezi] çalışmasında gösterilmiştir. Buradan hareketle elemanları genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan $n-$ genelleştirilmiş Fibonacci Q matrisi olarak adlandırılan ve $Q_{g(a,b)}^{(n)}$ ile gösterilen $aQ^{n-2}+bQ^{n-1}$ matrisinin tanımı yapılmıştır.

Çalışmanın üçüncü bölümünde elde edilen sonuçların sırası ile özelden genele doğru ilerlediği ve Teorem 3.16'nın en genel hali temsil ettiğine dikkat etmek gerekir. Teorem 3.16 kullanılarak Durum 1, Durum 2 ve Durum 3 ile irdelenen ve sırasıyla elde edilen Teorem 3.1, Teorem 3.6 ve Teorem 3.11'e ulaşabileceğimiz aşikârdır. İlk 3 durumun özel durumlar olarak ele alınma sebebi belli durumlar için hesap kolaylığı sağlamaktır. Bu durum özelden tüme varım mantığı ile de uyumludur.

Ele alınan problemler incelendiğinde Durum 4'te incelenen $Q_{g(a_1,b_1)}^{(n)}$, $Q_{g(a_2,b_2)}^{(m)}$ matrislerinin doğrusal bileşiminin bir $Q_{g(a_3,b_3)}^{(k)}$ matrisi olması probleminin aslında Durum 1, Durum 2 ve Durum 3'te incelenen önceki problemlerin genelleştirilmesi olduğu bellidir. Durum 1, Durum 2 ve Durum 3'ün şartları Teorem 3.16'nın ifadesinde yerine yazıldığında bu durumlara karşı gelen teoremlerin ifadelerini elde etmek için fazla irdeleme ve işlem yapmak gerekmektedir. Bu nedenle özelden genele gitme kullanışlı olma bakımından da önem arz etmektedir.

Aynı zamanda $a_i, b_i \in \mathbb{R}^*,\ i = 1,2,3$ için çalışma kapsamında özel olarak incelenen 3 durum dışında durumların olduğu açıktır. Bu durumları içeren problemlerin çözümleri Teorem 3.16 yardımıyla bulunabilir.

Diğer deyişle buradan elde edilen çözümlerden diğer her bir durum için elde edilmesi gereken çözümler türetilebilir. Böyle olmakla beraber türetilecek olan çözümlerin en sade biçimine ulaşmak için bir işlem kalabalığı söz konusu olacaktır. Dolayısıyla çalışma genelden özele inmek yerine özelden genele doğru tasarlanmıştır. Hatta son olarak ele alınan genel problemden, tezde yer verilmeyen farklı özel durumlarla ilgili çözümlerde türetilebilir. Örneğin $a_1 = a_3 \neq a_2,\ b_1 = b_3 = b_2 = b$ olması durumuna tezde yer verilmemiştir ancak ister önceki problemler gibi ilerleyerek doğrudan ister genel durumdan hareketle çözümler türetilebilir. Bu tür örnekler çoğaltılabilir ve istenen çözümlere Teorem 3.16 yardımıyla kolaylıkla ulaşılır.

Burada ele alınan problemden, Fibonacci ve Lucas sayıları ile elde edilmiş toplamsal özelliklere genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili benzer özelliklerin ve diğer özelliklerin olup olmadığı, varsa nelerin olduğu, elde edilen ve edilmesi olası sonuçların reel hayatta ne tür problemlerin çözümü için kullanılabileceği incelemeye değerdir.

,

KAYNAKLAR

[1] S. Venit ve W. Bishop, Elementary Linear Algebra, Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1985.

[2] R. Larson, Elementary Linear Algebra, Boston: Cengage Learning, 2017.

[3] A. Cuoco, K. Waterman, B. Kerins, E. Kaczorowski ve M. Manes, Linear Algebra and Geometry, Rhoe Island: MAA Press, 2019.

[4] J. R. Kirkwood ve B. H. Kirkwood, Elementary Linear Algebra, Taylor & Francis Group, 2018.

[5] T. S. Shores, Applied Linear Algebra and Matrix Analysis, New York: Springer Science+Business Media, 2007.

[6] J. Day, Vectors, Matrices, and Systems of Linear Equations, *Handbook Of Linear Algebra*, New York, Taylor & Francis Group , 2007.

[7] G. E. Bergum, A. F. Horadam ve A. N. Philippou,Introduction, *Applications of Fibonacci Numbers*, Scotland, 1992.

[8] T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, New Jersey: John Wiley and Sons, 2018.

[9] R. P. Grimaldi, Fibonacci And Catalan Numbers, New Jersey: John Wiley and Sons, 2012.

[10] T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, New Jersey: John Wiley and Sons, 2001.

[11] V. E. Hoggatt, Fibonacci and Lucas Numbers, A Publication of The Fibonacci Association University of Santa Clara, 1969.

[12] R. C. Johnson, Fibonacci Numbers and Matrices, Durham University, 2009.

[13] B. Demirtürk, Fibonacci and Lucas Sums by Matrix Methods, *International Mathematical Forum,* no. 5, pp. 99-107, 2010.

[14] C. H. King, *Some Further Properties of the Fibonacci Numbers,* San Jose: San Jose State, 1960.

ÖZGEÇMİŞ

Aslı ÖNDÜL, 19.08.1995 tarihinde İzmir'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini 2013 yılında tamamladı. 2013 yılında Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladı. 2017 yılında lisans öğrenimini tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı.