

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇATILANDIRILMIŞ REGLE YÜZEYLERİN
BERTRAND OFSETLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayhan KELEŞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT

Ağustos 2020

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇATILANDIRILMIŞ REGLE YÜZEYLERİN
BERTRAND OFSETLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayhan KELEŞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ

Bu tez 10.08.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Mehmet Ali GÜNGÖR**

Jüri Başkanı

**Doç. Dr.
Mahmut AKYİĞİT**

Üye

**Doç. Dr.
Osman Zeki OKUYUCU**

Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Ayhan KELEŞ
10.08.2020

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aőamasında ve yüksek lisans eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araőtırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aőamalarında yardımlarını esirgemeyen, teővik eden, aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danıőman hocam Doç. Dr. Mahmut AKYİğİT'e en içten saygı ve teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman her konuda yanımda olan ve desteğini esirgemeyen aileme teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	v
ÖZET	vi
SUMMARY	vii

BÖLÜM 1.

GİRİŞ	1
-------------	---

BÖLÜM 2.

REGLE YÜZEYLER VE OFSETLERİ.....	3
2.1. Regle Yüzeyler	3
2.2. Bertrand Ofset Regle Yüzeyler	9

BÖLÜM 3.

ÇATILANDIRILMIŞ EĞRİLER VE YÜZEYLER.....	12
3.1. Çatılandırılmış Eğriler.....	12
3.2. Çatılandırılmış Yüzeyler.....	15

BÖLÜM 4.

ÇATILANDIRILMIŞ EĞRİLERİN BERTRAND OFSET REGLE YÜZEYLERİ.....	25
4.1. Çatılandırılmış Regle Yüzeyler.....	25

4.2. Çatılandırılmış Regle Yüzeylerin Bertrand Ofsetleri.....	37
---	----

BÖLÜM 5.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER	70
----------------------------	----

KAYNAKLAR	71
-----------------	----

ÖZGEÇMİŞ	73
----------------	----

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

q	: Asimptotik normal
$\varphi^{*1}(s,u)$: Birinci ofset regle yüzey
K^{*1}	: Birinci ofset regle yüzeyin Gauss eğriliği
H^{*1}	: Birinci ofset regle yüzeyin ortalama eğriliği
(γ, μ)	: Çatılandırılmış eğri
$\varphi(s,u)$: Çatılandırılmış regle yüzey
D_F^{*1}	: Çatılandırılmış regle yüzeyin birinci ofsetinin eğrilikleri
$a_i^{*1}, b_i^{*1},$ e_i^{*1}, f_i^{*1}	: Çatılandırılmış regle yüzeyin birinci ofsetinin temel değişmez fonksiyonları
D_F	: Çatılandırılmış regle yüzeyin eğrilikleri
a_i, b_i, e_i, f_i	: Çatılandırılmış regle yüzeyin temel değişmez fonksiyonları
γ	: Çatılandırılmış temel eğri
K	: Gauss eğriliği
$\varphi^{*2}(s,u)$: İkinci ofset regle yüzey
K^{*2}	: İkinci ofset regle yüzeyin Gauss eğriliği
H^{*2}	: İkinci ofset regle yüzeyin ortalama eğriliği
H	: Ortalama eğriliği

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. İki doğru arasındaki ofset.....	9
Şekil 4.1. γ çatılandırılmış dayanak eğrili regle yüzey $\varphi(s,u)$	60
Şekil 4.2. $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin J_F eğriliği.....	63
Şekil 4.3. $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin K_F eğriliği.....	63
Şekil 4.4. $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin H_F eğriliği.....	63
Şekil 4.5. $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin K Gauss eğriliği.....	64
Şekil 4.6. $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin H ortalama eğriliği.....	64
Şekil 4.7. $\phi = 0$ olması durumunda elde edilen $\varphi^{*1}(s,u)$ Bertrand ofseti	65
Şekil 4.8. Çatılandırılmış $\varphi^{*1}(s,u)$ birinci ofset yüzeyinin J^{*1}_F eğriliği.....	66
Şekil 4.9. Çatılandırılmış $\varphi^{*1}(s,u)$ birinci ofset yüzeyinin K^{*1}_F eğriliği.....	66
Şekil 4.10. Çatılandırılmış $\varphi^{*1}(s,u)$ birinci ofset yüzeyinin H^{*1}_F eğriliği.....	66
Şekil 4.11. $\phi = 0$ olması durumunda elde edilen $\varphi^{*1}(s,u)$ Bertrand ofsetinin K^{*1} Gauss eğriliği.....	67
Şekil 4.12. $\phi = 0$ olması durumunda elde edilen $\varphi^{*1}(s,u)$ Bertrand ofsetinin H^{*1} ortalama eğriliği.....	67
Şekil 4.13. $\phi = 90^\circ$ olması durumunda elde edilen $\varphi^{*2}(s,u)$ Bertrand ofseti	68
Şekil 4.14. $\phi = 90^\circ$ olması durumunda elde edilen $\varphi^{*2}(s,u)$ Bertrand ofsetinin K^{*2} Gauss eğriliği.....	69
Şekil 4.15. $\phi = 90^\circ$ olması durumunda elde edilen $\varphi^{*2}(s,u)$ Bertrand ofsetinin H^{*2} ortalama eğriliği.....	69

ÖZET

Anahtar kelimeler: Regle yüzeyler, Ofset regle yüzeyler, Çatılandırılmış regle yüzeyler, Çatılandırılmış regle yüzeylerin ofsetleri

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde regle yüzeyler ve regle yüzeylerin ofsetleri hakkında temel tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde çatılandırılmış eğrilerin ve çatılandırılmış yüzeylerin temel tanım ve teoremleri verilmiş olup ayrıca çatılandırılmış yüzeylerin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliklerinin hesaplanması hakkında bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölüm bu çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır ve iki alt bölüm halinde düzenlenmiştir. Dördüncü bölümün birinci alt bölümünde çatılandırılmış regle yüzeylerin nasıl oluştuğu hakkında bilgiler verilmiştir. Daha sonrasında çatılandırılmış regle yüzeylerin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği farklı şekillerde bulunup bunlar arasında ilişkiler kurulmuştur. İkinci alt bölümde ise regle yüzeyin Bertrand ofsetlerinin nasıl oluştuğu ve ayrıca Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hakkında bilgi verilmiştir.

Son bölümde ise tüm çalışmanın geniş bir özeti yapılmış ve bundan sonra yapılacak araştırmalara yönelik öneride bulunulmuştur.

BERTRAND OFFSETS OF FRAMED RULED SURFACES

SUMMARY

Keywords: Ruled surfaces, Offsets of ruled surfaces, Framed ruled surfaces, Offsets of framed ruled surfaces.

This thesis consists of five parts. The first part is devoted to the introduction. The second section contains the basic definitions and theorems about ruled surfaces and offsets of ruled surfaces.

The basic definitions and theorems are given about framed curves and framed surfaces in the third part also the informations are given about Gaussian curvature and calculation of mean curvature.

The fourth part forms the original part of this work and organized into two subdivisions. Information is given about how framed ruled surfaces are formed in the the subsection of the fourth section. Afterwards Gaussian curvature and mean curvature of framed ruled surfaces were found in different ways than relations have been established between these. The information are given about how Bertrand offsets of ruled surface and mean curvature are formed.

In the fifth chapter of this thesis, a brief summary of the study is given and a suggestion is proposed for investigations on involute – evolute offsets of framed ruled surface.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Yüzey teorisi birçok bilim dalında uygulama alanına sahip olduğundan sürekli gelişen bir araştırma alanı olmuştur. Yüzey konuları arasında en çok ilgi duyulan regle yüzeyler ilk olarak G. Monge tarafından ele alınmıştır. Birden çok isimle adlandırılan regle yüzeyler, bir doğrunun bir eğri boyunca hareket ettirilmesi sonucu doğrusal yüzey ve sonsuz sayıda düz çizgiden oluşmasından dolayı çizgiler yüzeyi olarak bilinir. \mathbb{R}^3 'de bir regle yüzey, bir parametreye bağlı doğrular ailesinin geometrik yeri olarak da tanımlanabilir, [1]. Yani 3–boyutlu Öklid uzayında bir doğrunun uzay eğrisi boyunca yaptığı sürekli hareket sonucu oluşan bir yüzeydir. Regle yüzeylerin en meşhur örnekleri silindir ve koni yüzeylerdir. Bugün regle yüzey örneklerini önemli mimari eserler de görmekteyiz. Örneğin, “Ciechanow Su Kulesi, Kobe Port Kulesi, Shuckhov Kulesi” gibi birçok ünlü yapıda regle yüzeylerin kullanıldığı görülmektedir. Regle yüzeylerin birçok kullanım alanı olduğundan dolayı yaygın olarak kullanılan bu yüzeylerin birçok özeliği mevcuttur. Regle yüzeylerin açılabilirliği, açılamazlığı, minimalliği ve bu yüzey üzerinde bulunan eğrilerin karakterizasyonu gibi konular en çok araştırılan konular olmuştur. Çalışılan bu konulardan en önemlilerinden birisi B. Ravani ve T.S. Ku tarafından yayımlanan açılabilir regle yüzeylerin Bertrand ofsetleri çalışmasıdır. Bu çalışmada regle yüzeylerin dayanak eğrileri arasında oluşan iki farklı açı durumundaki ofsetler incelenmiştir. Eğer bu açı 0° seçilirse regle yüzeyin oluşan ofseti, regle yüzeye paralel olur ve bu ofset yönlü ofset olarak adlandırılır. Eğer bu açı 90° seçilirse regle yüzeyin oluşan ofseti regle yüzeye dik olur ve bu ofset dik ofset olarak adlandırılır, [2].

Son yıllarda çalışılmaya başlanan çatılandırılmış eğriler ve bunun neticesinde oluşturulan çatılandırılmış regle yüzeyler birçok matematikçi tarafından ilgi duyulup araştırılmaya başlanmıştır. İlk olarak S. Honda ve M. Takahashi çatılandırılmış eğrileri tanımlamış ve aynı çalışmada bu eğriler hakkında birçok bilgi vermiştir. Bu

çalışmalarında S. Honda ve M. Takahashi, singüler noktalara sahip bir eğri nasıl oluşur kavramı üzerinden çatılandırılmış eğrileri açıklamışlardır, [3]. Çatılandırılmış eğriler ile oluşturulan çatılandırılmış yüzeyler ile ilgili çalışma ise ilk kez, T. Fukunaga ve M. Takahashi tarafından açıklanmış olup bu yüzeyler hakkında birçok bilgi vermişlerdir, [4].

S. Honda ve M. Takahashi'nin çatılandırılmış eğrileri tanımlamasının ardından bu eğriler üzerine önemli çalışmalar yapılmıştır. Y. Wang, D. Pei ve R. Gao çatılandırılmış eğrilerin genel özelliklerini kullanarak çatılandırılmış rektifyan eğrileri elde etmiştir, [5].

Bu çalışmada ise ilk olarak 3 – boyutlu Öklid uzayında çatılandırılmış regle yüzeyler hakkında bilgi verilmiştir. Ardından çatılandırılmış regle yüzeylerin K Gauss eğrilik ve H ortalama eğrilikleri elde edilmiş ve elde edilen bu denklemler üzerinden sonuçlara varılmıştır. Daha sonra çatılandırılmış regle yüzeylerin Bertrand ofsetleri üzerinde çalışılmış ve bu ofsetler hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca elde edilen çatılandırılmış regle yüzeylerin Bertrand ofsetleri hakkında belli özellikler dikkate alınarak önemli sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak elde edilen Bertrand ofsetlerin K^{*1}, K^{*2} Gauss eğrilikleri ve H^{*1}, H^{*2} ortalama eğrilikleri hakkında bilgi verilmiştir.

BÖLÜM 2. REGLE YÜZEYLER VE OFSETLERİ

Bu bölümde yüzeyler, regle yüzeyler ve regle yüzeylerin ofsetleri ile ilgili temel kavramlardan bahsedilmiştir.

2.1. Yüzeyler ve Regle Yüzeyler

Tanım 2.1.1. $\varphi:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ koordinat komşuluğu ve $M \subset \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\forall P \in M$ için M 'nin içinde görüntüsü P 'nin bir komşuluğunu içeren uygun bir koordinat komşuluğu var ve $\varphi^{-1}:\varphi(U) \rightarrow U$ sürekli ise M 'ye bir yüzey denir, [6].

Tanım 2.1.2. \mathbb{R}^n 'nin bir hiperyüzeyi M ve M 'nin birim normal vektör alanı N olsun. D kovaryant türev operatörü olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü denir, [7].

3 – boyutlu Öklid uzayında temel formlardan bahsetmeden önce ilk olarak n – boyutlu Öklid uzayı üzerindeki bir M yüzeyi üzerinde q . temel formu tanımlayalım. Bu q . temel form yardımıyla 1. ve 2. temel formların eşitliklerini ifade edelim.

Tanım 2.1.3. \mathbb{R}^n uzayının bir hiperyüzeyi M olsun. M üzerinde şekil operatörü S ve $1 \leq q \leq n$ olmak üzere M hiperyüzeyi üzerinde q . temel form

$$I^q : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

olarak tanımlanır. Buna göre

1. temel form

$$I : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow I(X, Y) = \langle X, Y \rangle$$

ve 2. temel form

$$II : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow II(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle$$

dir, [7].

Tanım 2.1.4. M bir yüzey ve bu yüzeyin $T_p(M)$ tanjant uzayındaki herhangi vektörler v_p, w_p olmak üzere 1. temel form

$$I(v_p, w_p) = \langle v_p, w_p \rangle$$

tanjant vektörlerinin iç çarpımı yardımıyla tanımlanır. 1. temel formun katsayıları

$$E = \|\varphi_s\|^2 = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|^2$$

$$F = \langle \varphi_s, \varphi_u \rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle \quad (2.1)$$

$$G = \|\varphi_u\|^2 = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right|^2$$

biçiminde olmak üzere

$$dv^2 = E ds^2 + 2F ds du + G du^2$$

dir, [8].

Tanım 2.1.5. M bir yüzey ve bu yüzeyin $T_p(M)$ tanjant uzayındaki vektörleri v_p ve w_p olsun. S şekil operatörü olmak üzere 2. temel form

$$II(v_p, w_p) = \langle S(v_p), w_p \rangle$$

olarak tanımlanır. $M \subset \mathbb{R}^3$ için 2. temel form, $T_p(M)$ tanjant uzayında simetrik bilinear formdur. n yüzeyin normal vektörü ve 2. temel formun katsayıları

$$\begin{aligned} L &= \langle n, \varphi_{ss} \rangle \\ M &= \langle n, \varphi_{su} \rangle \\ N &= \langle n, \varphi_{uu} \rangle \end{aligned} \tag{2.2}$$

biçiminde olmak üzere

$$dv^2 = L ds^2 + 2M ds du + N du^2$$

dir, [8].

Teorem 2.1.6. 3–boyutlu Öklid uzayındaki bir M yüzeyinde κ_1 ve κ_2 asli eğrilikler olmak üzere K Gauss eğriliği fonksiyonu

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$$

dir, [8].

1. temel formun katsayıları E, F, G ve 2. temel formun katsayıları L, M, N olmak üzere, 3–boyutlu Öklid uzayındaki bir M yüzeyinin K Gauss eğriliği fonksiyonunun temel formlar cinsinden ifadesi

$$K = \det \left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (2.3)$$

şeklindedir, [8].

Teorem 2.1.7. \mathbb{R}^3 Öklid uzayındaki bir M yüzeyinin asli eğrilikleri κ_1 ve κ_2 olmak üzere M yüzeyinin H ortalama eğriliği

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

dir.

1. temel formun katsayıları E, F, G ve 2. temel formun katsayıları L, M, N olmak üzere 3–boyutlu Öklid uzayındaki bir M yüzeyinin H ortalama eğriliği fonksiyonunun temel formlar cinsinden ifadesi

$$H = \frac{1}{2} \det \left(\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \quad (2.4)$$

şeklindedir, [8].

Tanım 2.1.8. M , \mathbb{R}^3 'de bir yüzey olmak üzere M yüzeyinin H ortalama eğriliği sıfır ise bu yüzeye minimal yüzey denir, [9].

Tanım 2.1.9. $U \subset \mathbb{R}^2$ uzayının bir açık alt kümesi, $\beta(s)$ ve $\lambda(s)$ regüler eğri ve $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi: U &\rightarrow M \subset \mathbb{R}^3 \\ (s, u) &\rightarrow \varphi(s, u) = \beta(s) + u\lambda(s) \end{aligned} \quad (2.5)$$

parametrizasyonu ile verilen M yüzeyine regle yüzey denir. Burada $\beta(s)$ dayanak eğrisi, $\lambda(s)$ ise doğrultman vektörüdür. $s \in I$ sabit tutulup u değiştirilerek elde edilen $\beta(s) + u\lambda(s)$ doğrusuna yüzeyin ana doğrusu denir, [8].

Tanım 2.1.10. $M \subset \mathbb{R}^3$ regle yüzeyi olmak üzere komşu iki doğrultmanın ortak dikmelerinin doğrultmanlar üzerinde bulunan ayaklarına boğaz (striksiyon) noktası denir, [10].

Tanım 2.1.11. Bir $M \subset \mathbb{R}^3$ regle yüzeyinin ana doğrusu, dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir, [10].

Tanım 2.1.12. $M \subset \mathbb{R}^3$ regle yüzey olmak üzere regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı olacak şekilde kalıyorsa regle yüzeye açılabilir denir, [10].

Teorem 2.1.13. M, \mathbb{R}^3 'de bir yüzey olmak üzere, M yüzeyinin açılabilir olabilmesi için gerek ve yeter şart $K = 0$ olmasıdır, [11].

Tanım 2.1.14. $M \subset \mathbb{R}^3$ regle yüzey olmak üzere, regle yüzeyin komşu iki ana doğrusunun arasındaki en kısa mesafenin ana doğrular arasında bulunan açığa oranına regle yüzeyin dağılma parametresi denir, [10].

Tanım 2.1.15. $\varphi(s, u) = \beta(s) + u\lambda(s)$ kapalı regle yüzey olmak üzere kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu (adımı)

$$\begin{aligned} L_\lambda: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\rightarrow L_\lambda(u) = \oint_\lambda du \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir, [10].

Açılım uzunluğu regle yüzeyin integral invaryantıdır. Açılım uzunluğu sıfır olması durumunda striksiyon eğrisi bir nokta ve açılabilir regle yüzey ise koni olur, [12].

M , 3–boyutlu Öklid uzayında açılabilir bir regle yüzey olsun. M yüzeyinin parametrizasyonu

$$\varphi(s,u) = \beta(s) + u\lambda(s)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\langle \lambda(s), \lambda(s) \rangle = 1$, $\langle \lambda'(s), \lambda'(s) \rangle = 1$ ve $\lambda(s)$ doğrultmanı, $\beta(s)$ ise φ yüzeyinin boğaz (striksiyon) eğrisidir. Bu durumda 3–boyutlu Öklid uzayında bir küresel eğri için s parametresi $\lambda(s)$ 'nin yay uzunluğu parametresi olarak adlandırılır. Ayrıca $\lambda(s)$, φ açılabilir regle yüzeyinin küresel gösterge vektörü olarak adlandırılır. $\lambda(s)$, $\varphi(s,u)$ açılabilir regle yüzeyinin striksiyon eğrisi olduğundan dolayı $\langle \beta'(s), \lambda'(s) \rangle = 0$ dır, [13].

Bundan sonra gösterim kolaylığı için s parametresi yazılmayacaktır.

$k = \lambda'$ ve $q = \lambda \times \lambda'$ olsun. Bu durumda $\{\lambda, k, q\}$ kümesi λ eğrisinin küresel Frenet çatısı olarak adlandırılır. Burada k ve q , sırasıyla, $\varphi(s,u)$ açılabilir regle yüzeyinin merkez normal ve asimptotik normal vektörleridir. $\{\lambda, k, q\}$ küresel Frenet çatısı için türev vektörleri

$$\begin{aligned}\lambda' &= k \\ k' &= -\lambda - Jq \\ q' &= Jk\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $J = \langle \lambda'', \lambda' \times \lambda \rangle$, λ eğrisinin geodezik eğriliğidir.

Ayrıca, β striksiyon eğrisinin türevi

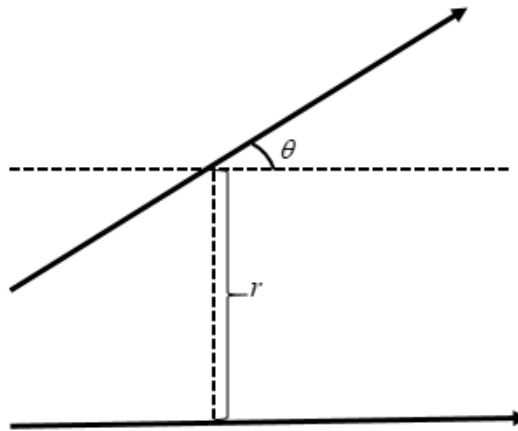
$$\beta' = A\lambda + Cq$$

dir. Burada $A = \langle \beta', \lambda \rangle$ ve $C = \langle \beta', \lambda \times \lambda' \rangle$ dir.

J, A ve C fonksiyonları φ açılmaz regle yüzeyinin yapı fonksiyonları olarak adlandırılır, [14].

2.2. Bertrand Ofset Regle Yüzeyler

Bu bölümde regle yüzeylerin Bertrand ofsetleri hakkında temel bilgiler verilecektir. İki parametrelili noktalar ailesi olarak bir regle yüzey göz önüne alırsak, bu yüzeyin normal ofseti orijinal temel yüzeyi ile her noktasında ortak normale sahip bir yüzeydir. Böyle yüzeyler, paralel ofsetler olarak isimlendirilecektir. Farouki tarafından, belirli bir yüzey sınıfı için hem tam hem de yaklaşık paralel ofset üretim metotları geliştirilmiştir, [15,16]. Burada elde edilen sonuçlar Bertrand eğri çiftlerinin sahip olduğu eğrilik ve burulma gibi özelliklerin birbirini cinsinden ifade edilmesi durumlarını içermemektedir. Burada, regle yüzeyler, doğrular geometrisi kapsamında bir parametrelili doğrular ailesi olarak göz önüne alınır, böyle yüzeyler için Bertrand çiftleri ile ilgili özellikler kullanılabilir.



Şekil 2.1. İki doğru arasındaki ofset (Ravani ve Ku, 1991).

r , iki doğrunun ortak dikmesinin uzunluğu ve θ ise iki doğrudan birinin ortak dikme boyunca kaydırılıp diğer doğruyla kesiştirilmesi sonucu aralarında oluşan açıdır.

Bir regle yüzey için her üreteç konumunda, üreteç boyunca yüzeyin pek çok normali vardır. Örneğin, regle yüzey parçalarıyla sınırlı kalmazsa, üretelin sonsuzdaki yüzey normali, yüzeyin q asimptotik normaline paraleldir. Aynı üreteç üzerindeki merkez noktasında, yüzeyin normali asimptotik doğrultudan 90° döner ve yüzeyin k merkez normaline paralel konuma gelir. Aynı üreteç izlenirse, yüzeyin normali 90° daha döner ve üretelin diğer uç noktası q 'ya paralel konuma gelir, [2].

Tanım 2.2.1. Ortak normale sahip iki regle yüzeyin karşılıklı üreteçlerinin boğaz noktalarında birebir eşleme mevcut ise bu iki regle yüzeye birbirinin Bertrand ofsetleridir denir, [2].

$\varphi(s, u)$ temel regle yüzeyi,

$$\varphi(s, u) = \beta(s) + u\lambda(s) \quad (2.6)$$

denklemleri ile verilsin. Burada β , yüzeyin striksiyon eğrisi ve s , β eğrisi boyunca yay uzunluğu olsun. $\{\lambda, k, q\}$, φ yüzeyinin Jeodezik Frenet üçyüzlüsü olmak üzere bu yüzeyin φ^* Bertrand ofsetinin Jeodezik Frenet üçyüzlüsü

$$\begin{bmatrix} \lambda^* \\ k^* \\ q^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ k \\ q \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir.

φ temel yüzeyi cinsinden, φ^* ofset yüzeyinin denklemi

$$\begin{aligned}\varphi^*(s,u) &= \beta^*(s) + u\lambda^*(s) = \\ &= [\beta(s) + rk(s)] + u[(\cos\theta)\lambda(s) + (\sin\theta)q(s)]\end{aligned}\quad (2.8)$$

biçiminde yazılabilir. Burada r , lineer ofset ve θ , iki yüzey arasındaki açısal ofsettir. $\theta = 0^\circ$ olması durumunda, temel yüzey ve ofseti üzerindeki karşılıklı üreteçler birbirine paraleldir. Bu durumda bu iki yüzeye yönlü ofsetler denir. (2.8) denkleminde $\theta = 0^\circ$ alınır

$$\varphi^*(s,u) = \beta(s) + rk(s) + u\lambda(s) = \varphi(s,u) + rk(s) \quad (2.9)$$

elde edilir. Benzer biçimde, $\theta = 90^\circ$ olması durumunda temel yüzeyin ve Bertrand ofsetinin karşılıklı üreteçleri birbirlerine dik olur. Bu durumda, bu iki yüzeye dik ofsetler denir. (2.8) denkleminde $\theta = 90^\circ$ alınır

$$\varphi^*(s,u) = \beta(s) + rk(s) + uq(s) \quad (2.10)$$

elde edilir, [2].

BÖLÜM 3. ÇATILANDIRILMIŞ EĞRİLER VE YÜZEYLER

Singüler noktalara sahip eğrilerin Frenet çatısı bilinen yollarla oluşturulamaz. S. Honda ve M. Takashi, Frenet çatısı oluşturulamayan eğrileri tanımlamış ve bu eğriler çatılandırılmış eğriler olarak isimlendirmiştir. Vektörlerin belli bir açı etrafında döndürülmesi sonucu taşınabilir çatılar elde edilir ve taşınabilir çatılar ile uzay eğrileri çatılandırılmış eğrilerdir ve onlar singüler noktalara sahip olabilir. Çatılandırılmış eğriler lineer bağımsızlık şartları ile düzenli eğrilerdir, [5]. Öklid uzayındaki çatılandırılmış bir yüzey hareketli bir eğri ile düzgün bir yüzeydir. Çatılandırılmış yüzeyler sadece düzenli yüzeylerin bir genellemesi değildir, aynı zamanda singüler noktalara sahip olabilirler, [4]. Bu bölümde çatılandırılmış eğrilerin nasıl tanımlandığı ve çatılandırılmış eğriler ile kurulan Frenet çatıları hakkında bilgi verilecektir. Ayrıca çatılandırılmış yüzeylerin nasıl oluştuğu hakkında genel bilgi verilecektir.

3.1. Çatılandırılmış Eğriler

\mathbb{R}^3 , 3–boyutlu Öklid uzayı ve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ singüler noktalara sahip bir eğri olsun. Bir

$$\Delta_2 = \left\{ \mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \mu_i \cdot \mu_j = \delta_{ij} \ i, j = 1, 2 \right\}$$

kümesi tanımlayalım. Bu durumda Δ_2 , 3–boyutlu düzgün bir manifoldtur.

$\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Delta_2$ olsun. O halde $\nu = \mu_1 \times \mu_2 \in \mathbb{R}^3$ birim vektör olacak şekilde tanımlanabilir. Bu durumda ν vektörü μ_1 ve μ_2 vektörleriyle ortogondur.

Tanım 3.1.1. $\forall s \in I$ ve $i = 1, 2$ için $\langle \gamma'(s), \mu_i(s) \rangle = 0$ sağlanıyorsa $(\gamma, \mu) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ ifadesine çatılandırılmış eğri denir. (γ, μ) bir çatılandırılmış eğri

olacak şekilde $\mu: I \rightarrow \Delta_2$ dönüşümü varsa $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisine çatılandırılmış temel eğri denir, [5].

Çatılandırılmış eğriler sadece Frenet eğrilerinin değil, aynı zamanda \mathbb{R}^2 üzerindeki birim teğet demetindeki Legendre eğrilerinin doğal genellemesidir. Bir Frenet eğrisinin veya Legendre eğrisinin eğriliklerine benzer şekilde çatılandırılmış eğrinin eğriliği olarak adlandırılan değişmezler tanımlanır. Bu eğrilikler, çatılandırılmış eğriyi ve singüler noktalarını analiz etmek için oldukça yararlıdır, [17].

$(\gamma, \mu_1, \mu_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğri ve $v(s) = \mu_1(s) \times \mu_2(s)$ olmak üzere Frenet formülleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}\mu_1'(s) &= l(s)\mu_2(s) + m(s)v(s) \\ \mu_2'(s) &= -l(s)\mu_1(s) + z(s)v(s) \\ v'(s) &= -m(s)\mu_1(s) - z(s)\mu_2(s).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Burada $l(s)$, $m(s)$ ve $z(s)$ fonksiyonları

$$\begin{aligned}l(s) &= \langle \mu_1'(s), \mu_2(s) \rangle \\ m(s) &= \langle \mu_1'(s), v(s) \rangle \\ z(s) &= \langle \mu_2'(s), v(s) \rangle\end{aligned}\tag{3.2}$$

eşitlikleri yardımıyla elde edilir. Bunlara ek olarak

$$\gamma'(s) = \alpha(s)v(s)\tag{3.3}$$

eşitliğinde ifade edilen bir

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$$

düzgün dönüşümü mevcuttur.

$(l, m, z, \alpha): I \rightarrow \mathbb{R}^4$ bir diferansiyellenebilir dönüşüm olmak üzere $(\gamma, \mu): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış eğrisi mevcuttur ve $(l(s), m(s), z(s), \alpha(s))$ bu çatılandırılmış eğrinin eğrilikleridir. Eğer (3.1) ifadesindeki eşitliklerden üçüncüsünde $m(s) = z(s) = 0$ alınırsa $v'(s) = 0$ olur. Singüler noktaların analizi için çatılandırılmış eğrinin eğriliklerini kullanacağız. Bu nedenle $v'(s) \neq 0$ olarak alınacaktır. Eğer $\alpha(s_0) = 0$ ise s_0 , γ eğrisinin singüler noktası olarak adlandırılır, [5].

$(\gamma, \mu_1, \mu_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ çatılandırılmış bir eğri olmak üzere çatılandırılmış eğrinin Frenet elemanları

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|} \\ N(s) &= \frac{(\gamma'(s) \times \gamma''(s)) \times \gamma'(s)}{\|(\gamma'(s) \times \gamma''(s)) \times \gamma'(s)\|} \\ B(s) &= \frac{\gamma'(s) \times \gamma''(s)}{\|\gamma'(s) \times \gamma''(s)\|} \end{aligned} \quad (3.4)$$

dir, [3].

$(\gamma, \mu_1, \mu_2): I \rightarrow S^2 \times \Delta_2$ bir küresel çatılandırılmış eğridir. Burada $\mu_1 = \gamma$ olarak alalım. $v = \gamma \times \mu_2$ ve $\gamma'(s) = \alpha(s)v(s)$ dir. γ çatılandırılmış temel eğrisinin $l(s), m(s)$ ve $z(s)$ eğrilikleri yardımıyla Frenet formülleri aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \alpha(s)v(s) \\ \mu_2'(s) &= l(s)v(s) \\ v'(s) &= -\alpha(s)\gamma(s) - l(s)\mu_2(s) \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir, [5].

Teorem 3.1.2. $(\gamma, \mu_1, \mu_2): I \rightarrow S^2 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış küresel eğridir. γ 'nın çember olabilmesi için gerek ve yeter şart $\alpha(s) \neq 0$ ve $\frac{l(s)}{\alpha(s)} = \text{sabit}$ olmasıdır, [5].

Önerme 3.1.3. $(\gamma, \mu_1, \mu_2): I \rightarrow S^2 \times \Delta_2$ bir çatılandırılmış küresel eğri olsun. γ 'nın S^2 üzerinde büyük çember olabilmesi için gerek ve yeter şart $\alpha(s) \neq 0$ ve $l(s) = 0$ olmasıdır, [5].

3.2. Çatılandırılmış Yüzeyler

Tanım 3.2.1. n çatılandırılmış regle yüzeyin normali olmak üzere $(s, u) \in U$ için $\langle \varphi_s(s, u), n(s, u) \rangle = 0$ ve $\langle \varphi_u(s, u), n(s, u) \rangle = 0$ şartları sağlanıyorsa $(\varphi, n, d): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ ifadesine çatılandırılmış yüzey denir. (φ, n, d) bir çatılandırılmış yüzey olacak şekilde $(n, d): U \rightarrow \Delta$ dönüşümü varsa $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir çatılandırılmış temel yüzeyi denir, [4].

$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir regüler yüzey olmak üzere $\forall (s, u) \in U$ için $\langle \varphi_s(s, u), n(s, u) \rangle = 0$, $\langle \varphi_u(s, u), n(s, u) \rangle = 0$ şartları sağlanıyorsa $(\varphi, n): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2$ Legendre immersiyondur. Burada $n = \frac{\varphi_s \times \varphi_u}{\|\varphi_s \times \varphi_u\|}$ yüzeyin normalidir. $d: U \rightarrow S^2$ regüler

dönüşüm mevcuttur öyle ki (φ, n, d) bir çatılandırılmış yüzeydir. Burada $d = \frac{\varphi_s}{\|\varphi_s\|}$

veya $d = \frac{\varphi_u}{\|\varphi_u\|}$ dir. t ise n ve d 'nin dış çarpımı sonucunda elde edilir. Yani

$t(s, u) = n(s, u) \times d(s, u)$ şeklinde gösterilir. Elde edilen $\{n(s, u), d(s, u), t(s, u)\}$

çatısı, $\varphi(s, u)$ boyunca bir hareketli çatıdır. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} \varphi_s \\ \varphi_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ t \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

ve

$$\begin{pmatrix} n_s \\ d_s \\ t_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & f_1 \\ -e_1 & 0 & g_1 \\ -f_1 & -g_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ d \\ t \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\begin{pmatrix} n_u \\ d_u \\ t_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_2 & f_2 \\ -e_2 & 0 & g_2 \\ -f_2 & -g_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ d \\ t \end{pmatrix}$$

eşitlikleri verilir. Burada $a_i, b_i, e_i, f_i, g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar çatılandırılmış yüzeylerin temel değişmez fonksiyonları olarak adlandırılır, [4].

a_i, b_i, e_i, f_i ve g_i ($i = 1, 2$) temel değişmez fonksiyonları yardımıyla oluşturulan

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & f_1 \\ -e_1 & 0 & g_1 \\ -f_1 & -g_1 & 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 & e_2 & f_2 \\ -e_2 & 0 & g_2 \\ -f_2 & -g_2 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri (φ, n, d) çatılandırılmış yüzeyinin temel değişmezleri olarak adlandırılır.

(s, u) , φ 'nin singüler noktası olabilmesi için gerek ve yeter şart $T(s, u) = 0$ olmasıdır. $x_{s,u} = x_{u,s}$ ve $V_{2,s} - V_{1,u} = V_1 V_2 - V_2 V_1$ olmak üzere integrallenebilme şartları altında temel değişmezler

$$\begin{aligned}
a_{1,u} - b_1 g_2 &= a_{2,s} - b_2 g_1 \\
b_{1,u} - a_2 g_1 &= b_{2,s} - a_1 g_2 \\
a_1 e_2 + b_1 f_2 &= a_2 e_1 + b_2 f_1
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
e_{1,u} - f_1 g_2 &= e_{2,s} - f_2 g_1 \\
f_{1,u} - e_2 g_1 &= f_{2,s} - e_1 g_2 \\
g_{1,u} - e_1 f_2 &= g_{2,s} - e_2 f_1
\end{aligned} \tag{3.9}$$

şartları sağlanmalıdır, [4].

Teorem 3.2.2. U , \mathbb{R}^2 'de basit bağlantılı bir bölge olmak üzere (3.8) ve (3.9) integrallenebilme koşulları ile birlikte $a_i, b_i, e_i, f_i, g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. T, V_1, V_2 temel değişmezleri ile ilişkili bir $(\varphi, n, d) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ çatılandırılmış yüzeyi vardır, [4].

İspat. (3.7) ve (3.9) eşitlikleri ile birlikte bir $\{n, d, t\}$ ortogonal çatısı vardır. (3.6) koşulu ile birlikte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir dönüşüm mevcuttur. Bu nedenle T, V_1, V_2 temel değişmezleri ile ilişkili bir $(\varphi, n, d) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ çatılandırılmış yüzeyi vardır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3. T, V_1, V_2 ve $\bar{T}, \bar{V}_1, \bar{V}_2$ temel değişmezler ile birlikte $(\varphi, n, d), (\bar{\varphi}, \bar{n}, \bar{d}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ çatılandırılmış yüzeyler olsun. (φ, n, d) ve $(\bar{\varphi}, \bar{n}, \bar{d})$ yüzeyleri çatılandırılmış yüzeyler gibi birbirleriyle uyumlu olabilmesi için gerek ve yeter şart T, V_1, V_2 ve $\bar{T}, \bar{V}_1, \bar{V}_2$ temel değişmezlerin birbirleri ile çakışık olmasıdır, [4].

Tanım 3.2.4. Temel değişmez fonksiyonlar yardımıyla

$$\begin{aligned}
J_F &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \\
K_F &= \det \begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \end{pmatrix}, \\
H_F &= -\frac{1}{2} \left\{ \det \begin{pmatrix} a_1 & f_1 \\ a_2 & f_2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1 & e_1 \\ b_2 & e_2 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

tanımlanan $D_F = (J_F, K_F, H_F): U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir dönüşümünde ifade edilen $D_F = (J_F, K_F, H_F)$ çatılandırılmış yüzeyin bir eğriliği olarak adlandırılır, [4].

Sonuç 3.2.5. (3.9) denklemini kullanarak

$$K_F = g_{1,u} - g_{2,s} \tag{3.11}$$

elde edilir, [4].

$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir regüler yüzey olmak üzere $(n, d): U \rightarrow \Delta$ mevcutsa (φ, n, d) bir çatılandırılmış yüzeydir. 1. ve 2. temel formun katsayıları ile a_i, b_i, e_i, f_i ve g_i ($i = 1, 2$) temel değişmez fonksiyonları arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
E &= a_1^2 + b_1^2, & F &= a_1 a_2 + b_1 b_2, & G &= a_2^2 + b_2^2, \\
L &= -a_1 e_1 - b_1 f_1, & M &= -a_1 e_2 - b_1 f_2, & N &= -a_2 e_2 - b_2 f_2
\end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklindedir, [4].

Sonuç 3.2.6. (2.3), (2.4), (3.10) ve (3.12) denklemleri yardımıyla φ regüler yüzeyinin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği

$$K = \frac{K_F}{J_F}, \quad H = \frac{H_F}{J_F} \tag{3.13}$$

olarak elde edilir, [4].

Önerme 3.2.7. T, V_1, V_2 temel değişmezler ile birlikte $(\varphi, n, d): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ çatılandırılmış yüzey olsun. Her $(s, u) \in U$ için

$$H_F^2(s, u) - J_F(s, u)K_F(s, u) \geq 0 \quad (3.14)$$

dir, [4].

Önerme 3.2.8. $(\varphi, n, d): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ bir çatılandırılmış yüzey ve $(s, u) \in U$ olsun. $(\varphi, n): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2$ yüzeyi s noktası etrafında bir Legendre immersiyonu olabilmesi için gerek ve yeter şart $D_F(s) \neq 0$ olmasıdır, [4].

İspat. Önermenin bir parçasının gerekliliğini gösterelim. Eğer $D_F(s) = 0$ ise $(\varphi, n): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2$ yüzeyi s noktasında bir Legendre immersiyon değildir. $J_F(s) = 0$ olduğundan dolayı s noktasında $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ ve $k_1(a_1, a_2) + k_2(b_1, b_2) = 0$ olacak şekilde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ vardır.

Buna ek olarak, $K_F(s) = 0$ olduğundan dolayı s noktasında $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ ve $h_1(e_1, e_2) + h_2(f_1, f_2) = 0$ olacak şekilde $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ vardır. Burada $k_1 h_1 \neq 0$, $k_2 h_1 \neq 0$, $k_1 h_2 \neq 0$ ve $k_2 h_2 \neq 0$ olacak şekilde dört farklı durum elde edilir.

Kabul edelim ki $k_1 h_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda s noktasında $(a_1, a_2) = -(k_2/k_1)(b_1, b_2)$ ve $(e_1, e_2) = -(h_2/h_1)(f_1, f_2)$ eşitlikleri mevcuttur. Böylece

$$\begin{pmatrix} \varphi_s & n_s \\ \varphi_u & n_u \end{pmatrix}(s) = \begin{pmatrix} b_1 w_1 & f_1 w_2 \\ b_2 w_1 & f_2 w_2 \end{pmatrix}(s)$$

eşitliği elde edilir. Burada w_1 ve w_2 vektörleri sıfırdan farklı vektörler olup

$w_1 = -(k_2/k_1)d + t$ ve $w_2 = -(h_2/h_1)d + t$ dir. $\text{rank} \begin{pmatrix} \varphi_s & n_s \\ \varphi_u & n_u \end{pmatrix}(s) < 2$ olabilmesi için

gerek ve yeter şart $\det \begin{pmatrix} b_1 & f_1 \\ b_2 & f_2 \end{pmatrix}(s) = 0$ olmasıdır.

Şimdi de $\det \begin{pmatrix} b_1 & f_1 \\ b_2 & f_2 \end{pmatrix}(s) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $H_F(s) = 0$ olduğunu

varsayarsak

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_1 & f_1 \\ a_2 & f_2 \end{pmatrix}(s) - \det \begin{pmatrix} b_1 & e_1 \\ b_2 & e_2 \end{pmatrix}(s) = \left(-\frac{k_2}{k_1} + \frac{h_2}{h_1} \right) \det \begin{pmatrix} b_1 & f_1 \\ b_2 & f_2 \end{pmatrix}(s)$$

elde edilir. Buradan

$$-\frac{k_2}{k_1} + \frac{h_2}{h_1} = 0 \quad (3.15)$$

olur. Diğer taraftan (3.9) koşulları ile birlikte

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_1 & e_1 \\ a_2 & e_2 \end{pmatrix}(s) + \det \begin{pmatrix} b_1 & f_1 \\ b_2 & f_2 \end{pmatrix}(s) = \left(\frac{h_2 k_2}{h_1 k_1} + 1 \right) \det \begin{pmatrix} b_1 & f_1 \\ b_2 & f_2 \end{pmatrix}(s)$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{h_2 k_2}{h_1 k_1} + 1 = 0 \quad (3.16)$$

bulunur. (3.15) ve (3.16) denklemleriyle $h_2^2/h_1^2 + 1 = 0$ olduğu görülür. Bu durumda bir sayının karesinin negatif olduğu görülür; ama bu olamaz. Bu nedenden dolayı çelişki olduğu sonucuna varılır. (φ, n) yüzeyinin s noktasında bir immersiyon

olmadığı anlaşılır. Diğer durumlarda benzer muhakeme ile gösterilebilir. Tersine, eğer $rank \begin{pmatrix} \varphi_s & n_s \\ \varphi_u & n_u \end{pmatrix}(s) < 2$ ise s noktasında $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ ve $k_1(a_1, b_1, e_1, f_1) + k_2(a_2, b_2, e_2, f_2) = 0$ olacak şekilde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ vardır. Elde edilen bu sonuçlar göz önüne alınırsa $J_F = K_F = H_F = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak $D_F = 0$ 'dır. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.2 9. (φ, n) , $s \in U$ civarında Legendre immersiyonu ve s noktası φ 'nin bir singüler noktası ise K Gauss eğriliği veya H ortalama eğriliği s noktasında ihmal edilebilir, [4].

Önerme 3.2.8. yardımıyla, eğer $D_F(s) = 0$ ise φ , s noktasında front değil bir frontaldır. Yani (φ, n) bir immersiyon değildir. O halde çatılandırılmış yüzeyin nasıl immersiyon olup olmadığı sorusu karşımıza çıkmaktadır. $(\varphi, n, d): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$, temel değişmezleri (T, V_1, V_2) olan bir çatılandırılmış yüzey olsun.

$$I_F = \left(D_F, \det \begin{pmatrix} a_1 & g_1 \\ a_2 & g_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} b_1 & g_1 \\ b_2 & g_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} e_1 & g_1 \\ e_2 & g_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & e_1 \\ a_2 & e_2 \end{pmatrix} \right)$$

olmak üzere (φ, n, d) çatılandırılmış yüzeyinin bir $I_F: U \rightarrow \mathbb{R}^8$ diferansiyellenebilir dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda eğer (φ, n, d) bir immersiyon ise $(\varphi, n, d): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ bir çatılandırılmış immersiyondur.

Önerme 3.2.10. $(\varphi, n, d): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ bir çatılandırılmış yüzey ve $s \in U$ olsun. (φ, n, d) çatılandırılmış yüzeyinin s noktası civarında çatılandırılmış immersiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart $I_F(s) \neq 0$ olmasıdır, [4].

İspat. Kabul edelim ki $I_F(s)=0$ olsun. Bu durumda (φ, n, d) , s noktasında bir çatılandırılmış immersiyon değildir. Burada

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \varphi_s & n_s & d_s \\ \varphi_u & n_u & d_u \end{pmatrix} < 2$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Aşağıdaki durumlar yukarıdaki eşitsizliğe denk durumlardır.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \varphi_s & n_s \\ \varphi_u & n_u \end{pmatrix}(s), \text{rank} \begin{pmatrix} \varphi_s & d_s \\ \varphi_u & d_u \end{pmatrix}(s), \text{rank} \begin{pmatrix} n_s & d_s \\ n_u & d_u \end{pmatrix}(s) < 2$$

$D_F(s)=0$ varsayımı ve önerme 3.2.8. yardımıyla $\text{rank} \begin{pmatrix} \varphi_s & n_s \\ \varphi_u & n_u \end{pmatrix}(s) < 2$ olduğu

görülür. Şimdi $\text{rank} \begin{pmatrix} \varphi_s & d_s \\ \varphi_u & d_u \end{pmatrix}(s) < 2$ olduğunu gösterelim. Temel değişmezler tanımıyla

$$\begin{pmatrix} \varphi_s & d_s \\ \varphi_u & d_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d + b_1 t & -e_1 n + g_1 t \\ a_2 d + b_2 t & -e_2 n + g_2 t \end{pmatrix}$$

elde edilir. $J_F(s)=0$ ve $\det \begin{pmatrix} e_1 & g_1 \\ e_2 & g_2 \end{pmatrix}(s) = 0$ olduğu için s noktasında $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

olmak üzere $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ ve $k_1(a_1, a_2) + k_2(b_1, b_2) = 0$ dır. Dahası s noktasında $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ ve $h_1(e_1, e_2) + h_2(g_1, g_2) = 0$ dır. Buradan dört farklı durum elde edilir ve bu dört durum $k_1 h_1 \neq 0, k_2 h_1 \neq 0, k_1 h_2 \neq 0$ ve $k_2 h_2 \neq 0$ şeklindedir.

Kabul edelim ki $k_1 h_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda s noktasında $(a_1, a_2) = -(k_2/k_1)(b_1, b_2)$ ve $(e_1, e_2) = -(h_2/h_1)(g_1, g_2)$ eşitlikleri mevcuttur. Böylece

$$\begin{pmatrix} \varphi_s & d_s \\ \varphi_u & d_u \end{pmatrix}(s) = \begin{pmatrix} b_1 w_1 & g_1 w_2 \\ b_2 w_1 & g_2 w_2 \end{pmatrix}(s)$$

eşitliği elde edilir. Burada w_1 ve w_2 vektörleri sıfırdan farklı vektörler olup

$w_1 = -(k_2/k_1)d + t$ ve $w_2 = (h_2/h_1)n + t$ dir. $\text{rank} \begin{pmatrix} \varphi_s & d_s \\ \varphi_u & d_u \end{pmatrix}(s) < 2$ olabilmesi için

gerek ve yeter şart $\det \begin{pmatrix} b_1 & g_1 \\ b_2 & g_2 \end{pmatrix}(s) = 0$ olmasıdır. $I_F(s) = 0$ varsayımı yardımıyla

$\det \begin{pmatrix} b_1 & g_1 \\ b_2 & g_2 \end{pmatrix}(s) = 0$ elde edilir. Bundan dolayı $\text{rank} \begin{pmatrix} \varphi_s & d_s \\ \varphi_u & d_u \end{pmatrix}(s) < 2$ olduğu görülür.

Diğer durumlar da benzer muhakeme ile gösterilebilir. Şimdi de $\text{rank} \begin{pmatrix} n_s & d_s \\ n_u & d_u \end{pmatrix}(s) < 2$

olduğunu gösterelim. Temel değişmezler yardımıyla

$$\begin{pmatrix} n_s & d_s \\ n_u & d_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 d + f_1 t & -e_1 n + g_1 t \\ e_2 d + f_2 t & -e_2 n + g_2 t \end{pmatrix}(s)$$

eşitliği elde edilir. $K_F(s) = 0$ ve $\det \begin{pmatrix} e_1 & g_1 \\ e_2 & g_2 \end{pmatrix}(s) = 0$ aldığımızdan dolayı s

noktasında $k_1(e_1, e_2) + k_2(f_1, f_2) = 0$, $h_1(e_1, e_2) + h_2(g_1, g_2) = 0$, $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ ve $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ olacak şekilde $k_1, k_2, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ vardır.

Burada $k_1 h_1 \neq 0, k_2 h_1 \neq 0, k_1 h_2 \neq 0$ ve $k_2 h_2 \neq 0$ olacak şekilde dört farklı durum elde edilir. Kabul edelim ki $k_1 h_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda s noktasında

$(e_1, e_2) = -(k_2/k_1)(f_1, f_2)$ ve $(e_1, e_2) = -(h_2/h_1)(g_1, g_2)$ eşitlikleri mevcuttur. Böylece

$$\begin{pmatrix} n_s & d_s \\ n_u & d_u \end{pmatrix}(s) = \begin{pmatrix} f_1 w_1 & g_1 w_2 \\ f_2 w_1 & g_2 w_2 \end{pmatrix}(s)$$

eşitliği elde edilir. Burada w_1 ve w_2 vektörleri sıfırdan farklı vektörler olup

$w_1 = -(k_2/k_1)d + t$ ve $w_2 = (h_2/h_1)n + t$ dir. $rank \begin{pmatrix} n_s & d_s \\ n_u & d_u \end{pmatrix}(s) < 2$ olabilmesi için

gerek ve yeter şart $\det \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix}(s) = 0$ olmasıdır.

$I_F(s) = 0$ varsayımı yardımıyla $\det \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix}(s) = 0$ elde edilir. Bundan dolayı

$rank \begin{pmatrix} n_s & d_s \\ n_u & d_u \end{pmatrix}(s) < 2$ olduğu görülür. Diğer durumlar da benzer muhakeme ile

gösterilebilir. Bu nedenle (φ, n, d) , s noktasında bir immersiyon değildir. Tersine

$rank \begin{pmatrix} \varphi_s & n_s & d_s \\ \varphi_u & n_u & d_u \end{pmatrix} < 2$ ise s noktasında $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ ve $k_1(a_1, b_1, e_1, f_1, g_1)$

$+k_2(a_2, b_2, e_2, f_2, g_2) = 0$ olacak şekilde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan $I_F(s) = 0$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Yukarıdaki ifadelerden yola çıkarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.11. $(\varphi, n, d): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ bir çatılandırılmış yüzey ve $s \in U$ olsun.

- φ 'nin s noktası etrafında bir immersiyon (bir regüler yüzey) olabilmesi için gerek ve yeter şart $J_F(s) \neq 0$ olmasıdır.
- (φ, n) 'nin s noktası etrafında bir Legendre immersiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart $D_F(s) \neq 0$ olmasıdır.
- (φ, n, d) 'nin s noktası etrafında çatılandırılmış immersiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart $I_F(s) \neq 0$ olmasıdır, [4].

BÖLÜM 4. ÇATILANDIRILMIŞ EĞRİLERİN BERTRAND OFSET REGLE YÜZEYLERİ

Bu bölümde diğer bölümlerde tanımladığımız kavramlar ve elde ettiğimiz denklemler yardımıyla çatılandırılmış eğriler ile oluşturulan regle yüzeyler ve bu regle yüzeylerin Bertrand ofsetleri incelenmiştir. Çatılandırılmış regle yüzeyler oluşturulurken regle yüzeyin striksiyon eğrisi, regüler eğri olarak alınmış olup dayanak eğrisi çatılandırılmış eğridir.

4.1. Çatılandırılmış Açılmaz Regle Yüzeyler

Genellikle çatılandırılmış eğrilerin yay uzunluğu parametresini dikkate alamayız. Ancak, (γ, μ_2, ν) bir immersiyon ise (γ, μ_2, ν) çatılandırılmış immersiyonları için yay uzunluğu parametresini gösterebiliriz, [17]. Bu çalışmada yay uzunluğu parametresi s alınmıştır. $\beta'(s) \neq 0$ olmak üzere $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir eğri ve $(\gamma, \mu_2, \nu): I \rightarrow S^2 \times \Delta_2$ bir küresel çatılandırılmış eğri olsun. Böylece \mathbb{R}^3 Öklid uzayında çatılandırılmış dayanak eğrili M yüzeyi bir açılmaz regle yüzey olur. M yüzeyi için parametrizasyon

$$\varphi(s, u) = \beta(s) + u\gamma(s) \quad (4.1)$$

olarak verilir. Burada $\langle \gamma, \gamma \rangle = 1$, $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ ve $\langle \beta', \nu \rangle = 0$ dır. Burada ν , $\gamma'(s) = \alpha(s)\nu(s)$ olmak üzere $\{\gamma, \mu_2, \nu\}$ çatısının binormal vektörüdür. φ açılmaz regle yüzey olduğundan β bir striksiyon eğrisidir. Çünkü

$$c(s) = \beta(s) - \frac{\langle \beta'(s), \gamma'(s) \rangle}{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \gamma(s) \quad (4.2)$$

eşitliğinde $\langle \beta'(s), \gamma'(s) \rangle = \langle \beta'(s), \alpha(s)v(s) \rangle = \alpha(s) \langle \beta'(s), v(s) \rangle = 0$ olduğundan $c(s) = \beta(s)$ striksiyon eğrisidir.

Lemma 4.1.1. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış açılmaz regle yüzeyinin striksiyon eğri seçimi, dayanak eğri seçiminden bağımsızdır.

β' vektörü γ , μ_2 ve v vektörlerinin lineer terkibi olarak yazılabileceğinden ve $\langle \beta', v \rangle = 0$ olduğundan

$$\beta'(s) = A\gamma + C\mu_2 \quad (4.3)$$

yazılabilir.

$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir regüler yüzey olmak üzere $\forall (s, u) \in U$ için $\langle \varphi_s(s, u), n(s, u) \rangle = 0$ ve $\langle \varphi_u(s, u), n(s, u) \rangle = 0$ şartları sağlanıyorsa $(\varphi, n): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2$ Legendre immersiyondur. $n = \frac{\varphi_s \times \varphi_u}{\|\varphi_s \times \varphi_u\|}$ yüzey normali ve $d: U \rightarrow S^2$ diferansiyellenebilir bir

dönüşüm mevcut olup (φ, n, d) bir çatılandırılmış yüzeydir. Burada $d = \frac{\varphi_u}{\|\varphi_u\|}$ olarak

alalım.

Önerme 4.1.2. $t(s, u) = n(s, u) \times d(s, u)$ olmak üzere \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzey üzerinde oluşturulan ortogonal çatı

$$\begin{aligned} n &= \frac{u\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \mu_2 - \frac{C}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} v \\ d &= \gamma \\ t &= -\frac{C}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \mu_2 - \frac{u\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} v \end{aligned} \quad (4.4)$$

dir. Yukarıdaki denklemleri $\{\gamma, \mu_2, v\}$ çatısını dikkate alarak tekrar düzenlersek

$$\begin{aligned} n &= \left\{ 0, \frac{u\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, \frac{-C}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \right\} \\ d &= \{1, 0, 0\} \\ t &= \left\{ 0, -\frac{C}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, -\frac{u\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

bulunur.

İspat. $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin s ve u parametrelerine göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \beta' + u\gamma' = \beta' + u\alpha v \\ \varphi_u &= \gamma \end{aligned} \quad (4.6)$$

olmak üzere bu yüzeyin normalini

$$n = \frac{\varphi_s \times \varphi_u}{\|\varphi_s \times \varphi_u\|} \quad (4.7)$$

eşitliği yardımıyla hesaplayalım. (4.6)'da verilen eşitliklerin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \varphi_s \times \varphi_u &= (\beta' + u\alpha v) \times \gamma \\ &= (\beta' \times \gamma) + u\alpha(v \times \gamma) \\ &= ((A\gamma + C\mu_2) \times \gamma) + u\alpha(v \times \gamma) \\ &= (A(\gamma \times \gamma) + C(\mu_2 \times \gamma)) + u\alpha(v \times \gamma) \\ &= u\alpha\mu_2 - Cv \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki eşitliği (4.7) eşitliğinde yerine yazıp gerekli işlemleri yaparsak regle yüzeyin normali

$$n = \frac{u\alpha\mu_2 - Cv}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \quad (4.8)$$

elde edilir. Burada $D = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}$ dir.

$\{n, d, t\}$ çatısı (γ, μ_2, ν) bazı ile elde edilen bir çatıdır. Çatılandırılmış yüzey tanımı ve (4.8) denkleminde elde edilmiş olan $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin normali ile $\{n, d, t\}$ çatısındaki n aynı olduğundan

$$\begin{aligned} n &= \frac{u\alpha\mu_2 - Cv}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \\ &= 0\gamma + \frac{u\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}\mu_2 + \frac{-C}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}\nu \\ &= \left\{ 0, \frac{u\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, \frac{-C}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde çatılandırılmış yüzeyin tanımından yararlanılır ve (4.6) denkleminde elde edilen $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin u parametresine göre kısmi türevi alınır

$$d = \gamma = \{1, 0, 0\}$$

elde edilir. Böylece t vektörü çatılandırılmış yüzeyin tanımı göz önüne alınarak n ve d vektörlerinin birbirleriyle vektörel çarpımlarından

$$\begin{aligned} t = n \times d &= \left\{ 0, \frac{u\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, \frac{-C}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \right\} \times \{1, 0, 0\} \\ &= \left\{ 0, -\frac{C}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, \frac{u\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 4.1.3. $a_i, b_i, e_i, f_i, g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i:1,2$ diferansiyellenebilir fonksiyonları çatılandırılmış yüzeyin temel değişmez fonksiyonları olsun. Bu fonksiyonlar

$$\begin{aligned}
 a_1 &= A, & b_1 &= -\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}, \\
 a_2 &= 1, & b_2 &= 0, \\
 e_1 &= \frac{C\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, & f_1 &= \frac{-lC^2 - \alpha'Cu + C'u\alpha - lu^2\alpha^2}{u^2\alpha^2 + C^2}, \\
 e_2 &= 0, & f_2 &= -\frac{C\alpha}{u^2\alpha^2 + C^2}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

dir.

İspat. (3.6) ifadesinde verilen $\varphi_s = a_1d + b_1t$ eşitliğinde d ve t vektörlerinin değerlerini yazarsak

$$\varphi_s = a_1 \{1, 0, 0\} + b_1 \left\{ 0, -\frac{C}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, -\frac{u\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \right\}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadenin ve (4.6) ifadesinin 1. eşitliğinin sol tarafları aynı olduğundan

$$\begin{aligned}
 a_1 &= A, \\
 b_1 &= -\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}
 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.6) ifadesinde verilen $\varphi_u = a_2d + b_2t$ eşitliğinde d ve t vektörlerinin değerlerini yazarsak

$$\varphi_u = a_2 \{1, 0, 0\} + b_2 \left\{ 0, -\frac{C}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, -\frac{u\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \right\}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadenin ve (4.6) ifadesinin 2. eşitliğinin sol tarafları aynı olduğundan

$$\begin{aligned} a_2 &= 1, \\ b_2 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

(4.8) eşitliğiyle verilen n normal vektörünün s ve u parametrelerine göre kısmi türevleri

$$n_s = \left\{ \frac{C^3\alpha + Cu^2\alpha^3}{(u^2\alpha^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{C^3l + C^2u\alpha' + Cu^2\alpha^2l - CC'u\alpha}{(u^2\alpha^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{C^2u\alpha l - C'u^2\alpha^2 + u^3\alpha^3l + Cu^2\alpha\alpha'}{(u^2\alpha^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

ve

$$n_u = \left\{ 0, \frac{C^2\alpha}{(u^2\alpha^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{Cu\alpha^2}{(u^2\alpha^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

dır.

Ayrıca (3.7) ifadesinde verilen $n_s = e_1d + f_1t$ ve $n_u = e_2d + f_2t$ eşitliklerinde sırasıyla d ve t vektörlerinin değerleri yazılırsa

$$\begin{aligned} n_s &= e_1\{1,0,0\} + f_1\left\{0, -\frac{C}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, -\frac{u\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}\right\} \\ n_u &= e_2\{1,0,0\} + f_2\left\{0, -\frac{C}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, -\frac{u\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}\right\} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıda elde edilen n_s ve n_u vektörlerinin birbirleriyle eşitliği sonucu

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{C\alpha}{\sqrt{C^2 + u^2\alpha^2}}, & f_1 &= \frac{-lC^2 - \alpha'Cu + C'u\alpha - lu^2\alpha^2}{u^2\alpha^2 + C^2}, \\ e_2 &= 0, & f_2 &= -\frac{C\alpha}{u^2\alpha^2 + C^2} \end{aligned}$$

fonksiyonları elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4. $(\varphi, n, d): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ temel değişmezler ile birlikte çatılandırılmış yüzey ve $D_F = (J_F, K_F, H_F): U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir diferansiyellenebilir dönüşümdür. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin $D_F = (J_F, K_F, H_F)$ eğrilikleri

$$\begin{aligned} J_F &= \sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}, \\ K_F &= -\frac{C^2\alpha^2}{(u^2\alpha^2 + C^2)^{3/2}}, \\ H_F &= \frac{-\alpha'Cu + AC\alpha + C'u\alpha - l(u^2\alpha^2 + C^2)}{2(u^2\alpha^2 + C^2)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

dir.

İspat. $(\varphi, n, d): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ temel değişmezler ile birlikte çatılandırılmış yüzey ve $D_F = (J_F, K_F, H_F): U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir diferansiyellenebilir dönüşümdür. (4.9)'da verilen fonksiyonlar (3.10) denkleminde verilen J_F, K_F, H_F denklemlerinde yerine yazılırsa sırasıyla

$$J_F = \det \begin{pmatrix} A & -\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{u^2\alpha^2 + C^2},$$

$$K_F = \det \begin{pmatrix} \frac{C\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} & \frac{-lC^2 - \alpha'Cu + C'u\alpha - lu^2\alpha^2}{u^2\alpha^2 + C^2} \\ 0 & -\frac{C\alpha}{u^2\alpha^2 + C^2} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{C^2\alpha^2}{(C^2 + u^2\alpha^2)^{3/2}}$$

ve

$$H_F = -\frac{1}{2} \left\{ \det \begin{pmatrix} A & \frac{-lC^2 - \alpha'Cu + C'u\alpha - lu^2\alpha^2}{u^2\alpha^2 + C^2} \\ 1 & -\frac{C\alpha}{u^2\alpha^2 + C^2} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2} & \frac{C\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{-\alpha'Cu + AC\alpha + C'u\alpha - l(u^2\alpha^2 + C^2)}{2(u^2\alpha^2 + C^2)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

\mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyi açılmaz olduğundan $K_F \neq 0$ dır. Dolayısıyla $C \neq 0$ olup hem J_F hem de $D_F = (J_F, K_F, H_F)$ ve

$$I_F = \left(D_F, \frac{u\alpha^2}{\sqrt{C^2 + u^2\alpha^2}}, 0, 0, -\frac{Cu\alpha^3}{(C^2 + u^2\alpha^2)^{3/2}}, -\frac{C\alpha}{\sqrt{C^2 + u^2\alpha^2}} \right) \quad (4.11)$$

eğrilikleri sıfırdan farklıdır. Bu durumda aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 4.1.5. φ yüzeyi s noktası etrafında bir immersiyondur.

Sonuç 4.1.6. (φ, n) çatılandırılmış temel regle yüzeyi s noktası etrafında bir Legendre immersiyon olur.

Sonuç 4.1.7. (φ, n, d) çatılandırılmış regle yüzeyi s noktası etrafında bir çatılandırılmış immersiyondur.

Sonuç 4.1.8. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış açılmaz regle yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$-\alpha'Cu + AC\alpha + C'u\alpha - l(u^2\alpha^2 + C^2) = 0 \quad (4.12)$$

olmasıdır.

Önerme 4.1.9. (3.13) denklemleri yardımıyla $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği

$$K = -\frac{C^2\alpha^2}{D^4} \quad (4.13)$$

$$H = \frac{1}{2D^3}(AC\alpha - C^2l - Cu\alpha' + C'u\alpha - u^2\alpha^2l)$$

şeklinde elde edilir.

İspat. (4.10)'da verilen fonksiyonlar, (3.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$K = \frac{K_F}{J_F} = \frac{-\frac{C^2\alpha^2}{(u^2\alpha^2 + C^2)^{3/2}}}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \quad (4.14)$$

$$= -\frac{C^2\alpha^2}{D^4}$$

ve

$$\begin{aligned}
H &= \frac{H_F}{J_F} = \frac{\frac{\alpha'Cu - (AC + C'u)\alpha + l(u^2\alpha^2 + C^2)}{2(u^2\alpha^2 + C^2)}}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \\
&= \frac{1}{2D^3} (AC\alpha - C^2l - Cu\alpha' + C'u\alpha - u^2\alpha^2l)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi de (4.9)'da verilen eşitlikler yardımıyla $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin 1. ve 2. temel formlarının katsayılarını elde edelim.

Teorem 4.1.10. $a_i, b_i, e_i, f_i, g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ diferansiyellenebilir fonksiyonları çatılandırılmış yüzeylerin temel değişmez fonksiyonları olsun. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin 1. ve 2. temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
E &= A^2 + C^2 + u^2\alpha^2, \\
F &= \langle \beta', \gamma \rangle = A, \\
G &= 1
\end{aligned} \tag{4.16}$$

ve

$$\begin{aligned}
L &= \frac{-AC\alpha - C^2l - Cu\alpha' + C'u\alpha - u^2\alpha^2l}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, \\
M &= \frac{-C\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, \\
N &= 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

dir.

İspat. $a_i, b_i, e_i, f_i, g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ diferansiyellenebilir fonksiyonları çatılandırılmış yüzeylerin temel değişmez fonksiyonları olsun. (3.12) ve (4.9) denklemleri kullanılarak 1. temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
E &= a_1^2 + b_1^2 = A^2 + \left(-\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}\right)^2 = A^2 + C^2 + u^2\alpha^2, \\
F &= a_1a_2 + b_1b_2 = A \cdot 1 + \left(-\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}\right) \cdot 0 = A, \\
G &= a_2^2 + b_2^2 = 1^2 + 0^2 = 1
\end{aligned}$$

ve 2. temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
L &= -a_1e_1 - b_1f_1 \\
&= \left((-A) \left(\frac{C\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}} \right) \right) - \left(\left(-\sqrt{C^2 + u^2\alpha^2} \right) \left(\frac{-lC^2 - \alpha'Cu + C'u\alpha - lu^2\alpha^2}{u^2\alpha^2 + C^2} \right) \right) \\
&= \frac{-AC\alpha - C^2l - Cu\alpha' + C'u\alpha - u^2\alpha^2l}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, \\
M &= -a_1e_2 - b_1f_2 = ((-A)(0)) - \left(\left(-\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2} \right) \left(-\frac{C\alpha}{u^2\alpha^2 + C^2} \right) \right) \\
&= \frac{-C\alpha}{\sqrt{u^2\alpha^2 + C^2}}, \\
N &= -a_2e_2 - b_2f_2 = ((-1)(0)) - \left((0) \left(-\frac{C\alpha}{u^2\alpha^2 + C^2} \right) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Ayrıca yukarıdaki teoremlerle verilen $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin 1. ve 2. temel formunun katsayılarını (2.1) ve (2.2) denklemleri kullanılarak da elde edilebilir.

$\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin (4.6)'da verilen birinci mertebenden kısmi türevlerinin ikinci mertebeden kısmi türevleri alınır

$$\begin{aligned}
\varphi_{ss} &= (\beta' + u\gamma')' \\
&= (A' - u\alpha^2)\gamma + (C' - u\alpha)\mu_2 + (A\alpha + Cl + u\alpha')v \\
\varphi_{su} &= (\beta' + u\gamma')_u = \gamma' = \alpha v \\
\varphi_{uu} &= (\gamma)_u = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin elde edilen birinci ve ikinci mertebeden türevleri (2.1) ve (2.2)'de yerine yazılırsa sırasıyla 1. temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
E &= \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = \langle \beta' + u\alpha v, \beta' + u\alpha v \rangle \\
&= A^2 + C^2 + u^2\alpha^2, \\
F &= \langle \varphi_s, \varphi_u \rangle = \langle \beta' + u\alpha v, \gamma \rangle \\
&= \langle \beta', \gamma \rangle = A, \\
G &= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \gamma, \gamma \rangle = 1
\end{aligned} \tag{4.18}$$

ve 2. temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
L &= \langle \varphi_{ss}, n \rangle = \frac{-AC\alpha - C^2l - Cu\alpha' + C'u\alpha - u^2\alpha^2l}{D}, \\
M &= \langle \varphi_{su}, n \rangle = \frac{-C\alpha}{D}, \\
N &= \langle \varphi_{uu}, n \rangle = 0
\end{aligned} \tag{4.19}$$

bulunur. Bu eşitliklerin sırasıyla Teorem 4.1.10'da verilen 1. ve 2. temel formun katsayıları ile aynı olduğu görülmektedir.

Şimdi de $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin (4.18)'de verilen 1. temel formun katsayılarını ve (4.19)'da elde edilen 2. temel formun katsayılarını kullanarak K Gauss eğriliğini ve H ortalama eğriliğini hesaplayalım.

1. ve 2. formun katsayılarını sırasıyla (2.3) ve (2.4) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$K = \frac{\left(-AC\alpha - C^2l - Cu\alpha' + C'u\alpha - u^2\alpha^2l \right) \cdot 0 - \left(\frac{-C\alpha}{D} \right)^2}{\frac{D}{u^2\alpha^2 + C^2 = D^2}} \quad (4.20)$$

$$= \frac{-C^2\alpha^2}{D^4}$$

ve

$$H = \frac{1}{2} \frac{\left(\left(A^2 + C^2 + u^2\alpha^2 \right) \cdot 0 - 2A \left(\frac{-C\alpha}{D} \right) + 1 \cdot \left(\frac{-AC\alpha - C^2l - Cu\alpha' + C'u\alpha - u^2\alpha^2l}{D} \right) \right)}{D^2} \quad (4.21)$$

$$= \frac{1}{2D^3} (AC\alpha - C^2l - Cu\alpha' + C'u\alpha - u^2\alpha^2l)$$

bulunur.

Bu eşitliklerin Önerme 4.1.9'da verilen K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği ile aynı olduğu görülmektedir.

4.2. Çatılandırılmış Regle Yüzeylerin Bertrand Ofsetleri

Çatılandırılmış regle yüzey üzerindeki $\{\lambda, k, q\}$ küresel Frenet üçyüzlüsü

$$\lambda, k = \frac{\lambda'}{\|\lambda'\|}, q = \frac{\lambda \times \lambda'}{\|\lambda'\|} \quad (4.22)$$

ile ifade edilir.

Burada λ, k ve q sırasıyla küresel gösterge, merkez normal ve asimptotik normaldir.

$\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin küresel Frenet elemanları ise

$$\begin{aligned}
\lambda &= \gamma \\
k &= \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} = \frac{\alpha v}{\|\alpha v\|} = v \\
q &= \frac{\gamma \times \gamma'}{\|\gamma'\|} = \frac{\gamma \times \alpha v}{\|\alpha v\|} = \gamma \times v = -\mu_2
\end{aligned} \tag{4.23}$$

ile ifade edilir. Burada $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin Frenet üçyüzlüsü, γ , μ_2 ve v sırasıyla küresel gösterge, asimptotik normal ve merkez normaldir.

Tanım 4.2.1. Ortak normale sahip iki regle yüzeyin karşılıklı üreteçlerinin boğaz noktalarında birebir eşleme mevcut ise bu iki regle yüzeye birbirinin Bertrand ofsetleridir denir. Çatılandırılmış açılabilir regle yüzeyin denklemi

$$\varphi(s, u) = \beta(s) + u\gamma(s)$$

ile ifade edilir. Burada β , yüzeyin boğaz eğrisi ve s , β eğrisi boyunca yay uzunluğudur.

Eğer γ , μ_2 ve v , φ yüzeyinin jeodezik Frenet elemanları ise φ yüzeyinin ve φ^* Bertrand ofsetinin jeodezik Frenet elemanları arasında

$$\begin{bmatrix} \gamma^* \\ \mu_2^* \\ v^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \mu_2 \\ v \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

bağıntısı vardır.

Çatılandırılmış $\varphi(s, u)$ regle yüzeyin Bertrand ofseti, Tanım 2.2.1 dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\varphi^*(s, u) &= \beta^*(s) + u\gamma^*(s) = \\
&= [\beta(s) + rv(s)] + u[(\cos \phi)\gamma(s) + (\sin \phi)\mu_2(s)]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

olarak yazılabilir. Eğer burada $\phi = 0$ olursa çatılandırılmış açılmaz regle yüzeyin Bertrand ofseti

$$\varphi^{*1}(s, u) = \beta(s) + rv(s) + u\gamma(s) = \varphi(s, u) + rv(s) \quad (4.26)$$

olur. Eğer $\phi = 90^\circ$ olursa çatılandırılmış açılmaz regle yüzeyin Bertrand ofseti

$$\varphi^{*2}(s, u) = \beta(s) + rv(s) + u\mu_2(s) \quad (4.27)$$

olur.

(4.27) denkleminde aşağıdaki sonuç açıkça görülür.

Sonuç 4.2.2. Çatılandırılmış açılmaz regle yüzeyin ofsetleri yine çatılandırılmış olmak zorunda değildir.

$\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin Bertrand ofset yüzey denklemleri ϕ açısının durumuna göre elde edilen (4.26) ve (4.27) eşitlikleri yardımıyla ofset yüzeylerin 1. ve 2. temel form katsayılarını, K^* Gauss eğriliğini ve H^* ortalama eğriliğini inceleyelim.

$\varphi^{*1}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir regüler yüzey olmak üzere $\forall (s, u) \in U$ için $\langle \varphi^{*1}_s(s, u), n^{*1}(s, u) \rangle = 0$ ve $\langle \varphi^{*1}_u(s, u), n^{*1}(s, u) \rangle = 0$ şartları sağlanıyorsa

$(\varphi^{*1}, n^{*1}): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2$ Legendre immersiyondur. $n = \frac{\varphi^{*1}_s \times \varphi^{*1}_u}{\|\varphi^{*1}_s \times \varphi^{*1}_u\|}$ yüzey normali

ve $d: U \rightarrow S^2$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm mevcut olup (φ, n, d) bir

çatılandırılmış yüzeydir. Burada $d^{*1} = \frac{\varphi^{*1}_u}{\|\varphi^{*1}_u\|}$ olarak alalım.

Önerme 4.2.3. $t^{*1}(s,u) = n^{*1}(s,u) \times d^{*1}(s,u)$ olmak üzere \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin birinci ofset yüzeyi olan $\varphi^{*1}(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyi üzerinde oluşturulan ortogonal çatı

$$\begin{aligned} n^{*1} &= \left\{ 0, \frac{u\alpha + r'}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}}, \frac{-C + rl}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \right\} \\ d^{*1} &= \{1, 0, 0\} \\ t^{*1} &= \left\{ 0, \frac{lr - C}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}}, \frac{-r' - u\alpha}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

dır.

İspat. $\varphi^{*1}(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin s ve u parametrelerine göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned} \varphi^{*1}_s &= \varphi_s + r'v + rv' \\ &= \beta' + u\alpha v + r'v + r(-\alpha\gamma - l\mu_2) \\ &= (A - r\alpha)\gamma + (C - rl)\mu_2 + (u\alpha + r')v \\ \varphi^{*1}_u &= \varphi_u \\ &= \gamma \end{aligned} \quad (4.29)$$

dir. $\varphi^{*1}(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin yüzey normali

$$n^{*1} = \frac{\varphi^{*1}_s \times \varphi^{*1}_u}{\|\varphi^{*1}_s \times \varphi^{*1}_u\|} \quad (4.30)$$

eşitliği yardımıyla hesaplanır. $\varphi^{*1}(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin s ve u parametrelerine göre kısmi türevlerinin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned}\varphi_{s,u}^{*1} \times \varphi_u^{*1} &= ((A - r\alpha)\gamma + (C - rl)\mu_2 + (u\alpha + r')v) \times \gamma \\ &= (u\alpha + r')\mu_2 + (-C + rl)v\end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki eşitliği (4.30) eşitliğinde yerine yazarsak gerekli işlemleri yaparsak regle yüzeyin normalini

$$n^{*1} = \frac{(u\alpha + r')\mu_2 + (-C + rl)v}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \quad (4.31)$$

elde edilir. Burada $D^{*1} = \sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}$ dir.

$\{n^{*1}, d^{*1}, t^{*1}\}$ çatısı (γ, μ_2, v) bazı ile elde edilen bir çatıdır. $\varphi^{*1}(s, u)$ ofset regle yüzeyinin normali ile $\{n^{*1}, d^{*1}, t^{*1}\}$ çatısındaki n^{*1} aynı olduğundan n^{*1} normalini (γ, μ_2, v) baz vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned}n^{*1} &= \frac{(u\alpha + r')\mu_2 + (-C + rl)v}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \\ &= 0\gamma + \frac{u\alpha + r'}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}}\mu_2 + \frac{-C + rl}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}}v \\ &= \left\{ 0, \frac{u\alpha + r'}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}}, \frac{-C + rl}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \right\}\end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. $d^{*1} = \frac{\varphi_u^{*1}}{\|\varphi_u^{*1}\|}$ alalım. (4.29) ifadesi ile verilen $\varphi^{*1}(s, u)$ regle

yüzeyinin u parametresine göre kısmi türevi d^{*1} 'de yerine yazılırsa

$$d^{*1} = \frac{\gamma}{\|\gamma\|} = \gamma = \{1, 0, 0\}$$

bulunur. Çatılandırılmış yüzeyin tanımını dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
t^{*1} &= n^{*1} \times d^{*1} \\
&= \left\{ 0, \frac{u\alpha + r'}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}}, \frac{-C + rl}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \right\} \times \{1, 0, 0\} \\
&= 0\gamma + \frac{rl - C}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \mu_2 + \frac{-r' - u\alpha}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \nu
\end{aligned}$$

elde edilir. γ, μ_2 ve ν 'nin lineer terkibi olarak yazılan t^{*1} düzenlersek

$$t^{*1} = \left\{ 0, \frac{rl - C}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}}, \frac{-r' - u\alpha}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \right\}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 4.2.4. $a^{*1}_i, b^{*1}_i, e^{*1}_i, f^{*1}_i, g^{*1}_i : U \rightarrow \mathbb{R}, i:1,2$ diferansiyellenebilir fonksiyonları çatılandırılmış yüzeylerin temel değişmez fonksiyonları olsun. Bu fonksiyonlar

$$\begin{aligned}
a^{*1}_1 &= A - r\alpha, & b^{*1}_1 &= -\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2}, \\
a^{*1}_2 &= 1, & b^{*1}_2 &= 0, \\
e^{*1}_1 &= \frac{(-lr + C)\alpha}{\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2}}, & e^{*1}_2 &= 0, \\
f^{*1}_1 &= \frac{\left(\begin{array}{l} -l^3 r^2 - u\alpha' C + 2l^2 r C - Cr'' + C'r' - l'rr' + uC'\alpha \\ -ul'r\alpha + lu\alpha'r - lC^2 + lrr'' - 2l(r')^2 - 3lur'\alpha - lu^2\alpha^2 \end{array} \right)}{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2}, \\
f^{*1}_2 &= \frac{(lr - C)\alpha}{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

dir.

İspat. $\{n^{*1}(s,u), d^{*1}(s,u), t^{*1}(s,u)\}$ çatısı, $\varphi^{*1}(s,u)$ boyunca bir hareketli çatıdır.

Bu durumda

$$\begin{pmatrix} \varphi^{*1}_s \\ \varphi^{*1}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{*1}_1 & b^{*1}_1 \\ a^{*1}_2 & b^{*1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{*1} \\ t^{*1} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

ve

$$\begin{pmatrix} n^{*1}_s \\ d^{*1}_s \\ t^{*1}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{*1}_1 & f^{*1}_1 \\ -e^{*1}_1 & 0 & g^{*1}_1 \\ -f^{*1}_1 & -g^{*1}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^{*1} \\ d^{*1} \\ t^{*1} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

$$\begin{pmatrix} n^{*1}_u \\ d^{*1}_u \\ t^{*1}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{*1}_2 & f^{*1}_2 \\ -e^{*1}_2 & 0 & g^{*1}_2 \\ -f^{*1}_2 & -g^{*1}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^{*1} \\ d^{*1} \\ t^{*1} \end{pmatrix}$$

eşitlikleri mevcuttur. (4.33) ifadesinde verilen $\varphi^{*1}_s = a^{*1}_1 d^{*1} + b^{*1}_1 t^{*1}$ eşitliğinde d^{*1} ve t^{*1} vektörlerinin değerlerini yazarsak

$$\varphi^{*1}_s = a^{*1}_1 \{1,0,0\} + b^{*1}_1 \left\{ 0, \frac{lr - C}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}}, \frac{-r' - u\alpha}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \right\}$$

bulunur. Yukarıda ifade ve (4.29) ifadesinin 1. eşitliğinin sol tarafları aynı olduğundan

$$\begin{aligned} a^{*1}_1 &= A - r\alpha, \\ b^{*1}_1 &= -\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.33) ifadesiyle verilen $\varphi^{*1}_u = a^{*1}_2 d^{*1} + b^{*1}_2 t^{*1}$ eşitliğinde d^{*1} ve t^{*1} vektörlerinin değerlerini yazarsak

$$\varphi_{*u}^1 = a_{*2}^1 \{1, 0, 0\} + b_{*2}^1 \left\{ 0, \frac{lr - C}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}}, \frac{-r' - u\alpha}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \right\}$$

bulunur. Yukarıda ifade ve (4.29) ifadesindeki 2. eşitliğin sol tarafları aynı olduğundan

$$\begin{aligned} a_{*2}^1 &= 1, \\ b_{*2}^1 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

(4.31) eşitliğiyle verilen n_{*l}^1 vektörünün s ve u parametrelerine göre kısmi türevleri sırasıyla

$$n_{*s}^1 = \left\{ \frac{2(-lr + C)\alpha \left((-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2 \right)}{\left(2 \left((-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2 \right)^{3/2} \right)}, \frac{\left(\begin{aligned} &(-r' - u\alpha) \left(\begin{aligned} &2(lr - C)(-C' + l'r + lr') \\ &+ 2(u\alpha' + r'')(r' + u\alpha) \end{aligned} \right) \\ &+ 2l(-lr + C) \left((-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2 \right) + \\ &2(u\alpha' + r'') \left((-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2 \right) \end{aligned} \right)}{\left(2 \left((-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2 \right)^{3/2} \right)}, \right. \\ \left. \frac{2(r' + u\alpha) \left(\begin{aligned} &l^3 r^2 + u\alpha' C - 2l^2 r C + Cr'' - C'r' + l'r r' - uC'\alpha \\ &+ ul'r\alpha + l(-u\alpha'r + C^2 - rr'' + 2(r')^2 + 3ur'\alpha + u^2\alpha^2) \end{aligned} \right)}{\left(2 \left((-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2 \right)^{3/2} \right)} \right\}$$

ve

$$n_{*u}^1 = \left\{ 0, \frac{u\alpha + r'}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}}, \frac{-C + rl}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \right\}$$

dir. Ayrıca (4.34) ifadesinde verilen $n^*{}_s = e^*{}_1 d^* + f^*{}_1 t^*$ ve $n^*{}_u = e^*{}_2 d^* + f^*{}_2 t^*$ eşitliklerinde de d^* ve t^* vektörlerinin değerlerini sırasıyla yazarsak

$$n^*{}_s = e^*{}_1 \{1, 0, 0\} + f^*{}_1 \left\{ 0, \frac{lr - C}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}}, \frac{-r' - u\alpha}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \right\}$$

$$n^*{}_u = e^*{}_2 \{1, 0, 0\} + f^*{}_2 \left\{ 0, \frac{lr - C}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}}, \frac{-r' - u\alpha}{\sqrt{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2}} \right\}$$

bulunur. Yukarıda elde edilen $n^*{}_s$ ve $n^*{}_u$ vektörlerinin birbirleriyle eşitliği göz önüne alınırsa

$$e^*{}_1 = \frac{(-lr + C)\alpha}{\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2}}, \quad f^*{}_1 = \frac{\begin{pmatrix} -l^3 r^2 - u\alpha' C + 2l^2 r C - Cr'' + C'r' - \\ l'rr' + uC'\alpha - ul'r\alpha + lu\alpha'r - lC^2 \\ +lrr'' - 2l(r')^2 - 3lur'\alpha - lu^2\alpha^2 \end{pmatrix}}{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2},$$

$$e^*{}_2 = 0, \quad f^*{}_2 = \frac{(lr - C)\alpha}{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2}$$

fonksiyonları elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.5. $(\varphi^*, n^*, d^*): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ temel değişmezler ile birlikte çatılandırılmış yüzeyin birinci ofset yüzeyi olmak üzere bu yüzeyin $D^*{}_F = (J^*{}_F, K^*{}_F, H^*{}_F)$ eğrilikleri

$$\begin{aligned}
J^{*1}_F &= \sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2}, \\
K^{*1}_F &= -\frac{(-lr + C)^2 \alpha^2}{\left((-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2\right)^{3/2}}, \\
H^{*1}_F &= \frac{\begin{pmatrix} -l^3 r^2 - u\alpha' C + 2l^2 r C - Cr'' + C'r' - l'rr' \\ +uC'\alpha - ul'r\alpha + AC\alpha - rC\alpha^2 + lu\alpha'r - lC^2 \\ +lrr'' - 2l(r')^2 - Alr\alpha - 3ulr'\alpha - lu^2\alpha^2 + lr^2\alpha^2 \end{pmatrix}}{2\left((-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2\right)}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

dir.

İspat. $(\varphi^{*1}, n^{*1}, d^{*1}): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ temel değişmezler ile birlikte çatılandırılmış yüzeyin birinci ofset çatılandırılmış yüzeyidir. Aşağıda verilen

$$\begin{aligned}
J^{*1}_F &= \det \begin{pmatrix} a^{*1}_1 & b^{*1}_1 \\ a^{*1}_2 & b^{*1}_2 \end{pmatrix} \\
K^{*1}_F &= \det \begin{pmatrix} e^{*1}_1 & f^{*1}_1 \\ e^{*1}_2 & f^{*1}_2 \end{pmatrix} \\
H^{*1}_F &= -\frac{1}{2} \left\{ \det \begin{pmatrix} a^{*1}_1 & f^{*1}_1 \\ a^{*1}_2 & f^{*1}_2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b^{*1}_1 & e^{*1}_1 \\ b^{*1}_2 & e^{*1}_2 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

eşitlikleri yardımıyla bir $D^{*1}_F = (J^{*1}_F, K^{*1}_F, H^{*1}_F): U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir dönüşüm tanımlanabilir.

$(\varphi^{*1}, n^{*1}, d^{*1}): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ temel değişmezler ile birlikte çatılandırılmış yüzey ve $D^{*1}_F = (J^{*1}_F, K^{*1}_F, H^{*1}_F): U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir diferansiyellenebilir dönüşümdür. (4.32)'de verilen fonksiyonlar (4.36) ifadesindeki J^{*1}_F, K^{*1}_F eşitliklerinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
J^{*1}_F &= \det \begin{pmatrix} A - r\alpha & -\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2}, \\
K^{*1}_F &= \det \begin{pmatrix} \frac{(-lr + C)\alpha}{\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2}} & \frac{\begin{pmatrix} -l^3 r^2 - u\alpha' C + 2l^2 r C - Cr'' \\ + C'r' - l'rr' + uC'\alpha - ul'r\alpha \\ + lu\alpha'r - lC^2 + lrr'' - 2l(r')^2 \\ - 3lur'\alpha - lu^2\alpha^2 \end{pmatrix}}{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} \\ 0 & \frac{(lr - C)\alpha}{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{(-lr + C)^2 \alpha^2}{\left((-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

ve H^{*1}_F eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
H^{*1}_F &= -\frac{1}{2} \left\{ \det \begin{pmatrix} A - r\alpha & \frac{\begin{pmatrix} -l^3 r^2 - u\alpha' C + 2l^2 r C - Cr'' \\ + C'r' - l'rr' + uC'\alpha - ul'r\alpha \\ + lu\alpha'r - lC^2 + lrr'' - 2l(r')^2 \\ - 3lur'\alpha - lu^2\alpha^2 \end{pmatrix}}{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} \\ 1 & \frac{(lr - C)\alpha}{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} & \frac{(-lr + C)\alpha}{\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} -l^3 r^2 - u\alpha' C + 2l^2 r C - Cr'' + C'r' - l'rr' + uC'\alpha - ul'r\alpha + AC\alpha - rC\alpha^2 \\ + lu\alpha'r - lC^2 + lrr'' - 2l(r')^2 - Alr\alpha - 3lur'\alpha - lu^2\alpha^2 + lr^2\alpha^2 \end{pmatrix}}{2\left((-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2\right)}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.6. φ^{*1} 'nin s noktası etrafında bir immersiyon (bir regüler yüzey) olabilmesi için gerek ve yeter şart $J^{*1}_F(s) \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda (4.35)'de elde edilen J^{*1}_F eğriliğinin sıfırdan farklı olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} -lr &\neq C, \\ r' &\neq -u\alpha \end{aligned} \quad (4.37)$$

sağlanmasıdır.

Sonuç 4.2.7. (φ^{*1}, n^{*1}) çatılandırılmış temel regle yüzeyinin s noktası etrafında bir Legendre immersiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart $D^{*1}_F(s) \neq 0$ olmasıdır. $D^{*1}_F(s) \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart (4.37)'nin sağlanmasıdır.

Sonuç 4.2.8. $(\varphi^{*1}, n^{*1}, d^{*1})$ çatılandırılmış regle yüzeyinin s noktası etrafında çatılandırılmış immersiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart $I^{*1}_F(s) \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda $(\varphi^{*1}, n^{*1}, d^{*1})$ çatılandırılmış regle yüzeyin I^{*1}_F si aşağıdaki gibi

$$I^{*1}_F = \left(D^{*1}_F, \frac{\alpha(r' + u\alpha)}{\sqrt{(lr - C)^2 + (r' + u\alpha)^2}}, 0, 0, \frac{\alpha^2(lr - C)(r' + u\alpha)}{((lr - C)^2 + (r' + u\alpha)^2)^{3/2}}, \frac{\alpha(lr - C)}{\sqrt{(lr - C)^2 + (r' + u\alpha)^2}} \right) \quad (4.38)$$

dir. $I^{*1}_F(s) \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart (4.37)'nin sağlanmasıdır.

Sonuç 4.2.9. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\varphi^{*1}(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin açılabilir olabilmesi için gerek ve yeter şart $K^{*1}_F \neq 0$ olmasıdır. $K^{*1}_F \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart (4.37) denklemlerinde verilen eşitsizliklerden birincisinin sağlanmasıdır.

Sonuç 4.2.10. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\varphi^{*1}(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{pmatrix} -l^3 r^2 - u\alpha' C + 2l^2 rC - Cr'' + C'r' - l'rr' \\ +uC'\alpha - ul'r\alpha + AC\alpha - rC\alpha^2 + lu\alpha'r - lC^2 \\ +lrr'' - 2l(r')^2 - Alr\alpha - 3ulr'\alpha - lu^2\alpha^2 + lr^2\alpha^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.39)$$

olmasıdır.

Önerme 4.2.11. $\varphi^{*1}(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin K^{*1} Gauss eğriliği ve H^{*1} ortalama eğriliği

$$K^{*1} = \frac{-(C\alpha - r\alpha l)^2}{(D^{*1})^4}$$

$$H^{*1} = \frac{1}{2(D^{*1})^3} \begin{pmatrix} -l^3 R^2 - u\alpha' C + 2l^2 rC - Cr'' + C'r' - l'rr' + uC'\alpha \\ -ul'r\alpha + AC\alpha - rC\alpha^2 + lu\alpha'r - lC^2 + lrr'' \\ -2l(r')^2 - lAr\alpha - 3ulr'\alpha - lu^2\alpha^2 + lr^2\alpha^2 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

şeklindedir.

İspat. (4.35)'de verilen fonksiyonlar, (3.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} K^{*1} &= \frac{K^{*1}_F}{J^{*1}_F} = \frac{-\frac{(-lr + C)^2 \alpha^2}{\left(\frac{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2}{3/2}\right)^{3/2}}}{\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2}} \\ &= \frac{-(C\alpha - r\alpha l)^2}{\left((u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2\right)^2} \\ &= \frac{-(C\alpha - r\alpha l)^2}{(D^{*1})^4} \end{aligned} \quad (4.41)$$

ve

$$\begin{aligned}
H^{*1} &= \frac{H^{*1}_F}{J^{*1}_F} = \frac{\begin{pmatrix} -l^3 r^2 - u\alpha' C + 2l^2 r C - Cr'' + C'r' - l'rr' \\ +uC'\alpha - ul'r\alpha + AC\alpha - rC\alpha^2 + lu\alpha'r - lC^2 \\ +lrr'' - 2l(r')^2 - Alr\alpha - 3ulr'\alpha - lu^2\alpha^2 + lr^2\alpha^2 \end{pmatrix}}{2\left((-lr+C)^2 + (r'+u\alpha)^2\right)} \\
&= \frac{1}{2(D^{*1})^3} \begin{pmatrix} -l^3 R^2 - u\alpha' C + 2l^2 r C - Cr'' + C'r' - l'rr' + uC'\alpha \\ -ul'r\alpha + AC\alpha - rC\alpha^2 + lu\alpha'r - lC^2 + lrr'' \\ -2l(r')^2 - lAr\alpha - 3lur'\alpha - lu^2\alpha^2 + lr^2\alpha^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.12. $a^{*1}_i, b^{*1}_i, e^{*1}_i, f^{*1}_i, g^{*1}_i : U \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$ diferansiyellenebilir fonksiyonları çatılandırılmış yüzeylerin temel değişmez fonksiyonları olsun. Bu fonksiyonlar yardımıyla elde edilen \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\varphi^{*1}(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin 1. ve 2. temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
E^{*1} &= (A - r\alpha)^2 + (C - rl)^2 + (u\alpha + r')^2, \\
F^{*1} &= A - r\alpha, \\
G^{*1} &= 1
\end{aligned} \tag{4.43}$$

ve

$$\begin{aligned}
L^{*1} &= \frac{1}{D^{*1}} \begin{pmatrix} -l^3 r^2 - u\alpha' C + 2l^2 r C - Cr'' + C'r' - l'rr' \\ +uC'\alpha - ul'r\alpha - AC\alpha + rC\alpha^2 + lu\alpha'r - lC^2 \\ +lrr'' - 2l(r')^2 + lAr\alpha - 3lur'\alpha - lu^2\alpha^2 - lr^2\alpha^2 \end{pmatrix}, \\
M^{*1} &= \frac{1}{D^{*1}} (-C\alpha + r\alpha l), \\
N^{*1} &= 0
\end{aligned} \tag{4.44}$$

dir.

İspat. $\varphi^{*1}:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir regüler yüzey olmak üzere $(n^{*1}, d^{*1}):U \rightarrow \Delta$ mevcutsa $(\varphi^{*1}, n^{*1}, d^{*1})$ bir çatılandırılmış yüzeydir. 1. ve 2. temel formun katsayıları ile $a^{*1}_i, b^{*1}_i, e^{*1}_i, f^{*1}_i$ ve g^{*1}_i temel değişmez fonksiyonları arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} E^{*1} &= (a^{*1}_1)^2 + (b^{*1}_1)^2 \\ F^{*1} &= a^{*1}_1 a^{*1}_2 + b^{*1}_1 b^{*1}_2 \\ G^{*1} &= (a^{*1}_2)^2 + (b^{*1}_2)^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

ve

$$\begin{aligned} L^{*1} &= -a^{*1}_1 e^{*1}_1 - b^{*1}_1 f^{*1}_1 \\ M^{*1} &= -a^{*1}_1 e^{*1}_2 - b^{*1}_1 f^{*1}_2 \\ N^{*1} &= -a^{*1}_2 e^{*1}_2 - b^{*1}_2 f^{*1}_2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

dir. (4.32) ile verilen temel değişmez fonksiyonlarının eşitlerini sırasıyla (4.45) ve (4.46)'da verilen eşitliklerde yerine yazarsak, 1. temel formun katsayıları

$$\begin{aligned} E^{*1} &= a_1^2 + b_1^2 = (A - r\alpha)^2 + \left(-\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} \right)^2 \\ &= (A - r\alpha)^2 + (C - rl)^2 + (u\alpha + r')^2, \\ F^{*1} &= a_1 a_2 + b_1 b_2 = (A - r\alpha)(1) + \left(-\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} \right)(0) \\ &= A - r\alpha, \\ G^{*1} &= a_2^2 + b_2^2 = 1^2 + 0^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve 2. temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
L^{*1} &= -a_1^{*1} e_1^{*1} - b_1^{*1} f_1^{*1} \\
&= \left(\begin{array}{c} -(A - r\alpha) \left(\frac{(-lr + C)\alpha}{\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2}} \right) - \\ \left(-\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} \right) \left(\frac{\left(\begin{array}{c} -l^3 r^2 - u\alpha' C + 2l^2 rC - Cr'' + C'r' - l'rr' + uC'\alpha - ul'r\alpha \\ + lu\alpha'r - lC^2 + lrr'' - 2l(r')^2 - 3lur'\alpha - lu^2\alpha^2 \end{array} \right)}{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} \right) \end{array} \right) \\
&= \frac{1}{D^{*1}} \left(\begin{array}{c} -l^3 r^2 - u\alpha' C + 2l^2 rC - Cr'' + C'r' - l'rr' + uC'\alpha - ul'r\alpha - AC\alpha + rC\alpha^2 \\ + lu\alpha'r - lC^2 + lrr'' - 2l(r')^2 + lAr\alpha - 3lur'\alpha - lu^2\alpha^2 - lr^2\alpha^2 \end{array} \right), \\
M^{*1} &= -a_1^{*1} e_2^{*1} - b_1^{*1} f_2^{*1} \\
&= -(A - r\alpha)(0) - \left(\left(-\sqrt{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} \right) \left(\frac{(lr - C)\alpha}{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{D^{*1}} (-C\alpha + r\alpha l), \\
N^{*1} &= -a_2^{*1} e_2^{*1} - b_2^{*1} f_2^{*1} \\
&= -(1)(0) - (0) \left(\frac{(lr - C)\alpha}{(-lr + C)^2 + (r' + u\alpha)^2} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi de yukarıdaki teoremle verilen $\varphi^{*1}(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin 1. ve 2. temel formunun katsayılarını (2.1) ve (2.2) denklemlerini kullanarak elde edelim.

$\varphi^{*1}(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin s ve u parametrelerine göre ikinci mertebeden kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned}
\varphi^{*1}_{ss} &= \left(\begin{array}{c} (A' - 2r'\alpha - r\alpha' - u\alpha^2)\gamma + (C' - 2r'l - rl' - lu\alpha)\mu_2 \\ + (A\alpha - r\alpha^2 + Cl - rl^2 + u\alpha' + r'')v \end{array} \right) \\
\varphi^{*1}_{uu} &= 0 \\
\varphi^{*1}_{su} &= \alpha v
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.29)'da elde edilen eşitliklerle beraber yukarıda elde edilen eşitlikler (2.1) ve (2.2)'de yerine yazılırsa sırasıyla 1. temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
E^{*1} &= \langle \varphi^{*1}_s, \varphi^{*1}_s \rangle = \langle \gamma(A - r\alpha) + \mu_2(C - rl) + v(u\alpha + r'), \gamma(A - r\alpha) + \mu_2(C - rl) + v(u\alpha + r') \rangle \\
&= (A - r\alpha)^2 + (C - rl)^2 + (u\alpha + r')^2, \\
F^{*1} &= \langle \varphi^{*1}_s, \varphi^{*1}_u \rangle = \langle \gamma(A - r\alpha) + \mu_2(C - rl) + v(u\alpha + r'), \gamma \rangle \\
&= A - r\alpha, \\
G^{*1} &= \langle \varphi^{*1}_u, \varphi^{*1}_u \rangle = \langle \gamma, \gamma \rangle \\
&= 1
\end{aligned} \tag{4.47}$$

ve 2. temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
L^{*1} &= \langle \varphi^{*1}_{ss}, n^{*1} \rangle = \frac{1}{D^{*1}} \begin{pmatrix} -l^3 r^2 - u\alpha' C + 2l^2 r C - Cr'' + C'r' \\ -l' r r' + u C' \alpha - ul' r \alpha - AC\alpha + r C \alpha^2 \\ + lu\alpha' r - l C^2 + l r r'' - 2l(r')^2 + l A r \alpha \\ -3l u r' \alpha - l u^2 \alpha^2 - l r^2 \alpha^2 \end{pmatrix}, \\
M^{*1} &= \langle \varphi^{*1}_{su}, n^{*1} \rangle = \frac{1}{D^{*1}} (-C\alpha + r\alpha l), \\
N^{*1} &= \langle \varphi^{*1}_{uu}, n^{*1} \rangle = 0
\end{aligned} \tag{4.48}$$

elde edilir.

Elde edilen bu katsayıların Teorem 4.2.12'de verilen 1. ve 2. temel formun katsayıları ile aynı olduğu görülmektedir.

Şimdi de $\varphi^{*1}(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin (4.47)'de elde edilen 1. temel formun katsayılarını ve (4.48)'de elde edilen 2. temel formun katsayılarını kullanarak K^{*1} Gauss eğriliğini ve H^{*1} ortalama eğriliğini hesaplayalım.

(4.47)'de elde edilen 1. temel formun katsayılarını ve (4.48)'de edilen 2. temel formun katsayılarını sırasıyla (2.3) ve (2.4) denklemlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
K^{*1} &= \frac{L^{*1} N^{*1} - (M^{*1})^2}{E^{*1} G^{*1} - (F^{*1})^2} = \frac{1}{(D^{*1})^2} \frac{-(C\alpha - r\alpha l)^2}{(u\alpha + r')^2 + (-C + rl)^2} \\
&= \frac{-(C\alpha - r\alpha l)^2}{(D^{*1})^4}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

ve

$$\begin{aligned}
H^{*1} &= \frac{E^{*1} N^{*1} - 2F^{*1} M^{*1} + G^{*1} L^{*1}}{2(E^{*1} G^{*1} - (F^{*1})^2)} \\
&= \frac{1}{2(D^{*1})^3} \begin{pmatrix} -l^3 r^2 - u\alpha' C + 2l^2 r C - Cr'' + C' r' - l' r r' + u C' \alpha \\ -ul' r \alpha + AC\alpha - r C \alpha^2 + lu\alpha' r - l C^2 + l r r'' \\ -2l(r')^2 - l A r \alpha - 3l u r' \alpha - l u^2 \alpha^2 + l r^2 \alpha^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

bulunur.

Bu eşitliklerin Önerme 4.2.11’de verilen K^{*1} Gauss eğriliği ve H^{*1} ortalama eğriliği aynı olduğu görülmektedir.

Şimdi de ϕ açısının $\phi = 90^\circ$ olması durumunda $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin $\varphi^{*2}(s, u)$ ikinci ofsetini inceleyelim.

Teorem 4.2.13. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\gamma}^*$ vektörleri arasındaki açı ϕ olsun. $\phi = 90^\circ$ olması durumunda $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin ikinci ofset regle yüzeyi $\varphi^{*2}(s, u)$ ’ nun 1. ve 2. temel formlarının katsayıları

$$\begin{aligned}
E^{*2} &= (A - r\alpha)^2 + (C - rl)^2 + (r' + ul)^2, \\
F^{*2} &= C - rl, \\
G^{*2} &= 1
\end{aligned} \tag{4.51}$$

ve

$$\begin{aligned}
 L^{*2} &= \frac{1}{D^{*2}} \begin{pmatrix} -A'r' + 2(r')^2 \alpha + r\alpha'r' + 3\alpha ulr' - A'ul \\ +r\alpha'ul + \alpha u^2 l^2 + A^2 \alpha - Ar\alpha^2 + Ar'' + Aul' \\ +ACl - Arl^2 - Ar\alpha^2 + R^2 \alpha^3 - r''r\alpha\alpha \\ -ul'r - Clr\alpha + r^2 l^2 \alpha \end{pmatrix}, \\
 M^{*2} &= \frac{1}{D^{*2}} (Al - r\alpha l), \\
 N^{*2} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

dir.

İspat. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\gamma}^*$ vektörleri arasındaki açı ϕ olsun. $\phi = 90^\circ$ olması durumunda $\varphi^{*2}(s, u)$ Bertrand ofsetinin s ve u parametrelerine göre kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
 \varphi^{*2}_s &= \beta' + r'v + rv' + u\mu_2' \\
 &= A\gamma + C\mu_2 + r'v - r\alpha\gamma - rl\mu_2 + ulv \\
 &= (A - r\alpha)\gamma + (C - rl)\mu_2 + (r' + ul)v \\
 \varphi^{*2}_u &= \mu_2
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

dir. Bu eşitlikler yardımıyla $\varphi^{*2}(s, u)$ Bertrand ofsetinin 1. temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
 E^{*2} &= \langle \varphi^{*2}_s, \varphi^{*2}_s \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} (A - r\alpha)\gamma + \\ (C - rl)\mu_2 + \\ (r' + ul)v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (A - r\alpha)\gamma + \\ (C - rl)\mu_2 + \\ (r' + ul)v \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= (A - r\alpha)^2 + (C - rl)^2 + (r' + ul)^2, \\
 F^{*2} &= \langle \varphi^{*2}_s, \varphi^{*2}_u \rangle = \langle (A - r\alpha)\gamma + (C - rl)\mu_2 + (r' + ul)v, \mu_2 \rangle \\
 &= C - rl, \\
 G^{*2} &= \langle \varphi^{*2}_u, \varphi^{*2}_u \rangle = \langle \mu_2, \mu_2 \rangle \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi^{*2}(s,u)$ Bertrand ofsetinin s ve u parametrelerine göre 2. mertebeden kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\varphi^{*2}_{ss} &= \begin{pmatrix} \gamma'(A-r\alpha) + \gamma(A'-r'\alpha-r\alpha') + \\ v'(r'+ul) + v(r''+ul') + \\ \mu_2'(C-rl) + \mu_2(C'-r'l-rl') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha v(A-r\alpha) + \gamma(A'-r'\alpha-r\alpha') + (-\alpha\gamma-l\mu_2)(r'+ul) \\ +v(r''+ul') + lv(C-rl) + \mu_2(C'-r'l-rl') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A'-r'\alpha-r\alpha'-\alpha r' - \alpha ul)\gamma + (-r'l-ul^2 + C'-r'l-rl')\mu_2 + \\ (A\alpha - r\alpha^2 + r'' + ul' + Cl - rl^2)v \end{pmatrix} \\ \varphi^{*2}_{su} &= vl \\ \varphi^{*2}_{uu} &= 0\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\varphi^{*2}(s,u)$ regle yüzeyinin normali

$$n^{*2} = \frac{\varphi^{*2}_s \times \varphi^{*2}_u}{\|\varphi^{*2}_s \times \varphi^{*2}_u\|} \quad (4.54)$$

eşitliği yardımıyla hesaplanır. $\varphi^{*2}(s,u)$ regle yüzeyinin s ve u parametrelerine göre kısmi türevlerinin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned}\varphi^{*2}_s \times \varphi^{*2}_u &= ((A-r\alpha)\gamma + (C-rl)\mu_2 + (r'+ul)v) \times (\mu_2) \\ &= (-r'-ul)\gamma + (A-r\alpha)v\end{aligned}$$

dir. Bu eşitliği (4.54) eşitliğinde yerine yazar ve gerekli işlemleri yaparsak ofset regle yüzeyin normali

$$n^{*2} = \frac{\varphi^{*2}_s \times \varphi^{*2}_u}{\|\varphi^{*2}_s \times \varphi^{*2}_u\|} = \frac{(-r'-ul)\gamma + (A-r\alpha)v}{\sqrt{(-r'-ul)^2 + (A-r\alpha)^2}} \quad (4.55)$$

olarak elde edilir. Burada $D^{*2} = \sqrt{(-r' - ul)^2 + (A - r\alpha)^2}$ olarak alınmıştır. Elde edilen bu yüzey normali yardımıyla ofset yüzeyin 2. temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned}
L^{*2} &= \langle \varphi_{ss}^{*2}, n^{*2} \rangle \\
&= \left\langle \left(\begin{array}{l} (A' - r'\alpha - r\alpha' - \alpha r' - \alpha ul)\gamma + \\ (-r'l - ul^2 + C' - r'l - rl')\mu_2 + \\ (A\alpha - r\alpha^2 + r'' + ul' + Cl - rl^2)v \end{array} \right), \left(\frac{(-r' - ul)\gamma + (A - r\alpha)v}{D^{*2}} \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{D^{*2}} \left(\begin{array}{l} -A'r' + 2(r')^2\alpha + r\alpha'r' + 3\alpha ulr' - A'ul + r\alpha'ul + \alpha u^2l^2 \\ +A^2\alpha - Ar\alpha^2 + Ar'' + Aul' + ACl - Arl^2 - Ar\alpha^2 \\ +R^2\alpha^3 - r''r\alpha\alpha - ul'r - Clr\alpha + r^2l^2\alpha \end{array} \right), \\
M^{*2} &= \langle \varphi_{su}^{*2}, n^{*2} \rangle \\
&= \left\langle vl, \frac{(-r' - ul)\gamma + (A - r\alpha)v}{D^{*2}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{D^{*2}} (Al - r\alpha l), \\
N^{*2} &= \langle \varphi_{uu}^{*2}, n^{*2} \rangle \\
&= \left\langle 0, \frac{(-r' - ul)\gamma + (A - r\alpha)v}{D^{*2}} \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.14. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\gamma}^*$ vektörleri arasındaki açı ϕ olsun. $\phi = 90^\circ$ olması durumunda elde edilen $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin ikinci ofset regle yüzeyi olan $\varphi^{*2}(s, u)$ 'nin K^{*2} Gauss eğriliği

$$K^{*2} = \frac{-(Al - r\alpha l)^2}{(D^{*2})^4} \quad (4.56)$$

dir.

İspat. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\gamma}^*$ vektörleri arasındaki açı $\phi = 90^\circ$ olsun. (4.51)'de elde edilen 1. temel formun katsayıları yardımıyla

$$\begin{aligned} E^{*2} G^{*2} - (F^{*2})^2 &= \left((A - r\alpha)^2 + (r' + ul)^2 + (C - rl)^2 \right) (1) - (C - rl)^2 \\ &= (-r' - ul)^2 + (A - r\alpha)^2 \\ &= (D^{*2})^2 \end{aligned} \quad (4.57)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (4.52)'de elde edilen 2. temel formun katsayıları yardımıyla

$$\begin{aligned} L^{*2} N^{*2} - (M^{*2})^2 &= \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} -A'r' + 2(r')^2 \alpha + r\alpha'r' + 3aulr' \\ -A'ul + r\alpha'ul + au^2l^2 + A^2\alpha \\ -Ar\alpha^2 + Ar'' + Aul' + ACl \\ -Ar'l^2 - Ar\alpha^2 + R^2\alpha^3 \\ -r''r\alpha\alpha - ul'r - Clr\alpha + r^2l^2\alpha \end{array} \right) \\ \frac{1}{D^{*2}} \end{array} \right) (0) \\ &= \frac{-\left(\frac{1}{D^{*2}} (Al - r\alpha l) \right)^2}{(D^{*2})^2} \end{aligned} \quad (4.58)$$

elde edilir. (4.57) ve (4.58) eşitlikleri (2.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$K^{*2} = \frac{L^{*2} N^{*2} - (M^{*2})^2}{E^{*2} G^{*2} - (F^{*2})^2} = \frac{\frac{-\left(\frac{1}{D^{*2}} (Al - r\alpha l) \right)^2}{(D^{*2})^2}}{(-r' - ul)^2 + (A - r\alpha)^2} = \frac{-\left(\frac{1}{D^{*2}} (Al - r\alpha l) \right)^2}{(D^{*2})^4}$$

eşitliği bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.15. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\gamma}^*$ vektörleri arasındaki açı ϕ olsun. $\phi = 90^\circ$ olması durumunda elde edilen $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin ikinci ofset regle yüzeyi olan $\varphi^{*2}(s, u)$ 'nin H^{*2} ortalama eğriliği

$$H^{*2} = \frac{1}{2(D^{*2})^3} \begin{pmatrix} -A'r' + 2(r')^2\alpha + r\alpha'r' + 3\alpha ulr' - A'ul + r\alpha'ul \\ +\alpha u^2l^2 + A^2\alpha - Ar\alpha^2 + Ar'' + Aul' - ACl + Arl^2 \\ -Ar\alpha^2 + r^2\alpha^3 - r''r\alpha^2 - ul'r + Clr\alpha - r^2l^2\alpha \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

dir.

İspat. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\gamma}^*$ vektörleri arasındaki açı $\phi = 0$ olsun. (4.57) eşitliği ile birlikte Teorem 4.2.13'de verilen (4.51) ve (4.52) eşitlikleri $\varphi^{*2}(s, u)$ Bertrand ofsetinin

$$H^{*2} = \frac{E^{*2} N^{*2} - 2F^{*2} M^{*2} + G^{*2} L^{*2}}{2(E^{*2} G^{*2} - (F^{*2})^2)}$$

ortalama eğriliği formülünde yerine yazılırsa

$$H^{*2} = \frac{\begin{pmatrix} -A'r' + 2(r')^2\alpha + r\alpha'r' + 3\alpha ulr' - A'ul + r\alpha'ul \\ +\alpha u^2l^2 + A^2\alpha - Ar\alpha^2 + Ar'' + Aul' - ACl + Arl^2 \\ -Ar\alpha^2 + r^2\alpha^3 - r''r\alpha^2 - ul'r + Clr\alpha - r^2l^2\alpha \end{pmatrix}}{2\left((-r' - ul)^2 + (A - r\alpha)^2\right)} \\ = \frac{1}{2(D^{*2})^3} \begin{pmatrix} -A'r' + 2(r')^2\alpha + r\alpha'r' + 3\alpha ulr' - A'ul + r\alpha'ul \\ +\alpha u^2l^2 + A^2\alpha - Ar\alpha^2 + Ar'' + Aul' - ACl + Arl^2 \\ -Ar\alpha^2 + r^2\alpha^3 - r''r\alpha^2 - ul'r + Clr\alpha - r^2l^2\alpha \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.16. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\varphi^{*2}(s,u)$ regle yüzeyinin açılmaz olabilmesi için gerek ve yeter şart $K^{*2} \neq 0$ yani (4.56) denkleminde

$$A \neq r\alpha \quad (4.60)$$

olmasıdır.

Sonuç 4.2.17. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\varphi^{*2}(s,u)$ regle yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\begin{array}{l} -A'r' + 2(r')^2 \alpha + r\alpha'r' + 3\alpha ulr' - A'ul + r\alpha'ul + \alpha u^2 l^2 + A^2 \alpha - A r \alpha^2 \\ + Ar'' + Aul' - ACl + Arl^2 - A r \alpha^2 + r^2 \alpha^3 - r'' r \alpha^2 - ul'r + Clr\alpha - r^2 l^2 \alpha \end{array} \right) = 0 \quad (4.61)$$

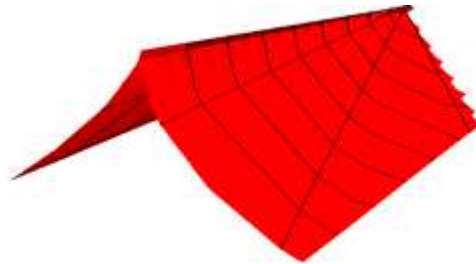
olmasıdır.

Sonuç 4.2.18. Çatılandırılmış açılmaz regle yüzeyin Bertrand ofset regle yüzeyleri açılmaz değildir.

Örnek 4.2.19. \mathbb{R}^3 Öklid uzayında γ çatılandırılmış temel dayanak eğrili regle yüzey

$$\varphi(s,u) = \left(\frac{s^2}{2}, \frac{-2s}{3}, 0 \right) + u \left(s^2, s^3, \sqrt{1-s^4-s^6} \right) \quad (4.62)$$

parametrik denklemi ile verilsin, (Şekil 4.1) .



Şekil 4.1. γ çatılandırılmış temel dayanak eğrili regle yüzey $\varphi(s,u)$

$\gamma = (s^2, s^3, \sqrt{1-s^4-s^6})$ çatılandırılmış regle yüzeyin dayanak eğrisidir. Bu durumda $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin $\{\gamma, \mu_2, \nu\}$ çatısının elemanlarını elde edelim. $\langle \gamma, \gamma \rangle = 1, \langle \nu, \nu \rangle = 1, \langle \mu_2, \mu_2 \rangle = 1$ olup γ, μ_2 ve ν birim uzunluktadır. $\{\gamma, \mu_2, \nu\}$ bir çatı oluşturduğundan γ ve μ_2 vektörleri birbirine diktir. Bu nedenle $\langle \gamma, \mu_2 \rangle = 0$ olacak şekilde $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin asli normali

$$\mu_2 = \left\{ \begin{array}{l} s, \frac{s^6 - \sqrt{1-s^2-2s^4+2s^8+s^{10}}}{-1+s^4}, \\ \left(\frac{s^3\sqrt{1-s^4-s^6} + \frac{s^9\sqrt{1-s^4-s^6}}{-1+s^4}}{\frac{s^3\sqrt{1-s^4-s^6}\sqrt{1-s^2-2s^4+2s^8+s^{10}}}{-1+s^4}} \right) - \\ \frac{\quad}{-1+s^4+s^6} \end{array} \right\} \quad (4.63)$$

elde edilir. γ ve (4.63) ile verilen μ_2 'nin vektörel çarpımı yardımıyla $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin binormali

$$\nu = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{1-s^2-2s^4+2s^8+s^{10}}}{\sqrt{1-s^4-s^6}}, \frac{s(-1+s^6-s^4(-1+\sqrt{1-s^2-2s^4+2s^8+s^{10}}))}{(-1+s^4)\sqrt{1-s^4-s^6}} \\ \frac{s^4-s^2\sqrt{1-s^2-2s^4+2s^8+s^{10}}}{-1+s^4} \end{array} \right\} \quad (4.64)$$

elde edilir. $\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin γ dayanak eğrisinin eğriliklerini elde etmek için (4.62)-(4.64) eşitlikleri (3.2) eşitliğinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
l &= \frac{\begin{pmatrix} 1 - s^6 - s^{10} + 3s^4 \sqrt{1 - s^2 - 2s^4 + 2s^8 + s^{10}} \\ -s^8 \left(1 + \sqrt{1 - s^2 - 2s^4 + 2s^8 + s^{10}}\right) \end{pmatrix}}{(-1 + s^4) \sqrt{1 - s^4 - s^6} \sqrt{1 - s^2 - 2s^4 + 2s^8 + s^{10}}} \\
m &= \frac{-3s^3 + s^7 + 2s \sqrt{1 - s^2 - 2s^4 + 2s^8 + s^{10}}}{(-1 + s^4) \sqrt{1 - s^4 - s^6}} \\
z &= \frac{\begin{pmatrix} 1 - s^6 - s^{10} + 3s^4 \sqrt{1 - s^2 - 2s^4 + 2s^8 + s^{10}} \\ -s^8 \left(1 + \sqrt{1 - s^2 - 2s^4 + 2s^8 + s^{10}}\right) \end{pmatrix}}{(-1 + s^4) \sqrt{1 - s^4 - s^6} \sqrt{1 - s^2 - 2s^4 + 2s^8 + s^{10}}}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

bulunur. (3.2) eşitliğinde $\mu_1 = \gamma$ alındığına dikkat edilmelidir.

$\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin γ dayanak eğrisinin α eğriliğini bulmak için ise Tanım 3.1.1’de verilen $\gamma'(s) = \alpha(s)v(s)$ eşitliğinde γ dayanak eğrisinin türevi (4.64) ’de elde edilen binormal vektörü yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\alpha = \frac{-3s^3 + s^7 + 2s \sqrt{1 - s^2 - 2s^4 + 2s^8 + s^{10}}}{(-1 + s^4) \sqrt{1 - s^4 - s^6}} \tag{4.66}$$

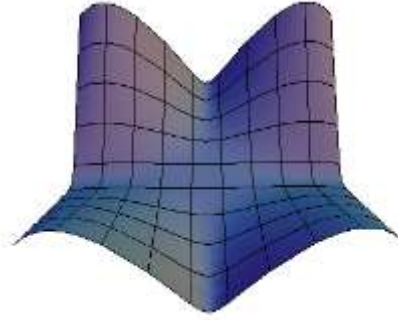
elde edilir.

$\varphi(s, u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin β striksiyon eğrisinin türevi $\beta'(s) = A\gamma + Bv + C\mu_2$ şeklinde yazılabilir. Burada A, B ve C katsayıları sırasıyla aşağıdaki gibi

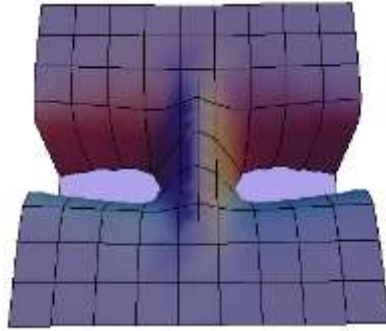
$$\begin{aligned}
A &= \frac{s^3}{3} \\
B &= 0 \\
C &= \frac{-3s^2 + s^6 + 2\sqrt{1 - s^2 - 2s^4 + 2s^8 + s^{10}}}{3(-1 + s^4)}
\end{aligned} \tag{4.67}$$

bulunur.

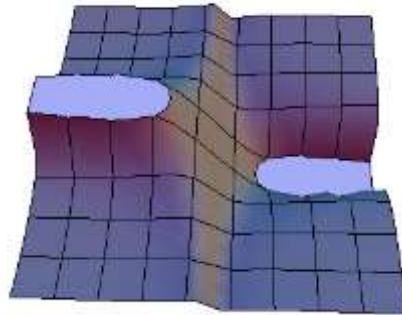
Şimdi de $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin eğriliklerini hesaplayalım. $D_F = (J_F, K_F, H_F)$ eğriliklerini bulmak için (4.65)-(4.67) denklemleri (4.10) denklemlerinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa sırasıyla (Şekil 4.2), (Şekil 4.3) ve (Şekil 4.4) elde edilir.



Şekil 4.2. $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin J_F eğriliği

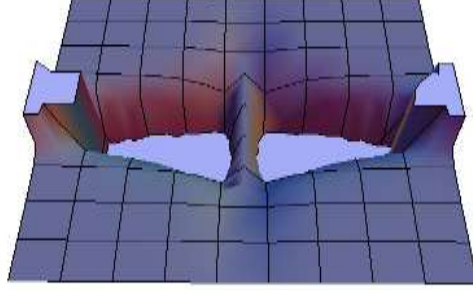


Şekil 4.3. $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin K_F eğriliği



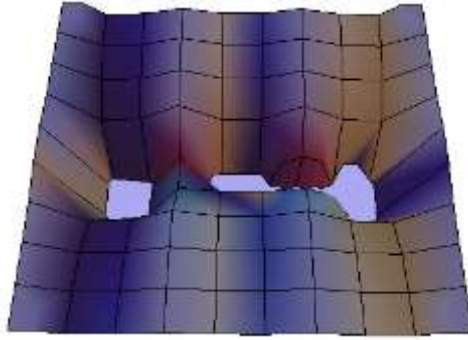
Şekil 4.4 $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin H_F eğriliği

$\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin K Gauss eğriliğini bulalım. (4.13) denklemlerinde (4.65)-(4.67) denklemleri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin K Gauss eğriliği elde edilir, (Şekil 4.5).



Şekil 4.5. $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin K Gauss eğriliği

$\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin H ortalama eğriliğini bulalım. (4.13) denklemlerinde (4.65)-(4.67) denklemleri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin H ortalama eğriliği elde edilir, (Şekil 4.6).



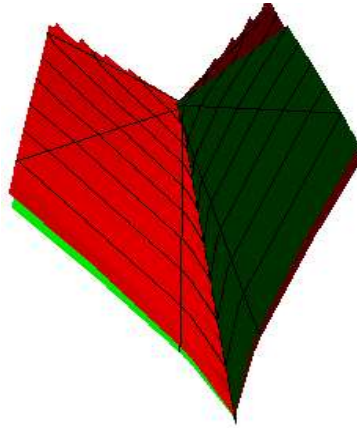
Şekil 4.6. $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyinin H ortalama eğriliği

\mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\gamma}^*$ vektörleri arasındaki açı ϕ olsun. (4.25) ifadesinde $\phi = 0$ olması durumunda $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin $\varphi^{*1}(s,u)$ Bertrand ofset yüzeyi (4.26) denkleminde elde edildi. Bu denklem göz önüne alınıp (4.64)'teki $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin binormal vektörü, (4.62) ifadesindeki $\varphi(s,u)$

çatılandırılmış regle yüzeyin striksiyon eğrisi ve γ çatılandırılmış temel dayanak eğrisi yerine yazılırsa $\varphi^{*1}(s,u)$ birinci ofset yüzey

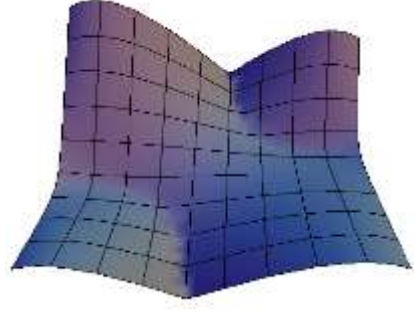
$$\varphi^{*1}(s,u) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{s^2}{2} - \frac{s\sqrt{1-s^2-2s^4+2s^8+s^{10}}}{\sqrt{1-s^4-s^6}} + s^2u, \\ -\frac{2s}{3} + \frac{s^2\left(-1+s^6-s^4\left(-1+\sqrt{1-s^2-2s^4+2s^8+s^{10}}\right)\right)}{\left(-1+s^4\right)\sqrt{1-s^4-s^6}} + s^3u, \\ \frac{s\left(s^4-s^2\sqrt{1-s^2-2s^4+2s^8+s^{10}}\right)}{-1+s^4} + \sqrt{1-s^4-s^6}u \end{array} \right\} \quad (4.68)$$

elde edilir, (Şekil 4.7).

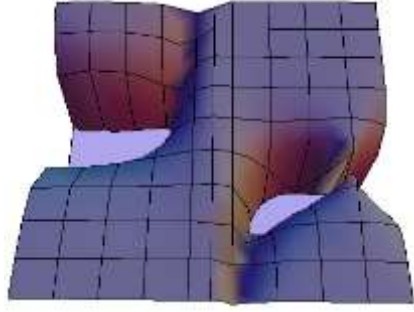


Şekil 4.7. $\phi=0^\circ$ olması durumunda elde edilen $\varphi^{*1}(s,u)$ Bertrand ofseti

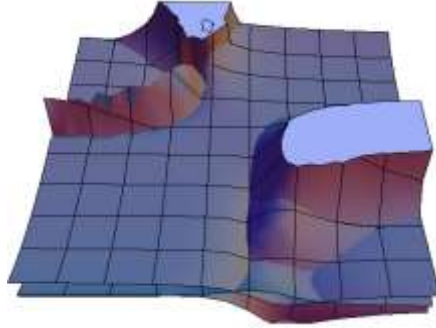
$\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin birinci ofset yüzeyi olan $\varphi^{*1}(s,u)$ 'nin eğriliklerini hesaplayalım. $D^{*1}_F = (J^{*1}_F, K^{*1}_F, H^{*1}_F)$ eğriliklerini bulmak için (4.65)-(4.67) denklemleri (4.35) denklemlerinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa (Şekil 4.8), (Şekil 4.9) ve (Şekil 4.10) elde edilir.



Şekil 4.8. Çatılandırılmış $\varphi^{*1}(s,u)$ birinci ofset yüzeyinin J^{*1}_F eğriliği

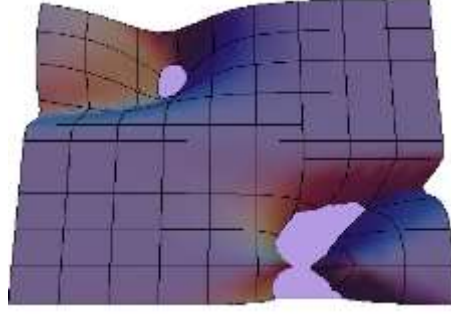


Şekil 4.9. Çatılandırılmış $\varphi^{*1}(s,u)$ birinci ofset yüzeyinin K^{*1}_F eğriliği



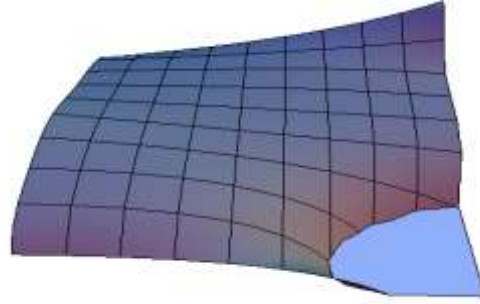
Şekil 4.10. Çatılandırılmış $\varphi^{*1}(s,u)$ birinci ofset yüzeyinin H^{*1}_F eğriliği

$\varphi^{*1}(s,u)$ çatılandırılmış birinci ofset regle yüzeyin K^{*1} Gauss eğriliğini bulalım. (4.65)-(4.67) denklemleri (4.40) denklemlerinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $\varphi^{*1}(s,u)$ çatılandırılmış birinci ofset regle yüzeyinin K^{*1} Gauss eğriliği elde edilir, (Şekil 4.11).



Şekil 4.11. $\phi = 0^\circ$ olması durumunda elde edilen $\varphi^{*1}(s,u)$ Bertrand ofsetinin K^{*1} Gauss eğriliği

$\varphi^{*1}(s,u)$ çatılandırılmış birinci ofset regle yüzeyin H^{*1} ortalama eğriliğini bulalım. (4.40) denklemi ele alınıp (4.65)-(4.67) denklemleri (4.40) denklemlerinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa $\varphi^{*1}(s,u)$ çatılandırılmış birinci ofset regle yüzeyinin H^{*1} ortalama eğriliği elde edilir, (Şekil 4.12).

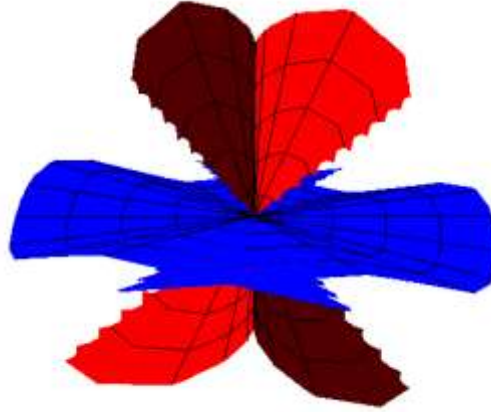


Şekil 4.12. $\phi = 0^\circ$ olması durumunda elde edilen $\varphi^{*1}(s,u)$ Bertrand ofsetinin H^{*1} ortalama eğriliği

\mathbb{R}^3 Öklid uzayında $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\gamma}^*$ vektörleri arasındaki açı ϕ olsun. (4.25) ifadesinde $\phi = 90^\circ$ olması durumunda $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin $\varphi^{*2}(s,u)$ Bertrand ofset yüzeyi (4.27) denkleminde elde edildi. Bu denklem göz önüne alınıp sırasıyla (4.63) ve (4.64)'deki $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin asli normal ve binormal vektörü, (4.62) ifadesindeki $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin striksiyon eğrisi yerine yazılırsa $\varphi^{*2}(s,u)$ ikinci ofset yüzey

$$\varphi^{*2}(s,u) = \left(\begin{array}{l} \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s\sqrt{1-s^2-2s^4+2s^8+s^{10}}}{\sqrt{1-s^4-s^6}} + su \right), \left(\frac{-\frac{2s}{3} + \frac{s^2(-1+s^6-s^4(-1+\sqrt{1-s^2-2s^4+2s^8+s^{10}}))}{(-1+s^4)\sqrt{1-s^4-s^6}}}{(s^6 - \sqrt{1-s^2-2s^4+2s^8+s^{10}})u} \right) \\ \left(\frac{s(s^4-s^2\sqrt{1-s^2-2s^4+2s^8+s^{10}})}{-1+s^4} + \left(\frac{s^3\sqrt{1-s^4-s^6} + \frac{s^9\sqrt{1-s^4-s^6}}{-1+s^4}}{-1+s^4} \right) u \\ \left(\frac{-s^2\sqrt{1-s^4-s^6}\sqrt{1-s^2-2s^4+2s^8+s^{10}}}{-1+s^4} \right) u \\ -1+s^4+s^6 \end{array} \right) \quad (4.69)$$

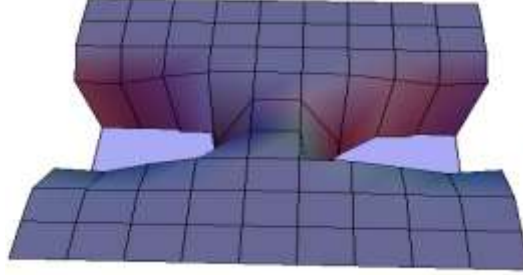
elde edilir, (Şekil 4.13).



Şekil 4.13. $\phi = 90^\circ$ olması durumunda elde edilen $\varphi^{*2}(s,u)$ Bertrand ofseti

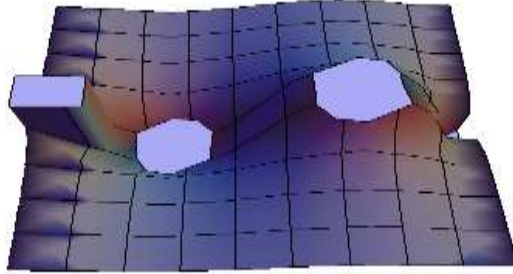
$\varphi^{*2}(s,u)$ ikinci ofset regle yüzeyi birinci ofset yüzeyi gibi çatılandırılmış değildir. Bu nedenden dolayı $\varphi^{*2}(s,u)$ ikinci ofset yüzeyinin K^{*2} Gauss eğriliği ve H^{*2} ortalama eğriliği (2.3) ve (2.4) denklemleri kullanılarak sırasıyla (4.56) ve (4.59) denklemlerinde elde edildi.

Şimdi $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin ikinci ofset yüzeyi olan $\varphi^{*2}(s,u)$ 'nin K^{*2} Gauss eğriliğini bulalım. (4.65)-(4.67) denklemleri (4.56) denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa K^{*2} Gauss eğriliği elde edilir, (Şekil 4.14).



Şekil 4.14. $\phi = 90^\circ$ olması durumunda elde edilen $\varphi^{*2}(s,u)$ Bertrand ofsetinin K^{*2} Gauss eğriliği

Şimdi de $\varphi(s,u)$ çatılandırılmış regle yüzeyin ikinci ofset yüzeyi olan $\varphi^{*2}(s,u)$ regle yüzeyinin H^{*2} ortalama eğriliğini bulalım. (4.65)-(4.67) denklemleri (4.59) denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa H^{*2} ortalama eğriliği elde edilir, (Şekil 4.15).



Şekil 4.15. $\phi = 90^\circ$ olması durumunda elde edilen $\varphi^{*2}(s,u)$ Bertrand ofsetinin H^{*2} ortalama eğriliği

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının orijinal kısmı olan dördüncü bölümde ilk olarak γ çatılandırılmış temel dayanak eğrili çatılandırılmış regle yüzeyin temel değişmez fonksiyonları hesaplandı Ardından temel değişmez fonksiyonlar kullanılarak çatılandırılmış regle yüzeyin temel formları ve çatılandırılmış regle yüzeyin eğrilikleri bulundu. Çatılandırılmış regle yüzeyin eğrilikleri hesaplanarak yüzeyin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği elde edildi. Daha sonra yüzeyler için bilinen standart temel form denklemleri kullanılarak yüzeyin temel formları hesaplandı ve bu temel formlar yardımıyla yüzeyin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği tekrar bulundu. Ardından çatılandırılmış regle yüzeyin Bertrand ofset denklemleri elde edildi ve elde edilen ofset yüzey denklemlerinin birincisi çatılandırılmış iken ikincisinin çatılandırılmamış olduğu görüldü. Buradan çatılandırılmış regle yüzeyin Bertrand ofset yüzeylerinin çatılandırılmış olmak zorunda olmadığı sonucuna varıldı. Daha sonra çatılandırılmış regle yüzeyin birinci ofseti çatılandırılmış olduğundan yukarıdaki gibi çatılandırılmış regle yüzeyimiz için yapılan benzer işlemler yapıldı ve bu yüzeyin temel formları, K^{*1} Gauss eğriliği ve H^{*1} ortalama eğriliği hesaplandı. Bundan sonra çatılandırılmış regle yüzeyin ikinci ofset yüzeyi çatılandırılmış olmadığından dolayı yüzeyler için verilen standart temel form denklemleri kullanılarak temel formlar elde edildi ve bu temel formlar kullanılarak K^{*2} Gauss eğriliği ve H^{*2} ortalama eğriliği hesaplandı.

Bu çalışmada γ çatılandırılmış temel dayanak eğrili çatılandırılmış regle yüzey için elde edilen teorem ve sonuçlar γ çatılandırılmış temel dayanak eğrili çatılandırılmış regle yüzeylerin involüt – evolüt ofsetleri içinde araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Sarıaydın, M.T., Regle Yüzeylerin Geometrisi ve Uygulamaları. Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü Seminerleri, Konya, 2018.
- [2] Ravani, B., Ku, T.S., Bertrand is of ruled and developable surfaces. *Comput.-Aided Des.*, 23(2): 145-152, 1991.
- [3] Honda, S., Takahashi, M., Framed curves in the euclidean space. *Adv. Geom.*, 16(3): 265-276, 2019.
- [4] Fukunaga, T., Takahashi, M., Framed surfaces in the euclidean space. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 50(1): 37-65, 2018.
- [5] Wang, Y., Pei, D., Gao, R., Generic properties of framed rectifying curves. *Mathematics*, 7(1): 37, 2019.
- [6] O' Neill, B., *Elementary Differential Geometry*, Revised second ed. Academic Press Inc., 503p., USA, 2006.
- [7] Hicks, N.J., *Notes on Differential Geometry*. Van Nostrand Reinhold Company, London, 1974.
- [8] Gray, A., *Modern Differential Geometry of Curves and Surface With Mathematica*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1997.
- [9] Sabuncuoğlu, A., *Diferansiyel Geometri*, 4. baskı. Nobel Basımevi, Ankara, 2004.
- [10] Hacısalıhoğlu, H.H., *Diferansiyel Geometri*, 2. Cilt. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınevi, 1994.
- [11] Blaga, A.P., *Lectures on the Differential Geometry*. Romanya, 2005.
- [12] Aydın, S., *Dual uzayda konoidal regle yüzeyler üzerine*. Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2014.

- [13] Liu, H., Yu, Y., Jung, S.D., Invariants of non-developable ruled surfaces in euclidean 3- space. *Beith Algebra Geom.*, 55(1): 189-199, 2014.
- [14] Yoon, D.W., On the ofsets of ruled surfaces in euclidean space. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, , 108(4):985-997, 2016.
- [15] Farouki, R.T., Exact ofset procedures for simple solids. *Comput.-Aided Des.*, 2(4):257-279, 1985.
- [16] Farouki, R.T., The approximation of non-degenerate ofset surfaces. *Comput.-Aided Des.*, 3(1):15-43, 1986.
- [17] Honda, S., Flat surfaces associated with framed base curves. Hokkaido University, Department of Mathematics, Doctoral Thesis, 2018

ÖZGEÇMİŞ

Ayhan KELEŞ, 21.03.1996'da Sakarya'da doğdu. İlköğretimini Sakarya'nın Kocaali ilçesinde Beşevler İlköğretim Okulu'nda tamamladı. Ardından Sakarya'nın Karasu ilçesinde Karasu Anadolu Öğretmen Lisesi'nden 2013 yılında mezun oldu. 2013 yılında başladığı Boğaziçi Üniversitesi, Fen Bilgisi Öğretmenliği Bölümü hazırlık sınıfında 2014 yılında kendi isteği ile ayrıldı. Daha sonra 2014 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümü'nü bölüm birinciliği ile 2018 yılında bitirdi. Akabinde 2018 yılında Sakarya Üniversitesi, Geometri Bilim Dalı'nda Yüksek lisans eğitimine başladı. Ardından 2018 yılında Sakarya Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'ne başladı. Bu sırada 2018 yılında Halit Evin Anadolu İmam – Hatip Lisesi'nde Matematik öğretmeni yaptı.