T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK BİHİPERBOLİK MODÜLLER

DOKTORA TEZİ

Merve BİLGİN

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**TOPOLOJİ**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Soley ERSOY**

Ağustos 2020

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Merve BİLGİN

24.08.2020

TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca katkılarıyla beni yönlendiren, bilgi birikimi ve tecrübelerini benden hiç esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Soley ERSOY'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam esnasında bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan Matematik Bölümü Öğretim Üyeleri Prof. Dr. Murat TOSUN'a, Doç. Dr. Mahmut AKYİĞİT'e, Doç. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK'e, Dr. Öğretim Üyesi Hidayet Hüda KÖSAL'a ve Fizik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Adil BAŞOĞLU'na teşekkür ederim.

Öğrenimim sırasında bana yardımcı olan ve deneyimlerini benimle paylaşan arkadaşlarım İbrahim İNCE'ye, Dr. Kemal EREN'e ve Dr. Kahraman Esen ÖZEN'e de çok teşekkür ederim.

Her zaman sevgi ve destekleri ile beni yüreklendiren aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A°	: A cümlesinin içi
$\overline{A}$	: A cümlesinin kapanışı
$\mathbb{C}$	: Karmaşık (kompleks) sayılar cümlesi
c_E	: Öklidyen topolojiye göre kapanış operatörü
H_2	: Bihiperbolik sayılar cümlesi
$H(\mathrm{j}_s)$	: j_s hiperbolik birimine bağlı hiperbolik sayılar cümlesi
$\times_H$	: Hiperbolik kartezyen çarpım
$\times_{I_{\mathrm{j}_s}}$	: İdempotent kartezyen çarpım
Id	: Özdeşlik fonksiyonu
i_E	: Öklidyen topolojiye göre iç operatörü
$M\mathbb{C}_n$	: Multikompleks sayılar cümlesi
$\lvert\cdot\rvert$	: Mutlak değer
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar cümlesi
$\langle\, ,\rangle\big\rvert_{\mathbb{R}^n_\nu}$	: İç çarpım fonksiyonu
$\lVert\cdot\rVert_{\mathbb{R}^n_\nu}$	: Yarı-Öklid uzayında norm
$\oplus$	: Direkt toplam
$\times_U$	: Spektral kartezyen çarpım
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar cümlesi

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik Sayılar, Bihiperbolik Sayılar, Bihiperbolik Sayıların İdempotent Ayrışımları, Bihiperbolik Sayıların Topolojileri, Topolojik Bihiperbolik Modül.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış ve bu bölümde araştırma konusunun gelişimi kapsamlı bir literatür taraması ile değerlendirilmiştir.

İkinci bölümde bihiperbolik sayılar cümlesinin yorumlanmasındaki önemlerinden dolayı yarı-Öklid uzayı ve $n-$boyutlu Minkowski uzayı ile ilgili temel bilgiler özetlenmiş ve Minkowski uzayı üzerindeki $e,\ s$ ve $t-$topolojileri tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde kısaca hiperbolik sayılar ile ilgili temel bilgiler verildikten sonra bihiperbolik sayılar ile ilgili cebirsel ve geometrik açıdan kapsamlı bir inceleme yapılmıştır. Özellikle bihiperbolik sayıların yeni idempotent ayrışımları, eşlenikleri ve bu eşlenikler yardımıyla elde edilen modüller üzerinde çalışılarak ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca bihiperbolik sayılar üzerinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmıştır. Dahası üzerinde tanımlanan yeni bir norm ile birlikte bihiperbolik sayılar cümlesinin Banach uzayı olduğu kanıtlanmıştır.

Dördüncü bölümde bihiperbolik sayıların norm topolojileri, hiperbolik topolojileri, idempotent topolojileri ve spektral topolojisi tanımlanarak incelenmiştir.

Beşinci bölüm üç alt bölüm halinde düzenlenmiştir. Bu bölümde elde edilen tüm yeni teoremlere temel oluşturan kavramlar birinci alt bölümde özetlenmiştir. İkinci alt bölümde ise hiperbolik modül ve hiperbolik modülde konveks, dengeli ve emen cümle tanımları yapılmıştır. Topolojik hiperbolik modül tanımı da bu alt bölümde verilmiştir. Son olarak üçüncü alt bölümde de bihiperbolik modül ve bihiperbolik modüllerde konveks, dengeli ve emen cümle tanımları yapılmıştır. Daha sonra topolojik bihiperbolik modül tanıtılmıştır. İdempotent ayrışımlardan faydalanarak konveks, dengeli ve emen cümle ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

TOPOLOGICAL BIHYPERBOLIC MODULES

SUMMARY

Keywords: Hyperbolic Numbers, Bihyperbolic Numbers, Idempotent Decompositions of Bihyperbolic Numbers, Topologies of Bihyperbolic Numbers, Topological Bihyperbolic Module.

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction and in this chapter the development of the research subject is evaluated with a comprehensive literature review.

In the second chapter, the basic concepts of semi-Euclidean space and $n-$dimensional Minkowski space are summarized due to their importance in interpreting the set of bihyperbolic numbers and e, s and $t-$topologies on Minkowski space are introduced.

In the third chapter, after giving some basic information on hyperbolic numbers briefly, comprehensive research about bihyperbolic numbers is conducted from algebraic and geometric point of views. In particular, by studying the new idempotent decompositions of bihyperbolic numbers, their conjugates and the modules obtained with the help of these conjugates, the related theorems are expressed and proved. In addition, a partial order relation is defined on bihyperbolic numbers. Moreover, it is proved that the set of bihyperbolic numbers is a Banach space with a newly defined norm on it.

In the fourth chapter, norm topologies, hyperbolic topologies, idempotent topologies, and spectral topology of bihyperbolic numbers are defined and examined.

The fifth chapter is arranged as three subsections. The concepts that form the basis for all new theorems obtained in this section are summarized in the first subsection. In the second subsection, the concepts of hyperbolic module and convex, balanced and absorbing set in hyperbolic module are examined. The definition of topological hyperbolic module is also given in this section. Finally, in the third subsection, bihyperbolic module and convex, balanced, and absorbing sets in the bihyperbolic modules are discussed. Then topological bihyperbolic module is introduced. By using the idempotent decompositions, theorems related to convex, balanced and absorbing set are expressed and proved.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Yüzyıllar boyunca $\mathbb{R}$ reel sayılar sistemi birçok teori ve uygulama için temel yapı taşı olmuş ve uygarlık için uzun ve ihtişamlı bir tarihe sahip olmuştur. Bu sayı sisteminin yanı sıra, başka matematiksel sistemler de kurulmaya çalışılmıştır. Negatif sayıların bulunmasından sonra, matematikçiler karesi negatif olan sayıyı aramışlardır. Diğer bir ifadeyle negatif bir sayının karekökünün var olup olmadığı düşünülmüştür. İlk çalışmalar böyle bir sayının mevcut olmadığı tezini savunmuş olsa da $\sqrt{-1}$, bazı üçüncü dereceden denklemlerin çözümleri yapılırken ortaya çıkmıştır. İtalyan matematikçi G. Cardano (1501-1576) ilk kez 1545 yılında üçüncü dereceden denklemlerin çözümünü $\sqrt{-1}$ değerini kullanarak göstermiştir. 1637'de $\sqrt{-1}$ için sanal (hayali) sayı ismini ilk kez R. Descartes (1596-1650) kullanmıştır. L. Euler (1707-1783) ise 1777 tarihinde sanal birimin gösterimi için latince "imaginary" sözcüğünün baş harfi olan i sembolünü kullanmıştır. Daha sonraki yıllarda ise A. L. Cauchy (1789-1814) ve sayıların efendisi olarak anılan C. F. Gauss (1777-1855) karmaşık sayılar cebrini geliştirmişlerdir. Yapılan çalışmalarla 18. yüzyılda a ve b reel sayılar olmak üzere iki reel sayının kombinasyonu olarak $z=(a,b)$ şeklinde yeni bir ifade tanımlanmıştır. Bu ifadeye karmaşık (kompleks) sayı denilmiş ve bir karmaşık sayı $z=a+\mathrm{i}b$ şeklinde gösterilmiştir. Reel sayıların genişletilmesi ile elde edilen karmaşık sayılar cümlesi $\mathbb{C}=\mathbb{R}(\mathrm{i})$ ile gösterilir. Burada $\mathrm{i}^2=-1$ olup i, sanal sayıdır. Toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte $(\mathbb{C},+,\cdot)$ üçlüsü bir cisimdir.

19. yüzyılda matematikçiler reel sayıların daha fazla kombinasyonunu alarak $n=4$ için kuaterniyonlar, $n=8$ için bikuaterniyonlar veya oktonyonlar ve hatta $n=16$ için sedenyonlar olmak üzere $(a_1,a_2,...,a_n)$ şeklinde yeni sayılar tanımlamışlardır. Bu yeni sayılar hiperkompleks sayılar olarak adlandırılmıştır. Tıpkı reel ve kompleks

sayılar gibi hiperkompleks sayılarda da toplama, çıkarma, çarpma ve belli şartlar altında bölme gibi cebirsel işlemler yapılabilmektedir. Bu sayı sistemleri mekanizma tasarımları, medikal görüntüleme, uzaktan algılama, endüstriyel, güvenlik, astronomi ve radar uygulamaları gibi güncel birçok uygulama alanında kullanılmaktadır.

W. R. Hamilton (1805-1865) karmaşık sayıları üç boyutlu uzaya genişletmeye çalışırken kuaterniyonları keşfetmiştir. Kuaterniyonları buluncaya kadar, uzayda noktalar sayı üçlüleri olarak gösteriliyor, bu üçlüler toplanıp çıkarılabiliyor, ancak çarpıp bölünemiyordu. Sonuç olarak dördeyler olarak da bilinen kuaterniyonlar 1843'te dört boyutlu ve dört reel bileşene sahip sayılar olarak İrlanda'lı matematikçi Hamilton'un karmaşık sayılarla ilgili çalışmalarının sonucunda ortaya çıkmıştır [1]. Kuaterniyonlar cümlesi $Q=\left\{a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k} \mid a,b,c,d\in\mathbb{R},\ \mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=\mathrm{ijk}=-1\right\}$ olarak verilir. Kuaterniyonlarda çarpma işleminin değişmeli olmamasından dolayı Q cümlesi bir cisim yapısına sahip değildir. Ancak $(Q,+,\cdot)$ üçlüsü bir halkadır.

J. Cockle (1819-1895) 1848'de Tessarine sayılarını tanımlamıştır [2, 3, 4]. Bir Tessarine sayısı $a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k},\quad a,b,c,d\in\mathbb{R},\quad \mathrm{ij}=\mathrm{ji}=\mathrm{k},\ \mathrm{i}^2=-1,\ \mathrm{j}^2=1$ şeklindedir. J. Cockle'nin Tessarine'lerinin dört bileşenli kuaterniyonlardan birtakım farkları bulunmaktadır. Öyle ki Hamilton'un kuaterniyonları değişmeli olmamasına rağmen Tessarine sayıları değişmelidir. Ayrıca kuaterniyonlarda $\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1$ olup Tessarine sayılarında $\mathrm{i}^2=\mathrm{k}^2=-1$ ve $\mathrm{j}^2=1$ şeklindedir. Tessarine sayılarının keşfedilmesinden sonra farklı bir sayı sistemi daha bulunmuştur. Öyle ki bu sayılar Tessarine sayılarının alt cebrini oluşturan $a+c\mathrm{j}$, $a,c\in\mathbb{R}$, $\mathrm{j}^2=1$, $\mathrm{j}\notin\mathbb{R}$ şeklindeki sayılardır ve bu sayılara "reel Tessarine" sayıları denilmiştir. W. K. Clifford (1845-1879) ve W. R. Hamilton (1805-1865) tarafından kuaterniyonların dört reel bileşeninin karmaşık sayılar ile yer değiştirmesiyle bikuaterniyon keşfedilmiştir. İtalyan matematikçi C. Segre (1863-1924) Hamilton ve Clifford'ın kuaterniyonlarla ilgili çalışmalarından yola çıkarak 1892'de "bikompleks sayıları" yayımladığı [5] makalesinde tanıtmıştır. Bikompleks sayılar $x_1+x_2\mathrm{h}+x_3\mathrm{i}+x_4\mathrm{hi}$, $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$,

$h^2 = i^2 = -1, \ \ hi = ih$ şeklinde olup cebirsel olarak Tessarine sayılarına izomorftur [5].

Sayılar ile ilgili çalışmalar devam ederken diğer taraftan geometri ile ilgili çalışmalar da hız kazanmıştır. Küresel geometri ve hiperbolik geometri keşfedilinceye kadar Öklid uzayı kavramı esas alınmıştır. C. F. Gauss (1777-1855), N. I. Lobachevsky (1793-1856) ve J. Bolyai (1802-1860) 19. yüzyılda yaptıkları araştırmalar ile bin yıla dayanan görüşleri ortadan kaldırmışlardır. Hiperbolik geometrinin ortaya çıkmasından sonra Öklid ve hiperbolik geometri şeklinde iki geometrik sistem oluşmuştur. Bu hiperbolik geometricilerin temel fikri olmuş fakat bu görüş çok uzun sürmemiştir. Ünlü matematikçi G. F. B. Riemann (1826-1866) araştırmalarını geometrik açıdan formüle etmiştir. Riemann'ın çalışmaları daha sonra A. Einstein (1879-1955) tarafından 1916 tarihinde yapılan "Genel İzafiyet Teorisinin Temelleri" adlı araştırmayla literatüre girmiştir. Ayrıca Riemann, küresel geometriye çok yakın olan eliptik geometri adında bir geometriden bahsetmiştir. Bu geometrilerin isimleri 1870 tarihinde Alman matematikçi F. Klein (1849-1925) tarafından verilmiştir. Klein'e göre dokuz düzlemsel geometri olup kitabında yedi düzlemsel geometriyi açıklamıştır [6]. Öklid dışı geometri terimi hiperbolik geometri, eliptik geometri ve diğer geometriler için kullanılmaktadır. 20. yüzyılın başlarında Einstein'ın Genel İzafiyet Kuramı, Minkowski uzay-zamanı ve Lorentz dönüşümlerinin keşfiyle yarı-Öklid uzayı anlam kazanmaya başlamıştır. I. M. Yaglom (1921-1988) 1979 tarihinde Öklid dışı geometriler ve fiziksel temsilleri hakkında temel oluşturacak bir kitap yayımlamıştır [7]. Yaglom kitabında Öklid geometrisi ile diğer geometrileri karşılaştırmış ve yeni sayı sistemlerinden faydalanmıştır.

Farklı sayı sistemleri ve geometrilerin keşfi ile sayı sistemlerinin geometrik modellerdeki anlamı da düşünülmüştür. Tessarine sayıları bulunduğunda keşfedilen reel Tessarine sayılarının geometrik temsilinden dolayı reel Tessarine sayılarına hiperbolik sayılar denilmiştir. Hiperbolik sayılar literatürde birçok bilim insanı tarafından farklı şekilde isimlendirilmiştir. P. Fjelstad 1986'da perplex sayılar adını verdiği bu sayıların cebirsel özelliklerini ve hiperbolik trigonometrik fonksiyonları tanıtmıştır [8]. G. Sobczyk 1995'te hiperbolik sayıların temel özellikleri ile bu sayıların Özel Görelelik ve Lorentz (Minkowski) geometrisi ile ilişkisini bir çalışmada toplamıştır [9]. B. Rosenfeld 1997'de hiperbolik sayılara bölünmüş (split) kompleks sayılar adını vermiştir [10].

1991 yılında G. B. Price (1905-2006) bikompleks ve multikompleks sayılar ile ilgili kapsamlı bir kitap yayımlamıştır [11]. Price, kitabında reel sayılar, kompleks sayılar ve bikompleks sayılar cümlelerini sırasıyla $\mathbb{C}_0, \mathbb{C}_1$ ve $\mathbb{C}_2$ ile göstermiştir. $n > 2$ için $\mathrm{M}\mathbb{C}_n$, $2^n -$boyutlu değişmeli multikompleks sayılar cümlesidir. D. Rochon ve M. Shapiro, 2004'te bikompleks ve hiperbolik sayıların cebirsel özelliklerini incelemiştir [12]. Bu çalışmada bikompleks sayıların temel özellikleri ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Bikompleks sayılar için üç farklı eşlenik tanıtılmış ve bu eşleniklere göre üç farklı modülden bahsedilmiştir. Ayrıca hiperbolik sayılar ve bikompleks sayıların Clifford cebrindeki yeri ve önemi açıklanmıştır. Bikompleks sayılar (değişmeli Segre kuaterniyonları, indirgenmiş bikuaterniyonlar) F. Catoni, D. Boccaletti, R. Cannata, V. Catoni, E. Nichelatti, P. Zampetti tarafından 2008'de yayımlanan kitapta genelleştirilmiştir ve bu genelleştirilmiş değişmeli hiperkompleks sayılar, Minkowski uzay-zamanını çalışmak üzere kullanılmıştır [13]. $4-$boyutlu genelleştirilmiş değişmeli hiperkompleks sayılar cümlesi $\{q \mid q = t + \mathrm{i}x + \mathrm{j}y + \mathrm{k}z :\ t, x, y, z \in \mathbb{R}, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k} \notin \mathbb{R}\}$ ile gösterilmiştir. Burada $\mathrm{i}^2 = \mathrm{k}^2 = \alpha$, $\mathrm{j}^2 = 1$, $\mathrm{ij} = \mathrm{ji} = \mathrm{k}$ olup q sayısı $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ ve $\alpha > 0$ için sırasıyla, eliptik, parabolik ve hiperbolik değişmeli kuaterniyon olarak adlandırılmıştır. Özel olarak $\alpha = -1$ durumu Segre'nin değişmeli kuaterniyonlarına karşılık gelmektedir. S. Olario, 2000'de $n-$boyutta kompleks sayıları detaylı olarak incelemiş ve $2-$boyutta hiperbolik kompleks, $3-$boyutta kompleks, $4-$boyutta değişmeli kompleks, $5-$boyutta kompleks, $6-$boyutta kompleks ve $n-$boyutta değişmeli kompleks sayıların cebirsel ve geometrik özellikleri ile birlikte 2, 3 ve $4-$boyutta bu sayıların analizi ile ilgili temel yapıları ortaya koymuştur [14]. [13]'te tanımlanan genelleştirilmiş değişmeli hiperkompleks sayılar için $\alpha = -1$ olma durumu [14]'te dairesel dörtkompleks sayılar, $\alpha = 1$ olma durumu ise hiperbolik dörtkompleks sayılar olarak isimlendirilmiştir. Hiperbolik dörtkompleks sayılara 2008'de A. A. Pogorui, R. M. Rodriguez-Dagnino ve R. D. Rodrigue-Said tarafından bihiperbolik sayılar denilmiştir [15]. Her bihiperbolik sayı bir çift hiperbolik sayı ile temsil edilebilmektedir. Daha sonra 2012'de M. E. Luna Elizarraras, M. Shapiro, D. C. Struppa, A. Vajiac tarafından bikompleks sayılar ve bikompleks sayılar için fonksiyonlar incelenmiştir [16]. 2014'te D. Alpay, M. E. Luna Elizarraras, M. Shapiro ve D. C. Struppa tarafından yayımlanan kitabın 1. bölümünde bikompleks ve hiperbolik sayılar, 2. bölümde bikompleks fonksiyonlar ve bikompleks matrisler, 3. ve 4. bölümde ise bikompleks modüller ve bikompleks modüller üzerinde norm ve iç çarpımlar tanımlanmıştır [17].

Bikompleks sayılar cümlesi üzerinde topoloji çalışma fikri ilk defa R. K. Srivastava tarafından ortaya atılmıştır. R. K. Srivastava 2008'de yayımladığı makalede bikompleks uzayda norm topoloji, kompleks topoloji ve idempotent topolojiyi tanımlamıştır [18]. 2010'da R. K. Srivastava ve S. Singh bikompleks sayılar cümlesinde sözlük sıralama topolojisini kurmuştur [19]. 2011'de R. K. Srivastava ve S. Singh tarafından bikompleks ağlar çalışılmıştır [20]. 2013'te de bikompleks sayılar ve bikompleks topolojiler tanıtılarak, bikompleks uzayın bazı alt cümlelerinin kompaktlığı incelenmiştir [21]. A. Prakash ve P. Kumar 2016'da bikompleks sayıların cümlesi üzerindeki topolojileri kısaca tanıtıp, bu topolojileri karşılaştırmıştır [22]. 2017'de S. Singh ve S. Kumar bikompleks sayıların sözlük sıralama topolojisini çalışmışlardır [23].

Diğer taraftan E. C. Zeeman (1925-2016) 1964'te Minkowski uzayı üzerinde alışılmış yerel homojen Öklid topolojisini düşünmenin yanlış olduğunu ortaya koymuştur [24, 25]. Çünkü Öklid uzayının homeomorfizmler grubu uzay benzeri ve zaman benzeri doğrultuları birbirine dönüştüren elemanlar içerir. Ancak bu fiziksel olarak mümkün değildir. S. Nanda tarafından Minkowski uzayında $t-$topolojisi ve $s-$topolojisi tanıtılmıştır [26, 27]. G. Agrawal ve S. Shirivastava, $t-$topolojisi ve $s-$topolojisi ile verilen Minkowski uzayının topolojik özelliklerini araştırmışlardır [28, 29].

Bilindiği gibi bir uzay, bir cisim yapısı ile birlikte belli şartları sağladığında vektör uzayı veya lineer uzay adını almaktadır. Eğer aynı zamanda topolojik uzay olan bir vektör uzayının iç ve dış işlemleri sürekli ise bu uzaya topolojik vektör uzayı denilmektedir [30, 31]. Eğer vektör uzayı yerine daha genel bir cebirsel yapı olan modül alınırsa topolojik modül tanımlanır. Bikompleks sayılarda her elemanın çarpmaya göre tersi bulunmadığından bikompleks sayılar cümlesi cisim değildir, ancak halkadır. Bu halka ile verilen bikompleks modül ve topolojik bikompleks modül son yıllarda çalışılmaya başlanmıştır [32, 33, 34, 35]. Bu konu ile ilgili ilk çalışma R. Kumar, R. Kumar ve D. Rochon tarafından 2011'de yapılmıştır. Topolojik bikompleks modül ve bu modülde sınırlılık, Hahn Banach teoremi gibi bazı temel teoremler çalışılmıştır [34]. 2016'da R. Kumar ve H. Saini bikompleks sayıları ve bikompleks modülü tanıttıktan sonra bikompleks konvekslik, yerel bikompleks konvekslik, bikompleks dengeli cümle ve bikompleks emen cümleleri incelemiştir [35].

Bu tezde de bihiperbolik sayıların cebirsel özellikleri kapsamlı bir şekilde incelendikten sonra bu sayı cümlesi üzerinde kurulabilecek topolojiler belirlenecektir. Ayrıca bihiperbolik sayılar cümlesi toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte birimli ve değişmeli bir halka olduğundan bu halka ile birlikte bihiperbolik modül ve topolojik bihiperbolik modül tanımları verilecektir. Böylece bihiperbolik modül üzerinde dengeli cümle, konveks cümle ve emen cümle kavramları yeni bir bakış açısıyla ilk kez tanımlanacaktır. İlgili teoremler ifade ve ispat edilecektir. Dahası, hiperbolik sayılar cümlesi bihiperbolik sayılar halkasının bir alt halkası olduğundan bu halka ile tanımlanacak hiperbolik modül ve hiperbolik topolojik modül üzerinde de araştırmalar yapılacaktır.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Yarı-Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1. $\mathbb{R}^n$, $n-$boyutlu Öklid uzayı verilsin. $x=(x_0,x_1,...,x_{n-1})$, $y=(y_0,y_1,...,y_{n-1})$, $1\leq \nu \leq n-1$ olmak üzere

$$\langle x,y\rangle\big|_{\mathbb{R}^n_\nu}=-\sum_{i=0}^{\nu-1}x_iy_i+\sum_{j=\nu}^{n-1}x_jy_j$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, $\left(\mathbb{R}^n,\langle\ ,\ \rangle\big|_{\mathbb{R}^n_\nu}\right)$ ikilisine yarı-Öklid uzayı denir ve $\mathbb{R}^n_\nu$ ile gösterilir [36].

$\mathbb{R}^n_\nu$ yarı-Öklid uzayı özel olarak $n\geq 2$ ve $\nu=1$ durumunda $\mathbb{R}^n_1$, $n-$boyutlu Minkowski (Lorentz) uzayı adını alır. Tanımlanan iç çarpım ise Lorentz iç çarpımı olarak adlandırılır [36]. Özel olarak $n=2$ ve $\nu=1$ alınırsa $2-$boyutlu $\mathbb{R}^2_1$ Minkowski düzlemi oluşur. $\mathbb{R}^2_1$ Minkowski düzlemi, bir sonraki bölümde tanıtılacak olan hiperbolik sayılar ile yakından ilişkilidir. Ayrıca $n=4$ ve $\nu=2$ alınırsa $\mathbb{R}^4_2$ yarı-Öklid uzayı oluşur. $\mathbb{R}^4_2$ uzayı ise değişmeli kuaterniyonların özel bir hali olan ve literatürde hiperbolik dörtkompleks sayılar veya bihiperbolik sayılar olarak geçen sayı sistemi ile ilişkilidir.

Tanım 2.1.2. $x=(x_0,x_1,...,x_{n-1})\in\mathbb{R}^n_\nu$ olmak üzere x vektörünün normu

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n_\nu}=\sqrt{\left|\langle x,x\rangle\big|_{\mathbb{R}^n_\nu}\right|}$$

biçiminde tanımlıdır [37].

Tanım 2.1.3. $\mathbb{R}_\nu^n$, $n-$boyutlu yarı-Öklid uzayı ve $x=\left(x_0,x_1,...,x_{n-1}\right)\in\mathbb{R}_\nu^n$ olsun. Eğer

a. $\left.\langle x,x\rangle\right|_{\mathbb{R}_\nu^n}>0$ veya $x=0$ ise x uzay benzeri (spacelike) vektör,

b. $\left.\langle x,x\rangle\right|_{\mathbb{R}_\nu^n}=0$ ve $x\neq 0$ ise x ışık benzeri (lightlike) vektör,

c. $\left.\langle x,x\rangle\right|_{\mathbb{R}_\nu^n}<0$ ise x zaman benzeri (timelike) vektör olarak adlandırılır [36].

Tanım 2.1.4. $\mathbb{R}_\nu^n$, $n-$boyutlu yarı-Öklid uzayı ve $x=\left(x_0,x_1,...,x_{n-1}\right)\in\mathbb{R}_\nu^n$ için

$$C^S\left(x\right)=\left\{y\in\mathbb{R}_\nu^n \,\middle|\, y=x \text{ veya } \left.\langle y-x,y-x\rangle\right|_{\mathbb{R}_\nu^n}>0\right\}$$

biçiminde tanımlanan $C^S\left(x\right)$ cümlesine $\mathbb{R}_\nu^n$ uzayının x noktasındaki uzay konisi denir [36].

Tanım 2.1.5. $\mathbb{R}_\nu^n$, $n-$boyutlu yarı-Öklid uzayı ve $x=\left(x_0,x_1,...,x_{n-1}\right)\in\mathbb{R}_\nu^n$ için

$$C^L\left(x\right)=\left\{y\in\mathbb{R}_\nu^n \,\middle|\, \left.\langle y-x,y-x\rangle\right|_{\mathbb{R}_\nu^n}=0\right\}$$

biçiminde tanımlanan $C^L\left(x\right)$ cümlesine $\mathbb{R}_\nu^n$ uzayının x noktasındaki ışık konisi denir [36].

Tanım 2.1.6. $\mathbb{R}_\nu^n$, $n-$boyutlu yarı-Öklid uzayı ve $x=\left(x_0,x_1,...,x_{n-1}\right)\in\mathbb{R}_\nu^n$ için

$$C^T\left(x\right)=\left\{y\in\mathbb{R}_\nu^n \,\middle|\, y=x \text{ veya } \left.\langle y-x,y-x\rangle\right|_{\mathbb{R}_\nu^n}<0\right\}$$

biçiminde tanımlanan $C^T(x)$ cümlesine $\mathbb{R}_\nu^n$ uzayının x noktasındaki zaman konisi denir [36].

2.2. Minkowski Uzayının Topolojisi

Bu bölümde $n-$boyutlu Minkowski (Lorentz) uzayı M ile gösterilecek ve üzerindeki topolojiler tanıtılacaktır. Öklid uzayı yerel homojen olmasına rağmen yarı-Öklid uzayları, her noktasında uzay benzeri vektörleri zaman benzeri vektörlerden ayıran ışık konisinin varlığından dolayı yerel homojen değildir. Dolayısıyla yarı-Öklid uzaylarında, Öklid uzayının alışılmış topolojisine göre çalışmak doğru değildir. Bu düşünce ile E. C. Zeeman (1925-2016) yarı-Öklid uzayında Öklid uzayının alışılmış topolojisini almanın doğru olmadığını ortaya koymuştur. Daha sonra Zeeman tarafından [24, 25]'te çalışılan Minkowski uzayı üzerindeki topoloji kavramı [26, 27, 28, 29]'da ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Tanım 2.2.1. $n-$boyutlu Minkowski uzayı M olsun. $x \in M$ için $N_\varepsilon^E(x)$, x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı Öklidyen komşuluğu olmak üzere

$$\mathrm{B}^E(x) = \left\{ N_\varepsilon^E(x) : \varepsilon > 0 \right\}$$

yerel tabanı tarafından üretilen topolojiye M üzerindeki Öklidyen topoloji denir [28].

x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı Öklidyen komşuluğu $N_\varepsilon^E(x)$, $e-$komşuluk olarak adlandırılacaktır. Ayrıca, M Minkowski uzayı üzerinde verilen Öklidyen topoloji, $e-$topolojisi veya τ_E ile gösterilirken $e-$topolojisi ile birlikte Minkowski uzayı M^E ile gösterilecektir. τ_E ailesinin her bir elemanı $e-$açık olarak adlandırılacaktır. Ayrıca M^E, $e-$topolojik uzayında bir $A \subseteq M$ cümlesinin içi $i_E(A)$ ve kapanışı $c_E(A)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.2. (M,τ_E) topolojik uzayında $U \subseteq M$ olmak üzere her $x \in U$ noktasının $N_\varepsilon^E(x) \subseteq U$ olacak şekilde en az bir $e-$komşuluğu varsa U alt cümlesine $e-$topolojisine göre açıktır denir [28].

Tanım 2.2.3. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. $x \in M$ noktasının $N_\varepsilon^S(x) = N_\varepsilon^E(x) \cap C^S(x)$ komşuluklarının ailesi olan

$$\mathrm{B}^S(x) = \left\{ N_\varepsilon^S(x) : \varepsilon > 0 \right\}$$

yerel tabanı tarafından üretilen topolojiye M üzerindeki $s-$topolojisi denir ve M üzerindeki $s-$topolojisi ile birlikte Minkowski uzayı M^S ile gösterilir. $N_\varepsilon^S(x)$ cümlesine x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı $s-$komşuluğu adı verilir. Ayrıca τ_S ailesinin her bir elemanına $s-$açık denir [28].

Tanım 2.2.4. (M,τ_S) topolojik uzayında $U \subseteq M$ olsun. Eğer her $x \in U$ için x noktasının $N_\varepsilon^S(x) \subseteq U$ olacak şekilde en az bir $s-$komşuluğu varsa U alt cümlesine $s-$topolojisine göre açıktır denir [28].

Tanım 2.2.5. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı ve $N_\varepsilon^T(x) = N_\varepsilon^E(x) \cap C^T(x)$ olmak üzere M üzerindeki $t-$topolojisi $x \in M$ noktasının komşuluklar ailesi olan

$$\mathrm{B}^T(x) = \left\{ N_\varepsilon^T(x) : \varepsilon > 0 \right\}$$

şeklindeki yerel taban tarafından üretilir. M Minkowski uzayı üzerinde $\mathrm{B}^T(x)$ yerel tabanı tarafından üretilen topolojiye $t-$topolojisi ve $N_\varepsilon^T(x)$ cümlesine x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı $t-$komşuluğu adı verilir. Üzerindeki $t-$topolojisi ile birlikte Minkowski uzayı M^T ile gösterilir. $t-$topolojisini τ_T ile gösterilir ve τ_T ailesinin her bir elemanına $t-$açık denir [29].

Tanım 2.2.6. (M,τ_T) topolojik uzayında $U \subseteq M$ olsun. Eğer her $x \in U$ için x noktasının $N_\varepsilon^T(x) \subseteq U$ olacak şekilde bazı $N_\varepsilon^T(x)$ komşuluğu varsa U alt cümlesine $t-$topolojisine göre açıktır denir [29].

Teorem 2.2.1. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı ve $x \in M$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere x noktasının $\varepsilon-$yarıçaplı $N_\varepsilon^S(x)$, $s-$komşuluğu (ya da $N_\varepsilon^T(x)$, $t-$ komşuluğu) M^S (ya da M^T) topolojik uzayında açıktır [28, 29].

Teorem 2.2.2. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $s-$topolojisi ve $t-$topolojisi M üzerindeki $e-$topolojisinden kesin incedir $(\tau_E \subset \tau_S,\ \tau_E \neq \tau_S$ ve $\tau_E \subset \tau_T,\ \tau_E \neq \tau_T)$ [28, 29].

Tanım 2.2.7. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı ve $x, y \in M$ olsun. Eğer

a. $\langle y-x, y-x\rangle\big|_{\mathbb{R}_1^n} > 0$ ise $\{x+t(y-x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ cümlesine uzay benzeri doğru,

b. $\langle y-x, y-x\rangle\big|_{\mathbb{R}_1^n} = 0$ ise $\{x+t(y-x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ cümlesine ışık benzeri doğru,

c. $\langle y-x, y-x\rangle\big|_{\mathbb{R}_1^n} < 0$ ise $\{x+t(y-x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ cümlesine zaman benzeri doğru

denir [28].

Teorem 2.2.3. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $s-$ topolojisinin uzay benzeri bir doğru üzerine indirgediği topoloji Öklidyen topolojidir [28].

Teorem 2.2.4. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $s-$ topolojisinin zaman benzeri bir doğru üzerine indirgediği topoloji ayrık topolojidir [28].

Teorem 2.2.5. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $t-$topolojisinin uzay benzeri bir doğru üzerine indirgediği topoloji ayrık topolojidir [29].

Teorem 2.2.6. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $t-$topolojisinin zaman benzeri bir doğru üzerine indirgediği topoloji Öklidyen topolojidir [29].

Teorem 2.2.7. M, $n-$boyutlu Minkowski uzayı olsun. M üzerindeki $s-$topolojisinin ve $t-$topolojisinin ışık benzeri bir doğru üzerine indirgediği topoloji ayrık topolojidir [28, 29].

BÖLÜM 3. BİHİPERBOLİK SAYILARIN CEBİRSEL VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde hiperbolik sayıların cebirsel özellikleri özetlenmiş ve bihiperbolik sayılar cebirsel ve geometrik açıdan ayrıntılı olarak incelenmiştir. Özellikle bihiperbolik sayılar için üç farklı eşlenik ve bu eşlenikler yardımıyla elde edilen üç farklı modül tanıtılmıştır.

3.1. Hiperbolik Sayılar

Literatürde iyi bilinen ve son yıllarda çok çalışılan hiperbolik sayılar bu alt bölümde [7], [8], [9] ve [10] kaynakları esas alınarak özetlenmiştir.

Tanım 3.1.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi, $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\mathrm{j}^2 = 1$, $\mathrm{j} \notin \mathbb{R}$ olmak üzere j hiperbolik (unipotent) birimi ile verilen

$$z = x + \mathrm{j}y$$

sayısına bir hiperbolik sayı denir [7].

Hiperbolik sayılar aynı zamanda double [7], perplex [8] ya da split kompleks [10] sayılar olarak da adlandırılır.

$$H = \left\{ z \mid z = x + \mathrm{j}y,\ \mathrm{j}^2 = 1,\ \mathrm{j} \neq \pm 1,\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesine hiperbolik sayılar cümlesi denir. $\{1, \mathrm{j}\}$ standart bazına göre j ’ye hiperbolik sanal birim denir. Ayrıca x ve y sırasıyla, z hiperbolik sayısının reel ve unipotent kısımları olarak adlandırılır.

$i^2 = -1$ olmak üzere $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$ kompleks sayıları reel sayıların genişletilmişi olduğu gibi hiperbolik sayılar da j unipotent sayısı ile birlikte reel sayıların genişletilmişidir.

$z = x + jy$ hiperbolik sayısının hiperbolik eşleniği $\bar{z} = x - jy$ ile verilir.

$z = x + jy$ ve $\omega = u + jv$ $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$ şeklinde birer hiperbolik sayı olmak üzere hiperbolik sayılarda toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla,

$$z + \omega = (x + jy) + (u + jv) = (x + u) + j(y + v),$$
$$z \cdot \omega = (x + jy) \cdot (u + jv) = (xu + yv) + j(xv + yu)$$

olarak tanımlıdır. Bundan sonra $z \cdot \omega$, $z\omega$ olarak gösterilecektir.

$(H, +)$ değişmeli gruptur. Ayrıca, çarpma işlemi değişmeli, birleşmeli ve toplama işlemi üzerine dağılımlıdır. Böylece $(H, +, \cdot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır. Ancak, $(H, \cdot)$ ikilisi sıfır bölen elemanlara sahiptir.

$z = x + jy$ hiperbolik sayısının hiperbolik modülü

$$|z|_H = \begin{cases} \mp\sqrt{x^2 - y^2} & ; \quad |x| \geq |y| \\ \mp\sqrt{y^2 - x^2} & ; \quad |x| \leq |y| \end{cases}$$

şeklindedir. O halde z hiperbolik sayısının modül karesi $|z|_H^2 = |z\bar{z}| = |x^2 - y^2|$ olur.

Sıfırdan farklı $z_1 = x + jx$ ve $z_2 = x - jx$ hiperbolik sayılarının modülü

$$|z_1|_H = |z_2|_H = 0$$

olur. Bu noktalar düzlemdeki $y = \mp x$ doğruları üzerindeki noktalardır. Böyle noktalara izotropik noktalar denir.

Bir hiperbolik sayı $z = x + \mathrm{j}y$ olmak üzere $|z|_H \neq 0$ iken

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - \mathrm{j}y}{x^2 - y^2}$$

ifadesine hiperbolik sayının çarpımsal tersi denir. İzotropik noktalara karşılık gelen hiperbolik sayıların çarpımsal tersi yoktur.

Öklid düzlemindeki bir noktanın koordinatının bir kompleks sayı ile ifade edilmesi gibi Minkowski (Lorentz) düzlemindeki bir noktanın koordinatı da bir hiperbolik sayı ile ifade edilebilir. Dolayısıyla hiperbolik sayılar, kompleks sayıların Öklid düzleminde sahip olduğu rolü Minkowski düzleminde üstlenir.

Bir $z = x + \mathrm{j}y$ hiperbolik sayısı Minkowski düzleminde başlangıç noktası orijin ve bitiş noktası (x, y) olan bir vektör olarak düşünülebilir. O halde z ve ω hiperbolik sayıları Minkowski düzleminde sırasıyla $z = (x, y)$ ve $\omega = (u, v)$ yer vektörlerine karşılık gelir ve bu vektörlerin Lorentz iç çarpımı

$$\langle z, \omega \rangle\big|_{\mathbb{R}_1^2} = xu - yv$$

biçiminde olur.

Bir z hiperbolik sayısının hiperbolik modülü bu noktanın orijine olan hiperbolik uzaklığıdır. Diğer taraftan $z = x + \mathrm{j}y$ sayısının yer vektörünün normu

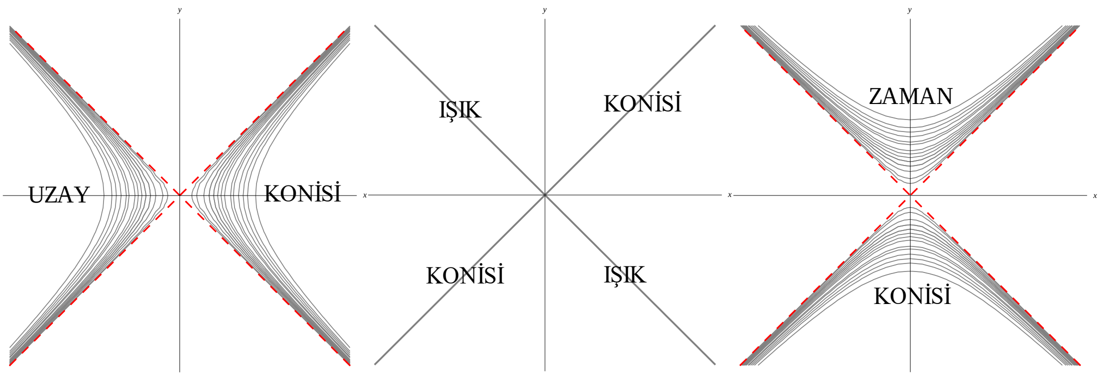
$$\|z\|_{\mathbb{R}_1^2} = \sqrt{\left|\langle z, z \rangle\big|_{\mathbb{R}_1^2}\right|} = \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

biçimindedir. Dolayısıyla bir hiperbolik sayının modülü ile o sayıya Minkowski düzleminde karşılık gelen noktanın yer vektörünün normu çakışır. Yani z bir hiperbolik sayı olmak üzere

$$|z|_H = \|z\|_{\mathbb{R}_1^2}$$

eşitliği vardır. Böylece hiperbolik uzaklık ile donatılmış $\mathbb{R}^2$ düzleminin Minkowski düzlemine karşılık geldiği görülür.

Minkowski düzleminde ışık-benzeri (null) vektörler olarak adlandırılan ve $\left|z\right|_H = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı z izotropik noktalara karşılık gelen vektörler mevcut olduğundan Minkowski düzleminin geometrisi kompleks düzlemin alışılmış Öklid geometrisinden farklıdır (bkz. Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Minkowski düzlemi [7]

$2-$boyutlu Minkowski düzlemi göz önüne alınarak bir z_0 noktasındaki uzay, ışık ve zaman konisi tanımları aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 3.1.2. $z_0 \in H$ olmak üzere

$$SH\left(z_0\right) = \left\{ z \in H \,\middle|\, \left(z - z_0\right)\overline{\left(z - z_0\right)} > 0 \text{ veya } z = z_0 \right\}$$

cümlesine H hiperbolik sayılar cümlesinin z_0 noktasındaki uzay konisi,

$$NH\left(z_0\right) = \left\{ z \in H \,\middle|\, \left(z - z_0\right)\overline{\left(z - z_0\right)} = 0 \right\}$$

cümlesine H hiperbolik sayılar cümlesinin z_0 noktasındaki ışık konisi,

$$TH\left(z_0\right) = \left\{ z \in H \,\middle|\, \left(z - z_0\right)\overline{\left(z - z_0\right)} < 0 \text{ veya } z = z_0 \right\}$$

cümlesine H hiperbolik sayılar cümlesinin z_0 noktasındaki zaman konisi denir.

Eğer

$$e^1 = \frac{1+\mathrm{j}}{2} \text{ ve } e^2 = \frac{1-\mathrm{j}}{2}$$

hiperbolik sayılarını alırsak $e^1, e^2 \in NH(O)$ olur ve bu hiperbolik sayıların çarpımsal tersi yoktur. Ayrıca $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\left(e^1\right)^n = e^1$, $\left(e^2\right)^n = e^2$, $e^1 + e^2 = 1$, $e^1 e^2 = 0$ özellikleri sağlanmaktadır. Dolayısıyla e^1 ve e^2 hiperbolik sayıları idempotent elemanlar olarak adlandırılırlar [9, 10].

Tanım 3.1.3. Herhangi bir $z = x + \mathrm{j}y \in H$ hiperbolik sayısının e^1 ve e^2 bileşenlerine göre

$$z = \alpha^1 e^1 + \alpha^2 e^2$$

gösterimi hiperbolik sayının idempotent ayrışımı olarak adlandırılır. Burada $\alpha^1 = x + y$ ve $\alpha^2 = x - y$ şeklinde reel sayılardır [38].

Tanım 3.1.4. Bir z hiperbolik sayısının mutlak değeri onun idempotent ayrışımı ile birlikte

$$|z| = |\alpha^1| e^1 + |\alpha^2| e^2$$

şeklindedir [5, 17, 39].

3.2. Bihiperbolik Sayılar

Bihiperbolik sayılar ilk olarak [14]'te genelleştirilmiş değişmeli kuaterniyonlarda $\alpha = 1$ alınarak hiperbolik dörtkompleks adıyla çalışılmış, daha sonra bu sayılara [13]'te değişmeli hiperbolik kuaterniyonlar ve son olarak [15]'te bihiperbolik sayılar adı verilmiştir.

Bir ζ bihiperbolik sayısı $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z_1 = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1$ ve $z_2 = x_2 + \mathrm{j}_1 x_3$ hiperbolik sayıları verildiğinde

$$\zeta = z_1 + \mathrm{j}_2 z_2 = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2\left(x_2 + \mathrm{j}_1 x_3\right) = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{1, \mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \mathrm{j}_3\}$ birim sayılarının çarpımı aşağıdaki şekildedir.

Tablo 3.1. Bihiperbolik sayının birimlerinin çarpım tablosu [13]

$\cdot$	1	j_1	j_2	j_3
1	1	j_1	j_2	j_3
j_1	j_1	1	j_3	j_2
j_2	j_2	j_3	1	j_1
j_3	j_3	j_2	j_1	1

[17]'de görüldüğü üzere bikompleks sayıların altı farklı gösteriminin var olması gibi bihiperbolik sayıların da altı farklı gösterimi verilebilir.

Tanım 3.2.1. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $s = 1,2,3$ için j_s hiperbolik birimler olmak üzere

$$H\left(\mathrm{j}_s\right) = \left\{z \mid z = x + \mathrm{j}_s y\right\}$$

cümleleri verilsin. $\mathrm{j}_1^2 = \mathrm{j}_2^2 = \mathrm{j}_3^2 = 1,\ \mathrm{j}_1\mathrm{j}_2 = \mathrm{j}_2\mathrm{j}_1 = \mathrm{j}_3$ olmak üzere

$$H_2\left(\mathrm{j}_{s;k}\right) = \left\{\zeta \mid \zeta = z_1 + \mathrm{j}_k z_2,\ z_1, z_2 \in H\left(\mathrm{j}_s\right), s \neq k, s, k = 1,2,3\right\}$$

cümlelerine bihiperbolik sayılar cümleleri denir. Açıkça yazılırsa bu cümleler

$$H_2\left(\mathrm{j}_{1;2}\right) = \left\{\zeta \mid \zeta = z_1 + \mathrm{j}_2 z_2,\ z_1, z_2 \in H\left(\mathrm{j}_1\right)\right\},$$

$$H_2\left(\mathrm{j}_{2;1}\right)=\left\{\zeta \mid \zeta=z_1+\mathrm{j}_1 z_2,\ z_1, z_2 \in H\left(\mathrm{j}_2\right)\right\},$$

$$H_2\left(\mathrm{j}_{1;3}\right)=\left\{\zeta \mid \zeta=z_1+\mathrm{j}_3 z_2,\ z_1, z_2 \in H\left(\mathrm{j}_1\right)\right\},$$

$$H_2\left(\mathrm{j}_{3;1}\right)=\left\{\zeta \mid \zeta=z_1+\mathrm{j}_1 z_2,\ z_1, z_2 \in H\left(\mathrm{j}_3\right)\right\},$$

$$H_2\left(\mathrm{j}_{2;3}\right)=\left\{\zeta \mid \zeta=z_1+\mathrm{j}_3 z_2,\ z_1, z_2 \in H\left(\mathrm{j}_2\right)\right\},$$

$$H_2\left(\mathrm{j}_{3;2}\right)=\left\{\zeta \mid \zeta=z_1+\mathrm{j}_2 z_2,\ z_1, z_2 \in H\left(\mathrm{j}_3\right)\right\}$$

şeklindedir. Burada $s=1$ ve $k=2$ alınarak oluşturulan

$$H_2\left(\mathrm{j}_{1;2}\right)=\left\{\zeta \mid \zeta=z_1+\mathrm{j}_2 z_2,\ z_1, z_2 \in H\left(\mathrm{j}_1\right)\right\}$$

cümlesi [15]'te verilen bihiperbolik sayılar cümlesidir.

Örnek 3.2.1. $z_1, z_2 \in H\left(\mathrm{j}_1\right)$, $z_1=x_0+\mathrm{j}_1 x_1$, $z_2=x_2+\mathrm{j}_1 x_3$ ve $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $\zeta \in H_2\left(\mathrm{j}_{1;2}\right)$ bihiperbolik sayısı

$$\zeta=z_1+\mathrm{j}_2 z_2=x_0+\mathrm{j}_1 x_1+\mathrm{j}_2 x_2+\mathrm{j}_3 x_3$$

biçiminde verilir. Diğer taraftan $\eta_1=x_0+\mathrm{j}_2 x_2$ ve $\eta_2=x_1+\mathrm{j}_2 x_3$ alınırsa ζ bihiperbolik sayısı

$$\zeta=x_0+\mathrm{j}_2 x_2+\mathrm{j}_1\left(x_1+\mathrm{j}_2 x_3\right)=\eta_1+\mathrm{j}_1 \eta_2$$

şeklinde yazılabileceğinden $\zeta \in H_2\left(\mathrm{j}_{2;1}\right)$ olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\zeta&=x_0+\mathrm{j}_1 x_1+\mathrm{j}_3\left(x_3+\mathrm{j}_1 x_2\right)\\&=\lambda_1+\mathrm{j}_3 \lambda_2 \in H_2\left(\mathrm{j}_{1;3}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta&=x_0+\mathrm{j}_3 x_3+\mathrm{j}_1\left(x_1+\mathrm{j}_3 x_2\right)\\&=\chi_1+\mathrm{j}_1 \chi_2 \in H_2\left(\mathrm{j}_{3;1}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta &= x_0 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3\left(x_3 + \mathrm{j}_2 x_1\right)\\ &= \mu_1 + \mathrm{j}_3\mu_2 \in H_2\left(\mathrm{j}_{2;3}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta &= x_0 + \mathrm{j}_3 x_3 + \mathrm{j}_2\left(x_2 + \mathrm{j}_3 x_1\right)\\ &= \xi_1 + \mathrm{j}_2\xi_2 \in H_2\left(\mathrm{j}_{3;2}\right)\end{aligned}$$

gösterimleri de mevcuttur. Yani herhangi bir ζ bihiperbolik sayısı altı farklı şekilde yazılabilir. Böylece ζ her bir $H_2\left(\mathrm{j}_{s;k}\right)$ $\left(s \neq k,\, s,k = 1,2,3\right)$ cümlesine de aittir.

Her bir bihiperbolik sayılar cümlesinde benzer sonuçlar elde edileceğinden tez boyunca aksi belirtilmedikçe sadece $H_2\left(\mathrm{j}_{1;2}\right)$ cümlesi çalışılacak ve tezin geri kalan kısmında $H_2\left(\mathrm{j}_{1;2}\right)$ cümlesi H_2 ile gösterilecektir. Dahası, burada $\zeta \in H_2\left(\mathrm{j}_{1;2}\right)$ alındığında $\zeta = \mathrm{z}_1 + \mathrm{j}_2\mathrm{z}_2$ yazılışında $\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2 \in H\left(\mathrm{j}_1\right)$ olduğu göz önüne alınırsa j_1 hiperbolik birimi ile verilen $H\left(\mathrm{j}_1\right)$ hiperbolik sayılar cümlesi de H ile gösterilecektir.

Hiperbolik sayıların reel bileşenlerinin hiperbolik sayı alınarak bihiperbolik sayıların elde edilmesi gibi tümevarımla multihiperbolik sayı tanımı da verilebilir öyle ki $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $H_n = \left\{A + \mathrm{j}_n B \,\middle|\, A, B \in H_{n-1}\right\}$ cümlesine de multihiperbolik sayılar cümlesi denir. Dolayısıyla H_0, H_1 ve H_2, sırasıyla $\mathbb{R}$ reel sayılar, H hiperbolik sayılar ve H_2 bihiperbolik sayılar cümleleridir.

Tanım 3.2.2. X , H_2 bihiperbolik sayılar cümlesinin alt cümlesi olmak üzere X cümlesinin h_1 ve h_2 dönüşümleri altındaki görüntüleri

$$h_1\left(X\right) = X_1 = \left\{\mathrm{z}_1 \,\middle|\, \mathrm{z}_1 = h_1\left(\zeta\right),\ \zeta = \mathrm{z}_1 + \mathrm{j}_2\mathrm{z}_2 \text{ ve } \zeta \in X\right\}$$

ve

$$h_2\left(X\right) = X_2 = \left\{\mathrm{z}_2 \,\middle|\, \mathrm{z}_2 = h_2\left(\zeta\right),\ \zeta = \mathrm{z}_1 + \mathrm{j}_2\mathrm{z}_2 \text{ ve } \zeta \in X\right\}$$

olsun. X_1 ve X_2 cümlelerinin $\{1, \mathrm{j}_2\}$ bazına göre hiperbolik kartezyen çarpımı

$$X_1 \times_H X_2 = \{z_1 + \mathrm{j}_2 z_2 \mid z_1 \in X_1,\, z_2 \in X_2\}$$

şeklinde olup

$$X = X_1 \times_H X_2$$

yazılışına X cümlesinin kartezyen hiperbolik gösterimi denir.

$\zeta_1 = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3$ ve $\zeta_2 = y_0 + \mathrm{j}_1 y_1 + \mathrm{j}_2 y_2 + \mathrm{j}_3 y_3$ $\left(x_l, y_l \in \mathbb{R}, l = 0,1,2,3\right)$ şeklinde birer bihiperbolik sayı olsun. $I = \{0,1,2,3\}$ olmak üzere her $l \in I$ için

$$x_l = y_l$$

ise ζ_1 ve ζ_2 sayıları eşittir denir.

Bihiperbolik sayılarda toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}\zeta_1 + \zeta_2 &= \left(x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3\right) + \left(y_0 + \mathrm{j}_1 y_1 + \mathrm{j}_2 y_2 + \mathrm{j}_3 y_3\right)\\ &= \left(x_0 + y_0\right) + \mathrm{j}_1\left(x_1 + y_1\right) + \mathrm{j}_2\left(x_2 + y_2\right) + \mathrm{j}_3\left(x_3 + y_3\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\zeta_1 \cdot \zeta_2 &= \left(x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3\right)\left(y_0 + \mathrm{j}_1 y_1 + \mathrm{j}_2 y_2 + \mathrm{j}_3 y_3\right)\\ &= x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3\\ &\quad + \mathrm{j}_1\left(x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_2 y_3 + x_3 y_2\right)\\ &\quad + \mathrm{j}_2\left(x_0 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_0 + x_3 y_1\right)\\ &\quad + \mathrm{j}_3\left(x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0\right)\end{aligned}$$

olarak tanımlıdır. Bundan sonra $\zeta_1 \cdot \zeta_2$, $\zeta_1 \zeta_2$ olarak gösterilecektir.

$\left(H_2,+\right)$ değişmeli gruptur. Ayrıca çarpma işlemi toplama işlemi üzerine dağılımlıdır. Dolayısıyla $\left(H_2,+,\cdot\right)$ üçlüsü birimli ve değişmeli halka yapısına sahiptir.

Ayrıca $\zeta \in H_2$ bihiperbolik sayısı

$$\left.\begin{aligned}
\zeta &= z_1 + \mathrm{j}_2 z_2 = \left(z_1 + \mathrm{j}_3 z_2\right) e^1_{\mathrm{j}_1} + \left(z_1 - \mathrm{j}_3 z_2\right) e^2_{\mathrm{j}_1} \\
\zeta &= z_1 + \mathrm{j}_2 z_2 = \left(z_1 + z_2\right) e^1_{\mathrm{j}_2} + \left(z_1 - z_2\right) e^2_{\mathrm{j}_2} \\
\zeta &= z_1 + \mathrm{j}_2 z_2 = \left(z_1 + \mathrm{j}_1 z_2\right) e^1_{\mathrm{j}_3} + \left(z_1 - \mathrm{j}_1 z_2\right) e^2_{\mathrm{j}_3}
\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

şekillerinde temsil edilebilmektedir. Burada

$$e^1_{\mathrm{j}_s} = \frac{1+\mathrm{j}_s}{2}, \; e^2_{\mathrm{j}_s} = \frac{1-\mathrm{j}_s}{2}, \qquad (s = 1,2,3)$$

idempotent bileşenlerdir. Bu bileşenler $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\left(e^1_{\mathrm{j}_s}\right)^n = e^1_{\mathrm{j}_s}$, $\left(e^2_{\mathrm{j}_s}\right)^n = e^2_{\mathrm{j}_s}$, $e^1_{\mathrm{j}_s} + e^2_{\mathrm{j}_s} = 1,\;\; e^1_{\mathrm{j}_s} e^2_{\mathrm{j}_s} = 0 \quad (s = 1,2,3)$ özelliklerini sağlar. İdempotent gösterimdeki katsayılar

$$\left.\begin{aligned}
z_1 + \mathrm{j}_3 z_2 &= \zeta^1_{\mathrm{j}_1}, \quad & z_1 - \mathrm{j}_3 z_2 &= \zeta^2_{\mathrm{j}_1} \\
z_1 + z_2 &= \zeta^1_{\mathrm{j}_2}, \quad & z_1 - z_2 &= \zeta^2_{\mathrm{j}_2} \\
z_1 + \mathrm{j}_1 z_2 &= \zeta^1_{\mathrm{j}_3}, \quad & z_1 - \mathrm{j}_1 z_2 &= \zeta^2_{\mathrm{j}_3}
\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

ile gösterilirse $\zeta^1_{\mathrm{j}_1}$ ve $\zeta^2_{\mathrm{j}_1}$ sayıları birer bihiperbolik sayı, $\zeta^1_{\mathrm{j}_2}$ ve $\zeta^2_{\mathrm{j}_2}$ ile $\zeta^1_{\mathrm{j}_3}$ ve $\zeta^2_{\mathrm{j}_3}$ sayıları da j_1 hiperbolik birimine bağlı hiperbolik sayılardır. Sonuç olarak

$$\zeta = \zeta^1_{\mathrm{j}_1} e^1_{\mathrm{j}_1} + \zeta^2_{\mathrm{j}_1} e^2_{\mathrm{j}_1} \tag{3.3}$$

$$\zeta = \zeta^1_{\mathrm{j}_2} e^1_{\mathrm{j}_2} + \zeta^2_{\mathrm{j}_2} e^2_{\mathrm{j}_2} \tag{3.4}$$

$$\zeta = \zeta^1_{\mathrm{j}_3} e^1_{\mathrm{j}_3} + \zeta^2_{\mathrm{j}_3} e^2_{\mathrm{j}_3} \tag{3.5}$$

ifadeleri ζ bihiperbolik sayısının $e^1_{\mathrm{j}_s}$ ve $e^2_{\mathrm{j}_s}$ $(s = 1,2,3)$ bileşenlerine göre idempotent ayrışımları olarak adlandırılır. Bu gösterimlerden sadece (3.5) ayrışımı [13]'te mevcuttur.

$\left(H_2,+,\cdot\right)$ halkasının ideallerini incelemek üzere ideal tanımını hatırlayalım.

Tanım 3.2.3. R bir halka ve $\varnothing \neq I \subseteq R$ olmak üzere eğer

a. her $x, y \in I$ için $x-y \in I$,

b. her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $xr, rx \in I$

özellikleri sağlanıyorsa I alt cümlesine R halkasının bir ideali denir [40].

Tanımı göz önüne alarak $\left(H_2,+,\cdot\right)$ değişmeli halkasını inceleyelim.

$s=1$ için

$$e_{\mathrm{j}_1}^1 H_2=\left\{\zeta e_{\mathrm{j}_1}^1=\zeta_{\mathrm{j}_1}^1 e_{\mathrm{j}_1}^1 \,\middle|\, \zeta_{\mathrm{j}_1}^1 \in H_2\right\}$$

ve

$$e_{\mathrm{j}_1}^2 H_2=\left\{\zeta e_{\mathrm{j}_1}^2=\zeta_{\mathrm{j}_1}^2 e_{\mathrm{j}_1}^2 \,\middle|\, \zeta_{\mathrm{j}_1}^2 \in H_2\right\}$$

alt cümleleri Tanım 3.2.3'teki özellikleri sağladıklarından H_2 halkasının birer idealidir. Böylece H_2 cümlesi $e_{\mathrm{j}_1}^1 H_2$ ve $e_{\mathrm{j}_1}^2 H_2$ ideallerinin direkt toplamı olarak

$$H_2=e_{\mathrm{j}_1}^1 H_2 \oplus e_{\mathrm{j}_1}^2 H_2$$

şeklinde yazılabilir.

$s=2$ için

$$e_{\mathrm{j}_2}^1 H_2=\left\{\zeta e_{\mathrm{j}_2}^1=\zeta_{\mathrm{j}_2}^1 e_{\mathrm{j}_2}^1 \,\middle|\, \zeta_{\mathrm{j}_2}^1 \in H\left(\mathrm{j}_1\right)\right\}$$

ve

$$e_{\mathrm{j}_2}^2 H_2=\left\{\zeta e_{\mathrm{j}_2}^2=\zeta_{\mathrm{j}_2}^2 e_{\mathrm{j}_2}^2 \,\middle|\, \zeta_{\mathrm{j}_2}^2 \in H\left(\mathrm{j}_1\right)\right\}$$

alt cümleleri de $\left(H_2,+,\cdot\right)$ değişmeli halkasının birer idealidir. Böylece H_2 cümlesi $e^1_{j_2}H_2$ ve $e^2_{j_2}H_2$ ideallerinin de direkt toplamı olarak

$$H_2 = e^1_{j_2}H_2 \oplus e^2_{j_2}H_2$$

şeklinde yazılabilir.

$s=3$ için

$$e^1_{j_3}H_2 = \left\{\zeta e^1_{j_3} = \zeta^1_{j_3}e^1_{j_3} \middle| \zeta^1_{j_3} \in H\left(j_1\right)\right\}$$

ve

$$e^2_{j_3}H_2 = \left\{\zeta e^2_{j_3} = \zeta^2_{j_3}e^2_{j_3} \middle| \zeta^2_{j_3} \in H\left(j_1\right)\right\}$$

alt cümleleri de $\left(H_2,+,\cdot\right)$ değişmeli halkasının birer idealidir. Böylece H_2 cümlesi $e^1_{j_3}H_2$ ve $e^2_{j_3}H_2$ ideallerinin de direkt toplamı olarak

$$H_2 = e^1_{j_3}H_2 \oplus e^2_{j_3}H_2$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç 3.2.1. $s=1,2,3$ için $e^1_{j_s}H_2$ ve $e^2_{j_s}H_2$ alt cümleleri $\left(H_2,+,\cdot\right)$ değişmeli halkasının birer alt halkasıdır.

Tanım 3.2.4. X, H_2 bihiperbolik sayılar cümlesinin alt cümlesi olmak üzere X cümlesinin $h^1_{j_s}$ ve $h^2_{j_s}$ $(s=1,2,3)$ dönüşümleri altındaki görüntüleri

$$h^1_{j_s}\left(X\right) = X^1_{j_s} = \left\{\zeta^1_{j_s} \middle| \ \zeta^1_{j_s} = h^1_{j_s}\left(\zeta\right),\ \zeta = \zeta^1_{j_s}e^1_{j_s} + \zeta^2_{j_s}e^2_{j_s} \text{ ve } \zeta \in X\right\}$$

ve

$$h_{\mathrm{j}_s}^2(X) = X_{\mathrm{j}_s}^2 = \left\{ \zeta_{\mathrm{j}_s}^2 \,\middle|\, \zeta_{\mathrm{j}_s}^2 = h_{\mathrm{j}_s}^2(\zeta),\ \zeta = \zeta_{\mathrm{j}_s}^1 e_{\mathrm{j}_s}^1 + \zeta_{\mathrm{j}_s}^2 e_{\mathrm{j}_s}^2 \text{ ve } \zeta \in X \right\}$$

olsun. $X_{\mathrm{j}_s}^1$ ve $X_{\mathrm{j}_s}^2$ $(s = 1,2,3)$ cümlelerinin $\left\{e_{\mathrm{j}_s}^1, e_{\mathrm{j}_s}^2\right\}$ bazına göre idempotent kartezyen çarpımı

$$X_{\mathrm{j}_s}^1 \times_{I_{\mathrm{j}_s}} X_{\mathrm{j}_s}^2 = \left\{ \zeta_{\mathrm{j}_s}^1 e_{\mathrm{j}_s}^1 + \zeta_{\mathrm{j}_s}^2 e_{\mathrm{j}_s}^2 \,\middle|\, \zeta_{\mathrm{j}_s}^1 \in X_{\mathrm{j}_s}^1,\ \zeta_{\mathrm{j}_s}^2 \in X_{\mathrm{j}_s}^2 \right\},\ (s = 1,2,3)$$

olup

$$X = X_{\mathrm{j}_s}^1 \times_{I_{\mathrm{j}_s}} X_{\mathrm{j}_s}^2$$

yazılışına X cümlesinin kartezyen idempotent gösterimi denir. $s = 3$ alındığında oluşan idempotent gösterim [13]'te mevcuttur.

Bihiperbolik sayıların diğer bir idempotent gösterimi de aşağıdaki şekildedir.

H_2, bihiperbolik sayılar cümlesi ve $\mathrm{j}_1^2 = \mathrm{j}_2^2 = \mathrm{j}_3^2 = 1$ olmak üzere

$$i_1 = \frac{1 + \mathrm{j}_1 + \mathrm{j}_2 + \mathrm{j}_3}{4},\ i_2 = \frac{1 - \mathrm{j}_1 + \mathrm{j}_2 - \mathrm{j}_3}{4},\ i_3 = \frac{1 + \mathrm{j}_1 - \mathrm{j}_2 - \mathrm{j}_3}{4},\ i_4 = \frac{1 - \mathrm{j}_1 - \mathrm{j}_2 + \mathrm{j}_3}{4}$$

olacak şekilde i_1, i_2, i_3, i_4 sayıları vardır. Burada $s = 1,2,3,4$ için

$$i_s^2 = i_s$$

olduğundan i_1, i_2, i_3, i_4 sayılarına bihiperbolik sayılar cümlesinin idempotent bileşenleri denir. Ayrıca $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 1$ ve her $s, k = 1,2,3,4$ $(s \neq k)$ için $i_s i_k = 0$ özellikleri sağlanır [15].

$\zeta \in H_2$ olmak üzere

$$\zeta = w_1 i_1 + w_2 i_2 + w_3 i_3 + w_4 i_4 \tag{3.6}$$

şeklinde yazılabilir. Bu gösterime bihiperbolik sayıların spektral temsili denir [15].

$\zeta = z_1 + j_2 z_2 = x_0 + j_1 x_1 + j_2 x_2 + j_3 x_3$, $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}$ katsayıları

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \\ w_2 &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\ w_3 &= x_0 + x_1 - x_2 - x_3 \\ w_4 &= x_0 - x_1 - x_2 + x_3 \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

biçimindedir [14, 15].

Ayrıca $s = 1,2,3,4$ için $I(i_s) = \{ w_s i_s \mid w_s \in \mathbb{R} \}$ cümleleri $(H_2, +, \cdot)$ değişmeli halkasının birer idealidir. Bu yüzden H_2 cümlesi, $I(i_s)$ $(s = 1,2,3,4)$ ideallerinin direkt toplamı olarak

$$H_2 = I(i_1) \oplus I(i_2) \oplus I(i_3) \oplus I(i_4)$$

şeklinde yazılabilir [15]. Spektral gösterim bihiperbolik sayılar için temel bir öneme sahiptir. Burada, $k = 1,2,3,4$ için w_k katsayıları ve i_k idempotent bileşenleri ζ bihiperbolik sayısının matris temsilindeki özdeğerler ve ortonormal özvektörlerdir [13]. Her $k = 1,2,3,4$ için özdeğer fonksiyonu

$$\begin{aligned} \lambda_k : H_2 &\to \mathbb{R} \\ \zeta &\to \lambda_k(\zeta) = w_k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Özdeğer fonksiyonu örten bir cebir homomorfizmidir.

Diğer taraftan (3.7) denklemleri de kullanılarak i_1, i_2, i_3 ve i_4 idempotent bileşenlerinin spektral gösterimi sırasıyla

$$\begin{aligned} i_1 &= 1i_1 + 0i_2 + 0i_3 + 0i_4, \\ i_2 &= 0i_1 + 1i_2 + 0i_3 + 0i_4, \\ i_3 &= 0i_1 + 0i_2 + 1i_3 + 0i_4, \\ i_4 &= 0i_1 + 0i_2 + 0i_3 + 1i_4 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $I=\{1,2,3,4\}$ olmak üzere her $s,k\in I$ ve $s\neq k$ için $\lambda_k(i_s)=0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece özdeğer fonksiyonunun çekirdeği

$$\text{Çek}(\lambda_k)=\text{Vek}\{\ i_s : s=1,2,3,4 \text{ ve } s\neq k\}$$

biçimindedir.

Tanım 3.2.5. X , H_2 bihiperbolik sayılar cümlesinin alt cümlesi olmak üzere X cümlesinin λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 dönüşümleri altındaki görüntüleri sırasıyla

$$\lambda_1(X)=X_1=\{w_1|\ w_1=\lambda_1(\zeta),\ \zeta=w_1i_1+w_2i_2+w_3i_3+w_4i_4 \text{ ve } \zeta\in X\},$$

$$\lambda_2(X)=X_2=\{w_2|\ w_2=\lambda_2(\zeta),\ \zeta=w_1i_1+w_2i_2+w_3i_3+w_4i_4 \text{ ve } \zeta\in X\},$$

$$\lambda_3(X)=X_3=\{w_3|\ w_3=\lambda_3(\zeta),\ \zeta=w_1i_1+w_2i_2+w_3i_3+w_4i_4 \text{ ve } \zeta\in X\},$$

$$\lambda_4(X)=X_4=\{w_4|\ w_4=\lambda_4(\zeta),\ \zeta=w_1i_1+w_2i_2+w_3i_3+w_4i_4 \text{ ve } \zeta\in X\}$$

olmak üzere X_1, X_2, X_3 ve X_4 cümlelerinin $\{i_1,i_2,i_3,i_4\}$ bazına göre spektral kartezyen çarpımı

$$X_1\times_U X_2\times_U X_3\times_U X_4=\{w_1i_1+w_2i_2+w_3i_3+w_4i_4\ |w_1\in X_1,\ w_2\in X_2,\ w_3\in X_3,\ w_4\in X_4\}$$

olup

$$X=X_1\times_U X_2\times_U X_3\times_U X_4$$

yazılışına X cümlesinin kartezyen spektral gösterimi denir.

Sonuç 3.2.2. Bir $\zeta=z_1+j_2z_2$ bihiperbolik sayısı için

$$\begin{aligned}\zeta &= x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3 \\ &= \zeta^1_{\mathrm{j}_1} e^1_{\mathrm{j}_1} + \zeta^2_{\mathrm{j}_1} e^2_{\mathrm{j}_1} = \left(z_1 + \mathrm{j}_3 z_2\right) e^1_{\mathrm{j}_1} + \left(z_1 - \mathrm{j}_3 z_2\right) e^2_{\mathrm{j}_1} \\ &= \zeta^1_{\mathrm{j}_2} e^1_{\mathrm{j}_2} + \zeta^2_{\mathrm{j}_2} e^2_{\mathrm{j}_2} = \left(z_1 + z_2\right) e^1_{\mathrm{j}_2} + \left(z_1 - z_2\right) e^2_{\mathrm{j}_2} \\ &= \zeta^1_{\mathrm{j}_3} e^1_{\mathrm{j}_3} + \zeta^2_{\mathrm{j}_3} e^2_{\mathrm{j}_3} = \left(z_1 + \mathrm{j}_1 z_2\right) e^1_{\mathrm{j}_3} + \left(z_1 - \mathrm{j}_1 z_2\right) e^2_{\mathrm{j}_3} \\ &= w_1 i_1 + w_2 i_2 + w_3 i_3 + w_4 i_4\end{aligned}$$

şeklinde beş farklı gösterim vardır. Bu gösterimler bihiperbolik sayılar cümlesi üzerinde çalışmayı kolaylaştırmaktadır.

3.3. Bihiperbolik Sayılar Üzerinde Kısmi Sıralama

Reel vektör uzaylarında kısmi sıralama birçok kaynakta ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır [41, 42]. V bir reel vektör uzayı olmak üzere V üzerinde bir $\leq$ kısmi sıralaması $u, v, w \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $u \leq v$ iken $u + w \leq v + w$ ve $\alpha u \leq \alpha v$ özelliklerini sağlıyorsa V reel vektör uzayına kısmi sıralı reel vektör uzayı denir. Bir $u \in V$ elemanı $u \geq 0$ şartını sağlıyorsa u elemanına pozitif eleman denir. Bütün pozitif elemanların cümlesine V uzayının pozitif konisi denir ve V^+ ile gösterilir. Ayrıca, iki sıralı reel vektör uzayı arasındaki doğrusal dönüşüme operatör denir. V ve W iki sıralı reel vektör uzayı olmak üzere T doğrusal dönüşümü $T : V \to W$ şeklinde olsun. Bu durumda eğer $T\left(V^+\right) \subseteq W^+$ oluyorsa, başka bir değişle $u, v \in V$ ve $u \leq v$ iken $T(u) \leq T(w)$ oluyorsa T dönüşümü pozitiftir.

Bihiperbolik sayılar cümlesi H_2, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Biz de tezin bu bölümünde bihiperbolik sayıların spektral gösteriminde w_k katsayılarını veren $\lambda_k : H_2 \to \mathbb{R}$ özdeğer fonksiyonu yardımıyla H_2 reel vektör uzayı üzerinde bir bağıntı tanımlayacağız.

Teorem 3.3.1. $\zeta, \varphi \in H_2$ olmak üzere $\zeta \leq \varphi$ olması için gerek ve yeter şart her $k = 1, 2, 3, 4$ için $\lambda_k(\zeta) \leq \lambda_k(\varphi)$ olarak tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan bağıntı H_2 üzerinde bir kısmi sıralamadır.

İspat. $\zeta,\varphi,\xi\in H_2$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$ ve $\zeta\le\varphi$ olsun. Bu durumda her $k=1,2,3,4$ için $\lambda_k(\zeta)\le\lambda_k(\varphi)$ mevcuttur. Diğer taraftan her $k=1,2,3,4$ için $\lambda_k(\zeta),\lambda_k(\varphi)\in\mathbb{R}$ olduğundan $\lambda_k(\zeta)+\lambda_k(\xi)\le\lambda_k(\varphi)+\lambda_k(\xi)$ ve $\alpha\lambda_k(\zeta)\le\alpha\lambda_k(\varphi)$ olup $\zeta+\xi\le\varphi+\xi$ ve $\alpha\zeta\le\alpha\varphi$ elde edilir. Böylece $\le$ bağıntısı H_2 reel vektör uzayı üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 3.3.1. Bihiperbolik spektral gösterimi göz önüne alınarak

$$H_2^+=\left\{\zeta \mid \zeta=w_1i_1+w_2i_2+w_3i_3+w_4i_4:\quad w_1\ge 0,\quad w_2\ge 0,\quad w_3\ge 0,\quad w_4\ge 0\right\}$$

pozitif bihiperbolik sayılar cümlesi tanımlanır.

Bir V sıralı reel vektör uzayının herhangi U alt uzayı da sıralı reel alt vektör uzayıdır. Üstelik U, V uzayının alt vektör uzayı iken $U^+=U\cap V^+$ olur. O halde H hiperbolik sayılar cümlesi H_2 kısmi sıralı reel vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır ve $H_2^+\cap H$ cümlesi H pozitif hiperbolik sayılar cümlesini oluşturur. Böylece $s=1,2,3$ için

$$H(\mathrm{j}_s)^+=\left\{z \mid z=\alpha_{\mathrm{j}_s}^1e_{\mathrm{j}_s}^1+\alpha_{\mathrm{j}_s}^2e_{\mathrm{j}_s}^2:\ \alpha_{\mathrm{j}_s}^1,\alpha_{\mathrm{j}_s}^2\ge 0\right\}$$

cümlesi $H(\mathrm{j}_s)$ reel alt vektör uzayının pozitif konisi olur.

Teorem 3.3.2. ζ bihiperbolik sayısı $\zeta=z_1+\mathrm{j}_2z_2$ olmak üzere, eğer $\zeta\in H_2^+$ ise z_1 hiperbolik sayısı pozitif hiperbolik sayıdır.

İspat. $x_0,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ ve $\zeta=z_1+\mathrm{j}_2z_2=(x_0+\mathrm{j}_1x_1)+\mathrm{j}_2(x_2+\mathrm{j}_1x_3)$ olmak üzere $\zeta\in H_2^+$ olsun. z_1 hiperbolik sayısının $e_{\mathrm{j}_1}^1$ ve $e_{\mathrm{j}_1}^2$ idempotent bazları cinsinden yazılışı

$$z_1=(x_0+x_1)e_{\mathrm{j}_1}^1+(x_0-x_1)e_{\mathrm{j}_1}^2$$

şeklindedir. Diğer taraftan (3.7) eşitliklerinden

$$x_0 + x_1 = \frac{w_1 + w_3}{2},$$
$$x_0 - x_1 = \frac{w_2 + w_4}{2}$$

elde edilir. $\zeta \in H_2^+$ olduğundan $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$, $w_3 \geq 0$ ve $w_4 \geq 0$ olup

$$x_0 + x_1 \geq 0,$$
$$x_0 - x_1 \geq 0$$

elde edilir ve böylece $z_1 \in H^+(\mathrm{j}_1)$ olduğu görülür.

Ancak, $\zeta = z_1 + \mathrm{j}_2 z_2 \in H_2^+$ iken $z_2 \in H^+(\mathrm{j}_1)$ olması gerekmez. Çünkü z_2 hiperbolik sayısı idempotent bileşenler cinsinden

$$z_2 = (x_2 + x_3)e_{\mathrm{j}_1}^1 + (x_2 - x_3)e_{\mathrm{j}_1}^2$$

biçiminde ifade edilirse katsayılar

$$x_2 + x_3 = \frac{w_1 - w_3}{2},$$
$$x_2 - x_3 = \frac{w_2 - w_4}{2}$$

olur. $\zeta \in H_2^+$ olduğundan $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$, $w_3 \geq 0$, $w_4 \geq 0$ dır. Fakat bu durum $(x_2 + x_3)$ ve $(x_2 - x_3)$ reel sayılarının sıfır veya sıfırdan büyük olmasını gerektirmez. Dolayısıyla ζ bihiperbolik sayısının pozitif bihiperbolik sayı olması z_2 hiperbolik sayısının pozitif hiperbolik sayı olmasını gerektirmez.

Teorem 3.3.3. ζ bihiperbolik sayısı $\zeta = z_1 + \mathrm{j}_2 z_2$ ve $z_1, z_2 \in H(\mathrm{j}_1)$ olmak üzere $\zeta \in H_2^+$ ise $|z_2| \leq z_1$ biçimindedir.

İspat. $\zeta \in H_2^+$ alalım. $z_1 = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{j}_1 x_3$ ve $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\zeta = z_1 + \mathrm{j}_2 z_2$ olsun. $z_1 - z_2$ farkı

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= \left(x_0 + \mathrm{j}_1 x_1\right) - \left(x_2 + \mathrm{j}_1 x_3\right) \\ &= \left(x_0 - x_2\right) + \mathrm{j}_1\left(x_1 - x_3\right) \end{aligned}$$

şeklinde olup idempotent gösterimi

$$z_1 - z_2 = \left(x_0 - x_2 + x_1 - x_3\right)e_{\mathrm{j}_1}^1 + \left(x_0 - x_2 - x_1 + x_3\right)e_{\mathrm{j}_1}^2$$

biçimindedir. (3.7) eşitliklerinden

$$z_1 - z_2 = w_3 e_{\mathrm{j}_1}^1 + w_4 e_{\mathrm{j}_1}^2$$

olduğu görülür. ζ pozitif bihiperbolik sayı olduğundan $w_3 \geq 0$ ve $w_4 \geq 0$ dır. Bu durumda $z_1 - z_2 \geq 0$ olur. $z_1 - z_2 \geq 0$ ise $x_2 + x_3 \leq x_0 + x_1$ ve $x_2 - x_3 \leq x_0 - x_1$ dır. Diğer taraftan $z_1 + z_2$ toplamı

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \left(x_0 + \mathrm{j}_1 x_1\right) + \left(x_2 + \mathrm{j}_1 x_3\right) \\ &= \left(x_0 + x_2\right) + \mathrm{j}_1\left(x_1 + x_3\right) \end{aligned}$$

olup idempotent gösterimi

$$z_1 + z_2 = \left(x_0 + x_1 + x_2 + x_3\right)e_{\mathrm{j}_1}^1 + \left(x_0 - x_1 + x_2 - x_3\right)e_{\mathrm{j}_1}^2$$

şeklindedir. (3.7) eşitliklerinden

$$z_1 + z_2 = w_1 e_{\mathrm{j}_1}^1 + w_2 e_{\mathrm{j}_1}^2$$

elde edilir. $\zeta \in H_2^+$ olduğundan $z_1 + z_2 \geq 0$ olur. $z_1 + z_2 \geq 0$ ise $-z_2 \leq z_1$ dir. $-z_2 \leq z_1$ ise $-x_2 - x_3 \leq x_0 + x_1$ ve $-x_2 + x_3 \leq x_0 - x_1$ vardır. Sonuç olarak $\left|x_2 + x_3\right| \leq x_0 + x_1$ ve $\left|x_2 - x_3\right| \leq x_0 - x_1$ elde edilir. Böylece $\left|z_2\right| \leq z_1$ olur.

Teorem 3.3.4. $\zeta \in H_2^+$ ise

$$\zeta = \zeta_{\mathrm{j}_1}^1 e_{\mathrm{j}_1}^1 + \zeta_{\mathrm{j}_1}^2 e_{\mathrm{j}_1}^2$$

şeklindeki idempotent gösterimin bihiperbolik katsayıları olan $\zeta_{j_1}^1$ ve $\zeta_{j_1}^2$ bihiperbolik sayıları da pozitif bihiperbolik sayılardır.

İspat. $\zeta \in H_2^+$ olsun. $\zeta = z_1 + j_2 z_2$, $z_1 = x_0 + j_1 x_1$, $z_2 = x_2 + j_1 x_3$, $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\zeta = x_0 + j_1 x_1 + j_2 x_2 + j_3 x_3$ pozitif bihiperbolik sayısı

$$\zeta = w_1 i_1 + w_2 i_2 + w_3 i_3 + w_4 i_4$$

biçiminde yazıldığında Tanım 3.3.1 gereği $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$, $w_3 \geq 0$ ve $w_4 \geq 0$ olmalıdır. Ayrıca (3.1) ve (3.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_{j_1}^1 e_{j_1}^1 + \zeta_{j_1}^2 e_{j_1}^2 \\ &= \left(z_1 + j_3 z_2\right) e_{j_1}^1 + \left(z_1 - j_3 z_2\right) e_{j_1}^2 \end{aligned}$$

olup;

$$\begin{aligned} \zeta_{j_1}^1 &= z_1 + j_3 z_2 = x_0 + j_1 x_1 + j_2 x_3 + j_3 x_2, \\ \zeta_{j_1}^2 &= z_1 - j_3 z_2 = x_0 + j_1 x_1 - j_2 x_3 - j_3 x_2 \end{aligned}$$

biçimindedir. $\zeta_{j_1}^1$ ve $\zeta_{j_1}^2$ bihiperbolik sayıları i_s $\left(s = 1, 2, 3, 4\right)$ idempotent bileşenleri cinsinden yazıldığında

$$\begin{aligned} \zeta_{j_1}^1 &= \left(x_0 + x_1 + x_2 + x_3\right) i_1 + \left(x_0 - x_1 - x_2 + x_3\right) i_2 + \left(x_0 + x_1 - x_2 - x_3\right) i_3 + \left(x_0 - x_1 + x_2 - x_3\right) i_4 \\ &= w_1 i_1 + w_4 i_2 + w_3 i_3 + w_2 i_4 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \zeta_{j_1}^2 &= \left(x_0 + x_1 - x_2 - x_3\right) i_1 + \left(x_0 - x_1 + x_2 - x_3\right) i_2 + \left(x_0 + x_1 + x_2 + x_3\right) i_3 + \left(x_0 - x_1 - x_2 + x_3\right) i_4 \\ &= w_3 i_1 + w_2 i_2 + w_1 i_3 + w_4 i_4 \end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu gösterimlerde $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$, $w_3 \geq 0$ ve $w_4 \geq 0$ olduğundan $\zeta_{j_1}^1$ ve $\zeta_{j_1}^2$ bihiperbolik sayıları da birer pozitif bihiperbolik sayıdır.

Teorem 3.3.5. $\zeta \in H_2^+$ ise

$$\zeta = \zeta_{j_2}^1 e_{j_2}^1 + \zeta_{j_2}^2 e_{j_2}^2,$$
$$\zeta = \zeta_{j_3}^1 e_{j_3}^1 + \zeta_{j_3}^2 e_{j_3}^2$$

şeklindeki idempotent gösterimlerdeki $\zeta_{j_s}^1$ ve $\zeta_{j_s}^2$ $(s = 2,3)$ hiperbolik sayıları birer pozitif hiperbolik sayıdır.

İspat. $\zeta \in H_2^+$ ve $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere ζ , pozitif bihiperbolik sayısı

$$\begin{aligned}\zeta &= z_1 + j_2 z_2 \\ &= \left(x_0 + j_1 x_1\right) + j_2\left(x_2 + j_1 x_3\right) \\ &= x_0 + j_1 x_1 + j_2 x_2 + j_3 x_3\end{aligned}$$

biçiminde olsun. (3.4) ve (3.5) eşitliklerindeki pozitif bihiperbolik sayının iki idempotent gösterimindeki hiperbolik katsayılar

$$\begin{aligned}\zeta_{j_2}^1 &= z_1 + z_2 = \left(x_0 + x_2\right) + j_1\left(x_1 + x_3\right), \\ \zeta_{j_2}^2 &= z_1 - z_2 = \left(x_0 - x_2\right) + j_1\left(x_1 - x_3\right), \\ \zeta_{j_3}^1 &= z_1 + j_1 z_2 = \left(x_0 + x_3\right) + j_1\left(x_1 + x_2\right), \\ \zeta_{j_3}^2 &= z_1 - j_1 z_2 = \left(x_0 - x_3\right) + j_1\left(x_1 - x_2\right)\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu hiperbolik katsayılar $e_{j_1}^1$ ve $e_{j_1}^2$ idempotent bileşenleri cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned}\zeta_{j_2}^1 &= \left(x_0 + x_2 + x_1 + x_3\right)e_{j_1}^1 + \left(x_0 + x_2 - x_1 - x_3\right)e_{j_1}^2, \\ \zeta_{j_2}^2 &= \left(x_0 - x_2 + x_1 - x_3\right)e_{j_1}^1 + \left(x_0 - x_2 - x_1 + x_3\right)e_{j_1}^2, \\ \zeta_{j_3}^1 &= \left(x_0 + x_3 + x_1 + x_2\right)e_{j_1}^1 + \left(x_0 + x_3 - x_1 - x_2\right)e_{j_1}^2, \\ \zeta_{j_3}^2 &= \left(x_0 - x_3 + x_1 - x_2\right)e_{j_1}^1 + \left(x_0 - x_3 - x_1 + x_2\right)e_{j_1}^2\end{aligned}$$

olur ve (3.7) eşitliklerinden

$$\zeta_{j_2}^1 = w_1 e_{j_1}^1 + w_2 e_{j_1}^2,$$
$$\zeta_{j_2}^2 = w_3 e_{j_1}^1 + w_4 e_{j_1}^2,$$
$$\zeta_{j_3}^1 = w_1 e_{j_1}^1 + w_4 e_{j_1}^2,$$
$$\zeta_{j_3}^2 = w_3 e_{j_1}^1 + w_2 e_{j_1}^2$$

elde edilir. ζ bir pozitif bihiperbolik sayı olduğundan $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$, $w_3 \geq 0$ ve $w_4 \geq 0$ dır. Bu yüzden $\zeta_{j_2}^1$, $\zeta_{j_2}^2$, $\zeta_{j_3}^1$ ve $\zeta_{j_3}^2$ hiperbolik sayıları pozitif hiperbolik sayılardır. Yani $\zeta_{j_2}^1, \zeta_{j_2}^2, \zeta_{j_3}^1, \zeta_{j_3}^2 \in H^+(j_1)$ olur.

Tanım 3.3.2. Bir ζ bihiperbolik sayısının mutlak değeri

$$|\zeta| = |\lambda_1(\zeta)| i_1 + |\lambda_2(\zeta)| i_2 + |\lambda_3(\zeta)| i_3 + |\lambda_4(\zeta)| i_4$$

şeklindedir.

Teorem 3.3.6. $\zeta, \varphi \in H_2$ olsun. Mutlak değer fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

a. $|\zeta| = 0 \Leftrightarrow \zeta = 0,$

b. $|\zeta\varphi| = |\zeta||\varphi|,$

c. $|\zeta + \varphi| \leq |\zeta| + |\varphi|.$

İspat.

a. $|\zeta| = 0 \Leftrightarrow |\lambda_k(\zeta)| = 0, \quad k = 1,2,3,4$

$$\Leftrightarrow \lambda_k(\zeta) = 0, \quad k = 1,2,3,4$$
$$\Leftrightarrow \zeta = 0,$$

b. $|\zeta\varphi| = \sum_{i=1}^{4} |\lambda_k(\zeta)\lambda_k(\varphi)| i_k$

$$=\sum_{i=1}^{4}\left|\lambda_k\left(\zeta\right)\right|\left|\lambda_k\left(\varphi\right)\right|i_k$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{4}\left|\lambda_k\left(\zeta\right)\right|i_k\right)\left(\sum_{i=1}^{4}\left|\lambda_k\left(\varphi\right)\right|i_k\right)$$

$$=\left|\zeta\right|\left|\varphi\right|,$$

c. $$\left|\zeta+\varphi\right|=\sum_{i=1}^{4}\left|\lambda_k\left(\zeta\right)+\lambda_k\left(\varphi\right)\right|i_k$$

$$\leq\sum_{i=1}^{4}\left(\left|\lambda_k\left(\zeta\right)\right|+\left|\lambda_k\left(\varphi\right)\right|\right)i_k$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{4}\left|\lambda_k\left(\zeta\right)\right|i_k\right)+\left(\sum_{i=1}^{4}\left|\lambda_k\left(\varphi\right)\right|i_k\right)$$

$$=\left|\zeta\right|+\left|\varphi\right|.$$

Teorem 3.3.7. $\zeta\in H_2$ olmak üzere

$$\left\|\zeta\right\|_{H_2}=\text{maks}\left\{\lambda_k\left(\left|\zeta\right|\right)=\left|\lambda_k\left(\zeta\right)\right|:k=1,2,3,4\right\}$$

fonksiyonu H_2 üzerinde bir normdur.

İspat. Bir önceki teoremin ispatından her $\alpha\in\mathbb{R}$ ve her $\zeta,\varphi\in H_2$ için

$$\left\|\zeta\right\|_{H_2}=0\Leftrightarrow\zeta=0,$$

$$\left\|\alpha\zeta\right\|_{H_2}=\left|\alpha\right|\left\|\zeta\right\|_{H_2},$$

$$\left\|\zeta+\varphi\right\|_{H_2}\leq\left\|\zeta\right\|_{H_2}+\left\|\varphi\right\|_{H_2}$$

özelliklerinin sağlandığı görülür. Böylece $\left\|\,.\,\right\|_{H_2}$, H_2 reel vektör uzayında bir normdur.

Teorem 3.3.8. $\zeta, \varphi \in H_2$ olmak üzere $\| \, . \, \|_{H_2}$ normu H_2 üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlar;

a. $|\zeta| \leq \|\zeta\|_{H_2}$,

b. $|\zeta| \leq |\varphi| \Rightarrow \|\zeta\|_{H_2} \leq \|\varphi\|_{H_2}$,

c. $\|\zeta\varphi\|_{H_2} \leq \|\zeta\|_{H_2} \|\varphi\|_{H_2}$ (çarpımsal eşitsizlik).

İspat. $\|\zeta\|_{H_2} = \text{maks}\left\{\lambda_k\left(|\zeta|\right) = \left|\lambda_k\left(\zeta\right)\right| : k = 1,2,3,4\right\}$ şeklinde tanımlı olduğundan özelliklerin sağlandığı kolayca görülür.

$\left(H_2, \| \, . \, \|_{H_2}\right)$ normlu uzayı tam uzaydır. Bu yüzden $\left(H_2, \| \, . \, \|_{H_2}\right)$ tam normlu uzayı Banach uzayıdır. Ayrıca Teorem 3.3.8'den bu norm çarpımsal eşitsizlik özelliğini de sağlar. Böylece H_2 uzayının reel sayılar üzerinde birleşmeli cebir olduğu da göz önüne alınarak aşağıdaki önemli sonuç verilebilir.

Sonuç 3.3.1. $\left(H_2, +, \cdot, \| \, . \, \|_{H_2}\right)$ dörtlüsü bir reel Banach cebridir.

Bihiperbolik sayılar da tanımlı $f\left(x\right) = e^x$ üstel fonksiyonu için $f\left(\zeta\right) = e^\zeta$ değeri, mutlak yakınsak bir seri ile

$$e^\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} = e^{\lambda_1(\zeta)} i_1 + e^{\lambda_2(\zeta)} i_2 + e^{\lambda_3(\zeta)} i_3 + e^{\lambda_4(\zeta)} i_4$$

şeklinde verilebilir.

3.4. Bihiperbolik Sayıların Eşlenik ve Modülü

Tanım 3.4.1. $\zeta \in H_2$ olmak üzere $\zeta = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3$ bihiperbolik sayısı için

a. $\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1} = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 - \mathrm{j}_2 x_2 - \mathrm{j}_3 x_3$

b. $\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2} = x_0 - \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 - \mathrm{j}_3 x_3$

c. $\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3} = x_0 - \mathrm{j}_1 x_1 - \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3$

şeklinde üç farklı eşlenik tanımlıdır [13].

Eğer $\zeta = z_1 + \mathrm{j}_2 z_2$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1} &= z_1 - \mathrm{j}_2 z_2, \\
\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2} &= \overline{z}_1 + \mathrm{j}_2 \overline{z}_2, \\
\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3} &= \overline{z}_1 - \mathrm{j}_2 \overline{z}_2
\end{aligned}
$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\overline{z}_1$ ve $\overline{z}_2$ sayıları sırasıyla; z_1 ve z_2 hiperbolik sayılarının hiperbolik eşleniğidir. ζ bihiperbolik sayısının eşleniklerinin spektral temsili ise

$$
\begin{aligned}
\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1} &= \left(x_0 + x_1 - x_2 - x_3\right) i_1 + \left(x_0 - x_1 - x_2 + x_3\right) i_2 + \left(x_0 + x_1 + x_2 + x_3\right) i_3 + \left(x_0 - x_1 + x_2 - x_3\right) i_4, \\
\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2} &= \left(x_0 - x_1 + x_2 - x_3\right) i_1 + \left(x_0 + x_1 + x_2 + x_3\right) i_2 + \left(x_0 - x_1 - x_2 + x_3\right) i_3 + \left(x_0 + x_1 - x_2 - x_3\right) i_4, \\
\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3} &= \left(x_0 - x_1 - x_2 + x_3\right) i_1 + \left(x_0 + x_1 - x_2 - x_3\right) i_2 + \left(x_0 - x_1 + x_2 - x_3\right) i_3 + \left(x_0 + x_1 + x_2 + x_3\right) i_4
\end{aligned}
$$

şeklindedir. (3.7) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1} &= w_3 i_1 + w_4 i_2 + w_1 i_3 + w_2 i_4, \\
\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2} &= w_2 i_1 + w_1 i_2 + w_4 i_3 + w_3 i_4, \\
\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3} &= w_4 i_1 + w_3 i_2 + w_2 i_3 + w_1 i_4
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

elde edilir.

Sonuç 3.4.1. Eşlenik operatörleri mutlak değeri korur. Yani $s=1,2,3$ için $\overline{|\zeta|}^{j_s}=\left|\overline{\zeta}^{j_s}\right|$ mevcuttur.

Sonuç 3.4.2. $\zeta\in H_2^+$ ise ζ pozitif bihiperbolik sayısının eşlenikleri de pozitif bihiperbolik sayılardır.

İspat. ζ pozitif bihiperbolik sayı olsun. ζ sayısının eşleniklerinin spektral gösterimleri (3.8)'den

$$\begin{aligned}
\overline{\zeta}^{j_1} &= w_3 i_1 + w_4 i_2 + w_1 i_3 + w_2 i_4, \\
\overline{\zeta}^{j_2} &= w_2 i_1 + w_1 i_2 + w_4 i_3 + w_3 i_4, \\
\overline{\zeta}^{j_3} &= w_4 i_1 + w_3 i_2 + w_2 i_3 + w_1 i_4
\end{aligned}$$

şeklindedir. $\zeta\in H_2^+$ olduğundan $w_1\geq 0$, $w_2\geq 0$, $w_3\geq 0$ ve $w_4\geq 0$ dır. Böylece $\overline{\zeta}^{j_1},\overline{\zeta}^{j_2},\overline{\zeta}^{j_3}\in H_2^+$ elde edilir.

Tüm eşlenikler H_2 üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini koruyan birebir ve örten bir dönüşümdür öyle ki herhangi $\zeta_1,\zeta_2\in H_2$ ve $s=1,2,3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sigma_s &: H_2 \to H_2 \\
&\zeta \to \sigma_s(\zeta)=\overline{\zeta}^{j_s}
\end{aligned}$$

dönüşümleri

$$\begin{aligned}
\sigma_s(\zeta_1+\zeta_2) &= \sigma_s(\zeta_1)+\sigma_s(\zeta_2), \\
\sigma_s(\zeta_1\zeta_2) &= \sigma_s(\zeta_1)\sigma_s(\zeta_2), \\
\sigma_s(\sigma_s(\zeta_1)) &= \zeta_1
\end{aligned}$$

özelliklerini sağlar. Böylece her bir σ_s dönüşümü H_2 üzerinde bir halka otomorfizmidir.

Sonuç 3.4.3. $\{\mathrm{Id}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ cümlesi bir otomorfizmler grubudur.

Bir bihiperbolik sayının tüm eşlenikleriyle ayrı ayrı çarpımı şu şekildedir;

a. $$\begin{aligned} \zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1} &= (z_1 + \mathrm{j}_2 z_2)(z_1 - \mathrm{j}_2 z_2) \\ &= z_1^2 - z_2^2 \\ &= (x_0 + \mathrm{j}_1 x_1)^2 - (x_2 + \mathrm{j}_1 x_3)^2 \\ &= x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2\mathrm{j}_1 (x_0 x_1 - x_2 x_3) \in H(\mathrm{j}_1) \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} \zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2} &= (z_1 + \mathrm{j}_2 z_2)(\overline{z}_1 + \mathrm{j}_2 \overline{z}_2) \\ &= z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + \mathrm{j}_2 (z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1) \\ &= x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2\mathrm{j}_2 (x_0 x_2 - x_1 x_3) \in H(\mathrm{j}_2) \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} \zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3} &= (z_1 + \mathrm{j}_2 z_2)(\overline{z}_1 - \mathrm{j}_2 \overline{z}_2) \\ &= z_1\overline{z}_1 - z_2\overline{z}_2 + \mathrm{j}_2 (z_2\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2) \\ &= x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2\mathrm{j}_3 (x_0 x_3 - x_1 x_2) \in H(\mathrm{j}_3) \end{aligned}$$

Alışılmış durumun aksine bu çarpımlar $\mathbb{R}^+ -$değerli değildir. Her biri hiperbolik değerlidir.

Teorem 3.4.1. $\zeta \in H_2^+$ ise $I = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere her $s \in I$ için $\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_s} \in H^+(\mathrm{j}_s)$ olur.

İspat. $\zeta \in H_2^+$ ve $\zeta = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3$ olsun. $s = 1$ için

$$\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1} = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2\mathrm{j}_1 (x_0 x_1 - x_2 x_3)$$

hiperbolik sayısı $e_{\mathrm{j}_1}^1$ ve $e_{\mathrm{j}_1}^2$ idempotent bileşenlerin cinsinden

$$\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1}=\left(x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2+2x_0x_1-2x_2x_3\right)e_{\mathrm{j}_1}^1+\left(x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2-2x_0x_1+2x_2x_3\right)e_{\mathrm{j}_1}^2$$

olur. Burada (3.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2+2x_0x_1-2x_2x_3&=\left(x_0+x_1\right)^2-\left(x_2+x_3\right)^2\\&=\left(x_0+x_1+x_2+x_3\right)\left(x_0+x_1-x_2-x_3\right)\\&=w_1w_3\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2-2x_0x_1+2x_2x_3&=\left(x_0-x_1\right)^2-\left(x_2-x_3\right)^2\\&=\left(x_0-x_1+x_2-x_3\right)\left(x_0-x_1-x_2+x_3\right)\\&=w_2w_4\end{aligned}$$

elde edilir. ζ bir pozitif bihiperbolik sayı olduğundan $w_1w_3\geq 0$ ve $w_2w_4\geq 0$ olur. Dolayısıyla $\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1}$ hiperbolik sayısı pozitif hiperbolik sayıdır.

$s=2$ ve $s=3$ için de benzer şekilde

$$\begin{aligned}\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2}&=w_1w_2e_{\mathrm{j}_2}^1+w_3w_4e_{\mathrm{j}_2}^2,\\\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3}&=w_1w_4e_{\mathrm{j}_3}^1+w_2w_3e_{\mathrm{j}_3}^2\end{aligned}$$

olup $\zeta\in H_2^+$ olduğundan $w_1w_2\geq 0$, $w_3w_4\geq 0$, $w_1w_4\geq 0$ ve $w_2w_3\geq 0$ olur ve bu durumda $\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2}$ ve $\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3}$ hiperbolik sayıları birer pozitif hiperbolik sayı olur.

[14]'te değişmeli kuaterniyonlar için bir reel norm tanımlanmıştır. $\zeta\in H_2$ olmak üzere ζ bihiperbolik sayısının reel normu

$$\left|\zeta\right|_{H_2}=\sqrt[4]{\left|\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1}\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2}\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3}\right|}$$

şeklindedir. $\left|\,.\,\right|_{H_2}$ normu ile ilgili aşağıdakiler verilebilir.

Teorem 3.4.2. $\zeta,\varphi\in H_2$ olmak üzere $|\zeta|\le|\varphi|$ ise $|\zeta|_{H_2}\le|\varphi|_{H_2}$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\zeta,\varphi\in H_2$ ve $|\zeta|\le|\varphi|$ olsun. Ayrıca ζ ve φ bihiperbolik sayılarının spektral gösterimleri $\zeta=w_1i_1+w_2i_2+w_3i_3+w_4i_4$ ve $\varphi=\tilde{w}_1i_1+\tilde{w}_2i_2+\tilde{w}_3i_3+\tilde{w}_4i_4$ olsun. ζ ve φ sayılarının mutlak değerleri $|\zeta|=|w_1|i_1+|w_2|i_2+|w_3|i_3+|w_4|i_4$ ve $|\varphi|=|\tilde{w}_1|i_1+|\tilde{w}_2|i_2+|\tilde{w}_3|i_3+|\tilde{w}_4|i_4$ olur. Kabul gereği her $l=1,2,3,4$ için $|w_l|\le|\tilde{w}_l|$ vardır. Diğer taraftan ζ ve φ sayılarının reel normları

$$|\zeta|_{H_2}=\sqrt[4]{\left|\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1}\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2}\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3}\right|}=\sqrt[4]{|w_1w_2w_3w_4|}$$

ve

$$|\varphi|_{H_2}=\sqrt[4]{\left|\varphi\overline{\varphi}^{\mathrm{j}_1}\overline{\varphi}^{\mathrm{j}_2}\overline{\varphi}^{\mathrm{j}_3}\right|}=\sqrt[4]{|\tilde{w}_1\tilde{w}_2\tilde{w}_3\tilde{w}_4|}$$

biçimindedir. Böylece her $l=1,2,3,4$ için $|w_l|\le|\tilde{w}_l|$ olduğundan $|\zeta|_{H_2}\le|\varphi|_{H_2}$ elde edilir.

Bir bihiperbolik sayının hiperbolik değerli olan üç farklı modülü vardır. Aşağıdaki tanım ile bu modüller tanıtılacaktır.

Tanım 3.4.2. $\zeta\in H_2$ olmak üzere

$$|\zeta|_{\mathrm{j}_s}=\sqrt{\left|\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_s}\right|},\ s=1,2,3$$

ifadesine ζ sayısının j_s-modülü denir.

Sonuç 3.4.4. $\zeta_1,\zeta_2\in H_2$ olmak üzere $s=1,2,3$ için

$$|\zeta_1\zeta_2|_{\mathrm{j}_s}=|\zeta_1|_{\mathrm{j}_s}|\zeta_2|_{\mathrm{j}_s}$$

eşitlikleri mevcuttur.

İspat. $s=1,2,3$ için $\sigma_s(\zeta)=\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_s}$ dönüşümlerinin $\sigma_s(\zeta_1\zeta_2)=\sigma_s(\zeta_1)\sigma_s(\zeta_2)$ özelliğini sağladığı bilinmektedir. Yani $\overline{(\zeta_1\zeta_2)}^{\mathrm{j}_s}=\overline{\zeta_1}^{\mathrm{j}_s}\,\overline{\zeta_2}^{\mathrm{j}_s}$ vardır. Diğer yandan bir hiperbolik sayının mutlak değeri ve pozitif hiperbolik sayılar için karekök fonksiyonu çarpımsaldır. Yani her $z,\omega\in H$ için $|z\omega|=|z||\omega|$ ve her $z,\omega\in H^+$ için $\sqrt{z\omega}=\sqrt{z}\sqrt{\omega}$ vardır. Tüm bunlar göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
|\zeta_1\zeta_2|_{\mathrm{j}_s} &= \sqrt{\left|(\zeta_1\zeta_2)\overline{(\zeta_1\zeta_2)}^{\mathrm{j}_s}\right|}\\
&= \sqrt{\left|\zeta_1\zeta_2\overline{\zeta_1}^{\mathrm{j}_s}\,\overline{\zeta_2}^{\mathrm{j}_s}\right|}\\
&= \sqrt{\left|\zeta_1\overline{\zeta_1}^{\mathrm{j}_s}\zeta_2\overline{\zeta_2}^{\mathrm{j}_s}\right|}\\
&= \sqrt{\left|\zeta_1\overline{\zeta_1}^{\mathrm{j}_s}\right|\left|\zeta_2\overline{\zeta_2}^{\mathrm{j}_s}\right|}\\
&= \sqrt{\left|\zeta_1\overline{\zeta_1}^{\mathrm{j}_s}\right|}\sqrt{\left|\zeta_2\overline{\zeta_2}^{\mathrm{j}_s}\right|}\\
&= |\zeta_1|_{\mathrm{j}_s}\,|\zeta_2|_{\mathrm{j}_s}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Hiperbolik değerli modüllerin idempotent gösterimi ise

$$|\zeta|_{\mathrm{j}_1}=\sqrt{\left|\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1}\right|}=\sqrt{|w_1w_3|}e^1_{\mathrm{j}_1}+\sqrt{|w_2w_4|}e^2_{\mathrm{j}_1},$$

$$|\zeta|_{\mathrm{j}_2}=\sqrt{\left|\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2}\right|}=\sqrt{|w_1w_2|}e^1_{\mathrm{j}_2}+\sqrt{|w_3w_4|}e^2_{\mathrm{j}_2},$$

$$|\zeta|_{\mathrm{j}_3}=\sqrt{\left|\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3}\right|}=\sqrt{|w_1w_4|}e^1_{\mathrm{j}_3}+\sqrt{|w_2w_3|}e^2_{\mathrm{j}_3}$$

şeklindedir. Şimdi bu gösterimler yardımıyla aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.4.3. $\zeta \in H_2$ ise $s = 2,3$ için

$$\left|\zeta\right|_{\mathrm{j}_s} = \left|\zeta_{\mathrm{j}_s}^1\right|_H e_{\mathrm{j}_s}^1 + \left|\zeta_{\mathrm{j}_s}^2\right|_H e_{\mathrm{j}_s}^2$$

biçimindedir.

İspat. $\zeta \in H_2$ ve $\zeta = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3$ olsun. $s = 2,3$ için ζ sayısının $\mathrm{j}_s -$ modüllerinin idempotent gösterimleri (3.7) eşitliklerinden

$$\left|\zeta\right|_{\mathrm{j}_2} = \sqrt{\left|\left(x_0 + x_2\right)^2 - \left(x_1 + x_3\right)^2\right|}\, e_{\mathrm{j}_2}^1 + \sqrt{\left|\left(x_0 - x_2\right)^2 - \left(x_1 - x_3\right)^2\right|}\, e_{\mathrm{j}_2}^2$$

ve

$$\left|\zeta\right|_{\mathrm{j}_3} = \sqrt{\left|\left(x_0 + x_3\right)^2 - \left(x_1 + x_2\right)^2\right|}\, e_{\mathrm{j}_3}^1 + \sqrt{\left|\left(x_0 - x_3\right)^2 - \left(x_1 - x_2\right)^2\right|}\, e_{\mathrm{j}_3}^2$$

olur. (3.2) eşitlikleri kullanılarak $\zeta_{\mathrm{j}_2}^1$, $\zeta_{\mathrm{j}_2}^2$, $\zeta_{\mathrm{j}_3}^1$ ve $\zeta_{\mathrm{j}_3}^2$ hiperbolik sayılarının hiperbolik modülleri

$$\left|\zeta_{\mathrm{j}_2}^1\right|_H = \sqrt{\left|\left(x_0 + x_2\right)^2 - \left(x_1 + x_3\right)^2\right|},$$

$$\left|\zeta_{\mathrm{j}_2}^2\right|_H = \sqrt{\left|\left(x_0 - x_2\right)^2 - \left(x_1 - x_3\right)^2\right|},$$

$$\left|\zeta_{\mathrm{j}_3}^1\right|_H = \sqrt{\left|\left(x_0 + x_3\right)^2 - \left(x_1 + x_2\right)^2\right|},$$

$$\left|\zeta_{\mathrm{j}_3}^2\right|_H = \sqrt{\left|\left(x_0 - x_3\right)^2 - \left(x_1 - x_2\right)^2\right|}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemler $\mathrm{j}_2 -$modül ve $\mathrm{j}_3 -$modülün idempotent ayrışımlarında yerine yazılırsa

$$\left|\zeta\right|_{\mathrm{j}_2} = \left|\zeta_{\mathrm{j}_2}^1\right|_H e_{\mathrm{j}_2}^1 + \left|\zeta_{\mathrm{j}_2}^2\right|_H e_{\mathrm{j}_2}^2$$

ve

$$|\zeta|_{\mathrm{j}_3} = \left|\zeta^1_{\mathrm{j}_3}\right|_H e^1_{\mathrm{j}_3} + \left|\zeta^2_{\mathrm{j}_3}\right|_H e^2_{\mathrm{j}_3}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.4.4. $\zeta, \varphi \in H_2$ olmak üzere $|\zeta| \le |\varphi|$ ise $s = 1,2,3$ için $|\zeta|_{\mathrm{j}_s} \le |\varphi|_{\mathrm{j}_s}$ dir.

İspat. $\zeta, \varphi \in H_2$ ve $\zeta = w_1 i_1 + w_2 i_2 + w_3 i_3 + w_4 i_4$, $\varphi = \tilde{w}_1 i_1 + \tilde{w}_2 i_2 + \tilde{w}_3 i_3 + \tilde{w}_4 i_4$ olsun. ζ ve φ sayılarının mutlak değerleri $|\zeta| = |w_1| i_1 + |w_2| i_2 + |w_3| i_3 + |w_4| i_4$ ve $|\varphi| = |\tilde{w}_1| i_1 + |\tilde{w}_2| i_2 + |\tilde{w}_3| i_3 + |\tilde{w}_4| i_4$ olur. Kabul gereği her $l = 1,2,3,4$ için $|w_l| \le |\tilde{w}_l|$ dir. Diğer taraftan ζ ve φ sayılarının j_1-modülü $|\zeta|_{\mathrm{j}_1} = \sqrt{|w_1 w_3|} e^1_{\mathrm{j}_1} + \sqrt{|w_2 w_4|} e^2_{\mathrm{j}_1}$ ve $|\varphi|_{\mathrm{j}_1} = \sqrt{|\tilde{w}_1 \tilde{w}_3|} e^1_{\mathrm{j}_1} + \sqrt{|\tilde{w}_2 \tilde{w}_4|} e^2_{\mathrm{j}_1}$ şeklindedir. $|w_1 w_3| \le |\tilde{w}_1 \tilde{w}_3|$ ve $|w_2 w_4| \le |\tilde{w}_2 \tilde{w}_4|$ olduğundan $|\zeta|_{\mathrm{j}_1} \le |\varphi|_{\mathrm{j}_1}$ elde edilir. $s = 2,3$ için de benzer şekilde ispat edilebilir.

ζ bir bihiperbolik sayı olmak üzere bu sayının çarpımsal tersi

$$\zeta\zeta^{-1} = 1$$

eşitliğini sağlayan ζ^{-1} bihiperbolik sayısıdır.

$\zeta = z_1 + \mathrm{j}_2 z_2 = (x_0 + \mathrm{j}_1 x_1) + \mathrm{j}_2 (x_2 + \mathrm{j}_1 x_3) = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3$ bihiperbolik sayısı alalım. ζ bihiperbolik sayısının çarpımsal tersi

$$\zeta^{-1} = \frac{1}{\zeta} = \frac{\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1}\,\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2}\,\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3}}{\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1}\,\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2}\,\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3}} = \frac{\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1}\,\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2}\,\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3}}{\left(z_1^2 - z_2^2\right)\left(\overline{z}_1^2 - \overline{z}_2^2\right)}$$

$$= \frac{\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1}\,\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2}\,\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3}}{x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2\left(x_0^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_1^2 x_2^2 + x_0^2 x_1^2 + x_2^2 x_3^2 + x_0^2 x_3^2\right) + 8 x_0 x_1 x_2 x_3}$$

şeklindedir. Burada paydaya ν dersek; aynı zamanda

$$\nu = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)(x_0 - x_1 + x_2 - x_3)(x_0 + x_1 - x_2 - x_3)(x_0 - x_1 - x_2 + x_3)$$

olduğu kolaylıkla görülür ve

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$
$$x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = 0,$$
$$x_0 - x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

eşitliklerinden herhangi bir tanesi varsa ζ bihiperbolik sayısının tersi yoktur [14].

Çarpımsal tersi olmayan bihiperbolik sayıların cümlesi

$$NC = \left\{ \zeta \,\middle|\, \zeta \overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1} \overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2} \overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3} = 0 \right\},$$

$$NC = \left\{ \zeta = \mathrm{z}_1 + \mathrm{j}_2 \mathrm{z}_2 \,\middle|\, \mathrm{z}_1^2 \overline{\mathrm{z}}_1^2 + \mathrm{z}_2^2 \overline{\mathrm{z}}_2^2 - \left(\mathrm{z}_1^2 \overline{\mathrm{z}}_2^2 + \overline{\mathrm{z}}_1^2 \mathrm{z}_2^2 \right) = 0 \right\},$$

veya

$$NC = \left\{ \zeta = w_1 i_1 + w_2 i_2 + w_3 i_3 + w_4 i_4 \,\middle|\, w_1 w_2 w_3 w_4 = 0 \right\}$$

biçiminde gösterilir ve bu cümleler null koni olarak isimlendirilir [14].

Diğer taraftan $I = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere eğer her $k \in I$ için $\lambda_k(\zeta) \neq 0$ oluyor ise ζ bihiperbolik sayısının tersi vardır. Bilindiği gibi bir halkada tersi olan elemanların oluşturduğu cümle çarpma işlemi ile birlikte bir gruptur. Böylece H_2 halkasının tersi olan elemanlarının oluşturduğu cümleyi H_2^* ile gösterirsek

$$H_2^* = \left\{ \zeta \mid \lambda_k(\zeta) \neq 0, \forall\, k = 1, 2, 3, 4 \right\}$$

cümlesi bir çarpımsal gruptur.

Teorem 3.4.5. $\zeta \in H_2^*$ bihiperbolik sayısının çarpımsal tersi

$$\zeta^{-1} = \frac{\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1} \overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2} \overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3}}{\zeta \overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1} \overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2} \overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3}}, \quad \zeta^{-1} = \frac{\overline{\mathrm{z}}_1^3 - \overline{\mathrm{z}}_1 \overline{\mathrm{z}}_2^2 - \mathrm{j}_2 \left(\overline{\mathrm{z}}_1^2 \overline{\mathrm{z}}_2 + \overline{\mathrm{z}}_2^3 \right)}{\left(\mathrm{z}_1^2 - \mathrm{z}_2^2 \right) \left(\overline{\mathrm{z}}_1^2 - \overline{\mathrm{z}}_2^2 \right)} \quad \text{veya} \quad \zeta^{-1} = \frac{i_1}{w_1} + \frac{i_2}{w_2} + \frac{i_3}{w_3} + \frac{i_4}{w_4}$$

şeklindedir.

İspat. $\zeta \in H_2^*$ olduğundan her $k \in \{1,2,3,4\}$ için $\lambda_k(\zeta) \neq 0$ dır. Yani $w_1 w_2 w_3 w_4 = \zeta \overline{\zeta}^{j_1} \overline{\zeta}^{j_2} \overline{\zeta}^{j_3} \neq 0$ olup ζ bihiperbolik sayısının çarpımsal tersinin

$$\zeta^{-1} = \frac{1}{\zeta} = \frac{\overline{\zeta}^{j_1} \overline{\zeta}^{j_2} \overline{\zeta}^{j_3}}{\zeta \overline{\zeta}^{j_1} \overline{\zeta}^{j_2} \overline{\zeta}^{j_3}}$$

olduğu açıktır. Ayrıca $\zeta \in H_2^*$ olduğundan $\zeta \overline{\zeta}^{j_1} \overline{\zeta}^{j_2} \overline{\zeta}^{j_3} = \left(z_1^2 - z_2^2\right)\left(\overline{z}_1^2 - \overline{z}_2^2\right) \neq 0$ olup $\zeta = z_1 + j_2 z_2$ olmak üzere Tanım 3.4.1'den

$$\begin{aligned}
\zeta^{-1} = \frac{1}{\zeta} &= \frac{\overline{\zeta}^{j_1} \overline{\zeta}^{j_2} \overline{\zeta}^{j_3}}{\zeta \overline{\zeta}^{j_1} \overline{\zeta}^{j_2} \overline{\zeta}^{j_3}} \\
&= \frac{\left(z_1 - j_2 z_2\right)\left(\overline{z}_1 + j_2 \overline{z}_2\right)\left(\overline{z}_1 - j_2 \overline{z}_2\right)}{\left(z_1 + j_2 z_2\right)\left(z_1 - j_2 z_2\right)\left(\overline{z}_1 + j_2 \overline{z}_2\right)\left(\overline{z}_1 - j_2 \overline{z}_2\right)} \\
&= \frac{\overline{z}_1^3 - \overline{z}_1 \overline{z}_2^2 - j_2\left(\overline{z}_1^2 \overline{z}_2 + \overline{z}_2^3\right)}{\left(z_1^2 - z_2^2\right)\left(\overline{z}_1^2 - \overline{z}_2^2\right)}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Son olarak (3.8) eşitliklerinden ζ sayısının çarpımsal tersi

$$\begin{aligned}
\zeta^{-1} &= \frac{1}{\zeta} \\
&= \frac{\overline{\zeta}^{j_1} \overline{\zeta}^{j_2} \overline{\zeta}^{j_3}}{\zeta \overline{\zeta}^{j_1} \overline{\zeta}^{j_2} \overline{\zeta}^{j_3}} \\
&= \frac{\left(w_3 i_1 + w_4 i_2 + w_1 i_3 + w_2 i_4\right)\left(w_2 i_1 + w_1 i_2 + w_4 i_3 + w_3 i_4\right)\left(w_4 i_1 + w_3 i_2 + w_2 i_3 + w_1 i_4\right)}{w_1 w_2 w_3 w_4} \\
&= \frac{w_2 w_3 w_4 i_1 + w_1 w_4 w_3 i_2 + w_4 w_1 w_2 i_3 + w_3 w_2 w_1 i_4}{w_1 w_2 w_3 w_4} \\
&= \frac{i_1}{w_1} + \frac{i_2}{w_2} + \frac{i_3}{w_3} + \frac{i_4}{w_4}
\end{aligned}$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Önerme 3.4.1. $H_2^{*,+}$ cümlesi H_2^* cümlesinin bir alt grubudur.

Sonuç 3.4.5. $\zeta \notin NC$ olan bir ζ bihiperbolik sayısı pozitif ise ζ sayısının çarpımsal tersi ζ^{-1} bihiperbolik sayısı da pozitiftir. Yani $\zeta \in H_2^{*,+}$ ise $\zeta^{-1} \in H_2^{*,+}$ olur.

İspat. ζ tersi olan pozitif bihiperbolik sayı olsun. Bu durumda ζ sayısının çarpımsal tersi ζ^{-1} sayısının $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ bazı cinsinden spektral temsili

$$\zeta^{-1} = \frac{i_1}{w_1} + \frac{i_2}{w_2} + \frac{i_3}{w_3} + \frac{i_4}{w_4}$$

olup $\zeta \in H_2^{*,+}$ olduğundan $\zeta^{-1} \in H_2^{*,+}$ elde edilir.

3.5. Bihiperbolik Sayılar Cümlesi ile Yarı-Öklid Uzayın İlişkisi

Karmaşık sayılar veya hiperbolik sayıların eşlenikleri ile çarpımı sonucunda bir reel sayı elde edilmesine rağmen bir bihiperbolik sayının üç farklı eşleniği ile ayrı ayrı çarpımı sonucunda daima bir hiperbolik sayı elde edilmektedir. Hatta sonucun reel sayı olmaması da bihiperbolik sayılar için norm tanımlamayı zor hale getirmiştir. Daha önce de hatırlatıldığı gibi [14] ve [43]'te bir bihiperbolik sayının normu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.5.1. ζ bir bihiperbolik sayı ve $\overline{\zeta}^{j_1}, \overline{\zeta}^{j_2}, \overline{\zeta}^{j_3}$ ise ζ sayısının eşlenikleri olsun. Bu durumda ζ sayısının reel normu

$$\begin{aligned} |\zeta|_{H_2} &= \sqrt[4]{\left|\zeta \overline{\zeta}^{j_1} \overline{\zeta}^{j_2} \overline{\zeta}^{j_3}\right|} \\ &= \sqrt[4]{\left|x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2\left(x_0^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 + x_0^2x_1^2 + x_2^2x_3^2 + x_0^2x_3^2\right) + 8x_0x_1x_2x_3\right|} \end{aligned}$$

biçimindedir [14, 43].

Böylece uygun düzenlemeler sonucu ζ sayısının reel normu

$$|\zeta|_{H_2} = \sqrt[4]{\left|\left(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right)^2 - 4\left(x_0x_1 - x_2x_3\right)^2\right|},$$

$$\left|\zeta\right|_{H_2} = \sqrt[4]{\left|\left(x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2\right)^2 - 4\left(x_0x_2 - x_1x_3\right)^2\right|}$$

veya

$$\left|\zeta\right|_{H_2} = \sqrt[4]{\left|\left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2\right)^2 - 4\left(x_0x_3 - x_1x_2\right)^2\right|}$$

eşitliklerinden biri ile verilebilir.

Özel olarak $f_1\left(x_0, x_1, x_2, x_3\right) = x_0x_1 - x_2x_3 = 0$, $f_2\left(x_0, x_1, x_2, x_3\right) = x_0x_2 - x_1x_3 = 0$ veya $f_3\left(x_0, x_1, x_2, x_3\right) = x_0x_3 - x_1x_2 = 0$ alınırsa H_2 uzayının sırasıyla

$$M_1 = \left\{x_0 + \mathrm{j}_1x_1 + \mathrm{j}_2x_2 + \mathrm{j}_3x_3 \,\middle|\, x_0x_1 - x_2x_3 = 0\right\},$$

$$M_2 = \left\{x_0 + \mathrm{j}_1x_1 + \mathrm{j}_2x_2 + \mathrm{j}_3x_3 \,\middle|\, x_0x_2 - x_1x_3 = 0\right\},$$

$$M_3 = \left\{x_0 + \mathrm{j}_1x_1 + \mathrm{j}_2x_2 + \mathrm{j}_3x_3 \,\middle|\, x_0x_3 - x_1x_2 = 0\right\}$$

hiperyüzeyleri elde edilir.

Böylece M_1, M_2 veya M_3 hiperyüzeyleri üzerinde bir ζ sayısının normu sırasıyla

$$\left|\zeta\right|_{H_2} = \sqrt{\left|x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right|},$$

$$\left|\zeta\right|_{H_2} = \sqrt{\left|x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2\right|},$$

$$\left|\zeta\right|_{H_2} = \sqrt{\left|x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2\right|}$$

olarak elde edilir. Bu durumlar sırasıyla $\left|\zeta\right|_{H_2} = \sqrt{\left|\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1}\right|}$, $\left|\zeta\right|_{H_2} = \sqrt{\left|\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2}\right|}$ veya $\left|\zeta\right|_{H_2} = \sqrt{\left|\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3}\right|}$ olarak da verilebilir.

Ayrıca (3.7) eşitliklerinden

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \frac{w_1 w_3 + w_2 w_4}{2},$$

$$x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \frac{w_1 w_2 + w_3 w_4}{2},$$

ve

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = \frac{w_1 w_4 + w_2 w_3}{2}$$

olduğu kolaylıkla görülür ve böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.5.1. $\zeta \in M_1$, $\zeta \in M_2$ veya $\zeta \in M_3$ iken sırasıyla $\left| \, . \, \right|_{H_2}$ normu

$$\left|\zeta\right|_{H_2} = \sqrt{\left|\frac{w_1 w_3 + w_2 w_4}{2}\right|},$$

$$\left|\zeta\right|_{H_2} = \sqrt{\left|\frac{w_1 w_2 + w_3 w_4}{2}\right|},$$

$$\left|\zeta\right|_{H_2} = \sqrt{\left|\frac{w_1 w_4 + w_2 w_3}{2}\right|}$$

biçiminde yazılabilir.

$\mathbb{R}^4$, $4-$boyutlu Öklidyen uzayında $x, y \in \mathbb{R}^4$ ve $x = \left(x_0, x_1, x_2, x_3\right)$, $y = \left(y_0, y_1, y_2, y_3\right)$ olsun. x ve y nin skaler çarpımı

$$\left\langle x, y \right\rangle\Big|_{\mathbb{R}_2^4} = \varepsilon_0 x_0 y_0 + \varepsilon_1 x_1 y_1 + \varepsilon_2 x_2 y_2 + \varepsilon_3 x_3 y_3$$

şeklinde verilsin öyle ki $\left\{\varepsilon_i : i = 0,1,2,3\right\}$ cümlesinin iki elemanı -1, iki elemanı ise $+1$ olsun. Bu skaler çarpım ile verilen $\mathbb{R}^4$, $4-$boyutlu reel afin uzayı indeksi 2 olan yarı-Öklidyen uzayıdır ve $\mathbb{R}_2^4$ şeklinde gösterilir [36]. $\mathbb{R}_2^4$ uzayının metrik işareti $\left(+,+,-,-\right)$, $\left(+,-,+,-\right)$ veya $\left(+,-,-,+\right)$ şeklinde olabilir.

$x \in \mathbb{R}_2^4$ elemanının yarı-Öklidyen normu ise

$$\|x\|_{\mathbb{R}_2^4} = \sqrt{\left|\langle x, x\rangle\right|_{\mathbb{R}_2^4}}$$

şeklindedir [36].

Diğer taraftan $\mathbb{R}_2^4$ uzayı bihiperbolik sayı sistemi ile ilişkilendirilebilir. $\zeta = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3$ bihiperbolik sayısını alırsak ζ bihiperbolik sayısı $\mathbb{R}_2^4$ yarı-Öklid uzayında (x_0, x_1, x_2, x_3) şeklinde bir noktaya karşılık gelir. Böylece $k = 1,2,3$ için $\zeta \in M_k \subseteq H_2$ bihiperbolik sayısının normu $|\zeta|_{\mathrm{j}_k}$ ile $\mathbb{R}_2^4$ yarı-Öklidyen uzayında uygun metrik işaretler seçilerek alınan iç çarpımlarla elde edilen norm $\|\zeta\|_{\mathbb{R}_2^4} = \sqrt{\left|\langle \zeta, \zeta\rangle\right|_{\mathbb{R}_2^4}}$ çakışır. Böylece $\mathbb{R}_2^4$, yarı-Öklid uzayındaki uzay, ışık ve zaman konisi tanımları göz önüne alınarak $k = 1,2,3$ için $\zeta_0 \in M_k \subseteq H_2$ noktasındaki uzay, ışık ve zaman konisi tanımları aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 3.5.2. $k = 1,2,3$ ve $\zeta_0 \in M_k \subseteq H_2$ olmak üzere

$$SM_k(\zeta_0) = \left\{ \zeta \in M_k \,\middle|\, (\zeta - \zeta_0)\overline{(\zeta - \zeta_0)}^{\mathrm{j}_k} > 0 \text{ veya } \zeta = \zeta_0 \right\}$$

cümlesi ζ_0 noktasındaki uzay konisi,

$$NM_k(\zeta_0) = \left\{ \zeta \in M_k \,\middle|\, (\zeta - \zeta_0)\overline{(\zeta - \zeta_0)}^{\mathrm{j}_k} = 0 \right\}$$

cümlesi ζ_0 noktasındaki ışık konisi ve

$$TM_k(\zeta_0) = \left\{ \zeta \in M_k \,\middle|\, (\zeta - \zeta_0)\overline{(\zeta - \zeta_0)}^{\mathrm{j}_k} < 0 \text{ veya } \zeta = \zeta_0 \right\}$$

cümlesi de ζ_0 noktasındaki zaman konisi olarak adlandırılır.

Bihiperbolik sayıların (3.1) ve (3.2) eşitlikleriyle verilen idempotent yazılışlarıyla elde edilen $e^1_{\mathrm{j}_s}H_2$ ve $e^2_{\mathrm{j}_s}H_2$ cümlelerinin elemanları $s=1,2,3$ için birer bihiperbolik sayı olup açık yazılışları yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.5.1. $\zeta \in SM_k(\zeta_0)$ olsun. Bu durumda ζ_0 ve ζ bihiperbolik sayılarının idempotent ayrışımları

$$\zeta_0 = \zeta^1_{0,\mathrm{j}_1}e^1_{\mathrm{j}_1} + \zeta^2_{0,\mathrm{j}_1}e^2_{\mathrm{j}_1} = \zeta^1_{0,\mathrm{j}_2}e^1_{\mathrm{j}_2} + \zeta^2_{0,\mathrm{j}_2}e^2_{\mathrm{j}_2} = \zeta^1_{0,\mathrm{j}_3}e^1_{\mathrm{j}_3} + \zeta^2_{0,\mathrm{j}_3}e^2_{\mathrm{j}_3},$$
$$\zeta = \zeta^1_{\mathrm{j}_1}e^1_{\mathrm{j}_1} + \zeta^2_{\mathrm{j}_1}e^2_{\mathrm{j}_1} = \zeta^1_{\mathrm{j}_2}e^1_{\mathrm{j}_2} + \zeta^2_{\mathrm{j}_2}e^2_{\mathrm{j}_2} = \zeta^1_{\mathrm{j}_3}e^1_{\mathrm{j}_3} + \zeta^2_{\mathrm{j}_3}e^2_{\mathrm{j}_3}$$

olmak üzere $s,k=1,2,3$ için $s=k$ iken $\zeta^1_{\mathrm{j}_s}e^1_{\mathrm{j}_s} \in SM_k\left(\zeta^1_{0,\mathrm{j}_s}e^1_{\mathrm{j}_s}\right)$, $\zeta^2_{\mathrm{j}_s}e^2_{\mathrm{j}_s} \in SM_k\left(\zeta^2_{0,\mathrm{j}_s}e^2_{\mathrm{j}_s}\right)$ ve $s \neq k$ iken $\zeta^1_{\mathrm{j}_s}e^1_{\mathrm{j}_s} \in NM_k\left(\zeta^1_{0,\mathrm{j}_s}e^1_{\mathrm{j}_s}\right)$, $\zeta^2_{\mathrm{j}_s}e^2_{\mathrm{j}_s} \in NM_k\left(\zeta^2_{0,\mathrm{j}_s}e^2_{\mathrm{j}_s}\right)$ olur.

İspat. Kabul edelim ki $\zeta, \zeta_0 \in M_k$ ve $\zeta \in SM_k(\zeta_0)$ olsun. Bu durumda $\zeta = \mathrm{z}_1 + \mathrm{j}_2\mathrm{z}_2 = (x_0 + \mathrm{j}_1x_1) + \mathrm{j}_2(x_2 + \mathrm{j}_1x_3)$ ve $\zeta_0 = \omega_1 + \mathrm{j}_2\omega_2 = (y_0 + \mathrm{j}_1y_1) + \mathrm{j}_2(y_2 + \mathrm{j}_1y_3)$ olmak üzere $k=1,2,3$ için sırasıyla

$$(\zeta-\zeta_0)\overline{(\zeta-\zeta_0)}^{\mathrm{j}_1} = (x_0-y_0)^2 + (x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2 - (x_3-y_3)^2 > 0,$$
$$(\zeta-\zeta_0)\overline{(\zeta-\zeta_0)}^{\mathrm{j}_2} = (x_0-y_0)^2 - (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 - (x_3-y_3)^2 > 0,$$
$$(\zeta-\zeta_0)\overline{(\zeta-\zeta_0)}^{\mathrm{j}_3} = (x_0-y_0)^2 - (x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 > 0$$

olur. Diğer taraftan $s=1,2,3$ için $e^1_{\mathrm{j}_s}H_2$ ve $e^2_{\mathrm{j}_s}H_2$ cümlelerinin elemanları açık formda

$$\begin{aligned}\zeta^1_{\mathrm{j}_1}e^1_{\mathrm{j}_1} &= (\mathrm{z}_1 + \mathrm{j}_3\mathrm{z}_2)e^1_{\mathrm{j}_1}\\ &= \left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \mathrm{j}_1\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \mathrm{j}_2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) + \mathrm{j}_3\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta^2_{\mathrm{j}_1}e^2_{\mathrm{j}_1} &= (\mathrm{z}_1 - \mathrm{j}_3\mathrm{z}_2)e^2_{\mathrm{j}_1}\\ &= \left(\frac{x_0-x_1}{2}\right) + \mathrm{j}_1\left(\frac{-x_0+x_1}{2}\right) + \mathrm{j}_2\left(\frac{x_2-x_3}{2}\right) + \mathrm{j}_3\left(\frac{-x_2+x_3}{2}\right),\end{aligned}$$

$$\zeta^1_{j_2} e^1_{j_2} = \left(z_1 + z_2\right) e^1_{j_2}$$
$$= \left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right) + j_1\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right) + j_2\left(\frac{x_0 + x_2}{2}\right) + j_3\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right),$$

$$\zeta^2_{j_2} e^2_{j_2} = \left(z_1 - z_2\right) e^2_{j_2}$$
$$= \left(\frac{x_0 - x_2}{2}\right) + j_1\left(\frac{x_1 - x_3}{2}\right) + j_2\left(\frac{-x_0 + x_2}{2}\right) + j_3\left(\frac{-x_1 + x_3}{2}\right),$$

$$\zeta^1_{j_3} e^1_{j_3} = \left(z_1 + j_1 z_2\right) e^1_{j_3}$$
$$= \left(\frac{x_0 + x_3}{2}\right) + j_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + j_2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + j_3\left(\frac{x_0 + x_3}{2}\right),$$

$$\zeta^2_{j_3} e^2_{j_3} = \left(z_1 - j_1 z_2\right) e^2_{j_3}$$
$$= \left(\frac{x_0 - x_3}{2}\right) + j_1\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right) + j_2\left(\frac{-x_1 + x_2}{2}\right) + j_3\left(\frac{-x_0 + x_3}{2}\right)$$

ve

$$\zeta^1_{0,j_1} e^1_{j_1} = \left(\omega_1 + j_3 \omega_2\right) e^1_{j_1}$$
$$= \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right) + j_1\left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right) + j_2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + j_3\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right),$$

$$\zeta^2_{0,j_1} e^2_{j_1} = \left(\omega_1 - j_3 \omega_2\right) e^2_{j_1}$$
$$= \left(\frac{y_0 - y_1}{2}\right) + j_1\left(\frac{-y_0 + y_1}{2}\right) + j_2\left(\frac{y_2 - y_3}{2}\right) + j_3\left(\frac{-y_2 + y_3}{2}\right),$$

$$\zeta^1_{0,j_2} e^1_{j_2} = \left(\omega_1 + \omega_2\right) e^1_{j_2}$$
$$= \left(\frac{y_0 + y_2}{2}\right) + j_1\left(\frac{y_1 + y_3}{2}\right) + j_2\left(\frac{y_0 + y_2}{2}\right) + j_3\left(\frac{y_1 + y_3}{2}\right),$$

$$\zeta^2_{0,j_2} e^2_{j_2} = \left(\omega_1 - \omega_2\right) e^2_{j_2}$$
$$= \left(\frac{y_0 - y_2}{2}\right) + j_1\left(\frac{y_1 - y_3}{2}\right) + j_2\left(\frac{-y_0 + y_2}{2}\right) + j_3\left(\frac{-y_1 + y_3}{2}\right),$$

$$\zeta^1_{0,j_3} e^1_{j_3} = \left(\omega_1 + j_1 \omega_2\right) e^1_{j_3}$$
$$= \left(\frac{y_0 + y_3}{2}\right) + j_1\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + j_2\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + j_3\left(\frac{y_0 + y_3}{2}\right),$$

$$\zeta^2_{0,\mathrm{j}_3} e^2_{\mathrm{j}_3} = (\omega_1 - \mathrm{j}_1\omega_2) e^2_{\mathrm{j}_3}$$
$$= \left(\frac{y_0 - y_3}{2}\right) + \mathrm{j}_1\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right) + \mathrm{j}_2\left(\frac{-y_1 + y_2}{2}\right) + \mathrm{j}_3\left(\frac{-y_0 + y_3}{2}\right)$$

yazılabilir. Böylece

$$\zeta^1_{\mathrm{j}_1} e^1_{\mathrm{j}_1} - \zeta^1_{0,\mathrm{j}_1} e^1_{\mathrm{j}_1} = \left(\frac{x_0 + x_1 - y_0 - y_1}{2}\right) + \mathrm{j}_1\left(\frac{x_0 + x_1 - y_0 - y_1}{2}\right)$$
$$+ \mathrm{j}_2\left(\frac{x_2 + x_3 - y_2 - y_3}{2}\right) + \mathrm{j}_3\left(\frac{x_2 + x_3 - y_2 - y_3}{2}\right),$$

$$\zeta^2_{\mathrm{j}_1} e^2_{\mathrm{j}_1} - \zeta^2_{0,\mathrm{j}_1} e^2_{\mathrm{j}_1} = \left(\frac{x_0 - x_1 - y_0 + y_1}{2}\right) + \mathrm{j}_1\left(\frac{-x_0 + x_1 + y_0 - y_1}{2}\right)$$
$$+ \mathrm{j}_2\left(\frac{x_2 - x_3 - y_2 + y_3}{2}\right) + \mathrm{j}_3\left(\frac{-x_2 + x_3 + y_2 - y_3}{2}\right),$$

$$\zeta^1_{\mathrm{j}_2} e^1_{\mathrm{j}_2} - \zeta^1_{0,\mathrm{j}_2} e^1_{\mathrm{j}_2} = \left(\frac{x_0 + x_2 - y_0 - y_2}{2}\right) + \mathrm{j}_1\left(\frac{x_1 + x_3 - y_1 - y_3}{2}\right)$$
$$+ \mathrm{j}_2\left(\frac{x_0 + x_2 - y_0 - y_2}{2}\right) + \mathrm{j}_3\left(\frac{x_1 + x_3 - y_1 - y_3}{2}\right),$$

$$\zeta^2_{\mathrm{j}_2} e^2_{\mathrm{j}_2} - \zeta^2_{0,\mathrm{j}_2} e^2_{\mathrm{j}_2} = \left(\frac{x_0 - x_2 - y_0 + y_2}{2}\right) + \mathrm{j}_1\left(\frac{x_1 - x_3 - y_1 + y_3}{2}\right)$$
$$+ \mathrm{j}_2\left(\frac{-x_0 + x_2 + y_0 - y_2}{2}\right) + \mathrm{j}_3\left(\frac{-x_1 + x_3 + y_1 - y_3}{2}\right),$$

$$\zeta^1_{\mathrm{j}_3} e^1_{\mathrm{j}_3} - \zeta^1_{0,\mathrm{j}_3} e^1_{\mathrm{j}_3} = \left(\frac{x_0 + x_3 - y_0 - y_3}{2}\right) + \mathrm{j}_1\left(\frac{x_1 + x_2 - y_1 - y_2}{2}\right)$$
$$+ \mathrm{j}_2\left(\frac{x_1 + x_2 - y_1 - y_2}{2}\right) + \mathrm{j}_3\left(\frac{x_0 + x_3 - y_0 - y_3}{2}\right),$$

$$\zeta^2_{\mathrm{j}_3} e^2_{\mathrm{j}_3} - \zeta^2_{0,\mathrm{j}_3} e^2_{\mathrm{j}_3} = \left(\frac{x_0 - x_3 - y_0 + y_3}{2}\right) + \mathrm{j}_1\left(\frac{x_1 - x_2 - y_1 + y_2}{2}\right)$$
$$+ \mathrm{j}_2\left(\frac{-x_1 + x_2 + y_1 - y_2}{2}\right) + \mathrm{j}_3\left(\frac{-x_0 + x_3 + y_0 - y_3}{2}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\left(\zeta^1_{j_1} e^1_{j_1} - \zeta^1_{0,j_1} e^1_{j_1}\right)\overline{\left(\zeta^1_{j_1} e^1_{j_1} - \zeta^1_{0,j_1} e^1_{j_1}\right)}^{j_1} &= \left(\frac{x_0+x_1-y_0-y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_0+x_1-y_0-y_1}{2}\right)^2 \\
&\quad - \left(\frac{x_2+x_3-y_2-y_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_2+x_3-y_2-y_3}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(\zeta-\zeta_0)\overline{(\zeta-\zeta_0)}^{j_1}}{2} + x_2y_3 + x_3y_2 - x_0y_1 - x_1y_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\zeta^1_{j_1} e^1_{j_1} - \zeta^1_{0,j_1} e^1_{j_1}\right)\overline{\left(\zeta^1_{j_1} e^1_{j_1} - \zeta^1_{0,j_1} e^1_{j_1}\right)}^{j_2} &= \left(\frac{x_0+x_1-y_0-y_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_0+x_1-y_0-y_1}{2}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{x_2+x_3-y_2-y_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_2+x_3-y_2-y_3}{2}\right)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\zeta^1_{j_1} e^1_{j_1} - \zeta^1_{0,j_1} e^1_{j_1}\right)\overline{\left(\zeta^1_{j_1} e^1_{j_1} - \zeta^1_{0,j_1} e^1_{j_1}\right)}^{j_3} &= \left(\frac{x_0+x_1-y_0-y_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_0+x_1-y_0-y_1}{2}\right)^2 \\
&\quad - \left(\frac{x_2+x_3-y_2-y_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2+x_3-y_2-y_3}{2}\right)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\zeta^2_{j_1} e^2_{j_1} - \zeta^2_{0,j_1} e^2_{j_1}\right)\overline{\left(\zeta^2_{j_1} e^2_{j_1} - \zeta^2_{0,j_1} e^2_{j_1}\right)}^{j_1} &= \left(\frac{x_0-x_1-y_0+y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-x_0+x_1+y_0-y_1}{2}\right)^2 \\
&\quad - \left(\frac{x_2-x_3-y_2+y_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{-x_2+x_3+y_2-y_3}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(\zeta-\zeta_0)\overline{(\zeta-\zeta_0)}^{j_1}}{2} + x_0y_1 + x_1y_0 - x_2y_3 - x_3y_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\zeta^2_{j_1} e^2_{j_1} - \zeta^2_{0,j_1} e^2_{j_1}\right)\overline{\left(\zeta^2_{j_1} e^2_{j_1} - \zeta^2_{0,j_1} e^2_{j_1}\right)}^{j_2} &= \left(\frac{x_0-x_1-y_0+y_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-x_0+x_1+y_0-y_1}{2}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{x_2-x_3-y_2+y_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{-x_2+x_3+y_2-y_3}{2}\right)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\zeta^2_{j_1}e^2_{j_1}-\zeta^2_{0,j_1}e^2_{j_1}\right)\overline{\left(\zeta^2_{j_1}e^2_{j_1}-\zeta^2_{0,j_1}e^2_{j_1}\right)}^{j_3} &= \left(\frac{x_0-x_1-y_0+y_1}{2}\right)^2-\left(\frac{-x_0+x_1+y_0-y_1}{2}\right)^2\\ &\quad -\left(\frac{x_2-x_3-y_2+y_3}{2}\right)^2+\left(\frac{-x_2+x_3+y_2-y_3}{2}\right)^2\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\zeta^1_{j_2}e^1_{j_2}-\zeta^1_{0,j_2}e^1_{j_2}\right)\overline{\left(\zeta^1_{j_2}e^1_{j_2}-\zeta^1_{0,j_2}e^1_{j_2}\right)}^{j_1} &= \left(\frac{x_0+x_2-y_0-y_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1+x_3-y_1-y_3}{2}\right)^2\\ &\quad -\left(\frac{x_0+x_2-y_0-y_2}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1+x_3-y_1-y_3}{2}\right)^2\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\zeta^1_{j_2}e^1_{j_2}-\zeta^1_{0,j_2}e^1_{j_2}\right)\overline{\left(\zeta^1_{j_2}e^1_{j_2}-\zeta^1_{0,j_2}e^1_{j_2}\right)}^{j_2} &= \left(\frac{x_0+x_2-y_0-y_2}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1+x_3-y_1-y_3}{2}\right)^2\\ &\quad +\left(\frac{x_0+x_2-y_0-y_2}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1+x_3-y_1-y_3}{2}\right)^2\\ &= \frac{\left(\zeta-\zeta_0\right)\overline{\left(\zeta-\zeta_0\right)}^{j_2}}{2}+x_1y_3+x_3y_1-x_0y_2-x_2y_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\zeta^1_{j_2}e^1_{j_2}-\zeta^1_{0,j_2}e^1_{j_2}\right)\overline{\left(\zeta^1_{j_2}e^1_{j_2}-\zeta^1_{0,j_2}e^1_{j_2}\right)}^{j_3} &= \left(\frac{x_0+x_2-y_0-y_2}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1+x_3-y_1-y_3}{2}\right)^2\\ &\quad -\left(\frac{x_0+x_2-y_0-y_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1+x_3-y_1-y_3}{2}\right)^2\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\zeta^2_{j_2}e^2_{j_2}-\zeta^2_{0,j_2}e^2_{j_2}\right)\overline{\left(\zeta^2_{j_2}e^2_{j_2}-\zeta^2_{0,j_2}e^2_{j_2}\right)}^{j_1} &= \left(\frac{x_0-x_2-y_0+y_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1-x_3-y_1+y_3}{2}\right)^2\\ &\quad -\left(\frac{-x_0+x_2+y_0-y_2}{2}\right)^2-\left(\frac{-x_1+x_3+y_1-y_3}{2}\right)^2\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\zeta^2_{j_2}e^2_{j_2}-\zeta^2_{0,j_2}e^2_{j_2}\right)\overline{\left(\zeta^2_{j_2}e^2_{j_2}-\zeta^2_{0,j_2}e^2_{j_2}\right)}^{j_2} &= \left(\frac{x_0-x_2-y_0+y_2}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1-x_3-y_1+y_3}{2}\right)^2\\ &\quad +\left(\frac{-x_0+x_2+y_0-y_2}{2}\right)^2-\left(\frac{-x_1+x_3+y_1-y_3}{2}\right)^2\\ &= \frac{\left(\zeta-\zeta_0\right)\overline{\left(\zeta-\zeta_0\right)}^{j_2}}{2}+x_0y_2+x_2y_0-x_1y_3-x_3y_1\end{aligned}$$

$$\left(\zeta_{j_2}^2 e_{j_2}^2 - \zeta_{0,j_2}^2 e_{j_2}^2\right)\overline{\left(\zeta_{j_2}^2 e_{j_2}^2 - \zeta_{0,j_2}^2 e_{j_2}^2\right)}^{j_3} = \left(\frac{x_0 - x_2 - y_0 + y_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_3 - y_1 + y_3}{2}\right)^2$$
$$-\left(\frac{-x_0 + x_2 + y_0 - y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-x_1 + x_3 + y_1 - y_3}{2}\right)^2$$
$$= 0$$

$$\left(\zeta_{j_3}^1 e_{j_3}^1 - \zeta_{0,j_3}^1 e_{j_3}^1\right)\overline{\left(\zeta_{j_3}^1 e_{j_3}^1 - \zeta_{0,j_3}^1 e_{j_3}^1\right)}^{j_1} = \left(\frac{x_0 + x_3 - y_0 - y_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 + x_2 - y_1 - y_2}{2}\right)^2$$
$$-\left(\frac{x_1 + x_2 - y_1 - y_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_0 + x_3 - y_0 - y_3}{2}\right)^2$$
$$= 0$$

$$\left(\zeta_{j_3}^1 e_{j_3}^1 - \zeta_{0,j_3}^1 e_{j_3}^1\right)\overline{\left(\zeta_{j_3}^1 e_{j_3}^1 - \zeta_{0,j_3}^1 e_{j_3}^1\right)}^{j_2} = \left(\frac{x_0 + x_3 - y_0 - y_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 + x_2 - y_1 - y_2}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{x_1 + x_2 - y_1 - y_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_0 + x_3 - y_0 - y_3}{2}\right)^2$$
$$= 0$$

$$\left(\zeta_{j_3}^1 e_{j_3}^1 - \zeta_{0,j_3}^1 e_{j_3}^1\right)\overline{\left(\zeta_{j_3}^1 e_{j_3}^1 - \zeta_{0,j_3}^1 e_{j_3}^1\right)}^{j_3} = \left(\frac{x_0 + x_3 - y_0 - y_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 + x_2 - y_1 - y_2}{2}\right)^2$$
$$-\left(\frac{x_1 + x_2 - y_1 - y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_0 + x_3 - y_0 - y_3}{2}\right)^2$$
$$= \frac{(\zeta - \zeta_0)\overline{(\zeta - \zeta_0)}^{j_3}}{2} + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_0 y_3 - x_3 y_0$$

$$\left(\zeta_{j_3}^2 e_{j_3}^2 - \zeta_{0,j_3}^2 e_{j_3}^2\right)\overline{\left(\zeta_{j_3}^2 e_{j_3}^2 - \zeta_{0,j_3}^2 e_{j_3}^2\right)}^{j_1} = \left(\frac{x_0 - x_3 - y_0 + y_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2 - y_1 + y_2}{2}\right)^2$$
$$-\left(\frac{-x_1 + x_2 + y_1 - y_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{-x_0 + x_3 + y_0 - y_3}{2}\right)^2$$
$$= 0$$

$$\left(\zeta_{j_3}^2 e_{j_3}^2 - \zeta_{0,j_3}^2 e_{j_3}^2\right)\overline{\left(\zeta_{j_3}^2 e_{j_3}^2 - \zeta_{0,j_3}^2 e_{j_3}^2\right)}^{j_2} = \left(\frac{x_0 - x_3 - y_0 + y_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2 - y_1 + y_2}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{-x_1 + x_2 + y_1 - y_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{-x_0 + x_3 + y_0 - y_3}{2}\right)^2$$
$$= 0$$

$$\left(\zeta_{j_3}^2 e_{j_3}^2 - \zeta_{0,j_3}^2 e_{j_3}^2\right)\overline{\left(\zeta_{j_3}^2 e_{j_3}^2 - \zeta_{0,j_3}^2 e_{j_3}^2\right)}^{j_3} = \left(\frac{x_0 - x_3 - y_0 + y_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2 - y_1 + y_2}{2}\right)^2$$

$$-\left(\frac{-x_1 + x_2 + y_1 - y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-x_0 + x_3 + y_0 - y_3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(\zeta - \zeta_0)\overline{(\zeta - \zeta_0)}^{j_3}}{2} + x_0 y_3 + x_3 y_0 - x_1 y_2 - x_2 y_1$$

olur. $\zeta, \zeta_0 \in M_k$ olduğundan $k = 1,2,3$ için sırasıyla;

$$x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0 \text{ ve } y_0 y_1 - y_2 y_3 = 0,$$

$$x_0 x_2 - x_1 x_3 = 0 \text{ ve } y_0 y_2 - y_1 y_3 = 0,$$

$$x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0 \text{ ve } y_0 y_3 - y_1 y_2 = 0$$

vardır. $(\zeta - \zeta_0) \in M_k$ olup $\zeta - \zeta_0 = (x_0 - y_0) + j_1(x_1 - y_1) + j_2(x_2 - y_2) + j_3(x_3 - y_3)$ olduğu göz önüne alınırsa $k = 1,2,3$ için sırasıyla;

$$(x_0 - y_0)(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)(x_3 - y_3) = 0,$$

$$(x_0 - y_0)(x_2 - y_2) - (x_1 - y_1)(x_3 - y_3) = 0,$$

$$(x_0 - y_0)(x_3 - y_3) - (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) = 0$$

vardır. Böylece $x_2 y_3 + x_3 y_2 - x_0 y_1 - x_1 y_0 = 0$, $x_1 y_3 + x_3 y_1 - x_0 y_2 - x_2 y_0 = 0$ ve $x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_0 y_3 - x_3 y_0 = 0$ elde edilir. O halde

$$\zeta_{j_1}^1 e_{j_1}^1 \in SM_1\left(\zeta_{0,j_1}^1 e_{j_1}^1\right),\ \zeta_{j_1}^1 e_{j_1}^1 \in NM_2\left(\zeta_{0,j_1}^1 e_{j_1}^1\right),\ \zeta_{j_1}^1 e_{j_1}^1 \in NM_3\left(\zeta_{0,j_1}^1 e_{j_1}^1\right),$$

$$\zeta_{j_1}^2 e_{j_1}^2 \in SM_1\left(\zeta_{0,j_1}^2 e_{j_1}^2\right),\ \zeta_{j_1}^2 e_{j_1}^2 \in NM_2\left(\zeta_{0,j_1}^2 e_{j_1}^2\right),\ \zeta_{j_1}^2 e_{j_1}^2 \in NM_3\left(\zeta_{0,j_1}^2 e_{j_1}^2\right),$$

$$\zeta_{j_2}^1 e_{j_2}^1 \in NM_1\left(\zeta_{0,j_2}^1 e_{j_2}^1\right),\ \zeta_{j_2}^1 e_{j_2}^1 \in SM_2\left(\zeta_{0,j_2}^1 e_{j_2}^1\right),\ \zeta_{j_2}^1 e_{j_2}^1 \in NM_3\left(\zeta_{0,j_2}^1 e_{j_2}^1\right),$$

$$\zeta_{j_2}^2 e_{j_2}^2 \in NM_1\left(\zeta_{0,j_2}^2 e_{j_2}^2\right),\ \zeta_{j_2}^2 e_{j_2}^2 \in SM_2\left(\zeta_{0,j_2}^2 e_{j_2}^2\right),\ \zeta_{j_2}^2 e_{j_2}^2 \in NM_3\left(\zeta_{0,j_2}^2 e_{j_2}^2\right),$$

$$\zeta_{j_3}^1 e_{j_3}^1 \in NM_1\left(\zeta_{0,j_3}^1 e_{j_3}^1\right),\ \zeta_{j_3}^1 e_{j_3}^1 \in NM_2\left(\zeta_{0,j_3}^1 e_{j_3}^1\right),\ \zeta_{j_3}^1 e_{j_3}^1 \in SM_3\left(\zeta_{0,j_3}^1 e_{j_3}^1\right),$$

$$\zeta_{j_3}^2 e_{j_3}^2 \in NM_1\left(\zeta_{0,j_3}^2 e_{j_3}^2\right),\ \zeta_{j_3}^2 e_{j_3}^2 \in NM_2\left(\zeta_{0,j_3}^2 e_{j_3}^2\right),\ \zeta_{j_3}^2 e_{j_3}^2 \in SM_3\left(\zeta_{0,j_3}^2 e_{j_3}^2\right)$$

elde edilir.

Benzer hesaplamalarla aşağıdaki sonuçlar da verilebilir.

Sonuç 3.5.2. $\zeta \in NM_k\left(\zeta_0\right)$ olsun. Bu durumda, $s,k=1,2,3$ için $s=k$ veya $s \neq k$ iken $\zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 \in NM_k\left(\zeta_{0,j_s}^1 e_{j_s}^1\right)$, $\zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2 \in NM_k\left(\zeta_{0,j_s}^2 e_{j_s}^2\right)$ biçimindedir.

Sonuç 3.5.3. $\zeta \in TM_k\left(\zeta_0\right)$ olsun. Bu durumda, $s,k=1,2,3$ için $s=k$ iken $\zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 \in TM_k\left(\zeta_{0,j_s}^1 e_{j_s}^1\right)$, $\zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2 \in TM_k\left(\zeta_{0,j_s}^2 e_{j_s}^2\right)$ ve $s \neq k$ iken $\zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 \in NM_k\left(\zeta_{0,j_s}^1 e_{j_s}^1\right)$, $\zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2 \in NM_k\left(\zeta_{0,j_s}^2 e_{j_s}^2\right)$ biçimindedir.

Sonuç 3.5.4. $\zeta \in H_2$, $s=1,2,3$ için ζ bihiperbolik sayısının idempotent ayrışımları $\zeta = \zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 + \zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2$ ve $k=1,2,3$ için $SM_k\left(O\right)$, $NM_k\left(O\right)$ ve $TM_k\left(O\right)$ orijin merkezli uzay, ışık ve zaman konileri olmak üzere;

a. $s=k=1$ iken
$\zeta \in SM_1\left(O\right)$ ise $\zeta_{j_1}^1, \zeta_{j_1}^2 \in SM_1\left(O\right)$,
$\zeta \in NM_1\left(O\right)$ ise $\zeta_{j_1}^1, \zeta_{j_1}^2 \in NM_1\left(O\right)$,
$\zeta \in TM_1\left(O\right)$ ise $\zeta_{j_1}^1, \zeta_{j_1}^2 \in TM_1\left(O\right)$,

b. $s=k=2$ veya $s=k=3$ iken
$\zeta \in SM_k\left(O\right)$ ise $\zeta_{j_s}^1, \zeta_{j_s}^2 \in SH\left(O\right)$,
$\zeta \in NM_k\left(O\right)$ ise $\zeta_{j_s}^1, \zeta_{j_s}^2 \in NH\left(O\right)$,
$\zeta \in TM_k\left(O\right)$ ise $\zeta_{j_s}^1, \zeta_{j_s}^2 \in TH\left(O\right)$ dır.

İspat.

a. $\zeta \in SM_1(O)$ bihiperbolik sayısını alalım. $\zeta = 0$ ise ispat aşikârdır. $\zeta \neq 0$ olsun. Bu durumda $\zeta = x_0 + \mathrm{j}_1x_1 + \mathrm{j}_2x_2 + \mathrm{j}_3x_3$ olmak üzere $\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_1} = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0$ olur. Diğer taraftan (3.2)-(3.5) denklemleri kullanılarak $s = 1$ için ζ bihiperbolik sayısının idempotent ayrışımının katsayıları

$$\zeta_{\mathrm{j}_1}^1 = x_0 + \mathrm{j}_1x_1 + \mathrm{j}_2x_3 + \mathrm{j}_3x_2,\ \zeta_{\mathrm{j}_1}^2 = x_0 + \mathrm{j}_1x_1 - \mathrm{j}_2x_3 - \mathrm{j}_3x_2$$

şeklinde olup $\zeta_{\mathrm{j}_1}^1\overline{\zeta_{\mathrm{j}_1}^1}^{\mathrm{j}_1} = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0$ ve $\zeta_{\mathrm{j}_1}^2\overline{\zeta_{\mathrm{j}_1}^2}^{\mathrm{j}_1} = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0$ elde edilir. Böylece $\zeta_{\mathrm{j}_1}^1, \zeta_{\mathrm{j}_1}^2 \in SM_1(O)$ olduğu görülür. Benzer şekilde $\zeta \in NM_1(O)$ alındığında $\zeta_{\mathrm{j}_1}^1, \zeta_{\mathrm{j}_1}^2 \in NM_1(O)$ ve $\zeta \in TM_1(O)$ alındığında $\zeta_{\mathrm{j}_1}^1, \zeta_{\mathrm{j}_1}^2 \in TM_1(O)$ olduğu görülür.

b. $s = k = 2$ olacak şekilde $\zeta \in SM_2(O)$ bihiperbolik sayısını alalım. $\zeta = 0$ ise ispat aşikârdır. $\zeta \neq 0$ alalım. Bu durumda $\zeta\overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2} = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0$ ve ζ sayısının $s = 2$ için idempotent ayrışımının katsayıları

$$\zeta_{\mathrm{j}_2}^1 = (x_0 + x_2) + \mathrm{j}_1(x_1 + x_3),\ \zeta_{\mathrm{j}_2}^2 = (x_0 - x_2) + \mathrm{j}_1(x_1 - x_3)$$

olup $k = 2$ için M_2 hiperyüzeyinde $x_0x_2 - x_1x_3 = 0$ olduğu da göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathrm{j}_2}^1\overline{\zeta_{\mathrm{j}_2}^1} &= (x_0 + x_2)^2 - (x_1 + x_3)^2 \\
&= x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_0x_2 - 2x_1x_3 \\
&= x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathrm{j}_2}^2\overline{\zeta_{\mathrm{j}_2}^2} &= (x_0 - x_2)^2 - (x_1 - x_3)^2 \\
&= x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_0x_2 + 2x_1x_3 \\
&= x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\zeta^1_{j_2},\zeta^2_{j_2} \in SH(O)$ elde edilir. Benzer şekilde $\zeta \in NM_2(O)$ alındığında $\zeta^1_{j_s},\zeta^2_{j_2} \in NH(O)$, $\zeta \in TM_2(O)$ ise $\zeta^1_{j_2},\zeta^2_{j_2} \in TH(O)$ olduğu kolaylıkla görülür. Diğer taraftan $s=k=3$ olacak şekilde $\zeta \in SM_3(O)$ bihiperbolik sayısı alındığında $\zeta^1_{j_3},\zeta^2_{j_3} \in SH(O)$, $\zeta \in NM_3(O)$ alındığında $\zeta^1_{j_3},\zeta^2_{j_3} \in NH(O)$ ve $\zeta \in TM_3(O)$ alındığında ise $\zeta^1_{j_3},\zeta^2_{j_3} \in TH(O)$ olur.

Sonuç 3.5.4 için $s \neq k$ alındığında herhangi bir genellemeye gidilememiştir.

Son dört sonuçtan anlaşılmaktadır ki bir bihiperbolik sayının $s=1,2,3$ için var olan $\zeta = \zeta^1_{j_s} e^1_{j_s} + \zeta^2_{j_s} e^2_{j_s}$ şeklindeki idempotent ayrışımları ile $k=1,2,3$ için $SM_k(\zeta_0)$, $NM_k(\zeta_0)$ ve $TM_k(\zeta_0)$ uzay, ışık ve zaman konileri arasındaki ilişki $s=k$ olduğu zaman anlamlıdır. Bu yüzden tezin geri kalan kısmında teoremler ifade edilirken bu durum özellikle göz önünde bulundurulacaktır.

Sonuç 3.5.5. $s=1,2,3$ için $e^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s}$ idempotent bileşenler ve $k=1,2,3$ için $SM_k(O)$, $NM_k(O)$ ve $TM_k(O)$ sırasıyla; orijin merkezli uzay, ışık ve zaman konisi olmak üzere

a. $s=1$ iken $e^1_{j_1},e^2_{j_1} \notin M_1$, $e^1_{j_1},e^2_{j_1} \in NM_2(O)$ ve $e^1_{j_1},e^2_{j_1} \in NM_3(O)$,

b. $s=2$ iken $e^1_{j_2},e^2_{j_2} \in NM_1(O)$, $e^1_{j_2},e^2_{j_2} \notin M_2$ ve $e^1_{j_2},e^2_{j_2} \in NM_3(O)$,

c. $s=3$ iken $e^1_{j_3},e^2_{j_3} \in NM_1(O)$, $e^1_{j_3},e^2_{j_3} \in NM_2(O)$ ve $e^1_{j_3},e^2_{j_3} \notin M_3$ tür.

İspat.

a. $s=1$ olsun. $k=1$ için herhangi bir $\zeta \in M_1$ bihiperbolik sayısı $\zeta = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3$ olacak şekilde alındığında $x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0$ olmalıdır. $e_{\mathrm{j}_1}^1, e_{\mathrm{j}_1}^2 \in H \subseteq H_2$ sayıları

$$e_{\mathrm{j}_1}^1 = \frac{1+\mathrm{j}_1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{j}_1}{2} + \mathrm{j}_2 0 + \mathrm{j}_3 0,$$
$$e_{\mathrm{j}_1}^2 = \frac{1-\mathrm{j}_1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{j}_1}{2} + \mathrm{j}_2 0 + \mathrm{j}_3 0$$

şeklinde olup bu sayılar için $x_0 x_1 - x_2 x_3 \neq 0$ olur. O halde $e_{\mathrm{j}_1}^1, e_{\mathrm{j}_1}^2 \notin M_1$ dir. Diğer taraftan $k=2$ için herhangi bir $\zeta \in NM_2(O)$ bihiperbolik sayısı $\zeta = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3$ olacak şekilde alındığında $x_0 x_2 - x_1 x_3 = 0$ ve $\zeta \overline{\zeta}^{\mathrm{j}_2} = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ olmalıdır. Bu durum göz önünde bulundurulursa $e_{\mathrm{j}_1}^1, e_{\mathrm{j}_1}^2 \in NM_2(O)$ olduğu görülür. Benzer şekilde $k=3$ için herhangi bir $\zeta \in NM_3(O)$ bihiperbolik sayısı $\zeta = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3$ olacak şekilde alındığında $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$ ve $\zeta \overline{\zeta}^{\mathrm{j}_3} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$ olmalıdır. Bu durum göz önünde bulundurulursa $e_{\mathrm{j}_1}^1, e_{\mathrm{j}_1}^2 \in NM_3(O)$ olduğu görülür. Benzer şekilde (b) ve (c) şıkları da ispatlanır.

BÖLÜM 4. BİHİPERBOLİK SAYILARIN TOPOLOJİLERİ

Bir yarı-Öklidyen uzay olan $n-$boyutlu Minkowski uzayının topolojik yapısını çalışma fikri ilk defa E. C. Zeeman tarafından ortaya atılmıştır [24, 25]. Daha sonra Minkowski uzayı üzerinde topolojiler ile ilgili yeni çalışmalar ortaya çıkmıştır [26, 27, 28, 29]. Bir önceki bölümde bihiperbolik sayılar ile $\mathbb{R}_2^4$ yarı-Öklid uzayı arasındaki ilişki incelenerek M_1, M_2 ve M_3 hiperyüzeyleri elde edilmiştir. Bu bölümde de elde edilen hiperyüzeyler üzerinde çeşitli topolojiler tanımlanmıştır. Ayrıca bihiperbolik sayıların idempotent ve spektral ayrışımlarından faydalanarak bihiperbolik sayıların çarpım topolojileri de tanımlanmıştır.

4.1. Bihiperbolik Sayıların Norm Topolojileri

H_2 bihiperbolik sayıların cümlesi ve $k=1,2,3$ için $\zeta \in M_k \subseteq H_2$ bihiperbolik sayısı $\zeta = z_1 + \mathrm{j}_2 z_2 = x_0 + \mathrm{j}_1 x_1 + \mathrm{j}_2 x_2 + \mathrm{j}_3 x_3$ olsun. ζ bihiperbolik sayısının karşılık geldiği (x_0, x_1, x_2, x_3) sıralı dörtlüsünün Öklidyen normu

$$\|\zeta\| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

ile verilir. Bu norm yardımıyla sırasıyla norm e, s ve $t-$topolojilerini tanımlayalım.

4.1.1. Norm $e-$ topolojisi

$\delta > 0$ reel sayısı için $\zeta_0 \in M_k \subseteq H_2$ merkezli ve $\delta \in \mathbb{R}^+$ yarıçaplı Öklidyen açık yuvar

$$D(\zeta_0, \delta) = \{\zeta \in M_k \subseteq H_2, \|\zeta - \zeta_0\| < \delta\}$$

biçimindedir. $\delta > 0$ olmak üzere tüm δ yarıçaplı Öklidyen açık yuvarların ailesi B_N^E ile gösterilsin. B_N^E tabanı tarafından üretilen topolojiye M_k üzerinde norm $e-$ topolojisi denir ve τ_N^E ile gösterilir.

4.1.2. Norm $s-$ topolojisi

$\zeta_0 \in M_k \subseteq H_2$ ve $\delta \in \mathbb{R}^+$ reel sayısı için $D(\zeta_0, \delta)$, ζ_0-merkezli, $\delta-$yarıçaplı Öklidyen açık yuvar ve $SM_k(\zeta_0)$, M_k hiperyüzeyinin ζ_0 noktasındaki uzay konisi olmak üzere ζ_0-merkezli ve $\delta-$yarıçaplı $s-$yuvar

$$D^S(\zeta_0, \delta) = D(\zeta_0, \delta) \cap SM_k(\zeta_0)$$

olarak verilir. Tüm $s-$yuvarların ailesi B_N^S, M_k üzerindeki topoloji için bir taban oluşturur. B_N^S tabanı tarafından üretilen topolojiye M_k üzerinde norm $s-$topolojisi denir ve τ_N^S ile gösterilir.

4.1.3. Norm $t-$topolojisi

$\zeta_0 \in M_k \subseteq H_2$ ve $\delta \in \mathbb{R}^+$ reel sayısı için $D(\zeta_0, \delta)$, ζ_0-merkezli, $\delta-$yarıçaplı Öklidyen açık yuvar ve $TM_k(\zeta_0)$, M_k hiperyüzeyinin ζ_0 noktasındaki zaman konisi olmak üzere ζ_0-merkezli ve $\delta-$yarıçaplı $t-$yuvar

$$D^T(\zeta_0, \delta) = D(\zeta_0, \delta) \cap TM_k(\zeta_0)$$

ile verilir. Tüm $t-$yuvarların ailesi B_N^T, M_k üzerindeki topoloji için bir taban oluşturur. B_N^T tabanı tarafından üretilen topolojiye M_k üzerinde norm $t-$topolojisi denir ve τ_N^T ile gösterilir.

4.2. Bihiperbolik Sayıların Hiperbolik Topolojileri

Hiperbolik sayılar cümlesi

$$H=\left\{z:z=x_1+\mathrm{j}_1x_2\ ,\ \mathrm{j}_1^2=1,\ \mathrm{j}_1\neq\pm1,\ x_1,x_2\in\mathbb{R}\right\}$$

ve $z\in H$ için

$$\|z\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

H üzerinde Öklidyen normdur. H, hiperbolik sayılar cümlesi üzerindeki Öklidyen norm yardımıyla $z_0\in H$ merkezli, $\delta-$yarıçaplı Öklidyen yuvar

$$D(z_0,\delta)=\left\{z\in H,\|z-z_0\|<\delta\right\}$$

biçiminde verilir. $\delta>0$ reel sayısı için tüm $z_0\in H$ merkezli ve $\delta-$yarıçaplı Öklidyen açık yuvarların ailesi B^E olsun. B^E tabanı H cümlesindeki Öklidyen topoloji için bir topoloji tabanıdır.

4.2.1. Hiperbolik $e-$ topolojisi

H hiperbolik sayılar cümlesinde, $z_0^1,z_0^2\in H$ ve $\delta_1,\delta_2\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere, D_1 ve D_2 sırasıyla, z_0^1 ve z_0^2 merkezli ve δ_1 ve δ_2 yarıçaplı Öklidyen açık yuvarları göstersin. Böylece

$$\mathrm{B}^E\times\mathrm{B}^E=\left\{D_1\times D_2\,\middle|\,D_1,D_2\in\mathrm{B}^E\right\}$$

ailesi $H\times H$ üzerindeki bir topoloji için taban olacaktır.

$$H_2\cong H\times H$$

olduğu için D_1 ve D_2 Öklidyen açık yuvarların hiperbolik kartezyen çarpımı $D_1\times_H D_2$ olmak üzere

$$D_1\times_H D_2=D_1\left(z_0^1,\delta_1\right)\times_H D_2\left(z_0^2,\delta_2\right):=\left\{\zeta=z_1+\mathrm{j}_2z_2\,\middle|\,\left\|z_1-z_0^1\right\|<\delta_1,\ \left\|z_2-z_0^2\right\|<\delta_2\right\}$$

şeklinde olur. Böylece

$$\mathrm{B}_H = \left\{ D_1 \times_H D_2 \,\middle|\, D_1, D_2 \in \mathrm{B}^E \right\}$$

ailesi H_2 cümlesi üzerindeki Öklidyen topoloji için bir tabandır. Bu tabanın H_2 uzayı üzerinde ürettiği topolojiye hiperbolik $e-$ topolojisi denir ve τ_H^E ile gösterilir.

4.2.2. Hiperbolik $s-$ topolojisi

$z_0 \in H$ ve $\delta > 0$ için $D(z_0, \delta)$ açık yuvarlarının ailesi B^E olmak üzere z_0 merkezli ve δ yarıçaplı $s-$ yuvar

$$D(z_0, \delta) \cap SH(z_0) = D^S(z_0, \delta)$$

şeklinde olsun. $z_0 \in H$ ve $\delta > 0$ reel sayısı için tüm $s-$ yuvarların ailesi B^S olmak üzere B^S, H için bir topoloji tabanıdır. Böylece

$$\mathrm{B}^S \times \mathrm{B}^S = \left\{ D_1^S \times D_2^S \,\middle|\, D_1^S, D_2^S \in \mathrm{B}^S \right\},$$

$H \times H$ üzerindeki bir topoloji için tabandır. $H \times H \cong H_2$ olduğundan

$$\mathrm{B}_H^S = \left\{ D_1^S \times_H D_2^S \,\middle|\, D_1^S, D_2^S \in \mathrm{B}^S \right\}$$

ailesi H_2 cümlesi üzerindeki bir topolojinin tabanıdır. Burada

$$D_1^S \times_H D_2^S = D_1^S\left(\mathrm{z}_0^1, \delta_1\right) \times_H D_2^S\left(\mathrm{z}_0^2, \delta_2\right) := \left\{ \zeta = \mathrm{z}_1 + \mathrm{j}_2 \mathrm{z}_2 \,\middle|\, \mathrm{z}_1 \in D_1^S, \mathrm{z}_2 \in D_2^S \right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu tabanın H_2 cümlesi üzerinde ürettiği topolojiye hiperbolik $s-$ topolojisi denir ve τ_H^S ile gösterilir.

4.2.3. Hiperbolik $t-$ topolojisi

$z_0 \in H$ ve $\delta > 0$ için $D(z_0, \delta)$ açık yuvarlarının ailesi B^E olmak üzere z_0 merkezli ve δ yarıçaplı $t-$ yuvar

$$D\left(z_0,\delta\right) \cap TH\left(z_0\right) = D^T\left(z_0,\delta\right)$$

biçiminde olsun. $z_0 \in H$ ve $\delta > 0$ reel sayısı için tüm $t-$yuvarların ailesi B^T olmak üzere B^T, H için bir topoloji tabanıdır. Böylece

$$\mathrm{B}^T \times \mathrm{B}^T = \left\{ D_1^T \times D_2^T \,\middle|\, D_1^T, D_2^T \in \mathrm{B}^T \right\}$$

ailesi $H \times H$ üzerindeki bir topoloji için tabandır. Diğer taraftan $H \times H \cong H_2$ olduğundan

$$\mathrm{B}_H^T = \left\{ D_1^T \times_H D_2^T \,\middle|\, D_1^T, D_2^T \in \mathrm{B}^T \right\}$$

ailesi H_2 cümlesi üzerindeki bir topolojinin tabanı olur. Burada

$$D_1^T \times_H D_2^T = D_1^T\left(\mathrm{z}_0^1,\delta_1\right) \times_H D_2^T\left(\mathrm{z}_0^2,\delta_2\right) := \left\{ \zeta = \mathrm{z}_1 + \mathrm{j}_2\mathrm{z}_2 \,\middle|\, \mathrm{z}_1 \in D_1^T, \, \mathrm{z}_2 \in D_2^T \right\}$$

olup B_H^T tabanı tarafından üretilen topolojiye H_2 üzerindeki hiperbolik $t-$topolojisi denir ve τ_H^T ile gösterilir.

4.3. Bihiperbolik Sayıların İdempotent Topolojileri

Bir bihiperbolik sayının dört farklı idempotent ayrışımı vardır. Bunlar (3.1) ve (3.6) numaralı denklemlerle gösterilmiştir. Kısaca $\zeta \in H_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\zeta &= \zeta_{\mathrm{j}_1}^1 e_{\mathrm{j}_1}^1 + \zeta_{\mathrm{j}_1}^2 e_{\mathrm{j}_1}^2 \\
&= \zeta_{\mathrm{j}_2}^1 e_{\mathrm{j}_2}^1 + \zeta_{\mathrm{j}_2}^2 e_{\mathrm{j}_2}^2 \\
&= \zeta_{\mathrm{j}_3}^1 e_{\mathrm{j}_3}^1 + \zeta_{\mathrm{j}_3}^2 e_{\mathrm{j}_3}^2 \\
&= w_1 i_1 + w_2 i_2 + w_3 i_3 + w_4 i_4
\end{aligned}$$

şeklinde olup burada $\zeta_{\mathrm{j}_1}^1, \zeta_{\mathrm{j}_1}^2 \in H_2$, $\zeta_{\mathrm{j}_2}^1, \zeta_{\mathrm{j}_2}^2, \zeta_{\mathrm{j}_3}^1, \zeta_{\mathrm{j}_3}^2 \in H\left(\mathrm{j}_1\right)$ ve $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}$ dır. Bu gösterimlerden faydalanarak sırasıyla idempotent e, s ve $t-$topolojilerini ve spektral temsili ile de farklı bir topoloji tanımlayalım.

4.3.1. İdempotent $e-$ topolojileri

$\zeta_{0,\mathrm{j}_l} \in H \quad (l=2,3)$ ve $\delta>0$ olmak üzere B^E, $D(\zeta_{0,\mathrm{j}_l},\delta)$ açık yuvarlarının ailesi olsun. B^E ailesi H cümlesindeki Öklidyen topoloji için bir topoloji tabanıdır. Böylece

$$\mathrm{B}^E \times \mathrm{B}^E = \left\{ D_1 \times D_2 \,\middle|\, D_1, D_2 \in \mathrm{B}^E \right\}$$

ailesi $H \times H$ üzerindeki bir topoloji için taban olup $H \times H \cong H_2$ olduğundan

$$\mathrm{B}^E_{I_{\mathrm{j}_l}} = \left\{ D_1 \times_{I_{\mathrm{j}_l}} D_2 \,\middle|\, D_1, D_2 \in \mathrm{B}^E,\ l=2,3 \right\}$$

ailesi de H_2 cümlesi üzerindeki Öklidyen topoloji için bir tabandır. Burada $D_1 \times_{I_{\mathrm{j}_l}} D_2$ idempotent kartezyen çarpımı

$$\begin{aligned} D_1 \times_{I_{\mathrm{j}_l}} D_2 &= D_1\left(\zeta^1_{0,\mathrm{j}_l},\delta_1\right) \times_{I_{\mathrm{j}_l}} D_2\left(\zeta^2_{0,\mathrm{j}_l},\delta_2\right) \\ &= \left\{ \zeta = \zeta^1_{\mathrm{j}_l} e^1_{\mathrm{j}_l} + \zeta^2_{\mathrm{j}_l} e^2_{\mathrm{j}_l} \,\middle|\, \left\|\zeta^1_{\mathrm{j}_l} - \zeta^1_{0,\mathrm{j}_l}\right\| < \delta_1,\ \left\|\zeta^2_{\mathrm{j}_l} - \zeta^2_{0,\mathrm{j}_l}\right\| < \delta_2,\ l=2,3 \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. $\mathrm{B}^E_{I_{\mathrm{j}_l}}$ tabanının H_2 cümlesi üzerinde ürettiği topolojiye idempotent $e-$ topolojisi denir ve $\tau^E_{I_{\mathrm{j}_l}}$ ile gösterilir.

4.3.2. İdempotent $s-$ topolojileri

$\zeta_{0,\mathrm{j}_l} \in H \quad (l=2,3)$, $\delta>0$ olmak üzere $D(\zeta_{0,\mathrm{j}_l},\delta)$ açık yuvarlarının ailesi B^E ile gösterilsin. Böylece ζ_{0,j_l} merkezli, $\delta>0$ yarıçaplı $s-$ yuvar

$$D\left(\zeta_{0,\mathrm{j}_l},\delta\right) \cap SH\left(\zeta_{0,\mathrm{j}_l}\right) = D^S\left(\zeta_{0,\mathrm{j}_l},\delta\right)$$

şeklinde elde edilir. $\zeta_{0,\mathrm{j}_l} \in H$ ve $\delta>0$ reel sayısı için tüm $s-$ yuvarların ailesi B^S olsun. B^S, H için bir topoloji tabanıdır. Böylece

$$\mathrm{B}^S \times \mathrm{B}^S = \left\{ D^S_1 \times D^S_2 \,\middle|\, D^S_1, D^S_2 \in \mathrm{B}^S \right\}$$

cümlesi $H \times H$ üzerindeki bir topoloji için tabandır. $H_2 \cong H \times H$ olduğu için

$$\begin{aligned} D_1^S \times_{I_{j_l}} D_2^S &= D_1^S\left(\zeta_{0,j_l}^1, \delta_1\right) \times_{I_{j_l}} D_2^S\left(\zeta_{0,j_l}^2, \delta_2\right) \\ &= \left\{ \zeta = \zeta_{j_l}^1 e_{j_l}^1 + \zeta_{j_l}^2 e_{j_l}^2 \,\middle|\, \zeta_{j_l}^1 \in D_1^S,\ \zeta_{j_l}^2 \in D_2^S,\ l = 2,3 \right\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathrm{B}_{I_{j_l}}^S = \left\{ D_1^S \times_{I_{j_l}} D_2^S \,\middle|\, D_1^S, D_2^S \in \mathrm{B}^S,\ l = 2,3 \right\}$$

ailesi H_2 cümlesi üzerindeki bir topolojinin tabanıdır. Bu tabanın H_2 cümlesi üzerinde ürettiği topolojiye idempotent $s-$topolojisi denir ve $\tau_{I_{j_l}}^S$ ile gösterilir.

4.3.3. İdempotent $t-$topolojileri

$\zeta_{0,j_l} \in H$ $(l = 2,3)$ ve $\delta > 0$ için $D\left(\zeta_{0,j_l}, \delta\right)$ açık yuvarlarının ailesi B^E olmak üzere ζ_{0,j_l} merkezli, $\delta > 0$ yarıçaplı $t-$yuvar

$$D\left(\zeta_{0,j_l}, \delta\right) \cap TH\left(\zeta_{0,j_l}\right) = D^T\left(\zeta_{0,j_l}, \delta\right)$$

olarak verilir. $\zeta_{0,j_l} \in H$ ve $\delta > 0$ reel sayısı için tüm $t-$yuvarların ailesi B^T olsun. B^T, H cümlesi için bir topoloji tabanıdır. Böylece

$$\mathrm{B}^T \times \mathrm{B}^T = \left\{ D_1^T \times D_2^T \,\middle|\, D_1^T, D_2^T \in \mathrm{B}^T \right\}$$

$H \times H$ üzerindeki bir topoloji için tabandır. O halde

$$\begin{aligned} D_1^T \times_{I_{j_l}} D_2^T &= D_1^T\left(\zeta_{0,j_l}^1, \delta_1\right) \times_{I_{j_l}} D_2^T\left(\zeta_{0,j_l}^2, \delta_2\right) \\ &= \left\{ \zeta = \zeta_{j_l}^1 e_{j_l}^1 + \zeta_{j_l}^2 e_{j_l}^2 \,\middle|\, \zeta_{j_l}^1 \in D_1^T,\ \zeta_{j_l}^2 \in D_2^T,\ l = 2,3 \right\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathrm{B}_{I_{j_l}}^T = \left\{ D_1^T \times_{I_{j_l}} D_2^T \,\middle|\, D_1^T, D_2^T \in \mathrm{B}^T,\ l = 2,3 \right\}$$

ailesi H_2 cümlesi üzerinde idempotent $t-$topolojisi olarak adlandırılan ve $\tau_{I_{j_l}}^{T}$ ile gösterilen bir topolojinin tabanı olur.

4.3.4. Bihiperbolik Sayıların Spektral Topolojisi

$\zeta \in H_2$ ve ζ bihiperbolik sayısının spektral temsili $\zeta = w_1 i_1 + w_2 i_2 + w_3 i_3 + w_4 i_4$, $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{R}$ olsun. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesinin alışılmış topolojisinin açık aralıklarını D ile gösterelim. D açık aralıklarının ailesi de B ile gösterilsin. Bu durumda D açık aralıklarının spektral kartezyen çarpımı

$$D_1 \times_U D_2 \times_U D_3 \times_U D_4 := \left\{ \zeta = w_1 i_1 + w_2 i_2 + w_3 i_3 + w_4 i_4 \,\middle|\, w_m \in D_m,\, m = 1,2,3,4 \right\}$$

olmak üzere

$$B_U = \left\{ D_1 \times_U D_2 \times_U D_3 \times_U D_4 \,\middle|\, D_m = (x_m - \delta_m, x_m + \delta_m),\, x_m, \delta_m \in \mathbb{R},\, \delta_m > 0,\, m = 1,2,3,4 \right\}$$

ailesi H_2 cümlesi üzerindeki bir topoloji için taban oluşturur. Bu topolojiye H_2 cümlesi üzerindeki spektral topoloji denir.

BÖLÜM 5. TOPOLOJİK BİHİPERBOLİK MODÜLLER

5.1. Temel Kavramlar

Reel ve kompleks vektör uzayları, topolojik vektör uzayları ve bu uzaylarda dengeli, konveks ve emen cümle kavramları uzun yıllardan bu yana bilinmektedir. Son yıllarda yayımlanan [32, 33, 34, 35] çalışmalarında da bikompleks modüller tanıtılmış, dengeli, konveks ve emen cümleler ve topolojik bikompleks modüller incelenmiştir. Diğer taraftan hiperbolik modül ve bu modülde konveks cümle kavramı [32] çalışmasında kısmen tanıtılmış olsa da dengeli ve emen cümleler incelenmemiş dahası topolojik hiperbolik modül, bihiperbolik modül ve topolojik bihiperbolik modül henüz çalışılmamıştır. Bu alt bölümde kısaca reel veya kompleks vektör uzayları için temel tanımlar verilecektir.

Tanım 5.1.1. $(F,+,\cdot)$ cisim ve $(X,\oplus)$ ikilisi bir değişmeli grup olsun. Her $\alpha,\beta\in F$ ve her $x,y\in X$ için

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\odot x &= \alpha\odot(\beta\odot x),\\ (\alpha+\beta)\odot x &= (\alpha\odot x)\oplus(\beta\odot x),\\ \alpha\odot(x\oplus y) &= (\alpha\odot x)\oplus(\alpha\odot y),\\ 1_F\odot x &= x\end{aligned}$$

özelliklerini sağlayan

$$\begin{aligned}\oplus : X\times X &\to X\\ (x,y)&\to x\oplus y\end{aligned}\quad \text{ve}\quad \begin{aligned}\odot : F\times X &\to X\\ (\alpha,x)&\to \alpha\odot x\end{aligned}$$

iç ve dış işlemleri ile verilen X cümlesine F cismi üzerinde bir vektör uzayı denir [30]. Bundan sonra $\alpha\odot x$, αx ile gösterilecektir.

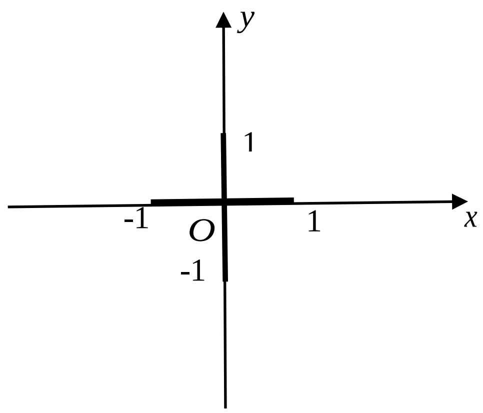
Eğer $F=\mathbb{R}$ ise X vektör uzayına reel vektör uzayı; $F=\mathbb{C}$ ise X vektör uzayına kompleks vektör uzayı denir.

F cümlesinin cisim yerine birimli ve değişmeli halka olması durumunda X cümlesine bu halka üzerinde bir modül denir.

Uyarı 5.1.1. Burada verilen modül kavramı cebirsel bir yapı olup bir sayının uzunluğunu belirten modül terimi ile karıştırılmamalıdır. Özel olarak, bir $(R,+,\cdot)$ birimli ve değişmeli halkası üzerinde tanımlanan bu modül $R-$modül olarak isimlendirilecektir.

Tanım 5.1.2. X , F (reel veya kompleks sayılar cümlesi) cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\varnothing \neq A \subseteq X$ alt cümlesini alalım. Eğer her $x\in A$ ve $|\lambda|\leq 1$ olan her $\lambda\in F$ için $\lambda x\in A$ oluyorsa yani $\lambda A:=\{\lambda x \mid x\in A\}$ olmak üzere $\lambda A\subseteq A$ ise A cümlesine dengeli (dairesel) cümle denir [44].

Örnek 5.1.1. $\mathbb{R}^2:=\{(x,y) \mid x\in\mathbb{R},\, y\in\mathbb{R}\}$ cümlesi $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. $\mathbb{R}^2$ uzayında bir $A:=\{(x,y) \mid y=0,\, x\in[-1,1] \text{ veya } x=0,\, y\in[-1,1]\}$ alt cümlesini alalım.



Şekil 5.1. Dengeli (dairesel) cümle [44]

Şekil 5.1'den de görülür ki her $(x,y)\in A$ ve her $|\lambda|\leq 1$ için $(\lambda x,\lambda y)\subseteq A$ olduğundan A cümlesi $\mathbb{R}^2$ uzayının dengeli (dairesel) alt cümlesidir.

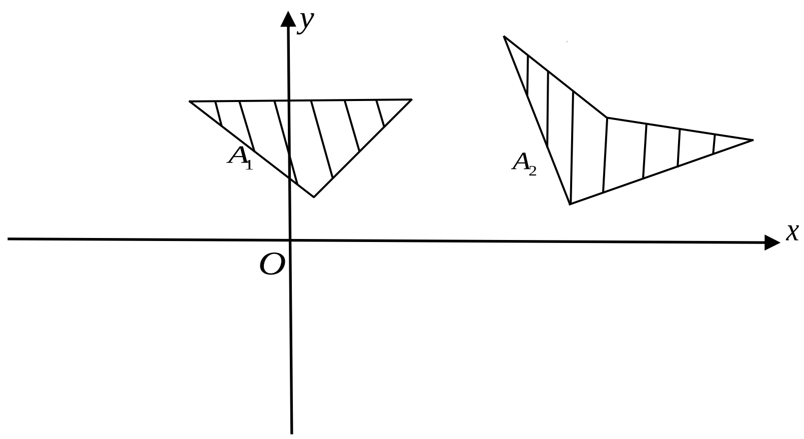
Örnek 5.1.2. $\mathbb{C}:=\{x+\mathrm{i}y \mid x,y\in\mathbb{R}, \mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}\notin\mathbb{R}\}$ kompleks sayılar cümlesi $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi ile birlikte bir vektör uzayıdır. $A:=\{x+\mathrm{i}y \mid x\in[-1,1] \text{ ve } y=0\}$ alt cümlesi bu vektör uzayının bir alt cümlesi olmasına rağmen dengeli bir alt cümlesi değildir. Çünkü $1+\mathrm{i}0\in A$ ve $|0+\mathrm{i}1|=\sqrt{0^2+1^2}=1\leq 1$ olduğu bilinen $0+\mathrm{i}1\in\mathbb{C}$ alındığında $(0+\mathrm{i}1)(1+\mathrm{i}0)=0+\mathrm{i}1\notin A$ dır.

Tanım 5.1.3. X, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\varnothing\neq A\subseteq X$ olsun. $x,y\in A$ iken x,y noktalarını birleştiren doğru parçası yine A cümlesine ait oluyorsa yani $0\leq t\leq 1$ için

$$(1-t)x+ty\in A$$

ise A cümlesine konveks cümle denir [44].

Örnek 5.1.3. $\mathbb{R}^2$ uzayında aşağıdaki iki alt cümleyi ele alalım.

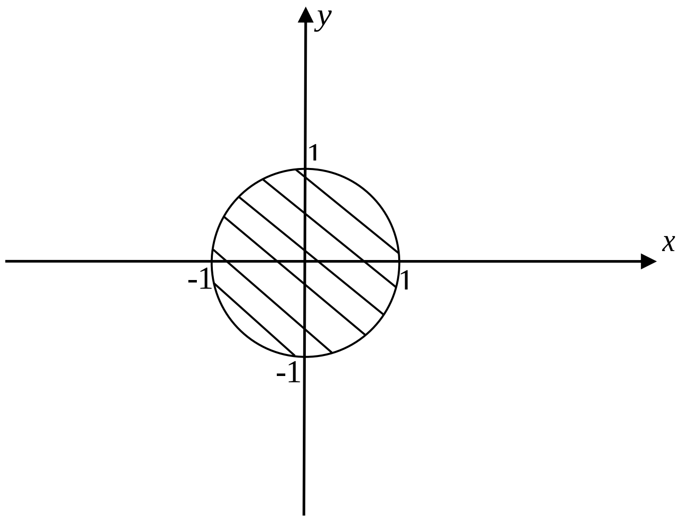


Şekil 5.2. Konveks ve konveks olmayan cümleler [44]

Burada A_1 cümlesi konveks iken A_2 cümlesi konveks değildir.

Tanım 5.1.4. X , F (reel veya kompleks sayılar cümlesi) cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\varnothing \neq A \subseteq X$ olsun. Her $x \in X$ için bazı $\lambda > 0$ reel sayısı, $|\mu| \geq \lambda$ olan bütün $\mu \in F$ skalerleri için $x \in \mu A$ oluyorsa A cümlesine emen ya da yutan cümle denir. Burada $\mu A := \{\mu a | \ a \in A\}$ şeklindedir [30].

Örnek 5.1.4. $\mathbb{R}^2$ reel vektör uzayında $A := \{(x, y) | \ x^2 + y^2 \leq 1, x, y \in \mathbb{R}\}$ alt cümlesini alalım.



Şekil 5.3. Emen (yutan) cümle

Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ skalerleri için $(x, y) \in \mu A$ iken $|\mu| \geq \lambda$ olacak şekilde $\lambda > 0$ reel sayısı var olduğundan A alt cümlesi bir emen alt cümledir.

Tanım 5.1.5. X , F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve τ , X cümlesi üzerinde bir topoloji olmak üzere $\oplus : X \times X \to X$ ve $\odot : F \times X \to X$ fonksiyonları sürekli ise (X, τ) ikilisine topolojik vektör uzayı denir. Eğer X , $R-$modül ise (X, τ) ikilisine topolojik $R-$modül denir [31].

$\mathbb{R}$, reel sayılar cümlesi ile $\mathbb{C}$, karmaşık sayılar cümlesi toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte birer cisimdir. Ancak toplama işleminin birim elemanı hariç çarpma işlemine göre tersi olmayan hiperbolik ve bihiperbolik sayılar var olduğundan $(H, +, \cdot)$ ve $(H_2, +, \cdot)$ üçlüleri cisim yapısına sahip değildir. Bu üçlülerin her biri birimli ve değişmeli halkadır. Özel olarak R halkasının H hiperbolik sayılar veya H_2 bihiperbolik sayılar halkası olması durumunda izotropik elemanların varlığı tüm tanım ve teoremlerin dikkatle incelenmesini gerektirmektedir.

5.2. Topolojik Hiperbolik Modüller

Tanım 5.2.1. $(H,+,\cdot)$ birimli, değişmeli hiperbolik sayılar halkası ve $(X,\oplus)$ ikilisi bir değişmeli grup olsun. Her $z_1,z_2\in H$ ve her $u,v\in X$ için

$$\begin{aligned}(z_1z_2)\odot u &= z_1\odot(z_2\odot u),\\ (z_1+z_2)\odot u &= (z_1\odot u)\oplus(z_2\odot u),\\ z_1\odot(u\oplus v) &= (z_1\odot u)\oplus(z_1\odot v),\\ 1_H\odot u &= u,\quad (1_H=1+\mathrm{j}_1 0=1)\end{aligned}$$

özelliklerini sağlayan

$$\begin{aligned}\oplus: X\times X &\to X\\ (u,v) &\to u+v\end{aligned}\quad \text{ve}\quad \begin{aligned}\odot: H\times X &\to X\\ (z,u) &\to z\odot u\end{aligned}$$

iç ve dış işlemleri ile verilen $(X,H,\oplus,\odot,+,\cdot)$ altılısına bir $H-$modül denir. Bundan sonra $z\odot u$, zu olarak gösterilecektir.

Örnek 5.2.1. H hiperbolik sayılar cümlesi üzerinde

$$\begin{aligned}+&: H\times H\to H\\ \cdot\ &: H\times H\to H\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı toplama ve çarpma işlemlerini alalım. Bu durumda $(H,+)$ ikilisi bir değişmeli gruptur. Ayrıca her $z_1,z_2,z_3\in H$ için

$$\begin{aligned}(z_1z_2)z_3 &= z_1(z_2z_3),\\ (z_1+z_2)z_3 &= z_1z_3+z_2z_3,\\ z_1(z_2+z_3) &= z_1z_2+z_1z_3,\\ 1\,z_3 &= z_3\end{aligned}$$

olduğundan H kendi üzerinde bir modüldür. Dolayısıyla kendi üzerinde modül olduğundan H bir serbest $H-$modüldür.

Örnek 5.2.2. H_2 bihiperbolik sayılar cümlesi üzerinde

$$\begin{aligned} + &: H_2 \times H_2 \to H_2 \\ \cdot &: H \times H_2 \ \ \to H_2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı toplama ve çarpma işlemlerini alalım. Bu durumda $(H_2,+)$ ikilisi bir değişmeli gruptur. Ayrıca her $z_1, z_2 \in H$ ve her $\zeta_1, \zeta_2 \in H_2$ için

$$\begin{aligned} (z_1 z_2)\zeta_1 &= z_1(z_2\zeta_1), \\ (z_1 + z_2)\zeta_1 &= z_1\zeta_1 + z_2\zeta_1, \\ z_1(\zeta_1 + \zeta_2) &= z_1\zeta_1 + z_1\zeta_2, \\ 1\zeta_1 &= \zeta_1 \end{aligned}$$

olduğundan H_2 bir $H-$modüldür. Ayrıca $\{1, \mathrm{j}_2\}$ sistemi H_2 bihiperbolik sayılar cümlesini üreten tabanlardan biri olup her $\zeta \in H_2$ elemanı için $\zeta = z_1 + \mathrm{j}_2 z_2$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in H$ vardır. O halde H_2 bir serbest $H-$modüldür.

Örnek 5.2.3. $n \in \mathbb{Z}^+$ için H_n multihiperbolik sayılar cümlesi üzerinde

$$\begin{aligned} + &: H_n \times H_n \to H_n \\ \cdot &: H \times H_n \ \ \to H_n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte H_n bir $H-$modüldür.

Uyarı 5.2.1. $\cdot : H \times \mathbb{R} \to H$ olduğundan $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi, $H-$modül değildir.

Bir hiperbolik sayı cümlesindeki izotropik sayıların varlığından dolayı ortaya çıkan birim yuvarların üç farklı şekilde olması $H-$modülde yeni üç farklı dengeli (dairesel) cümle tanımını zorunlu kılmıştır. $|\lambda|_H = \sqrt{|\lambda\bar{\lambda}|} = \sqrt{|\lambda_1^2 - \lambda_2^2|} \leq 1$ koşulunu sağlayan her $\lambda=\lambda_1+\mathrm{j}_1\lambda_2\in H$ sayısı için var olan üç farklı durum göz önüne alınarak aşağıdaki tanım verilmiştir.

Tanım 5.2.2. X bir $H-$modül, $\varnothing\neq B\subseteq X$ ve $\lambda=\lambda_1+\mathrm{j}_1\lambda_2\in H$ hiperbolik sayısı olsun.

a. $\lambda_1^2-\lambda_2^2\leq 1$ olacak şekilde her $\lambda\in SH\left(O\right)$ için $\lambda B\subseteq B$ oluyorsa B cümlesine $SH-$dengeli cümle,

b. $\lambda_1^2-\lambda_2^2=0$ olacak şekilde her λ için (yani her $\lambda\in NH\left(O\right)$ için) $\lambda B\subseteq B$ oluyorsa B cümlesine $NH-$dengeli cümle,

c. $-1\leq\lambda_1^2-\lambda_2^2$ olacak şekilde her $\lambda\in TH\left(O\right)$ için $\lambda B\subseteq B$ oluyorsa B cümlesine $TH-$dengeli cümle denir.

Burada $SH\left(O\right), NH\left(O\right)$ ve $TH\left(O\right)$ cümleleri H hiperbolik sayılar cümlesinin sırasıyla, orijin merkezli uzay konisi, ışık konisi ve zaman konisidir.

Örnek 5.2.4. H, $H-$modülünde $SH\left(O\right)\subseteq H$ alt cümlesini alalım. Bu durumda $\lambda=\lambda_1+\mathrm{j}_1\lambda_2\in H$ hiperbolik sayısı $\left|\lambda\right|_H\leq 1$ şeklinde olmak üzere $\lambda\in SH\left(O\right)$ olan her $\lambda=\lambda_1+\mathrm{j}_1\lambda_2\in H$ sayısı ve her $z=x+\mathrm{j}_1 y\in SH\left(O\right)$ için

$$\lambda z=\lambda_1 x+\lambda_2 y+\mathrm{j}_1\left(\lambda_1 y+\lambda_2 x\right)$$

olup $\lambda\overline{\lambda}=\lambda_1^2-\lambda_2^2\geq 0$ ve $z\overline{z}=x^2-y^2\geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left(\lambda z\right)\overline{\left(\lambda z\right)}&=\left(\lambda_1 x+\lambda_2 y\right)^2-\left(\lambda_1 y+\lambda_2 x\right)^2\\&=\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)\left(x^2-y^2\right)\geq 0\end{aligned}$$

elde edilir ve bu durumda $\lambda z\in SH\left(O\right)$ olduğu görülür. Ayrıca $z\in SH\left(O\right)$ iken

$\lambda z \in \lambda SH(O)$ dir. Böylece $\lambda z \in \lambda SH(O)$ iken $\lambda z \in SH(O)$ olduğu için $\lambda SH(O) \subseteq SH(O)$ elde edilir. Yani $SH(O) \subseteq H$ alt cümlesi $SH-$dengeli cümledir. Ancak sırasıyla $\lambda \in TH(O)$ ve $\lambda \in NH(O)$ alınırsa $z \in SH(O)$ iken $\lambda z \in TH(O)$ ve $\lambda z \in NH(O)$ olduğu görülür. Bu iki durumda da $\lambda SH(O) \not\subset SH(O)$ olup $SH(O)$ alt cümlesi $TH-$dengeli ve $NH-$dengeli cümle değildir.

Örnek 5.2.5. H, $H-$modülünde $NH(O) \subseteq H$ alt cümlesini alalım. Dengeli cümle tanımındaki üç durumun birleşimi olan yani $|\lambda|_H \leq 1$ olan herhangi $\lambda = \lambda_1 + \mathrm{j}_1\lambda_2 \in H$ sayısı ve her $z = x \mp \mathrm{j}_1 x \in NH(O)$ sayısı için $\lambda z = (\lambda_1 x \mp \lambda_2 x) + \mathrm{j}_1(\lambda_1 x \mp \lambda_2 x)$ ve $(\lambda z)\overline{(\lambda z)} = 0$ olur. Bu durumda $\lambda z \in NH(O)$ dır. Böylece $\lambda z \in \lambda NH(O)$ iken $\lambda z \in NH(O)$ olduğu için $\lambda NH(O) \subseteq NH(O)$ elde edilir. Dolayısıyla $NH(O)$ cümlesi aynı anda TH, NH ve $SH-$ dengeli cümledir.

Örnek 5.2.6. H, $H-$modülünde $TH(O) \subseteq H$ alt cümlesini alalım. $\lambda \in H$ hiperbolik sayısı $|\lambda|_H \leq 1$ şeklinde olmak üzere her $\lambda = \lambda_1 + \mathrm{j}_1\lambda_2 \in SH(O)$ ve her $z = x + \mathrm{j}_1 y \in TH(O)$ sayıları için

$$\lambda z = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \mathrm{j}_1(\lambda_1 y + \lambda_2 x)$$

biçimindedir. Aynı zamanda λz çarpımının hiperbolik eşleniği ile çarpımı

$$\begin{aligned}(\lambda z)\overline{(\lambda z)} &= (\lambda_1 x + \lambda_2 y)^2 - (\lambda_1 y + \lambda_2 x)^2 \\ &= (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(x^2 - y^2)\end{aligned}$$

şeklindedir. $\lambda \in SH(O)$ ve $z \in TH(O)$ olduğundan $\lambda\overline{\lambda} = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \geq 0$ ve $z\overline{z} = x^2 - y^2 \leq 0$ olur ve böylece $\lambda z \in TH(O)$ elde edilir. $\lambda z \in \lambda TH(O)$ iken $\lambda z \in TH(O)$ olduğundan $\lambda TH(O) \subseteq TH(O)$ kapsaması mevcuttur. Dolayısıyla

$TH(O) \subseteq H$ alt cümlesi $SH-$dengeli cümledir. Ancak her $\lambda \in TH(O)$ ve her $z \in TH(O)$ sayıları için $\lambda\bar{\lambda} = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \leq 0$ ve $z\bar{z} = x^2 - y^2 \leq 0$ olduğundan $\lambda z \in SH(O)$ elde edilir ve böylece $\lambda TH(O) \not\subset TH(O)$ olur. Dolayısıyla $TH(O)$ alt cümlesi $TH-$dengeli cümle değildir. Diğer taraftan her $\lambda \in NH(O)$ ve her $z \in TH(O)$ sayıları için $\lambda z \in NH(O)$ olduğu için $\lambda TH(O) \not\subset TH(O)$ olur ve böylece $TH(O)$ alt cümlesi $NH-$dengeli cümle de değildir.

X $H-$modülünde, H hiperbolik sayılar cümlesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlanarak $H-$konveks cümle tanımı [32]'de verilmiştir öyle ki X bir $H-$modül ve $\emptyset \neq B \subseteq X$ iken her $x, y \in B$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olacak şekildeki her $\lambda \in H^+$ hiperbolik sayısı için eğer $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$ oluyorsa B cümlesine $H-$ konveks cümle denir. Ancak, bu çalışmada özel olarak $X = H$, $H-$modülü incelenmiştir. Böylece bu H, $H-$modülde geometrik açıdan da anlamlı olan üç farklı konveks cümle tanımı ilk kez aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 5.2.3. H hiperbolik sayılar cümlesi $H-$modül ve $B \subseteq H$ olsun. Her $x, y \in B$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ reel sayısı $0 \leq \lambda \leq 1$ olacak şekilde alındığında eğer

a. $y \in SH(x)$ ve $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$ oluyorsa B cümlesine $SH-$konveks cümle,

b. $y \in NH(x)$ ve $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$ oluyorsa B cümlesine $NH-$konveks cümle,

c. $y \in TH(x)$ ve $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$ oluyorsa B cümlesine $TH-$konveks cümle denir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi hiperbolik sayılar cümlesinin bir alt cümlesinin konveksliği için klasik anlamda konvekslik geçerlidir. Ancak buna ek olarak cümlenin farklı her iki elemanını birleştiren doğru parçalarının hiperbolik sayılar cümlesinde tanımlanan uzay konisi, ışık konisi veya zaman konisinden birine ait olmaları durumuna göre üç farklı konvekslik çeşidi ortaya konulmuştur.

Tanım 5.2.4. X bir $H-$modül ve $\varnothing \neq B \subseteq X$ olsun. Her $x \in X$ için bazı $\lambda > 0$ reel sayısı, $|\mu|_H \geq \lambda$ olan bütün $\mu \in H$ skalerleri için,

a. $\mu \in SH(O)$ iken $x \in \mu B$ oluyorsa B cümlesine $SH-$emen cümle,

b. $\mu \in TH(O)$ iken $x \in \mu B$ oluyorsa B cümlesine $TH-$emen cümle denir.

Tanım 5.2.5. X bir $H-$modül ve τ, X cümlesi üzerinde bir Hausdorff topoloji olsun. Eğer

$$+: X \times X \to X$$
$$\cdot : H \times X \to X$$

fonksiyonları sürekli ise (X, τ) ikilisine topolojik hiperbolik modül veya topolojik $H-$modül denir.

5.3. Topolojik Bihiperbolik Modüller

Tanım 5.3.1. H_2 bihiperbolik sayılar cümlesi üzerinde

$$+: H_2 \times H_2 \to H_2$$
$$\cdot : H_2 \times H_2 \to H_2$$

şeklinde tanımlı toplama ve çarpma işlemlerini alalım. Bu durumda $(H_2, +)$ ikilisi bir değişmeli gruptur. Ayrıca ikinci işlem olan çarpma işlemi H_2 cümlesinde birleşimli, birinci işlem üzerine sağdan ve soldan dağılımlı olduğu için $(H_2, +, \cdot)$ üçlüsü bir halkadır. Üstelik $1_{H_2} = 1 + \mathrm{j}_1 0 + \mathrm{j}_2 0 + \mathrm{j}_3 0 = 1$ elemanı H_2 halkasının çarpma işlemine göre birim elemanıdır. Öyle ki $1_{H_2}\zeta = \zeta$ olur. Diğer taraftan bihiperbolik sayılar cümlesi çarpma işlemine göre değişmelidir. Dolayısıyla $(H_2, +, \cdot)$ halkası birimli ve değişmelidir.

Tanım 5.3.2. X boştan farklı bir cümle ve H_2 bihiperbolik sayılar halkası olmak üzere toplama ve skalerle çarpma işlemleri

$$\begin{aligned} +: X \times X &\to X \\ \cdot : H_2 \times X &\to X \end{aligned}$$

biçiminde olsun. Eğer $(X,+)$ ikilisi değişmeli grup ve her $\zeta_1, \zeta_2 \in H_2$ ile her $u, v \in X$ için

$$\begin{aligned} (\zeta_1\zeta_2)u &= \zeta_1(\zeta_2 u), \\ (\zeta_1+\zeta_2)u &= \zeta_1 u + \zeta_2 u, \\ \zeta_1(u+v) &= \zeta_1 u + \zeta_2 v, \\ 1u &= u \end{aligned}$$

özellikleri sağlanıyorsa X cümlesine H_2 birimli ve değişmeli halkası üzerinde bir modül denir. Kısaca X bir H_2-modüldür.

Örnek 5.3.1. H_2 bihiperbolik sayılar cümlesi bir H_2-modüldür.

Örnek 5.3.2. $n \in \{2,3,4,\ldots\}$ için H_n bir multihiperbolik sayılar cümlesi üzerinde

$$\begin{aligned} +: H_n \times H_n &\to H_n \\ \cdot : H_2 \times H_n &\to H_n \end{aligned}$$

şeklinde işlemler ile birlikte bir H_2-modüldür.

H_2 bihiperbolik sayılar cümlesinin bazı yapısal özellikleri herhangi X, H_2- modülünde de vardır. Bunu aşağıdaki önerme ile ifade edelim.

Teorem 5.3.1. X bir H_2-modül ise $s=1,2,3$ için $X = e^1_{\mathrm{j}_s} X + e^2_{\mathrm{j}_s} X$ şeklinde yazılabilir.

İspat. X bir H_2-modül olsun. $x \in X$ ve $s = 1,2,3$ olmak üzere $e_{\mathrm{j}_s}^1$ ve $e_{\mathrm{j}_s}^2$ idempotent bileşenleri için $e_{\mathrm{j}_s}^1 + e_{\mathrm{j}_s}^2 = 1$ olduğundan

$$x = \left(e_{\mathrm{j}_s}^1 + e_{\mathrm{j}_s}^2\right)x = e_{\mathrm{j}_s}^1 x + e_{\mathrm{j}_s}^2 x$$

elde edilir. Bu durumda $X = e_{\mathrm{j}_s}^1 X + e_{\mathrm{j}_s}^2 X$ yazılabilmektedir.

Burada $e_{\mathrm{j}_s}^1 X = X_{\mathrm{j}_s}^1$ ve $e_{\mathrm{j}_s}^2 X = X_{\mathrm{j}_s}^2$ demek suretiyle $X = X_{\mathrm{j}_s}^1 + X_{\mathrm{j}_s}^2$ şeklinde de gösterilmektedir.

Sonuç 5.3.1. X bir H_2-modül olsun. Bu durumda $s = 1,2,3$ için $e_{\mathrm{j}_s}^1 X = e_{\mathrm{j}_s}^1 X_{\mathrm{j}_s}^1$ ve $e_{\mathrm{j}_s}^2 X = e_{\mathrm{j}_s}^2 X_{\mathrm{j}_s}^2$ eşitlikleri vardır.

İspat. $e_{\mathrm{j}_s}^1$ ve $e_{\mathrm{j}_s}^2$ idempotent bileşenler olduğu için $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\left(e_{\mathrm{j}_s}^1\right)^n = e_{\mathrm{j}_s}^1$ ve $\left(e_{\mathrm{j}_s}^2\right)^n = e_{\mathrm{j}_s}^2$ dir. O halde $e_{\mathrm{j}_s}^1 X = X_{\mathrm{j}_s}^1$ iken $e_{\mathrm{j}_s}^1\left(e_{\mathrm{j}_s}^1 X\right) = e_{\mathrm{j}_s}^1 X_{\mathrm{j}_s}^1$ olup buradan $e_{\mathrm{j}_s}^1 X = e_{\mathrm{j}_s}^1 X_{\mathrm{j}_s}^1$ olduğu görülür. Benzer şekilde $e_{\mathrm{j}_s}^2 X = X_{\mathrm{j}_s}^2$ iken $e_{\mathrm{j}_s}^2\left(e_{\mathrm{j}_s}^2 X\right) = e_{\mathrm{j}_s}^2 X_{\mathrm{j}_s}^2$ olup buradan $e_{\mathrm{j}_s}^2 X = e_{\mathrm{j}_s}^2 X_{\mathrm{j}_s}^2$ elde edilir.

Burada, $e_{\mathrm{j}_s}^1$ ve $e_{\mathrm{j}_s}^2$ hiperbolik sayıları idempotent bileşenler olduğundan $t \in e_{\mathrm{j}_s}^1 X = e_{\mathrm{j}_s}^1 X_{\mathrm{j}_s}^1$ alındığında bir $x \in X$ vardır öyle ki $t = e_{\mathrm{j}_s}^1 x$ iken

$$e_{\mathrm{j}_s}^1 t = e_{\mathrm{j}_s}^1\left(e_{\mathrm{j}_s}^1 x\right) = \left(e_{\mathrm{j}_s}^1\right)^2 x = e_{\mathrm{j}_s}^1 x = t$$

dir. Benzer şekilde $t \in e_{\mathrm{j}_s}^2 X = e_{\mathrm{j}_s}^2 X_{\mathrm{j}_s}^2$ alındığında da $e_{\mathrm{j}_s}^2 t = t$ eşitliği vardır. Bu eşitlikler $e_{\mathrm{j}_s}^1 X_{\mathrm{j}_s}^1$ ve $e_{\mathrm{j}_s}^2 X_{\mathrm{j}_s}^2$ cümlelerinin elemanlarını karakterize eder. Öyle ki; $t \in e_{\mathrm{j}_s}^1 X_{\mathrm{j}_s}^1$ olması için gerek ve yeter şart $e_{\mathrm{j}_s}^1 t = t$ ve $t \in e_{\mathrm{j}_s}^2 X_{\mathrm{j}_s}^2$ olması için gerek ve yeter şart $e_{\mathrm{j}_s}^2 t = t$ olmasıdır.

Sonuç 5.3.2. X bir H_2-modül olsun. Bu durumda $s=1,2,3$ için

$$X=e^1_{\mathrm{j}_s}X^1_{\mathrm{j}_s}+e^2_{\mathrm{j}_s}X^2_{\mathrm{j}_s}$$

şeklinde yazılır.

Sonuç 5.3.3. $s=1,2,3$ için $X^1_{\mathrm{j}_s}$ ve $X^2_{\mathrm{j}_s}$ alt cümleleri X, H_2-modülünün H_2-alt modülleridir.

İspat. X H_2-modülünün $s=1,2,3$ için $X^1_{\mathrm{j}_s}$ alt cümlesini alalım. $t_1,t_2\in X^1_{\mathrm{j}_s}$ olsun. Bu durumda $t_1=e^1_{\mathrm{j}_s}x$ ve $t_2=e^1_{\mathrm{j}_s}y$ olan $x,y\in X$ vardır. X bir H_2-modül olduğundan $(X,+)$ ikilisi değişmeli gruptur. Böylece $x-y\in X$ vardır. Böylece $t_1-t_2=e^1_{\mathrm{j}_s}x-e^1_{\mathrm{j}_s}y=e^1_{\mathrm{j}_s}(x-y)\in e^1_{\mathrm{j}_s}X=X^1_{\mathrm{j}_s}$ olur. Diğer yandan $\zeta\in H_2$ ve $t\in X^1_{\mathrm{j}_s}$ alalım. $\zeta t=\left(\zeta^1_{\mathrm{j}_s}e^1_{\mathrm{j}_s}+\zeta^2_{\mathrm{j}_s}e^2_{\mathrm{j}_s}\right)\left(e^1_{\mathrm{j}_s}x\right)=\zeta^1_{\mathrm{j}_s}e^1_{\mathrm{j}_s}x=\zeta^1_{\mathrm{j}_s}t$ olup X bir H_2-modül olduğundan $\zeta^1_{\mathrm{j}_s}x\in X$ olur ve böylece $\zeta t=e^1_{\mathrm{j}_s}\zeta^1_{\mathrm{j}_s}x\in e^1_{\mathrm{j}_s}X=X^1_{\mathrm{j}_s}$ elde edilir. Buradan $X^1_{\mathrm{j}_s}$ H_2-alt modüldür. Benzer şekilde $X^2_{\mathrm{j}_s}$ cümlesi de X, H_2-modülünün H_2-alt modülüdür.

Özel olarak $s=2,3$ için $\zeta^1_{\mathrm{j}_s},\zeta^2_{\mathrm{j}_s}\in H$ olduğundan $X^1_{\mathrm{j}_s}$ ve $X^2_{\mathrm{j}_s}$ alt cümleleri, X H_2-modülünün $H-$alt modülü de olmaktadır.

Sonuç 5.3.4. $s=1,2,3$ için $e^1_{\mathrm{j}_s}H_2$ ve $e^2_{\mathrm{j}_s}H_2$ alt cümleleri H_2-modüldür, özel olarak $s=2,3$ için de $H-$modüldür.

Tanım 5.3.3. X, bir H_2-modül olsun. Bu durumda eğer $\{x_l : l=1,\ldots,n\}\subseteq X$ sonlu H_2-bazı varsa X uzayına serbest H_2-modül denir. Böylece X, serbest H_2-modülü

$$X=\left\{x \,\middle|\, x=\sum_{l=1}^{n}\zeta_l x_l,\ \zeta_l\in H_2, x_l\in X\right\}$$

olarak yazılabilmektedir.

Tanım 5.3.4. X bir serbest H_2-modül olsun. Bu durumda

$$A:=\left\{\tilde{x} \mid \tilde{x}=\sum_{l=1}^{n}\zeta_l x_l,\ \zeta_l\in H, x_l\in X\right\}\subseteq X$$

alt cümlesine X uzayının H_2-bazına bağlı bir serbest $H-$modül denir.

Burada X, serbest H_2-modülünün herhangi bir A alt cümlesinin elemanları $\{x_l : l=1,\ldots,n\}\subseteq X$ sonlu bazının lineer kombinasyonu şeklinde yazıldığında katsayılar bihiperbolik sayı olursa A alt cümlesine X uzayının H_2-bazına bağlı bir serbest H_2-modül denir.

Örnek 5.3.3. H_2, H_2-modülünde her eleman $s=1,2,3$ için $e^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s}$ idempotent bileşenlerinin lineer birleşimi şeklinde tek türlü yazılabilmektedir. Öyle ki her $\zeta\in H_2$ için $\zeta=\zeta^1_{j_s}e^1_{j_s}+\zeta^2_{j_s}e^2_{j_s}$ olarak yazılabilir. Ayrıca $\left\{e^1_{j_s},e^2_{j_s}\right\}$ cümlesi lineer bağımsızdır. Bundan dolayı $\left\{e^1_{j_s},e^2_{j_s}\right\}\subseteq H_2$ alt cümlesi H_2, H_2-modülünün bir tabanıdır. Burada $s=1$ için $\zeta^1_{j_s},\zeta^2_{j_s}\in H_2$ ve $s=2,3$ için $\zeta^1_{j_s},\zeta^2_{j_s}\in H$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda H_2, $s=1$ için serbest H_2-modül ve $s=2,3$ için ise H_2-bazına göre serbest $H-$modüldür.

Şimdi bir H_2-modülün herhangi bir alt cümlesinin dengeli, konveks ya da emen cümle olması için gerekli şartları verelim. Burada belirtilen tanımların verilebilmesi için alınan modül yapısının tanımlı olduğu halka üzerinde reel değerli bir norm var olması gerekir. H_2-modülünde $k=1,2,3$ için $M_k\subseteq H_2$ hiperyüzeyleri üzerinde reel değerli normlar var olduğundan M_k hiperyüzeylerinden alınan elemanlar kullanılarak ilgili tanımlar verilecek ve teoremler ispatlanacaktır.

$M_k \subseteq H_2$ hiperyüzeylerinde ışık konisinin varlığından dolayı H_2-modül üzerinde yeni üç farklı dengeli (dairesel) cümle, konveks cümle ve iki farklı emen (yutan) cümle tanımı ortaya çıkmıştır.

Öncelikle, $|\zeta|_{j_k} = \sqrt{\left|\zeta\overline{\zeta}^{j_k}\right|} \leq 1$ koşulunu sağlayan her $\zeta \in M_k \subseteq H_2$ bihiperbolik sayısı için var olan üç farklı durum göz önüne alınarak aşağıdaki dengeli (dairesel) cümle tanımı verilmiştir.

Tanım 5.3.5. X bir H_2-modül, $\varnothing \neq B \subseteq X$ ve $\zeta \in M_k \subseteq H_2$ $(k = 1,2,3)$ olsun.

a. $\zeta\overline{\zeta}^{j_k} \leq 1$ olacak şekilde her $\zeta \in SM_k(O)$ için $\zeta B \subseteq B$ oluyorsa B cümlesine SM_k-dengeli cümle,

b. $\zeta\overline{\zeta}^{j_k} = 0$ olacak şekilde her ζ için (yani her $\zeta \in NM_k(O)$ için) $\zeta B \subseteq B$ oluyorsa B cümlesine NM_k-dengeli cümle,

c. $-1 \leq \zeta\overline{\zeta}^{j_k}$ olacak şekilde her $\zeta \in TM_k(O)$ için $\zeta B \subseteq B$ oluyorsa B cümlesine TM_k-dengeli cümle denir.

Burada $SM_k(O)$, $NM_k(O)$ ve $TM_k(O)$ cümleleri M_k hiperyüzeylerinin sırasıyla, orijin merkezli uzay konisi, ışık konisi ve zaman konisidir.

Teorem 5.3.2. X bir H_2-modül ve B cümlesi de SM_k-dengeli veya TM_k-dengeli alt cümlesi $k = 1,2,3$ olsun. Bu durumda,

a. $|\zeta|_{j_k} = 1$ olan her $\zeta \in M_k \subseteq H_2$ için $\zeta B = B$ olur.

b. $|\zeta|_{j_k} \neq 0$ olan her $\zeta \in M_k \subseteq H_2$ için $\zeta B = |\zeta|_{j_k} B$ olur.

İspat.

a. Kabul edelim ki $\zeta \in M_k$ ve $|\zeta|_{j_k} = 1$ olsun. B cümlesi SM_k-dengeli veya TM_k-dengeli cümle olduğu için $\zeta B \subseteq B$ vardır. Diğer taraftan

$$\left|\frac{1}{\zeta}\right|_{j_k} = \frac{1}{|\zeta|_{j_k}} = 1$$

olduğu için $\frac{1}{\zeta} B \subseteq B$ kapsaması vardır. Böylece $B \subseteq \zeta B$ olup çift yönlü kapsamadan dolayı $\zeta B = B$ eşitliği elde edilir.

b. Herhangi $|\zeta|_{j_k} \neq 0$ olan $\zeta \in M_k$ alalım. Bu durumda

$$\left|\frac{\zeta}{|\zeta|_{j_k}}\right|_{j_k} = 1$$

olup (a) şıkkından

$$\frac{\zeta}{|\zeta|_{j_k}} B = B$$

olduğu görülür. Böylece $\zeta B = |\zeta|_{j_k} B$ elde edilir.

Teorem 5.3.3. X bir H_2-modül ve $k = 1, 2, 3$ olmak üzere B cümlesi SM_k- dengeli alt cümlesi olsun. Bu durumda,

a. $s = k = 1$ için $e^1_{j_s} B = B^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s} B = B^2_{j_s}$ cümleleri, sırasıyla; $e^1_{j_s} X = X^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s} X = X^2_{j_s}$, H_2-modüllerinin SM_k-dengeli alt cümleleridir.

b. $s,k=2,3$ ve $s=k$ için $e^1_{j_s}B=B^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s}B=B^2_{j_s}$ cümleleri, sırasıyla; $e^1_{j_s}X=X^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s}X=X^2_{j_s}$, $H-$modüllerinin $SH-$dengeli alt cümleleridir.

İspat.

a. Kabul edelim ki X bir H_2-modül ve $k=1$ için B cümlesi de SM_k-dengeli alt cümlesi olsun. Bu durumda her $x\in B$ ve her $\zeta\overline{\zeta}^{j_k}\leq 1$ olan $\zeta\in SM_k(O)$ elemanı için $\zeta x\in B$ olmalıdır. $s=1$ için $\zeta=\zeta^1_{j_s}e^1_{j_s}+\zeta^2_{j_s}e^2_{j_s}$ olarak alındığında $e^1_{j_s}\zeta=e^1_{j_s}\left(\zeta^1_{j_s}e^1_{j_s}+\zeta^2_{j_s}e^2_{j_s}\right)=e^1_{j_s}\zeta^1_{j_s}$ olup Sonuç 3.5.4'ten $\zeta^1_{j_s}\in M_k\subseteq H_2$ elemanı $\zeta^1_{j_s}\in SM_k(O)$ ve $\zeta^1_{j_s}\overline{\left(\zeta^1_{j_s}\right)}^{j_k}\leq 1$ şeklindedir. $x\in B$ olduğundan $t\in e^1_{j_s}B^1_{j_s}=e^1_{j_s}B$ elemanı $t=e^1_{j_s}x$ olacak şekilde mevcuttur. Bu durumda $\zeta^1_{j_s}t=\zeta^1_{j_s}e^1_{j_s}x=e^1_{j_s}\zeta^1_{j_s}x=e^1_{j_s}\zeta x\in e^1_{j_s}B=e^1_{j_s}B^1_{j_s}$ elde edilir. O halde $e^1_{j_s}B^1_{j_s}$ cümlesi $e^1_{j_s}X^1_{j_s}$ H_2-modülünün SM_k-dengeli alt cümlesidir. Benzer şekilde $s=k=1$ için $e^2_{j_s}X=X^2_{j_s}$ cümlesi de $e^2_{j_s}X=X^2_{j_s}$ H_2-modülünün SM_k-dengeli alt cümlesidir.

b. Kabul edelim ki X bir H_2-modül ve $k=2,3$ için B cümlesi de SM_k-dengeli alt cümlesi olsun. Bu durumda her $x\in B$ ve her $\zeta\overline{\zeta}^{j_k}\leq 1$ olan $\zeta\in SM_k(O)$ elemanı için $\zeta x\in B$ olmalıdır. $s=2,3$ için $\zeta=\zeta^1_{j_s}e^1_{j_s}+\zeta^2_{j_s}e^2_{j_s}$ olarak alındığında $e^1_{j_s}\zeta=e^1_{j_s}\left(\zeta^1_{j_s}e^1_{j_s}+\zeta^2_{j_s}e^2_{j_s}\right)=e^1_{j_s}\zeta^1_{j_s}$ olup Sonuç 3.5.4'ten $\zeta^1_{j_s}\in H\subseteq H_2$ elemanı $s=k$ $(s,k=2,3)$ için $\zeta^1_{j_s}\in SH(O)$ ve $\zeta^1_{j_s}\overline{\zeta^1_{j_s}}\leq 1$ şeklindedir. $x\in B$ olduğundan $t\in e^1_{j_s}B^1_{j_s}=e^1_{j_s}B$ elemanı $t=e^1_{j_s}x$ olacak şekilde mevcuttur. Bu durumda $\zeta^1_{j_s}t=\zeta^1_{j_s}e^1_{j_s}x=e^1_{j_s}\zeta^1_{j_s}x=e^1_{j_s}\zeta x\in e^1_{j_s}B=e^1_{j_s}B^1_{j_s}$ elde edilir. O halde $s,k=2,3$ ve $s=k$ iken $e^1_{j_s}B^1_{j_s}$ cümleleri $e^1_{j_s}X^1_{j_s}$ $H-$modüllerinin $SH-$dengeli alt cümleleridir. Benzer şekilde $s,k=2,3$ ve $s=k$ iken $e^2_{j_s}X=X^2_{j_s}$ cümleleri de $e^2_{j_s}X=X^2_{j_s}$ $H-$modüllerinin $SH-$dengeli alt cümleleridir.

Teorem 5.3.4. X bir H_2-modül ve $k=1,2,3$ olmak üzere B cümlesi NM_k- dengeli alt cümlesi olsun. Bu durumda,

a. $s=k=1$ için $e^1_{j_s}B=B^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s}B=B^2_{j_s}$ cümleleri, sırasıyla; $e^1_{j_s}X=X^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s}X=X^2_{j_s}$, H_2-modüllerinin NM_k-dengeli alt cümleleridir.

b. $s,k=2,3$ ve $s=k$ için $e^1_{j_s}B=B^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s}B=B^2_{j_s}$ cümleleri, sırasıyla; $e^1_{j_s}X=X^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s}X=X^2_{j_s}$, $H-$modüllerinin $NH-$dengeli alt cümleleridir.

İspat.

a. Kabul edelim ki X bir H_2-modül ve $k=1$ için B cümlesi de NM_k-dengeli alt cümlesi olsun. Bu durumda her $x\in B$ ve her $\zeta\overline{\zeta}^{j_k}=0$ olan $\zeta\in NM_k(O)$ elemanı için $\zeta x\in B$ olmalıdır. $s=1$ için $\zeta=\zeta^1_{j_s}e^1_{j_s}+\zeta^2_{j_s}e^2_{j_s}$ olarak alındığında $e^1_{j_s}\zeta=e^1_{j_s}\left(\zeta^1_{j_s}e^1_{j_s}+\zeta^2_{j_s}e^2_{j_s}\right)=e^1_{j_s}\zeta^1_{j_s}$ olup Sonuç 3.5.4'ten $\zeta^1_{j_s}\in M_k\subseteq H_2$ elemanı $\zeta^1_{j_s}\in NM_k(O)$ ve $\zeta^1_{j_s}\overline{\left(\zeta^1_{j_s}\right)}^{j_k}=0$ şeklindedir. $x\in B$ olduğundan $t\in e^1_{j_s}B^1_{j_s}=e^1_{j_s}B$ elemanı $t=e^1_{j_s}x$ olacak şekilde mevcuttur. Bu durumda $\zeta^1_{j_s}t=\zeta^1_{j_s}e^1_{j_s}x=e^1_{j_s}\zeta^1_{j_s}x=e^1_{j_s}\zeta x\in e^1_{j_s}B=e^1_{j_s}B^1_{j_s}$ elde edilir. O halde $e^1_{j_s}B^1_{j_s}$ cümlesi $e^1_{j_s}X^1_{j_s}$ H_2-modülünün NM_k-dengeli alt cümlesidir. Benzer şekilde $s=k=1$ için $e^2_{j_s}X=X^2_{j_s}$ cümlesi de $e^2_{j_s}X=X^2_{j_s}$ H_2-modülünün NM_k-dengeli alt cümlesidir.

b. Kabul edelim ki X bir H_2-modül ve $k=2,3$ için B cümlesi de NM_k-dengeli alt cümlesi olsun. Bu durumda her $x\in B$ ve her $\zeta\overline{\zeta}^{j_k}=0$ olan $\zeta\in NM_k(O)$ elemanı için $\zeta x\in B$ olmalıdır. $s=2,3$ için $\zeta=\zeta^1_{j_s}e^1_{j_s}+\zeta^2_{j_s}e^2_{j_s}$ olarak alındığında $e^1_{j_s}\zeta=e^1_{j_s}\left(\zeta^1_{j_s}e^1_{j_s}+\zeta^2_{j_s}e^2_{j_s}\right)=e^1_{j_s}\zeta^1_{j_s}$ olup Sonuç 3.5.4'ten $\zeta^1_{j_s}\in H\subseteq H_2$ elemanı $s=k$ $(s,k=2,3)$ için $\zeta^1_{j_s}\in NH(O)$ ve $\zeta^1_{j_s}\overline{\zeta^1_{j_s}}=0$ şeklindedir. $x\in B$ olduğundan

$t \in e_{j_s}^1 B_{j_s}^1 = e_{j_s}^1 B$ elemanı $t = e_{j_s}^1 x$ olacak şekilde mevcuttur. Bu durumda $\zeta_{j_s}^1 t = \zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 x = e_{j_s}^1 \zeta_{j_s}^1 x = e_{j_s}^1 \zeta x \in e_{j_s}^1 B = e_{j_s}^1 B_{j_s}^1$ elde edilir. O halde $s,k = 2,3$ ve $s = k$ iken $e_{j_s}^1 B_{j_s}^1$ cümleleri $e_{j_s}^1 X_{j_s}^1$ $H-$modüllerinin $NH-$dengeli alt cümleleridir. Benzer şekilde $s,k = 2,3$ ve $s = k$ iken $e_{j_s}^2 X = X_{j_s}^2$ cümleleri de $e_{j_s}^2 X = X_{j_s}^2$ $H-$modüllerinin $NH-$dengeli alt cümleleridir.

Teorem 5.3.5. X bir H_2-modül ve $k = 1,2,3$ olmak üzere B cümlesi TM_k-dengeli alt cümlesi olsun. Bu durumda,

a. $s = k = 1$ için $e_{j_s}^1 B = B_{j_s}^1$ ve $e_{j_s}^2 B = B_{j_s}^2$ cümleleri, sırasıyla; $e_{j_s}^1 X = X_{j_s}^1$ ve $e_{j_s}^2 X = X_{j_s}^2$, H_2-modüllerinin TM_k-dengeli alt cümleleridir.

b. $s,k = 2,3$ ve $s = k$ için $e_{j_s}^1 B = B_{j_s}^1$ ve $e_{j_s}^2 B = B_{j_s}^2$ cümleleri, sırasıyla; $e_{j_s}^1 X = X_{j_s}^1$ ve $e_{j_s}^2 X = X_{j_s}^2$, $H-$modüllerinin $TH-$dengeli alt cümleleridir.

İspat.

a. Kabul edelim ki X bir H_2-modül ve $k = 1$ için B cümlesi de TM_k-dengeli alt cümlesi olsun. Bu durumda her $x \in B$ ve her $-1 \leq \zeta \overline{\zeta}^{j_k}$ olan $\zeta \in TM_k(O)$ elemanı için $\zeta x \in B$ olmalıdır. $s = 1$ için $\zeta = \zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 + \zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2$ olarak alındığında $e_{j_s}^1 \zeta = e_{j_s}^1 \left(\zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 + \zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2 \right) = e_{j_s}^1 \zeta_{j_s}^1$ olup Sonuç 3.5.4'ten $\zeta_{j_s}^1 \in M_k \subseteq H_2$ elemanı $\zeta_{j_s}^1 \in TM_k(O)$ ve $-1 \leq \zeta_{j_s}^1 \overline{\left(\zeta_{j_s}^1\right)}^{j_k}$ şeklindedir. $x \in B$ olduğundan $t \in e_{j_s}^1 B_{j_s}^1 = e_{j_s}^1 B$ elemanı $t = e_{j_s}^1 x$ olacak şekilde mevcuttur. Bu durumda $\zeta_{j_s}^1 t = \zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 x = e_{j_s}^1 \zeta_{j_s}^1 x = e_{j_s}^1 \zeta x \in e_{j_s}^1 B = e_{j_s}^1 B_{j_s}^1$ elde edilir. O halde $e_{j_s}^1 B_{j_s}^1$ cümlesi $e_{j_s}^1 X_{j_s}^1$ H_2-modülünün TM_k-dengeli alt cümlesidir. Benzer şekilde $s = k = 1$ için $e_{j_s}^2 X = X_{j_s}^2$ cümlesi de $e_{j_s}^2 X = X_{j_s}^2$ H_2-modülünün TM_k-dengeli alt cümlesidir.

b. Kabul edelim ki X bir H_2-modül ve $k=2,3$ için B cümlesi de TM_k-dengeli alt cümlesi olsun. Bu durumda her $x\in B$ ve her $-1\leq\zeta\overline{\zeta}^{j_k}$ olan $\zeta\in TM_k\left(O\right)$ elemanı için $\zeta x\in B$ olmalıdır. $s=2,3$ için $\zeta=\zeta_{j_s}^1e_{j_s}^1+\zeta_{j_s}^2e_{j_s}^2$ olarak alındığında $e_{j_s}^1\zeta=e_{j_s}^1\left(\zeta_{j_s}^1e_{j_s}^1+\zeta_{j_s}^2e_{j_s}^2\right)=e_{j_s}^1\zeta_{j_s}^1$ olup Sonuç 3.5.4'ten $\zeta_{j_s}^1\in H\subseteq H_2$ elemanı $s=k$ $\left(s,k=2,3\right)$ için $\zeta_{j_s}^1\in TH\left(O\right)$ ve $-1\leq\zeta_{j_s}^1\overline{\zeta_{j_s}^1}$ şeklindedir. $x\in B$ olduğundan $t\in e_{j_s}^1B_{j_s}^1=e_{j_s}^1B$ elemanı $t=e_{j_s}^1x$ olacak şekilde mevcuttur. Bu durumda $\zeta_{j_s}^1t=\zeta_{j_s}^1e_{j_s}^1x=e_{j_s}^1\zeta_{j_s}^1x=e_{j_s}^1\zeta x\in e_{j_s}^1B=e_{j_s}^1B_{j_s}^1$ elde edilir. O halde $s,k=2,3$ ve $s=k$ iken $e_{j_s}^1B_{j_s}^1$ cümleleri $e_{j_s}^1X_{j_s}^1$ $H-$modüllerinin $TH-$dengeli alt cümleleridir. Benzer şekilde $s,k=2,3$ ve $s=k$ iken $e_{j_s}^2X=X_{j_s}^2$ cümleleri de $e_{j_s}^2X=X_{j_s}^2$ $H-$modüllerinin $TH-$dengeli alt cümleleridir.

Teorem 5.3.6. X bir H_2-modül ve $k=1,2,3$ olmak üzere B cümlesi NM_k-dengeli alt cümlesi olsun. Bu durumda, $s=1,2,3$ ve $s\neq k$ için $e_{j_s}^1B=B_{j_s}^1\subseteq B$ ve $e_{j_s}^2B=B_{j_s}^2\subseteq B$ kapsamaları mevcuttur.

İspat. $t\in e_{j_s}^1B_{j_s}^1=e_{j_s}^1B$ elemanı $t=e_{j_s}^1x$ ve $x\in B$ olacak şekilde alınsın. B cümlesi NM_k-dengeli cümle olduğu için $\zeta\overline{\zeta}^{j_k}=0$ olan $\zeta\in NM_k\left(O\right)$ elemanı için $\zeta x\in B$ dır. Sonuç 3.5.5'ten $s,k=1,2,3$ ve $s\neq k$ için $e_{j_s}^1\in NM_k\left(O\right)$ olur. Bu yüzden $\zeta=e_{j_s}^1$ seçilirse $t=e_{j_s}^1x\in B$ olduğundan $e_{j_s}^1B_{j_s}^1\subseteq B$ elde edilir. Benzer şekilde $t\in e_{j_s}^2B_{j_s}^2=e_{j_s}^2B$ elemanı $t=e_{j_s}^2x$ ve $x\in B$ olarak alınırsa B cümlesi NM_k-dengeli cümle olduğundan $\zeta=e_{j_s}^2$ seçilirse $t=e_{j_s}^2x\in B$ olup $e_{j_s}^2B_{j_s}^2\subseteq B$ elde edilir.

Bir X, H_2-modülünün $k=1,2,3$ olmak üzere SM_k-dengeli veya TM_k-dengeli olan B alt cümleleri alındığında $e_{j_s}^1B=B_{j_s}^1\subseteq B$ ve $e_{j_s}^2B=B_{j_s}^2\subseteq B$ kapsamaları elde edilememektedir. Çünkü Sonuç 3.5.5'ten $s=1,2,3$ olmak üzere $e_{j_s}^1$ ve $e_{j_s}^2$

idempotent bileşenleri $s=k$ için $e_{j_s}^1, e_{j_s}^2 \notin M_k$ ve $s \neq k$ için $e_{j_s}^1, e_{j_s}^2 \in NM_k$ olduğundan $\zeta \in SM_k(O)$ veya $\zeta \in TM_k(O)$ alındığında $\zeta = e_{j_s}^1$ veya $\zeta = e_{j_s}^2$ seçilemez.

Tanım 5.3.6. X bir H_2-modül ve $\varnothing \neq B \subseteq X$ iken her $x, y \in B$ ve $0 \leq \zeta \leq 1$ olacak şekildeki her $\zeta \in H_2^+$ bihiperbolik sayısı için eğer $\zeta x + (1-\zeta) y \in B$ oluyorsa B cümlesine H_2-konveks cümle denir.

Teorem 5.3.7. X bir H_2-modül ve $\varnothing \neq B \subseteq X$ alt cümlesi X in H_2-konveks alt cümlesi olsun. Bu durumda

a. $s=1$ için $e_{j_s}^1 B$ ve $e_{j_s}^2 B$ cümleleri, sırasıyla; $e_{j_s}^1 X$ ve $e_{j_s}^2 X$, H_2-modüllerinin H_2-konveks alt cümleleri, $s=2,3$ için $e_{j_s}^1 B$ ve $e_{j_s}^2 B$ cümleleri, sırasıyla; $e_{j_s}^1 X$ ve $e_{j_s}^2 X$, $H-$modüllerinin $H-$konveks alt cümleleridir.

b. θ birim eleman olmak üzere $\theta \in B$ ise $s=1,2,3$ için $e_{j_s}^1 B \subseteq B$ ve $e_{j_s}^2 B \subseteq B$ sağlanır.

İspat.

a. B, X H_2-modülünün H_2-konveks alt cümlesi olsun. $s=1$ için $t_1, t_2 \in e_{j_s}^1 B$ alalım. $t_1, t_2 \in e_{j_s}^1 B$ ise $t_1 = e_{j_s}^1 x \in e_{j_s}^1 B$ ve $t_2 = e_{j_s}^1 y \in e_{j_s}^1 B$ olacak şekilde $x, y \in B$ vardır. $\zeta_{j_s}^1, \zeta_{j_s}^2 \in [0,1]$ olacak şekildeki her $\zeta_{j_s}^1, \zeta_{j_s}^2 \in H_2^+$ bihiperbolik sayıları Teorem 3.3.4'ten $\zeta = \zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 + \zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2 \in H_2^+$ olacak şekilde alınsın. $\zeta_{j_s}^1, \zeta_{j_s}^2 \in [0,1]$ ise $\zeta \in [0,1]$ dir. Çünkü ζ bihiperbolik sayısının spektral gösterimi $\zeta = w_1 i_1 + w_2 i_2 + w_3 i_3 + w_4 i_4$ olmak üzere $s=1$ için $\zeta_{j_s}^1 = w_1 i_1 + w_4 i_2 + w_3 i_3 + w_2 i_4$ ve $\zeta_{j_s}^2 = w_3 i_1 + w_2 i_2 + w_1 i_3 + w_4 i_4$ olduğundan $\zeta_{j_s}^1, \zeta_{j_s}^2 \in [0,1]$ ise $l=1,2,3,4$ için $0 \leq w_l \leq 1$ olup $\zeta \in [0,1]$ olduğu görülür. Böylece B cümlesi H_2-konveks olduğundan $x,y\in B$, $\zeta\in H_2^+$ ve $\zeta\in[0,1]$ için $\zeta x+(1-\zeta)y\in B$ olur. Öyleyse

$$\begin{aligned}
e_{j_s}^1\left(\zeta x+(1-\zeta)y\right) &= e_{j_s}^1\left(\left(\zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1+\zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2\right)x+\left(1-\left(\zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1+\zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2\right)\right)y\right)\\
&= e_{j_s}^1\left(\zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 x+\zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2 x+y-\zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 y-\zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2 y\right)\\
&= \zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 x+e_{j_s}^1 y-\zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 y\\
&= \zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 x+\left(1-\zeta_{j_s}^1\right)e_{j_s}^1 y\\
&= \zeta_{j_s}^1 t_1+\left(1-\zeta_{j_s}^1\right)t_2\in e_{j_s}^1 B
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $e_{j_s}^1 B$ cümlesi $e_{j_s}^1 X$, H_2-modülünün H_2-konveks alt cümlesidir. Benzer şekilde $s=1$ için $e_{j_s}^2 B$ cümlesinin de $e_{j_s}^2 X$, H_2-modülünün H_2-konveks alt cümlesi olduğu gösterilir. Şimdi $s=2,3$ için $t_1,t_2\in e_{j_s}^1 B$ alalım. $t_1,t_2\in e_{j_s}^1 B$ ise $t_1=e_{j_s}^1 x\in e_{j_s}^1 B$ ve $t_2=e_{j_s}^1 y\in e_{j_s}^1 B$ olacak şekilde $x,y\in B$ vardır. $\zeta_{j_s}^1,\zeta_{j_s}^2\in[0,1]$ olacak şekildeki her $\zeta_{j_s}^1,\zeta_{j_s}^2\in H^+$ hiperbolik sayıları Teorem 3.3.5'ten $\zeta=\zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1+\zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2\in H_2^+$ olacak şekilde alınsın. $\zeta_{j_s}^1,\zeta_{j_s}^2\in[0,1]$ ise $\zeta\in[0,1]$ dir. Çünkü ζ bihiperbolik sayısının spektral gösterimi $\zeta=w_1 i_1+w_2 i_2+w_3 i_3+w_4 i_4$ olmak üzere $s=2$ için $\zeta_{j_s}^1=w_1 e_{j_1}^1+w_2 e_{j_1}^2$, $\zeta_{j_s}^2=w_3 e_{j_1}^1+w_4 e_{j_1}^2$, ve $s=3$ için $\zeta_{j_s}^1=w_1 e_{j_1}^1+w_4 e_{j_1}^2$, $\zeta_{j_s}^2=w_3 e_{j_1}^1+w_2 e_{j_1}^2$ olduğundan $\zeta_{j_s}^1,\zeta_{j_s}^2\in[0,1]$ ise $l=1,2,3,4$ için $0\le w_l\le 1$ olup $\zeta\in[0,1]$ olduğu görülür. Böylece B cümlesi H_2-konveks olduğundan $x,y\in B$, $\zeta\in H_2^+$ ve $\zeta\in[0,1]$ için $\zeta x+(1-\zeta)y\in B$ olur. Öyleyse

$$\begin{aligned}
e_{j_s}^1\left(\zeta x+(1-\zeta)y\right) &= e_{j_s}^1\left(\left(\zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1+\zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2\right)x+\left(1-\left(\zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1+\zeta_{j_s}^2 e_{j_s}^2\right)\right)y\right)\\
&= \zeta_{j_s}^1 e_{j_s}^1 x+\left(1-\zeta_{j_s}^1\right)e_{j_s}^1 y\\
&= \zeta_{j_s}^1 t_1+\left(1-\zeta_{j_s}^1\right)t_2\in e_{j_s}^1 B
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $e_{j_s}^1 B$ cümleleri $e_{j_s}^1 X$, $H-$modüllerinin $H-$konveks alt cümleleridir. Benzer şekilde $s=2,3$ için $e_{j_s}^2 B$ cümlelerinin de $e_{j_s}^2 X$, $H-$

modüllerinin $H-$konveks alt cümleleri olduğu gösterilebilir.

b. B cümlesi, X H_2-modülünün H_2-konveks alt cümlesi olmak üzere $\theta \in B$ ve $s=1,2,3$ olsun. $t \in e_{j_s}^1 B$ alalım. O halde $t = e_{j_s}^1 x \in e_{j_s}^1 B$ olan $x \in B$ vardır. Diğer taraftan $\theta \in B$ olduğu da göz önüne alınırsa $x, \theta \in B$ için B, H_2-konveks alt cümle olduğundan $\zeta = e_{j_s}^1$ bihiperbolik sayısı seçilirse $(H \subseteq H_2)$ $0 \le e_{j_s}^1 \le 1$ ve $e_{j_s}^1 \in H_2^+$ $(H^+ \subseteq H_2^+)$ olup $e_{j_s}^1 x + (1-e_{j_s}^1)\theta = e_{j_s}^1 x = t \in B$ olmalıdır. $t \in e_{j_s}^1 B$ iken $t \in B$ olduğundan $e_{j_s}^1 B \subseteq B$ kapsaması mevcuttur. Benzer şekilde $e_{j_s}^2 B \subseteq B$ olduğu görülür.

Lemma 5.3.1. X bir H_2-modül ve $\{B_l : l \text{ keyfi}\}$ alt cümleleri X cümlesinin H_2-konveks alt cümleleri olsun. Bu durumda $\bigcap_l B_l = B$ cümlesi de H_2-konvekstir.

İspat. $x, y \in B$ olsun. $B = \bigcap_l B_l$ olduğundan her bir l için $x, y \in B_l$ dir. Her bir l için B_l, H_2-konveks olduğundan $\zeta \in H_2^+$ elemanı $\zeta \in [0,1]$ iken $\zeta x + (1-\zeta) y \in B_l$ olur. Her bir l için $\zeta x + (1-\zeta) y \in B_l$ ise $\zeta x + (1-\zeta) y \in \bigcap_l B_l = B$ olur. Dolayısıyla $\bigcap_l B_l = B$ cümlesi de H_2-konvekstir.

Teorem 5.3.8. X, H_2-modül ve $\varnothing \ne B \subseteq X$ alt cümlesi H_2-konveks alt cümle olsun. Bu durumda $s=1,2,3$ için $B = e_{j_s}^1 B + e_{j_s}^2 B$ şeklinde yazılabilir.

İspat. B cümlesi, X H_2-modülünün H_2-konveks alt cümlesi olsun. $x \in B$ alalım. Bu durumda $s=1,2,3$ için $e_{j_s}^1 x \in e_{j_s}^1 B$ ve $e_{j_s}^2 x \in e_{j_s}^2 B$ olur. $e_{j_s}^1 + e_{j_s}^2 = 1$ olduğundan

$$x = (e_{j_s}^1 + e_{j_s}^2) x = e_{j_s}^1 x + e_{j_s}^2 x \in e_{j_s}^1 B + e_{j_s}^2 B$$

olur ki buradan $B \subseteq e^1_{j_s} B + e^2_{j_s} B$ elde edilir. Diğer taraftan $t_1 \in e^1_{j_s} B$ ve $t_2 \in e^2_{j_s} B$ alalım. Böylece $x, y \in B$ elemanları $t_1 = e^1_{j_s} x$ ve $t_2 = e^2_{j_s} y$ olacak şekilde mevcuttur. B cümlesi $H_2 -$konveks olduğundan $x, y \in B$ ve $s = 1,2,3$ için $e^1_{j_s}, e^2_{j_s} \in H_2^+$ ve $0 \le e^1_{j_s}, e^2_{j_s} \le 1$ olup $t_1 + t_2 = e^1_{j_s} x + e^2_{j_s} y = e^1_{j_s} x + \left(1 - e^1_{j_s}\right) y \in B$ elde edilir. $t_1 + t_2 \in e^1_{j_s} B + e^2_{j_s} B$ iken $t_1 + t_2 \in B$ ise $e^1_{j_s} B + e^2_{j_s} B \subseteq B$ vardır. Çift yönlü kapsamadan $B = e^1_{j_s} B + e^2_{j_s} B$ elde edilir.

Teorem 5.3.9. X , $H_2 -$modül ve $\varnothing \ne B \subseteq X$ olmak üzere $s = 1,2,3$ için $e^1_{j_s} B$ ve $e^2_{j_s} B$ cümleleri $H_2 -$konveks ise $e^1_{j_s} B + e^2_{j_s} B$ cümlesi de X cümlesinin $H_2 -$konveks alt cümlesidir.

İspat. $x, y \in e^1_{j_s} B + e^2_{j_s} B$ ve $0 \le \zeta \le 1$ olan $\zeta \in H_2^+$ alalım. Bu durumda $x = e^1_{j_s} x + e^2_{j_s} x$ ve $y = e^1_{j_s} y + e^2_{j_s} y$ olup $e^1_{j_s} x, e^1_{j_s} y \in e^1_{j_s} B$ ve $e^2_{j_s} x, e^2_{j_s} y \in e^2_{j_s} B$ dir. $\zeta = \zeta^1_{j_s} e^1_{j_s} + \zeta^2_{j_s} e^2_{j_s}$ olup ζ bihiperbolik sayısının seçilişinden dolayı $0 \le \zeta^1_{j_s}, \zeta^2_{j_s} \le 1$ ve $\zeta^1_{j_s}, \zeta^2_{j_s} \in H_2^+$ vardır. $e^1_{j_s} B$ ve $e^2_{j_s} B$ cümleleri $H_2 -$konveks olduğundan

$$e^1_{j_s} \zeta^1_{j_s} x + e^1_{j_s} \left(1 - \zeta^1_{j_s}\right) y \in e^1_{j_s} B,$$
$$e^2_{j_s} \zeta^2_{j_s} x + e^2_{j_s} \left(1 - \zeta^2_{j_s}\right) y \in e^2_{j_s} B$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
\zeta x + (1-\zeta) y &= \left(\zeta^1_{j_s} e^1_{j_s} + \zeta^2_{j_s} e^2_{j_s}\right)\left(e^1_{j_s} x + e^2_{j_s} x\right) + \left(1 - \left(\zeta^1_{j_s} e^1_{j_s} + \zeta^2_{j_s} e^2_{j_s}\right)\right)\left(e^1_{j_s} y + e^2_{j_s} y\right) \\
&= \zeta^1_{j_s} e^1_{j_s} x + \zeta^2_{j_s} e^2_{j_s} x + \left(1 - \zeta^1_{j_s}\right) e^1_{j_s} y + \left(1 - \zeta^2_{j_s}\right) e^2_{j_s} y \\
&= \zeta^1_{j_s} e^1_{j_s} x + \left(1 - \zeta^1_{j_s}\right) e^1_{j_s} y + \zeta^2_{j_s} e^2_{j_s} x + \left(1 - \zeta^2_{j_s}\right) e^2_{j_s} y \in e^1_{j_s} B + e^2_{j_s} B
\end{aligned}$$

olur. Buradan $e^1_{j_s} B + e^2_{j_s} B$ cümlesinin $H_2 -$konveks olduğu görülür.

Özel olarak $X = H_2$, $H_2 -$modülü alındığında H_2, $H_2 -$modülünde geometrik açıdan da anlamlı olan üç farklı konveks cümle tanımı ilk kez aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 5.3.7. H_2 bir H_2-modül ve $k=1,2,3$ olmak üzere $B \subseteq M_k \subseteq H_2$ olsun. Her $x, y \in B$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ reel sayısı $0 \leq \lambda \leq 1$ olacak şekilde alındığında eğer

a. $y \in SM_k(x)$ ve $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$ oluyorsa B cümlesine SM_k-konveks cümle,

b. $y \in NM_k(x)$ ve $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$ oluyorsa B cümlesine NM_k-konveks cümle,

c. $y \in TM_k(x)$ ve $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$ oluyorsa B cümlesine TM_k-konveks cümle denir.

Teorem 5.3.10. B cümlesi H_2, H_2-modülünün $B \subseteq M_k \subseteq H_2$ olan SM_k- konveks alt cümlesi olsun. Bu durumda $e^1_{j_s} B = e^1_{j_s} B^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s} B = e^2_{j_s} B^2_{j_s}$ cümleleri, sırasıyla; $s,k=1,2,3$ için

a. $s=k$ iken $e^1_{j_s} H_2$ ve $e^2_{j_s} H_2$, H_2-modüllerinin SM_k-konveks alt cümleleri,

b. $s \neq k$ iken $e^1_{j_s} H_2$ ve $e^2_{j_s} H_2$, H_2-modüllerinin NM_k-konveks alt cümleleridir.

İspat.

a. $s=k$ için $t_1, t_2 \in e^1_{j_s} B^1_{j_s}$ alalım. O halde bir $x, y \in B$ elemanı $t_1 = e^1_{j_s} x$ ve $t_2 = e^1_{j_s} y$ olacak şekilde vardır. B cümlesi SM_k-konveks olduğundan $x, y \in B$ için $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $y \in SM_k(x)$ ve $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$ biçimindedir. $\lambda x + (1-\lambda) y \in B$ ise

$$e_{j_s}^1\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)=\lambda e_{j_s}^1 x+(1-\lambda)e_{j_s}^1 y=\lambda t_1+(1-\lambda)t_2\in e_{j_s}^1 B=e_{j_s}^1 B_{j_s}^1$$

elde edilir. $t_1,t_2\in e_{j_s}^1 B_{j_s}^1$ iken $t_1=e_{j_s}^1 t_1$ ve $t_2=e_{j_s}^1 t_2$ dir. $s=k$ iken Teorem 3.5.1'den $y\in SM_k(x)$ ise $t_2\in SM_k(t_1)$ dir. Böylece $e_{j_s}^1 B$ cümleleri $e_{j_s}^1 H_2$, H_2-modüllerinin SM_k-konveks alt cümleleridir. $s=k$ için $e_{j_s}^2 B$ cümlelerinin de $e_{j_s}^2 H_2$, H_2-modüllerinin SM_k-konveks alt cümleleri olduğu da benzer şekilde ispatlanır.

b. $s\neq k$ için $t_1,t_2\in e_{j_s}^1 B_{j_s}^1$ alalım. O halde bir $x,y\in B$ elemanı $t_1=e_{j_s}^1 x$ ve $t_2=e_{j_s}^1 y$ olacak şekilde vardır. B cümlesi SM_k-konveks olduğundan $x,y\in B$ için $\lambda\in\mathbb{R}$ ve $0\leq\lambda\leq 1$ olmak üzere $y\in SM_k(x)$ ve $\lambda x+(1-\lambda)y\in B$ biçimindedir. $\lambda x+(1-\lambda)y\in B$ ise

$$e_{j_s}^1\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)=\lambda e_{j_s}^1 x+(1-\lambda)e_{j_s}^1 y=\lambda t_1+(1-\lambda)t_2\in e_{j_s}^1 B=e_{j_s}^1 B_{j_s}^1$$

elde edilir. $t_1,t_2\in e_{j_s}^1 B_{j_s}^1$ iken $t_1=e_{j_s}^1 t_1$ ve $t_2=e_{j_s}^1 t_2$ dir. $s\neq k$ iken Teorem 3.5.1'den $y\in SM_k(x)$ ise $t_2\in NM_k(t_1)$ dir. Böylece $e_{j_s}^1 B$ cümleleri $e_{j_s}^1 H_2$, H_2-modüllerinin NM_k-konveks alt cümleleridir. Benzer şekilde $e_{j_s}^2 B$ cümlelerinin de $e_{j_s}^2 H_2$, H_2-modüllerinin NM_k-konveks alt cümleleri olduğu görülür.

Teorem 5.3.11. B cümlesi H_2, H_2-modülünün $B\subseteq M_k\subseteq H_2$ olan NM_k-konveks alt cümlesi olsun. Bu durumda $e_{j_s}^1 B=e_{j_s}^1 B_{j_s}^1$ ve $e_{j_s}^2 B=e_{j_s}^2 B_{j_s}^2$ cümleleri $s,k=1,2,3$ için $s=k$ veya $s\neq k$ iken $e_{j_s}^1 H_2$ ve $e_{j_s}^2 H_2$, H_2-modüllerinin NM_k-konveks alt cümleleridir.

Teorem 5.3.12. B cümlesi H_2, H_2-modülünün $B\subseteq M_k\subseteq H_2$ olan TM_k-konveks alt cümlesi olsun. Bu durumda $e_{j_s}^1 B=e_{j_s}^1 B_{j_s}^1$ ve $e_{j_s}^2 B=e_{j_s}^2 B_{j_s}^2$ cümleleri, sırasıyla; $s,k=1,2,3$ için

a. $s=k$ iken $e^1_{j_s}H_2$ ve $e^2_{j_s}H_2$, H_2-modüllerinin TM_k-konveks alt cümleleri,

b. $s\neq k$ iken $e^1_{j_s}H_2$ ve $e^2_{j_s}H_2$, H_2-modüllerinin NM_k-konveks alt cümleleridir.

Tanım 5.3.8. X bir H_2-modül ve $\varnothing\neq B\subseteq X$ olsun. Her $x\in X$ için bazı $\lambda>0$ reel sayısı, $k=1,2,3$ için $|\mu|_{j_k}\geq\lambda$ olan bütün $\mu\in M_k\subseteq H_2$ skalerleri için

a. $\mu\in SM_k(O)$ iken $x\in\mu B$ oluyorsa B cümlesine SM_k-emen cümle,

b. $\mu\in TM_k(O)$ iken $x\in\mu B$ oluyorsa B cümlesine TM_k-emen cümle denir.

Teorem 5.3.13. X bir H_2-modül ve $\varnothing\neq B\subseteq X$ alt cümlesi SM_k-emen cümle $(k=1,2,3)$ olsun. Bu durumda

a. $s=k=1$ için $e^1_{j_s}B=e^1_{j_s}B^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s}B=e^2_{j_s}B^2_{j_s}$ cümleleri, sırasıyla; $e^1_{j_s}X=X^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s}X=X^2_{j_s}$, H_2-modüllerinin SM_k-emen alt cümleleridir.

b. $s,k=2,3$ ve $s=k$ için $e^1_{j_s}B=e^1_{j_s}B^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s}B=e^2_{j_s}B^2_{j_s}$ cümleleri, sırasıyla; $e^1_{j_s}X=X^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s}X=X^2_{j_s}$, $H-$modüllerinin $SH-$emen alt cümleleridir.

İspat.

a. $s=1$ için $\tilde{x}\in e^1_{j_1}X$ alalım. Bu durumda $\tilde{x}=e^1_{j_1}x$ olan $x\in X$ vardır. $k=1$ için B, SM_1-emen cümle olduğundan bazı $\lambda>0$ reel sayısı, $|\mu|_{j_1}\geq\lambda$ olan $\mu\in SM_1(O)$ skalerleri için $x\in\mu B$ dir. $\mu=\mu^1_{j_1}e^1_{j_1}+\mu^2_{j_1}e^2_{j_1}$ olup

$$e^1_{j_1} x \in e^1_{j_1} \mu B = e^1_{j_1} \left(\mu^1_{j_1} e^1_{j_1} + \mu^2_{j_1} e^2_{j_1} \right) B = \mu^1_{j_1} e^1_{j_1} B$$

elde edilir. Diğer taraftan Sonuç 3.5.4'ten $\left| \mu^1_{j_1} \right|_{j_1} = |\mu|_{j_1}$ ve $\mu^1_{j_1} \in SM_1(O)$ dir. O halde bazı $\lambda > 0$ reel sayısı, $\left| \mu^1_{j_1} \right|_{j_1} = |\mu|_{j_1} \geq \lambda$ olan $\mu^1_{j_1} \in SM_1(O)$ skalerleri için $\tilde{x} = e^1_{j_1} x \in \mu^1_{j_1} e^1_{j_1} B$ dir. Bu durumda $e^1_{j_1} B = e^1_{j_1} B^1_{j_1}$ cümlesi $e^1_{j_1} X = e^1_{j_1} X^1_{j_1}$ H_2- modülünün SM_1-emen alt cümlesidir.

b. $s = k = 2$ olsun. $\tilde{x} \in e^1_{j_2} X$, $\tilde{x} = e^1_{j_2} x$ ve $x \in X$ olacak şekilde alalım. $k = 2$ için B, SM_2-emen cümle olduğundan bazı $\lambda > 0$ reel sayısı, $|\mu|_{j_2} \geq \lambda$ olan $\mu \in SM_2(O)$ skalerleri için $x \in \mu B$ dir. $\mu = \mu^1_{j_2} e^1_{j_2} + \mu^2_{j_2} e^2_{j_2}$ olup

$$e^1_{j_2} x \in e^1_{j_2} \mu B = e^1_{j_2} \left(\mu^1_{j_2} e^1_{j_2} + \mu^2_{j_2} e^2_{j_2} \right) B = \mu^1_{j_2} e^1_{j_2} B$$

elde edilir. Diğer taraftan Sonuç 3.5.4'ten $\left| \mu^1_{j_2} \right|_H = |\mu|_{j_2}$ ve $\mu^1_{j_2} \in SH(O)$ dir. O halde bazı $\lambda > 0$ reel sayısı, $\left| \mu^1_{j_2} \right|_H = |\mu|_{j_2} \geq \lambda$ olan $\mu^1_{j_2} \in SH(O)$ skalerleri için $\tilde{x} = e^1_{j_2} x \in \mu^1_{j_2} e^1_{j_2} B$ dir. Bu durumda $e^1_{j_2} B = e^1_{j_2} B^1_{j_2}$ cümlesi $e^1_{j_2} X = e^1_{j_2} X^1_{j_2}$ H_2- modülünün $SH-$emen alt cümlesidir. $s = k = 3$ için de benzer şekilde $\varnothing \neq B \subseteq X$ alt cümlesi SM_3-emen cümle iken $e^1_{j_3} B = e^1_{j_3} B^1_{j_3}$ ve $e^2_{j_3} B = e^2_{j_3} B^2_{j_3}$ cümlelerinin sırasıyla, $e^1_{j_3} X = e^1_{j_3} X^1_{j_3}$ ve $e^2_{j_3} X = e^2_{j_3} X^2_{j_3}$, $H-$modüllerinin $SH-$emen alt cümleleri olduğu görülür.

Teorem 5.3.14. X bir H_2-modül ve $\varnothing \neq B \subseteq X$ alt cümlesi TM_k-emen cümle $(k = 1, 2, 3)$ olsun. Bu durumda

a. $s = k = 1$ için $e^1_{j_s} B = e^1_{j_s} B^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s} B = e^2_{j_s} B^2_{j_s}$ cümleleri, sırasıyla; $e^1_{j_s} X = X^1_{j_s}$ ve $e^2_{j_s} X = X^2_{j_s}$, H_2-modüllerinin TM_k-emen alt cümleleridir.

b. $s,k=2,3$ ve $s=k$ için $e_{\mathrm{j}_s}^1 B = e_{\mathrm{j}_s}^1 B_{\mathrm{j}_s}^1$ ve $e_{\mathrm{j}_s}^2 B = e_{\mathrm{j}_s}^2 B_{\mathrm{j}_s}^2$ cümleleri, sırasıyla; $e_{\mathrm{j}_s}^1 X = X_{\mathrm{j}_s}^1$ ve $e_{\mathrm{j}_s}^2 X = X_{\mathrm{j}_s}^2$, $H-$modüllerinin $TH-$emen alt cümleleridir.

Topolojik vektör uzaylarına benzer şekilde topolojik bihiperbolik modül aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Tanım 5.3.9. X bir H_2-modül ve τ, X cümlesi üzerinde bir Hausdorff topoloji olsun. Eğer

$$+: X \times X \to X$$
$$\cdot : H_2 \times X \to X$$

fonksiyonları sürekli ise (X,τ) ikilisine topolojik bihiperbolik modül veya topolojik H_2-modül denir.

[40]'ta topolojik vektör uzayı tanımlanırken tek nokta cümlelerinin üzerindeki topolojiye göre kapalı olma şartı da vardır. Bu şart ile birlikte topolojik vektör uzayları Hausdorff uzayı olmaktadır. Ancak bazı kaynaklarda topolojik vektör uzayları tanıtılırken vektör uzayının birleştiği topolojinin Hausdorff topoloji olduğu söylenmemektedir. Bunun sebebi genellikle çalışılan uzayların zaten Hausdorffluk özelliğini sağlamasıdır. Örneğin normlu vektör uzaylarında normdan üretilen topoloji veya metriğin doğurduğu topolojiler birer Hausdorff topolojidir. Dolayısıyla fonksiyonel analizde sıkça kullanılan bu yapılar topolojik vektör uzaylarında da karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışma bahsi geçen yapılardan daha genel bir yapıya sahip olmasına rağmen aksi belirtilmedikçe X topolojik H_2-modülünde X uzayının birleştiği topoloji Hausdorff topolojisi olarak alınacaktır.

Teorem 5.3.15. (X,τ) bir topolojik H_2-modül olsun. Bu durumda $s=1,2,3$ için $\tau_{\mathrm{j}_s}^1 = \left\{ e_{\mathrm{j}_s}^1 G : G \in \tau \right\}$ ve $\tau_{\mathrm{j}_s}^2 = \left\{ e_{\mathrm{j}_s}^2 G : G \in \tau \right\}$ aileleri, sırasıyla; $X_{\mathrm{j}_s}^1$ ve $X_{\mathrm{j}_s}^2$, H_2- modülleri ve özel olarak $s=2,3$ için $X_{\mathrm{j}_s}^1$ ve $X_{\mathrm{j}_s}^2$, $H-$modülleri üzerinde birer Hausdorff topolojidir.

İspat. $\left(X^1_{j_s}, \tau^1_{j_s}\right)$ ikilisinin topolojik uzay olduğunu gösterelim. (X, τ) topolojik uzay olduğundan $\varnothing, X \in \tau$ vardır. O halde $G = \varnothing$ ve $G = X$ alınırsa, sırasıyla, $e^1_{j_s}\varnothing = \varnothing \in \tau^1_{j_s}$ ve $e^1_{j_s}X = X^1_{j_s} \in \tau^1_{j_s}$ elde edilir. Diğer yandan $G_1, G_2 \in \tau$ olmak üzere $e^1_{j_s}G_1, e^1_{j_s}G_2 \in \tau^1_{j_s}$ olsun. Bu durumda $e^1_{j_s}G_1 \cap e^1_{j_s}G_2 \in \tau^1_{j_s}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $e^1_{j_s}G_1 \cap e^1_{j_s}G_2 = e^1_{j_s}\left(G_1 \cap G_2\right)$ olduğu gösterilmelidir. $e^1_{j_s}x \in e^1_{j_s}G_1 \cap e^1_{j_s}G_2$ alalım. Bu durumda $e^1_{j_s}x \in e^1_{j_s}G_1$ ve $e^1_{j_s}x \in e^1_{j_s}G_2$ olup $x \in G_1$ ve $x \in G_2$ elde edilir. O halde $x \in G_1 \cap G_2$ olup $e^1_{j_s}x \in e^1_{j_s}\left(G_1 \cap G_2\right)$ dir. Böylelikle $e^1_{j_s}G_1 \cap e^1_{j_s}G_2 \subseteq e^1_{j_s}\left(G_1 \cap G_2\right)$ kapsaması elde edilir. Diğer taraftan $e^1_{j_s}x \in e^1_{j_s}\left(G_1 \cap G_2\right)$ olsun. Bu durumda $x \in \left(G_1 \cap G_2\right)$ olup $x \in G_1$ ve $x \in G_2$ elde edilir. Buradan $e^1_{j_s}x \in e^1_{j_s}G_1$ ve $e^1_{j_s}x \in e^1_{j_s}G_2$ olup $e^1_{j_s}x \in e^1_{j_s}G_1 \cap e^1_{j_s}G_2$ elde edilir. Böylece $e^1_{j_s}\left(G_1 \cap G_2\right) \subseteq e^1_{j_s}G_1 \cap e^1_{j_s}G_2$ olduğu görülür. Çift yönlü kapsamadan $e^1_{j_s}G_1 \cap e^1_{j_s}G_2 = e^1_{j_s}\left(G_1 \cap G_2\right)$ eşitliği bulunur. τ , X cümlesi üzerinde bir topoloji olduğu için $G_1 \cap G_2 \in \tau$ olup $e^1_{j_s}G_1 \cap e^1_{j_s}G_2 \in \tau^1_{j_s}$ elde edilir. Son olarak herhangi $l \in I$ için $G_l \in \tau$ olsun. Bu durumda $e^1_{j_s}G_l \in \tau^1_{j_s}$ olup $\bigcup_{l\in I} e^1_{j_s}G_l \in \tau^1_{j_s}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\bigcup_{l\in I} e^1_{j_s}G_l = e^1_{j_s}\left(\bigcup_{l\in I} G_l\right)$ olduğu gösterilmelidir. Bazı $l \in I$ için $e^1_{j_s}x \in e^1_{j_s}G_l$ olsun. O halde $e^1_{j_s}x \in \bigcup_{l\in I} e^1_{j_s}G_l$ olur. Ayrıca $x \in G_l$ olup $x \in \bigcup_{l\in I} G_l$ elde edilir. Böylece $e^1_{j_s}x \in e^1_{j_s}\left(\bigcup_{l\in I} G_l\right)$ olur. Buradan $\bigcup_{l\in I} e^1_{j_s}G_l \subseteq e^1_{j_s}\left(\bigcup_{l\in I} G_l\right)$ kapsamasının mevcut olduğu görülür. Diğer taraftan $x \in \bigcup_{l\in I} G_l$ olsun. O halde $e^1_{j_s}x \in e^1_{j_s}\left(\bigcup_{l\in I} G_l\right)$ olur. $x \in \bigcup_{l\in I} G_l$ ise bazı $l \in I$ için $x \in G_l$ dir. Böylece $e^1_{j_s}x \in e^1_{j_s}G_l$ olur. Buradan $e^1_{j_s}x \in \bigcup_{l\in I} e^1_{j_s}G_l$ olup $e^1_{j_s}\left(\bigcup_{l\in I} G_l\right) \subseteq \bigcup_{l\in I} e^1_{j_s}G_l$ elde edilir. Çift yönlü kapsamadan istenen eşitlik elde edilir. Dahası $\bigcup_{l\in I} G_l \in \tau$ olup $\bigcup_{l\in I} e^1_{j_s}G_l = e^1_{j_s}\left(\bigcup_{l\in I} G_l\right) \in \tau^1_{j_s}$ olur. Benzer şekilde $\left(X^2_{j_s}, \tau^2_{j_s}\right)$ ikilisinin de topolojik uzay olduğu gösterilir. Hausdorffluk özelliği kalıtsal bir özellik olduğu için $\left(X^1_{j_s}, \tau^1_{j_s}\right)$ ve

$\left(X^{2}_{j_s}, \tau^{2}_{j_s}\right)$ topolojik uzayları da Hausdorff topolojik uzaylardır.

Teorem 5.3.16. (X,τ) bir topolojik H_2-modül, $s=1,2,3$ ve $i=1,2$ için $\left(X^{i}_{j_s}, \tau^{i}_{j_s}\right)$ topolojik uzaylar olmak üzere

$$\begin{aligned} + &: X^{i}_{j_s} \times X^{i}_{j_s} \to X^{i}_{j_s} \\ \cdot &: H_2 \times X^{i}_{j_s} \to X^{i}_{j_s} \end{aligned}$$

fonksiyonları süreklidir.

İspat. (X,τ) bir topolojik H_2-modül olduğundan $+: X \times X \to X$ ve $\cdot: H_2 \times X \to X$ fonksiyonları süreklidir. $\left(X^{i}_{j_s}, \tau^{i}_{j_s}\right)$ topolojik uzayında herhangi bir $G^{i}_{j_s} \in \tau^{i}_{j_s}$ açık cümlesini alalım. Bu durumda $G^{i}_{j_s} = e^{i}_{j_s} G$ olacak şekilde $G \in \tau$ vardır. Toplama ve çarpma fonksiyonları (X,τ) topolojik uzayında sürekli olduğundan G cümlesinin toplama ve çarpma fonksiyonları altındaki ters görüntülerini sırasıyla (G_1, G_2) ve (N_ζ, G_3) ile gösterirsek bu cümleler $X \times X$ ve $H_2 \times X$ üzerinde açık cümlelerdir. Burada N_ζ, ζ bihiperbolik sayısının H_2 bihiperbolik sayılar halkası üzerindeki bir topolojisine göre komşuluğudur. Buradan $G^{i}_{j_s}$ cümlesinin $+: X^{i}_{j_s} \times X^{i}_{j_s} \to X^{i}_{j_s}$ ve $\cdot: H_2 \times X^{i}_{j_s} \to X^{i}_{j_s}$ altındaki ters görüntüleri sırasıyla $\left(e^{i}_{j_s} G_1, e^{i}_{j_s} G_2\right)$ ve $\left(e^{i}_{j_s} N_\zeta, e^{i}_{j_s} G_3\right)$ olup bu cümleler $X^{i}_{j_s} \times X^{i}_{j_s}$ ve $H_2 \times X^{i}_{j_s}$ kartezyen cümlelerinde açık cümlelerdir. Böylece $+: X^{i}_{j_s} \times X^{i}_{j_s} \to X^{i}_{j_s}$ ve $\cdot: H_2 \times X^{i}_{j_s} \to X^{i}_{j_s}$ fonksiyonları süreklidir.

Özel olarak $s=2,3$ için $\zeta^{1}_{j_s}, \zeta^{2}_{j_s} \in H$ olduğundan $X^{1}_{j_s}$ ve $X^{2}_{j_s}$ alt cümleleri, X H_2- modülünün $H-$alt modülü de olmaktadır. Bu durumda $s=2,3$ ve $i=1,2$ için

$$\begin{aligned} + &: X^{i}_{j_s} \times X^{i}_{j_s} \to X^{i}_{j_s} \\ \cdot &: H \times X^{i}_{j_s} \to X^{i}_{j_s} \end{aligned}$$

fonksiyonları da süreklidir.

Sonuç 5.3.5. $i = 1,2$ ve $s = 1,2,3$ için $\left(X_{j_s}^i, \tau_{j_s}^i\right)$ ikilileri birer topolojik H_2- modüldür.

Özel olarak $s = 2,3$ için $\left(X_{j_s}^i, \tau_{j_s}^i\right)$ uzayları topolojik $H-$modül de olur.

Teorem 5.3.17. X bir topolojik H_2-modül olsun. Bu durumda herhangi $y \in X$ için $T_y : X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için $T_y(x) = x + y$ olacak şekilde tanımlanırsa T_y dönüşümü bir homeomorfizmdir.

İspat. Topolojik modül tanımı gereği T_y dönüşümü süreklidir. Modül aksiyomlarından T_y dönüşümü birebir ve örtendir. Dahası $T_y^{-1}(x) = T_{-y}(x) = x - y$ olup $T_y \circ T_{-y} = I$ ve $T_{-y} \circ T_y = I$ elde edilir. Böylece $T_y^{-1} = T_{-y}$ dönüşümü de süreklidir. Dolayısıyla T_y dönüşümü bir homeomorfizmdir.

Teorem 5.3.18. X bir topolojik H_2-modül olsun. Herhangi $\zeta \in H_2^*$ için $M_\zeta : X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için $M_\zeta(x) = \zeta x$ olacak şekilde tanımlanırsa M_ζ dönüşümü bir homeomorfizmdir.

İspat. M_ζ dönüşümü topolojik H_2-modül tanımı gereği sürekli ve modül aksiyomlarından birebir ve örtendir. Dahası $\zeta \in H_2^*$ için $M_\zeta^{-1}(x) = M_{1/\zeta}(x) = \dfrac{x}{\zeta}$ olup $M_\zeta \circ M_{1/\zeta} = I$ ve $M_{1/\zeta} \circ M_\zeta = I$ elde edilir. Böylece $M_\zeta^{-1} = M_{1/\zeta}$ dönüşümü de süreklidir. Dolayısıyla M_ζ dönüşümü bir homeomorfizmdir.

$\overset{\circ}{A}$, A cümlesinin içini ve $\overline{A}$, A cümlesinin kapanışını göstermek üzere X topolojik H_2-modülünün alt cümlelerinin iç ve kapanışlarının özelliklerini inceleyelim.

Teorem 5.3.19. X bir topolojik H_2-modül ve $\varnothing \neq B \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

a. $\left(e_{j_s}^1 B\right)^\circ = e_{j_s}^1 B^\circ$ ve $\left(e_{j_s}^2 B\right)^\circ = e_{j_s}^2 B^\circ$ $(s=1,2,3)$

b. $\overline{\left(e_{j_s}^1 B\right)} = e_{j_s}^1 \overline{B}$ ve $\overline{\left(e_{j_s}^2 B\right)} = e_{j_s}^2 \overline{B}$ $(s=1,2,3)$

İspat.

a. $x \in \left(e_{j_s}^1 B\right)^\circ$ alalım. O halde bir $G \subseteq X$ açık komşuluğu $x \in e_{j_s}^1 G \subseteq e_{j_s}^1 B$ olacak şekilde mevcuttur. $x = e_{j_s}^1 y$ ve $y \in G$ olsun. Açıkça $y \in G^\circ$ olur. Böylece $x = e_{j_s}^1 y \in e_{j_s}^1 B^\circ$ elde edilir. O halde $\left(e_{j_s}^1 B\right)^\circ \subseteq e_{j_s}^1 B^\circ$ kapsaması mevcuttur. Diğer yandan $y \in B^\circ$ alalım. Bu durumda $e_{j_s}^1 y \in e_{j_s}^1 B^\circ$ olur. $y \in B^\circ$ ise $y \in G \subseteq B$ olacak şekilde $G \subseteq X$ açık komşuluğu vardır. Böylece $e_{j_s}^1 y \in e_{j_s}^1 G \subseteq e_{j_s}^1 B$ olup G, X cümlesinde açık cümle olduğundan Teorem 5.3.15'ten $e_{j_s}^1 G$ cümlesi de $e_{j_s}^1 X$ cümlesinde bir açık cümledir. O halde $e_{j_s}^1 y \in \left(e_{j_s}^1 B\right)^\circ$ olur. Buradan $e_{j_s}^1 B^\circ \subseteq \left(e_{j_s}^1 B\right)^\circ$ kapsaması elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\left(e_{j_s}^2 B\right)^\circ = e_{j_s}^2 B^\circ$ eşitliği de benzer yolla ispatlanır.

b. $x \in \overline{\left(e_{j_s}^1 B\right)}$ alalım. O halde $\{x_l\} \in e_{j_s}^1 B$ ağı $\{x_l\} \to x$ olacak şekilde vardır. $\{x_l\} = \left\{e_{j_s}^1 y_l\right\}$ olan $\{y_l\} \in B$ ağı ise $\{y_l\} \to y$ olacak şekilde mevcuttur. Böylece $y \in \overline{B}$ olur. Yani $\{x_l\} = \left\{e_{j_s}^1 y_l\right\} \to e_{j_s}^1 y$ elde edilir. (X, τ) topolojik uzayı Hausdorff olduğundan $\left(e_{j_s}^1 X, \tau_{j_s}^1\right)$ uzayı da Hausdorfftur. O halde $e_{j_s}^1 B \subseteq e_{j_s}^1 X$ alt cümlesinde bir ağın limiti varsa tektir. O halde $x = e^1_{j_s} y \in e^1_{j_s} \overline{B}$ olur. Buradan $\overline{\left(e^1_{j_s} B\right)} \subseteq e^1_{j_s} \overline{B}$ kapsaması elde edilir. Diğer yandan $y \in \overline{B}$ alalım. Bu durumda $e^1_{j_s} y \in e^1_{j_s} \overline{B}$ olur. $y \in \overline{B}$ ise $\{y_l\} \to y$ olan $\{y_l\} \subseteq B$ ağı mevcuttur. Böylece $\left\{e^1_{j_s} y_l\right\} \subseteq e^1_{j_s} B$ ağı $\left\{e^1_{j_s} y_l\right\} \to e^1_{j_s} y$ olacak şekilde mevcuttur. Bu durumda $e^1_{j_s} y \in \overline{\left(e^1_{j_s} B\right)}$ olup $e^1_{j_s} \overline{B} \subseteq \overline{\left(e^1_{j_s} B\right)}$ kapsaması elde edilir. Çift yönlü kapsamadan ispat tamamlanır. İkinci eşitlik için de benzer yol izlenerek ispat yapılır.

Teorem 5.3.20. X bir topolojik vektör uzayı olsun. $A \subseteq X$ ve $B \subseteq X$ ise $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A+B}$ vardır [40].

Teorem 5.3.21. X bir topolojik H_2-modül ve $\varnothing \neq B \subseteq X$ alt cümlesi X cümlesinin H_2-konveks alt cümlesi olsun. Bu durumda $s = 1,2,3$ olmak üzere

a. $B^{\circ} = e^1_{j_s} B^{\circ} + e^2_{j_s} B^{\circ}$,

b. $\overline{B} = e^1_{j_s} \overline{B} + e^2_{j_s} \overline{B}$,

c. B° cümlesi H_2-konveks,

d. $\overline{B}$ cümlesi H_2-konvekstir.

İspat.

a. $x \in B^{\circ}$ alındığında $x = \left(e^1_{j_s} + e^2_{j_s}\right) x = e^1_{j_s} x + e^2_{j_s} x \in e^1_{j_s} B^{\circ} + e^2_{j_s} B^{\circ}$ olduğundan $B^{\circ} \subseteq e^1_{j_s} B^{\circ} + e^2_{j_s} B^{\circ}$ elde edilir. Diğer yandan B cümlesi H_2-konveks olduğundan Teorem 5.3.8'den $B = e^1_{j_s} B + e^2_{j_s} B$ yazılabilir. Böylece $e^1_{j_s} B^{\circ} + e^2_{j_s} B^{\circ}$ cümlesi X

topolojik H_2-modülünün $e_{j_s}^1 \overset{\circ}{B} + e_{j_s}^2 \overset{\circ}{B} \subseteq e_{j_s}^1 B + e_{j_s}^2 B = B$ olan bir açık alt cümlesidir. Fakat B cümlesinin içerdiği en geniş açık cümle $\overset{\circ}{B}$ olmalıdır. O halde $e_{j_s}^1 \overset{\circ}{B} + e_{j_s}^2 \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{B}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

b. $x \in \overline{B}$ alınırsa $x \in e_{j_s}^1 \overline{B} + e_{j_s}^2 \overline{B}$ olup $\overline{B} \subseteq e_{j_s}^1 \overline{B} + e_{j_s}^2 \overline{B}$ elde edilir. Diğer yandan Teorem 5.3.19 ve Teorem 5.3.20'den $e_{j_s}^1 \overline{B} + e_{j_s}^2 \overline{B} = \overline{e_{j_s}^1 B} + \overline{e_{j_s}^2 B} \subseteq \overline{e_{j_s}^1 B + e_{j_s}^2 B} = \overline{B}$ olur. Böylece verilen eşitlik elde edilir.

c. B, H_2-konveks olduğundan her $x, y \in B$ ve $0 \leq \zeta \leq 1$ olacak şekildeki her $\zeta \in H_2^+$ bihiperbolik sayısı için $\zeta x + (1-\zeta) y \in B$ dir. Yani x ve y elemanları B cümlesini tararken $\zeta x + (1-\zeta) y$ yine B cümlesinin elemanıdır. O halde $\zeta B + (1-\zeta) B \subseteq B$ kapsaması mevcuttur. $\overset{\circ}{B} \subseteq B$ olduğundan $\zeta \overset{\circ}{B} + (1-\zeta) \overset{\circ}{B} \subseteq B$ olur. $\zeta = 0$ ise $\zeta \overset{\circ}{B} + (1-\zeta) \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{B}$ olur. $\zeta \neq 0$ olsun. Bu durumda $\overset{\circ}{B}$, X 'de açık olduğundan ve X 'de toplama ve skalerle çarpma işlemleri homeomorfizm olduğundan $\zeta \overset{\circ}{B} + (1-\zeta) \overset{\circ}{B}$ cümlesi de açık cümledir. Ancak B cümlesinin kapsadığı en geniş açık $\overset{\circ}{B}$ olduğundan $\zeta \overset{\circ}{B} + (1-\zeta) \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{B}$ olmalıdır. Böylece $\overset{\circ}{B}$ cümlesi de H_2-konvekstir.

d. B, X topolojik H_2-modülünün H_2-konveks alt cümlesi olsun. $0 \leq \zeta \leq 1$ olacak şekildeki her $\zeta \in H_2^+$ bihiperbolik sayısı için

$$\begin{aligned} \varphi_\zeta : X \times X &\to X \\ (x, y) &\to \zeta x + (1-\zeta) y \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlarsak X topolojik H_2-modül olduğundan X üzerinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri sürekli olup böylelikle φ_ζ dönüşümü de sürekli olur. B cümlesi H_2-konveks olduğundan herhangi $0 \leq \zeta \leq 1$ olan $\zeta \in H_2^+$ için

$\varphi_{\zeta}\left(B\times B\right)\subseteq B$ mevcuttur. Böylece $\overline{\varphi_{\zeta}\left(B\times B\right)}\subseteq\overline{B}$ olur. φ_{ζ} dönüşümü sürekli olduğundan $\varphi_{\zeta}\overline{\left(B\times B\right)}\subseteq\overline{\varphi_{\zeta}\left(B\times B\right)}$ vardır. Sonuç olarak $\varphi_{\zeta}\left(\overline{B}\times\overline{B}\right)=\varphi_{\zeta}\overline{\left(B\times B\right)}\subseteq\overline{B}$ olup $\overline{B}$, X topolojik H_2-modülünün H_2-konveks alt cümlesidir.

Teorem 5.3.22. X bir topolojik H_2-modül ve $k=1,2,3$ için $\varnothing\neq B\subseteq X$ alt cümlesi X cümlesinin SM_k-dengeli alt cümlesi olsun. Bu durumda $\overline{B}$ cümlesi ve θ birim eleman olmak üzere $\theta\in\overset{\circ}{B}$ şartı ile B° cümlesi SM_k-dengeli cümledir.

İspat. $\zeta\overline{\zeta}^{j_k}\leq 1$ olacak şekilde bir $\zeta\in SM_k\left(O\right)$ alalım. O halde $\zeta=0$ ise $\zeta\overline{B}=\left\{\theta\right\}\subseteq\overline{B}$ olur. $\zeta\neq 0$ olsun. $B\subseteq X$ cümlesi SM_k-dengeli alt cümle olduğundan $\zeta B\subseteq B$ dir. O halde $\overline{\zeta B}\subseteq\overline{B}$ olur. Teorem 5.3.18'den $\zeta\in H_2^{*}$ için skalerle çarpma dönüşümü homeomorfizm olduğundan $\zeta\overline{B}=\overline{\zeta B}$ dır. Yani $\zeta\overline{B}=\overline{\zeta B}\subseteq\overline{B}$ elde edilir. Böylece $\overline{B}$ cümlesi SM_k-dengeli cümledir. Diğer yandan $\theta\in B^{\circ}$ olsun. $\zeta=0$ ise $\zeta B^{\circ}=\left\{\theta\right\}\subseteq B^{\circ}$ olur. $\zeta\neq 0$ ise $B\subseteq X$ cümlesi SM_k-dengeli alt cümle olduğundan $\zeta B\subseteq B$ dir. O halde $\left(\zeta B\right)^{\circ}\subseteq B^{\circ}$ olur. Teorem 5.3.18'den skalerle çarpma dönüşümü homeomorfizm olduğundan $\zeta B^{\circ}=\left(\zeta B\right)^{\circ}$ dır. Yani $\zeta B^{\circ}=\left(\zeta B\right)^{\circ}\subseteq B^{\circ}$ elde edilir. Böylece B° cümlesi H_2-konveks cümledir.

Teorem 5.3.23. X bir topolojik H_2-modül ve $k=1,2,3$ için $\varnothing\neq B\subseteq X$ alt cümlesi X cümlesinin NM_k-dengeli alt cümlesi olsun. Bu durumda $\overline{B}$ cümlesi NM_k-dengeli cümledir.

İspat. $\zeta\overline{\zeta}^{j_k}=0$ olacak şekilde bir $\zeta\in NM_k\left(O\right)$ alalım. O halde $\zeta=0$ ise $\zeta\overline{B}=\left\{\theta\right\}\subseteq\overline{B}$ olur. $\zeta\neq 0$ olsun. $B\subseteq X$ cümlesi NM_k-dengeli alt cümle olduğundan $\zeta B \subseteq B$ dir. O halde $\overline{\zeta B} \subseteq \overline{B}$ olur. Skalerle çarpma dönüşümü sürekli olduğundan $\zeta \overline{B} \subseteq \overline{\zeta B}$ dır. Yani $\zeta \overline{B} \subseteq \overline{\zeta B} \subseteq \overline{B}$ elde edilir. Böylece $\overline{B}$ cümlesi NM_k −dengeli cümledir.

Teorem 5.3.18'deki skalerle çarpma dönüşümünün sadece $\zeta \in H_2^*$ için tersi mevcut olduğundan ve $\zeta \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{(\zeta B)}$ olması için skalerle çarpma işleminin tersinin sürekli olması gerektiğinden B alt cümlesi NM_k −dengeli iken B° cümlesi NM_k −dengeli olmak zorunda değildir.

Teorem 5.3.24. X bir topolojik H_2 −modül ve $k = 1,2,3$ için $\varnothing \neq B \subseteq X$ alt cümlesi X cümlesinin TM_k −dengeli alt cümlesi olsun. Bu durumda $\overline{B}$ cümlesi ve θ birim eleman olmak üzere $\theta \in \overset{\circ}{B}$ şartı ile B° cümlesi TM_k −dengeli cümledir.

Teorem 5.3.25. X bir topolojik H_2 −modül olsun. Bu durumda $k = 1,2,3$ için aşağıdakiler sağlanır.

a. X cümlesinde θ elemanının tüm komşulukları θ elemanının bir SM_k −emen komşuluğunu içerir.

b. X cümlesinde θ elemanının tüm komşulukları θ elemanının bir SM_k −dengeli komşuluğunu içerir.

c. X cümlesinde θ elemanının tüm H_2 −konveks komşulukları θ elemanının H_2 −konveks ve SM_k −dengeli komşuluğunu içerir.

İspat.

a. U_θ cümlesi $\theta \in X$ elemanının herhangi bir komşuluğu ve $x \in X$ olmak üzere V_x,

x elemanının komşuluğu olsun. Skalerle çarpma işlemi $(\zeta, x) \to \zeta x$ sürekli olduğundan $\zeta = 0$ alınırsa $M_0(x) = \theta$ olup her $U_\theta \subseteq X$ için $M_{A_0}(V_x) \subseteq U_\theta$ olacak şekilde x noktasının $V_x \subseteq X$ komşuluğu ve $0 \in H_2$ elemanının $A_0 \subseteq M_k \subseteq H_2$ komşuluğu vardır. Bu durumda $0 \in H_2$ merkezli $\lambda > 0$ yarıçaplı A_0 komşuluğunda $|\mu|_{j_k} \leq \lambda$ olan $\mu \in (SM_k(O) \cap A_0)$ için $\mu x \in W_\theta$ olacak şekilde $W_\theta \subseteq U_\theta$ vardır. Buradan da $\frac{1}{\lambda} = \delta$ dersek $\delta > 0$ olup $|\mu^{-1}|_{j_k} \geq \delta$ olan μ skalerleri için $x \in \mu^{-1} W_\theta$ olur. Dolayısıyla W_θ, X cümlesinin $SM_k -$emen alt cümlesidir.

b. U_θ cümlesi $\theta \in X$ elemanının herhangi bir komşuluğu olsun. $M_0(\theta) = \theta$ olup skalerle çarpma işlemi sürekli olduğundan $0 \in H_2$ elemanının $\delta > 0$ yarıçaplı komşuluğundaki elemanlar $\mu \in H_2$ olmak üzere $|\mu|_{j_k} \leq \delta$ olup $\theta \in X$ elemanının bir V_θ komşuluğu vardır öyle ki $\mu V_\theta \subseteq U_\theta$ dır. Burada özel olarak $\mu \in SM_k(O)$ seçelim. $\bigcup_{|\mu|_{j_k} \leq \delta} \mu V_\theta = A_\theta$ dersek; $\mu = 0$ için $\bigcup_{|\mu|_{j_k} \leq \delta} \mu V_\theta = \theta$ olup $\{\theta\} \subseteq U_\theta$ dır. $\mu \neq 0$ ise A_θ, $\theta \in X$ elemanının bir komşuluğudur ve $A_\theta \subseteq U_\theta$ dır. Çünkü skalerle çarpma işlemi tersi olan skalerler için homeomorfizmdir. Diğer yandan $x \in A_\theta$ ve $\zeta \in SM_k(O)$ olan $|\zeta|_{j_k} \leq 1$ skalerlerini alalım. Bu durumda $x = \mu y$ olan bazı $y \in V_\theta$ vardır. Ayrıca $|\zeta\mu|_{j_k} = |\zeta|_{j_k} |\mu|_{j_k} \leq \delta$ olduğundan $\zeta x = \zeta\mu y \in A_\theta$ elde edilir. O halde A_θ cümlesi U_θ komşuluğunun $SM_k -$dengeli alt cümlesidir.

c. $U_\theta \subseteq X$, $\theta \in X$ elemanının $H_2 -$konveks komşuluğu ve $A = \bigcap_{|\mu|_{j_k} = 1} \mu U_\theta$ olsun. Bir önceki şıktan $\theta \in X$ elemanının her komşuluğu θ elemanının bir $SM_k -$dengeli komşuluğunu içerdiğinden $\theta \in X$ elemanının $V_\theta \subseteq U_\theta$ olacak şekilde $SM_k -$dengeli komşuluğu vardır. Bu durumda $|\mu|_{j_k} = 1$ olan $\mu \in SM_k(O)$ için $\mu^{-1} V_\theta = V_\theta$ olur. Böylece $V_\theta \subseteq \mu U_\theta$ elde edilir. Böylece $V_\theta \subseteq A$ olup buradan A cümlesinin $\theta \in X$

elemanının bir komşuluğu olduğu görülür ve $\theta \in \overset{\circ}{A} \subseteq U_\theta$ olur. Şimdi $\overset{\circ}{A}$ cümlesinin H_2-konveks ve SM_k-dengeli alt cümle olduğunu gösterelim. Konveks cümlelerin lineer dönüşümler altındaki görüntüleri ve ters görüntüleri konveks olduğundan $|\mu|_{j_k}=1$ olan $\mu \in SM_k(O)$ için μU_θ cümleleri H_2-konvekstir. Ayrıca H_2-konveks cümlelerin arakesiti de H_2-konveks olup $A=\bigcap_{|\mu|_{j_k}=1}\mu U_\theta$ cümlesi de H_2-konvekstir. Böylece Teorem 5.3.21'in (c) şıkkından $\overset{\circ}{A}$ cümlesi de H_2-konvekstir. Son olarak μU_θ cümlesi θ elemanını içeren H_2-konveks cümle olduğundan $0 \leq \zeta \leq 1$ olacak şekildeki her $\zeta \in H_2^+$ bihiperbolik sayısı için $\zeta\mu U_\theta \subseteq \mu U_\theta$ olur. Diğer yandan $|\lambda|_{j_k}=1$ olan $\lambda \in SM_k(O)$ için $\zeta\lambda A=\bigcap_{|\mu|_{j_k}=1}\zeta\lambda\mu U_\theta=\bigcap_{|\mu|_{j_k}=1}\zeta\mu U_\theta \subseteq \bigcap_{|\mu|_{j_k}=1}\mu U_\theta = A$ olur ve buradan A cümlesi SM_k-dengelidir. O halde Teorem 5.3.22 gereği $\theta \in \overset{\circ}{A}$ olduğundan $\overset{\circ}{A}$ cümlesi de SM_k-dengelidir.

Teorem 5.3.26. X bir topolojik H_2-modül olsun. Bu durumda $k=1,2,3$ için aşağıdakiler sağlanır.

a. X cümlesinde θ elemanının tüm komşulukları θ elemanının bir TM_k-emen komşuluğunu içerir.

b. X cümlesinde θ elemanının tüm komşulukları θ elemanının bir TM_k-dengeli komşuluğunu içerir.

c. X cümlesinde θ elemanının tüm H_2-konveks komşulukları θ elemanının H_2-konveks ve TM_k-dengeli komşuluğunu içerir.

Skalerle çarpma işlemi sadece tersi olan skalerler için homeomorfizm olduğundan $\theta \in X$ elemanının komşuluğu NM_k-dengeli komşuluk içermemektedir. Ayrıca

$\theta \in X$ elemanının $H_2 -$konveks komşuluğu θ elemanının bir $NM_k -$dengeli komşuluğunu içermez.

KAYNAKLAR

[1] Hamilton, W. R., Lectures on Quaternions, 1-868, 1853.

[2] Cockle, J., On certain functions resembling Quaternions, and on a new imaginary in algebra, London-Dublin-Edinburgh Philosophical Magazine, 33: 435-439, 1848.

[3] Cockle, J., On a new imaginary in algebra, London-Dublin-Edinburgh Philosophical Magazine, 34: 37-47, 1849.

[4] Cockle, J., On the symbols of algebra and on the theory of Tessarines, London-Dublin-Edinburgh Philosophical Magazine, 34: 406-410, 1849.

[5] Segre, C. Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici (The real representation of complex elements and hyperalgebraic entities), Mathematische Annalen, (40), 413-467, 1892.

[6] Klein, F., Vorlesungen über nicht-Euklidische geometrie, Springer, Berlin, 1-326, 1928.

[7] Yaglom, I. M., A Simple non-Euclidean geometry and its physical basis, Springer-Verlag New York Inc., 1-326, 1979.

[8] Fjelstad, P., Extending special relativity via the perplex numbers, American J. of Phys., 54(5), 416-422, 1986.

[9] Sobczyk, G., The hyperbolic number plane, The College Mathematics J., 26(4), 268-280, 1995.

[10] Rosenfeld, B., Geometry of Lie Groups, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1-393, 1997.

[11] Baley Price, G., An introduction to multicomplex spaces and functions, Marcel Dekker Inc., Newyork, (140), 1-402, 1991.

[12] Rochon, D., Shapiro, M., On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers, An. Univ. Oradea Fasc. Mat., 11, 71-110, 2004.

[13] Catoni, F., Boccaletti, D., Cannata, R., Catoni, V., Nichelatti, E., Zampetti, P., The mathematics of Minkowski Space-Time with an introduction to commutative hypercomplex numbers, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1-265, 2008.

[14] Olario, S., Complex numbers in $n-$dimensions, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Vol. 190, 51-148, 2002.

[15] Pogorui, A. A., Rodriguez-Dagnino, R. M., Rodrigue-Said, R. D., On the set of zeros of bihyperbolic polynomials, Complex Variables and Elliptic Equations, 53:7, 685-690, 2008.

[16] Luna Elizarraras, M. E., Shapiro, M., Struppa, D. C., Vajiac, A., Bicomplex numbers and their elementary functions, CUBO A Math. J. 14 (2), 61-80, 2012.

[17] Alpay, D., Luna Elizarraras, M. E., Shapiro, M., Struppa, D. C., Basics of functional analysis with bicomplex scalars and bicomplex Schur analysis, Springer Briefs in Mathematics, 1-95, 2014.

[18] Srivastava, R. K., Certain topological aspects of bicomplex space, Bull. Pure and Appl. Math., (2), 222-234, 2008.

[19] Srivastava, R. K., Singh, S., Certain bicomplex dictionary order topologies, International J. of Math. Sci. and Eng. Appls., (4), 245-258, 2010.

[20] Srivastava, R. K., Singh, S., On bicomplex nets and their confinements, American Journal of Mathematics and Statistics, 1(1), 8-16, 2011.

[21] Srivastava, R. K., Singh, S., Some results on compactness in Bicomplex space, Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences, Vol. 13, 11-19, 2013.

[22] Prakash, A., Kumar, P., Certain results on bicomplex topologies and their comparison, Global Journal of Science Frontier Research Mathematics and Decision Sciences, 16 (4), 39-61, 2016.

[23] Singh, S., Kumar, S., On topological aspects of $\mathbb{C}_0^3$ and $\mathbb{C}_2$ with special emphasis on lexicographic order, American Institute of Physics, doi:10.1063/1.4990328, 2017.

[24] Zeeman, E. C., Causality implies the Lorentz group, J. Math. Phys., 5: 490-493, 1964.

[25] Zeeman, E. C., The topology of Minkowski space, Topology, 6: 161-170, 1966.

[26] Nanda S., Weaker versions of Zeeman's conjectures on topologies for Minkowski space, J. Math. Phys., 13: 12-15, 1972.

[27] Nanda S., Topology for Minkowski space, J. Math. Phys., 12: 394-401, 1971.

[28] Agrawal, G., Shrivastava, S., A study of non-Euclidean $s-$topology, ISRN Mathematical Physics, Article ID 896156, 11 pages, 2012.

[29] Agrawal, G., Shrivastava, S., $t-$topology on the $n-$dimensional Minkowski space, J. Math. Phys., Article ID 053515, 6 pages, 2009.

[30] Soykan, Y., Fonksiyonel analiz, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 1-545, 2016.

[31] Grothendieck, A., Topological vector spaces, New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1-245, 1973.

[32] Luna Elizarraras, M. E., Shapiro, M., Perez-Regalado C. O., On linear functionals and hahn-banach theorems for hyperbolic and bicomplex modules, Adv. Appl. Clifford Alg., Vol 24, 1105-1129, 2014.

[33] Gervais Lavoie, R., Marchildon, L., Rochon, D., Finite-dimensional bicomplex hilbert spaces, Adv. Appl. Clifford Alg., 21 (3), 561-581, 2011.

[34] Kumar, R., Kumar, R., Rochon, D, The fundamental theorems in the framework of bicomplex topological modules, arXiv:1109.3424v1, 2011.

[35] Kumar, R., Saini, H., Topological bicomplex modules, Adv. Appl. Clifford Alg., 26 (4), 1249-1270, 2016.

[36] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, London, 1-471, 1983.

[37] Birman, G. S., Nomizu, K., Trigonometry in Lorentzian geometry, The American Mathematical Monthly, 91(9), 543-549, 1984.

[38] Luna Elizarraras, M. E., Shapiro, M., Struppa, D. C., Vajiac A., Bicomplex holomorphic functions: The algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers, Frontiers in Mathematics, Birkhauser, Basel, 1-231, 2015.

[39] Gargoubi, H., Kossentini, S., $f-$algebra structure on hyperbolic numbers. Adv. Appl. Clifford Alg., 26(4), 1211–1233, 2016.

[40] Rudin, W., Functional analysis, 2nd Edition, McGraw Hill, New York, 1-424, 1991.

[41] Luxemburg, W. A. J., Zaanen, A. C.: Riesz spaces I. North-Holland. Amsterdam, 1-514, 1971.

[42] Zaanen, A. C.: Riesz spaces II. North-Holland. Amsterdam, 1-720, 1983.

[43] Catoni, F., Cannata, R., Zampetti, P., An introduction to commutative quaternions, Adv. Appl. Clifford Alg., 16, 1-28, 2006.

[44] Rahimov, A., Topolojik uzaylar, Seçkin Yayıncılık, Ankara, 1-328, 2006.

ÖZGEÇMİŞ

Merve BİLGİN, 05.02.1991 tarihinde Düzce'de doğdu. İlköğrenimini Düzce, Cumayeri, Nimet Pısak İlköğretim Okulu'nda, ortaöğrenimini Düzce Süper Lisesi'nde tamamladı. 2008 yılında Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2012 yılında tamamladı. 2012-2017 öğretim yıllarında Düzce Kültür Eğitim Kurumlarında, 2017-2018 öğretim yıllarında Düzce Pegem Akademi'de Matematik Öğretmeni olarak çalıştı. 2018 yılında Düzce Birey Eğitim Kurumunda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaya başladı. Halen, aynı kurumda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Geometri Bilim Dalında 2012 yılında başladığı yüksek lisans eğitimini 2015 yılında tamamladı. 2015 yılında aynı üniversitede Topoloji Bilim Dalında doktora programına kaydoldu. Halen aynı üniversitede öğrenimini sürdürmektedir.