T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERHANGİ BİR MATRİS İLE BİR KUADRATİK MATRİSİN DOĞRUSAL BİLEŞİMİNİN KARAKTERİZASYONLARI

DOKTORA TEZİ

Nurgül KALAYCI

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**MATEMATİĞİN TEMELLERİ VE MATEMATİK LOJİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Murat SARDUVAN**

Ocak 2020

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERHANGİ BİR MATRİS İLE BİR KUADRATİK MATRİSİN DOĞRUSAL BİLEŞİMİNİN KARAKTERİZASYONLARI

DOKTORA TEZİ

Nurgül KALAYCI

Enstitü Anabilim Dalı	:	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	:	**MATEMATİĞİN TEMELLERİ VE MATEMATİK LOJİK**

Bu tez 03 / 01 / 2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR Jüri Başkanı	**Doç. Dr. Murat KİRİŞÇİ Üye**	**Doç. Dr. Fuat USTA Üye**

Doç. Dr. Murat SARDUVAN Üye	**Doç. Dr. Nesrin GÜLER Üye**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Nurgül KALAYCI

03/01/2020

ÖNSÖZ

Lisansüstü öğrenimim süresince bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Sayın Doç. Dr. Murat SARDUVAN'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Doktora öğrenimim süresince 2211-A Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Özellikle, tüm eğitimim ve öğrenimim süresince maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma sonsuz sevgi ve minnettarlığımı belirtmek isterim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}^*$	: Sıfırdan farklı karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}_{m\times n}$	: $m\times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathbb{C}_n$	: $n\times n$ boyutlu karmaşık matrisler kümesi
$\mathbb{C}^n$	: $n\times 1$ boyutlu karmaşık vektörler kümesi
$\mathbf{I}_n$	: $n\times n$ boyutlu birim matris
$\mathbf{0}$	: Uygun boyutlu sıfır matris
$\mathbf{0}_n$	: $n\times n$ boyutlu sıfır matris
$\sigma(\mathbf{M})$	: $\mathbf{M}$ matrisinin spektrumu
$\mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2$	: $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrislerinin direkt toplamı
$rk(\mathbf{M})$	: $\mathbf{M}$ matrisinin rankı
$\det(\mathbf{M})$	: $\mathbf{M}$ matrisinin determinantı
$p(\mathbf{M})$	: $\mathbf{M}$ matrisinin p polinomu altındaki resmi
$q_M(t)$	: $\mathbf{M}$ matrisinin minimal polinomu
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\subset$	: Alt kümesidir
$U \setminus V$	: U fark V kümesi
(a,b)	: a, b sıralı ikilisi
$\blacksquare$	: İspat sonu
bkz.	: Bakınız
vb.	: Ve benzeri

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: idempotent matris, involutif matris, kuadratik matris, doğrusal bileşim, direkt toplam, köşegenleştirme.

İlk bölümde, çalışmanın konusu ve önemi hakkında bazı bilgiler verilmektedir. Ayrıca bu çalışmada ele alınan matris sınıfları ile ilgili literatürde mevcut olan bazı çalışmalardan bahsedilmektedir. Çalışma boyunca kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve özellikler ikinci bölümde yer almaktadır.

Bölüm 3'te, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri üzerine konulmuş bazı şartların sağlanması ve $a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ doğrusal bileşim matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşullar ortaya konulmaktadır. Burada ve $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri sırasıyla bir $\{\alpha, \beta\}-$kuadratik matris ve herhangi bir matristir, ayrıca $a, b \in \mathbb{C}^*$'dir. Bölüm 4'te $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin aynı koşulları sağlaması ve aynı $a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ doğrusal bileşim matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşullar ortaya konulmaktadır.

Bölüm 3 ve 4'te ortaya konulan sonuçları açıklayıcı nitelikteki örneklere, Bölüm 5'te yer verilmektedir.

ON CHARACTERIZATIONS OF LINEAR COMBINATION OF AN ARBITRARY MATRIX AND A QUADRATIC MATRIX

SUMMARY

Keywords: idempotent matrix, involutive matrix, quadratic matrix, linear combination, direct sum, diagonalization.

In the first chapter, it is given some information about the subject and scope of the study. Also, it is mentioned from some studies in the literature related to matrix classes discussed in the study. Some fundamental concepts and properties which will be used throughout the study are given in the second chapter.

In the Chapter 3, it has been established necessary and sufficient conditions for the idempotency of the linear combination matrix $a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ and implying certain conditions imposed on the matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ where $\mathbf{A}$ is an $\{\alpha, \beta\}$ – quadratic matrix, $\mathbf{B}$ is an arbitrary matrix, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \beta$ and $a, b \in \mathbb{C}^*$. In the Chapter 4, it has been established necessary and sufficient conditions for the involutiveness of the same linear combination matrix $a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ and implying the same conditions.

Examples explaining the results which are obtained in Chapter 3 and 4 are given in Chapter 5.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Çalışmanın Önemi

Doğrusal denklem sistemlerinin çözümü MÖ 300 yıllarına dayanıyor olsa da bu denklemlerin bloklar halinde yani matrisler ile çözümüne, MÖ 100 yıllarına ait Çin kaynaklarında rastlanmaktadır. O zamanlardan günümüze kadar birçok gelişme gösteren matris yapıları, matematik, fen, sosyal gibi birçok bilim dalında yer almıştır ve halen kullanılmaya devam edilmektedir. Uygulama alanlarına örnek olarak, kriptoloji [1], oyun teorisi [2], bilgisayar grafikleri [3], graf teori [4, 5], kuantum mekaniği [6 – 8], ekonomi [9], fizik [10 – 12], istatistik [13 – 16] verilebilir.

Matrisler sağladıkları özelliklere göre, involutif, idempotent, tripotent gibi özel alır. Böyle özel tipli matris sınıfları, birçok matematik ve fizik problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. İstatistik teorisinde idempotent, involutif ve tripotent matrislerin, atom ve molekül fiziğinde idempotent matrislerin ve kuantum mekaniğinde involutif olan Pauli-spin matrislerinin kullanılması verilebilecek örneklerden bazılarıdır [14, 17 – 21]. Ayrıca kriptolojide Hill yöntemine göre şifreleme yapılırken, şifreli metnin çözülmesi için anahtar matrisin tersinin bulunması gerekir. Bu durumda involutif matrisler gibi tersi kendisine eşit olan matrislerin seçilmesi oldukça kullanışlı olmaktadır [22]. Bunların dışında böyle özel tipli matrisler, dijital görüntü şifrelemede de kullanılmaktadır [23].

Uygulamalı bilimler ve matris teorisinde ayrı bir öneme sahip olan özel tipli matrislerin doğrusal bileşimleri de birçok çalışmaya konu olmuştur [24 – 37]. Bu çalışmada da idempotent ve involutif matrisleri kapsayan kuadratik matrisler ele alınmaktadır.

1.2. Literatür Bilgisi ve Çalışmanın İçeriği

Kuadratik matrisler son yıllarda pek çok çalışmada yer almaktadır. Sonlu tane kuadratik matrisin çarpımı olarak ifade edilebilen matrisleri karakterize etme problemi [38] çalışmasında Wang tarafından ele alınmıştır. [39] çalışmasında ise Wang, her karmaşık matrisin, dört kuadratik matrisin bir çarpımı olarak yazılabileceğini ve ele alınan matrisin tersinir olması durumunda çarpımda yer alan matris sayısının üçe indirilebileceğini göstermiştir. Bunun yanı sıra Aleksiejczyk ve Smoktunowicz'in [40] çalışmasında, kuadratik matrislerin birçok özelliği incelenmiştir.

Yukarıda bahsedilen çalışmaların yanı sıra literatürde, $a, b \in \mathbb{C}^*$ ve $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}_n$ özel tipli matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B} \tag{1.1}$$

biçimindeki doğrusal bileşimin karakterizasyonu ile ilgili birçok çalışma mevcuttur [25, 27, 31, 36, 37, 41 – 44]. Bunlardan Uç ve diğerlerine ait [42] çalışmasında, iki kuadratik matrisin doğrusal bileşimlerinin ne zaman bir kuadratik matris olacağı problemi ele alınmaktadır. Uç ve diğerlerinin başka bir çalışmasında, iki kuadratik matrisin doğrusal bileşimlerinin bir genelleştirilmiş kuadratik matris olması için gerekli ve yeterli koşullar ortaya konulmuştur [43]. Petik ve diğerleri [44] çalışmasında, iki genelleştirilmiş kuadratik matrisin doğrusal bileşimlerinin bir genelleştirilmiş kuadratik matris olması için gerekli ve yeterli koşulları elde etmiştir.

Liu ve diğerleri, (1.1) doğrusal bileşimi üzerine yapılan çalışmalara farklı bir soluk getirerek, bileşimdeki iki matristen sadece birini özel tipli matris, diğerini ise herhangi matris olarak ele alıp bazı koşullar altında (1.1) doğrusal bileşim matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşulları elde etmişlerdir [45]. Burada Liu ve diğerleri doğrusal bileşimi oluşturan matrislerden birini $\{\alpha, \beta\}-$kuadratik veya tripotent matris, diğerini ise herhangi bir matris olarak almıştır. Böylece oluşan doğrusal bileşim matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşullar araştırılırken herhangi matris olarak alınan matrisin aslında belirli bir forma sahip olması gerektiği gerçeğine ulaşılmıştır.

Bu çalışmada, [45] çalışmasından esinlenilerek bir $\{\alpha, \beta\}-$kuadratik ve herhangi bir matrisin bazı koşulları sağlaması ve onların doğrusal bileşiminin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşullar Bölüm 3’te verilmektedir. Aynı doğrusal bileşimin idempotent olması yerine bu kez involutif olması için gerekli ve yeterli koşullar Bölüm 4’te verilmiştir.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olan bazı tanımlar ve ispatsız olarak bazı sonuçlar verilmektedir. Çalışma boyunca, i. satır ve j. sütundaki elemanı m_{ij} olan bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matrisi $[m_{ij}]$ ile gösterilecektir.

2.1. Bazı Temel Kavramlar ve Özellikler

Tanım 2.1. Bir $\mathbf{M}_1 \in \mathbb{C}_n$ matrisi için, $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1 = \mathbf{I}_n$ olacak şekilde bir $\mathbf{M}_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisi varsa, $\mathbf{M}_1$ matrisine *tersinir matris*, $\mathbf{M}_2$ matrisine de, $\mathbf{M}_1$ *matrisinin tersi* denir ve $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1^{-1}$ ile gösterilir [46].

Tanım 2.2. $i \neq j$ için $d_{ij} = 0$ koşulunu sağlayan, $\mathbf{D} = [d_{ij}] \in \mathbb{C}_n$ matrisine, bir *köşegen matris* denir ve $d_{ii} = d_i$ olmak üzere $\mathbf{D} = diag(d_1, \ldots, d_n)$ ile gösterilir [47].

Tanım 2.3. $\mathbf{D} \in \mathbb{C}_n$ bir köşegen matris ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\mathbf{D} = \alpha\mathbf{I}_n$ (bütün köşegen elemanları eşit) ise, $\mathbf{D}$ matrisine bir *skaler matris* denir [47].

Tanım 2.4. Bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisine, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ olmak üzere, eğer $j < i$ iken $m_{ij} = 0$ ise bir *üst üçgensel matris*, eğer $j > i$ iken $m_{ij} = 0$ ise bir *alt üçgensel matris* denir [48].

Tanım 2.5. Bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_{m\times n}$ matrisinin bazı satır ve/veya sütunlarının silinmesi ile elde edilen matrise $\mathbf{M}$ matrisinin bir *alt matrisi* denir [48].

Tanım 2.6. Bir matrisin, satırları veya sütunları arasına hayali yatay veya dikey çizgiler çizilmesi ile bu matris alt matrislere parçalanabilir. Böylece oluşan matrise *parçalanmış matris* ve alt matrislere de *bloklar* denir. Eğer

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \cdots & \mathbf{M}_{1c} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \cdots & \mathbf{M}_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{M}_{r1} & \mathbf{M}_{r2} & \cdots & \mathbf{M}_{rc} \end{pmatrix}$$

matrisi bir parçalanmış matris ise, i. satırdaki alt matrisleri $\mathbf{M}_{i1}$, $\mathbf{M}_{i2}, \ldots, \mathbf{M}_{ic}$ olup her birinin satır sayısı eşittir ve benzer şekilde j. sütundaki alt matrisleri $\mathbf{M}_{1j}$, $\mathbf{M}_{2j}$, $\ldots, \mathbf{M}_{rj}$ olup her birinin sütun sayısı eşittir. Ayrıca $\mathbf{M}_{ij}$ alt matrisi, yukarıdaki parçalanmış matrisin $i, j-$*bloğu* olarak tanımlanır ve $r=c$ için eğer $i=j$ ise $\mathbf{M}_{ij}$ alt matrisine, $\mathbf{M}$ matrisinin bir *köşegen bloğu* denir [48].

Tanım 2.7. $\mathbf{M}_{ii} \in \mathbb{C}_{n_i}$ ve $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ olmak üzere, eğer

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{M}_{k-1k-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{kk} \end{pmatrix}$$

ise, $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisine *blok köşegen matris* denir. Böyle bir matrisi $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{11} \oplus \mathbf{M}_{22} \oplus \cdots \oplus \mathbf{M}_{kk} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbf{M}_{ii}$ şeklinde yazmak mümkündür ve buna, $\mathbf{M}_{11}, \mathbf{M}_{22}, \ldots, \mathbf{M}_{kk}$ *matrislerinin direkt toplamı* denir [47].

Tanım 2.8. Bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_{m \times n}$ matrisinin *sütun rankı*, içerdiği doğrusal bağımsız sütunların maksimum sayısı; *satır rankı* ise, içerdiği doğrusal bağımsız satırların maksimum sayısıdır [47].

Tanım 2.9. Bir matrisin (kare veya değil) sade bir forma dönüştürülmesi için satırlara/sütunlara uygulanan üç basit ve temel işlem, *elementer satır/sütun işlemleri* olarak adlandırılır. Bu işlemler, doğrusal denklemlerin çözümleri, rank belirleme ve bir kare matrisin tersinin ve determinantının hesaplanması gibi işlemleri kolaylaştırır. Elementer satır işlemleri aşağıdaki üç işlemden ibarettir.

i) İki satırın yer değiştirmesi,

ii) Bir satırın sıfırdan farklı bir skaler ile çarpılması ve

iii) Bir satırın skaler katının diğer satıra eklenmesi [47].

Teorem 2.10.

i) Bir matrisin satır rankı ile sütun rankı birbirine eşittir, kısaca buna matrisin *rankı* denir ve “$rk(.)$” ile gösterilir.

ii) Bir matrisin rankını, elementer satır ya da sütun işlemleri değiştirmez.

iii) Bu iki uyarı blok matrisler için de geçerlidir [47].

Tanım 2.11. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ olsun. Eğer bir λ skaleri ve sıfırdan farklı bir $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektörü

$$\mathbf{Mx} = \lambda \mathbf{x},$$

denklemini sağlarsa, λ skalerine $\mathbf{M}$ matrisinin bir *özdeğeri* ve $\mathbf{x}$ vektörüne de $\mathbf{M}$ matrisinin λ özdeğeri ile ilişkili bir *özvektörü* denir [47].

Tanım 2.12. Bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesi, $\mathbf{M}$ matrisinin *spektrumu* olarak adlandırılır ve $\sigma(\mathbf{M})$ ile gösterilir [47].

Tanım 2.13. Bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisinin *karakteristik polinomu*, $p_M(t) = \det(t\mathbf{I} - \mathbf{M})$ şeklinde tanımlanır. $p_M(t) = 0$ denklemine ise $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisinin *karakteristik denklemi* denir [47].

Teorem 2.14. (Cayley–Hamilton) $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisinin $p_M(t)$ karakteristik polinomu için $p_M(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$'dır. Başka bir ifadeyle, "Her kare matris, kendi karakteristik polinomunu sağlar" [47].

Tanım 2.15. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisi için bir $p(t)$ polinomuna, eğer $p(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$ oluyorsa, $\mathbf{M}$ matrisinin *sıfırladığı polinom* denir. Cayley – Hamilton teoremi ile her $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisi için böyle *n*. dereceden bir monik polinomunun varlığı (matrisin karakteristik polinomu olarak) garanti edilir [47].

Teorem 2.16. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisi verilsin. $\mathbf{M}$ matrisinin sıfırladığı minumum dereceli bir tek $q_M(t)$ monik (en yüksek dereceli teriminin katsayısı 1 olan) polinomu mevcuttur. Bu polinomun derecesi en fazla n değerini alabilir. Eğer $p(t)$ monik polinomu için $p(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$ sağlanırsa $q_M(t)$ monik polinomu $p(t)$ polinomunu böler. Yani en az bir $h(t)$ monik polinomu için $p(t) = h(t).q_M(t)$ eşitliği sağlanır [47].

Tanım 2.17. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisinin sıfırladığı minumum dereceli yegane $q_M(t)$ monik polinomu, $\mathbf{M}$ matrisinin *minimal polinomu* olarak adlandırılır [47].

Teorem 2.18. Her $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisi için $q_M(t)$ minimal polinomu, $p_M(t)$ karakteristik polinomunu böler. Bununla birlikte $q_M(\lambda) = 0$ olmasının gerekli ve yeterli koşulu λ skalerinin $\mathbf{M}$ matrisinin bir özdeğeri olmasıdır. Böylece $p_M(t) = 0$ denkleminin her kökü aynı zamanda $q_M(t) = 0$ denkleminin de bir köküdür [47].

Tanım 2.19. $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisleri verilsin. Bir $\mathbf{S} \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi için $\mathbf{M}_2 = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{S}$ eşitliği sağlanıyorsa, $\mathbf{M}_2$ matrisi $\mathbf{M}_1$ matrisine *benzer*dir denir. Özel olarak $\mathbf{M}_1$ bir köşegen matris ise $\mathbf{M}_2$ matrisine *köşegenleştirilebilir* denir [47].

Bir matrisin köşegenleştirilebilirliği ile ilgili bazı özellikler aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.20. $q_M(t)$, $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisinin minimal polinomu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $q_M(t)$ minimal polinomunun farklı doğrusal çarpanları vardır.

ii) $q_M(t) = 0$ denkleminin her kökü tek katlıdır.

iii) $q_M(t) = 0$ denklemini sağlayan her t değeri için, $q_M(t)$ polinomunun türevi sıfırdan farklıdır.

iv) $\mathbf{M}$ matrisi köşegenleştirilebilirdir [47].

Teorem 2.21. $\mathbf{M}_1 \in \mathbb{C}_{n_1}, \mathbf{M}_2 \in \mathbb{C}_{n_2}, \ldots, \mathbf{M}_d \in \mathbb{C}_{n_d}$ olmak üzere $\mathbf{M}$ blok köşegen matrisi, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{M}_d$ şeklinde olsun. Bu durumda $\mathbf{M}$ matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_d$ matrisinin köşegenleştirilebilir olmasıdır [47].

Tanım 2.22. $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbb{C}_n$ matrisleri için $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_1\mathbf{S}$ ve $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{S}$ matrislerinin her ikisinin de köşegen olmasını sağlayan bir $\mathbf{S} \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi mevcutsa $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ matrislerine *eşanlı köşegenleştirilebilir* denir [47].

Teorem 2.23. Köşegenleştirilebilir $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbb{C}_n$ matrislerinin eşanlı köşegenleştirilebilir olması için gerekli ve yeterli bir koşul $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$ olmasıdır [47].

2.2. Bazı Özel Tipli Matrisler ve Bazı Özellikleri

Bu kısımda, çalışmada temel olarak ele alınan bazı özel tipli matrislerin tanımları ve onlarla ilgili temel sonuçlar ispatsız olarak verilmektedir. Bununla birlikte bu çalışmada ele alınmamasına rağmen, kapsadıkları özel tipli matrislerin geniş birer sınıfı olmaları ve literatürde üzerlerinde çalışmaların mevcut olması nedeniyle genelleştirilmiş kuadratik ve kübik matrislerin tanım ve özellikleri de yer almaktadır.

Tanım 2.24. Bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisine,

i) $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}$ özelliğini sağlıyorsa, $\mathbf{M}$ matrisine bir *idempotent matris* [14],

ii) $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}_n$ özelliğini sağlıyorsa, $\mathbf{M}$ matrisine bir *involutif matris* [48],

iii) $\mathbf{M}^3 = \mathbf{M}$ özelliğini sağlıyorsa, $\mathbf{M}$ matrisine bir *tripotent matris* denir [14].

Yukarıdaki tanımlardan, bir idempotent veya involutif matrisin aynı zamanda bir tripotent matris olduğu açıktır. Ayrıca, bir tersinir tripotent matrisin bir involutif matris olduğuna dikkat edilmelidir.

Teorem 2.25. İdempotent, involutif ve tripotent matrisler köşegenleştirilebilirdir [49].

Teorem 2.26. Bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisi,

i) idempotent ise $\sigma(\mathbf{M}) \subset \{0,1\}$ [14],

ii) involutif ise $\sigma(\mathbf{M}) \subset \{-1,1\}$ [50],

iii) tripotent ise $\sigma(\mathbf{M}) \subset \{-1,0,1\}$ olur [14].

Tanım 2.27. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisi için, $(\mathbf{M} - \alpha \mathbf{I}_n)(\mathbf{M} - \beta \mathbf{I}_n) = \mathbf{0}$ olacak şekilde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ sayıları varsa, $\mathbf{M}$ matrisine bir *kuadratik matris* denir [40].

Çalışma boyunca yukarıdaki tanımda α ve β karmaşık sayıları ile belirlenen $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisi, bir $\{\alpha,\ \beta\}-$*kuadratik matris* olarak adlandırılacaktır. Ayrıca eğer $\alpha = \beta$ ise $\mathbf{M}$ matrisine $\alpha-$*kuadratik matris* denilecektir.

Özel olarak, $\mathbf{M}$ matrisinin sırasıyla idempotent ve involutif matris olması durumunda, α ve β sayıları sırasıyla $\alpha,\ \beta \in \{0,1\}$ ve $\alpha,\ \beta \in \{-1,1\}$ olur. Buradan $\mathbf{M}$ matrisinin $\{\alpha,\ \beta\}-$kuadratik olduğu açıktır. Böylece kuadratik matrisler sınıfının, idempotent ve involutif matrisler gibi bazı özel tipli matris sınıflarını kapsadığı anlaşılır.

Teorem 2.28. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $\alpha \neq \beta$ ve $(\mathbf{M}-\alpha\mathbf{I}_n)(\mathbf{M}-\beta\mathbf{I}_n)=\mathbf{0}$ olacak şekilde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ sayıları vardır.

ii) $\mathbf{M}$ köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(\mathbf{M}) \subset \{\alpha,\beta\}$ 'dır.

iii) $\alpha \neq \beta$, $\mathbf{M}=\alpha\mathbf{X}+\beta\mathbf{Y}$ olacak şekilde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ sayıları ve $\mathbf{X}+\mathbf{Y}=\mathbf{I}_n$, $\mathbf{XY}=\mathbf{YX}=\mathbf{0}$ olacak şekilde $\mathbf{X},\ \mathbf{Y} \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisleri vardır.

iv) $a \neq 0$ ve $\mathbf{M}=a\mathbf{X}+b\mathbf{I}_n$ olacak şekilde bir $\mathbf{X}$ idempotent matrisi ve $a,\ b \in \mathbb{C}$ sayıları vardır [51].

Tanım 2.29. Bir $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisi için $\mathbf{M}^2 = p\mathbf{M}+q\mathbf{P}$ ve $\mathbf{MP}=\mathbf{PM}=\mathbf{M}$ olacak şekilde $p,\ q \in \mathbb{C}$ ve bir $\mathbf{P} \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisi mevcutsa, $\mathbf{M}$ matrisine bir *genelleştirilmiş kuadratik matris* denir [52].

Bu tanımın kuadratik matrisler ile uyumlu olması açısından $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ sayıları $p,\ q \in \mathbb{C}$ ile belirlenmiş olmak üzere, $\mathbf{M}^2 = p\mathbf{M}+q\mathbf{P}$ ifadesinin, $(\mathbf{M}-\alpha\mathbf{P})(\mathbf{M}-\beta\mathbf{P})=\mathbf{0}$ biçiminde yazılması mümkündür.

Tanım 2.30. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisi için, $(\mathbf{M}-\alpha\mathbf{I}_n)(\mathbf{M}-\beta\mathbf{I}_n)(\mathbf{M}-\gamma\mathbf{I}_n)=\mathbf{0}$ olacak şekilde $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$ varsa, $\mathbf{M}$ matrisine bir *kübik matris* denir [53].

Yukarıdaki tanımda α, β ve γ karmaşık sayıları ile belirlenen $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ matrisi, bir $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}-$*kübik matris* olarak adlandırılabilir. Özel olarak, $\mathbf{M}$ matrisinin sırasıyla idempotent, involutif ve tripotent matris olması durumunda, α, β ve γ sayıları sırasıyla $\alpha,\beta,\gamma \in \{0,1\}$, $\alpha,\beta,\gamma \in \{-1,1\}$ ve $\alpha,\beta,\gamma \in \{-1,0,1\}$ olur. Böylece $\mathbf{M}$ matrisinin $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}-$kübik olduğu açıktır. Buradan kübik matrislerin, kuadratik ve tripotent matrisleri kapsadığını görmek kolaydır. Kübik matrislere ait bazı temel özellikler aşağıda verilmektedir.

Teorem 2.31. $\mathbf{M} \in \mathbb{C}_n$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$ ve $(\mathbf{M} - \alpha \mathbf{I}_n)(\mathbf{M} - \beta \mathbf{I}_n)(\mathbf{M} - \gamma \mathbf{I}_n) = \mathbf{0}$ olacak şekilde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ sayıları vardır.

ii) $\mathbf{M}$ köşegenleştirilebilirdir ve $\sigma(\mathbf{M}) \subset \{\alpha, \beta, \gamma\}$ 'dır.

iii) $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$, $\mathbf{M} = \alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y} + \gamma \mathbf{Z}$, olacak şekilde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ sayıları ve $\mathbf{XY} = \mathbf{YX} = \mathbf{XZ} = \mathbf{ZX} = \mathbf{ZY} = \mathbf{YZ} = \mathbf{0}$, $\mathbf{X} + \mathbf{Y} + \mathbf{Z} = \mathbf{I}_n$ olacak şekilde $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbb{C}_n$ idempotent matrisleri vardır.

iv) $a \neq 0$, $b \neq 0$ ve $\mathbf{M} = a\mathbf{X} + b\mathbf{Y} + c\mathbf{I}_n$ olacak şekilde $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ idempotent matrisleri ve $a, b, c \in \mathbb{C}$ sayıları vardır [53].

BÖLÜM 3. İKİ MATRİSİN DOĞRUSAL BİLEŞİMİNİN İDEMPOTENTLİĞİ

3.1. Giriş

Liu ve diğerleri 2016 yılında, bir kuadratik veya bir tripotent matris ile herhangi bir matrisin doğrusal bileşiminin involutif olması için gerekli ve yeterli koşullar elde etmiştir [45]. Bu çalışmadan ilham alınarak bu bölümde bir kuadratik ve herhangi bir matrisin doğrusal bileşiminin idempotentliği problemi ele alınacaktır.

3.2. Bir Kuadratik ve Herhangi Bir Matrisin Doğrusal Bileşiminin İdempotentliği

Bu kısımda, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri sırasıyla $\{\alpha, \beta\}-$kuadratik matris ve herhangi matris olmak üzere $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ doğrusal bileşim matrisinin, belirli bir koşulu sağlaması ve idempotent olması için gerekli ve yeterli koşullar elde edilmektedir. İlk olarak, [45] çalışmasında yer alan $\mathbf{ABA} = \mathbf{BA}$ koşulu ile aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.1. $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B} \in \mathbb{C}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ sırasıyla $\{\alpha, \beta\}-$kuadratik ve herhangi matris, ayrıca $a, b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{ABA} = \mathbf{BA}$ eşitliğinin sağlanması ve $\mathbf{K}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1} \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{V} \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisinin mevcut olması ve $\mathbf{B}$ matrisinin aşağıdaki durumlardan birini sağlamasıdır.

a) $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.2}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{q\times(n-p-r)}$ ve $\mathbf{Y}_3 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times r}$ herhangi matrislerdir.

b) $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$ ve $a\beta = 1$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{\beta-1}{\beta b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1}{\beta b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.3}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times(n-p)}$ herhangi matristir.

c) $\alpha \neq 1$, $\beta = 0$ ve $a\alpha = 1$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.4}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{p\times(n-p-r)}$ herhangi matristir.

d) $\beta = 1$ ve $a\alpha = 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{\alpha-1}{\alpha b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} & \frac{-1}{\alpha b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.5}$$

Burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times p}$ herhangi matristir.

İspat. $\mathbf{A}$ bir $\{\alpha,\beta\}-$kuadratik matris olduğundan, Teorem 2.26 gereği,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\left(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \beta\mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1} \tag{3.6}$$

olacak şekilde bir $p\in\{0,1,\dots,n\}$ sayısı ve $\mathbf{U}\in\mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. $\mathbf{X}\in\mathbb{C}_p$ olmak üzere $\mathbf{B}$ herhangi matrisi

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{Z} & \mathbf{T}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1} \tag{3.7}$$

biçiminde yazılsın.

$\mathbf{ABA}=\mathbf{BA}$ eşitliği sağlansın. Böylece, $\begin{pmatrix}\alpha^2\mathbf{X} & \alpha\beta\mathbf{Y}\\ \alpha\beta\mathbf{Z} & \beta^2\mathbf{T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{X} & \beta\mathbf{Y}\\ \alpha\mathbf{Z} & \beta\mathbf{T}\end{pmatrix}$ olur. Buradan

$$\mathbf{X}=\alpha\mathbf{X},\quad \beta\mathbf{Y}=\alpha\beta\mathbf{Y},\quad \mathbf{Z}=\beta\mathbf{Z},\quad \beta^2\mathbf{T}=\beta\mathbf{T} \tag{3.8}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca $\mathbf{K}=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ matrisi idempotent olsun. Bu durumda (3.6) ve (3.7) ifadelerinden $\mathbf{K}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X} & b\mathbf{Y}\\ b\mathbf{Z} & a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$ ve

$$\mathbf{K}^2 = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 + b^2\mathbf{YZ} & ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y} + b^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right) \\ ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z} + b^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right) & b^2\mathbf{ZY} + \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}\right)^2 \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1} \text{ elde edilir.}$$

$\mathbf{K}^2 = \mathbf{K}$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned} &\left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 + b^2\mathbf{YZ} = a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}, \quad ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y} + b^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right) = b\mathbf{Y}, \\ &ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z} + b^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right) = b\mathbf{Z}, \quad b^2\mathbf{ZY} + \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}\right)^2 = a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

olduğu açıktır. (3.8) ve (3.9) birlikte ele alındığında ispat, α ve β skalerlerine bağlı olarak aşağıdaki durumlara ayrılabilir.

i) Eğer $\beta \neq 1$ ise, (3.8) denklemlerinin üçüncüsünden $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ olduğu görülür.

i-1) Eğer $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ ise, (3.9) eşitlikleri,

$$\left(a\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 = a\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}, \quad \left(b\mathbf{T}\right)^2 = b\mathbf{T}, \quad ab\mathbf{Y} + b^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right) = b\mathbf{Y} \tag{3.10}$$

halini alır. (3.10) denklemlerinin ilk eşitliğinden $a\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olduğu açıktır. Bir idempotent matris, $\{1,0\}-$kuadratik matris olduğundan bir $q \in \{0,1,\ldots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_1 \in \mathbb{C}_p$ tersinir matrisi için $a\mathbf{I}_p + b\mathbf{X} = \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1}$ şeklinde yazılabilir. Böylece $\mathbf{X}$ matrisi,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} \tag{3.11}$$

şeklinde elde edilir. (3.10) denklemlerinin ikincisinden $b\mathbf{T}$ matrisi idempotenttir. Bu matris yukarıdakine benzer şekilde, bir $r \in \{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_2 \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $b\mathbf{T} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1}$ biçiminde yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \tag{3.12}$$

olur. $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{q\times r}$ olmak üzere,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \tag{3.13}$$

olsun. (3.11), (3.12) ve (3.13) ifadeleri (3.10) denklemlerinin üçüncüsünde kullanılırsa,

$$b(a-1)\mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} + b^2\mathbf{S}_1 \left[\begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \right] \mathbf{S}_2^{-1} = \mathbf{0}$$

yazılabilir. Bu ifade yeniden düzenlenirse $\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ elde edilir. O halde $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \tag{3.14}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{q\times(n-p-r)}$ ve $\mathbf{Y}_3 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times r}$ herhangi matrislerdir.

Şimdi, $\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}$ matrisi (3.11), (3.12) ve (3.14) göz önüne alındığında,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

olur. Böylece teoremin a) şıkkının ispatı tamamlanır.

i-2) Eğer $\alpha=1$ ve $\beta\neq 0$ ise, (3.8) denklemlerinin dördüncüsünden $\mathbf{T}=\mathbf{0}$ olur ve (3.9) eşitlikleri,

$$\left(a\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}\right)^2=a\mathbf{I}_p+b\mathbf{X},\ \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p}\right)^2=a\beta\mathbf{I}_{n-p},\ ab\left(1+\beta\right)\mathbf{Y}+b^2\mathbf{X}\mathbf{Y}=b\mathbf{Y} \qquad (3.15)$$

halini alır.

(3.15) denklemlerinin ilk eşitliğinden $a\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olduğu açıktır. Böylece $a\mathbf{I}_p + b\mathbf{X} = \mathbf{S}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} \end{pmatrix} \mathbf{S}_3^{-1}$ olacak şekilde bir $q \in \{0,1,\ldots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_3 \in \mathbb{C}_p$ tersinir matrisi vardır. Böylece $\mathbf{X}$ matrisi,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}_3 \begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \mathbf{S}_3^{-1} \tag{3.16}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (3.15) denklemlerinin ikincisinden $a\beta = 1$ olduğu aşikârdır. $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{q\times(n-p)}$ olmak üzere $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

biçiminde olsun. (3.16) ve (3.17) ifadeleri (3.15) denklemlerinin üçüncüsünde kullanılırsa, $b(a-1)\mathbf{S}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} + b^2\mathbf{S}_3 \begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ olur. Bu ifade yeniden düzenlenirse $\begin{pmatrix} a\beta\ \mathbf{Y}_1 \\ (a\beta - 1)\mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

olur. Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times(n-p)}$ herhangi matristir.

Şimdi, $\mathbf{V} = \mathbf{U}(\mathbf{S}_3 \oplus \mathbf{I}_{n-p})$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3\oplus\mathbf{I}_{n-p}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_3 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_3^{-1}\oplus\mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}$ matrisi (3.16) ve (3.18) ifadeleri kullanıldığında,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{\beta-1}{\beta b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1}{\beta b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılır. Böylece teoremin b) şıkkının ispatı tamamlanır.

i-3) Eğer $\alpha\neq 1$ ve $\beta=0$ ise, (3.8) denklemlerinin ilkinden $\mathbf{X}=\mathbf{0}$ olduğu görülür ve (3.9) eşitlikleri

$$\left(a\alpha\mathbf{I}_p\right)^2=a\alpha\mathbf{I}_p,\ \ \left(b\mathbf{T}\right)^2=b\mathbf{T},\ \ ab\alpha\mathbf{Y}+b^2\mathbf{YT}=b\mathbf{Y} \tag{3.19}$$

şeklinde düzenlenebilir. (3.19) denklemlerinin ilk eşitliğinden $a\alpha=1$ olduğu açıktır. Ayrıca (3.19) denklemlerinin ikincisinden $b\mathbf{T}$ matrisi idempotenttir. Buradan bir $r\in\{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_4\in\mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $b\mathbf{T}=\mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}$ yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{T}=\mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \tag{3.20}$$

olur. $\mathbf{Y}_1\in\mathbb{C}_{p\times r}$ olmak üzere,

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \tag{3.21}$$

olsun. (3.20) ve (3.21) ifadeleri (3.19) denklemlerinin üçüncüsünde kullanılırsa $b(a\alpha-1)\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}+b^2\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}=\mathbf{0}$ olur. Bu ifade yeniden düzenlenirse $\begin{pmatrix}a\alpha\,\mathbf{Y}_1 & (a\alpha-1)\mathbf{Y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \tag{3.22}$$

şeklinde bulunur. Burada $\mathbf{Y}_2\in\mathbb{C}_{p\times(n-p-r)}$ herhangi matristir.

Şimdi, $\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}_4\right)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}_4\right)\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4\end{pmatrix}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}_4^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}$ matrisi (3.20) ve (3.22) ifadeleri kullanıldığında,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

olur. Böylece teoremin c) şıkkının ispatı tamamlanır.

i-4) Eğer $\alpha \neq 1$ ve $\beta \neq 0$ ise, (3.8) eşitliklerinden $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ bulunur ve bu kabule aykırıdır.

ii) Eğer $\beta = 1$ ise, (3.8) denklemlerinin ilk iki eşitliğinden $\mathbf{X}=\mathbf{0}$ ve $\mathbf{Y}=\mathbf{0}$ olduğu görülür. Bununla birlikte (3.9) tekrar düzenlendiğinde,

$$(a\alpha)^2\,\mathbf{I}_p = a\alpha\mathbf{I}_p,\ \ \left(a\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\right)^2 = a\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T},\ \ ab(\alpha+1)\mathbf{Z}+b^2\mathbf{T}\mathbf{Z}=b\mathbf{Z} \qquad (3.23)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.23) eşitliklerinin birincisinden $a\alpha = 1$ olduğu açıktır. Ayrıca (3.23) eşitliklerinin ikincisinden $a\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}$ matrisi idempotenttir. Dolayısıyla bir $r \in \{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S} \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $a\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$ yazılabilir. Böylece $\mathbf{T}$ matrisi

$$\mathbf{T}=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \qquad (3.24)$$

şeklinde bulunur. $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{r\times p}$ olmak üzere $\mathbf{Z}$ matrisi,

$$\mathbf{Z}=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2\end{pmatrix} \qquad (3.25)$$

biçiminde olsun. (3.24) ve (3.25) ifadeleri (3.23) denklemlerinin üçüncü eşitliğinde kullanılırsa $\left[ab(\alpha+1)-b\right]\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \mathbf{Z}_2\end{pmatrix}+b^2\mathbf{S}\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \mathbf{Z}_2\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ yani $\begin{pmatrix}a\alpha\ \mathbf{Z}_1\\ (a\alpha-1)\mathbf{Z}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$ olur. O halde $\mathbf{Z}$ matrisi,

$$\mathbf{Z}=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_2\end{pmatrix} \tag{3.26}$$

olur ve burada $\mathbf{Z}_2\in\mathbb{C}_{(n-p-r)\times p}$ herhangi matristir.

Böylece $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri, sırasıyla,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\left(\alpha\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}\right)\left(\alpha\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{I}_{n-p}\right)\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1} \qquad \text{ve}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_2\end{pmatrix} & \mathbf{S}\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{\alpha-1}{\alpha b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} & \frac{-1}{\alpha b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}\right)$ olarak alınırsa teoremin d) şıkkı ispatlanır ve böylece ispatın gereklilik kısmı tamamlanır.

Şimdi tersine olarak $\mathbf{A}$ matrisi (3.1), $\mathbf{B}$ matrisi (3.2), (3.3), (3.4) veya (3.5) biçimlerinden birisi olsun. Ayrıca α, β sayıları (3.2), (3.3), (3.4) veya (3.5) ile ilişkili koşulları sağlasın. Bu durumda $\mathbf{ABA} = \mathbf{BA}$ ve $\mathbf{K}^2 = \mathbf{K}$ olduğu açıktır. ■

Dikkat edilirse yukarıdaki teoremde $\mathbf{ABA} = \mathbf{BA}$ ve $\mathbf{K}^2 = \mathbf{K}$ olması için gerekli ve yeterli koşullar $\mathbf{B}$ herhangi matrisinin yapısını belirlemek üzerine düzenlenmiştir. $\mathbf{ABA} = \mathbf{BA}$ eşitliği yerine başka matris eşitlikleri alındığında $\mathbf{B}$ matrisinin olması gereken yapısında değişiklikler gözlenecektir. Aşağıdaki dört sonuç bununla ilgilidir.

Teorem 3.2. $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B} \in \mathbb{C}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ sırasıyla $\{\alpha, \beta\}-$kuadratik ve herhangi matris, ayrıca $a, b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{A}^2\mathbf{BA} = \mathbf{A}^2\mathbf{B}$ eşitliğinin sağlanması ve $\mathbf{K}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1} \tag{3.27}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{V} \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisinin mevcut olması ve $\mathbf{B}$ matrisinin aşağıdaki durumlardan birini sağlamasıdır.

a) $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.28}$$

Burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{r\times(p-q)}$ ve $\mathbf{Z}_3 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times q}$ herhangi matrislerdir.

b) $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$ ve $a\beta = 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{\beta-1}{\beta b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1}{\beta b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.29}$$

Burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{(n-p)\times(p-q)}$ herhangi matristir.

c) $\alpha \neq 1$, $\beta = 0$ ve $a\alpha = 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.30}$$

Burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times p}$ herhangi matristir.

d) $\beta = 1$ ve $a\alpha = 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \frac{\alpha-1}{\alpha b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{\alpha b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.31}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{p\times(n-p-r)}$ herhangi matristir.

İspat. $\mathbf{A}$ bir $\{\alpha,\beta\}-$kuadratik matris olduğundan,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\left(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \beta\mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1} \tag{3.32}$$

olacak şekilde bir $p \in \{0,1,\dots,n\}$ sayısı ve $\mathbf{U} \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere $\mathbf{B}$ herhangi matrisi

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{Z} & \mathbf{T}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1} \tag{3.33}$$

biçiminde yazılsın.

$\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{A}=\mathbf{A}^2\mathbf{B}$ eşitliği sağlansın. Böylece $\begin{pmatrix}\alpha^3\mathbf{X} & \alpha^2\beta\mathbf{Y}\\ \alpha\beta^2\mathbf{Z} & \beta^3\mathbf{T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2\mathbf{X} & \alpha^2\mathbf{Y}\\ \beta^2\mathbf{Z} & \beta^2\mathbf{T}\end{pmatrix}$ olur ve buradan

$$\alpha\mathbf{X}=\mathbf{X},\quad \beta\mathbf{Y}=\mathbf{Y},\quad \alpha\beta^2\mathbf{Z}=\beta^2\mathbf{Z},\quad \beta^3\mathbf{T}=\beta^2\mathbf{T} \tag{3.34}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca $\mathbf{K}=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ idempotent olsun. Bu durumda, (3.32) ve (3.33) ifadelerinden $\mathbf{K}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X} & b\mathbf{Y}\\ b\mathbf{Z} & a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$ olur. Buradan

$$\mathbf{K}^2=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\left(a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}\right)^2+b^2\mathbf{YZ} & ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y}+b^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right)\\ ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z}+b^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right) & b^2\mathbf{ZY}+\left(a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\right)^2\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$ elde edilir.

$\mathbf{K}^2=\mathbf{K}$ eşitliğinden,

$$\begin{gathered}\left(a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}\right)^2+b^2\mathbf{YZ}=a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X},\quad ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y}+b^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right)=b\mathbf{Y},\\ ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z}+b^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right)=b\mathbf{Z},\quad b^2\mathbf{ZY}+\left(a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\right)^2=a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T},\end{gathered} \tag{3.35}$$

olduğu açıktır. (3.34) ve (3.35) birlikte ele alındığında ispat, α ve β skalerlerine bağlı olarak aşağıdaki durumlara ayrılabilir.

i) Eğer $\beta\neq 1$ ise, (3.34) denklemlerinin ikincisinden $\mathbf{Y}=\mathbf{0}$ olduğu görülür.

i-1) Eğer $\alpha=1$ ve $\beta=0$ ise, (3.35) eşitlikleri,

$$\left(a\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}\right)^2=a\mathbf{I}_p+b\mathbf{X},\quad \left(b\mathbf{T}\right)^2=b\mathbf{T},\quad ab\mathbf{Z}+b^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right)=b\mathbf{Z} \tag{3.36}$$

halini alır. (3.36) denklemlerinin ilk eşitliğinden $a\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olduğu açıktır. Bir idempotent matris, $\{1,0\}-$kuadratik matris olduğundan $a\mathbf{I}_p + b\mathbf{X} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1}$ olacak şekilde bir $q \in \{0,1,\ldots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_1 \in \mathbb{C}_p$ tersinir matrisi vardır. Böylece $\mathbf{X}$ matrisi,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \tag{3.37}$$

Şeklinde elde edilir. Ayrıca (3.36) denklemlerinin ikincisinden $b\mathbf{T}$ matrisi idempotenttir. Bu matris, yukarıdakine benzer şekilde bir $r \in \{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_2 \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $b\mathbf{T} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1}$ biçiminde yazılabilir. Böylece $\mathbf{T}$ matrisi

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \tag{3.38}$$

şeklinde elde edilir. $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{r\times q}$ olmak üzere,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \tag{3.39}$$

olsun. (3.37), (3.38) ve (3.39) ifadeleri (3.36) denklemlerinin üçüncüsünde kullanılırsa

$$b(a-1)\mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} + b^2\mathbf{S}_2 \left[\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \right] \mathbf{S}_1^{-1} = \mathbf{0}$$

olur. Bu ifade yeniden düzenlenirse $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece $\mathbf{Z}$ matrisinin,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \tag{3.40}$$

şeklinde olduğu görülür. Burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{r\times(p-q)}$ ve $\mathbf{Z}_3 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times q}$ herhangi matrislerdir.

Şimdi, $\mathbf{V} = \mathbf{U}(\mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} \\ &= \mathbf{U}(\mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2 \end{pmatrix} (\mathbf{S}_1^{-1} \oplus \mathbf{S}_2^{-1}) \mathbf{U}^{-1} \\ &= \mathbf{V} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}$ matrisi (3.37), (3.38) ve (3.40) göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

olur. Böylece teoremin a) şıkkının ispatı tamamlanır.

i-2) Eğer $\alpha=1$ ve $\beta\neq 0$ ise, (3.34) denklemlerinin sonuncusundan $\mathbf{T}=\mathbf{0}$ olduğu açıktır. Böylece (3.35) eşitlikleri,

$$\left(a\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}\right)^2=a\mathbf{I}_p+b\mathbf{X},\ \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p}\right)^2=a\beta\mathbf{I}_{n-p},\ \ ab\left(1+\beta\right)\mathbf{Z}+b^2\mathbf{Z}\mathbf{X}=b\mathbf{Z} \tag{3.41}$$

halini alır. (3.41) denklemlerinin ilk eşitliğinden $a\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}$ matrisi idempotenttir. Buradan $a\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}=\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1}$ olacak şekilde bir $q\in\{0,1,\ldots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_3\in\mathbb{C}_p$ tersinir matrisi vardır. Böylece $\mathbf{X}$ matrisi

$$\mathbf{X}=\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} \tag{3.42}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (3.36) denklemlerinin ikincisinden $a\beta=1$ olduğu açıktır. $\mathbf{Z}_1\in\mathbb{C}_{(n-p)\times q}$ olmak üzere,

$$\mathbf{Z}=\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} \tag{3.43}$$

olsun. (3.42) ve (3.43) ifadeleri (3.41) denklemlerinin üçüncüsünde kullanılırsa, $b(a+a\beta-1)(\mathbf{Z}_1 \quad \mathbf{Z}_2)\mathbf{S}_3^{-1}+b^2(\mathbf{Z}_1 \quad \mathbf{Z}_2)\begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1}=\mathbf{0}$ olur. Bu ifade yeniden düzenlenirse $(a\beta\,\mathbf{Z}_1 \quad (a\beta-1)\mathbf{Z}_2)=(\mathbf{0} \quad \mathbf{0})$ elde edilir. O halde $\mathbf{Z}$ matrisi,

$$\mathbf{Z}=(\mathbf{0} \quad \mathbf{Z}_2)\mathbf{S}_3^{-1} \tag{3.44}$$

olur ve burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{(n-p)\times(p-q)}$ herhangi matristir.

Şimdi, $\mathbf{V}=\mathbf{U}(\mathbf{S}_3 \oplus \mathbf{I}_{n-p})$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}(\mathbf{S}_3 \oplus \mathbf{I}_{n-p})\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}(\mathbf{S}_3^{-1} \oplus \mathbf{I}_{n-p})\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}$ matrisi, (3.42) ve (3.44) ifadeleri kullanıldığında,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{0} \quad \mathbf{Z}_2)\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{\beta-1}{\beta b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1}{\beta b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

olur. Böylece teoremin b) şıkkının ispatı tamamlanır.

i-3) Eğer $\alpha \neq 1$ ve $\beta = 0$ ise, (3.34) denklemlerinin ilkinden $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ olur ve (3.35) eşitlikleri,

$$\left(a\alpha \mathbf{I}_p\right)^2 = a\alpha \mathbf{I}_p, \quad \left(b\mathbf{T}\right)^2 = b\mathbf{T}, \quad ab\alpha \mathbf{Z} + b^2\mathbf{T} = b\mathbf{Z} \tag{3.45}$$

halini alır. (3.45) denklemlerinin ilk eşitliğinden $a\alpha = 1$ olduğu açıktır. Ayrıca (3.45) denklemlerinin ikincisinden $b\mathbf{T}$ matrisi idempotenttir. Öyleyse bir $r \in \{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_4 \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $b\mathbf{T} = \mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_4^{-1}$ şeklinde yazılabilir. Böylece $\mathbf{T}$ matrisi

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_4^{-1} \tag{3.46}$$

şeklinde elde edilir. $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{r\times p}$ olmak üzere,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

olsun. (3.46) ve (3.47) ifadeleri (3.45) denklemlerinin üçüncüsünde kullanılırsa, $b\left(a\alpha - 1\right)\mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} + b^2\mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ olur. Bu ifade yeniden düzenlenirse $\begin{pmatrix} a\alpha\ \mathbf{Z}_1 \\ \left(a\alpha - 1\right)\mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ elde edilir. O halde $\mathbf{Z}$ matrisi,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

olur ve burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times p}$ herhangi matristir.

Şimdi, $\mathbf{V} = \mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}_4\right)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}_4\right)\begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4 \end{pmatrix}\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}_4^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{V}\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}$ matrisi, (3.46) ve (3.48) göz önüne alındığında,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_4\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} & \mathbf{S}_4\begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

olur. Böylece teoremin c) şıkkının ispatı tamamlanır.

ii) Eğer $\beta = 1$ ise, (3.34) denklemlerinin birinci ve üçüncü eşitliğinden $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ olduğu görülür. Bununla birlikte (3.35) tekrar düzenlendiğinde,

$$\left(a\alpha\right)^2 \mathbf{I}_p = a\alpha\mathbf{I}_p, \ \left(a\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}\right)^2 = a\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}, \ ab\left(\alpha+1\right)\mathbf{Y} + b^2\mathbf{Y}\mathbf{T} = b\mathbf{Y} \qquad (3.49)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.49) denklemlerinin birinci eşitliğinden, $a\alpha = 1$ olduğu açıktır. Ayrıca (3.49) denklemlerinin ikinci eşitliğinden $a\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}$ matrisi idempotenttir. Öyleyse $a\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$ olacak şekilde bir $r \in \{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S} \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi vardır. Böylece

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \tag{3.50}$$

olur. $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{p\times r}$ olmak üzere $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \tag{3.51}$$

biçiminde olsun. (3.50) ve (3.51) ifadeleri (3.49) denklemlerinin üçüncüsünde kullanılırsa $\left[ab(\alpha+1)-b\right]\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} + b^2\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{0}$ halini alır yani $\begin{pmatrix} (a\alpha)\mathbf{Y}_1 & (a\alpha-1)\mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \tag{3.52}$$

olur. Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{p\times(n-p-r)}$ herhangi matristir.

O halde $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri, sırasıyla,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\left(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}\right)\left(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{I}_{n-p}\right)\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1} \quad \text{ve}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}\begin{pmatrix}\frac{\alpha-1}{\alpha b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1}{\alpha b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \frac{\alpha-1}{\alpha b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{\alpha b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}\right)$ olarak tanımlanırsa teoremin d) şıkkı ile birlikte ispatın gereklilik kısmı tamamlanır.

Şimdi tersine olarak $\mathbf{A}$ matrisi (3.27), $\mathbf{B}$ matrisi (3.28), (3.29), (3.30) veya (3.31) biçimlerinden birisi olsun. Ayrıca $\alpha,\ \beta$ sayıları (3.28), (3.29), (3.30) ve (3.31) ile ilişkili koşulları sağlasın. Bu durumda $\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{A}=\mathbf{A}^2\mathbf{B}$ ve $\mathbf{K}^2=\mathbf{K}$ olduğu açıktır. ■

Yukarıda verilen sonuçlarda ispatlar α ve β skalerlerine bağlı olarak durumlara ayrılırken aşağıda verilen iki sonucun ispatları, β, $a\alpha$ ve $a\beta$ skalerlerine bağlı olarak ayrılmıştır.

Teorem 3.3. $\alpha\neq 0$ ve $\alpha\neq\beta$ olmak üzere $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ olsun. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}\in\mathbb{C}_n\setminus\{\mathbf{0}\}$ sırasıyla $\{\alpha,\beta\}-$kuadratik ve herhangi matris, ayrıca $a,\ b\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $\mathbf{K}=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{BAB}=\mathbf{AB}^2$ eşitliğinin sağlanması ve $\mathbf{K}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\mathbf{A}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1} \tag{3.53}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{V} \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisinin mevcut olması ve $\mathbf{B}$ matrisinin aşağıdaki durumlardan birini sağlamasıdır.

a) $\beta = 0$ ve $a\alpha = 1$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \dfrac{-1}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dfrac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.54}$$

Burada $\mathbf{Y}_2\mathbf{Z}_3 = \mathbf{0}_q$, $\mathbf{Z}_3\mathbf{Y}_2 = \mathbf{0}_{n-p-r}$ olmak üzere $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{q\times(n-p-r)}$ ve $\mathbf{Z}_3 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times q}$ herhangi matrislerdir.

b) $\beta = 0$ ve $a\alpha \neq 1$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dfrac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.55}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{q\times(n-p-r)}$ herhangi matristir.

c) $\beta \neq 0$ ve $a\beta = 1$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\dfrac{1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.56}$$

Burada $\mathbf{Y}_3 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times r}$ herhangi matristir.

d) $\beta \neq 0$ ve $a\alpha = 1$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.57}$$

Burada $\mathbf{Z}_3 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times q}$ herhangi matristir.

e) $\beta \neq 0$, $a\beta \neq 1$ ve $a\alpha \neq 1$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.58}$$

İspat. $\mathbf{A}$ bir $\{\alpha, \beta\}-$kuadratik matris olduğundan,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\left(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \beta\mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1} \tag{3.59}$$

olacak şekilde bir $p \in \{0,1,\dots,n\}$ sayısı ve $\mathbf{U} \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere $\mathbf{B}$ herhangi matrisi,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{T} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1} \tag{3.60}$$

biçiminde yazılsın.

Öncelikle kabul edelim ki, $\mathbf{BAB} = \mathbf{AB}^2$ eşitliği sağlansın. Böylece $\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{X}^2 + \beta\mathbf{YZ} & \alpha\mathbf{XY} + \beta\mathbf{YT} \\ \alpha\mathbf{ZX} + \beta\mathbf{TZ} & \beta\mathbf{T}^2 + \alpha\mathbf{ZY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\left(\mathbf{X}^2 + \mathbf{YZ}\right) & \alpha\left(\mathbf{XY} + \mathbf{YT}\right) \\ \beta\left(\mathbf{ZX} + \mathbf{TZ}\right) & \beta\left(\mathbf{T}^2 + \mathbf{ZY}\right) \end{pmatrix}$ olur ve buradan

$$\beta\mathbf{YZ} = \alpha\mathbf{YZ}, \quad \beta\mathbf{YT} = \alpha\mathbf{YT}, \quad \alpha\mathbf{ZX} = \beta\mathbf{ZX}, \quad \alpha\mathbf{ZY} = \beta\mathbf{ZY}$$

eşitlikleri bulunur. Burada, $\alpha \neq \beta$ kabulünden

$$\mathbf{YZ} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{YT} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{ZX} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{ZY} = \mathbf{0} \tag{3.61}$$

elde edilir. Ayrıca $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ idempotent olsun. Bu durumda (3.59) ve (3.60) ifadeleri kullanılarak $\mathbf{K} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X} & b\mathbf{Y} \\ b\mathbf{Z} & a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$ olur ve buradan

$$\mathbf{K}^2 = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 + b^2\mathbf{YZ} & ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y} + b^2\left(\mathbf{XY} + \mathbf{YT}\right) \\ ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z} + b^2\left(\mathbf{ZX} + \mathbf{TZ}\right) & b^2\mathbf{ZY} + \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}\right)^2 \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$ elde edilir.

$\mathbf{K}^2 = \mathbf{K}$ eşitliğinden

$$\begin{gathered} \left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 + b^2\mathbf{YZ} = \left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right), \quad ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y} + b^2\left(\mathbf{XY} + \mathbf{YT}\right) = b\mathbf{Y}, \\ ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z} + b^2\left(\mathbf{ZX} + \mathbf{TZ}\right) = b\mathbf{Z}, \quad b^2\mathbf{ZY} + \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}\right)^2 = a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}, \end{gathered}$$

olduğu açıktır. Bu denklemler (3.61) ile birlikte düşünüldüğünde,

$$\begin{gathered} \left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 = \left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right), \quad \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}\right)^2 = a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}, \\ ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y} + b^2\mathbf{XY} = b\mathbf{Y}, \quad ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z} + b^2\mathbf{TZ} = b\mathbf{Z}, \end{gathered} \tag{3.62}$$

eşitlikleri elde edilir.

(3.62) denklemlerinin ilkinden $a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}$ matrisi idempotenttir. Öyleyse bir $q \in \{0,1,\dots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_1 \in \mathbb{C}_p$ tersinir matrisi için $a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1}$ yazılabilir. Böylece $\mathbf{X}$ matrisi,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \tag{3.63}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (3.62) denklemlerinin ikinci eşitliğinden $a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}$ matrisinin idempotent olduğu açıktır. Buradan bir $r \in \{0,1,\dots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_2 \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1}$ yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \dfrac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \tag{3.64}$$

olur. $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{q \times r}$ olmak üzere,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \tag{3.65}$$

olsun. (3.63) ve (3.65) ifadeleri, (3.62) denklemlerinin üçüncüsünde kullanıldığında,

$$\left[ab(\alpha+\beta)-b\right]\mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} + b^2\mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} = \mathbf{0} \text{ olur.}$$

Bu ifade yeniden düzenlenirse,

$$\begin{pmatrix} a\beta \mathbf{Y}_1 & a\beta \mathbf{Y}_2 \\ (a\beta - 1)\mathbf{Y}_3 & (a\beta - 1)\mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{3.66}$$

halini alır. $a\beta$ ’ya bağlı olarak aşağıdaki durumlar ortaya çıkar.

$a\beta = 0$ ise, (3.66) ifadesinden $\mathbf{Y}$ matrisi, $\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1}$ şeklinde olur. Bu ifade ve (3.64), (3.61) denklemlerinin ikincisinde kullanılırsa $\begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ olur. Böylece $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{q\times(n-p-r)}$ herhangi matris olmak üzere $\mathbf{Y}$ matrisi

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{3.67}$$

şeklinde elde edilir.

$a\beta = 1$ ise, (3.66) ifadesinden $\mathbf{Y}$ matrisi, $\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1}$ şeklinde olur. Bu ifade (3.64) ile birlikte, (3.61) denklemlerinin ikincisinde kullanıldığında $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece $\mathbf{Y}_3 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times r}$ herhangi matris olmak üzere

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1}. \tag{3.68}$$

olarak bulunur.

$a\beta \neq 0$ ve $a\beta \neq 1$ ise, (3.66) ifadesinden $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ olduğu açıktır.

Son olarak, $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{r\times q}$ olmak üzere,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \tag{3.69}$$

olsun. (3.64) ve (3.69) ifadeleri, (3.62) eşitliklerinin dördüncüsünde kullanılırsa,

$$\left[ab(\alpha+\beta)-b\right]\mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} + b^2\mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \dfrac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} = \mathbf{0} \quad \text{olur}$$

ve bu ifade yeniden düzenlenirse,

$$\begin{pmatrix} a\alpha\mathbf{Z}_1 & a\alpha\mathbf{Z}_2 \\ (a\alpha-1)\mathbf{Z}_3 & (a\alpha-1)\mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

halini alır. Burada $\alpha \neq 0$ kabulünden $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{0}$ olduğu açıktır. $a\alpha$ 'ya bağlı olarak aşağıdaki durumlar ortaya çıkar.

$a\alpha = 1$ ise, (3.70) ifadesinden $\mathbf{Z}$ matrisi, $\mathbf{Z} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1}$ şeklinde olur. Bu ifade ve (3.63), (3.61) denklemlerinin üçüncüsünde kullanıldığında $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-1}{b}\mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \tag{3.71}$$

olur. Burada $\mathbf{Z}_3 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times q}$ herhangi matristir.

$a\alpha \neq 1$ ise, (3.70) ifadesinden $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ olduğu açıktır.

Şimdi, $\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\alpha\neq\beta$ kabulü ile $a\alpha=1,\ a\alpha\neq1,\ a\beta\in\{0,1\}$ ve $a\beta\notin\{0,1\}$ olduğunda $\mathbf{Y}$ ve $\mathbf{Z}$ matrislerinin aldığı formlara bağlı olarak $\mathbf{B}$ matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir. Aşağıdaki her bir durum, teoremdeki ilgili kısmın ispatını tamamlamaktadır.

a) $a\beta=0$ ve $a\alpha=1$ ise, (3.63), (3.64), (3.67) ve (3.71) ifadelerinden,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{0}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\\ \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

Yazılabilir. Burada (3.61) denklemlerinin birincisi ve dördüncüsünden $\mathbf{Y}_2\mathbf{Z}_3 = \mathbf{0}_q$ ve $\mathbf{Z}_3\mathbf{Y}_2 = \mathbf{0}_{n-p-r}$ eşitliklerinin sağlandığına dikkat edilmelidir.

b) $a\beta = 0$ ve $a\alpha \neq 1$ ise, (3.63), (3.64) ve (3.67) ifadelerinden,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

olur.

c) $a\beta = 1$ ve $a\alpha \neq 1$ ise, (3.63), (3.64) ve (3.68) ifadelerinden,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \mathbf{0}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

elde edilir.

d) $a\beta \neq 1,\ a\beta \neq 0$ ve $a\alpha = 1$ ise, (3.63), (3.64) ve (3.71) ifadelerinden,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \mathbf{0}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

yazılabilir.

e) $a\beta \neq 1,\ a\beta \neq 0$ ve $a\alpha \neq 1$ ise, (3.63) ve (3.64) ifadelerinden,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

olur ve böylece ispatın gereklilik kısmı tamamlanır.

Şimdi tersine olarak, $\mathbf{A}$ matrisi (3.53), $\mathbf{B}$ matrisi (3.54), (3.55), (3.56), (3.57) ve (3.58) biçimlerinden birisi olsun. Ayrıca (3.54), (3.55), (3.56), (3.57) ve (3.58) ifadelerinde belirtilen koşullar sağlansın. Böylece $\mathbf{BAB}=\mathbf{AB}^2$ ve $\mathbf{K}^2=\mathbf{K}$ olduğu açıktır. ■

Yukarıdaki problem, $\mathbf{BAB}=\mathbf{AB}^2$ koşulunun soldan $\mathbf{A}$ ile çarpılmasıyla elde edilen $\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2=(\mathbf{AB})^2$ koşulu için, yeniden ele alındığında aşağıdaki sonuç ortaya çıkar.

Teorem 3.4. $\alpha\neq\beta$ olmak üzere $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^*$ olsun. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}\in\mathbb{C}_n\setminus\{\mathbf{0}\}$ sırasıyla $\{\alpha,\beta\}-$kuadratik ve herhangi matris, ayrıca $a,b\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $\mathbf{K}=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2=(\mathbf{AB})^2$ eşitliğinin sağlanması ve $\mathbf{K}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\mathbf{A}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1} \tag{3.72}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{V}\in\mathbb{C}_n$ tersinir matrisinin mevcut olması ve $\mathbf{B}$ matrisinin aşağıdaki durumlardan birini sağlamasıdır.

a) $a\beta=1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.73}$$

Burada $\mathbf{Y}_3\in\mathbb{C}_{(p-q)\times r}$ herhangi matristir.

b) $a\alpha=1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.74}$$

Burada $\mathbf{Z}_3\in\mathbb{C}_{(n-p-r)\times q}$ herhangi matristir.

c) $a\alpha\neq 1$ ve $a\beta\neq 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.75}$$

İspat. $\mathbf{A}$ bir $\{\alpha,\beta\}-$kuadratik matris olduğundan,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\left(\alpha\mathbf{I}_p\oplus\beta\mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1} \tag{3.76}$$

olacak şekilde bir $p\in\{0,1,\dots,n\}$ sayısı ve $\mathbf{U}\in\mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. $\mathbf{X}\in\mathbb{C}_p$ olmak üzere $\mathbf{B}$ herhangi matrisi,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{Z} & \mathbf{T}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1} \tag{3.77}$$

biçiminde yazılsın.

Öncelikle kabul edelim ki, $\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2=(\mathbf{AB})^2$ eşitliği sağlansın. Böylece $\begin{pmatrix}\alpha^2\left(\mathbf{X}^2+\mathbf{YZ}\right) & \alpha^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right)\\ \beta^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right) & \beta^2\left(\mathbf{T}^2+\mathbf{ZY}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2\mathbf{X}^2+\alpha\beta\mathbf{YZ} & \alpha^2\mathbf{XY}+\alpha\beta\mathbf{YT}\\ \alpha\beta\mathbf{ZX}+\beta^2\mathbf{TZ} & \beta^2\mathbf{T}^2+\alpha\beta\mathbf{ZY}\end{pmatrix}$ olur. Buradan

$$\beta\mathbf{YZ}=\alpha\mathbf{YZ},\quad \beta\mathbf{YT}=\alpha\mathbf{YT},\quad \alpha\mathbf{ZX}=\beta\mathbf{ZX},\quad \alpha\mathbf{ZY}=\beta\mathbf{ZY}$$

eşitlikleri bulunur. Burada $\alpha\neq\beta$ kabulünden,

$$\mathbf{YZ}=\mathbf{0},\quad \mathbf{YT}=\mathbf{0},\quad \mathbf{ZX}=\mathbf{0},\quad \mathbf{ZY}=\mathbf{0} \tag{3.78}$$

elde edilir. Ayrıca $\mathbf{K}=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ idempotent olsun. Bu durumda (3.76) ve (3.77) ifadelerinden $\mathbf{K}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X} & b\mathbf{Y}\\ b\mathbf{Z} & a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$ olur ve buradan

$$\mathbf{K}^2=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\left(a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}\right)^2+b^2\mathbf{YZ} & ab(\alpha+\beta)\mathbf{Y}+b^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right)\\ ab(\alpha+\beta)\mathbf{Z}+b^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right) & b^2\mathbf{ZY}+\left(a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\right)^2\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$ elde edilir.

$\mathbf{K}^2=\mathbf{K}$ eşitliğinden,

$$\left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 + b^2\mathbf{YZ} = a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X},\ \ ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y} + b^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right) = b\mathbf{Y},$$
$$ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z} + b^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right) = b\mathbf{Z},\ \ b^2\mathbf{ZY} + \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}\right)^2 = a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T},$$

olduğu açıktır. Bu denklemler (3.78) ile birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned}&\left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 = a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X},\quad \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}\right)^2 = a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T},\\ &ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y} + b^2\mathbf{XY} = b\mathbf{Y},\quad ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z} + b^2\mathbf{TZ} = b\mathbf{Z},\end{aligned} \tag{3.79}$$

eşitlikleri elde edilir.

(3.79) denklemlerinin ilkinden $a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olduğu açıktır. Öylese bir $q \in \{0,1,\ldots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_1 \in \mathbb{C}_p$ tersinir matrisi için $a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X} = \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1}$ yazılabilir. Böylece $\mathbf{X}$ matrisi,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} \tag{3.80}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (3.79) denklemlerinin ikinci eşitliğinden $a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}$ matrisi idempotenttir. Buradan bir $r \in \{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_2 \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $a\beta\mathbf{I}_p + b\mathbf{T} = \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}$ yazılabilir. Böylece $\mathbf{T}$ matrisi

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\dfrac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \tag{3.81}$$

şeklinde bulunur. $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{q\times r}$ olmak üzere,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \tag{3.82}$$

olsun. (3.80) ve (3.82) ifadeleri, (3.79) eşitliklerinin üçüncüsünde kullanılırsa

$$b\left[a(\alpha+\beta)-1\right]\mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} + b^2\mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} = \mathbf{0}$$ olur

ve bu ifade yeniden düzenlenirse,

$$\begin{pmatrix} a\beta\mathbf{Y}_1 & a\beta\mathbf{Y}_2 \\ (a\beta-1)\mathbf{Y}_3 & (a\beta-1)\mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{3.83}$$

halini alır. Burada $\beta \neq 0$ kabulünden $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{0}$ olduğu açıktır. $a\beta$ 'ya bağlı olarak aşağıdaki durumlar ortaya çıkar.

$a\beta = 1$ ise, (3.83) ifadesinden $\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1}$ olur. Bu ifade ve (3.81), (3.78) denklemlerinin ikinci eşitliğinde kullanıldığında $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-1}{b}\mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ elde edilir ve $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \tag{3.84}$$

şeklinde bulunur. Burada $\mathbf{Y}_3 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times r}$ herhangi matristir.

$a\beta \neq 1$ ise, (3.83) ifadesinden $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ olduğu görülür.

Son olarak $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{r\times q}$ olmak üzere,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \tag{3.85}$$

olsun. (3.81) ve (3.85) ifadeleri, (3.79) denklemlerinin dördüncüsünde kullanılırsa,

$$\left[ab(\alpha+\beta)-b\right]\mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} + b^2\mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} = \mathbf{0}$$

olur ve bu ifade yeniden düzenlenirse,

$$\begin{pmatrix} a\alpha\mathbf{Z}_1 & a\alpha\mathbf{Z}_2 \\ (a\alpha-1)\mathbf{Z}_3 & (a\alpha-1)\mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{3.86}$$

halini alır. Burada $\alpha \neq 0$ kabulünden $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{0}$ olduğu açıktır. $a\alpha$ 'ya bağlı olarak aşağıdaki durumlar ortaya çıkar.

$a\alpha = 1$ ise, (3.86) ifadesinden, $\mathbf{Z} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1}$ olur. Bu ifade (3.80) ile birlikte (3.78) denklemlerinin üçüncüsünde kullanıldığında $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1}. \tag{3.87}$$

olur. Burada $\mathbf{Z}_3 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times q}$ herhangi matristir.

$a\alpha \neq 1$ ise, (3.86) ifadesinden $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ olduğu açıktır.

Şimdi, $\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\alpha\neq\beta$ kabulü ile $a\alpha=1,\ a\alpha\neq1,\ a\beta=1$ ve $a\beta\neq1$ olduğunda $\mathbf{Y}$ ve $\mathbf{Z}$ matrislerinin aldığı formlara bağlı olarak $\mathbf{B}$ matrisi aşağıdaki biçimlerde yazılabilir. Aşağıdaki her bir durum, teoremdeki ilgili kısmın ispatını tamamlamaktadır.

a) $a\beta=1$ ve $a\alpha\neq1$ ise, (3.80), (3.81) ve (3.84) ifadelerinden,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\mathbf{0}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\frac{1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

yazılabilir.

b) $a\beta \neq 1$ ve $a\alpha = 1$ ise, (3.80), (3.81) ve (3.87) ifadelerinden,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \mathbf{0}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

elde edilir.

c) $a\beta \neq 1$ ve $a\alpha \neq 1$ ise, (3.80) ve (3.81) ifadelerinden,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

olur ve böylece ispatın gereklilik kısmı tamamlanır.

Şimdi tersine olarak, $\mathbf{A}$ matrisi (3.72), $\mathbf{B}$ matrisi (3.73), (3.74) ve (3.75) biçimlerinden birisi olsun. Ayrıca (3.73), (3.74) ve (3.75) ifadelerinde belirtilen koşullar sağlansın. Böylece $\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 = (\mathbf{AB})^2$ ve $\mathbf{K}^2 = \mathbf{K}$ olduğu açıktır. ■

$\mathbf{K}$ doğrusal bileşim matrisinin idempotentliği problemine ait bu çalışmadaki son sonuç, $\mathbf{A}^2\mathbf{BA} = \mathbf{BA}$ koşulu ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.5. $\alpha \neq 0$ $\alpha \neq \beta$ ve $(\alpha,\beta) \notin \{(-1,1),(1,-1)\}$ olmak üzere $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ olsun. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B} \in \mathbb{C}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ sırasıyla $\{\alpha,\beta\}-$kuadratik ve herhangi matris, ayrıca $a, b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{A}^2\mathbf{BA} = \mathbf{BA}$ eşitliğinin sağlanması ve $\mathbf{K}$ matrisinin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1} \tag{3.88}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{V} \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisinin mevcut olması ve $\mathbf{B}$ matrisinin aşağıdaki durumlardan birini sağlamasıdır.

a) $\alpha^2 = 1$ ve $\beta = 0$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.89}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{q\times(n-p-r)}$ ve $\mathbf{Y}_3 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times r}$ herhangi matrislerdir.

b) $\alpha^2 = 1$, $\beta \neq 0$ ve $a\beta = 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.90}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times(n-p)}$ herhangi matristir.

c) $\alpha^2 \neq 1$, $\beta = 0$ ve $a\alpha = 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.91}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{p\times(n-p-r)}$ herhangi matristir.

d) $\beta^2 = 1$,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} & \frac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{3.92}$$

Burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times p}$ herhangi matristir.

İspat . $\mathbf{A}$ bir $\{\alpha,\beta\}-$kuadratik matris olduğundan,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\left(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \beta\mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1} \tag{3.93}$$

olacak şekilde bir $p \in \{0,1,\ldots,n\}$ sayısı ve $\mathbf{U} \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere $\mathbf{B}$ herhangi matrisi

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{Z} & \mathbf{T}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1} \tag{3.94}$$

şeklinde yazılsın.

$\mathbf{A}^2\mathbf{BA}=\mathbf{BA}$ eşitliği sağlansın. Böylece $\begin{pmatrix}\alpha^3\mathbf{X} & \alpha^2\beta\mathbf{Y}\\ \alpha\beta^2\mathbf{Z} & \beta^3\mathbf{T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{X} & \beta\mathbf{Y}\\ \alpha\mathbf{Z} & \beta\mathbf{T}\end{pmatrix}$ olur ve buradan

$$\alpha^2\mathbf{X}=\mathbf{X},\quad \alpha^2\beta\mathbf{Y}=\beta\mathbf{Y},\quad \beta^2\mathbf{Z}=\mathbf{Z},\quad \beta^3\mathbf{T}=\beta\mathbf{T} \tag{3.95}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca $\mathbf{K}=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ idempotent olsun. Bu durumda, (3.93) ve (3.94) ifadelerinden $\mathbf{K}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X} & b\mathbf{Y}\\ b\mathbf{Z} & a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$ olur ve $\mathbf{K}$ matrisinin idempotentliğinden,

$$\begin{gathered}\left(a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}\right)^2+b^2\mathbf{YZ}=a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X},\quad ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y}+b^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right)=b\mathbf{Y},\\ ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z}+b^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right)=b\mathbf{Z},\quad b^2\mathbf{ZY}+\left(a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\right)^2=a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T},\end{gathered} \tag{3.96}$$

olduğu açıktır. Bu denklemler ve (3.95) ele alındığında ispat, α ve β skalerlerine bağlı olarak aşağıdaki durumlara ayrılabilir.

i) Eğer $\beta^2\neq 1$ ise, (3.95) denklemlerinin üçüncüsünden $\mathbf{Z}=\mathbf{0}$ olduğu açıktır.

i-1) Eğer $\alpha^2=1$ ve $\beta=0$ ise, (3.96) eşitlikleri,

$$\left(a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}\right)^2=a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X},\quad \left(b\mathbf{T}\right)^2=b\mathbf{T},\quad ab\alpha\mathbf{Y}+b^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right)=b\mathbf{Y} \tag{3.97}$$

halini alır. (3.97) denklemlerinin birinci eşitliğinden $a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}$ matrisinin idempotent olduğu açıktır. Buradan bir $q \in \{0,\ldots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_1 \in \mathbb{C}_p$ tersinir matrisi için $a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X} = \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1}$ yazılabilir. Böylece $\mathbf{X}$ matrisi,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} \tag{3.98}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (3.97) denklemlerinin ikincisinden $b\mathbf{T}$ matrisi idempotenttir. Öyleyse bir $r \in \{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_2 \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $b\mathbf{T} = \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}$ yazılabilir. Böylece,

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\dfrac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \tag{3.99}$$

olur. $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{q\times r}$ olmak üzere $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \tag{3.100}$$

şeklinde olsun. Buradan (3.98), (3.99) ve (3.100) ifadeleri, (3.97) denklemlerinin üçüncü eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$b(a\alpha-1)\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} + b^2\mathbf{S}_1\left[\begin{pmatrix}\dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\right]\mathbf{S}_2^{-1} = \mathbf{0}$$

olur. Bu ifade yeniden düzenlenirse, $\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{Y}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece,

$$\mathbf{Y}=\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \tag{3.101}$$

olur ve burada $\mathbf{Y}_2\in\mathbb{C}_{q\times(n-p-r)}$ ve $\mathbf{Y}_3\in\mathbb{C}_{(p-q)\times r}$ herhangi matrislerdir.

Şimdi, $\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}$ matrisi, (3.98), (3.99) ve (3.101) göz önüne alındığında,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

olur. Böylece teoremin a) şıkkının ispatı tamamlanır.

i-2) Eğer $\alpha^2=1$ ve $\beta\neq 0$ ise, (3.95) denklemlerinin son eşitliğinden $\mathbf{T}=\mathbf{0}$ olur ve (3.96) eşitlikleri,

$$\left(a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}\right)^2=a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X},\ \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p}\right)^2=a\beta\mathbf{I}_{n-p},\ ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y}+b^2\mathbf{XY}=b\mathbf{Y} \quad (3.102)$$

halini alır. (3.102) denklemlerinin birinci eşitliğinden $a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}$ matrisi idempotenttir. Buradan bir $q\in\{0,1,\ldots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_3\in\mathbb{C}_p$ tersinir matrisi için $a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}=\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1}$ yazılabilir. Böylece $\mathbf{X}$ matrisi,

$$\mathbf{X}=\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} \quad (3.103)$$

şeklinde olur. (3.102) denklemlerinin ikincisinden $a\beta=1$ olduğu açıktır. $\mathbf{Y}_1\in\mathbb{C}_{q\times(n-p)}$ olmak üzere $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y}=\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\end{pmatrix} \quad (3.104)$$

biçiminde olsun. (3.103) ve (3.104) ifadeleri, (3.102) denklemlerinin üçüncüsünde kullanıldığında, $b\left(a\alpha+a\beta-1\right)\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}+b^2\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ olur.

Bu ifade yeniden düzenlenirse, $\begin{pmatrix}a\beta\ \mathbf{Y}_1\\ \left(a\beta-1\right)\mathbf{Y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$ elde edilir. O halde,

$$\mathbf{Y}=\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{Y}_2\end{pmatrix} \quad (3.105)$$

olur. Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times(n-p)}$ herhangi matristir.

Şimdi, $\mathbf{V} = \mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3 \oplus \mathbf{I}_{n-p}\right)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3 \oplus \mathbf{I}_{n-p}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_3^{-1} \oplus \mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{V}\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}$ matrisi, (3.103) ve (3.105) ifadeleri kullanıldığında,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde elde edilir. Böylece teoremin b) şıkkının ispatı tamamlanır.

i-3) Eğer $\alpha^2 \neq 1$ ve $\beta = 0$ ise, (3.95) denklemlerinin ilkinden eşitliğinden $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ olur ve (3.96) eşitlikleri,

$$\left(a\alpha\mathbf{I}_p\right)^2 = a\alpha\mathbf{I}_p, \quad \left(b\mathbf{T}\right)^2 = b\mathbf{T}, \quad ab\alpha\mathbf{Y} + b^2\mathbf{Y}\mathbf{T} = b\mathbf{Y} \tag{3.106}$$

halini alır. (3.106) denklemlerinin birinci eşitliğinden $a\alpha = 1$ olduğu açıktır. Ayrıca (3.106) denklemlerinin ikincisinden $b\mathbf{T}$ matrisi idempotenttir. Böylece bir $r \in \{0,1,\dots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_4 \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matris içini $b\mathbf{T} = \mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_4^{-1}$ yazılabilir. Buradan $\mathbf{T}$ matrisi,

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_4^{-1} \tag{3.107}$$

şeklinde elde edilir. $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{p\times r}$ olmak üzere $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}_4^{-1} \tag{3.108}$$

biçiminde olsun. (3.107) ve (3.108) ifadeleri (3.106) denklemlerinin üçüncüsünde kullanıldığında, $b\left(a\alpha - 1\right)\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}_4^{-1} + b^2 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_4^{-1} = \mathbf{0}$ olur. Bu ifade düzenlenirse, $\begin{pmatrix} a\alpha\,\mathbf{Y}_1 & \left(a\alpha - 1\right)\mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}_4^{-1} \tag{3.109}$$

şeklinde bulunur. Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{p\times(n-p-r)}$ herhangi matristir.

Şimdi, $\mathbf{V} = \mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}_4\right)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}_4\right)\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4\end{pmatrix}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}_4^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}$ matrisi, (3.107) ve (3.109) ifadeleri kullanıldığında,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

olur. Böylece teoremin c) şıkkının ispatı tamamlanır.

i-4) Eğer $\alpha^2\neq 1$ ve $\beta\neq 0$ ise, (3.95) eşitliklerinden $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ bulunur ve bu kabule aykırıdır.

ii) Eğer $\beta^2=1$ ise, $\alpha\neq\beta$ ve $\{(\alpha,\beta)\}\not\subset\{(-1,1),(1,-1)\}$ olduğu kullanılarak, (3.95) denklemlerinin ilk iki eşitliğinden $\mathbf{X}=\mathbf{0}$ ve $\mathbf{Y}=\mathbf{0}$ olduğu görülür. Buradan (3.96) tekrar düzenlendiğinde,

$$\left(a\alpha\right)^2\mathbf{I}_p=a\alpha\mathbf{I}_p,\ \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\right)^2=a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T},\ ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z}+b^2\mathbf{TZ}=b\mathbf{Z}\qquad(3.110)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.110) denklemlerinin birinci eşitliğinden $a\alpha=1$ olduğu açıktır. Ayrıca (3.110) denklemlerinin ikinci eşitliğinden, $a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}$ matrisi idempotenttir. Böylece bir $r \in \{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S} \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$ yazılabilir. O halde $\mathbf{T}$ matrisi,

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \dfrac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \tag{3.111}$$

şeklinde bulunur. $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{r\times p}$ olmak üzere $\mathbf{Z}$ matrisi,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} \tag{3.112}$$

biçiminde olsun. (3.111) ve (3.112) ifadeleri (3.110) denklemlerinin üçüncüsünde kullanıldığında, $\left[ab(\alpha+\beta)-b\right]\mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} + \mathbf{S}b^2\begin{pmatrix} \dfrac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ olur.

Bu ifade yeniden düzenlenirse $\begin{pmatrix} (a\alpha)\mathbf{Z}_1 \\ (a\alpha-1)\mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ elde edilir. O halde,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} \tag{3.113}$$

olur ve burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times p}$ herhangi matristir.

Böylece $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri, sırasıyla,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\left(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \beta\mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}\right)\left(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \beta\mathbf{I}_{n-p}\right)\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1} \qquad \text{ve}$$

$$\mathbf{B}= \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} & \mathbf{S}\begin{pmatrix} \dfrac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} & \dfrac{-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}\right)$ olarak alınırsa teoremin d) şıkkının ispatı ve ispatın gereklilik kısmı tamamlanır.

Şimdi tersine olarak, $\mathbf{A}$ matrisi (3.88), $\mathbf{B}$ matrisi (3.89), (3.90), (3.91) veya (3.92) biçimlerinden birisi olsun. Ayrıca α, β kompleks sayıları (3.89), (3.90), (3.91) ve (3.92) ile ilişkili koşulları sağlasın. Bu durumda $\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{A}=\mathbf{B}\mathbf{A}$ ve $\mathbf{K}^2=\mathbf{K}$ olduğu açıktır. ■

BÖLÜM 4. İKİ MATRİSİN DOĞRUSAL BİLEŞİMİNİN İNVOLUTİFLİĞİ

4.1. Giriş

Liu ve diğerleri tarafından [45] çalışmasında, bir kuadratik veya tripotent matris $\mathbf{A}$ ile herhangi bir $\mathbf{B}$ matrisinin $\mathbf{ABA} = \mathbf{BA}$ eşitliğini sağlaması durumunda bu iki matrisin doğrusal bileşiminin involutifliği problemi ele alınmıştır. Bu bölümde ise bir kuadratik ve herhangi bir matrisin doğrusal bileşiminin involutifliği problemi matrislerin kendi içinde başka bazı eşitlikleri sağlamaları durumunda ele alınmaktadır.

4.2. Bir Kuadratik ve Herhangi Bir Matrisin Doğrusal Bileşiminin İnvolutifliği

Bu kısımda, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri sırasıyla $\{\alpha, \beta\}-$kuadratik matris ve herhangi matris olmak üzere $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ doğrusal bileşim matrisinin, belirli şartlar altında, involutif olması için gerekli ve yeterli koşullar elde edilmektedir. Burada involutiflik problemleri ile ilgili elde edilen sonuçlar, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin sağladığı eşitlikler açısından bir önceki bölümde verilen sonuçların sırasına uygun olarak verilmektedir.

Teorem 4.1. $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B} \in \mathbb{C}_n \setminus \{\mathbf{0}\}$ sırasıyla $\{\alpha, \beta\}-$kuadratik ve herhangi matris, ayrıca $a, b \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{A}^2\mathbf{BA} = \mathbf{A}^2\mathbf{B}$ eşitliğinin sağlanması ve $\mathbf{K}$ matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1} \tag{4.1}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{V} \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisinin mevcut olması ve $\mathbf{B}$ matrisinin aşağıdaki durumlardan birini sağlamasıdır.

a) $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.2}$$

Burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{r\times(p-q)}$ ve $\mathbf{Z}_3 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times q}$ herhangi matrislerdir.

b) $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$ ve $a\beta = 1$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{\beta-1}{\beta b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-\beta-1}{\beta b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.3}$$

Burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{(n-p)\times(p-q)}$ herhangi matristir.

c) $\alpha = 1$, $\beta \neq 0$ ve $a\beta = -1$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{\beta+1}{\beta b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-\beta+1}{\beta b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.4}$$

Burada $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{(n-p)\times q}$ herhangi matristir.

d) $\alpha \neq 1$, $\beta = 0$ ve $a\alpha = 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.5}$$

Burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times p}$ herhangi matristir.

e) $\alpha \neq 1$, $\beta = 0$ ve $a\alpha = -1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_1 & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.6}$$

Burada $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{r\times p}$ herhangi matristir.

f) $\beta = 1$ ve $a\alpha = 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \frac{\alpha-1}{\alpha b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-\alpha-1}{\alpha b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.7}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{p\times(n-p-r)}$ herhangi matristir.

g) $\beta = 1$ ve $a\alpha = -1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{\alpha+1}{\alpha b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-\alpha+1}{\alpha b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.8}$$

Burada $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{p\times r}$ herhangi matristir.

İspat : $\mathbf{A}$ bir $\{\alpha,\ \beta\}$ – kuadratik matris olduğundan Teorem 2.26 gereği,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\left(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \beta\mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1} \tag{4.9}$$

olacak şekilde bir $p\in\{0,1,\ldots,n\}$ sayısı ve $\mathbf{U}\in\mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. $\mathbf{X}\in\mathbb{C}_p$ olmak üzere $\mathbf{B}$ herhangi matrisi

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{Z} & \mathbf{T}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1} \tag{4.10}$$

biçiminde yazılsın.

Şimdi $\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{A}=\mathbf{A}^2\mathbf{B}$ eşitliği sağlansın. Böylece

$$\alpha\mathbf{X}=\mathbf{X},\quad \beta\mathbf{Y}=\mathbf{Y},\quad \alpha\beta^2\mathbf{Z}=\beta^2\mathbf{Z},\quad \beta^3\mathbf{T}=\beta^2\mathbf{T} \tag{4.11}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca $\mathbf{K}=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ involutif olsun. Bu durumda (4.9) ve (4.10) ifadelerinden $\mathbf{K}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X} & b\mathbf{Y}\\ b\mathbf{Z} & a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$ olur ve $\mathbf{K}$ matrisinin involutifliğinden,

$$\begin{aligned}&\left(a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}\right)^2+b^2\mathbf{YZ}=\mathbf{I}_p,\quad ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y}+b^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right)=\mathbf{0},\\ &ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z}+b^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right)=\mathbf{0},\quad b^2\mathbf{ZY}+\left(a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\right)^2=\mathbf{I}_{n-p},\end{aligned} \tag{4.12}$$

olduğu açıktır. (4.11) ve (4.12) birlikte ele alındığında ispat, α ve β skalerlerine bağlı olarak aşağıdaki durumlara ayrılabilir.

i) Eğer $\beta\neq 1$ ise, (4.11) denklemlerinin ikincisinden $\mathbf{Y}=\mathbf{0}$ olduğu görülür.

i-1) Eğer $\alpha=1$ ve $\beta=0$ ise, (4.12) eşitlikleri,

$$\left(a\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}\right)^2=\mathbf{I}_p,\quad \left(b\mathbf{T}\right)^2=\mathbf{I}_{n-p},\quad ab\mathbf{Z}+b^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right)=\mathbf{0} \tag{4.13}$$

halini alır. (4.13) denklemlerinin birinci eşitliğinden $a\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}$ matrisinin involutif olduğu açıktır. Bir involutif matris $\{1,-1\}-$kuadratik matris olduğundan $a\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}=\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1}$ olacak şekilde bir $q\in\{0,1,\ldots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_1\in\mathbb{C}_p$ tersinir matrisi vardır. Böylece $\mathbf{X}$ matrisi,

$$\mathbf{X}=\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1-a}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} \tag{4.14}$$

biçiminde elde edilir. (4.13) denklemlerinin ikincisinden $b\mathbf{T}$ matrisi involutiftir. Böylece bir $r\in\{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_2\in\mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $b\mathbf{T}=\mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}$ biçiminde yazılabilir. Buradan $\mathbf{T}$ matrisi,

$$\mathbf{T}=\mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \tag{4.15}$$

şeklinde elde edilir. $\mathbf{Z}_1\in\mathbb{C}_{r\times q}$ olmak üzere $\mathbf{Z}$ matrisi,

$$\mathbf{Z}=\mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} \tag{4.16}$$

şeklinde olsun. (4.14), (4.15) ve (4.16) ifadeleri, (4.13) denklemlerinin sonuncusunda kullanıldığında, $\begin{pmatrix}2\mathbf{Z}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -2\mathbf{Z}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ elde edilir. Böylece,

$$\mathbf{Z}=\mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Z}_2\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} \tag{4.17}$$

olur. Burada $\mathbf{Z}_2\in\mathbb{C}_{r\times(p-q)}$ ve $\mathbf{Z}_3\in\mathbb{C}_{(n-p-r)\times q}$ herhangi matrislerdir.

Şimdi $\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılır. $\mathbf{B}$ matrisi, (4.14), (4.15) ve (4.17) ifadeleri kullanıldığında,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1-a}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Z}_2\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

olur. Böylece teoremin a) şıkkının ispatı tamamlanır.

i-2) Eğer $\alpha = 1$ ve $\beta \neq 0$ ise, (4.11) denklemlerinden $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ olur ve (4.12) eşitlikleri,

$$\left(a\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 = \mathbf{I}_p, \quad \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p}\right)^2 = \mathbf{I}_{n-p}, \quad ab\left(1+\beta\right)\mathbf{Z} + b^2\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{4.18}$$

halini alır. (4.18) denklemlerinin birinci eşitliğinden $a\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}$ involutif matristir. Böylece $a\mathbf{I}_p + b\mathbf{X} = \mathbf{S}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \mathbf{S}_3^{-1}$ olacak şekilde bir $q \in \{0, 1, \ldots, p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_3 \in \mathbb{C}_p$ tersinir matrisi vardır. O halde $\mathbf{X}$ matrisi,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}_3 \begin{pmatrix} \dfrac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-1-a}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \mathbf{S}_3^{-1} \tag{4.19}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (4.18) denklemlerinin ikincisinden $a\beta \in \{1, -1\}$ olduğu aşikardır. $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{(n-p)\times q}$ olmak üzere $\mathbf{Z}$ matrisi,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}_3^{-1} \tag{4.20}$$

biçiminde olsun. (4.19) ve (4.20) ifadeleri (4.18) denklemlerinin sonuncusunda kullanıldığında, $\begin{pmatrix} (a\beta+1)\mathbf{Z}_1 & (a\beta-1)\mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ olur. $a\beta \in \{1, -1\}$ olduğundan, $a\beta = 1$ iken $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}_3^{-1}$ ve $a\beta = -1$ iken $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_3^{-1}$ bulunur. Ayrıca burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{(n-p)\times(p-q)}$ herhangi matristir.

Şimdi $\mathbf{V} = \mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3 \oplus \mathbf{I}_{n-p}\right)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3\oplus\mathbf{I}_{n-p}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_3 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_3^{-1}\oplus\mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}$ matrisi, $a\beta=1$ iken,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1-a}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0}\\ \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Z}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{\beta-1}{\beta b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-\beta-1}{\beta b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

ve $a\beta=-1$ iken,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1-a}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0}\\ \begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{\beta+1}{\beta b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-\beta+1}{\beta b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde bulunur. Böylece, sırasıyla, teoremin b) ve c) şıklarının ispatı tamamlanır.

i-3) Eğer $\alpha\neq 1$ ve $\beta=0$ ise, (4.11) denklemlerinden $\mathbf{X}=\mathbf{0}$ olur ve (4.12) eşitlikleri,

$$\left(a\alpha\mathbf{I}_p\right)^2=\mathbf{I}_p,\quad \left(b\mathbf{T}\right)^2=\mathbf{I}_{n-p},\quad ab\alpha\mathbf{Z}+b^2\mathbf{T}\mathbf{Z}=\mathbf{0} \tag{4.21}$$

halini alır. (4.21) denklemlerinin ilkinden $a\alpha \in \{1, -1\}$ olduğu aşikardır. Ayrıca (4.21) denklemlerinin ikinci eşitliğinden $b\mathbf{T}$ involutif matristir. Böylece bir $r \in \{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_4 \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $b\mathbf{T} = \mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_4^{-1}$ yazılabilir. Buradan $\mathbf{T}$ matrisi,

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_4^{-1} \tag{4.22}$$

şeklinde elde edilir. $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{r \times p}$ olmak üzere $\mathbf{Z}$ matrisi,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

biçiminde olsun. (4.22) ve (4.23) ifadeleri, (4.21) denklemlerinin sonuncu eşitliğinde kullanıldığında, $\begin{pmatrix} (a\alpha+1)\mathbf{Z}_1 \\ (a\alpha-1)\mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ olur. $a\alpha \in \{1,-1\}$ olduğundan $a\alpha = 1$ iken $\mathbf{Z} = \mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix}$ ve $a\alpha = -1$ iken $\mathbf{Z} = \mathbf{S}_4 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ bulunur. Ayrıca burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times p}$ herhangi matristir.

Şimdi $\mathbf{V} = \mathbf{U}(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}_4)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1}$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}_4\right)\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4\end{pmatrix}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}_4^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}$ matrisi ise, $a\alpha=1$ iken

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_2\end{pmatrix} & \mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}.$$

ve $a\alpha=-1$ iken

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} & \mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_1 & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}.$$

şeklinde bulunur. Böylece sırasıyla teoremin d) ve e) şıklarının ispatı tamamlanır.

i-4) Eğer $\beta\neq1$, $\alpha\neq1$ ve $\beta\neq0$ ise, (4.11) eşitliklerinden $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ bulunur ve bu kabule aykırıdır.

ii) Eğer $\beta=1$ ise, (4.11) denklemlerinin birinci ve üçüncü eşitliğinden $\mathbf{X}=\mathbf{0}$ ve $\mathbf{Z}=\mathbf{0}$ olduğu görülür. Buradan (4.12) eşitlikleri,

$$\left(a\alpha\right)^2\mathbf{I}_p=\mathbf{I}_p,\ \left(a\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\right)^2=\mathbf{I}_{n-p},\ ab\left(\alpha+1\right)\mathbf{Y}+b^2\mathbf{YT}=\mathbf{0} \tag{4.24}$$

halini alır. (4.24) denklemlerinin ilkinden, $a\alpha \in \{1,-1\}$ olduğu aşikardır. Ayrıca (4.24) denklemlerinin ikinci eşitliğinden, $a\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}$ matrisi involutiftir. Bu durumda bir $r \in \{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S} \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $a\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$ yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \frac{1-a}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \tag{4.25}$$

olur. $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{p\times r}$ olmak üzere $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \tag{4.26}$$

şeklinde olsun. (4.25) ve (4.26) ifadeleri (4.24) denklemlerinin üçüncüsünde kullanıldığında, $\begin{pmatrix} (a\alpha+1)\mathbf{Y}_1 & (a\alpha-1)\mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ olur. $a\alpha \in \{1,-1\}$ olduğundan $a\alpha = 1$ iken $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$ ve $a\alpha = -1$ iken $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}$ bulunur. Ayrıca burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{p\times(n-p-r)}$ herhangi matristir.

Şimdi $\mathbf{V} = \mathbf{U}(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S})$ olsun. Öyleyse $\mathbf{A}$ matrisi

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{I}_{n-p})\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S})(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{I}_{n-p})(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}^{-1})\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{I}_{n-p})\mathbf{V}^{-1}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca $\mathbf{B}$ matrisi, $a\alpha = 1$ iken,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & (\mathbf{0} \quad \mathbf{Y}_2)\mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \frac{\alpha-1}{\alpha b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-\alpha-1}{\alpha b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

ve $a\alpha=-1$ iken,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & (\mathbf{Y}_1 \quad \mathbf{0})\mathbf{S}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}\begin{pmatrix}\frac{1-a}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\alpha+1}{\alpha b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-\alpha+1}{\alpha b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece sırasıyla teoremin f) ve g) şıkları ispatlanır. Bununla birlikte ispatın gereklilik kısmı tamamlanır.

Şimdi tersine olarak $\mathbf{A}$ matrisi (4.1), $\mathbf{B}$ matrisi (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) veya (4.8) biçimlerinden birisi olsun. Ayrıca a, α, β sayıları (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) ve (4.8) ile ilişkili koşulları sağlasın. Bu durumda $\mathbf{A}^2\mathbf{BA}=\mathbf{A}^2\mathbf{B}$ ve $\mathbf{K}^2=\mathbf{I}$ olduğu açıktır. ■

Yukarıda verilen sonuçlarda ispatlar α ve β skalerlerine bağlı olarak durumlara ayrılırken aşağıda verilen iki sonucun ispatları $a\alpha$ ve $a\beta$ skalerlerine bağlı olarak ayrılmıştır.

Teorem 4.2. $\alpha\neq 0$ ve $\alpha\neq\beta$ olmak üzere $\alpha, \beta\in\mathbb{C}$ olsun. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}\in\mathbb{C}_n\setminus\{\mathbf{0}\}$ sırasıyla $\{\alpha, \beta\}-$kuadratik ve herhangi matris, ayrıca $a, b\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $\mathbf{K}=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{BAB}=\mathbf{AB}^2$ eşitliğinin sağlanması ve $\mathbf{K}$ matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\mathbf{A}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1} \tag{4.27}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{V}\in\mathbb{C}_n$ tersinir matrisinin mevcut olması ve $\mathbf{B}$ matrisinin aşağıdaki durumlardan birini sağlamasıdır.

a) $a\beta=1$ ve $a\alpha=-1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{2}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{2}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.28}$$

b) $a\beta=1$ ve $a\alpha\neq-1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.29}$$

c) $a\beta=-1$ ve $a\alpha=1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.30}$$

d) $a\beta=-1$ ve $a\alpha\neq1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.31}$$

e) $a\beta \neq -1$ ve $a\alpha = 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.32}$$

f) $a\beta \neq 1$ ve $a\alpha = -1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{2}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.33}$$

g) $a\beta \neq \pm 1$ ve $a\alpha \neq \pm 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.34}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{q\times(n-p-r)}$, $\mathbf{Y}_3 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times r}$, $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{r\times(p-q)}$ ve $\mathbf{Z}_3 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times q}$ herhangi matrislerdir ve $\mathbf{Y}_2\mathbf{Z}_3 = \mathbf{0}_q$, $\mathbf{Z}_3\mathbf{Y}_2 = \mathbf{0}_{n-p-r}$, $\mathbf{Y}_3\mathbf{Z}_2 = \mathbf{0}_{p-q}$, $\mathbf{Z}_2\mathbf{Y}_3 = \mathbf{0}_r$ koşulları sağlanır.

İspat : $\mathbf{A}$ bir $\{\alpha, \beta\}-$kuadratik matris olduğundan,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\left(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \beta\mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1} \tag{4.35}$$

olacak şekilde bir $p \in \{0,1,\ldots,n\}$ sayısı ve $\mathbf{U} \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere $\mathbf{B}$ herhangi matrisi

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{T} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1} \tag{4.36}$$

biçiminde yazılsın.

Öncelikle kabul edelim ki, $\mathbf{BAB} = \mathbf{AB}^2$ eşitliği sağlansın. Böylece $\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{X}^2 + \beta\mathbf{YZ} & \alpha\mathbf{XY} + \beta\mathbf{YT} \\ \alpha\mathbf{ZX} + \beta\mathbf{TZ} & \beta\mathbf{T}^2 + \alpha\mathbf{ZY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\left(\mathbf{X}^2 + \mathbf{YZ}\right) & \alpha\left(\mathbf{XY} + \mathbf{YT}\right) \\ \beta\left(\mathbf{ZX} + \mathbf{TZ}\right) & \beta\left(\mathbf{T}^2 + \mathbf{ZY}\right) \end{pmatrix}$ olur ve buradan

$$\beta\mathbf{YZ} = \alpha\mathbf{YZ}, \quad \beta\mathbf{YT} = \alpha\mathbf{YT}, \quad \alpha\mathbf{ZX} = \beta\mathbf{ZX}, \quad \alpha\mathbf{ZY} = \beta\mathbf{ZY}$$

elde edilir bu eşitlikler, $\alpha \neq \beta$ olduğu kullanılarak,

$$\mathbf{YZ} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{YT} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{ZX} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{ZY} = \mathbf{0} \tag{4.37}$$

halini alır. Ayrıca $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ involutif olsun. Bu durumda,

$$\begin{gathered} \left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 + b^2\mathbf{YZ} = \mathbf{I}_p, \quad ab\left(\alpha + \beta\right)\mathbf{Y} + b^2\left(\mathbf{XY} + \mathbf{YT}\right) = \mathbf{0}, \\ ab\left(\alpha + \beta\right)\mathbf{Z} + b^2\left(\mathbf{ZX} + \mathbf{TZ}\right) = \mathbf{0}, \quad \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}\right)^2 + b^2\mathbf{ZY} = \mathbf{I}_{n-p} \end{gathered} \tag{4.38}$$

yazılabilir. (4.37) ve (4.38) birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} &\left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 = \mathbf{I}_p, \quad \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}\right)^2 = \mathbf{I}_{n-p}, \\ &ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y} + b^2\mathbf{XY} = \mathbf{0}, \quad ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z} + b^2\mathbf{TZ} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.39}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.39) denklemlerinin ilk eşitliğinden $a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}$ matrisinin involutif olduğu açıktır. Buradan bir $q \in \{0,1,\dots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_1 \in \mathbb{C}_p$ tersinir matrisi için $\mathbf{X}$ matrisi,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \tag{4.40}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (4.39) denklemlerinin ikincisinden $a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}$ matrisi involutiftir. Buradan bir $r \in \{0,1,\dots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_2 \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $\mathbf{T}$ matrisi,

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \tag{4.41}$$

şeklinde bulunur. $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{q\times r}$ ve $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{r\times q}$ olmak üzere $\mathbf{Y}$ ve $\mathbf{Z}$ matrisleri,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \tag{4.42}$$

biçiminde olsun. (4.40), (4.41) ve (4.42) ifadeleri ile (4.39) denklemlerinin üçüncü ve dördüncü eşitliklerinden sırasıyla,

$$\begin{pmatrix} (a\beta+1)\mathbf{Y}_1 & (a\beta+1)\mathbf{Y}_2 \\ (a\beta-1)\mathbf{Y}_3 & (a\beta-1)\mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} (a\alpha+1)\mathbf{Z}_1 & (a\alpha+1)\mathbf{Z}_2 \\ (a\alpha-1)\mathbf{Z}_3 & (a\alpha-1)\mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

olduğu görülür. Bu eşitliklerde $a\beta \in \{1, -1\}$ ve $a\alpha \in \{1, -1\}$ olup olmadığına bakılarak $\mathbf{Y}$ ve $\mathbf{Z}$ matrislerinin tüm olası biçimleri aşağıdaki şekilde karakterize edilebilir.

i) Eğer $a\beta = 1$ ve $a\alpha = -1$ ise, (4.43) ifadelerinden $\mathbf{Y}$ ve $\mathbf{Z}$ matrisleri,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \quad (4.44)$$

şeklinde olur. (4.41), (4.40) ve (4.44) ifadeleri, (4.37) eşitliklerinin sırasıyla ikincisinde ve üçüncüsünde kullanıldığında (4.44),

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \quad (4.45)$$

halini alır. Burada $\mathbf{Y}_3 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times r}$ ve $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{r\times(p-q)}$ herhangi matrisler olmak üzere (4.37) eşitliklerinden $\mathbf{Y}_3\mathbf{Z}_2 = \mathbf{0}_{p-q}$ ve $\mathbf{Z}_2\mathbf{Y}_3 = \mathbf{0}_r$ olduğu açıktır. Böylece (4.41), (4.40) ve (4.45) ifadeleri kullanılarak $\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \\ \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

şeklinde yazılır.

ii) Eğer $a\beta=1$ ve $a\alpha\neq-1$ ise, (4.43) ifadelerinden, $\mathbf{Y}$ matrisinin (4.45) halinde ve $\mathbf{Z}$ matrisinin sıfır matris olduğu görülür. Böylece (4.41) ve (4.40) ifadeleri de göz önüne alınarak $\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \mathbf{0}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

olur.

iii) Eğer $a\beta=-1$ ve $a\alpha=1$ ise, (4.43) ifadelerinden $\mathbf{Y}$ ve $\mathbf{Z}$ matrisleri

$$\mathbf{Y}=\mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z}=\mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} \tag{4.46}$$

biçiminde olur. (4.41), (4.40) ve (4.46) ifadeleri (4.37) eşitliklerinin, sırasıyla, ikincisinde ve üçüncüsünde kullanıldığında (4.46),

$$\mathbf{Y}=\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z}=\mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} \tag{4.47}$$

halini alır. Burada $\mathbf{Y}_2\in\mathbb{C}_{q\times(n-p-r)}$ ve $\mathbf{Z}_3\in\mathbb{C}_{(n-p-r)\times q}$ herhangi matrisler olmak üzere (4.37) eşitliklerinden $\mathbf{Y}_2\mathbf{Z}_3=\mathbf{0}_q$ ve $\mathbf{Z}_3\mathbf{Y}_2=\mathbf{0}_{n-p-r}$ olduğu açıktır. Böylece (4.41), (4.40) ve (4.47) ifadeleri kullanılarak $\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{0}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\\ \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\frac{2}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix}\mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

şeklinde yazılır.

iv) Eğer $a\beta=-1$ ve $a\alpha\neq 1$ ise, (4.43) ifadelerinden $\mathbf{Y}$ matrisinin (4.47) halinde ve $\mathbf{Z}$ matrisinin sıfır olduğu görülür. Böylece (4.41) ve (4.40) ifadeleri de göz önüne alınarak $\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \frac{2}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

biçiminde elde edilir.

v) Eğer $a\beta \neq \pm 1$ ve $a\alpha = 1$ ise, (4.43) ifadesinden $\mathbf{Y}$ matrisinin sıfır matris ve $\mathbf{Z}$ matrisinin (4.47) halinde olduğu açıktır. Böylece (4.41) ve (4.40) ifadeleri de göz önüne alınarak $\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \mathbf{0}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix} \mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

şeklinde bulunur.

vi) Eğer $a\beta \neq \pm 1$ ve $a\alpha = -1$ ise, (4.43) ifadelerinden $\mathbf{Y}$ matrisinin sıfır matris ve $\mathbf{Z}$ matrisinin (4.45) halinde olduğu görülür. Böylece (4.41) ve (4.40) ifadeleri de göz önüne alınarak $\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \frac{2}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1} \oplus \mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

olur.

vii) Eğer $a\beta \neq \pm 1$ ve $a\alpha \neq \pm 1$ ise, (4.43) ifadelerinden $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ olduğu açıktır. Böylece $\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix} \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}\cdot$$

biçiminde yazılır. O halde $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2 \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)$ olarak alınırsa, yukarıdaki her bir durum sırasıyla teoremin tüm şıklarını ispatlar. Böylece ispatın gereklilik kısmı tamamlanır.

Şimdi tersine, $\mathbf{A}$ matrisi (4.27), $\mathbf{B}$ matrisi (4.28), (4.29), (4.30), (4.31), (4.32), (4.33) veya (4.34) biçimlerinden birisi olsun. Ayrıca teoremin şıklarındaki ilgili koşullar sağlansın. Bu durumda $\mathbf{BAB}=\mathbf{AB}^2$ ve $\mathbf{K}^2=\mathbf{I}$ olduğu açıktır. ■

Önceki sonuç $\mathbf{BAB}=\mathbf{AB}^2$ eşitliğini sağlayan matrisler için verilmişti. Bu eşitliğin soldan $\mathbf{A}$ ile çarpılmasıyla elde edilen $\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2=\left(\mathbf{AB}\right)^2$ eşitliği için aynı problemi tekrar ele almak ilginç olabilir. Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 4.3. $\alpha\neq 0$ ve $\alpha\neq\beta$ olmak üzere $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ olsun. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}\in\mathbb{C}_n\setminus\{\mathbf{0}\}$ sırasıyla $\{\alpha,\beta\}-$kuadratik ve herhangi matris, ayrıca $a,b\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $\mathbf{K}=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2=\left(\mathbf{AB}\right)^2$ eşitliğinin sağlanması ve $\mathbf{K}$ matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\mathbf{A}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1} \tag{4.48}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{V}\in\mathbb{C}_n$ tersinir matrisinin mevcut olması ve $\mathbf{B}$ matrisinin aşağıdaki durumlardan birini sağlamasıdır.

a) $\beta=0$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.49}$$

b) $a\alpha=1$ ve $a\beta=-1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & -\frac{2}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.50}$$

c) $a\alpha\neq 1$ ve $a\beta=-1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.51}$$

d) $a\alpha=-1$ ve $a\beta=1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{2}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.52}$$

e) $a\alpha \neq -1$ ve $a\beta = 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.53}$$

f) $a\alpha = -1$ ve $a\beta \neq 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{2}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.54}$$

g) $a\alpha = 1$ ve $a\beta \neq -1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.55}$$

h) $a\alpha \neq \pm 1$ ve $a\beta \neq \pm 1$,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.56}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{q\times(n-p-r)}$, $\mathbf{Y}_3 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times r}$, $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{r\times(p-q)}$ ve $\mathbf{Z}_3 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times q}$ herhangi matrislerdir ve $\mathbf{Y}_2\mathbf{Z}_3=\mathbf{0}_q$, $\mathbf{Z}_3\mathbf{Y}_2=\mathbf{0}_{n-p-r}$, $\mathbf{Y}_3\mathbf{Z}_2=\mathbf{0}_{p-q}$, $\mathbf{Z}_2\mathbf{Y}_3=\mathbf{0}_r$ koşulları sağlanır.

İspat : $\mathbf{A}$ bir $\{\alpha,\beta\}-$kuadratik matris olduğundan,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\left(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \beta\mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1} \tag{4.57}$$

olacak şekilde bir $p\in\{0,1,\ldots,n\}$ sayısı ve $\mathbf{U}\in\mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. $\mathbf{X}\in\mathbb{C}_p$ olmak üzere $\mathbf{B}$ herhangi matrisi

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{T} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1} \tag{4.58}$$

biçiminde yazılsın.

Öncelikle kabul edelim ki, $\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2=(\mathbf{AB})^2$ koşulu sağlansın. Böylece

$$\beta\mathbf{YZ}=\alpha\mathbf{YZ},\quad \beta\mathbf{YT}=\alpha\mathbf{YT},\quad \beta^2\mathbf{ZX}=\alpha\beta\mathbf{ZX},\quad \beta^2\mathbf{ZY}=\alpha\beta\mathbf{ZY}$$

eşitlikleri elde edilir. $\alpha\neq\beta$ olduğu kullanılarak bu eşitlikler,

$$\mathbf{YZ}=\mathbf{0},\quad \mathbf{YT}=\mathbf{0},\quad \beta\mathbf{ZX}=\mathbf{0},\quad \beta\mathbf{ZY}=\mathbf{0} \tag{4.59}$$

halini alır. Ayrıca $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ involutif olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 + b^2\mathbf{YZ} = \mathbf{I}_p, \quad ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y} + b^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right) = \mathbf{0},\\ &ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z} + b^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right) = \mathbf{0}, \quad \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}\right)^2 + b^2\mathbf{ZY} = \mathbf{I}_{n-p}\end{aligned} \tag{4.60}$$

yazılabilir. (4.59) eşitliklerinde β sayısının sıfır olup olmaması (4.60) eşitliklerinde farklılığa sebep olur. Böylece $\mathbf{B}$ matrisinin blokları olan $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{T}$ matrislerinin biçimleri farklılık gösterir. Bu nedenle $\mathbf{B}$ matrisinin olası durumları β sayısına bağlı olarak aşağıda karakterize edilmektedir.

i) Eğer $\beta = 0$ ise, (4.59) eşitlikleri ile birlikte (4.60) denklemleri,

$$\begin{aligned}&\left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 = \mathbf{I}_p, \quad ab\alpha\mathbf{Y} + b^2\mathbf{XY} = \mathbf{0},\\ &\left(b\mathbf{T}\right)^2 + b^2\mathbf{ZY} = \mathbf{I}_{n-p}, \quad ab\alpha\mathbf{Z} + b^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right) = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{4.61}$$

halini alır. (4.61) eşitliklerinin ilkinden $a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}$ matrisinin involutif olduğu açıktır. Buradan bir $q \in \{0,1,\ldots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_1 \in \mathbb{C}_p$ tersinir matrisi için $a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X} = \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1}$ şeklinde yazılabilir. Böylece $\mathbf{X}$ matrisi,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dfrac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} \tag{4.62}$$

şeklinde olur. $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{q\times r}$ herhangi matris ve $\mathbf{S}_2 \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matris olmak üzere,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1} \tag{4.63}$$

biçiminde olsun. (4.62) ve (4.63) ifadeleri (4.61) denklemlerinin ikincisinde kullanılırsa $\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ -\mathbf{Y}_3 & -\mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ yani $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ olduğu açıktır.

(4.61) denklemlerinin üçüncü eşitliğinde, $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ olduğu kullanıldığında $b\mathbf{T}$ matrisinin involutif olduğu açıktır. Buradan bir $r \in \{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_2 \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $b\mathbf{T} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1}$ yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \tag{4.64}$$

olur. Son olarak, $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{r \times q}$ olmak üzere $\mathbf{Z}$ matrisi,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \tag{4.65}$$

biçiminde olsun. (4.62), (4.64) ve (4.65) ifadeleri ile birlikte, (4.61) eşitliklerinin dördüncüsünde kullanıldığında $\begin{pmatrix} 2\mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -2\mathbf{Z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ olur. Böylece $\mathbf{Z}$ matrisi

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \tag{4.66}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi $\mathbf{V} = \mathbf{U}(\mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri, sırasıyla,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dfrac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Z}_2\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\dfrac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dfrac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \dfrac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \dfrac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dfrac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Bununla birlikte teoremin a) şıkkının ispatı tamamlanır.

ii) Eğer $\beta\neq 0$ ise, (4.59) denklemlerinin üçüncü ve dördüncü eşitliğinden $\mathbf{ZX}=\mathbf{0}$ ve $\mathbf{ZY}=\mathbf{0}$ olduğu görülür. Bu durumda (4.60) yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}&\left(a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}\right)^2=\mathbf{I}_p,\quad \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\right)^2=\mathbf{I}_{n-p},\\ &ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y}+b^2\mathbf{XY}=\mathbf{0},\quad ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z}+b^2\mathbf{TZ}=\mathbf{0}\end{aligned}\tag{4.67}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.67) denklemlerinin ilk eşitliğinden $a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}$ matrisinin involutif olduğu açıktır. Buradan bir $q\in\{0,1,\ldots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_3\in\mathbb{C}_p$ tersinir matrisi için,

$$\mathbf{X}=\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} \tag{4.68}$$

olur. Ayrıca (4.67) denklemlerinin ikinci eşitliğinden $a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}$ matrisinin involutif olduğu açıktır. Böylece bir $r\in\{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_4\in\mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için

$$\mathbf{T}=\mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \tag{4.69}$$

olur. $\mathbf{Y}_1\in\mathbb{C}_{q\times r}$ ve $\mathbf{Z}_1\in\mathbb{C}_{r\times q}$ olmak üzere,

$$\mathbf{Y}=\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z}=\mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} \tag{4.70}$$

olsun. (4.68), (4.69) ve (4.70) ifadeleri ile birlikte, (4.67) denklemlerinin üçüncüsü ve dördüncüsünde kullanıldığında

$$\begin{pmatrix}(a\beta+1)\mathbf{Y}_1 & (a\beta+1)\mathbf{Y}_2\\ (a\beta-1)\mathbf{Y}_3 & (a\beta-1)\mathbf{Y}_4\end{pmatrix}=\mathbf{0} \quad \text{ve} \quad \begin{pmatrix}(a\alpha+1)\mathbf{Z}_1 & (a\alpha+1)\mathbf{Z}_2\\ (a\alpha-1)\mathbf{Z}_3 & (a\alpha-1)\mathbf{Z}_4\end{pmatrix}=\mathbf{0}. \tag{4.71}$$

olduğu görülür. Bu eşitliklerde $a\alpha\in\{1,-1\}$ ve $a\beta\in\{1,-1\}$ olup olmadığına bakılarak $\mathbf{Y}$ ve $\mathbf{Z}$ matrislerinin tüm olası biçimleri aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

ii-1) Eğer $a\alpha=1$ ve $a\beta=-1$ ise, (4.71) ifadelerinden $\mathbf{Y}$ ve $\mathbf{Z}$ matrisleri, $\mathbf{Y}=\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}$ ve $\mathbf{Z}=\mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{Z}_4\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1}$ biçiminde olur. Bu matrisler, (4.68) ve (4.69) ifadeleri ile birlikte (4.59) eşitliklerinin ikincisinde ve üçüncüsünde kullanıldığında,

$$\mathbf{Y}=\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z}=\mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} \tag{4.72}$$

halini alır. Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{q\times(n-p-r)}$ ve $\mathbf{Z}_3 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times q}$ herhangi matrisler olmak üzere (4.59) eşitliklerinden $\mathbf{Y}_2\mathbf{Z}_3=\mathbf{0}_q$ ve $\mathbf{Z}_3\mathbf{Y}_2=\mathbf{0}_{n-p-r}$ olduğu açıktır. Böylece (4.68), (4.69) ve (4.72) ifadeleri kullanılarak $\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\mathbf{0}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{S}_3\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}\\ \mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\frac{2}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3\oplus\mathbf{S}_4\right)\begin{pmatrix}\mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & -\frac{2}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r}\end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_3^{-1}\oplus\mathbf{S}_4^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

şeklinde yazılır.

ii-2) Eğer $a\alpha\neq 1$ ve $a\beta=-1$ ise, (4.71) ifadelerinden $\mathbf{Y}$ matrisinin (4.72) halinde ve $\mathbf{Z}$ matrisinin de sıfır matris olduğu görülür. Böylece (4.68) ve (4.69) ifadeleri göz önüne alınarak $\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4\begin{pmatrix} \frac{2}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3\oplus\mathbf{S}_4\right)\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_3^{-1}\oplus\mathbf{S}_4^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

olur.

ii-3) Eğer $a\alpha=-1$ ve $a\beta=1$ ise, (4.71) ifadelerinden $\mathbf{Y}$ ve $\mathbf{Z}$ matrisleri, $\mathbf{Y}=\mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}$ ve $\mathbf{Z}=\mathbf{S}_4\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1}$ biçiminde olur. Bu matrisler (4.68) ve (4.69) ifadeleri ile birlikte (4.59) eşitliklerinin ikincisinde ve üçüncüsünde kullanıldığında,

$$\mathbf{Y}=\mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z}=\mathbf{S}_4\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} \tag{4.73}$$

halini alır. $\mathbf{Y}_3\in\mathbb{C}_{(p-q)\times r}$ ve $\mathbf{Z}_2\in\mathbb{C}_{r\times(p-q)}$ herhangi matrisler olmak üzere (4.59) eşitliklerinden $\mathbf{Y}_3\mathbf{Z}_2=\mathbf{0}_{p-q}$ ve $\mathbf{Z}_2\mathbf{Y}_3=\mathbf{0}_r$ olduğu açıktır. Böylece (4.68), (4.69) ve (4.73) ifadeleri kullanılarak $\mathbf{B}$ matrisi

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \frac{2}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \\ \mathbf{S}_4\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{S}_4\begin{pmatrix} \mathbf{0}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3\oplus\mathbf{S}_4\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{2}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_3^{-1}\oplus\mathbf{S}_4^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

şeklinde bulunur.

ii-4) Eğer $a\alpha\neq-1$ ve $a\beta=1$ ise, (4.71) ifadelerinden $\mathbf{Y}$ matrisinin (4.73) halinde ve $\mathbf{Z}$ matrisinin sıfır matris olduğu görülür. Böylece (4.68) ve (4.69) ifadeleri göz önüne alınarak $\mathbf{B}$ matrisi

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4\begin{pmatrix} \mathbf{0}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{2}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3\oplus\mathbf{S}_4\right)\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{2}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_3^{-1}\oplus\mathbf{S}_4^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

şeklinde yazılır.

ii-5) Eğer $a\alpha=-1$ ve $a\beta\neq 1$ ise, (4.71) eşitliklerinden $\mathbf{Y}$ matrisinin sıfır matris ve $\mathbf{Z}$ matrisinin (4.73) halinde olduğu açıktır. Böylece (4.68) ve (4.69) ifadeleri göz önüne alınarak $\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \frac{2}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_4\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{S}_4\begin{pmatrix} \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3\oplus\mathbf{S}_4\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_3^{-1}\oplus\mathbf{S}_4^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

olur.

ii-6) Eğer $a\alpha=1$ ve $a\beta\neq -1$ ise, (4.71) ifadelerinden $\mathbf{Y}$ matrisi sıfır matristir ve $\mathbf{Z}$ matrisi (4.72) halindedir. Böylece (4.68) ve (4.69) ifadeleri kullanılarak $\mathbf{B}$ matrisi

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \mathbf{0}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-2}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_4\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{S}_4\begin{pmatrix} \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3 \oplus \mathbf{S}_4\right)\begin{pmatrix} \mathbf{0}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{2}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_3^{-1} \oplus \mathbf{S}_4^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

şeklinde bulunur.

ii-7) Eğer $a\alpha \neq \pm 1$ ve $a\beta \neq \pm 1$ ise, (4.71) ifadelerinden $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ olduğu açıktır. Böylece $\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3 \oplus \mathbf{S}_4\right)\begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_3^{-1} \oplus \mathbf{S}_4^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

biçiminde yazılır. O halde $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3\oplus\mathbf{S}_4\right)\begin{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_3 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4\end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_3^{-1}\oplus\mathbf{S}_4^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3\oplus\mathbf{S}_4\right)$ olarak tanımlanırsa yukarıdaki her bir durum sırasıyla teoremin b), c), …, h) şıklarını ispatlar. Böylece ispatın gereklilik kısmı da tamamlanır.

Şimdi tersine olarak, $\mathbf{A}$ matrisi (4.48), $\mathbf{B}$ matrisi (4.49), (4.50), (4.51), (4.52), (4.53), (4.54), (4.55) veya (4.56) biçimlerinden birisi olsun. Ayrıca ilgili şıklardaki koşullar sağlansın. Bu durumda $\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2=\left(\mathbf{AB}\right)^2$ ve $\mathbf{K}^2=\mathbf{I}$ olduğu açıktır. ■

$\mathbf{K}$ doğrusal bileşim matrisinin involutifliği problemine ait bu çalışmadaki son sonuç, $\mathbf{A}^2\mathbf{BA}=\mathbf{BA}$ koşulu ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.4. $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq\beta$ ve $(\alpha,\beta)\notin\{(-1,1),(1,-1)\}$ olmak üzere $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ olsun. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}\in\mathbb{C}_n\setminus\{\mathbf{0}\}$ sırasıyla $\{\alpha,\beta\}-$kuadratik ve herhangi matris, ayrıca $a,b\in\mathbb{C}^*$ olmak üzere $\mathbf{K}=a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{A}^2\mathbf{BA}=\mathbf{BA}$ eşitliğinin sağlanması ve $\mathbf{K}$ matrisinin involutif olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\mathbf{A}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1} \tag{4.74}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{V}\in\mathbb{C}_n$ tersinir matrisinin mevcut olması ve $\mathbf{B}$ matrisinin aşağıdaki durumlardan birini sağlamasıdır.

a) $\beta^2\neq 1$, $\alpha^2=1$ ve $\beta=0$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \dfrac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dfrac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dfrac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.75}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{q\times(n-p-r)}$ ve $\mathbf{Y}_3 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times r}$ herhangi matrislerdir.

b) $\beta^2 \neq 1$, $\alpha^2 = 1$ ve $a\beta = 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.76}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times(n-p)}$ herhangi matristir.

c) $\beta^2 \neq 1$, $\alpha^2 = 1$ ve $a\beta = -1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{0} & \dfrac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.77}$$

Burada $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{q\times(n-p)}$ herhangi matristir.

d) $\alpha^2 \neq 1$, $\beta = 0$ ve $a\alpha = 1$ ise,

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \dfrac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dfrac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \tag{4.78}$$

Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{p\times(n-p-r)}$ herhangi matristir.

e) $\alpha^2 \neq 1$, $\beta = 0$ ve $a\alpha = -1$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \quad (4.79)$$

Burada $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{p\times r}$ herhangi matristir.

f) $\beta^2 = 1$ ve $a\alpha = 1$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \quad (4.80)$$

Burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times p}$ herhangi matristir.

g) $\beta^2 = 1$ ve $a\alpha = -1$ ise,

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_1 & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}. \quad (4.81)$$

Burada $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{r\times p}$ herhangi matristir.

İspat : $\mathbf{A}$ bir $\{\alpha, \beta\}-$kuadratik matris olduğundan,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\left(\alpha\mathbf{I}_p \oplus \beta\mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1} \quad (4.82)$$

olacak şekilde bir $p \in \{0,1,\ldots,n\}$ sayısı ve $\mathbf{U} \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır. $\mathbf{X} \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere $\mathbf{B}$ herhangi matrisi

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} & \mathbf{T} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1} \tag{4.83}$$

biçiminde olsun.

$\mathbf{A}^2\mathbf{BA} = \mathbf{BA}$ sağlansın. Böylece $\begin{pmatrix} \alpha^3\mathbf{X} & \alpha^2\beta\mathbf{Y} \\ \alpha\beta^2\mathbf{Z} & \beta^3\mathbf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{X} & \beta\mathbf{Y} \\ \alpha\mathbf{Z} & \beta\mathbf{T} \end{pmatrix}$ olur ve buradan

$$\alpha^2\mathbf{X} = \mathbf{X}, \quad \alpha^2\beta\mathbf{Y} = \beta\mathbf{Y}, \quad \beta^2\mathbf{Z} = \mathbf{Z}, \quad \beta^3\mathbf{T} = \beta\mathbf{T} \tag{4.84}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ involutif olsun. Bu durumda

$$\begin{gathered} \left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 + b^2\mathbf{YZ} = \mathbf{I}_p, \quad ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y} + b^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right) = \mathbf{0}, \\ ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Z} + b^2\left(\mathbf{ZX}+\mathbf{TZ}\right) = \mathbf{0}, \quad \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p} + b\mathbf{T}\right)^2 + b^2\mathbf{ZY} = \mathbf{I}_{n-p}, \end{gathered} \tag{4.85}$$

yazılabilir. Bu denklemler ve (4.84) birlikte ele alındığında ispat, α ve β skalerlerine bağlı olarak aşağıdaki durumlara ayrılabilir.

i) Eğer $\beta^2 \neq 1$ ise, (4.84) denklemlerinin üçüncüsünden $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ olduğu görülür.

i-1) Eğer $\alpha^2 = 1$ ve $\beta = 0$ ise, (4.85) eşitlikleri,

$$\left(a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}\right)^2 = \mathbf{I}_p, \quad \left(b\mathbf{T}\right)^2 = \mathbf{I}_{n-p}, \quad ab\alpha\mathbf{Y} + b^2\left(\mathbf{XY}+\mathbf{YT}\right) = b\mathbf{Y} \tag{4.86}$$

halini alır. (4.86) denklemlerinin ilk eşitliğinden $a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}$ matrisinin involutiftir. Buradan $a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X} = \mathbf{S}_1\begin{pmatrix} \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1}$ olacak şekilde bir $q \in \{0,1,\ldots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_1 \in \mathbb{C}_p$ tersinir matrisi vardır. Böylece $\mathbf{X}$ matrisi,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \mathbf{S}_1^{-1} \tag{4.87}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (4.86) denklemlerinin ikinci eşitliğinden $b\mathbf{T}$ matrisi involutiftir. Böylece bir $r \in \{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_2 \in \mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $b\mathbf{T} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1}$ şeklinde yazılabilir. Buradan $\mathbf{T}$ matrisi,

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \tag{4.88}$$

olur. $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{q \times r}$ olmak üzere $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \tag{4.89}$$

biçiminde olsun. (4.87), (4.88) ve (4.89) ifadeleri (4.86) denklemlerinin sonuncusunda yerine yazılırsa, $\begin{pmatrix} 2\mathbf{Y}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -2\mathbf{Y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ olur. O halde $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S}_2^{-1} \tag{4.90}$$

şeklinde bulunur. Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{q \times (n-p-r)}$ ve $\mathbf{Y}_3 \in \mathbb{C}_{(p-q) \times r}$ herhangi matrislerdir.

$\mathbf{V} = \mathbf{U}(\mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{S}_1\oplus\mathbf{S}_2\right)\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\end{pmatrix}\left(\mathbf{S}_1^{-1}\oplus\mathbf{S}_2^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}$ matrisi, (4.87), (4.88) ve (4.90) ifadeleri kullanıldığında

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q}\end{pmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_1\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2\begin{pmatrix}\frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_2^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\frac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılır. Böylece teoremin a) şıkkının ispatı tamamlanır.

i-2) Eğer $\alpha^2=1$ ve $\beta\neq 0$ ise, (4.84) denklemlerinden $\mathbf{T}=\mathbf{0}$ olur ve (4.85) eşitlikleri,

$$\left(a\alpha\mathbf{I}_p+b\mathbf{X}\right)^2=\mathbf{I}_p,\quad \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p}\right)^2=\mathbf{I}_{n-p},\quad ab\left(\alpha+\beta\right)\mathbf{Y}+b^2\mathbf{XY}=\mathbf{0} \tag{4.91}$$

halini alır. (4.91) denklemlerinin birinci eşitliğinden $a\alpha\mathbf{I}_p + b\mathbf{X}$ involutif matristir. Böylece bir $q \in \{0,1,\ldots,p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_3 \in \mathbb{C}_p$ tersinir matrisi için,

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}_3 \begin{pmatrix} \dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix} \mathbf{S}_3^{-1} \tag{4.92}$$

olur. (4.91) denklemlerinin ikincisinden $a\beta \in \{1, -1\}$ olduğu aşikardır. $\mathbf{Y}_1 \in \mathbb{C}_{q\times(n-p)}$ olmak üzere $\mathbf{Y}$ matrisi

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \tag{4.93}$$

biçiminde olsun. (4.92) ve (4.93) ifadeleri, (4.91) denklemlerinin sonuncusunda yerine yazılırsa, $\begin{pmatrix} (a\beta+1)\mathbf{Y}_1 \\ (a\beta-1)\mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ olur. $a\beta \in \{1,-1\}$ olduğundan $a\beta = 1$ iken $\mathbf{Y} = \mathbf{S}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix}$ ve $a\beta = -1$ iken $\mathbf{Y} = \mathbf{S}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ bulunur. Burada $\mathbf{Y}_2 \in \mathbb{C}_{(p-q)\times(n-p)}$ herhangi matristir.

Şimdi $\mathbf{V} = \mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3 \oplus \mathbf{I}_{n-p}\right)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{U}\left(\mathbf{S}_3 \oplus \mathbf{I}_{n-p}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix} \left(\mathbf{S}_3^{-1} \oplus \mathbf{I}_{n-p}\right) \mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{V} \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta\mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix} \mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir ve $\mathbf{B}$ matrisi $a\beta = 1$ iken

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{V}\begin{pmatrix} \dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

ve $a\beta = -1$ iken,

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} \end{pmatrix}\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{S}_3\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{V}\begin{pmatrix} \dfrac{1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_q & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{0} & \dfrac{-1-a\alpha}{b}\mathbf{I}_{p-q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p} \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

Şeklinde bulunur. Böylece, sırasıyla, teoremin b) ve c) şıklarının ispatı tamamlanır.

i-3) Eğer $\alpha^2 \neq 1$ ve $\beta = 0$ ise, (4.84) denklemlerinden $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ olur ve (4.85) eşitlikleri,

$$\left(a\alpha\mathbf{I}_p\right)^2=\mathbf{I}_p,\quad \left(b\mathbf{T}\right)^2=\mathbf{I}_{n-p},\quad ab\alpha\mathbf{Z}+b^2\mathbf{TZ}=\mathbf{0} \tag{4.94}$$

halini alır. (4.94) denklemlerinin ilkinden $a\alpha\in\{1,\,-1\}$ olduğu aşikardır. Ayrıca(4.94) denklemlerinin ikinci eşitliğinden $b\mathbf{T}$ involutif matristir. Böylece bir $r\in\{0,1,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}_4\in\mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için $\mathbf{T}$ matrisi,

$$\mathbf{T}=\mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \tag{4.95}$$

şeklinde elde edilir. $\mathbf{Y}_1\in\mathbb{C}_{p\times r}$ olmak üzere $\mathbf{Y}$ matrisi,

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \tag{4.96}$$

biçiminde olsun. (4.95) ve (4.96) ifadeleri, (4.94) denklemlerinin sonuncusunda kullanılırsa, $\left(\left(a\alpha+1\right)\mathbf{Y}_1\quad\left(a\alpha-1\right)\mathbf{Y}_2\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ olur. $a\alpha\in\{1,-1\}$ olduğundan $a\alpha=1$ iken $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}$ ve $a\alpha=-1$ iken $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}$ bulunur. Burada $\mathbf{Y}_2\in\mathbb{C}_{p\times(n-p-r)}$ herhangi matristir.

Şimdi $\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}_4\right)$ olsun. Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}_4\right)\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4\end{pmatrix}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}_4^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\alpha\mathbf{I}_p & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n-p}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

şeklinde yazılabilir ve $\mathbf{B}$ matrisi, $a\alpha=1$ iken

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{Y}_2\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

ve $a\alpha=-1$ iken

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_4\begin{pmatrix}\frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}_4^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\mathbf{0}_p & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{-1}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}.$$

şeklinde bulunur. Böylece sırasıyla teoremin d) ve e) şıklarının ispatı tamamlanır.

i-4) Eğer $\alpha^2\neq 1$ ve $\beta\neq 0$ ise, (4.84) eşitliklerinden $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ bulunur ve bu kabule aykırıdır.

ii) Eğer $\beta^2=1$ ise, (4.84) denklemlerinin ilk iki eşitliğinden $\mathbf{X}=\mathbf{0}$ ve $\mathbf{Y}=\mathbf{0}$ olduğu görülür. Buradan (4.85) eşitlikleri,

$$(a\alpha)^2\,\mathbf{I}_p=\mathbf{I}_p,\quad \left(a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}\right)^2=\mathbf{I}_{n-p},\quad ab(\alpha+\beta)\mathbf{Z}+b^2\mathbf{T}\mathbf{Z}=\mathbf{0} \tag{4.97}$$

halini alır. (4.97) denklemlerinin ilkinden $a\alpha\in\{-1,1\}$ olduğu aşikardır. Ayrıca (4.97) denklemlerinin ikinci eşitliğinden $a\beta\mathbf{I}_{n-p}+b\mathbf{T}$ matrisi involutiftir. Bu durumda bir $r\in\{0,\ldots,n-p\}$ sayısı ve bir $\mathbf{S}\in\mathbb{C}_{n-p}$ tersinir matrisi için

$$\mathbf{T}=\mathbf{S}\begin{pmatrix}\frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r}\end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \tag{4.98}$$

olur. $\mathbf{Z}_1 \in \mathbb{C}_{r\times p}$ olmak üzere $\mathbf{Z}$ matrisi,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} \tag{4.99}$$

şeklinde olsun. (4.98) ve (4.99) ifadeleri (4.97) denklemlerinin üçüncü eşitliğinde yerine yazılırsa, $\begin{pmatrix} (a\alpha+1)\mathbf{Z}_1 \\ (a\alpha-1)\mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ elde edilir. $a\alpha \in \{1, -1\}$ olduğundan $a\alpha = 1$ iken $\mathbf{Z} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix}$ ve $a\alpha = -1$ iken $\mathbf{Z} = \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ bulunur. Ayrıca burada $\mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}_{(n-p-r)\times p}$ herhangi matristir.

Böylece $\mathbf{A}$ matrisi,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\left(\alpha \mathbf{I}_p \oplus \beta \mathbf{I}_{n-p}\right)\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}\right)\left(\alpha \mathbf{I}_p \oplus \beta \mathbf{I}_{n-p}\right)\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1} \qquad \text{ve}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{B}$ matrisi $a\alpha = 1$ iken

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 \end{pmatrix} & \mathbf{S}\begin{pmatrix} \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_2 & \mathbf{0} & \frac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{I}_p \oplus \mathbf{S}^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

ve $a\alpha = -1$ iken

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & \mathbf{S}\begin{pmatrix} \dfrac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\mathbf{S}^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}$$

$$=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}\right)\begin{pmatrix} \mathbf{0}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_1 & \dfrac{1-a\beta}{b}\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dfrac{-1-a\beta}{b}\mathbf{I}_{n-p-r} \end{pmatrix}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}^{-1}\right)\mathbf{U}^{-1}$$

şeklinde yazılır. Burada $\mathbf{V}=\mathbf{U}\left(\mathbf{I}_p\oplus\mathbf{S}\right)$ olarak tanımlanırsa teoremin f) ve g) şıklarının ispatı ile birlikte ispatın gereklilik kısmı tamamlanır.

Tersine olarak, $\mathbf{A}$ matrisi (4.74), $\mathbf{B}$ matrisi (4.75), (4.76), (4.77), (4.78), (4.79), (4.80) veya (4.81) biçimlerinden birisi olsun. Ayrıca a, α, β sayıları ilgili koşulları sağlasın. Bu durumda $\mathbf{A}^2\mathbf{BA}=\mathbf{BA}$ ve $\mathbf{K}^2=\mathbf{I}$ olduğu açıktır. ■

BÖLÜM 5. ÖRNEKLER

Bu bölümde, önceki bölümlerde verilen bazı sonuçlar ile ilgili örnekler yer almaktadır. Bu örnekler üç ayrı tiptedir. Birinci tip örneklerde verilen $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri bu çalışmadaki ilgili sonuçta matrisler üzerinde olması gereken eşitlikleri sağlayacak fakat $\mathbf{B}$ matrisi ilgili sonuçtaki olması gereken kalıpta olmayacaktır. Bu durumda hiçbir sıfırdan farklı a ve b skalerleri için $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ matrisinin idempotent olamayacağı anlaşılacaktır. Örnek 5.1 ve 5.3 böyle örneklerdir.

Bir diğer örnek tipinde ise $\mathbf{A}$ matrisi verilip ilgili sonuçta sağlanması gereken matris eşitliğini ve sabitlenmiş katsayılar için doğrusal bileşimin idempotentliğini sağlayan tüm $\mathbf{B}$ matrisleri elde edilecektir. Örnek 5.2 ve 5.4 böyle örneklerdir. Son örnek tipinde ise yazılan $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri için hem ilgili teoremdeki matrisler üzerindeki eşitlikleri hem de $\mathbf{K}$ doğrusal bileşim matrisinin involutifliği sağlanır (bkz. Tablo 5.1).

Örnek 5.1 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri verilsin. Bu matrislerin $\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{A}^2\mathbf{B}$ koşulunu sağladıklarını görmek kolaydır. Şimdi $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ matrisinin idempotent olmasını sağlayan tüm $a, b \in \mathbb{C}^*$ sayılarını bulalım. Burada $\mathbf{A}$ matrisi $\{1, 2\}-$kuadratik matristir yani $\alpha = 1$, $\beta = 2$'dir. Ayrıca $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2a & 2a-b & 3a & -a-b \\ 0 & 3a+b & 2a+2b & -a-b \\ 0 & b-2a & -a & a+b \\ 0 & 4b-2a & 4b-2a & 2a \end{pmatrix}$$

olur ve buradan

$$\mathbf{K}^2=\begin{pmatrix} 4a^2 & 6a^2-2ab-5b^2 & 9a^2-6b^2 & -3a^2-4ab-b^2 \\ 0 & 7a^2+2ab-b^2 & 6a^2-4ab-2b^2 & -3a^2-2ab+b^2 \\ 0 & -6a^2+2ab+5b^2 & -5a^2+6b^2 & 3a^2+2ab-b^2 \\ 0 & -6a^2+8ab+8b^2 & -6a^2+8ab+8b^2 & 4a^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $\mathbf{K}$ matrisinin idempotentliği yalnızca $(a,\, b)\in\{(0,\, 0)\}$ iken sağlanır ancak sıfırdan farklı sayıları aradığımız için aranılan koşullarda $a,\, b\in\mathbb{C}^*$ mevcut değildir. Örneğin, $\mathbf{K}=\mathbf{K}^2$ eşitliğinin sağlanması için köşegen üzerindeki birinci ve dördüncü elemanlar da karşılıklı olarak eşit olmalı, buradan $2a(2a-1)=0$ yazılabilir. Böylece $a\neq 0$ olduğundan $a=1/2$ bulunur. Üçüncü satır dördüncü sütun elemanlarının eşitliğinden ise $a=1/2$ olması kullanılarak $b^2=1/4$ yani $b\in\{1/2,\, -1/2\}$ olur. Ancak $(a,\, b)\in\{(1/2,\; 1/2),\, (1/2,\, -1/2)\}$ iken $\mathbf{K}^2\neq\mathbf{K}$ olduğu açıktır.

Dikkat edilirse $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri $\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{A}=\mathbf{A}^2\mathbf{B}$ şartını sağlamalarına rağmen $\mathbf{B}$ matrisi Teorem 3.2'nin a) şıkkına uygun değildir. ve burada $\mathbf{A}$ matrisini köşegen biçime getiren tersinir matris $\mathbf{V}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şeklindedir.

Örnek 5.2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ olsun. $\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{A}=\mathbf{A}^2\mathbf{B}$ koşulunu sağlayan ve $a\mathbf{A}+\mathbf{B}$ matrisini idempotent yapan tüm $a\in\mathbb{C}^*$ sayılarını ve $\mathbf{B}\in\mathbb{C}_3\setminus\{\mathbf{0}\}$ matrislerini elde edelim.

İlk olarak, $\mathbf{A}$ matrisinin bir köşegenleştirilmiş biçimi ve onu köşegen yapan tersinir matris sırasıyla $\mathbf{A} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$ ve $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şeklinde yazılabilir. Böylece Teorem 3.2'nin notasyonları kullanılarak $\alpha = -3$ ve $\beta = 1$ kabul edilebilir. O zaman Teorem 3.2'nin b) şıkkı uygulandığında $a = -1/3$ olduğu açıktır. Ayrıca $n = 3,\ p = 1$ ve $r \in \{0, \ldots, n-p\} = \{0, 1, 2\}$ olduğundan r sayısının aldığı değere göre $\mathbf{B}$ matrisinin bazı blokları görünmeyebilir. Böylece $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{V}$ matrisinin olası durumları $r = 0, 1, 2$ için sırasıyla

$$\begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir ve burada c, d, e kompleks sayılardır.

Örnek 5.3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ matrisleri verilsin. Bu matrislerin $\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{A}$ koşulunu sağladığını görmek kolaydır. Şimdi $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ matrisinin idempotent olmasını sağlayan tüm $a, b \in \mathbb{C}^*$ sayılarını bulmak isteyelim. Burada $\mathbf{A}$ $\{-1, 2\}-$kuadratik matristir yani $\alpha = -1,\ \beta = 2$'dir. Ayrıca $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ matrisi,

$$\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 0 & 6a+2b & -3a-2b \\ 0 & 2a & -3a & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 6a+4b & 0 & 6a+4b & -4a-4b \end{pmatrix}$$

olur ve buradan

$$\mathbf{K}^2 = \begin{pmatrix} 7a^2-4ab-4b^2 & 0 & 6a^2-4ab-4b^2 & -3a^2+4ab+4b^2 \\ 0 & 4a^2 & -3a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 6a^2-8ab-8b^2 & 0 & 6a^2-8ab-8b^2 & -2a^2+8ab+8b^2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $\mathbf{K}$ matrisinin idempotentliği yalnızca $(a,\, b) \in \{(0,\, 0),\, (0,\, 1/2)\}$ olduğunda sağlanır ancak sıfırdan farklı sayıları aradığımız için aranılan koşullarda $a,\, b \in \mathbb{C}^*$ mevcut değildir. Örneğin, $\mathbf{K} = \mathbf{K}^2$ eşitliğinin sağlanması için köşegen üzerindeki ikinci elemanlar da karşılıklı olarak eşit olmalı, buradan $2a(2a-1)=0$ yazılabilir. Böylece $a \neq 0$ olduğundan $a = 1/2$ elde edilir. Ancak köşegen üzerindeki ikinci elemanların eşitliğine bakılırsa $a(a+1)=0$ yani $a=-1$ elde edilir. Ancak $\mathbf{K}^2 \neq \mathbf{K}$ olduğu açıktır.

Dikkat edilirse $\mathbf{A}$, $\{-1,\, 2\}-$kuadratik matris olmasına ve $\mathbf{A}^2\mathbf{BA} = \mathbf{BA}$ koşulunu sağlamasına rağmen $\mathbf{B}$ matrisi Teorem 3.5'nin b) şıkkına uygun değildir.

Örnek 5.4. Yukarıda verilen $\mathbf{A}$ matrisi ele alınsın. $\mathbf{A}^2\mathbf{BA} = \mathbf{BA}$ koşulunu sağlayan ve $a\mathbf{A}-\mathbf{B}$ matrisinin idempotent olmasını sağlayan tüm $a \in \mathbb{C}^*$ sayısını $\mathbf{B} \in \mathbb{C}_4 \setminus \{\mathbf{0}\}$ matrislerini bulalım.

$\mathbf{A}$ matrisinin bir köşegenleştirilmiş biçimi ve onu köşegen yapan tersinir matris sırasıyla $\mathbf{A} = \mathbf{V}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}$ ve $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ şeklinde yazılabilir. Böylece Teorem 3.5'in notasyonları kullanılarak $\alpha = -1$ ve $\beta = 2$ kabul edilebilir. O zaman Teorem 3.5'nin b) şıkkı uygulandığında $a = 1/\beta = 1/2$ olduğu açıktır. Ayrıca $n=4$, $p=2$ ve $q \in \{0, \ldots, n-p\} = \{0,\, 1,\, 2\}$ olduğundan q sayısının aldığı değere göre $\mathbf{B}$ matrisinin bazı blokları görünmeyebilir. Böylece $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{BV}$ matrisinin olası durumları $q = 0,\, 1,\, 2$ için sırasıyla

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & c & d \\ 0 & -1/2 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir ve burada c, d, e, f, g, h kompleks sayılardır.

Örnek 5.5. Aşağıdaki tabloda bulunan $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri, ilgili teoremdeki matris eşitliklerini sağlar. Ayrıca $\mathbf{K} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ doğrusal bileşim matrisi involutiftir.

Tablo 5.1. 4. Bölümde Verilen Sonuçlara Ait Bazı Örnekler

İlgili Teorem ve Şıkları	a ve b Değerleri	**V** Matrisi	**A** Matrisi	**B** Matrisi
Teo. 4.1.a)	$a=1$, $b=-1$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 & 0 \\ -2 & 10 & -6 & 3 \\ 0 & 13 & -9 & 3 \\ 8 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
Teo. 4.1.b)	$a=2$, $b=-1$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Teo. 4.1.d)	$a=4$, $b=1$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & -5 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
Teo. 4.1.f)	$a=-5$, $b=-2$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & -5 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
Teo. 4.2.a)	$a=2$, $b=-1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3/2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -5/2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 7/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Teo. 4.2.b)	$a=-2$, $b=-2$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & -5/2 \\ 5 & 0 & 3 & 5/2 \\ -5 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5/2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 7/2 & 3/2 \\ 1 & -1 & -9/2 & -3/2 \\ 7 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
Teo. 4.2.e)	$a=-2$, $b=-1$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -15/2 & -5/2 & -5/2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5/2 & 5/2 & 3 & 5/2 \\ 5/2 & 5 & 5/2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -9 & -11 & -9 & -7 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Tablo 5.1 (Devamı)

İlgili Teorem ve Şıkları	a ve b Değerleri	**V** Matrisi	**A** Matrisi	**B** Matrisi
Teo. 4.2.g)	$a=-3$, $b=1$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & -8 & 12 & 8 \\ 4 & 7 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -16 & -24 & 34 & 24 \\ 12 & 20 & -20 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 10 \end{pmatrix}$
Teo. 4.3.a)	$a=-3$, $b=-2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & -3 \\ -6 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -17 & 22 & -12 & 13/2 \\ -11/2 & 3/2 & -3/2 & 5 \\ 0 & -9 & 4 & 9/2 \\ -13 & 22 & -12 & 5/2 \end{pmatrix}$
Teo. 4.3.d)	$a=2$, $b=2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9/2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1/2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1/2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 9/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 & 5 \\ -13 & -4 & 8 & -13 \\ -8 & -2 & 4 & -8 \\ -7 & -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$
Teo. 4.3.e)	$a=2$, $b=1$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11/2 & -5 & 5 & 0 \\ 5/2 & -2 & 5/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8 & 6 & -6 & 0 \\ -5 & 3 & -5 & -5 \\ -2 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$
Teo. 4.3.g)	$a=1$, $b=1$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & -4 \\ 4 & 3 & -4 & 8 \\ -2 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -8 & 10 \\ -14 & -2 & 16 & -22 \\ 10 & 0 & -14 & 16 \\ 4 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$
Teo. 4.4.a)	$a=-2$, $b=-1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -3 & -2 & 2 \\ -7 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
Teo. 4.4.b)	$a=3$, $b=-1$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 1/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 6 \\ -16 & -6 & -4 \\ -40 & -6 & -16 \end{pmatrix}$
Teo. 4.4.d)	$a=2$, $b=1$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -14 & 8 \\ 4 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Teo. 4.4.f)	$a=1$, $b=2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 5 & -3 \\ -6 & -6 & 4 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

BÖLÜM 6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Baksalary ve Baksalary 2000 yılındaki [24] çalışmasında, iki idempotent matrisin doğrusal bileşiminin ne zaman idempotent olacağı problemini ele almış ve bunun üzerine birçok yazar tarafından özel tipli matrislerin doğrusal bileşimlerinin ne zaman yine özel tipli matris olacağı problemi çalışılmıştır. Liu ve diğerleri 2016 yılında bir kuadratik veya bir tripotent matris ile herhangi bir matrisin doğrusal bileşiminin, belirli şartlar altında, involutifliğini incelemişlerdir [45].

Bu çalışmada [45] çalışmasından esinlenilerek bir kuadratik ve herhangi bir matrisin doğrusal bileşiminin involutifliği ve idempotentliği ele alındı. Şöyle ki, çalışmanın 3. bölümünde, bir kuadratik ve herhangi bir matrisin, belirli koşullar altında, doğrusal bileşimin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşullar ortaya konulmuştur. 4. bölümde, önceki bölümde ele alınan doğrusal bileşimin bu kez involutif olması için gerekli ve yeterli koşullar belirlenmiştir. Her iki bölümde verilen sonuçlar ile ilgili örnekler Bölüm 5'te verilmektedir.

Dikkat edilirse [45] çalışmasında, doğrusal bileşimi oluşturan matrislerin sağlaması gereken koşullar teoremin hipotezinde ön şart olarak kullanılırken bu çalışmada bahsi geçen koşullar gerekli ve yeterli koşula bağlanmıştır. Bu durum elde edilen sonuçların sayısal örnekler üzerindeki etkinliğini artırmaktadır.

Ayrıca Sarduvan ve Kalaycı bir kuadratik veya bir kübik matris ile herhangi bir matrisin doğrusal bileşiminin idempotent olması için gerekli ve yeterli koşulları elde etmişlerdir [53]. Buradan anlaşılacağı üzere Bölüm 3'te verilen sonuçlar [53] çalışmasının bir kısmını oluşturmaktadır. Bunun yanı sıra Bölüm 4'teki sonuçlarla da bir makale yayınlanması planlanmaktadır.

Elbette ki bu çalışmada elde edilen sonuçların farklı matris çiftlerine genişletilmesi mümkündür. Örneğin, bu matris çiftlerinden birisi yine herhangi matris ve diğeri $\{\alpha, \beta, \gamma\}-$kübik matris olarak ele alınabilir. Dolayısıyla bir $\{\alpha, \beta, \gamma\}-$kübik ve herhangi bir matrisin doğrusal bileşiminin involutifliği, tripotentliği, kuadratikliği, vb. çalışmalar yapılabilir. Ayrıca iki matrisin doğrusal bileşiminin karakterizasyonunu çalışmak yerine, biri herhangi, ikisi özel tipli matris olan üç matris ile oluşturulan doğrusal bileşimin karakterizasyonu çalışılabilir. Örneğin, bir kuadratik, bir idempotent veya involutif matris ile herhangi bir matrisin doğrusal bileşiminin idempotentliği, involutifliği, vb. karakterizasyonlar ele alınabilir. Bunun yanı sıra matrisler üzerine konulan koşullar değiştirilerek farklı çalışmalar yapılabileceği gibi bu çalışmada ele alınan matris çiftlerinin doğrusal bileşiminin tripotentliği, kuadratikliği vb. karakterizasyonlarının çalışılması mümkündür.

KAYNAKLAR

[1] Stinson, D. R., Cryptography, Discrete Mathematics and Its Applications, Hampman & Hall/CRC, 2005.

[2] Fudenberg, D., Triole, J., Game Theory, MIT Press, 1983.

[3] Sinha, A. N., Udai, D. A., Computer Graphics, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 2007.

[4] Godsil, D., Royle, G., Algebraic Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2001.

[5] Punnen, A. P., Gutin, G., The Traveling Salesman Problem and Its Variations, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002.

[6] Schiff, L. I., Quantum Mechanics, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1968.

[7] Bohm, A., Quantum Mechanics: Foundations and Applications, Springer, New York, 1986.

[8] Weinberg, S., The Quantum Theory of Fields., 1. Cilt. Foundations, Cambridge University Press, 1995.

[9] Greene, W. H., Econometric Analysis, 7th. ed., Prentice Hall, 2012.

[10] Itzykson, C., Zuber, J. B., Quantum Field Theory, McGraw Hill, 1980.

[11] Zabrodin, A., Brezin, É., Kazakov, V., Serban D., Wiegmann, P., Applications of Random Matrices in Physics, Springer - Verlag, New York, 2006.

[12] Burgess, C., Moore, G., The Standart Model: A Primer, Cambridge University Press, 2007.

[13] Mehata, K. M., Srinivasan, S. K., Stochastic processes, McGraw Hill, New York, 1978.

[14] Graybill, F. A., Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth Publishing Company, California, 1983.

[15] Healy, M., Matrices for Statistics, Oxford University Press, 1986.

[16] Latouche G., Ramaswami, V., Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling, 1st ed., SIAM, Philadelphia, 1999.

[17] Pearcy, C., Topping, D. M., Sums of small number of idempotents, Mich. Math. J., 14, 453-465, 1967.

[18] Bethe, H. A., Salpeter, E. E., Quantum Mechanics of One-and Two Electron, Plenum Pub. Co., New York, 1977.

[19] Adler, S. L., Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields, Oxford University Press Inc., New York, 1995.

[20] Bellman, R., Introduction to Matrix Analysis, SIAM, Philadelphia, 1997.

[21] Drake, G. W. F., Handbook of Atomic, Moleculer, and Optical Physics, Springer Science Business Media Inc., New York, 2006.

[22] Higham, N. J., Functions of Matrices, SIAM, Philadelphia, 2008.

[23] Wu, Y., K-potent matrices - construction and applications in digital image encryption, American-Math'10 Proceedings of the 2010 American Conference on Applied Mathematics, USA, 2010.

[24] Baksalary, J. K., Baksalary, O. M., Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 321(1-3), 3-7, 2000.

[25] Groß, J., Trenkler, G., Nonsingularity of the difference of two oblique projectors, SIAM J. Matrix Anal., 21(2), 390-395, 2000.

[26] Tian, Y., Styan, G. P. H., Rank equalities for idempotent and involutory matrices, Linear Algebra Appl., 335(1-3), 101-117, 2001.

[27] Baksalary, J. K., Baksalary, O. M., Styan, G. H., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a tripotent matrix, Linear Algebra Appl., 354(1-3), 21-34, 2002.

[28] Koliha, J. J., Rakočević, V., Invertibility of the sum of idempotents, Linear Multilinear Algebra, 50(4), 285-292, 2002.

[29] Coll, C., Thome, N., Oblique projectors and group involutory matrices, Appl. Math. Comput., 140(2-3), 517-522, 2003.

[30] Baksalary, J. K., Baksalary, O. M., Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices, Linear Algebra Appl., 388, 25-29, 2004.

[31] Baksalary, J. K., Baksalary, O. M., Özdemir, H., A note on linear combinations of commuting tripotent matrices, Linear Algebra Appl., 388, 45-51, 2004.

[32] Özdemir, H., Özban, A. Y., On idempotency of linear combinations of idempotent matrices, Appl. Math. Comput., 159(2), 439-448, 2004.

[33] Benítez, J., Thome, N., Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and t-potent matrix that commute, Linear Algebra Appl., 403, 414-418, 2005.

[34] Baksalary, J. K., Baksalary, O. M., When is a linear combinations of two idempotent matrices the group involutory matrix?, Linear and Multilinear Algebra, 54(6), 429-435, 2006.

[35] Sarduvan, M., Özdemir, H., On linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices, Appl. Math. Comput., 200(1), 401-406, 2008.

[36] Özdemir, H., Sarduvan, M., Özban, A. Y., Güler, N., On idempotency and tripotency of linear combinations of two commuting tripotent matrices, Appl. Math. Comput., 207(1), 197-201, 2009.

[37] Liu, X., Wu, L., Yu, Y., The group inverse of the combinations of two idempotent matrices, Linear and Multilinear Algebra, 59(1), 101-115, 2011.

[38] Wang, J. H., Factorization of matrices into quadratic ones II, Linear Algebra Appl., 231, 111-152, 1995.

[39] Wang, J. H., Factorization of matrices into quadratic ones III, Linear Algebra Appl., 240, 21-39, 1996.

[40] Aleksiejczyk, M., Smoktunowicz, A., On properties of quadratic matrices, Math. Pannon., 11(2), 239-248, 2000.

[41] Özdemir, H., Petik, T., On the spectra of some matrices derived from two quadratic matrices, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 39(2), 225-238, 2013.

[42] Uç, M., Özdemir H., Özban, A. Y., On the quadraticity of linear combinations of quadratic matrices, Linear Multilinear Algebra, 63(6), 1125-1137, 2015.

[43] Uç, M., Petik, T., Özdemir, H., The generalized quadraticity of linear combinations of two commuting quadratic matrices, Linear Multilinear Algebra, 64(9), 1696-1715, 2015.

[44] Petik, T., Uç, M., Özdemir, H., Generalized quadraticity of linear combination of two generalized quadratic matrices, Linear Multilinear Algebra, 63(12), 2430-2439, 2015.

[45] Liu, X., Benítez, J., Zhang, M., Involutiveness of linear combinations of a quadratic or tripotent matrix and an arbitrary matrix, Bull. Iranian Math., 42(3), 595-610, 2016.

[46] Venit, S., Bishop, W., Brown, J., Elementary Linear Algebra, Nelson Education Ltd., USA, 2009.

[47] Horn, R. A., Johnson, C. R., Matrix Analysis, Cambrige University Press, New York, 2013.

[48] Harville, D. A., Matrix Algebra From a Statistician's Perspective, Springer-Verlag, New York, 1997.

[49] Bu, C., Linear maps preserving Drazin inverses of matrices over fields, Linear Algebra Appl., 396, 159-173, 2005.

[50] Zhang, F., Matrix Theory, Basic Results and Techniques, Springer, New York, 2011.

[51] Petik, T., Özdemir, H., Benítez, J., On the spectra of some combinations of two generalized quadratic matrices, Appl. Math. Comput., 268, 978-990, 2015.

[52] Trenkler, G., Farebrother, R. W., On generalized quadratic matrices, Linear Algebra Appl., 410, 244-253, 2005.

[53] Sarduvan, M., Kalaycı, N., On idempotency of linear combinations of a quadratic or a cubic matrix and an arbitrary matrix, Filomat, 33(10), 3161-3185, 2019.

ÖZGEÇMİŞ

Nurgül KALAYCI, 25.07.1989 tarihinde Bolu'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini 2007 yılında tamamladı. 2007 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2011 yılında lisans eğitimini bölüm birincisi olarak tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik EABD'da yüksek lisans programına kaydoldu ve 2014 yılında bu eğitimi tamamladı. Aynı yıl yine aynı enstitünün Matematik EABD'da doktora programına kaydoldu. 2015 yılında Gençlik ve Spor Bakanlığı'na bağlı Kredi ve Yurtlar Kurumunda yurt yönetim personeli olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.