T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN BAZI ÜSTEL DİYOFANT DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

**DOKTORA TEZİ**

**Fatih ERDUVAN**

| | | |
|---|---|---|
| **Enstitü Anabilim Dalı** | **:** | **MATEMATİK** |
| **Enstitü Bilim Dalı** | **:** | **CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ** |
| **Tez Danışmanı** | **:** | **Prof. Dr. Refik KESKİN** |
| **Ortak Danışmanı** | **:** | **Prof. Dr. Zafer ŞİAR** |

**Haziran 2021**

**T.C.**
**SAKARYA ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARINI İÇEREN BAZI ÜSTEL DİYOFANT DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

**DOKTORA TEZİ**

**Fatih ERDUVAN**

**Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK**

**Bu tez 17/06/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile kabul edilmiştir.**

| | | |
|---|---|---|
| **...** | **...** | **...** |
| **…** | **…** | **…** |
| **Jüri Başkanı** | **Üye** | **Üye** |

| | |
|---|---|
| **...** | **...** |
| **…** | **…** |
| **Üye** | **Üye** |

# BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Fatih ERDUVAN

17.06.2021

# TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, teşvik eden ve aynı titizlikte beni yönlendiren değerli danışman hocalarım Prof. Dr. Refik KESKİN'e ve Prof. Dr. Zafer ŞİAR'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması esnasında bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan Prof. Dr. Gökhan SOYDAN ve Prof. Dr. Neşe ÖMÜR hocalarıma da teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca öğrenim hayatım boyunca üzerimde emeği geçen tüm öğretmenlerime ve hayatımın her aşamasında manevi desteğiyle beni hiç yalnız bırakmayan aileme yürekten teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

# SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $a\|b$ | : $a$ tam sayısı $b$ tam sayısını böler |
| $(a,b)$ | : $a$ ile $b$ tam sayılarının en büyük ortak böleni |
| $(B_n)$ | : Balans dizisi |
| $[\mathbb{E}:\mathbb{F}]$ | : $\mathbb{E}$ cisminin $\mathbb{F}$ cismi üzerindeki derecesi |
| $\mathbb{F} \leq \mathbb{E}$ | : $\mathbb{F}$ cismi $\mathbb{E}$ cisminin alt cismi |
| $(F_n)$ | : Fibonacci dizisi |
| $\mathbb{C}$ | : Karmaşık sayılar kümesi |
| $\mathbb{F}[x]$ | : Katsayıları $\mathbb{F}$ cisminin elemanları olan polinomlar halkası |
| $(L_n)$ | : Lucas dizisi |
| $(C_n)$ | : Lucas-Balans dizisi |
| maks | : Maksimum |
| min | : Minimum |
| $B_n$ | : *n.* Balans Sayısı |
| $C_n$ | : *n.* Lucas-Balans sayısı |
| $F_n$ | : *n.* Fibonacci sayısı |
| $L_n$ | : *n.* Lucas sayısı |
| $P_n$ | : *n.* Pell sayısı |
| $Q_n$ | : *n.* Pell-Lucas sayısı |
| $(P_n)$ | : Pell dizisi |
| $(Q_n)$ | : Pell-Lucas dizisi |
| $\mathbb{Z}^+$ | : Pozitif tam sayılar kümesi |
| $\mathbb{Q}$ | : Rasyonel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |
| $C_k$ | : Sürekli kesrin $k.$ yakınsaklığı |
| $\mathbb{Z}$ | : Tam sayılar kümesi |

| | |
|---|---|
| $[\![x]\!]$ | : $x$ reel sayısının tam değeri |
| $\|x\|$ | : $x$ reel sayısının kendisine en yakın olan tam sayıya uzaklığı |
| $\mathrm{der}(\alpha, \mathbb{F})$ | : $\alpha$ cebirsel sayısının $\mathbb{F}$ cismi üzerindeki derecesi |
| $h(\alpha)$ | : $\alpha$ cebirsel sayısının logaritmik yüksekliği |
| $\min(\alpha, \mathbb{F})$ | : $\alpha$ cebirsel sayısının $\mathbb{F}$ cismi üzerindeki minimal polinomu |

# ÖZET

Anahtar kelimeler: Diyofant denklemleri, Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, logaritmalarda lineer formlar, logaritmik yükseklik, basit sonsuz sürekli kesir

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Diyofant denklemleri ile Fibonacci ve Lucas sayılarının kısa bir tarihçesi verildi. Daha sonra Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren bazı Diyofant denklemlerinden bahsedildi.

İkinci bölümde bazı tam sayı dizileri, sürekli kesirler, cisim genişlemeleri ve cebirsel sayıların logaritmik yüksekliği ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde logaritmalarda lineer formların tanımı yapıldıktan sonra Baker'in teorisi ve bu teorinin bazı önemli sonuçlarından bahsedildi. Daha sonra Baker-Davenport'un lemması ve bu lemmanın bazı faydalı versiyonları verildi.

Dördüncü bölümde önceki çalışmalar ve yardımcı teoremler verildikten sonra logaritmalarda lineer formlar yardımıyla bazı üstel Diyofant denklemleri çözüldü. İlk olarak belli bir tabanda tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının çarpımı biçiminde yazılabilen Fibonacci ve Lucas sayıları belirlendi. Daha sonra tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının birleştirilmesi biçiminde yazılabilen Lucas sayıları bulundu.

Beşinci bölüm sonuç ve önerilerden oluşmaktadır.

## SOLUTIONS OF SOME EXPONENTIAL DIOPHANTINE EQUATIONS INCLUDING THE FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS

## SUMMARY

Keywords: Diophantine equations, Fibonacci numbers, Lucas numbers, linear forms in logarithms, logarithmic height, simple infinite continued fractions

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, a brief history of Diophantine equations and the origin of Fibonacci and Lucas numbers are given. Then some Diophantine equations including Fibonacci and Lucas numbers are mentioned.

In the second chapter, some definitions and theorems related to some integer sequences, continued fractions, field extension and logarithmic height of the algebraic numbers are given.

In the third chapter, after the definition of linear forms in logarithms, Baker's theory and some important results of this theory are mentioned. Then Baker-Davenport's lemma and some useful versions of this lemma are given.

In the fourth chapter, after giving previous studies and auxiliary theorems, some exponential Diophantine equations are solved with the help of lineer forms in logarithms. Firstly, the Fibonacci and Lucas numbers which can be written as the products of two natural numbers which all digits are the same on a certain base are determined. Then, the Lucas numbers which can be written in the form of concatenation of two natural numbers that all digits are the same are found.

The fifth chapter consist of results and suggestions.

# BÖLÜM 1. GİRİŞ

Değişkenleri ve katsayıları tam sayı olan denklemlere Diyofant denklemleri denir. Bu denklemler adını Antik Yunan matematikçilerden olan ve cebirin babası olarak da bilinen Diophantus' tan almıştır.

Diophantus' un hangi dönemde yaşadığı ile ilgili çıkarımlar $500$ yıllık bir döneme indirgenebilmiştir. Diophantus, poligon sayılarla ilgili çalışmasında M.Ö. $2$. yüzyılda yaşamış olan İskenderiyeli Hypsicles'ten bahsetmiştir. Ayrıca M.S. $4$. yüzyılda yaşamış olan İskenderiyeli Theon, Ptolemy'nin Almopest adlı eserine yaptığı yorumda Diophantus'un çalışmalarına yer vermiştir. Dolayısıyla Diophantus' un M.Ö. 2. yüzyıl ile M.S. 4. yüzyıl arasında bir dönemde yaşamış olduğu tahmin edilir.

Diophantus'un hangi yıllar arası yaşadığı kesin olarak bilinmese de kaç yaşında öldüğü bilgisi M.S. $5$. yüzyılda yaşamış olan Metodorus'un, çeşitli matematik bilmecelerini derlediği Yunan Antolojisi adlı eserinde geçmektedir. Bu bilmece şöyledir: Diophantus hayatının $\frac{1}{6}$'sında çocukluk çağını geçirmiş, $\frac{1}{7}$'sinden sonra evlenmiş, $\frac{1}{12}$'sinden sonra sakalları uzamış, oğlu evlendikten $5$ yıl sonra doğmuş, oğlu babasının yaşının yarısı kadar yaşamış ve baba oğlundan $4$ yıl sonra ölmüştür. Bu bilmeceye göre Diophantus'us $84$ yıl yaşadığı kolayca görülebilir.

Diophantus, cebirsel denklemlerin çözümleriyle ilgili $130$ tane problemin yer aldığı Arithmetica isimli eseriyle tanınmaktadır. Arithmetica'yı oluşturan $13$ kitaptan sadece $6$ tanesi günümüze ulaşmıştır. Matematik tarihçisi Hankel bu problemleri, tek çözümü olanlar ve genel çözümü olanlar olarak iki gruba ayırmıştır. 1. ciltte tek çözümlü cebir problemleri yer alırken $2,3,4$ ve 5. ciltlerde genel çözümlü cebir problemlerine yer verilmiştir.

Birden fazla çözümü olan Diyofant denklemlerinin ele alınmasına Diyofant analizi denir. Tarihten günümüze kadar Diyofant denklemleri ve Diyofant analizi birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Şimdi bazı önemli Diyofant denklemlerine yer verelim. Diophantus tarafından $a, b$ ve $c$ pozitif tam sayı seçilerek

$$ax^2 + bx = c,$$
$$ax^2 = bx + c,$$
$$ax^2 + c = bx$$

denklemleri ele alındı. Bu üç denklemin bugün aynı denklem olduğunu biliyoruz. Diophantus'un bu denklemleri farklı denklemlermiş gibi düşünmesinin sebebi kendi zamanında sıfır kavramının olmayışıdır. $a$ ve $b$ sıfırdan farklı tam sayılar ve $c$ tam sayı olmak üzere

$$ax + by = c$$

denklemi iki bilinmeyenli lineer Diyofant denklemidir. Burada $(a, b) = d$ olmak üzere $d|c$ olması durumunda bu denklemin sonsuz çözümü vardır.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

denkleminin sonsuz sayıda $(x, y, z)$ pozitif tam sayı çözümleri vardır.

$$x^n + y^n = z^n$$

denkleminin $n = 4$ için Fermat $(1601 - 1665)$ tarafından tam sayılarda çözümünün olmadığı gösterilmiştir. Ayrıca Fermat tarafından $n \geq 3$ için bu denklemi sağlayan $x, y$ ve $z$ pozitif tam sayılarının bulunmadığı iddia edilmiştir. Bu teoremin ispatı yaklaşık 300 yıl sonra 1995 yılında Wiles tarafından [1]'de yayımlandı. Fakat bu ispatın bir adımının hatalı olduğunun ortaya çıkması üzerine aynı yıl bu çalışmadaki hata Wiles ve Taylor [2] tarafından düzeltildi. $d$, tam kare olmayan bir pozitif tam sayı ve $N$ de sıfırdan farklı tam sayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = N$$

denklemi Pell denklemi olarak bilinmektedir. $N = 1$ durumunda bu denklemin her zaman $(x, y)$ tam sayı çözümü olmasına rağmen $N = -1$ durumunda bu denklemin her zaman tam sayı çözümü olmayabilir. Pell denklemleri ile ilgili daha fazla bilgi için almak için [3] numaralı kaynağa bakılabilir. $k$ tam sayı olmak üzere

$$y^2 = x^3 + k$$

Diyofant denklemi Mordell denklemi olarak adlandırılır. Mordell tarafından bu denklemlerin $k$ tam sayısının seçimine bağlı olarak sadece sonlu çoklukta $(x, y)$ tam sayı çözümlerinin var olduğu gösterilmiştir [4]. Ayrıca [5]'de cebirsel sayılar teorisi kullanılarak $k$ tam sayısının belli değerleri için bu denklemin çözümleri incelenmiştir. Ramanujan [6] tarafından $x$ ve $n$ pozitif tam sayılar olmak üzere

$$x^2 + 7 = 2^n$$

denkleminin çözümlerinin $(x, n) = (1,3), (3,4), (5,5), (11,7), (181,15)$ biçiminde olduğu iddia edilmiştir. Ramanujan'ın bu iddiasının doğruluğu Nagell [7] tarafından ispatlanmıştır. $C$ doğal sayı olmak üzere yukarıdaki denklemin daha genel hali olan

$$x^2 + C = y^n$$

denklemine Ramanujan-Nagell denklemi denir. Bu ve buna benzer denklemlerle ilgili [8] numaralı kaynağa ve bu kaynağın kaynaklarına bakılabilir.

Diyofant denklemlerinin çözümlerini bulmak için birçok yöntem kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları çarpanlara ayırma yöntemi, modüler aritmetik yöntemi, eşitsizlik yöntemi, parametrik yöntem, Fermat'ın sonsuz indirgeme yöntemi, tümevarım yöntemi ve özel yöntemlerdir. Bu yöntemler ile ilgili uygulamalar için [9] numaralı kaynaktan ve Diyofant denklemleri ile ilgili temel bilgiler için [10] numaralı kaynaktan faydalanılabilir.

Pisalı Leonardo veya Leonardo Pisano olarak da bilinen İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci, $12$. asırda İtalya'nın Pisa kentinde dünyaya gelmiştir. $1202$ yılında yayımlanmış olan Liber Abaci isimli eserinde Arap sayı sisteminin Roma rakam sistemine göre çok daha kullanışlı olduğundan bahsetmiştir. Kitabın bir diğer önemli yanı ise kitapta yer alan tavşan problemidir. Şimdi bu problemi ifade edelim.

Ergin bir tavşan çifti her ay yeni bir yavru tavşan çifti vermektedir. Bir yavru çifti bir ayda ergenliğe ulaşmaktadır. Yavru olan bir tavşan çiftinden $12$ ay sonunda kaç tavşan çifti oluşur? Bu probleme göre ilk iki aydaki tavşan çifti sayısı $1$ ve sonraki aylardaki tavşan çifti sayısı kendisinden önceki iki aydaki tavşan çifti sayıları toplamına eşit olacağından aylara göre tavşan çiftlerinin toplam sayıları $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$ biçiminde olacaktır. Bu problemin çözümündeki tavşan çiftlerinin sayısının artışını gösteren diziye Fibonacci sayı dizisi ve bu sayı dizisinin her bir elemanına da Fibonacci sayısı denir.

Fibonacci sayı dizisinin keşfinden sonra Fransız matematikçi Édouard Anatole Lucas kendisinden önce gelen iki terimin toplamı biçiminde olan Fibonacci sayı dizisinin başlangıç şartlarını değiştirerek yani ilk iki terimi sırasıyla $2$ ve $1$ alarak Lucas sayı dizisini elde etmiştir. Lucas sayı dizisinin Fibonacci sayı dizisi ile arasında birçok ilginç bağıntı bulunmasından dolayı Lucas sayı dizisi de kısa bir süre içinde ciddi bir ün kazanmıştır. Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin özellikleri ile ilgili [11,12] numaralı kaynaklardan yararlanılabilir.

Bazı özel Diyofant denklemlerinin çözümleri ile Fibonacci ve Lucas sayılarının arasındaki ilişki Fibonacci ve Lucas sayılarını daha ilginç bir hale getirmiştir.

$$x^2 - 5y^2 = \mp 4,$$
$$x^2 - xy - y^2 = \mp 1$$

denklemlerinin çözümleri Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin terimleri cinsindendir [11]. Şimdi de Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren bazı Diyofant denklemlerine yer verelim.

1963 yılında Moser ve Carlitz tarafından [13] numaralı çalışmada, aynı yıl Rollett tarafından [14] numaralı çalışmada tam kare olan Fibonacci sayılarının bulunması önerildi. Bu problem 1964 yılında Cohn [15] ve Wyler [16] tarafından birbirinden bağımsız olarak çözüldü. Bu çalışmalarda tam kare biçiminde yazılabilen Fibonacci sayılarının $0, 1$ ve $144$ olduğu tespit edildi. Aynı yıl Alfred tarafından tam kare olan Lucas sayılarının 1 ve 4 olduğu gösterildi [17].

1965 yılında Cohn [18] tarafından $F_n$ ve $L_n$ sırasıyla $n.$ Fibonacci ve $n.$ Lucas sayıları olmak üzere $c = 1, 2$ için $F_n = cx^2$ ve $L_n = cx^2$ denklemlerinin çözümleri bulundu.

1969 yılında London ve Finkelstein tarafından ise tam küp biçiminde yazılabilen Fibonacci ve Lucas sayıları elde edildi [19]. Aynı problem 1983 yılında Pethő tarafından logaritmalarda lineer formlar ve denklikler kullanılarak çözüldü [20].

1973 ve 1975 yıllarında Finkelstein [21, 22] tarafından sırasıyla $F_n = x^2 + 1$ ve $L_n = x^2 + 1$ denklemlerinin çözümleri bulundu.

1981 yılında Robbins [23] tarafından $F_n = x^2 - 1$ ve $F_n = x^3 \mp 1$ denklemlerinin çözümleri tespit edildi.

1983 yılında Robbins tarafından $p < 10000$ ve $p \equiv 3(mod4)$ koşullarını sağlayan $p$ asal sayıları için $F_n = px^2$ denklemi çözüldü [24]. 1988 yılında ise aynı yazar tarafından $p$ asal sayı olmak üzere $F_n = px^2 \mp 1$ ve $F_n = px^3 \mp 1$ denklemlerinin çözümleri verildi [25].

1990 yılında Robbins tarafından $1 \leq c \leq 1000$ koşulunu sağlayan $c$ birleşik sayıları için $F_n = cx^2$ denkleminin çözümleri bulundu [26].

1991 yılında Robbins tarafından $p < 1000$ koşulunu sağlayan $p$ tek asal sayıları için $L_n = px^2$ denkleminin çözümleri elde edildi [27]. Aynı problem 1999 yılında Zhou [28] tarafından $1000 < p < 60000$ koşulunu sağlayan $p$ asal sayıları için çözüldü.

Bir tam sayının tam kuvveti biçiminde yazılabilen Fibonacci ve Lucas sayıları problemi uzun yıllar çözülemedi. 2006 yılında Bugeaud ve ark. [29] tarafından modüler yaklaşım ile klasik teknikler kullanılarak bu problem çözülmüştür. Diğer bir deyişle $p$ asal sayı olmak üzere $F_n = y^p$ ve $L_n = y^p$ denklemlerinin çözümleri sırasıyla $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$, $F_6 = 8$, $F_{12} = 144$ ve $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_3 = 4$ olarak tespit edilmiştir.

Bu tezin orijinal kısmını Fibonacci ve Lucas sayılarını içeren bazı üstel Diyofant denklemleri oluşturmaktadır. Giriş bölümünde Diyofant denklemleri, Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili genel bilgiler verildikten sonra ikinci ve üçüncü bölümde bu çalışmada ele alacağımız üstel Diyofant denklemlerinin çalışılması için gerekli hazırlık bilgileri verilecektir. Dördüncü bölümde kısa bir giriş yapılıp önceki çalışmalar ve yardımcı teoremler verildikten sonra orijinal denklemler çözülecektir. Bu bölümde öncelikle $2 \leq b \leq 10$ olmak üzere $b$ tabanında tüm rakamları aynı olan $m$ ve $n$ basamaklı iki doğal sayının çarpımı biçiminde yazılabilen Fibonacci ve Lucas sayıları elde edilecektir. Yani

$$F_k = (\underbrace{d_1 \dots d_1}_{m\ tane})_b \times (\underbrace{d_2 \dots d_2}_{n\ tane})_b,$$
$$L_k = (\underbrace{d_1 \dots d_1}_{m\ tane})_b \times (\underbrace{d_2 \dots d_2}_{n\ tane})_b$$

denklemleri ele alınacaktır. Bu denklemleri sağlayan negatif olmayan $b, m, n, d_1, d_2$ ve $k$ tam sayıları bulunacaktır. Daha sonra $1 \leq d_1 \leq 9$ ve $0 \leq d_2 \leq 9$ olmak üzere

$$L_n = \underbrace{d_1 \dots d_1}_{m_1\ tane}\ \underbrace{d_2 \dots d_2}_{m_2\ tane}$$

denklemini sağlayan $n, d_1, d_2, m_1$ ve $m_2$ tam sayıları belirlenecektir. Beşinci bölümde de bu denklemler ile ilgili bazı sonuçlara ve önerilere yer verilecektir.

# BÖLÜM 2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde bazı tam sayı dizileri, sürekli kesirler, cisim genişlemeleri ve cebirsel sayıların logaritmik yüksekliği ile ilgili bazı tanımlara ve teoremlere yer verilecektir. Bu tanımlar ve teoremler diğer bölümler için temel oluşturmaktadır. Ayrıca bu bölümde bazı tanımların ve teoremlerin anlaşılması için örneklere yer verilmiştir.

## 2.1. Bazı Tam Sayı Dizileri

Fibonacci ve Lucas sayı dizileri bu çalışmada ele alacağımız Diyofant denklemleri ile doğrudan ilişkili olduğundan burada bu dizilerin tanımları ve bu diziler ile ilgili çalışmamıza katkı sağlayacak teoremler verilmiştir. Önceki çalışmalar kısmında Pell, Pell-Lucas, Balans ve Lucas-Balans sayı dizilerine de yer verileceğinden bu dizilerin yalnızca tanımları yapılmıştır. Ayrıca Mersenne sayıları son bölümde ele alınacaktır.

**Tanım 2.1.1.** $F_0 = 0, F_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile verilen $(F_n)$ dizisine Fibonacci dizisi ve $F_n$ sayısına da $n$. Fibonacci sayısı denir [12].

**Tanım 2.1.2.** $L_0 = 2, L_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile verilen $(L_n)$ dizisine Lucas dizisi ve $L_n$ sayısına da $n$. Lucas sayısı denir [12].

Fibonacci ve Lucas dizilerinin karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olup bu denklemin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$'dir. Ayrıca

$$\alpha^2 = \alpha + 1, \beta^2 = \beta + 1, \alpha \cdot \beta = -1, \ \alpha + \beta = 1, \alpha - \beta = \sqrt{5}$$

olduğu kolayca görülebilir.

**Teorem 2.1.3** $n \geq 1$ olmak üzere $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$'dir [12].

**Teorem 2.1.4.** $n \geq 0$ olmak üzere Fibonacci sayıları için Binet formülü

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

ile verilir [12].

**Teorem 2.1.5.** $n \geq 1$ olmak üzere $\alpha^{n-2} \leq F_n \leq \alpha^{n-1}$ dir [30].

**İspat:** Fibonacci dizilerinin monoton artan olduğu ve Teorem 2.1.3 kullanılırsa

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1} \leq \alpha F_n + F_n = (\alpha + 1) \cdot F_n = \alpha^2 F_n$$

olduğu görülür. Buradan $\alpha^{n-2} \leq F_n$ bulunur. Şimdi $n \geq 2$ için Teorem 2.1.3 tekrar kullanılırsa

$$F_n - \alpha^{n-1} = F_n - (\alpha F_{n-1} + F_{n-2}) = F_n - F_{n-2} - \alpha F_{n-1} = (1 - \alpha) \cdot F_{n-1} < 0$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan $F_n < \alpha^{n-1}$ elde edilir. Ayrıca teoremin ifadesinde verilen bu eşitsizlik $n = 1$ için de sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 2.1.6.** $n \geq 0$ olmak üzere Lucas sayıları için Binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

ile verilir [12].

**Teorem 2.1.7.** $n \geq 0$ olmak üzere $\alpha^{n-1} \leq L_n \leq 2\alpha^n$ dir [31].

**İspat:** Öncelikle $n \geq 0$ için $\beta^n \leq \alpha^n$ olduğu ve Teorem 2.1.6 kullanılırsa

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \leq \alpha^n + \alpha^n = 2\alpha^n$$

olduğu görülür. Buradan $L_n \leq 2\alpha^n$ bulunur. Ayrıca $n \geq 0$ için

$$\beta^{n-1} \leq \alpha^{n-1} \Rightarrow \beta \cdot \alpha^{n-1} \leq \beta^n \Rightarrow (1-\alpha) \cdot \alpha^{n-1} \leq \beta^n \Rightarrow \alpha^{n-1} - \alpha^n \leq \beta^n$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan $\alpha^{n-1} \leq L_n$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Tanım 2.1.8.** $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile verilen $(P_n)$ dizisine Pell dizisi, $P_n$ sayısına da $n$. Pell sayısı denir [32].

**Tanım 2.1.9.** $Q_0 = 2$, $Q_1 = 2$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile verilen $(Q_n)$ dizisine Pell-Lucas dizisi, $Q_n$ sayısına da $n$. Pell-Lucas sayısı denir [32].

**Tanım 2.1.10.** $B_0 = 0$, $B_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$B_n = 6B_{n-1} - B_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile verilen $(B_n)$ dizisine Balans dizisi ve $B_n$ sayısına da $n$. Balans sayısı denir [33].

**Tanım 2.1.11.** $C_0 = 1$, $C_1 = 3$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$C_n = 6C_{n-1} - C_{n-2}$$

tekrarlama bağıntısı ile verilen $(C_n)$ dizisine Lucas-Balans dizisi ve $C_n$ sayısına da $n$. Lucas-Balans sayısı denir [33].

**Tanım 2.1.12.** $n$ doğal sayı olmak üzere $2^n - 1$ biçimindeki sayılara Mersenne sayıları denir [34].

## 2.2. Sürekli Kesirler

Sürekli kesirler eski zamanlardan beri çalışılsa da bugünkü anlamda kullanımları Joseph Louis Lagrange ve Joseph Liouville ile başladığı görülmektedir. Sürekli kesirlerin matematiğin birçok alanında uygulamaları mevcuttur. Özellikle bazı Diyofant denklemlerinin çözümünde ve irrasyonel sayılara yaklaşımlarda kullanılmaları sürekli kesirlerin en önemli uygulamaları arasındadır. Şimdi sürekli kesirler ile ilgili tanımlara, örneklere ve teoremlere yer verelim.

**Tanım 2.2.1.** $a_0 \in \mathbb{R}$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$'ler pozitif reel sayı olsun.

$$[a_0] = a_0,$$
$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

olmak üzere $[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}]$ ifadesi tümevarımla tanımlanmış olsun. Bu durumda

$$[a_0; a_1, a_2 \ldots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}]}$$

olarak tanımlanan $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n]$ ifadesine sonlu sürekli kesir denir [35].

**Tanım 2.2.2.** $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ sonlu sürekli kesrinde $a_0 \in \mathbb{Z}$ ve $i = 1,2,3, \ldots, n$ için $a_i \in \mathbb{Z}^+$ ise $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ sürekli kesrine sonlu basit sürekli kesir denir [36].

**Tanım 2.2.3.** $a_0 \in \mathbb{Z}$ hariç hepsi pozitif tam sayılar olan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tam sayı dizisinin elemanları verildiğinde

$$p_{-2} = 0,\ p_{-1} = 1,\ q_{-2} = 1,\ q_{-1} = 0$$

olmak üzere $k \geq 0$ için $p_k$ ve $q_k$ tam sayıları sırasıyla

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır [36].

**Teorem 2.2.4.** $a_0 \in \mathbb{Z}$ hariç hepsi pozitif tam sayılar olan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tam sayı dizisinin elemanları için (2.1) denklemleri ile $p_k$ ve $q_k$ tam sayıları tanımlansın. Bu durumda her $x$ reel sayısı ve her $k \geq 0$ tam sayısı için

**i)** $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x] = \frac{x p_{k-1} + p_{k-2}}{x q_{k-1} + q_{k-2}}$

**ii)** $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$

dir [36].

**Tanım 2.2.5.** $k$, $n$'ye eşit ya da $n$'den küçük negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ sürekli kesrine $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ sürekli kesrinin $k$. yakınsaklığı denir ve bu $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ ile gösterilir [36].

Teorem 2.2.4'ün (ii) şıkkı ve Tanım 2.2.5 birlikte göz önüne alındığında $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ olduğu görülür.

**Teorem 2.2.6.** $a_0 \in \mathbb{Z}$ hariç hepsi pozitif tam sayılar olan $a_0, a_1, a_2, ...$ tam sayı dizisinin elemanları için (2.1) denklemleri ile $p_k$ ve $q_k$ tam sayıları tanımlansın. Bu durumda

**i)** $k \geq 0$ için $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$

**ii)** $k \geq 0$ için $p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k a_k$

**iii)** $k \geq 1$ için $C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$

**iv)** $k \geq 2$ için $C_k - C_{k-2} = \frac{(-1)^k a_k}{q_k q_{k-2}}$

dir [36].

**Teorem 2.2.7.** $a_0 \in \mathbb{Z}$ hariç hepsi pozitif tam sayılar olan $a_0, a_1, a_2, ...$ tam sayı dizisinin elemanları ve $k \geq 0$ için $C_k = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$ olsun. Bu durumda

**i)** $(C_{2k})$ artan bir dizi, yani $C_0 < C_2 < \cdots < C_{2k} < \cdots$

**ii)** $(C_{2k+1})$ azalan bir dizi, yani $C_1 > C_3 > \cdots > C_{2k+1} > \cdots$

**iii)** $n$ ve $m$ doğal sayılar olmak üzere $C_{2m} < C_{2n+1}$

dir [36].

**Teorem 2.2.8.** $a_0 \in \mathbb{Z}$ hariç hepsi pozitif tam sayılar olan $a_0, a_1, a_2, ...$ tam sayı dizisinin elemanları verildiğinde $C_k = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$ olsun. Bu durumda $\lim_{k \to \infty} C_k$ vardır ve $r, s \geq 0$ için

$$C_{2r} < \lim_{k \to \infty} C_k < C_{2s+1}$$

dir [36].

**Tanım 2.2.9.** $a_0 \in \mathbb{Z}$ hariç hepsi pozitif tam sayılar olan $a_0, a_1, a_2, ...$ tam sayı dizisinin elemanları verildiğinde $C_k = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$ olmak üzere $\lim_{k \to \infty} C_k$ değerine $[a_0; a_1, a_2, ...]$ sonsuz sürekli kesrinin değeri denir ve bu

$$[a_0; a_1, a_2, ...] = \lim_{k \to \infty} C_k$$

olarak yazılır. Burada $C_k$'lara sonsuz sürekli kesrin yakınsaklıkları denir [36].

Ayrıca $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ sonsuz sürekli kesri

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\vdots}}}$$

olarak da gösterilir.

**Örnek 2.2.10.** Her $n \geq 0$ için $a_n = 1$ olmak üzere $[1; 1, 1, 1, \dots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$'dir.

**Çözüm:** Öncelikle tümevarımla

$$C_n = [1; \underbrace{1,1, \dots ,1,1}_{n\ tane}] = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

olduğunu gösterelim. $n = 0$ ve $n = 1$ için

$$C_0 = [1] = 1 = \frac{F_2}{F_1},$$
$$C_1 = [1; 1] = 1 + \frac{1}{1} = 2 = \frac{F_3}{F_2}$$

olduğundan iddia doğrudur. $n$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$C_n = [1; \underbrace{1, 1, \dots ,1, 1}_{n\ tane}] = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

olsun. O halde yukarıdaki eşitlik kullanıldığında

$$C_{n+1} = [1; \underbrace{1, 1, \dots ,1, 1}_{n+1\ tane}] = 1 + \frac{1}{[1; \underbrace{1,1, \dots ,1,1}_{n\ tane}]} = 1 + \frac{1}{C_n} = \frac{\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} + 1}{\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}} = \frac{F_{n+3}}{F_{n+2}} = \frac{F_{n+2+1}}{F_{n+1+1}}$$

elde edilir. Böylece bu eşitlik $n + 1$ için de doğru olur. Dolayısıyla her $n \geq 0$ için

$$C_n = [1; \underbrace{1, 1, \dots ,1, 1}_{n\ tane}] = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

dir. Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ olduğu kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}\left(\alpha-\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right)}{\alpha^{n+1}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right)} = \alpha$$

elde edilir ve bu $[1; 1, 1, 1, 1, \dots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğunu gösterir.

**Teorem 2.2.11.** $x$ irrasyonel sayı olsun. Ayrıca $k \geq 0$ için

$$x = x_0, \quad a_k = [\![x_k]\!], \quad x_{k+1} = \frac{1}{x_k - a_k}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$'dir [36].

**Örnek 2.2.12.** $x = \pi$ olsun. Bu durumda $a_0, a_1, a_2, a_3$ ve $a_4$ değerleri

$$a_0 = [\![x_0]\!] = [\![\pi]\!] = 3,\ x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0} = \frac{1}{\pi - 3} = 7{,}062 \dots$$
$$a_1 = [\![x_1]\!] = [\![7{,}062 \dots]\!] = 7,\ x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} = 15{,}996 \dots$$
$$a_2 = [\![x_2]\!] = [\![15{,}996 \dots]\!] = 15,\ x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} = 1{,}003 \dots$$
$$a_3 = [\![x_3]\!] = [\![1{,}003 \dots]\!] = 1,\ x_4 = \frac{1}{x_3 - a_3} = 292{,}634 \dots$$
$$a_4 = [\![x_4]\!] = [\![292{,}634 \dots]\!] = 292$$

olup $x = \pi = [3; 7, 15, 1, 292, \dots]$ olarak yazılabilir. Dolayısıyla

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0} = [a_0] = 3,$$
$$C_1 = \frac{p_1}{q_1} = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7},$$
$$C_2 = \frac{p_2}{q_2} = [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106},$$
$$C_3 = \frac{p_3}{q_3} = [a_0; a_1, a_2, a_3] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113},$$

$$C_4 = \frac{p_4}{q_4} = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292}}}} = \frac{103993}{33102}$$

olarak bulunur.

**Teorem 2.2.13. i)** $x$ irrasyonel sayı olsun. $r, s$ tam sayılar ve $s \geq 1$ olmak üzere

$$\left|x - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s^2}$$

ise $x$'in sürekli kesir açılımının bir $\frac{p_k}{q_k}$ yakınsaklığı için $\frac{r}{s} = \frac{p_k}{q_k}$'dir. Üstelik

$$\left|x - \frac{r}{s}\right| > \frac{1}{(a_{k+1}+2)s^2}$$

dir. Burada $[a_0; a_1, \dots, a_k, \dots]$, $x$'in sürekli kesir açılımıdır.
**ii)** Eğer $|sx - r| < |q_k x - p_k|$ ise o zaman $s \geq q_{k+1}$'dir.
**iii)** Eğer $s < q_{k+1}$ ise

$$\left|x - \frac{r}{s}\right| \geq \frac{1}{(a+2)s^2}$$

dir. Burada $a := \text{maks}\{a_i : i = 0,1,2, \dots, k+1\}$'dir [37].

Şimdi cisim genişlemeleri ile ilgili bazı tanımlar, örnekler ve teoremler verilecektir.

### 2.3. Cisim Genişlemeleri

**Tanım 2.3.1.** $\mathbb{F} \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{F}$ üzerinde " $+$ " ve " $\cdot$ " işlemleri tanımlanmış olsun.
**a)** $(\mathbb{F}, +)$ cebirsel yapısı değişmeli bir grup,
**b)** "$+$" işleminin $\mathbb{F}$ kümesindeki birim elemanı 0 olmak üzere $(\mathbb{F}\backslash\{0\}, \cdot)$ cebirsel yapısı değişmeli bir grup,
**c)** " $\cdot$ " işleminin " $+$ " işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özelliği,
varsa $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir cisim denir [38].

**Örnek 2.3.2.** $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ve $(\mathbb{C},+,\cdot)$ cebirsel yapıları birer cisimdir.

**Tanım 2.3.3.** $\mathbb{E}$ bir cisim ve $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ olmak üzere $\mathbb{F}$ cismi $\mathbb{E}$ cismindeki işlemlere göre bir cisim ise $\mathbb{F}$'ye $\mathbb{E}$'nin bir alt cismi denir ve bu $\mathbb{F} \leq \mathbb{E}$ ile gösterilir [39].

**Tanım 2.3.4.** $\mathbb{F}$ cismi bir $\mathbb{E}$ cisminin alt cismi ise $\mathbb{E}$ cismine $\mathbb{F}$ cisminin bir cisim genişlemesi denir [39].

**Örnek 2.3.5.** $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ cisminin; $\mathbb{C}$ ise hem $\mathbb{R}$ cisminin hem de $\mathbb{Q}$ cisminin bir cisim genişlemesidir. Ayrıca $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cismi de $\mathbb{Q}$ cisminin bir cisim genişlemesidir.

**Teorem 2.3.6.** $\mathbb{F}$ bir cisim ve $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$ cisminin bir cisim genişlemesi olsun. Bu durumda $\mathbb{E}$ cismi, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır [39].

**Tanım 2.3.7.** $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$'nin bir cisim genişlemesi olmak üzere $\mathbb{E}$' nin $\mathbb{F}$ üzerindeki boyutuna $\mathbb{E}$ cisminin $\mathbb{F}$ cismi üzerindeki derecesi denir ve bu $[\mathbb{E}:\mathbb{F}]$ ile gösterilir [39].

**Tanım 2.3.8.** $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$ cisminin bir cisim genişlemesi ve $[\mathbb{E}:\mathbb{F}]$ sonlu ise $\mathbb{E}$ cismine $\mathbb{F}$ cisminin sonlu cisim genişlemesi denir [39].

**Tanım 2.3.9.** $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$'nin bir cisim genişlemesi ve $\alpha \in \mathbb{E}$ olsun. Sıfırdan farklı

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{F}[x]$$

polinomu için $p(\alpha) = 0$ ise $\alpha$' ya $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir cebirsel eleman denir [39].

**Örnek 2.3.10.** $\mathbb{C}$ cismi, $\mathbb{Q}$ cisminin bir cisim genişlemesi ve $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{C}$ olup

$$p(x) = x^2 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$$

polinomu için $p(\alpha) = 0$ olduğundan $\alpha$, $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde cebirsel elemandır.

**Tanım 2.3.11.** $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$ cisminin bir cisim genişlemesi ve $\alpha \in \mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ üzerinde cebirsel eleman olmak üzere $\mathbb{F}[x]$'de, $\alpha$ cebirsel elemanını kök kabul eden en küçük dereceli başkatsayısı 1 olan polinoma $\alpha$'nın minimal polinomu denir ve bu $\min(\alpha, \mathbb{F})$ biçiminde gösterilir [39].

**Tanım 2.3.12.** $\mathbb{F} \leq \mathbb{E}$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{E}$ cebirsel elemanının minimal polinomunun derecesine $\alpha$'nın $\mathbb{F}$ üzerindeki derecesi denir ve bu $\mathrm{der}(\alpha, \mathbb{F})$ ile gösterilir [39].

**Tanım 2.3.13.** $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$ cisminin bir cisim genişlemesi ve $\alpha \in \mathbb{E}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{E} = \mathbb{F}(\alpha)$ ise $\mathbb{E}$ cisim genişlemesine $\mathbb{F}$ cisminin bir basit genişlemesi denir. Burada $\mathbb{F}(\alpha)$, $\alpha$ ve $\mathbb{F}$ cismini içeren en küçük cisimdir [39].

**Teorem 2.3.14.** $\mathbb{F} \leq \mathbb{E}$ olmak üzere $\mathbb{F}$ üzerindeki $\alpha \in \mathbb{E}$ cebirsel elemanının minimal polinomunun derecesi $n$ olsun. Bu durumda $[\mathbb{F}(\alpha): \mathbb{F}] = n$'dir [39].

**Örnek 2.3.15.** $\gamma = \sqrt{5}$ olsun. Bu durumda $\min(\gamma, \mathbb{Q}) = x^2 - 5$ ve $\mathrm{der}(\gamma, \mathbb{Q}) = 2$ olduğundan Teorem 2.3.14'e göre $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}): \mathbb{Q}] = 2$'dir.

**Tanım 2.3.16.** $\mathbb{F} \leq \mathbb{E}$ olmak üzere $\mathbb{E}$ cisminin her elemanı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir cebirsel eleman ise $\mathbb{E}$ cismine $\mathbb{F}$ cisminin bir cebirsel cisim genişlemesi denir [39].

**Tanım 2.3.17.** $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$ cisminin bir cebirsel cisim genişlemesi ve $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ olmak üzere $\alpha$ ve $\beta$ elemanları $\mathbb{F}$ cismi üzerinde aynı minimal polinomun kökleri ise $\alpha$ ve $\beta$ elemanlarına $\mathbb{F}$ cismi üzerinde eşlenik elemanlardır denir [39].

**Örnek 2.3.18.** $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $\alpha$'nın $\mathbb{Q}$ üzerindeki minimal polinomu

$$\min(\alpha, \mathbb{Q}) = x^2 - x - 1$$

dir. Bu polinomun diğer kökü $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olup bu kök $\alpha$' nın eşleniğidir.

**Tanım 2.3.19.** $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$ cisminin bir cisim genişlemesi olsun. $\mathbb{F}$ cismine sonlu sayıda $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{E}$ elemanını ilave etmekle elde edilen $\mathbb{F}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ cismine $\mathbb{F}$ cisminin bir çoklu genişlemesi denir. $\mathbb{F}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ cismi $\mathbb{E}$ cisminin hem $\mathbb{F}$ cismini hem de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ cebirsel elemanlarını içeren en küçük alt cismidir. Yani $\mathbb{F}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ cismi $\mathbb{E}$ cisminin hem $\mathbb{F}$ cismini hem de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_n$ cebirsel elemanlarını içeren bütün alt cisimlerinin arakesitidir [40].

**Tanım 2.3.20.** Bir karmaşık sayı $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirsel eleman ise bu karmaşık sayıya cebirsel sayı denir. Cebirsel olmayan sayıya transandant sayı denir [40].

**Tanım 2.3.21.** $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismine $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ cebirsel sayılarının eklenmesiyle elde edilen $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ cismine bir cebirsel sayı cismi denir. Eğer $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ ise $\mathbb{K}$'ye reel cebirsel sayı cismi denir [40].

**Teorem 2.3.22.** $\mathbb{K}$ bir cebirsel sayı cismi ise $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$ olacak biçimde $\alpha$ cebirsel sayısı vardır [40].

## 2.4. Cebirsel Sayıların Logaritmik Yükseklikleri

Bir önceki alt bölümde, $\mathbb{E}$ cismi $\mathbb{F}$ cisminin bir cisim genişlemesi olmak üzere $\alpha \in \mathbb{E}$, cebirsel elemanının $\mathbb{F}$ cismi üzerindeki minimal polinomunun tanımı verilmişti. Şimdi $\alpha$ cebirsel sayısının $\mathbb{Q}$ üzerindeki minimal polinomundan hareketle $\alpha$'nın $\mathbb{Z}$ üzerindeki minimal polinomunun tanımını verelim.

$\alpha$ cebirsel sayısının $\mathbb{Q}$ üzerindeki minimal polinomu

$$x^d + \frac{r_1}{s_1}x^{d-1} + \cdots + \frac{r_{d-1}}{s_{d-1}}x + \frac{r_d}{s_d}$$

olsun. Bu polinom, katsayılarının paydalarının en küçük ortak katı ile çarpılırsa

$$q(x) = c_0x^d + c_1x^{d-1} + \cdots + c_{d-1}x + c_d$$

polinomu elde edilir ve $q(\alpha) = 0$'dır. Bu durumda $c_0, c_1, \dots, c_d$ tam sayılarının en büyük ortak böleni $b$ olmak üzere

$$p(x) = \frac{1}{b} q(x) = a_0 x^d + a_1 x^{d-1} + \cdots + a_{d-1} x + a_d$$

alınırsa $p(\alpha) = 0$ olur. Burada $a_0 > 0$ ve $a_0, a_1, \dots, a_d$'ler aralarında asal olup tek türlü belirli $p(x)$ polinomuna $\alpha$ cebirsel sayısının $\mathbb{Z}$ üzerindeki minimal polinomu denir [41].

Şimdi cebirsel sayıların logaritmik yüksekliğinin tanımı yapılıp cebirsel sayıların logaritmik yüksekliği ile ilgili örnekler çözülecektir.

**Tanım 2.4.1.** $\alpha$ cebirsel sayısı, derecesi $d$ olan

$$a_0 x^d + a_1 x^{d-1} + \cdots + a_d = a_0 \prod_{i=1}^{d} \left(x - \alpha^{(i)}\right) \in \mathbb{Z}[x],$$

minimal polinomunun bir kökü olsun. Burada $a_0 > 0$, $a_0, a_1, \dots, a_d$'ler aralarında asal ve $\alpha^{(i)}$ ler $\alpha$ cebirsel sayısının eşlenikleridir. Bu durumda $\alpha$'nın logaritmik yüksekliği

$$h(\alpha) = \frac{1}{d} \left( \log a_0 + \sum_{i=1}^{d} \log\left(\text{maks}\left\{\left|\alpha^{(i)}\right|, 1\right\}\right) \right)$$

olarak tanımlanır.

Özel olarak $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 1$ ve $(a, b) = 1$ olmak üzere $\alpha = a/b$ ise

$$h(a/b) = \log(\text{maks}\{|a|, b\}) \tag{2.2}$$

olduğu görülür. Burada log doğal logaritmadır [41].

**Örnek 2.4.2.** $\gamma = \sqrt{5}$ olmak üzere $\gamma$ cebirsel sayısının $\mathbb{Z}$ üzerindeki minimal polinomu $x^2 - 5$ ve $\gamma$'nın eşleniği $\gamma' = -\sqrt{5}$ olup $\gamma$' nın logaritmik yüksekliği

$$h(\gamma) = \frac{1}{2}\left(\log 1 + \log(\text{maks}\{|\gamma|, 1\}) + \log(\text{maks}\{|\gamma'|, 1\})\right) = \frac{1}{2}\left(2\log\sqrt{5}\right) = \log\sqrt{5}$$

olarak bulunur.

**Örnek 2.4.3.** $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $\alpha$ cebirsel sayısının $\mathbb{Z}$ üzerindeki minimal polinomu $x^2 - x - 1$ ve $\alpha$'nın eşleniği $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olup $\alpha$'nın logaritmik yüksekliği

$$h(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\log 1 + \log(\text{maks}\{|\alpha|, 1\}) + \log(\text{maks}\{|\beta|, 1\})\right) = \frac{1}{2}\log\alpha \tag{2.3}$$

olarak bulunur.

**Örnek 2.4.4.** $b \geq 1$ tam sayı olmak üzere $b$ cebirsel sayısının logaritmik yüksekliği

$$h(b) = \log(\text{maks}\{|b|, 1\}) = \log b \tag{2.4}$$

olarak bulunur.

Şimdi vereceğimiz teorem cebirsel sayıların logaritmik yükseklikleri ile ilgili özellikleri içermektedir.

**Teorem 2.4.5.** Her $\alpha_1, \alpha_2$ cebirsel sayıları ve $m \in \mathbb{Z}$ için
**i)** $h(\alpha_1 \mp \alpha_2) \leq h(\alpha_1) + h(\alpha_2) + \log 2$
**ii)** $h(\alpha_1 {\alpha_2}^{\pm 1}) \leq h(\alpha_1) + h(\alpha_2)$
**iii)** $h({\alpha_1}^m) = |m| h(\alpha_1)$
dir [42].

# BÖLÜM 3. LOGARİTMALARDA LİNEER FORMLAR

Bu bölümde öncelikle logaritmalarda lineer form tanımı yapılacaktır. Daha sonra Gelfond ve Schneider'in sonucundan hareketle Baker'in teorisi ve bu teorinin bazı önemli sonuçlarından bahsedilecek. Son olarak Baker-Davenport'un lemması ve bu lemmanın bazı faydalı versiyonları verilecektir.

**Tanım 3.1.** $i = 1,2, \dots ,n$ için $\alpha_i$'ler ve $j = 0,1,2, \dots ,n$ için $\beta_j$'ler karmaşık cebirsel sayılar olmak üzere cebirsel sayıların logaritmalarda lineer formu

$$\Lambda = \beta_0 + \beta_1 \log\alpha_1 + \beta_2 \log\alpha_2 + \cdots + \beta_n \log\alpha_n$$

olarak tanımlanır [41].

Bu çalışmada ele alınacak olan Diyofant denklemlerinin çözümünde $\Lambda$ ifadesinde $n = 3$, $\beta_0 = 0$, $j = 1,2,3$ için $\beta_j = b_j \in \mathbb{Z}$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ cebirsel sayıları pozitif reel sayılar olacaktır. Bu durumda log, doğal logaritmaya karşılık gelecektir.

1900 yılında Hilbert 23 tane açık problemden oluşan bir liste önerdi. Hilbert bu problemlerin 10 tanesini Paristeki 2. Uluslararası Matematik Konferansında sundu. Bu 10 problemden biri olan Hilbert'in 7. problemi bazı sayıların transandantlığı ya da bu sayıların en azından irrasyonel sayı olması ile ilgiliydi. Hilbert'in 7. problemi içerisinde yer alan 0 ve 1'den farklı $\alpha_1$ cebirsel sayısı ile irrasyonel sayı olan $\alpha_2$ cebirsel sayısı için ${\alpha_1}^{\alpha_2}$ sayısının transandantlığı 1934 yılında birbirinden bağımsız olarak Gelfond [43] ve Schneider [44] tarafından gösterilmiştir. Bu teoremin sonuçlarından biri de 0 ve 1'den farklı $\alpha_1$ ve $\alpha_2$ cebirsel sayıları için $\log\alpha_1$ ve $\log\alpha_2$, $\mathbb{Q}$ üzerinde lineer bağımsız ise cebirsel sayılar üzerinde de lineer bağımsızdır. Şimdi bu sonucun genelleştirilmiş formunu verelim.

### 3.1. Baker'in Teorisi ve Bazı Sonuçları

Gelfond ve Schneider'ın sonucu Baker $[45, 46]$ tarafından genelleştirilerek 0 ve 1' den farklı $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ cebirsel sayıları için $\log\alpha_1, \dots, \log\alpha_n$ sayıları $\mathbb{Q}$ üzerinde lineer bağımsız ise cebirsel sayılar üzerinde de lineer bağımsızdır şeklinde ifade edilmiş ve bu teorem 1967 yılında Baker [47] tarafından aşağıdaki gibi genişletilmiştir.

**Teorem 3.1.1.** Karmaşık sayılar kümesinde 0 ve 1'den farklı $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ cebirsel sayıları için $\log\alpha_1, \dots, \log\alpha_n$ sayıları $\mathbb{Q}$ üzerinde lineer bağımsız olsun. Bu durumda $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$'ler karmaşık cebirsel sayılar ve $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \neq (0,0, \dots ,0)$ ise

$$\beta_0 + \beta_1\log\alpha_1 + \beta_2\log\alpha_2 + \dots + \beta_n\log\alpha_n \neq 0$$

dır [48].

Logaritmalarda lineer formlar yardımıyla Diyofant denklemlerini çözmek için lineer formların sıfırdan farklı olması ve mutlak değerlerinin alt sınırının olması oldukça önemlidir. Baker logaritmaların lineer formları için kesin alt sınırlar bulmaya yönelik önemli bir teorinin kurucusudur. Şimdi $\beta_0 = 0$ ve $j = 1,2, \dots, n$ için $\beta_j = b_j \in \mathbb{Z}$ olmak üzere 1975 yılında yayımlanmış olan Baker'in teoremini verelim.

**Teorem 3.1.2.** Karmaşık sayılar kümesinde 0 ve 1'den farklı $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ cebirsel sayıları verilsin. Ayrıca $b_1, b_2, \dots, b_n$ tam sayıları

$$b_1\log\alpha_1 + b_2\log\alpha_2 + \dots + b_n\log\alpha_n \neq 0$$

olacak şekilde mevcut olsun. Bu durumda

$$|b_1\log\alpha_1 + b_2\log\alpha_2 + \dots + b_n\log\alpha_n| \geq (eB)^{-C}$$

dir. Burada $B \coloneqq \text{maks}\{|b_1|, |b_2|, \dots, |b_n|\}$ ve $C$, sadece $n$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ cebirsel sayılarına bağlı olarak etkili bir şekilde hesaplanabilir bir sabittir [48].

**Sonuç 3.1.3.** Karmaşık sayılar kümesinde 0 ve 1'den farklı $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ cebirsel sayıları verilsin. Ayrıca $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tam sayıları

$$\alpha_1{}^{b_1} \cdot \alpha_2{}^{b_2} \cdots \alpha_n{}^{b_n} \neq 1$$

olacak şekilde mevcut olsun. Bu durumda

$$|\alpha_1{}^{b_1} \cdot \alpha_2{}^{b_2} \cdots \alpha_n{}^{b_n} - 1| \geq (eB)^{-C'}$$

dir. Burada $B \coloneqq \text{maks}\{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_n|\}$ ve $C'$, sadece $n$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ cebirsel sayılarına bağlı olarak etkili bir şekilde hesaplanabilir bir sabittir [48].

Teorem 3.1.2'nin daha açıklayıcı bir versiyonu, 1977 yılında Baker tarafından aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

**Teorem 3.1.4.** 0 ve 1'den farklı $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ cebirsel sayıları için $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ cisminin $\mathbb{Q}$ üzerindeki derecesi en fazla $D$ olsun. $j = 1,2, \ldots, n$ için $\alpha_j$ cebirsel sayısının $\mathbb{Z}$ üzerindeki minimal polinomunun katsayılarının mutlak değerlerinin en büyüğü $A_j(\geq 4)$ sayısından küçük veya eşit olsun.

$$A = \text{maks}(A_j),\ \Omega = (\log A_1) \cdots (\log A_n),\ \Omega' = (\log A_1) \cdots (\log A_{n-1})$$

olsun. Ayrıca $b_1, b_2, \ldots, b_n$'ler tam sayı, $B = \text{maks}\{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_n|\}$ ve $\mathrm{e}^B \geq 4$ olsun. Bu durumda

$$\Lambda = b_1 \log\alpha_1 + b_2 \log\alpha_2 + \cdots + b_n \log\alpha_n$$

ve $\Lambda \neq 0$ ise

$$\log|\Lambda| \geq -(16nD)^{200n} \cdot (\log \mathrm{B}) \cdot \Omega \cdot \log \Omega'$$

dir [49].

Teorem 3.1.4'te verilen alt sınır tamamen açık olmasına rağmen bu alt sınırın bazı dezavantajları vardır. Bu dezavantajlardan biri $(16nD)^{200n}$ çarpanının çok büyük olmasıdır. Bu çarpanın $n$ ve $D$'yi içeren bir polinom ifadesi ile değiştirilmesi ve sabitlerin önemli derecede azaltılması beklenir. Ayrıca $\Omega$ içindeki logaritmik ifadelerin çarpımı yerine bu ifadelerin toplanması beklenir [49]. Birkaç yazarın çabasından sonra 1993 yılında Baker ve Wüstholz tarafından aşağıdaki teorem verildi.

**Teorem 3.1.5.** 0 ve 1'den farklı $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ cebirsel sayıları verilsin. Ayrıca $b_1, b_2, \dots, b_n$'ler tam sayılar olsun. Bu durumda

$$\Lambda = b_1 \log\alpha_1 + b_2 \log\alpha_2 + \cdots + b_n \log\alpha_n$$

ve $\Lambda \neq 0$ ise

$$\log|\Lambda| \geq -18 \cdot (n+1)! \cdot n^{n+1} \cdot (32D)^{n+2} \cdot \log(2nD) \cdot h''(\alpha_1) \cdots h''(\alpha_n) \cdot \log B$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \mathbb{Q}]$, $B = \text{maks}\{|b_1|, \dots, |b_n|\}$ ve $i = 1, \dots, n$ için $h''(\alpha_i) = \text{maks}\left\{h(\alpha_i), \frac{1}{D} \cdot |\log \alpha_i|, \frac{1}{D}\right\}$'dir [41].

Şimdi Matveev'in teoremi ile ilgili gerekli hazırlıkları yapalım.

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),\ [\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \mathbb{Q}] = D,\ \varkappa = \begin{cases} 1, & \mathbb{K} \subset \mathbb{R} \\ 2, & \mathbb{K} \subset \mathbb{C} \end{cases}$$

$1 \leq j \leq n$ için $A_j \geq \text{maks}\{D \cdot h(\alpha_j), |\log \alpha_j|\}$, $\Omega \coloneqq A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$

$$B \coloneqq \text{maks}\left\{1, \text{maks}\left\{\frac{|b_j| A_j}{A_n} : 1 \leq j \leq n\right\}\right\},$$

$$C_0 \coloneqq \log(e^{4,4n+7} \cdot n^{5,5} \cdot D^2 \cdot \log(eD)),$$

$$W_0 \coloneqq \log(1,5 \cdot e \cdot B \cdot D \cdot \log(eD)),$$

$$C(n) = C(n, \varkappa) \coloneqq \frac{16}{\varkappa \cdot n!} \cdot e^n \cdot (2n + 1 + 2\varkappa) \cdot (n+2) \cdot \left(4(n+1)\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2} en\right)^{\varkappa}$$

olsun. Bu durumda Matveev'in teoremini verebiliriz.

**Teorem 3.1.6.** 0 ve 1'den farklı $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ cebirsel sayıları $\mathbb{K}$ cebirsel sayı cisminin elemanları olsun. Ayrıca $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tam sayıları verilsin. $b_n \neq 0$ ve $\log\alpha_1, \log\alpha_2, \ldots, \log\alpha_n$'ler $\mathbb{Z}$ üzerinde lineer bağımsız ise

$$\log|\Lambda| > -C(n) \cdot C_0 \cdot W_0 \cdot D^2 \cdot \Omega$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\Lambda = b_1\log\alpha_1 + b_2\log\alpha_2 + \cdots + b_n\log\alpha_n$$

dir [50].

Şimdi Matveev'in yukarıdaki teoreminin sonucunu verelim.

**Sonuç 3.1.7.** 0 ve 1'den farklı $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ cebirsel sayıları $\mathbb{K}$ cebirsel sayı cisminin elemanları olsun. Ayrıca $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tam sayıları verilsin. Bu durumda

$$\Lambda = b_1\log\alpha_1 + b_2\log\alpha_2 + \cdots + b_n\log\alpha_n$$

olmak üzere $\Lambda \neq 0$ ise

$$\log|\Lambda| > -C_1(n) \cdot D^2 \cdot \Omega \cdot \log(\mathrm{eD}) \cdot \log(\mathrm{eB})$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$B \geq \text{maks}\{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_n|\},$$
$$A_i \geq \text{maks}\{D \cdot h(\gamma_i), |\log\gamma_i|, (0{,}16)\}, \ (1 \leq i \leq n)$$
$$\Omega := A_1 \cdot A_2 \cdots A_n,$$
$$C_1(n) = C_1(n, \varkappa) := \min\left\{\frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{1}{2}en\right)^{\varkappa} \cdot 30^{n+3} \cdot n^{3{,}5}, 2^{6n+20}\right\}$$

dir [50].

Şimdi vereceğimiz teorem Sonuç 3.1.7'den elde edilmiş olup Bugeaud ve ark. tarafından [29]'da Teorem 9.4 olarak verilmiştir. Ayrıca bu çalışmada ele alınacak olan Diyofant denklemlerinin çözümünde bu teorem kullanılacaktır.

**Teorem 3.1.8.** $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$'ler derecesi $D$ olan $\mathbb{K}$ reel cebirsel sayı cisminde pozitif reel cebirsel sayılar olsun. $b_1, b_2, \dots, b_n$'ler tam sayı olmak üzere

$$\Gamma \coloneqq {\alpha_1}^{b_1} \cdot {\alpha_2}^{b_2} \cdots {\alpha_n}^{b_n} - 1$$

sıfırdan farklı olsun. Bu durumda

$$|\Gamma| > \exp(-1{,}4 \cdot 30^{n+3} \cdot n^{4{,}5} \cdot D^2 \cdot (1 + \log D) \cdot (1 + \log B) \cdot A_1 \cdot A_2 \cdots A_n)$$

dir. Burada $B \geq$ maks$\{|b_1|, |b_2|, \dots, |b_n|\}$ ve $i = 1,2, \dots, n$ için

$$A_i \geq \text{maks}\{D \cdot h(\alpha_i), |\log \alpha_i|, (0{,}16)\}$$

dir [29].

Baker'in Teorisi ve sonuçları Diyofant denklemlerini çözmek için oldukça önemlidir. Bu teorinin Diyofant denklemleri üzerindeki uygulamaları için [51, 52] numaralı kaynaklara bakılabilir.

## 3.2. Baker-Davenport'un Lemması ve Bazı Sonuçları

Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formülleri ile Teorem 3.1.8 kullanılarak bu çalışmada ele alınacak olan Diyofant denklemlerindeki $n$ değişkeni için bir üst sınır elde edilecektir. Burada çok büyük olan bu üst sınırların azaltılması için bazı çalışmalara yer verilecektir.

**Tanım 3.2.1.** $\|x\|$, $x$ ile $x$'e en yakın tam sayı arasındaki uzaklık olarak tanımlanır. Yani, $x \in \mathbb{R}$ için $\|x\| \coloneqq \min\{|x - n| : n \in \mathbb{Z}\}$'dir [53].

İlk olarak 1968 yılında Baker ve Davenport [53] tarafından verilen lemmayı ispatı ile birlikte verelim.

**Lemma 3.2.2.** $K > 6$ olsun. Herhangi bir $M$ pozitif tam sayısı için, $p$ ve $q$ tam sayıları

$$1 \leq q \leq KM, \tag{3.1}$$
$$|q\theta - p| < 2 \cdot (KM)^{-1} \tag{3.2}$$

eşitsizliklerini sağlasın. Ayrıca $\theta, \beta, C \in \mathbb{R}$ ve $C > 1$ olmak üzere $\|q\beta\| \geq 3K^{-1}$ ise

$$0 < |m\theta - n + \beta| < 0{,}07 \cdot C^{-m} \tag{3.3}$$

eşitsizliğinin

$$\frac{\log(K^2M)}{\log C} < m < M \tag{3.4}$$

koşulunu sağlayan $m$ ve $n$ pozitif tam sayıları için çözümü yoktur [53].

**İspat:** Öncelikle $\phi = q\theta - p$ alınırsa (3.2) eşitsizliğinden $|\phi| < 2(KM)^{-1}$ bulunur. (3.3) eşitsizliği $q$ ile çarpılırsa

$$|m(p + \phi) - qn + q\beta| < q \cdot C^{-m} \tag{3.5}$$

olduğu görülür. (3.1) ve (3.4) eşitsizlikleri göz önüne alınarak

$$m|\phi| < 2m(KM)^{-1} < 2M(KM)^{-1} < 2K^{-1},$$
$$qC^{-m} \leq KMC^{-m} < K^{-1}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece (3.5) eşitsizliğinden $\|q\beta\| < 3K^{-1}$ olduğu görülür. Bu ise çelişkidir.

Şimdi Lemma 3.2.2'nin bir versiyonu olan Dujella ve Pethő'nün lemmasını verelim.

**Lemma 3.2.3.** $M \in \mathbb{Z}^{+}$, $q > 6M$ olacak şekilde $\gamma$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının yakınsaklığı $\frac{p}{q}$ ve $A > 0$, $B > 1$ olmak üzere $A, B, \mu$ reel sayılar olsun.

$$\varepsilon := \|\mu q\| - M\|\gamma q\|$$

olmak üzere $\varepsilon > 0$ ise

$$0 < m\gamma - n + \mu < A \cdot B^{-m} \tag{3.6}$$

eşitsizliğinin

$$\frac{\log\left(Aq/_{\varepsilon}\right)}{\log B} \leq m \leq M$$

koşulunu sağlayan $m$ ve $n$ pozitif tam sayıları için çözümü yoktur [54].

**İspat:** Varsayalım ki $0 < m \leq M$ olsun. Ayrıca (3.6) eşitsizliği $q$ ile çarpılırsa

$$m(\gamma q - p) + mp - nq + \mu q < qAB^{-m}$$

yazılabilir. Böylece

$$qAB^{-m} > |\mu q - (nq - mp)| - m\|\gamma q\| \geq \|\mu q\| - M\|\gamma q\| := \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikten

$$m < \frac{\log\left(Aq/_{\varepsilon}\right)}{\log B}$$

bulunur. Bu ise çelişkidir.

Şimdi de Dujella ve Pethő'nün lemmasının benzer bir versiyonunu verelim.

**Lemma 3.2.4.** $M \in \mathbb{Z}^+$, $q > 6M$ olacak şekilde $\gamma$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının yakınsaklığı $\frac{p}{q}$ ve $A > 0$, $B > 1$ olmak üzere $A, B, \mu$ reel sayılar olsun.

$$\varepsilon := \|\mu q\| - M\|\gamma q\|$$

olmak üzere $\varepsilon > 0$ ise

$$0 < |u\gamma - v + \mu| < A \cdot B^{-w} \tag{3.7}$$

eşitsizliğinin $u \leq M$ ve $w \geq \frac{\log\left(^{Aq}/_{\varepsilon}\right)}{\log B}$

koşullarını sağlayan $u, v, w$ pozitif tam sayıları için çözümü yoktur [55].

**İspat:** Varsayalım ki $0 < u \leq M$ olsun. $\gamma$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının yakınsaklığı $p/q$ olduğundan

$$\|q\gamma\| = |p - q\gamma|$$

dir. Bu eşitlik göz önüne alınarak (3.7) eşitsizliği $q$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} qAB^{-w} &> |q\mu - (qv - up) - u(p - q\gamma)| \\ &\geq |q\mu - (qv - up)| - u|p - q\gamma| \\ &\geq \|q\mu\| - u\|q\gamma\| \\ &\geq \|q\mu\| - M\|q\gamma\| \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $w < \frac{\log\left(^{Aq}/_{\varepsilon}\right)}{\log B}$ elde edilir. Bu ise çelişkidir.

Lemma 3.2.4 bu çalışmada ele alınacak olan Diyofant denklemlerinin çözümü esnasında $n$ değişkeni için elde edilen üst sınırın azaltılmasında kullanılacaktır. Bu lemmada ifade edilen $\varepsilon$ değerinin sıfırdan küçük çıkması durumunda $\gamma$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının yakınsaklığının paydası olan $q$ değeri büyütülmektedir. Fakat $\mu = 0$ olma durumunda

$$\varepsilon := \|\mu q\| - M\|\gamma q\|$$

olarak tanımlandığından $\varepsilon < 0$ olacağı kolayca görülebilir. Bu durumda ikinci bölümde verdiğimiz Teorem 2.2.13 kullanılacaktır.

# BÖLÜM 4. BAZI ÜSTEL DİYOFANT DENKLEMLERİ

Bu bölümde öncelikle tezin orijinal kısmını oluşturan üç farklı üstel Diyofant denklemi tanıtılacaktır. Sonra önceki çalışmalar ve yardımcı teoremler verilip ardından bu üstel Diyofant denklemleri çözülecektir. İlk iki denklemi vermeden önce şu bilgiyi ifade edelim: $0 \leq d \leq b-1$ ve $m \geq 1$ koşullarını sağlayan $d$ ve $m$ doğal sayıları için $b$ tabanında tüm rakamları $d$ olan $m$ basamaklı bir $n$ doğal sayısı

$$n = (\underbrace{dd \dots dd}_{m\ tane})_b = d + db + \cdots + db^{m-1} = d \cdot (1 + b + \cdots + b^{m-1}) = \frac{d \cdot (b^m - 1)}{b-1}$$

biçiminde yazılabilir. Bu çalışmada öncelikle $2 \leq b \leq 10$ olmak üzere $b$ tabanında $m$ ve $n$ basamaklı tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının çarpımı biçiminde yazılabilen Fibonacci ve Lucas sayıları elde edilecektir. Yani

$$F_k = \frac{d_1 \cdot (b^m - 1)}{b-1} \cdot \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1},$$
$$L_k = \frac{d_1 \cdot (b^m - 1)}{b-1} \cdot \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1}$$

denklemleri çözülecektir. Son denklemi vermeden önce aşağıdaki tanımı verelim.

**Tanım 4.1.** $d_1 \neq 0$ ve $i = 1,2,3, \dots, k$ için $d_i$'ler $0 \leq d_i \leq 9$ koşulunu sağlayan tam sayılar olmak üzere

$$N = \underbrace{d_1 \dots d_1}_{m_1\ tane}\ \underbrace{d_2 \dots d_2}_{m_2\ tane}\ \dots\ \underbrace{d_k \dots d_k}_{m_k\ tane}$$

ise $N$'ye tüm rakamları aynı olan $k$ doğal sayının birleştirilmesi denir [56].

Bu bölümde son olarak tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının birleştirilmesi biçiminde yazılabilen Lucas sayıları araştırılacaktır. Yani

$$L_n = \underbrace{d_1 \dots d_1}_{m_1\ tane}\ \underbrace{d_2 \dots d_2}_{m_2\ tane}$$

denkleminin çözümleri bulunacaktır.

## 4.1. Önceki Çalışmalar

Bu alt bölümde bu çalışmada ele alınacak olan üstel Diyofant denklemlerinin benzerleri ile ilgili literatürde yer alan çalışmalara yer verilecektir.

İlk olarak $2000$ yılında Luca tarafından tüm rakamları aynı olan Fibonacci ve Lucas sayıları tespit edildi. Bu çalışmadaki Diyofant denklemleri $m \geq 1,\ 0 \leq a \leq 9$ ve $n \geq 0$ koşulunu sağlayan $a, m, n$ tam sayıları için

$$F_n = a \cdot \left(\frac{10^m - 1}{9}\right),$$
$$L_n = a \cdot \left(\frac{10^m - 1}{9}\right)$$

biçiminde olup bu denklemleri sağlayan $n$ değerlerinin sırasıyla $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10$ ve $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ olduğu gösterildi $[57]$. Bu çalışmadaki denklemlerin çözümünde elementer yöntemler kullanılmıştır. Bu denklemlerin logaritmalarda lineer formlar yardımıyla çözümü için $[41]$ numaralı kaynağa bakılabilir.

$2011$ yılında Alvarado ve Luca tarafından tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının toplamı biçiminde yazılabilen en büyük Fibonacci sayısının

$$F_{20} = 6765 = 6666 + 99$$

olduğu bulundu $[58]$.

2012 yılında Marques ve Togbé tarafından ardışık Fibonacci sayılarının çarpımı biçiminde yazılabilen tüm rakamları aynı olan doğal sayılar problemi elementer yöntemler kullanılarak çözüldü. Bu çalışmada $m > 1$ ve $1 \leq a \leq 9$ koşulu sağlayan $n, k, m, a$ pozitif tam sayıları için

$$F_n \cdot F_{n+1} \cdots F_{n+k-1} = a \cdot \left(\frac{10^m - 1}{9}\right)$$

Diyofant denkleminin çözümünün $(n, k, m, a) = (10,1,2,5)$ olduğu gösterildi [59].

2012 yılında Luca tarafından üç Fibonacci sayısının toplamı biçiminde yazılabilen tüm rakamları aynı olan doğal sayılar $n \geq 1,\ 0 \leq d \leq 9$ ve $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq 0$ olmak üzere

$$N = F_{m_1} + F_{m_2} + F_{m_3} = d \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)$$

Diyofant denklemi ile ifade edildi. Bu denklemi sağlayan en büyük $N$ doğal sayısının $11111$ olduğu tespit edildi [60].

2015 yılında Faye ve Luca tarafından $m \geq 1$, $0 \leq a \leq 9$ ve $n \geq 0$ olmak üzere tüm rakamları aynı olan Pell ve Pell-Lucas sayılarını ifade eden

$$P_n = a \cdot \left(\frac{10^m - 1}{9}\right),$$

$$Q_n = a \cdot \left(\frac{10^m - 1}{9}\right)$$

Diyofant denklemlerini sağlayan $n$ değerlerinin sırasıyla $n = 0, 1, 2, 3$ ve $n = 0, 1, 2$ olduğu elementer yöntemler kullanılarak elde edildi [61].

2018 yılında Normenyo ve ark. tarafından üç Pell sayısının toplamı biçiminde yazılabilen tüm rakamları aynı olan doğal sayılar araştırıldı. Bu çalışmada $n \geq 1$, $1 \leq d \leq 9$ ve $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq 0$ olmak üzere

$$N = P_{m_1} + P_{m_2} + P_{m_3} = d \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)$$

Diyofant denklemini sağlayan en büyük $N$ doğal sayısının $999$ olduğu gösterildi [62]. Aynı yıl Normenyo ve ark. tarafından $1 \leq d \leq 9$, $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq m_4 \geq 0$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$N = F_{m_1} + F_{m_2} + F_{m_3} + F_{m_4} = d \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9}\right),$$

$$N = L_{m_1} + L_{m_2} + L_{m_3} + L_{m_4} = d \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)$$

Diyofant denklemlerinin çözümleri elde edildi. Bu çalışmada dört Fibonacci ve dört Lucas sayısının toplamı biçiminde yazılabilen tüm rakamları aynı olan en büyük doğal sayıların sırasıyla $66666$ ve $88888$ olduğu bulundu [63].

$2018$ yılında Rayaguru ve Panda tarafından $m > 1,\ k \geq 2$ ve $1 \leq a \leq 9$ olmak üzere $n, k, m, a$ pozitif tam sayıları için

$$B_n = a \cdot \left(\frac{10^m - 1}{9}\right), \quad (a \neq 6)$$

$$B_n \cdot B_{n+1} \cdots B_{n+k} = a \cdot \left(\frac{10^m - 1}{9}\right)$$

Diyofant denklemlerinin çözümünün olmadığı ispatlandı. Bu denklemler sırasıyla tüm rakamları aynı olan en az iki basamaklı Balans sayılarını ve ardışık Balans sayılarının çarpımı biçiminde yazılabilen en az iki basamaklı ve tüm rakamları aynı olan doğal sayıları ifade eder. Ayrıca bu çalışmada $1 \leq a \leq 9$ ve $n, m, k, a$ pozitif tam sayılar olmak üzere

$$C_n = a \cdot \left(\frac{10^m - 1}{9}\right)$$

Diyofant denkleminin çözümlerinin $(m, n, a) = (1, 1, 3), (2, 3, 9)$ olduğu ve

$$C_n \cdot C_{n+1} \cdots C_{n+k} = a \cdot \left(\frac{10^m - 1}{9}\right)$$

Diyofant denkleminin çözümünün olmadığı tespit edildi. Bu denklemler sırasıyla tüm rakamları aynı olan Lucas-Balans sayılarını ve ardışık Lucas-Balans sayılarının çarpımı biçiminde yazılabilen tüm rakamları aynı olan doğal sayıları ifade eder [64].

2018 yılında Irmak ve Togbé tarafından $k \geq 2$ ve $1 \leq a \leq 9$ olmak üzere $n, k, m, a$ pozitif tam sayıları için

$$L_n \cdot L_{n+1} \cdots L_{n+k-1} = a \cdot \left(\frac{10^m - 1}{9}\right)$$

Diyofant denkleminin çözümü $(n, k, m, a) = (4, 2, 2, 7)$ olarak bulundu. Bu çözüm

$$L_4 L_5 = 7 \cdot 11 = 77$$

biçiminde ifade edilir [65].

2019 yılında Erduvan ve Keskin tarafından $k \geq 0$, $1 \leq m \leq n$ ve $1 \leq d_1, d_2 \leq 9$ olmak üzere

$$F_k = \frac{d_1(10^n - 1)}{9} \cdot \frac{d_2(10^m - 1)}{9},$$
$$L_k = \frac{d_1(10^n - 1)}{9} \cdot \frac{d_2(10^m - 1)}{9}$$

Diyofant denklemlerini sağlayan en büyük Fibonacci ve Lucas sayılarının sırasıyla

$$F_{10} = 55 = 5 \cdot 11 = 1 \cdot 55,$$
$$L_6 = 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$$

biçiminde olduğu ispatlandı [66].

2019 yılında Luca ve ark. [67] tarafından üç Lucas sayısının toplamı biçiminde yazılabilen tüm rakamları aynı olan doğal sayılar elde edildi. Bu çalışmada $n \geq 1$, $1 \leq d \leq 9, m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq 0$ olmak üzere

$$N = L_{m_1} + L_{m_2} + L_{m_3} = d \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)$$

Diyofant denklemini sağlayan en büyük $N$ doğal sayısının 2222 olduğu gösterildi.

Aynı yıl Luca ve ark. tarafından $n \geq 1$, $1 \leq d \leq 9$ ve $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq m_4 \geq 0$ olmak üzere

$$N = P_{m_1} + P_{m_2} + P_{m_3} + P_{m_4} = d \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)$$

Diyofant denklemini sağlayan en büyük $N$ doğal sayısının 999 olduğu bulundu [68].

2019 yılında Normenyo ve ark. tarafından $n \geq 1$, $1 \leq d \leq 9$, $s_1 \leq s_2$ ve $t_1 \leq t_2$ olmak üzere

$$F_{s_1} + F_{s_2} + L_{t_1} + L_{t_2} = d \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)$$

Diyofant denkleminin negatif olmayan tüm $(s_1, s_2, t_1, t_2, n)$ çözümleri elde edildi. Bu çalışmada iki Fibonacci sayısı ile iki Lucas sayısının toplamı biçiminde yazılabilen tüm rakamları aynı olan en büyük doğal sayının 333333 olduğu tespit edildi [69].

2019 yılında Adegbindin ve ark. tarafından tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının toplamı biçiminde yazılabilen en büyük Lucas sayısının

$$L_{14} = 843 = 66 + 777$$

olduğu gösterildi [70].

2019 yılında Şiar ve ark. tarafından $k \geq 1$, $1 \leq d \leq 9$ ve $n \geq m \geq 0$ olmak üzere

$$P_m P_n = d \cdot \left(\frac{10^k-1}{9}\right), Q_m Q_n = d \cdot \left(\frac{10^k-1}{9}\right), P_m Q_n = d \cdot \left(\frac{10^k-1}{9}\right)$$
$$B_m B_n = d \cdot \left(\frac{10^k-1}{9}\right), C_m C_n = d \cdot \left(\frac{10^k-1}{9}\right), C_m B_n = d \cdot \left(\frac{10^k-1}{9}\right)$$

Diyofant denklemlerini sağlayan tüm rakamları aynı olan en büyük doğal sayılar sırasıyla $5, 4, 6$ ve $6, 99, 99$ olarak tespit edildi [71].

2020 yılında Erduvan ve Keskin tarafından iki Fibonacci ve iki Lucas sayısının çarpımı biçiminde yazılabilen tüm rakamları aynı olan en büyük doğal sayıların sırasıyla

$$F_2 \cdot F_{10} = 1 \cdot 55 = 55,$$
$$L_4 \cdot L_5 = 7 \cdot 11 = 77$$

olduğu tespit edildi [72]. Aynı yıl Erduvan ve ark. tarafından $2 \leq b \leq 9$ koşulunu sağlayan $b$ tam sayıları için iki Lucas ve iki Fibonacci sayısının çarpımı biçiminde yazılabilen $b$ tabanında tüm rakamları aynı olan en büyük doğal sayıların sırasıyla

$$L_2 \cdot L_9 = 3 \cdot 76 = 228 = (444)_7,$$
$$F_7 \cdot F_8 = 13 \cdot 21 = 273 = (333)_9$$

biçiminde olduğu ispatlandı [73,74].

2020 yılında Adegbindin ve ark. tarafından tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının toplamı biçiminde yazılabilen en büyük Pell ve Pell-Lucas sayılarının sırasıyla

$$P_6 = 70 = 4 + 66,$$
$$Q_6 = 198 = 99 + 99$$

olduğu gösterildi [75].

2020 yılında Şiar ve Keskin tarafından $k \geq 1$, $0 \leq m_1 \leq m_2$ ve $1 \leq d \leq 9$ olmak üzere $k, m_1, m_2$ ve $d$ tam sayıları için

$$N = L_{m_1} + L_{m_2} = d \cdot \left(\frac{10^k - 1}{9}\right)$$

Diyofant denkleminin negatif olmayan tüm $(m_1, m_2, k, N)$ çözümleri

$$(m_1, m_2, k, N) \in \left\{\begin{matrix} (1,1,1,2), (1,0,1,3), (0,0,1,4), (2,1,1,4), (2,0,1,5), \\ (3,1,1,5), (2,2,1,6), (3,0,1,6), (3,2,1,7), (3,3,1,8), \\ (4,1,1,8), (4,0,1,9), (4,3,2,11), (5,5,2,22), \\ (6,3,2,22), (7,3,2,33), (9,1,2,77), (12,5,3,333) \end{matrix}\right\}$$

olarak tespit edildi [31].

2020 yılında Rayaguru ve Panda tarafından $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ ve $n, m, l \geq 1$ olmak üzere

$$B_n = \underbrace{a \dots a}_{m\ tane} \underbrace{b \dots b}_{l\ tane}$$

olacak şekilde tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının birleştirilmesi biçiminde yazılabilen Balans sayısının $B_3 = 35$ olduğu bulundu [56].

2020 yılında Ddamulira [76] tarafından üç Balans sayısının toplamı biçiminde yazılabilen tüm rakamları aynı olan doğal sayılar elde edildi. Bu çalışmada $n \geq 1$, $1 \leq d \leq 9$ ve $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq 0$ olmak üzere

$$N = B_{m_1} + B_{m_2} + B_{m_3} = d \cdot \left(\frac{10^n - 1}{9}\right)$$

Diyofant denklemini sağlayan $N$ tam sayılarının $1, 2, 3, 6, 7$ ve $8$ olduğu gösterildi.

2020 yılında Adegbindin ve Togbé tarafından tüm rakamları aynı olan üç doğal sayının toplamı biçiminde yazılabilen en büyük Lucas sayısının

$L_{18} = 5778 = 5555 + 222 + 1$

biçiminde olduğu gösterildi [77].

2021 yılında Adegbindin ve ark. tarafından tüm rakamları aynı olan üç doğal sayının toplamı biçiminde yazılabilen en büyük Pell ve Pell Lucas sayılarının sırasıyla

$P_9 = 985 = 888 + 88 + 9,$
$Q_{10} = 6726 = 6666 + 55 + 5$

biçiminde olduğu tespit edildi [78].

2021 yılında Erduvan ve Keskin tarafından $2 \leq b \leq 10$ koşulunu sağlayan $b$ tam sayıları için dört balans sayısının toplamı biçiminde yazılabilen $b$ tabanında tüm rakamları aynı olan doğal sayılar bulundu. Bu çalışmada $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq m_4 \geq 0$, $2 \leq b \leq 10$, $1 \leq d \leq b - 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$N = B_{m_1} + B_{m_2} + B_{m_3} + B_{m_4} = d \cdot \left(\frac{b^n - 1}{b - 1}\right)$$

Diyofant denklemini sağlayan en büyük $N$ doğal sayısının $444$ olduğu gösterildi. Ayrıca bu çalışmada $2 \leq b \leq 10$ olmak üzere $b$ tabanında tüm rakamları aynı olan en büyük balans sayısının $B_3 = 35 = (55)_6$ biçiminde olduğu tespit edildi [79].

2021 yılında Alahmadi ve ark. tarafından $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ ve $n, m, l \geq 1$ olmak üzere

$$F_n = \underbrace{a \dots a}_{m\ tane}\ \underbrace{b \dots b}_{l\ tane}$$

denklemi ele alındı ve tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının birleştirilmesi biçiminde yazılabilen Fibonacci sayılarının $13, 21, 34, 55, 89, 144, 233$ ve $377$ olduğu elde edildi [80].

## 4.2. Yardımcı Teoremler

**Yardımcı Teorem 4.2.1.** $2 \leq b \leq 10,\ 1 \leq d_1, d_2 \leq b-1,\ 1 \leq m \leq n$ ve $k \geq 1$ koşullarını sağlayan $b, m, n, d_1, d_2$ ve $k$ tam sayıları için

$$F_k = \frac{d_1 \cdot (b^m - 1)}{b-1} \cdot \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1}$$

olsun. Bu durumda $n + 1 \leq k \leq 10n + 1$ eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** Teorem 2.1.5'in sol tarafı kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\alpha^{k-2} \leq F_k = \frac{d_1 \cdot (b^m - 1)}{b-1} \cdot \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1} \leq (b^n - 1)^2 < b^{2n} \leq 10^{2n} < \alpha^{10n}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan $k \leq 10n + 1$ bulunur. Ayrıca Teorem 2.1.5'te verilen eşitsizliğin sağ tarafı kullanılır ve yine gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2^{n-1} < b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + 1 = \frac{b^n - 1}{b-1} \leq \frac{d_1 \cdot (b^m - 1)}{b-1} \cdot \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1} = F_k \leq \alpha^{k-1} < 2^{k-1}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan $n + 1 \leq k$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Yardımcı Teorem 4.2.2.** $2 \leq b \leq 10,\ 1 \leq d_1, d_2 \leq b-1,\ 1 \leq m \leq n$ ve $k \geq 0$ koşullarını sağlayan $b, m, n, d_1, d_2$ ve $k$ tam sayıları için

$$L_k = \frac{d_1 \cdot (b^m - 1)}{b-1} \cdot \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1}$$

olsun. Bu durumda $n - 1 \leq k \leq 10n$ eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** Teorem 2.1.7'nin sol tarafı kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\alpha^{k-1} \leq L_k = \frac{d_1 \cdot (b^m - 1)}{b-1} \cdot \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1} \leq (b^n - 1)^2 < b^{2n} \leq 10^{2n} < \alpha^{10n}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan $k \leq 10n$ bulunur. Ayrıca Teorem 2.1.7'de verilen eşitsizliğin sağ tarafı kullanılır ve yine gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2^{n-1} < b^{n-1} + b^{n-2} + \cdots + 1 = \frac{b^n - 1}{b-1} \leq \frac{d_1 \cdot (b^m - 1)}{b-1} \cdot \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1} = L_k \leq 2\alpha^k < 2^{k+1}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan $n - 1 \leq k$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Yardımcı Teorem 4.2.3.** Tüm rakamları aynı olan Lucas sayıları $1, 2, 3, 4, 7$ ve $11$'dir [57].

**Yardımcı Teorem 4.2.4.** $m_1, m_2 \geq 1$, $1 \leq d_1, d_2 \leq 9$ ve $n \geq 5$ koşullarını sağlayan $m_1, m_2$, $d_1, d_2$ ve $n$ tam sayıları için

$$L_n = \underbrace{d_1 \ldots d_1}_{m_1\ kez}\ \underbrace{d_2 \ldots d_2}_{m_2\ kez}$$

olsun. Bu durumda $m_1 + m_2 \leq n + 1$ eşitsizliği sağlanır.

**İspat:** Öncelikle cebirsel işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} L_n &= \underbrace{d_1 \ldots d_1}_{m_1\ kez}\ \underbrace{d_2 \ldots d_2}_{m_2\ kez} \\ &= \underbrace{d_1 \ldots d_1}_{m_1\ kez} \times 10^{m_2} + \underbrace{d_2 \ldots d_2}_{m_2\ kez} \\ &= \frac{d_1 \cdot (10^{m_1} - 1)}{9} \times 10^{m_2} + \frac{d_2 \cdot (10^{m_2} - 1)}{9} \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca Teorem 2.1.7'de verilen eşitsizliğin sağ tarafı kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$10^{m_1 + m_2 - 1} < \frac{10^{m_1 + m_2} - 1}{9} \leq \frac{d_1 \cdot (10^{m_1} - 1)}{9} \cdot 10^{m_2} + \frac{d_2 \cdot (10^{m_2} - 1)}{9} = L_n \leq 2\alpha^n < 10^{n+1}$$

bulunur. Buradan $m_1 + m_2 \leq n + 1$ elde edilir.

**Yardımcı Teorem 4.2.5.** $a, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $0 < a < 1$ ve $|x| < a$ ise

$$|\log(1+x)| < \frac{-\log(1-a)}{a} \cdot |x|$$

ve

$$|x| < \frac{a}{1-e^{-a}} \cdot |e^x - 1|$$

dir [81].

## 4.3. Araştırma Bulguları

İlk olarak $2 \leq b \leq 10$ olmak üzere $b$ tabanında tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının çarpımı biçiminde yazılabilen Fibonacci sayıları elde edilecektir.

**Teorem 4.3.1.** $2 \leq b \leq 10,\ 0 \leq d_1, d_2 \leq b-1,\ 1 \leq m \leq n$ ve $k \geq 0$ koşullarını sağlayan $b, m, n, d_1, d_2$ ve $k$ tam sayıları için

$$F_k = \frac{d_1 \cdot (b^m - 1)}{b-1} \cdot \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1} \tag{4.1}$$

olsun. Bu durumda $F_k \in \{0,1,2,3,5,8,13,21,55,144\}$'dir.

**İspat:** Öncelikle $d_1$ ve $d_2$ değerlerinden en az birinin sıfıra eşit olduğu durum göz önüne alınırsa $k = 0$ bulunur. Bundan sonra trivial çözümlerden sakınmak için $d_1, d_2, k \geq 1$ alınacaktır. Şimdi $1 \leq m \leq n \leq 94$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.1) denkleminde $(b, d_1, d_2, m, n) = (10,9,9,94,94)$ alındığında

$$F_k \leq (10^{94} - 1)^2$$

olur. Mathematica programı yardımıyla $k \leq 901$ bulunur. Böylece $2 \leq b \leq 10$, $1 \leq d_1, d_2 \leq b-1,\ 1 \leq m \leq n \leq 94$ ve $1 \leq k \leq 901$ olmak üzere Mathematica programı kullanılarak (4.1) denklemini sağlayan Fibonacci sayılarının $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 55$ ve $144$ olduğu görülür. Ayrıca

$$M = \frac{d_1 \cdot (b^m - 1)}{b-1},$$
$$N = \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1}$$

olmak üzere (4.1) denklemininin $b, m, n, d_1, d_2, k, M, N$ ve $F_k$ türünden trivial olmayan çözümleri Ek 1'de verilmiştir. Bundan sonra $n \geq 95$ ve $m \geq 2$ olduğu kabul edilecektir.

Diğer yandan $n \geq 95$ olduğu ve Yardımcı Teorem 4.2.1'deki $k \geq n+1$ eşitsizliği kullanılırsa $k \geq 96$ olur. Fibonacci sayılarının Binet formülü ve (4.1) denklemi göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\alpha^k}{\sqrt{5}} - \frac{d_1 d_2 b^{m+n}}{(b-1)^2} = \frac{\beta^k}{\sqrt{5}} - \frac{d_1 d_2 b^m}{(b-1)^2} - \frac{d_1 d_2 b^n}{(b-1)^2} + \frac{d_1 d_2}{(b-1)^2}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\left|\frac{\alpha^k}{\sqrt{5}} - \frac{d_1 d_2 b^{m+n}}{(b-1)^2}\right| \leq \frac{|\beta|^k}{\sqrt{5}} + \frac{d_1 d_2 b^m}{(b-1)^2} + \frac{d_1 d_2 b^n}{(b-1)^2} + \frac{d_1 d_2}{(b-1)^2}$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{d_1 d_2 b^{m+n}}{(b-1)^2}$ ile bölünürse

$$\left|\frac{(b-1)^2 \cdot \alpha^k \cdot b^{-(m+n)}}{d_1 d_2 \sqrt{5}} - 1\right| \leq \frac{(b-1)^2 \cdot |\beta|^k}{d_1 d_2 \sqrt{5} b^{m+n}} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{b^{m+n}} \leq \frac{1}{b^m} \cdot \left(\frac{(b-1)^2 \cdot |\beta|^k}{d_1 d_2 \sqrt{5} b^n} + 2 + \frac{1}{b^n}\right)$$

olduğu görülür. Buradan

$$\left|\frac{(b-1)^2 \cdot \alpha^k \cdot b^{-(m+n)}}{d_1 d_2 \sqrt{5}} - 1\right| < 2{,}1 \times 2^{-m} \tag{4.2}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $2 \leq b \leq 10$, $1 \leq d_1, d_2 \leq b-1$, $n \geq 95$ ve $k \geq 96$

olmak üzere $(b, d_1, d_2, n, k) = (2,1,1,95,96)$ alınarak

$$\frac{1}{b^m} \cdot \left(\frac{(b-1)^2 \cdot |\beta|^k}{d_1 d_2 \sqrt{5} b^n} + 2 + \frac{1}{b^n}\right) < 2{,}1 \times 2^{-m}$$

olduğu kullanıldı. Şimdi (4.2) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8'in uygulanabilmesi için

$$\alpha_1 := \alpha,\ \alpha_2 := b,\ \alpha_3 := (b-1)^2/d_1 d_2 \sqrt{5},\ b_1 := k,\ b_2 := -(m + n),\ b_3 := 1$$

alınır. Burada $\alpha_1, \alpha_2$ ve $\alpha_3$ pozitif reel sayıları derecesi 2 olan $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cisminin elemanlarıdır. Dolayısıyla $D = 2$'dir. Ayrıca

$$\Gamma_1 := \frac{(b-1)^2 \cdot \alpha^k \cdot b^{-(m+n)}}{d_1 d_2 \sqrt{5}} - 1 \neq 0$$

dır. Aksine $\Gamma_1 = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\alpha^k = b^{m+n} d_1 d_2 \sqrt{5}/(b-1)^2$$

olur. Bu eşitliğin $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cisminde eşleniği alınırsa

$$\beta^k = -\, b^{m+n} d_1 d_2 \sqrt{5}/(b-1)^2$$

eşitliği elde edilir. Son iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$L_k = \alpha^k + \beta^k = 0$$

bulunur. Fakat bu durum imkansızdır. Dolayısıyla $\Gamma_1 \neq 0$'dır. Diğer yandan $m \leq n$ olduğu ve Yardımcı Teorem 4.2.1'de bulunan $k \leq 10n + 1$ eşitsizliği kullanılırsa

$$10n + 1 \geq \text{maks}\{|k|, |-(m + n)|, |1|\} = \text{maks}\{|b_1|, |b_2|, |b_3|\}$$

olduğundan $B \coloneqq 10n + 1$ alınabilir. (2.3) ve (2.4) eşitlikleri göz önüne alınarak $\alpha_1$ ve $\alpha_2$'nin logaritmik yükseklikleri sırasıyla

$$h(\alpha_1) = h(\alpha) = \frac{\log\alpha}{2}, \tag{4.3}$$
$$h(\alpha_2) = h(b) = \log b \leq \log 10 \tag{4.4}$$

ve Teorem 2.4.5'in (ii) şıkkı ve (2.4) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} h(\alpha_3) &= h\left(\frac{(b-1)^2}{d_1 d_2 \sqrt{5}}\right) \\ &\leq h((b-1)^2) + h(d_1) + h(d_2) + h(\sqrt{5}) \\ &= \log(b-1)^2 + \log d_1 + \log d_2 + \log\sqrt{5} \\ &\leq \log 81 + 2\log 9 + \log\sqrt{5} \\ &< 9{,}6 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$0{,}49 > \text{maks}\left\{\left(2 \cdot \left(\frac{\log\alpha}{2}\right)\right), |\log\alpha|, (0{,}16)\right\} = \text{maks}\{D \cdot h(\alpha_1), |\log\alpha_1|, (0{,}16)\}, \tag{4.5}$$
$$4{,}61 > \text{maks}\{(2 \cdot \log 10), |\log 10|, (0{,}16)\} \geq \text{maks}\{D \cdot h(\alpha_2), |\log\alpha_2|, (0{,}16)\} \tag{4.6}$$

olduğundan $A_1 \coloneqq 0{,}49$ ve $A_2 \coloneqq 4{,}61$ olarak alınabilir. Diğer yandan $2 \leq b \leq 10$ ve $1 \leq d_1, d_2 \leq b - 1$ olmak üzere

$$\log\alpha_3 = \log\left(\frac{(b-1)^2}{d_1 d_2 \sqrt{5}}\right) \leq \log 81 - \log\sqrt{5} < 3{,}59,$$
$$\log{\alpha_3}^{-1} = \log\left(\frac{d_1 d_2 \sqrt{5}}{(b-1)^2}\right) \leq \log\sqrt{5} = 0{,}81$$

eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$-3{,}59 < -0{,}81 < \log\alpha_3 < 3{,}59$$

yazılabilir. Dolayısıyla $|\log \alpha_3| < 3{,}59$ elde edilir. Böylece

$$19{,}2 \geq \text{maks}\{(2 \cdot (9{,}6)), (3{,}59), (0{,}16)\} > \text{maks}\{D \cdot h(\alpha_3), |\log \alpha_3|, (0{,}16)\}$$

olduğundan $A_3 \coloneqq 19{,}2$ alınabilir. (4.2) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8 uygulandığında

$$2{,}1 \times 2^{-m} > |\Gamma_1| > \exp\Big(C_1 \cdot \big(1 + \log(10n + 1)\big) \cdot (0{,}49) \cdot (4{,}61) \cdot (19{,}2)\Big)$$

olduğu görülür. Burada

$$C_1 = -1{,}4 \cdot 30^6 \cdot 3^{4{,}5} \cdot 2^2 \cdot (1 + \log 2)$$

dir. Basit bir hesaplama ile

$$m\log 2 - \log 2{,}1 < 4{,}21 \times 10^{13} \cdot \big(1 + \log(10n + 1)\big) \tag{4.7}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.1) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\frac{(b-1)\cdot\alpha^k}{d_1(b^m-1)\sqrt{5}} - \frac{d_2 b^n}{b-1} = \frac{(b-1)\cdot\beta^k}{d_1(b^m-1)\sqrt{5}} - \frac{d_2}{b-1}$$

eşitliği yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\left|\frac{(b-1)\cdot\alpha^k}{d_1(b^m-1)\sqrt{5}} - \frac{d_2 b^n}{b-1}\right| \leq \frac{(b-1)\cdot|\beta|^k}{d_1(b^m-1)\sqrt{5}} + \frac{d_2}{b-1}$$

olduğu görülür. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{d_2 b^n}{b-1}$ ile bölünürse

$$\left|\frac{(b-1)^2\cdot\alpha^k\cdot b^{-n}}{d_1 d_2(b^m-1)\sqrt{5}} - 1\right| \leq \frac{(b-1)^2\cdot|\beta|^k}{d_1 d_2 b^n(b^m-1)\sqrt{5}} + \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^n}\cdot\left(\frac{(b-1)^2\cdot|\beta|^k}{d_1 d_2(b^m-1)\sqrt{5}} + 1\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\left|\frac{(b-1)^2\cdot\alpha^k\cdot b^{-n}}{d_1d_2(b^m-1)\sqrt{5}}-1\right|<1{,}1\times 2^{-n} \tag{4.8}$$

bulunur. Burada $2\leq b\leq 10,\ 1\leq d_1,d_2\leq b-1,\ m\geq 2$ ve $k\geq 96$ olmak üzere $(b,d_1,d_2,m,k)=(2{,}1{,}1{,}2{,}96)$ alınarak

$$\frac{1}{b^n}\cdot\left(\frac{(b-1)^2\cdot|\beta|^k}{d_1d_2(\,b^m-1)\sqrt{5}}+1\right)<1{,}1\times 2^{-n}$$

olduğu kullanıldı. Şimdi (4.8) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8'in uygulanabilmesi için

$$\alpha_1:=\alpha,\ \alpha_2:=b,\ \alpha_3:=(b-1)^2/d_1d_2(b^m-1)\sqrt{5},\ b_1:=k,\ b_2:=-n,\ b_3:=1$$

olarak alınır. Burada $\alpha_1$, $\alpha_2$ ve $\alpha_3$ pozitif reel sayıları derecesi 2 olan $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cisminin elemanlarıdır. Dolayısıyla $D=2$'dir. Ayrıca

$$\Gamma_2:=\frac{(b-1)^2\cdot\alpha^k\cdot b^{-n}}{d_1d_2\,(b^m-1)\sqrt{5}}-1\neq 0$$

dır. Aksine $\Gamma_2=0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\alpha^k=b^nd_1d_2(b^m-1)\sqrt{5}/(b-1)^2$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa $\alpha^{2k}\in\mathbb{Q}$ elde edilir. Bu durum Teorem 2.1.3'e göre $k\geq 1$ için imkansızdır. Dolayısıyla $\Gamma_2\neq 0$'dır. Diğer yandan Yardımcı Teorem 4.2.1'de bulunan $k\leq 10n+1$ eşitsizliği göz önüne alınır ve

$$10n+1\geq \text{maks}\{|k|,|-n|,|1|\}=\text{maks}\{|b_1|,|b_2|,|b_3|\}$$

olduğu kullanılırsa $B:=10n+1$ olarak alınabilir. Öncelikle $\alpha_1:=\alpha$ ve $\alpha_2:=b$ cebirsel sayılarının logaritmik yükseklikleri (4.3) ve (4.4)'te hesaplandığı için (4.5) ve (4.6)'ya göre $A_1:=0{,}49$ ve $A_2:=4{,}61$ alınabilir. Teorem 2.4.5 kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
h(\alpha_3) &= h\left(\frac{(b-1)^2}{d_1 d_2 \sqrt{5}(b^m-1)}\right) \\
&\leq h\big((b-1)^2\big) + h(d_1) + h(d_2) + h\big(\sqrt{5}\big) + mh(b) + h(1) + \log 2 \\
&= \log(b-1)^2 + \log d_1 + \log d_2 + \log\sqrt{5} + m\log b + \log 1 + \log 2 \\
&\leq \log 81 + 2\log 9 + \ \log\sqrt{5} + m\log 10 + \log 2 \\
&< 10{,}29 + m\log 10
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Diğer yandan $2 \leq b \leq 10$, $1 \leq d_1, d_2 \leq b-1$ ve $m \geq 2$ olmak üzere

$$
\log\alpha_3 = \log\left(\frac{(b-1)^2}{d_1 d_2 \sqrt{5}(b^m-1)}\right) \leq \log 81 - \log\sqrt{5} - \log 99 < -1,
$$

$$
\log{\alpha_3}^{-1} = \log\left(\frac{d_1 d_2 \sqrt{5}(b^m-1)}{(b-1)^2}\right) < \log\sqrt{5} + \log 10^m < 0{,}81 + m\log 10
$$

eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$
-(0{,}81 + m\log 10) < \log\alpha_3 < -1 < 0{,}81 + m\log 10
$$

yazılabilir. Dolayısıyla $|\log\alpha_3| < 0{,}81 + m\log 10$ elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
20{,}58 + 2m\log 10 &\geq \text{maks}\big\{\big(2\cdot(10{,}29 + m\log 10)\big), (0{,}81 + m\log 10), (0{,}16)\big\} \\
&\geq \text{maks}\{D\cdot h(\alpha_3), |\log\alpha_3|, (0{,}16)\}
\end{aligned}
$$

olduğundan $A_3 \coloneqq 20{,}58 + 2m\log 10$ olarak alınabilir. (4.8) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8 uygulandığında

$$
1{,}1 \times 2^{-n} > |\Gamma_2| > \exp\Big(C_2\cdot\big(1 + \log(10n+1)\big)\cdot(20{,}58 + 2m\log 10)\Big)
$$

olduğu görülür. Burada

$$
C_2 = -1{,}4\cdot 30^6\cdot 3^{4{,}5}\cdot 2^2\cdot(1+\log 2)\cdot(0{,}49)\cdot(4{,}61)
$$

dir. Basit bir hesaplama ile

$$n\log 2 - \log 1{,}1 < 2{,}20 \times 10^{12} \cdot \big(1 + \log(10n+1)\big) \cdot (20{,}58 + 2m\log 10) \quad (4.9)$$

elde edilir. Böylece (4.7) ve (4.9) eşitsizlikleri göz önüne alındığında Mathematica programı yardımıyla $n < 4{,}86 \times 10^{30}$ bulunur. Şimdi Lemma 3.2.4'ü uygulayarak $n$ için bulunan bu üst sınırı azaltalım.

$$\Lambda_1 \coloneqq \log(\Gamma_1 + 1) = k\log\alpha - (n+m)\log b + \log\big((b-1)^2/d_1 d_2\sqrt{5}\big)$$

olmak üzere $m \geq 2$ için (4.2) eşitsizliğinden

$$|\Gamma_1| = \left|e^{\Lambda_1} - 1\right| < \frac{2{,}1}{2^m} < \frac{6}{10}$$

yazılabilir. Burada $a \coloneqq 0{,}6$ alınarak Yardımcı Teorem 4.2.5 uygulandığında

$$|\Lambda_1| = |\log(\Gamma_1 + 1)| < \frac{-\log(0{,}4)}{0{,}6} \cdot \frac{2{,}1}{2^m} < 3{,}21 \times 2^{-m}$$

olduğu görülür. $\Lambda_1$ değeri yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$0 < \left|k\log\alpha - (n+m)\log b + \log\big((b-1)^2/d_1 d_2\sqrt{5}\big)\right| < 3{,}21 \times 2^{-m}$$

olur. Bu eşitsizliğin her tarafı $\log b$ ile bölünürse

$$0 < \left|k\left(\frac{\log\alpha}{\log b}\right) - (n+m) + \left(\frac{\log\big((b-1)^2/d_1 d_2\sqrt{5}\big)}{\log b}\right)\right| < 4{,}64 \times 2^{-m} \quad (4.10)$$

elde edilir. Lemma 3.2.4'ün uygulanabilmesi için $u \coloneqq k$ alınırsa $k \leq 10n + 1$ ve $u \leq M$ olduğundan $M \coloneqq 4{,}86 \times 10^{31}$ alınabilir. Ayrıca

$$\gamma \coloneqq \frac{\log\alpha}{\log b}$$

irrasyoneldir. Aksine $\gamma$'nın rasyonel olduğunu varsayalım. Bu durumda $s \neq 0$ ve

$\frac{\log \alpha}{\log b} = \frac{r}{s}$ olacak şekilde aralarında asal $r$ ve $s$ tam sayıları vardır. Son eşitlikten $s \log \alpha = r \log b$ yazılabilir. Buradan $\log \alpha^s = \log b^r$ olduğu görülür. Logaritma fonksiyonunun birebir olduğu göz önüne alınırsa $\alpha^s = b^r$ bulunur. Bu ise $s \geq 1$ için Teorem 2.1.3'e göre mümkün değildir. Dolayısıyla $\gamma = \frac{\log \alpha}{\log b}$ irrasyonel sayıdır. $2 \leq b \leq 10$ ve $\gamma$ sayısının $t.$ sürekli kesir yakınsaklığının paydası $q_{t,b}$ olmak üzere Mathematica programı kullanılarak

$$q_{72,b} \geq q_{72,7} = 2524906655812348377251502276097496 > 6M$$

olduğu görülür. Üstelik $2 \leq b \leq 10$ ve $1 \leq d_1, d_2 \leq b-1$ koşullarını sağlayan $b$, $d_1$ ve $d_2$ tam sayıları için

$$\mu := \frac{\log((b-1)^2/\, d_1 d_2 \sqrt{5})}{\log b}$$

olmak üzere Mathematica programı kullanıldığında

$$0{,}005 < \varepsilon := \left\|\mu q_{72,b}\right\| - M\left\|\gamma q_{72,b}\right\| < 0{,}499953$$

bulunur. Diğer yandan $A := 4{,}64$, $B := 2$ ve $w := m$ alınarak Mathematica programı yardımıyla

$$114{,}26 < \frac{\log\left(Aq_{72,b}/\varepsilon\right)}{\log B} < 143{,}05$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.2.4'e göre $w := m \geq 143{,}05$ ise (4.10) eşitsizliğinin çözümü olmadığından $m \leq 143$ olmalıdır. Bu eşitsizliğin üst sınırı olan $m = 143$ değeri (4.9) eşitsizliğinde yerine yazıldığında Mathematica programından faydalanılarak $n < 9{,}13 \times 10^{16}$ bulunur. Lemma 3.2.4'ü tekrar uygulayarak $n$ için bulunan bu üst sınırı azaltalım.

$$\Lambda_2 := \log(\Gamma_2 + 1) = k \log \alpha - n \log b + \log\left((b-1)^2/d_1 d_2 (b^m - 1)\sqrt{5}\right)$$

olmak üzere $n \geq 95$ için (4.8) eşitsizliğinden

$$|\Gamma_2| = \left|e^{\Lambda_2} - 1\right| < \frac{1,1}{2^n} < \frac{1}{10}$$

yazılabilir. Burada $a \coloneqq 0,1$ alınarak Yardımcı Teorem 4.2.5 uygulandığında

$$|\Lambda_2| = |\log(\Gamma_2 + 1)| < \frac{-\log(0,9)}{0,1} \cdot \frac{1,1}{2^n} < 1,16 \times 2^{-n}$$

olduğu görülür. $\Lambda_2$ değeri yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$0 < \left|k \log \alpha - n \log b + \log\left((b-1)^2/d_1 d_2 (b^m - 1)\sqrt{5}\right)\right| < 1,16 \times 2^{-n}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her tarafı $\log b$ ile bölünürse

$$0 < \left|k\left(\frac{\log \alpha}{\log b}\right) - n + \left(\frac{\log\left((b-1)^2/d_1 d_2 (b^m - 1)\sqrt{5}\right)}{\log b}\right)\right| < 1,68 \times 2^{-n} \qquad (4.11)$$

elde edilir. Lemma 3.2.4'ün uygulanabilmesi için $u \coloneqq k$ alınırsa $k \leq 10n + 1$ ve $u \leq M$ olduğundan $M \coloneqq 9,13 \times 10^{17}$ alınabilir. Diğer yandan

$$\gamma \coloneqq \frac{\log \alpha}{\log b}$$

irrasyoneldir. $2 \leq b \leq 10$ ve $\gamma$ sayısının $t$. sürekli kesir yakınsaklığının paydası $q_{t,b}$ olmak üzere Mathematica programı kullanıldığında

$$q_{46,b} \geq q_{46,2} = 9682443011985694908 4 > 6M$$

olduğu görülür. Ayrıca $2 \leq b \leq 10$, $1 \leq d_1, d_2 \leq b - 1$ ve $2 \leq m \leq 143$ koşullarını sağlayan $b, d_1, d_2$ ve $m$ tam sayıları için

$$\mu \coloneqq \frac{\log\left((b-1)^2/d_1 d_2 (b^m - 1)\sqrt{5}\right)}{\log b}$$

olmak üzere Mathematica programı kullanılarak

$$0,0006 < \varepsilon := \|\mu q_{46,b}\| - M\|\gamma q_{46,b}\| < 0,4999998$$

bulunur. Diğer yandan $A := 1,68$, $B := 2$ ve $w := n$ alınarak Mathematica programı yardımıyla

$$68,17 < \frac{\log(Aq_{46,b}/\varepsilon)}{\log B} < 94,87$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Lemma 3.2.4'e göre $w := n \geq 94,87$ ise (4.11) eşitsizliğinin çözümü olmadığından $n \leq 94$ olmalıdır. Bu ise $n \geq 95$ ile çelişir.

Şimdi $m = 1$ durumunu ele alalım. Fibonacci sayılarının Binet formülü ve (4.1) denklemi göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{\alpha^k}{\sqrt{5}} - \frac{d_1 d_2 b^n}{b-1} = \frac{\beta^k}{\sqrt{5}} - \frac{d_1 d_2}{b-1}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\left|\frac{\alpha^k}{\sqrt{5}} - \frac{d_1 d_2 b^n}{b-1}\right| \leq \frac{|\beta|^k}{\sqrt{5}} + \frac{d_1 d_2}{b-1}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{d_1 d_2 b^n}{b-1}$ ile bölünürse

$$\left|\frac{(b-1)\cdot\alpha^k\cdot b^{-n}}{d_1 d_2\sqrt{5}} - 1\right| \leq \frac{(b-1)\cdot|\beta|^k}{d_1 d_2\sqrt{5}b^n} + \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^n}\cdot\left(\frac{(b-1)\cdot|\beta|^k}{d_1 d_2\sqrt{5}} + 1\right)$$

olduğu görülür. Buradan

$$\left|\frac{(b-1)\cdot\alpha^k\cdot b^{-n}}{d_1 d_2\sqrt{5}} - 1\right| < 1,1 \times 2^{-n} \tag{4.12}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $2 \leq b \leq 10$, $1 \leq d_1, d_2 \leq b-1$, $k \geq 96$ olmak üzere $(b, d_1, d_2, k) = (2{,}1{,}1{,}96)$ alınarak

$$\frac{1}{b^n} \cdot \left(\frac{(b-1)\cdot|\beta|^k}{d_1 d_2 \sqrt{5}} + 1\right) < 1{,}1 \times 2^{-n}$$

olduğu kullanıldı. Şimdi (4.12) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8'in uygulanabilmesi için

$$\alpha_1 := \alpha,\ \ \alpha_2 := b,\ \ \alpha_3 := (b-1)/d_1 d_2 \sqrt{5},\ \ b_1 := k,\ \ b_2 := -n,\ \ b_3 := 1$$

alınır. Burada $\alpha_1, \alpha_2$ ve $\alpha_3$ pozitif reel sayıları derecesi 2 olan $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cisminin elemanlarıdır. Dolayısıyla $D = 2$'dir. Ayrıca

$$\Gamma_3 := \frac{(b-1)\cdot \alpha^k \cdot b^{-n}}{d_1 d_2 \sqrt{5}} - 1 \neq 0$$

dır. $\Gamma_3$'ün sıfırdan farklı olduğu durum $\Gamma_1$ ya da $\Gamma_2$ ifadelerinin sıfırdan farklı olduğunu gösterdiğimiz yöntemler ile gösterilebilir. Diğer yandan Yardımcı Teorem 4.2.1'de bulunan $k \leq 10n + 1$ eşitsizliği göz önüne alınır ve

$$10n + 1 \geq \text{maks}\{|k|, |-n|, |1|\} = \text{maks}\{|b_1|, |b_2|, |b_3|\}$$

olduğu kullanılırsa $B := 10n + 1$ alınabilir. Öncelikle $\alpha_1 := \alpha$ ve $\alpha_2 := b$ cebirsel sayılarının logaritmik yükseklikleri (4.3) ve (4.4)'te hesaplandığı için (4.5) ve (4.6)'ya göre $A_1 := 0{,}49$ ve $A_2 := 4{,}61$ alınabilir. Teorem 2.4.5 (ii) kullanılırsa

$$\begin{aligned} h(\alpha_3) &= h\left(\frac{b-1}{d_1 d_2 \sqrt{5}}\right) \\ &\leq h(b-1) + h(d_1) + h(d_2) + h(\sqrt{5}) \\ &= \log(b-1) + \log(d_1) + \log(d_2) + \log\sqrt{5} \\ &\leq \log 9 + \log 9 + \log 9 + \log\sqrt{5} \\ &< 7{,}4 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer yandan $2 \leq b \leq 10$ ve $1 \leq d_1, d_2 \leq b-1$ olmak üzere

$$\log \alpha_3 = \log\left(\frac{b-1}{d_1 d_2 \sqrt{5}}\right) \leq \log 9 - \log\sqrt{5} < 1{,}4,$$
$$\log {\alpha_3}^{-1} = \log\left(\frac{d_1 d_2 \sqrt{5}}{b-1}\right) \leq \log\big(9\sqrt{5}\big) < 3{,}1$$

eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$-3{,}1 < \log \alpha_3 < 1{,}4 < 3{,}1$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla $|\log \alpha_3| < 3{,}1$ elde edilir. Böylece

$$14{,}8 \geq \text{maks}\{(2 \cdot (7{,}4)), (3{,}1), (0{,}16)\} > \text{maks}\{D \cdot h(\alpha_3), |\log \alpha_3|, (0{,}16)\}$$

olduğundan $A_3 \coloneqq 14{,}8$ alınabilir. (4.12) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8 uygulandığında

$$1{,}1 \times 2^{-n} > |\Gamma_3| > \exp\Big(C_3 \cdot \big(1 + \log(10n + 1)\big) \cdot (0{,}49) \cdot (4{,}61) \cdot (14{,}8)\Big)$$

olduğu görülür. Burada

$$C_3 = -1{,}4 \cdot 30^6 \cdot 3^{4{,}5} \cdot 2^2 \cdot (1 + \log 2)$$

dir. Basit bir hesaplama ile

$$n\log 2 - \log 1{,}1 < 3{,}25 \times 10^{13} \cdot (1 + \log(10n + 1)) \tag{4.13}$$

elde edilir. Diğer yandan (4.13) eşitsizliği göz önüne alındığında ve Mathematica programından yaralanıldığında $n < 1{,}81 \times 10^{15}$ bulunur. Şimdi Lemma 3.2.4'ü uygulayarak $n$ için bulunan bu üst sınırı azaltalım.

$$\Lambda_3 \coloneqq \log(\Gamma_3 + 1) = k \log \alpha - n \log b + \log\big((b-1)/d_1 d_2 \sqrt{5}\big)$$

olmak üzere $n \geq 95$ için (4.12) eşitsizliğinden

$$|\Gamma_3| = \left|e^{\Lambda_3} - 1\right| < \frac{1,1}{2^n} < \frac{1}{10}$$

yazılabilir. Burada $a \coloneqq 0,1$ alınarak Yardımcı Teorem 4.2.5 uygulandığında

$$|\Lambda_3| = |\log(\Gamma_3 + 1)| < \frac{-\log(0,9)}{0,1} \cdot \frac{1,1}{2^n} < 1,16 \times 2^{-n}$$

olduğu görülür. $\Lambda_3$ değeri yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$0 < |k \log \alpha - n \log b + \log\big((b-1)/d_1 d_2 \sqrt{5}\big)| < 1,16 \times 2^{-n}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliğin her tarafı $\log b$ ile bölünürse

$$0 < \left|k\left(\frac{\log \alpha}{\log b}\right) - n + \left(\frac{\log\big((b-1)/d_1 d_2 \sqrt{5}\big)}{\log b}\right)\right| < 1,68 \times 2^{-n} \qquad (4.14)$$

elde edilir. Lemma 3.2.4'ün uygulanabilmesi için $u \coloneqq k$ alınırsa $k \leq 10n + 1$ ve $u \leq M$ olduğundan $M \coloneqq 1,81 \times 10^{16}$ alınabilir. Ayrıca

$$\gamma \coloneqq \frac{\log \alpha}{\log b}$$

irrasyoneldir. $2 \leq b \leq 10$ ve $\gamma$ sayısının $t.$ sürekli kesir yakınsaklığının paydası $q_{t,b}$ olmak üzere Mathematica programı kullanılarak

$$q_{39,b} \geq q_{39,3} = 194873196309119368 > 6M$$

olduğu görülür. Üstelik $2 \leq b \leq 10$ ve $1 \leq d_1, d_2 \leq b - 1$ koşullarını sağlayan $b, d_1$ ve $d_2$ tam sayıları için

$$\mu \coloneqq \frac{\log\big((b-1)/d_1 d_2 \sqrt{5}\big)}{\log b}$$

olmak üzere Mathematica programı kullanıldığında

$$0,004 < \varepsilon := \|\mu q_{39,b}\| - M\|\gamma q_{39,b}\| < 0,49993$$

bulunur. Diğer yandan $A := 1,68$, $B := 2$ ve $w := n$ alınarak Mathematica programı yardımıyla

$$59,5 < \frac{\log(Aq_{39,b}/\varepsilon)}{\log B} < 78,81$$

elde edilir. Lemma 3.2.4'e göre $w := n \geq 78,81$ ise (4.14) eşitsizliğinin çözümü olmadığından $n \leq 78$ olmalıdır. Bu ise $n \geq 95$ ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi $2 \leq b \leq 10$ olmak üzere $b$ tabanında tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının çarpımı biçiminde yazılabilen Lucas sayıları elde edilecektir.

**Teorem 4.3.2.** $2 \leq b \leq 10$, $0 \leq d_1, d_2 \leq b-1$, $1 \leq m \leq n$ ve $k \geq 0$ koşullarını sağlayan $b, m, n, d_1, d_2$ ve $k$ tam sayıları için

$$L_k = \frac{d_1 \cdot (b^m - 1)}{b-1} \cdot \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1} \tag{4.15}$$

olsun. Bu durumda $L_k \in \{1, 2, 3, 4, 7, 11, 18, 1364\}$'dir.

**İspat:** Öncelikle $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ olması durumunda (4.15) denkleminin çözümü olmadığından $d_1, d_2 \geq 1$ alınacaktır. Şimdi $1 \leq m \leq n \leq 474$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.15) denkleminde $(b, d_1, d_2, m, n) = (10, 9, 9, 474, 474)$ alındığında

$$L_k \leq (10^{474} - 1)^2$$

olur. Mathematica programı yardımıyla $k \leq 4536$ olduğu görülür. Böylece $2 \leq b \leq 10$, $1 \leq d_1, d_2 \leq b-1$, $1 \leq m \leq n \leq 474$ ve $0 \leq k \leq 4536$ olmak üzere

Mathematica programı kullanıldığında (4.15) denklemini sağlayan Lucas sayıları $1, 2, 3, 4, 7, 11, 18$ ve $1364$ olarak bulunur. Ayrıca

$$M = \frac{d_1 \cdot (b^m - 1)}{b-1},$$
$$N = \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1}$$

olmak üzere (4.15) denkleminin $b, m, n, d_1, d_2, k, M, N$ ve $L_k$ türünden çözümleri Ek 2'de verilmiştir. Bundan sonra $n \geq 475$ ve $m \geq 2$ olduğu kabul edilecektir.

Diğer yandan $n \geq 475$ olduğu ve Yardımcı Teorem 4.2.2'deki $k \geq n-1$ eşitsizliği kullanılırsa $k \geq 474$ bulunur. Lucas sayılarının Binet formülü ve (4.15) denklemi göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\alpha^k - \frac{d_1 d_2 b^{m+n}}{(b-1)^2} = -\beta^k - \frac{d_1 d_2 b^m}{(b-1)^2} - \frac{d_1 d_2 b^n}{(b-1)^2} + \frac{d_1 d_2}{(b-1)^2}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\left|\alpha^k - \frac{d_1 d_2 b^{m+n}}{(b-1)^2}\right| \leq |\beta|^k + \frac{d_1 d_2 b^m}{(b-1)^2} + \frac{d_1 d_2 b^n}{(b-1)^2} + \frac{d_1 d_2}{(b-1)^2}$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{d_1 d_2 b^{m+n}}{(b-1)^2}$ ile bölünürse

$$\left|\frac{(b-1)^2 \cdot \alpha^k \cdot b^{-(m+n)}}{d_1 d_2} - 1\right| \leq \frac{(b-1)^2 \cdot |\beta|^k}{d_1 d_2 b^{m+n}} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{b^{m+n}} \leq \frac{1}{b^m} \cdot \left(\frac{(b-1)^2 \cdot |\beta|^k}{d_1 d_2 b^n} + 2 + \frac{1}{b^n}\right)$$

olduğu görülür. Buradan

$$\left|\frac{(b-1)^2 \cdot \alpha^k \cdot b^{-(m+n)}}{d_1 d_2} - 1\right| < 2{,}1 \times 2^{-m} \tag{4.16}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $2 \leq b \leq 10$, $1 \leq d_1, d_2 \leq b-1$, $n \geq 475$ ve $k \geq 474$ olmak üzere $(b, d_1, d_2, n, k) = (2, 1, 1, 475, 474)$ alınarak

$$\frac{1}{b^m} \cdot \left( \frac{(b-1)^2 \cdot |\beta|^k}{d_1 d_2 b^n} + 2 + \frac{1}{b^n} \right) < 2{,}1 \times 2^{-m}$$

olduğu kullanıldı. Şimdi (4.16) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8'in uygulanabilmesi için

$$\alpha_1 := \alpha,\ \alpha_2 := b,\ \alpha_3 := (b-1)^2/d_1 d_2,\ b_1 := k,\ b_2 := -(m+n),\ b_3 := 1$$

alınır. Burada $\alpha_1, \alpha_2$ ve $\alpha_3$ pozitif reel sayıları derecesi 2 olan $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cisminin elemanlarıdır. Dolayısıyla $D = 2$'dir. Ayrıca

$$\Gamma_4 := \frac{(b-1)^2 \cdot \alpha^k \cdot b^{-(m+n)}}{d_1 d_2} - 1 \neq 0$$

dır. Aksine $\Gamma_4 = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\alpha^k = b^{m+n} d_1 d_2 / (b-1)^2$$

olur. Bu ise $\alpha^k \in \mathbb{Q}$ olmasını gerektirir. Fakat bu durum $k \geq 1$ için Teorem 2.1.3'e göre imkansızdır. Dolayısıyla $\Gamma_4 \neq 0$'dır. Diğer yandan $m \leq n$ olduğu ve Yardımcı Teorem 4.2.2'de bulunan $k \leq 10n$ eşitsizliği kullanılırsa

$$10n \geq \text{maks}\{|k|, |-(m+n)|, |1|\} = \text{maks}\{|b_1|, |b_2|, |b_3|\}$$

olduğundan $B := 10n$ olarak alınabilir. (2.3) ve (2.4) eşitlikleri göz önüne alınırsa $\alpha_1$ ve $\alpha_2$'nin logaritmik yükseklikleri sırasıyla

$$h(\alpha_1) = h(\alpha) = \frac{\log \alpha}{2}, \tag{4.17}$$

$$h(\alpha_2) = h(b) = \log b \leq \log 10 \tag{4.18}$$

olarak bulunur. Ayrıca Teorem 2.4.5'in (ii) şıkkı ve (2.4) eşitsizliği kullanılırsa $\alpha_3$ cebirsel sayısının logaritmik yüksekliği

$$
\begin{aligned}
h(\alpha_3) = h\left(\frac{(b-1)^2}{d_1 d_2}\right) \\
&\leq h((b-1)^2) + h(d_1) + h(d_2) \\
&= \log(b-1)^2 + \log d_1 + \log d_2 \\
&\leq \log 81 + \log 9 + \log 9 \\
&< 8{,}79
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$0{,}49 > \text{maks}\left\{\left(2 \cdot \left(\frac{\log \alpha}{2}\right)\right), |\log \alpha|, (0{,}16)\right\}, \tag{4.19}$$

$$4{,}61 > \text{maks}\left\{(2 \cdot \log 10), |\log 10|, (0{,}16)\right\} \tag{4.20}$$

olduğundan $A_1 \coloneqq 0{,}49$ ve $A_2 \coloneqq 4{,}61$ olarak alınabilir. Diğer yandan $2 \leq b \leq 10$ ve $1 \leq d_1, d_2 \leq b-1$ olmak üzere

$$\log \alpha_3 = \log\left(\frac{(b-1)^2}{d_1 d_2}\right) \leq \log 81 < 4{,}4,$$

$$\log {\alpha_3}^{-1} = \log\left(\frac{d_1 d_2}{(b-1)^2}\right) \leq \log 1 = 0$$

eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$-4{,}4 < \log \gamma_3 < 4{,}4$$

yazılabilir. Dolayısıyla $|\log \alpha_3| < 4{,}4$ elde edilir. Böylece

$$17{,}58 \geq \text{maks}\left\{\left(2 \cdot (\,8{,}79)\right), (4{,}4), (0{,}16)\right\} > \text{maks}\{D \cdot h(\alpha_3), |\log \alpha_3|, (0{,}16)\}$$

olduğundan $A_3 \coloneqq 17{,}58$ olarak alınabilir. (4.16) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8 uygulandığında

$$2{,}1 \times 2^{-m} > |\Gamma_4| > \exp\left(C_1 \cdot \left(1 + \log(10n)\right) \cdot (0{,}49) \cdot (4{,}61) \cdot (17{,}58)\right)$$

olduğu görülür. Burada

$$C_1 = -1{,}4 \cdot 30^6 \cdot 3^{4{,}5} \cdot 2^2 \cdot (1 + \log 2)$$

dir. Basit bir hesaplama ile

$$m\log 2 - \log 2{,}1 < 3{,}86 \times 10^{13} \cdot \big(1 + \log(10n)\big) \tag{4.21}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.15) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\frac{(b-1)\cdot \alpha^k}{d_1(\,b^m-1)} - \frac{d_2 b^n}{b-1} = -\frac{(b-1)\cdot\beta^k}{d_1(\,b^m-1)} - \frac{d_2}{b-1}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\left|\frac{(b-1)\cdot \alpha^k}{d_1(\,b^m-1)} - \frac{d_2 b^n}{b-1}\right| \leq \frac{(b-1)\cdot|\beta|^k}{d_1(b^m-1)} + \frac{d_2}{b-1}$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{d_2 b^n}{b-1}$ ile bölünürse

$$\left|\frac{(b-1)^2\cdot\alpha^k\cdot b^{-n}}{d_1 d_2(b^m-1)} - 1\right| \leq \frac{(b-1)^2\cdot|\beta|^k}{d_1 d_2 b^n(b^m-1)} + \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^n}\cdot\left(\frac{(b-1)^2\cdot\,|\beta|^k}{d_1 d_2(b^m-1)} + 1\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\left|\frac{(b-1)^2\cdot\alpha^k\cdot b^{-n}}{d_1 d_2\,(b^m-1)} - 1\right| < 1{,}1 \times 2^{-n} \tag{4.22}$$

olduğu görülür. Burada $2 \leq b \leq 10$, $1 \leq d_1, d_2 \leq b-1$, $m \geq 2$ ve $k \geq 474$ olmak üzere $(b, d_1, d_2, m, k) = (2, 1, 1, 2, 474)$ alınarak

$$\frac{1}{b^n}\cdot\left(\frac{(b-1)^2\cdot\,|\beta|^k}{d_1 d_2(b^m-1)} + 1\right) < 1{,}1 \times 2^{-n}$$

olduğu kullanıldı. Şimdi (4.22) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8'in uygulanabilmesi için

$$\alpha_1 := \alpha,\ \alpha_2 := b,\ \alpha_3 := (b-1)^2/d_1 d_2 (b^m - 1), b_1 := k,\ b_2 := -n,\ b_3 := 1$$

alınır. Burada $\alpha_1, \alpha_2$ ve $\alpha_3$ pozitif reel sayıları derecesi 2 olan $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cisminin elemanlarıdır. Dolayısıyla $D = 2$'dir. Ayrıca

$$\Gamma_5 := \frac{(b-1)^2 \cdot \alpha^k \cdot b^{-n}}{d_1 d_2\,(b^m - 1)} - 1 \neq 0$$

dır. Bu durum $\Gamma_4$'ün sıfırdan farklı olduğunu gösterdiğimiz yöntem ile gösterilebilir. Diğer yandan Yardımcı Teorem 4.2.2'deki $k \leq 10n$ eşitsizliği göz önüne alınır ve

$$10n \geq \text{maks}\{|b_1|, |b_2|, |b_3|\} = \text{maks}\{|k|, |-n|, |1|\}$$

olduğu kullanılırsa $B := 10n$ olarak alınabilir. Şimdi $\alpha_1, \alpha_2$ ve $\alpha_3$ cebirsel sayılarının logaritmik yüksekliklerini bulalım. Öncelikle $\alpha_1 := \alpha$ ve $\alpha_2 := b$ cebirsel sayılarının logaritmik yükseklikleri (4.17) ve (4.18)'de hesaplandığı için (4.19) ve (4.20)'ye göre $A_1 := 0{,}49$ ve $A_2 := 4{,}61$ olarak alınabilir. Teorem 2.4.5 kullanılırsa

$$\begin{aligned} h(\alpha_3) &= h\left(\frac{(b-1)^2}{d_1 d_2 \sqrt{5}(b^m - 1)}\right) \\ &\leq h\big((b-1)^2\big) + h(d_1) + h(d_2) + mh(b) + h(1) + \log 2 \\ &= \log(b-1)^2 + \log d_1 + \log d_2 + m \log b + \log 1 + \log 2 \\ &\leq \log 81 + 2\log 9 + m \log 10 + \log 2 \\ &< 9{,}49 + m \log 10 \end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan $2 \leq b \leq 10, 1 \leq d_1, d_2 \leq b - 1$ ve $m \geq 2$ olmak üzere

$$\log \alpha_3 = \log\left(\frac{(b-1)^2}{d_1 d_2 (b^m - 1)}\right) \leq \log 81 - \log 99 < -0{,}2,$$

$$\log \alpha_3{}^{-1} = \log\left(\frac{d_1 d_2 (b^m - 1)}{(b-1)^2}\right) < \log 10^m = m \log 10$$

eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$-m\log 10 < \log\alpha_3 < -0{,}2 < m\log 10$$

yazılabilir. Dolayısıyla $|\log\alpha_3| < m\log 10$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}18{,}98 + 2m\log 10 &\geq \text{maks}\{2\cdot(9{,}49 + m\log 10), (m\log 10), (0{,}16)\}\\ &\geq \text{maks}\{D\cdot h(\alpha_3), |\log\alpha_3|, (0{,}16)\}\end{aligned}$$

olduğundan $A_3 := 18{,}98 + 2m\log 10$ olarak alınabilir. (4.22) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.2.2 uygulandığında

$$1{,}1\times 2^{-n} > |\Gamma_5| > \exp\Big(C_2\cdot\big(1+\log(10n)\big)\cdot(18{,}98 + 2m\log 10)\Big)$$

olduğu görülür. Burada

$$C_2 = -1{,}4\cdot 30^6\cdot 3^{4{,}5}\cdot 2^2\cdot(1+\log 2)\cdot(0{,}49)\cdot(4{,}61)$$

dir. Basit bir hesaplama ile

$$n\log 2 - \log 1{,}1 < 2{,}20\times 10^{12}\cdot\big(1+\log(10n)\big)\cdot(18{,}98 + 2m\log 10) \qquad (4.23)$$

elde edilir. Diğer yandan (4.21) ve (4.23) eşitsizlikleri göz önüne alındığında Mathematica programı yardımıyla $n < 4{,}45\times 10^{30}$ bulunur. Şimdi Lemma 3.2.4'ü uygulayarak $n$ için bulunan bu üst sınırı azaltalım.

$$\Lambda_4 := \log(\Gamma_4 + 1) = k\log\alpha - (n+m)\log b + \log((b-1)^2/d_1 d_2)$$

olmak üzere $m \geq 2$ için (4.16) eşitsizliğinden

$$|\Gamma_4| = \left|e^{\Lambda_4} - 1\right| < \frac{2{,}1}{2^m} < \frac{6}{10}$$

yazılabilir. Burada $\alpha := 0{,}6$ alınarak Yardımcı Teorem 4.2.5 uygulandığında

$$|\Lambda_4| = |\log(\Lambda_4 + 1)| < \frac{-\log(0{,}4)}{0{,}6} \cdot \frac{2{,}1}{2^m} < 3{,}21 \times 2^{-m}$$

olduğu görülür. $\Lambda_4$ değeri yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$0 < |k \log \alpha - (n + m) \log b + \log((b-1)^2/d_1 d_2)\ | < 3{,}21 \times 2^{-m}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her tarafı $\log b$ ile bölünürse

$$0 < \left| k \left(\frac{\log \alpha}{\log b}\right) - (n + m) + \left(\frac{\log((b-1)^2/d_1 d_2)}{\log b}\right) \right| < 4{,}64 \times 2^{-m} \tag{4.24}$$

elde edilir. Lemma 3.2.4'ün uygulanabilmesi için $u := k$ alınırsa $k \leq 10n$ ve $u \leq M$ olduğundan $M := 4{,}45 \times 10^{31}$ alınabilir. Ayrıca

$$\gamma := \frac{\log \alpha}{\log b}$$

irrasyonel sayıdır. $2 \leq b \leq 10$ ve $\gamma$ sayısının $t.$ sürekli kesir yakınsaklığının paydası $q_{t,b}$ olmak üzere Mathematica programı kullanılarak

$$q_{72,b} \geq q_{72,7} = 25249066558123483772515022760974 96 > 6M$$

olduğu görülür. Diğer yandan $2 \leq b \leq 10,\ 1 \leq d_1, d_2 \leq b - 1$ ve $(b-1)^2 \neq d_1 d_2$ koşullarını sağlayan $b, d_1$ ve $d_2$ tam sayıları için

$$\mu := \frac{\log((b-1)^2/d_1 d_2)}{\log b}$$

olmak üzere Mathematica programı kullanıldığında

$$0{,}02 < \varepsilon := \|\mu q_{72,b}\| - M\|\gamma q_{72,b}\| < 0{,}495$$

elde edilir. Burada $(b-1)^2 \neq d_1 d_2$ ise $d_1 = d_2 = b-1$ olup $\mu = 0$ olacağından $\varepsilon < 0$ olur. Dolayısıyla $d_1 = d_2 = b-1$ durumu daha sonra incelenecektir. Ayrıca $A \coloneqq 4{,}64$, $B \coloneqq 2$ ve $w \coloneqq m$ alınarak Mathematica programı kullanıldığında

$$114{,}45 < \frac{\log(Aq_{72,b}/\varepsilon)}{\log B} < 142{,}65$$

olduğu görülür. Böylece Lemma 3.2.4'e göre $w \coloneqq m \geq 142{,}65$ ise $(4.24)$ eşitsizliğinin çözümü olmadığından $m \leq 142$ olmalıdır. Şimdi $d_1 = d_2 = b-1$ durumunu ele alalım. Bu durumda (4.24) eşitsizliği göz önüne alındığında

$$0 < \left| k\left(\frac{\log\alpha}{\log b}\right) - (n+m) \right| < 4{,}64 \times 2^{-m}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her tarafı $k$ ile bölünürse

$$0 < \left| \frac{\log\alpha}{\log b} - \frac{n+m}{k} \right| < \frac{4{,}64}{2^m.k} \tag{4.25}$$

bulunur. Şimdi $m \geq 120$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\frac{2^m}{9{,}28} > 1{,}43 \times 10^{35} > 10n \geq k$$

olduğu kullanılırsa

$$\left| \frac{\log\alpha}{\log b} - \frac{n+m}{k} \right| < \frac{1}{2k^2}$$

olduğu görülür. Teorem 2.2.13'ün (i) şıkkına göre $\frac{n+m}{k}$ rasyonel sayısı $\gamma = \frac{\log\alpha}{\log b}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının bir yakınsaklığıdır. $\frac{p_{r,b}}{q_{r,b}}$, $\gamma$'nın sürekli kesir açılımının $r$. yakınsaklığı olsun. $2 \leq b \leq 10$ olmak üzere herhangi bir $t$ değeri için $\frac{n+m}{k} = \frac{p_{t,b}}{q_{t,b}}$ olduğunu varsayalım. O halde

$$q_{70,b} \geq q_{70,7} > 18 \times 10^{31} > 10n \geq k$$

olduğundan $t \in \{0,1,\ldots,69\}$ olur. Üstelik

$$a = \text{maks}\{a_i : i = 0,1,\ldots,70\} = 347$$

olup Teorem 2.2.13'ün (i) ve (iii) şıkkına göre

$$\left|\gamma - \frac{n+m}{k}\right| = \left|\gamma - \frac{p_t}{q_t}\right| > \frac{1}{(a_{t+1}+2)\cdot k^2} > \frac{1}{(a+2)\cdot k^2} = \frac{1}{349\cdot k^2} \tag{4.26}$$

elde edilir. Böylece (4.25) ve (4.26) eşitsizlikleri göz önüne alındığında

$$\frac{3{,}5}{10^{36}} > \frac{4{,}64}{2^m} > \frac{1}{349\cdot k} > \frac{1}{349\cdot(18\times 10^{31})} = \frac{1}{6282\times 10^{31}}$$

eşitsizliği bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $m < 120$ olmalıdır. Sonuç olarak $m \leq 142$ eşitsizliğinin üst sınırı olan $m = 142$ değeri (4.23) eşitsizliğinde yerine yazıldığında Mathematica programından faydalanılarak $n < 9{,}05 \times 10^{16}$ bulunur. Lemma 3.2.4'ü tekrar uygulayarak $n$ için bulunan bu üst sınırı azaltalım.

$$\Lambda_5 := \log(\Gamma_5 + 1) = k\log\alpha - n\log b + \log\left((b-1)^2/d_1 d_2(b^m - 1)\right)$$

olmak üzere $n \geq 475$ için (4.22) eşitsizliğinden

$$|\Gamma_5| = \left|e^{\Lambda_5} - 1\right| < \frac{1{,}1}{2^n} < \frac{1}{10}$$

yazılabilir. Burada $a := 0{,}1$ alınarak Yardımcı Teorem 4.2.5 uygulandığında

$$|\Lambda_5| = |\log(\Gamma_5 + 1)| < \frac{-\log(0{,}9)}{0{,}1}\cdot\frac{1{,}1}{2^n} < 1{,}16 \times 2^{-n}$$

elde edilir. $\Lambda_5$ değeri yukarıdaki eşitsizlikte yerini yazılırsa

$$0 < |k \log \alpha - n \log b + \log\left((b-1)^2/d_1 d_2 (b^m - 1)\right)| < 1{,}16 \times 2^{-n}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her tarafı $\log b$ ile bölünürse

$$0 < \left| k\left(\frac{\log \alpha}{\log b}\right) - n + \left(\frac{\log\left((b-1)^2/d_1 d_2 (b^m-1)\right)}{\log b}\right) \right| < 1{,}68 \times 2^{-n} \qquad (4.27)$$

olduğu görülür. Lemma 3.2.4'ün uygulanabilmesi için $u \coloneqq k$ alınırsa $k \leq 10n$ ve $u \leq M$ olduğundan $M \coloneqq 9{,}05 \times 10^{17}$ alınabilir. Ayrıca

$$\gamma \coloneqq \frac{\log \alpha}{\log b}$$

irrasyoneldir. $2 \leq b \leq 10$ ve $\gamma$ sayısının $t.$ sürekli kesir yakınsaklığının paydası $q_{t,b}$ olmak üzere Mathematica programı kullanıldığında

$$q_{155,b} \geq q_{155,6} > 4 \times 10^{75} > 6M$$

elde edilir. Üstelik $2 \leq b \leq 10$, $1 \leq d_1, d_2 \leq b-1$ ve $2 \leq m \leq 142$ koşullarını sağlayan $b, d_1, d_2$ ve $m$ tam sayıları için

$$\mu \coloneqq \frac{\log\left((b-1)^2/d_1 d_2 (b^m-1)\right)}{\log b}$$

olmak üzere Mathematica programı kullanıldığında

$$2{,}04 \times 10^{-64} < \varepsilon \coloneqq \|\mu q_{155,b}\| - M\|\gamma q_{155,b}\| < 0{,}49996$$

bulunur. Diğer yandan $A \coloneqq 1{,}68$, $B \coloneqq 2$ ve $w \coloneqq n$ alınarak Mathematica programı yardımıyla

$$252{,}96 < \frac{\log\left(A q_{155,b}/\varepsilon\right)}{\log B} < 473{,}67$$

olduğu görülür. Böylece Lemma 3.2.4'e göre $w := n \geq 473{,}67$ ise (4.27) eşitsizliğinin çözümü olmadığından $n \leq 473$ olmalıdır. Bu ise $n \geq 475$ ile çelişir.

Şimdi $m = 1$ durumunu ele alalım. Lucas sayılarının Binet formülü ve (4.15) denklemi göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\alpha^k - \frac{d_1 d_2 b^n}{b-1} = -\beta^k - \frac{d_1 d_2}{b-1}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\left|\alpha^k - \frac{d_1 d_2 b^n}{b-1}\right| \leq |\beta|^k + \frac{d_1 d_2}{b-1}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{d_1 d_2 b^n}{b-1}$ ile bölünürse

$$\left|\frac{(b-1)\cdot\alpha^k\cdot b^{-n}}{d_1 d_2} - 1\right| \leq \frac{(b-1)\cdot|\beta|^k}{d_1 d_2 b^n} + \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^n}\cdot\left(\frac{(b-1)\cdot|\beta|^k}{d_1 d_2} + 1\right)$$

olduğu görülür. Buradan

$$\left|\frac{(b-1)\cdot\alpha^k\cdot b^{-n}}{d_1 d_2} - 1\right| < 1{,}1 \times 2^{-n} \tag{4.28}$$

elde edilir. Burada $2 \leq b \leq 10,\ 1 \leq d_1, d_2 \leq b-1$ ve $k \geq 474$ tam sayıları için $(b, d_1, d_2, k) = (2, 1, 1, 474)$ alınarak

$$\frac{1}{b^n}\cdot\left(\frac{(b-1)\cdot|\beta|^k}{d_1 d_2} + 1\right) < 1{,}1 \times 2^{-n}$$

olduğu kullanıldı. Şimdi (4.28) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8'in uygulanabilmesi için

$$\alpha_1 := \alpha,\ \alpha_2 := b,\ \alpha_3 := (b-1)/d_1 d_2,\ b_1 := k,\ b_2 := -n,\ b_3 := 1$$

alınır. Burada $\alpha_1, \alpha_2$ ve $\alpha_3$ pozitif reel sayıları derecesi 2 olan $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cisminin elemanlarıdır. Dolayısıyla $D = 2$'dir. Ayrıca

$$\Gamma_6 := \frac{(b-1)\cdot\alpha^k\cdot b^{-n}}{d_1 d_2} - 1 \neq 0$$

dır. Bu durum $\Gamma_4$'ün sıfırdan farklı olduğunu gösterdiğimiz yöntem ile gösterilebilir. Diğer yandan Yardımcı Teorem 4.2.2'deki $k \leq 10n$ eşitsizliği göz önüne alınır ve

$$10n \geq \text{maks}\{|k|, |-n|, |1|\} = \text{maks}\{|b_1|, |b_2|, |b_3|\}$$

olduğu kullanılırsa $B := 10n$ olarak alınabilir. Öncelikle $\alpha_1 := \alpha$ ve $\alpha_2 := b$'nin logaritmik yükseklikleri (4.17) ve (4.18)'de hesaplandığı için (4.19) ve (4.20)'ye göre $A_1 := 0{,}49$ ve $A_2 := 4{,}61$ olarak alınabilir. Teorem 2.4.5'in (ii) şıkkı kullanılırsa

$$\begin{aligned} h(\alpha_3) = h\left(\frac{b-1}{d_1 d_2}\right) &\leq h(b-1) + h(d_1) + h(d_2) \\ &= \log(b-1) + \log d_1 + \log d_2 \\ &\leq 3\log 9 \\ &< 6{,}6 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer yandan $2 \leq b \leq 10$, $1 \leq d_1, d_2 \leq b-1$ olmak üzere

$$\log \alpha_3 = \log\left(\frac{b-1}{d_1 d_2}\right) \leq \log 9 < 2{,}2,$$
$$\log \alpha_3^{-1} = \log\left(\frac{d_1 d_2}{b-1}\right) \leq \log 9 < 2{,}2$$

eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$-2{,}2 < \log \alpha_3 < 2{,}2$$

yazılabilir. Dolayısıyla $|\log \alpha_3| < 2{,}2$ elde edilir. Böylece

$$13{,}2 \geq \text{maks}\{(2\cdot(6{,}6)),(2{,}2),(0{,}16)\} > \text{maks}\{D\cdot h(\alpha_3),|\log\alpha_3|,(0{,}16)\}$$

olduğundan $A_3 \coloneqq 13{,}2$ alınabilir. (4.28) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8 uygulandığında

$$1{,}1\times 2^{-n} > |\Gamma_6| > \exp\left(C_3\cdot(1+\log(10n))\cdot(0{,}49)\cdot(4{,}61)\cdot(13{,}2)\right)$$

olduğu görülür. Burada

$$C_3 = -1{,}4\cdot 30^6\cdot 3^{4,5}\cdot 2^2\cdot(1+\log 2)$$

dir. Basit bir hesaplama ile

$$n\log 2 - \log 1{,}1 < 2{,}9\times 10^{13}\cdot(1+\log(10n)) \tag{4.29}$$

elde edilir. Diğer yandan (4.29) eşitsizliği göz önüne alındığında ve Mathematica programından yararlanıldığında $n < 1{,}61\times 10^{15}$ bulunur. Şimdi Lemma 3.2.4'ü uygulayarak $n$ için bulunan bu üst sınırı azaltalım.

$$\Lambda_6 \coloneqq \log(\Gamma_6+1) = k\log\alpha - n\log b + \log((b-1)/d_1d_2)$$

olmak üzere $n \geq 475$ için (4.28) eşitsizliğinden

$$|\Gamma_6| = \left|e^{\Lambda_6}-1\right| < \frac{1{,}1}{2^n} < \frac{1}{10}$$

yazılabilir. Burada $a \coloneqq 0{,}1$ alınarak Yardımcı Teorem 4.2.5 uygulandığında

$$|\Lambda_6| = |\log(\Gamma_6+1)| < \frac{-\log(0{,}9)}{0{,}1}\cdot\frac{1{,}1}{2^n} < 1{,}16\times 2^{-n}$$

olduğu görülür. $\Lambda_6$ değeri yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$0 < |k \log \alpha - n \log b + \log\big((b-1)/d_1 d_2\big)\,| < 1{,}16 \times 2^{-n}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her tarafı $\log b$ ile bölünürse

$$0 < \left|k\left(\frac{\log \alpha}{\log b}\right) - n + \left(\frac{\log\big((b-1)/d_1 d_2\big)}{\log b}\right)\right| < 1{,}68 \times 2^{-n} \qquad (4.30)$$

elde edilir. Lemma 3.2.4'ün uygulanabilmesi için $u \coloneqq k$ alınırsa $k \leq 10n$ ve $u \leq M$ olduğundan $M \coloneqq 1{,}61 \times 10^{16}$ alınabilir. Ayrıca

$$\gamma \coloneqq \frac{\log \alpha}{\log b}$$

irrasyoneldir. $2 \leq b \leq 10$ ve $\gamma$ sayısının $t$. sürekli kesir yakınsaklığının paydası $q_{t,b}$ olmak üzere Mathematica programı kullanılarak

$$q_{45,b} \geq q_{45,2} = 78467056620067185965 > 6M$$

olduğu görülür. Üstelik $2 \leq b \leq 10$, $1 \leq d_1, d_2 \leq b-1$ ve $d_1 \cdot d_2 \neq b-1$ olduğu göz önüne alınarak

$$\mu \coloneqq \frac{\log\big((b-1)/d_1 d_2\big)}{\log b}$$

olmak üzere Mathematica programı kullanıldığında

$$0{,}004 < \varepsilon \coloneqq \|\mu q_{45,b}\| - M\|\gamma q_{45,b}\| < 0{,}49999998$$

bulunur. Burada $d_1 \cdot d_2 = b-1$ durumu için $\mu = 0$ olduğundan $\varepsilon < 0$ olur. Dolayısıyla $d_1 \cdot d_2 = b-1$ durumu sonra incelenecektir. Diğer yandan $A \coloneqq 1{,}68$, $B \coloneqq 2$ ve $w \coloneqq n$ alınarak Mathematica programı yardımıyla

$$70{,}44 < \frac{\log(A q_{45,b}/\varepsilon)}{\log B} < 87{,}3$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.2.4'e göre $w \coloneqq n \geq 87{,}3$ ise $(4.30)$ eşitsizliğinin çözümü olmadığından $n \leq 87$ olmalıdır. Şimdi $d_1 \cdot d_2 = b - 1$ durumunu ele alalım. Bu durumda $(4.30)$ eşitsizliğinden

$$0 < \left| k \left( \frac{\log \alpha}{\log b} \right) - n \right| < 1{,}68 \times 2^{-n}$$

olduğu görülür. Bu eşitsizliğin her tarafı $k$ ile bölünürse

$$0 < \left| \frac{\log \alpha}{\log b} - \frac{n}{k} \right| < \frac{1{,}68}{2^n \cdot k} \tag{4.31}$$

bulunur. Ayrıca $n \geq 475$ olduğundan

$$\frac{2^n}{3{,}36} > 2{,}9 \times 10^{142} > 10n \geq k$$

yazılabilir. Böylece

$$\left| \frac{\log \alpha}{\log b} - \frac{n}{k} \right| < \frac{1}{2k^2}$$

elde edilir. Teorem 2.2.13'ün (i) şıkkına göre $\frac{n}{k}$ rasyonel sayısı $\gamma = \frac{\log \alpha}{\log b}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının bir yakınsaklığıdır. $\frac{p_{r,b}}{q_{r,b}}$, $\gamma$'nın sürekli kesir açılımının $r$. yakınsaklığı olsun. $2 \leq b \leq 10$ ve herhangi bir $t$ değeri için $\frac{n}{k} = \frac{p_{t,b}}{q_{t,b}}$ olduğunu varsayalım. O halde

$$q_{38,b} \geq q_{38,2} = 87535330741875727 > 8 \times 10^{16} > 10n \geq k$$

olduğundan $t \in \{0,1,\dots,37\}$ olur. Üstelik

$$a = \text{maks}\{a_i : i = 0,1,\dots,38\} = 134$$

olup Teorem 2.2.13'ün (i) ve (iii) şıkkına göre

$$\left|\gamma-\frac{n}{k}\right|=\left|\gamma-\frac{p_t}{q_t}\right|>\frac{1}{(a_{t+1}+2)\cdot k^2}>\frac{1}{(a+2)\cdot k^2}=\frac{1}{136\cdot k^2} \tag{4.32}$$

elde edilir. Böylece (4.31) ve (4.32) eşitsizlikleri göz önüne alınarak

$$\frac{1{,}68}{2^n}>\frac{1}{136\cdot k}>\frac{1}{136\cdot(8\times10^{16})}=\frac{1}{1088\times10^{16}}$$

bulunur. Buradan $n\leq 63$ olduğu görülür. Bu ise $n\geq 475$ ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi de tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının birleştirilmesi biçiminde yazılabilen Lucas sayıları elde edilecektir.

**Teorem 4.3.3.** $m_1, m_2\geq 1$, $1\leq d_1\leq 9$, $0\leq d_2\leq 9$ ve $n\geq 5$ koşullarını sağlayan $m_1, m_2, d_1, d_2$ ve $n$ tam sayıları için

$$L_n=\underbrace{d_1\ldots d_1}_{m_1\ kez}\ \underbrace{d_2\ldots d_2}_{m_2\ kez} \tag{4.33}$$

olsun. Bu durumda $L_n\in\{11,18,29,47,76,199,322\}$'dir.

**İspat:** Öncelikle ilk 175 Lucas sayısı kontrol edilirse veya ilgili Mathematica programı kullanılırsa ilk 175 Lucas sayıları içerisinde rakamları aynı olan iki doğal sayının birleştirilmesi biçiminde yazılabilen Lucas sayılarının $11, 18, 29, 47, 76, 199$ ve $322$ olduğu görülür. İlk 175 Lucas sayısı Ek 3'te, (4.33) denkleminin $m_1, m_2, d_1, d_2, n$ ve $L_n$ türünden çözümleri ise Ek 4'te verilmiştir. Dolayısıyla bundan sonra $n\geq 175$ olduğu kabul edilecektir.

Yardımcı Teorem 4.2.3'e göre tüm rakamları aynı olan en büyük Lucas sayısı $L_5=11$ olduğundan ve $d_1=d_2$ durumu en az iki basamaklı tüm rakamları aynı olan Lucas sayılarını ifade ettiğinden $n \geq 175$ için tüm rakamları aynı olan Lucas sayısı yoktur. Dolayısıyla bundan sonra $d_1 \neq d_2$ alınacaktır. Ayrıca

$$L_n{}^2 - 5F_n{}^2 = 4 \cdot (-1)^n$$

olduğundan $5 \nmid L_n$ olduğu kolayca görülür. Böylece $d_2 \neq 0$ ve $d_2 \neq 5$'dir. (4.33) denklemi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} L_n &= \underbrace{d_1 \dots d_1}_{m_1\, kez}\ \underbrace{d_2 \dots d_2}_{m_2\, kez} \\ &= \underbrace{d_1 \dots d_1}_{m_1\, kez} \times 10^{m_2} + \underbrace{d_2 \dots d_2}_{m_2\, kez} \\ &= \frac{d_1 \cdot (10^{m_1} - 1)}{9} \times 10^{m_2} + \frac{d_2 \cdot (10^{m_2} - 1)}{9} \\ &= \frac{1}{9}(d_1 \cdot 10^{m_1 + m_2} - (d_1 - d_2) \cdot 10^{m_2} - d_2) \end{aligned}$$

yazılabilir. Lucas sayılarının Binet formülü ile son eşitlik göz önüne alındığında

$$9\alpha^n - d_1 \cdot 10^{m_1 + m_2} = -9\beta^n - (d_1 - d_2) \cdot 10^{m_2} - d_2 \tag{4.34}$$

denklemi elde edilir. $1 \leq d_1, d_2 \leq 9$ olmak üzere (4.34) denkleminin her iki tarafının mutlak değeri alınıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} |9\alpha^n - d_1 \cdot 10^{m_1 + m_2}| &\leq 9 \cdot |\beta|^n + |d_1 - d_2| \cdot 10^{m_2} + d_2 \\ &< 9 \cdot |\beta|^n + 9 \cdot 10^{m_2} + 9 \\ &\leq (0{,}9) \cdot 10^{m_2} \cdot |\beta|^n + 9 \cdot 10^{m_2} + (0{,}9) \cdot 10^{m_2} \\ &= \big((0{,}9) \cdot |\beta|^n + 9{,}9\big) \cdot 10^{m_2} \\ &< 9{,}91 \times 10^{m_2} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $n \geq 175$ ve $m_2 \geq 1$ için

$$(0{,}9) \cdot |\beta|^n < 0{,}01,$$
$$9 \leq (0{,}9) \cdot 10^{m_2}$$

olduğu kullanıldı. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $d_1 \cdot 10^{m_1+m_2}$ ile bölünürse

$$\left|\left(\frac{9}{d_1}\right) \cdot \alpha^n \cdot 10^{-m_1-m_2} - 1\right| < \frac{9,91}{10^{m_1}} \tag{4.35}$$

bulunur. (4.35) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8'in uygulanabilmesi için

$$\alpha_1 := 9/d_1,\ \alpha_2 := \alpha,\ \alpha_3 := 10,\ b_1 := 1,\ b_2 := n,\ b_3 := -m_1 - m_2$$

olarak alınır. Burada $\alpha_1, \alpha_2$ ve $\alpha_3$ pozitif reel sayıları derecesi 2 olan $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cisminin elemanlarıdır. Dolayısıyla $D = 2$'dir. Ayrıca

$$\Gamma_7 := \left(\frac{9}{d_1}\right) \cdot \alpha^n \cdot 10^{-m_1-m_2} - 1 \neq 0$$

dır. Aksine $\Gamma_7 = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\alpha^n = d_1 \cdot 10^{m_1+m_2}/9$$

olur. Her iki tarafın karesi alınırsa $\alpha^{2n} \in \mathbb{Q}$ bulunur. Fakat bu durum $n \geq 1$ için Teorem 2.1.3'e göre imkansızdır. Dolayısıyla $\Gamma_7 \neq 0$'dır. Diğer yandan Yardımcı Teorem 4.2.4'te bulunan $m_1 + m_2 \leq n + 1$ eşitsizliği göz önüne alınır ve

$$n + 1 \geq \text{maks}\{|1|, |n|, |-m_1 - m_2|\} = \text{maks}\{|b_1|, |b_2|, |b_3|\}$$

olduğu kullanılırsa $B := n + 1$ alınabilir. Ayrıca (2.2), (2.3) ve (2.4) eşitlikleri ile $1 \leq d_1 \leq 9$ eşitsizliği göz önüne alınarak

$$h(\alpha_1) = h\left(\frac{9}{d_1}\right) = \log(\text{maks}\{|9|, d_1\}) \leq \log 9,$$

$$h(\alpha_2) = h(\alpha) = \frac{\log \alpha}{2}, \tag{4.36}$$

$$h(\alpha_3) = h(10) = \log 10 \tag{4.37}$$

olarak bulunur. Teorem 3.1.8'e göre $i = 1,2,3$ için

$$A_i \geq \text{maks}\,\{D \cdot h(\alpha_i), |\log \alpha_i|, (0{,}16)\}$$

olduğundan

$$4{,}4 > \text{maks}\,\{(2 \cdot \log 9), |\log 9|, (0{,}16)\},$$

$$0{,}49 > \text{maks}\left\{2 \cdot \left(\frac{\log \alpha}{2}\right), |\log \alpha|, (0{,}16)\right\}, \tag{4.38}$$

$$4{,}61 > \text{maks}\,\{2 \cdot \log 10\,, |\log 10|, (0{,}16)\} \tag{4.39}$$

eşitsizliklerine göre $A_1 \coloneqq 4{,}4$, $A_2 \coloneqq 0{,}49$ ve $A_3 \coloneqq 4{,}61$ olarak alınabilir. Ayrıca $(4.35)$ eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8 uygulandığında

$$9{,}91 \times 10^{m_1} > |\Gamma_7| > \exp\Big(C_1 \cdot \big(1 + \log(n+1)\big) \cdot (4{,}4) \cdot (0{,}49) \cdot (4{,}61)\Big)$$

olduğu görülür. Burada

$$C_1 = -1{,}4 \cdot 30^6 \cdot 3^{4,5} \cdot 2^2 \cdot (1 + \log 2)$$

dir. Basit bir hesaplama ile

$$m_1 \log 10 - \log 9{,}91 < 9{,}64 \times 10^{12} \cdot \big(1 + \log(n+1)\big) \tag{4.40}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.34) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\big(d_1 \cdot 10^{m_1} - (d_1 - d_2)\big) \cdot 10^{m_2} - 9\alpha^n = \ 9\beta^n + d_2$$

eşitliği yazılabilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\left|\big(d_1 \cdot 10^{m_1} - (d_1 - d_2)\big) \cdot 10^{m_2} - 9\alpha^n\right| \leq 9 \cdot |\beta|^n + d_2 \leq 9 \cdot |\beta|^n + 9 < 9{,}1$$

bulunur. Burada $n \geq 175$ için $9 \cdot |\beta|^n < 0{,}1$ ve $1 \leq d_2 \leq 9$ olduğu kullanıldı. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $9\alpha^n$ ile bölünürse

$$\left|\left(\frac{d_1 \cdot (10^{m_1} - 1) + d_2}{9}\right) \cdot \alpha^{-n} \cdot 10^{m_2} - 1\right| \leq 1{,}02 \times \alpha^{-n} \tag{4.41}$$

olduğu görülür. Şimdi (4.41) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8'in uygulanabilmesi için

$$\alpha_1 := (d_1 \cdot (10^{m_1} - 1) + d_2)/9,\ \alpha_2 := \alpha, \alpha_3 := 10, b_1 := 1,\ b_2 := -n,\ b_3 := m_2$$

alınır. Burada $\alpha_1, \alpha_2$ ve $\alpha_3$ pozitif reel sayıları derecesi 2 olan $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ cisminin elemanlarıdır. Dolayısıyla $D = 2$'dir. Ayrıca

$$\Gamma_8 := \left(\frac{d_1 \cdot (10^{m_1} - 1) + d_2}{9}\right) \cdot \alpha^{-n} \cdot 10^{m_2} - 1 \neq 0$$

dir. Bu durum $\Gamma_7$ değerinin sıfırdan farklı olduğunu gösterdiğimiz yöntem ile gösterilebilir. Diğer yandan Yardımcı Teorem 4.2.4'te bulunan $m_1 + m_2 \leq n + 1$ eşitsizliği ve $m_1 \geq 1$ olduğu göz önüne alınırsa $m_2 \leq n$ bulunur. Dolayısıyla

$$n \geq \text{maks}\{|b_1|, |b_2|, |b_3|\} = \text{maks}\{|1|, |-n|, |m_2|\}$$

olduğundan $B := n$ alınabilir. Teorem 2.4.5 kullanılırsa

$$\begin{aligned} h(\alpha_1) &= h\left(\frac{d_1 \cdot (10^{m_1} - 1) + d_2}{9}\right) \\ &\leq h(d_1) + m_1 h(10) + h(1) + \log 2 + h(d_2) + \log 2 + h(9) \\ &= \log d_1 + m_1 \log 10 + \log d_2 + 2 \log 2 + \log 9 \\ &\leq 3 \log 9 + m_1 \log 10 + 2 \log 2 \\ &< 7{,}98 + m_1 \log 10 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\alpha_2 := \alpha$ ve $\alpha_3 := 10$ cebirsel sayılarının logaritmik yükseklikleri (4.36) ve (4.37)'de hesaplandığı için (4.38) ve (4.39)'a göre $A_2 := 0{,}49$ ve

$A_3 \coloneqq 4{,}61$ olarak alınabilir. Diğer yandan $1 \leq d_1, d_2 \leq 9$ ve $m \geq 1$ olmak üzere

$$\log \alpha_3 = \log\left(\frac{d_1 \cdot (10^{m_1} - 1) + d_2}{9}\right) \leq \log 10^{m_1} = m_1 \log 10,$$
$$\log \alpha_3{}^{-1} = \log\left(\frac{9}{d_1 \cdot (10^{m_1} - 1) + d_2}\right) \leq \log(\tfrac{9}{10}) < -0{,}1$$

eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$-m_1 \log 10 < 0{,}1 < \log \alpha_3 < m_1 \log 10$$

yazılabilir. Dolayısıyla $|\log \alpha_3| < m_1 \log 10$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} 15{,}96 + 2m_1 \log 10 &\geq \text{maks}\{(2 \cdot (7{,}98 + m_1 \log 10)), (m_1 \log 10), (0{,}16)\} \\ &\geq \text{maks}\{D \cdot h(\alpha_1), |\log \alpha_1|, (0{,}16)\} \end{aligned}$$

olduğundan $A_1 \coloneqq 15{,}96 + 2m_1 \log 10$ olarak alınabilir. (4.41) eşitsizliği göz önüne alınarak Teorem 3.1.8 uygulandığında

$$1{,}02 \times \alpha^{-n} > |\Gamma_8| > \exp\left(C_2 \cdot (1 + \log n) \cdot (15{,}96 + 2m_1 \log 10)\right)$$

olduğu görülür. Burada

$$C_2 = -1{,}4 \cdot 30^6 \cdot 3^{4{,}5} \cdot 2^2 \cdot (1 + \log 2) \cdot (0{,}49) \cdot (4{,}61)$$

dir. Basit bir hesaplama ile

$$n \log \alpha - \log 1{,}02 < 2{,}20 \times 10^{12} \cdot (1 + \log n) \cdot (15{,}96 + 2m_1 \log 10) \qquad (4.42)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan (4.40) ve (4.42) eşitsizlikleri göz önüne alındığında Mathematica programı yardımıyla $n < 4{,}23 \times 10^{29}$ bulunur. Şimdi Lemma 3.2.4'ü uygulayarak $n$ için bulunan bu üst sınırı azaltalım.

$\Lambda_7 := \log(\Gamma_7 + 1) = (m_1 + m_2)\log 10 - n \log \alpha - \log(9/d_1)$

olmak üzere $m_1 \geq 1$ için (4.35) eşitsizliğinden

$|\Gamma_7| = \left|e^{-\Lambda_7} - 1\right| < \frac{9,91}{10^{m_1}} < 0,999$

yazılabilir. Burada $a := 0,999$ alınarak Yardımcı Teorem 4.2.5 uygulandığında

$|\Lambda_7| = |\log(\Gamma_7 + 1)| < \frac{\log 1000}{0,999} \cdot \frac{9,91}{10^{m_1}} < 68,53 \times 10^{m_1}$

olduğu görülür. $\Lambda_7$ değeri yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$0 < |(m_1 + m_2)\log 10 - n \log \alpha - \log(9/d_1)| < 68,53 \times 10^{m_1}$

bulunur. Bu eşitsizliğin her tarafı $\log \alpha$ ile bölünürse

$$0 < \left|(m_1 + m_2)\frac{\log 10}{\log \alpha} - n - \left(\frac{\log(9/d_1)}{\log \alpha}\right)\right| < 142,5 \times 10^{-m_1} \qquad (4.43)$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.2.4'ün uygulanabilmesi için $u := m_1 + m_2$ alınırsa $m_1 + m_2 \leq n + 1$ ve $u \leq M$ olduğundan $M := 4,23 \times 10^{29}$ alınabilir. Ayrıca

$\gamma := \frac{\log 10}{\log \alpha}$

irrasyonel sayıdır. $\gamma$ sayısının $t$. sürekli kesir yakınsaklığının paydası $q_t$ olmak üzere Mathematica programı yardımıyla

$q_{60} = 2568762252997982327345614176552 > 6M$

olduğu görülür. Üstelik $1 \leq d_1 < 9$ olduğu göz önüne alınırsa

$\mu \coloneqq -\frac{\log(9/d_1)}{\log \alpha}$

olmak üzere Mathematica programı kullanıldığında

$0{,}04 < \varepsilon \coloneqq \|\mu q_{60}\| - M\|\gamma q_{60}\| < 0{,}31$

bulunur. Burada $d_1 = 9$ durumu için $\mu = 0$ olduğundan $\varepsilon < 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $d_1 = 9$ durumu daha sonra incelenecektir. Diğer yandan $A \coloneqq 142{,}5$, $B \coloneqq 10$ ve $w \coloneqq m_1$ alınarak Mathematica programı yardımıyla

$33{,}06 < \frac{\log(Aq_{60}/\varepsilon)}{\log B} < 33{,}87$

elde edilir. Böylece Lemma 3.2.4'e göre $w \coloneqq m_1 \geq 33{,}87$ ise (4.43) eşitsizliğinin çözümü olmadığından $m_1 \leq 33$ olmalıdır. Şimdi $d_1 = 9$ durumunu ele alalım. Bu durumda (4.43) eşitsizliğinden

$0 < \left|(m_1 + m_2)\frac{\log 10}{\log \alpha} - n\right| < 142{,}5 \times 10^{-m_1}$

olduğu görülür. Bu eşitsizliğin her tarafı $m_1 + m_2$ ile bölünürse

$$0 < \left|\frac{\log 10}{\log \alpha} - \frac{n}{m_1+m_2}\right| < \frac{142{,}5}{(m_1+m_2)\cdot 10^{m_1}} \tag{4.44}$$

bulunur. $m_1 \geq 35$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$\frac{10^{m_1}}{285} > 3{,}5 \times 10^{32} > n + 1 \geq m_1 + m_2$

olduğu kullanılırsa

$\left|\frac{\log 10}{\log \alpha} - \frac{n}{m_1+m_2}\right| < \frac{142{,}5}{(m_1+m_2)\cdot 10^{m_1}} < \frac{1}{2(m_1+m_2)^2}$

elde edilir. Teorem 2.2.13'ün (i) şıkkına göre $\frac{n}{m_1+m_2}$ rasyonel sayısı $\gamma = \frac{\log 10}{\log \alpha}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının bir yakınsaklığıdır. $\frac{p_{r,b}}{q_{r,b}}$, $\gamma$'nın sürekli kesir açılımının $r$. yakınsaklığı olsun. Herhangi bir $t$ değeri için $\frac{n}{m_1+m_2} = \frac{p_t}{q_t}$ olduğunu varsayalım. O halde

$$q_{60} > 2 \times 10^{30} > n + 1 \geq m_1 + m_2$$

olduğundan $t \in \{0,1, \dots ,59\}$ olur. Üstelik

$$a = \text{maks}\{a_i : i = 0,1, \dots ,60\} = 106$$

olup Teorem 2.2.13'ün (i) ve (iii) şıkkına göre

$$\left|\gamma - \frac{n}{m_1+m_2}\right| = \left|\gamma - \frac{p_t}{q_t}\right| > \frac{1}{(a_{t+1}+2)\cdot(m_1+m_2)^2} > \frac{1}{(a+2)\cdot(m_1+m_2)^2} = \frac{1}{108\cdot(m_1+m_2)^2} \quad (4.45)$$

elde edilir. Böylece (4.44) ve (4.45) eşitsizlikleri göz önüne alınarak

$$\frac{1{,}425}{10^{33}} \geq \frac{142{,}5}{10^{m_1}} > \frac{1}{108\cdot(m_1+m_2)} > \frac{1}{108\cdot(2\times10^{30})} = \frac{1}{216\times10^{30}}$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $m_1 \leq 34$ olmalıdır. Bu eşitsizliğin üst sınırı olan $m_1 = 34$ değeri (4.42) eşitsizliğinde yerine yazıldığında Mathematica programından yararlanıldığında $n < 3{,}08 \times 10^{16}$ bulunur. Lemma 3.2.4'ü tekrar uygulayarak $n$ için bulunan bu üst sınırı azaltalım.

$$\Lambda_8 \coloneqq \log(\Gamma_8 + 1) = m_2 \log 10 - n \log \alpha + \log\left(\frac{d_1\cdot(10^{m_1}-1)+d_2}{9}\right)$$

olmak üzere $n \geq 175$ için (4.41) eşitsizliğinden

$$|\Gamma_8| = \left|e^{\Lambda_8} - 1\right| < \frac{1{,}02}{\alpha^n} < \frac{1}{100}$$

yazılabilir. Burada $\alpha \coloneqq 0{,}01$ alınarak Yardımcı Teorem 4.2.5 uygulandığında

$$|\Lambda_8| = |\log(\Gamma_8 + 1)| < \frac{-\log(0{,}99)}{0{,}01} \cdot \frac{1{,}02}{\alpha^n} < 1{,}03 \times \alpha^{-n}$$

olduğu görülür. $\Lambda_8$ değeri yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$0 < \left| m_2 \log 10 - n \log \alpha + \log\left(\frac{d_1 \cdot (10^{m_1} - 1) + d_2}{9}\right) \right| < 1{,}03 \times \alpha^{-n}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her tarafı $\log \alpha$ ile bölünürse

$$0 < \left| m_2 \frac{\log 10}{\log \alpha} - n + \frac{\log\left(\frac{d_1 \cdot (10^{m_1} - 1) + d_2}{9}\right)}{\log \alpha} \right| < 2{,}15 \times \alpha^{-n} \qquad (4.46)$$

bulunur. Lemma 3.2.4'ün uygulanabilmesi için $u \coloneqq m_2$ alınırsa $m_2 \leq n$ ve $u \leq M$ olduğundan $M \coloneqq 3{,}08 \times 10^{16}$ alınabilir. Ayrıca

$$\gamma \coloneqq \frac{\log 10}{\log \alpha}$$

irrasyoneldir. $\gamma$ irrasyonel sayısının $t$. sürekli kesir yakınsaklığı $\frac{p_t}{q_t}$ olmak üzere Mathematica programı kullanıldığında

$$q_{51} = 229449897080773520713106 14 > 6M$$

olduğu görülür. Üstelik $1 \leq d_1, d_2 \leq 9$, $d_1 \neq d_2$, $d_2 \neq 5$ ve $1 \leq m_1 \leq 34$ olduğu göz önüne alınarak

$$\mu \coloneqq \frac{\log\left(\frac{d_1 \cdot (10^{m_1} - 1) + d_2}{9}\right)}{\log \alpha}$$

olmak üzere Mathematica programı kullanıldığında

$$8{,}63 \times 10^{-11} < \varepsilon := \|\mu q_{51}\| - M\|\gamma q_{51}\| < 4{,}999$$

bulunur. Diğer yandan $A := 2{,}15$, $B := \alpha$ ve $w := n$ alınarak Mathematica programı yardımıyla

$$124{,}38 < \frac{\log(Aq_{51}/\varepsilon)}{\log B} < 171{,}1$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.2.4'e göre $w := n \geq 171{,}1$ ise (4.46) eşitsizliğinin çözümü olmadığından $n \leq 171$ olmalıdır. Bu durum ise $n \geq 175$ olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

# BÖLÜM 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Dördüncü bölümde $(4.1)$ ve $(4.15)$ denklemleri ile sırasıyla $2 \leq b \leq 10$ olmak üzere $b$ tabanında tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının çarpımı biçiminde yazılabilen Fibonacci ve Lucas sayıları elde edildi. Bu problemleri içeren makale SCI Expanded kapsamında olan Bulletin of the Brazilian Mathematical Society isimli dergide yayımlanmıştır. Ayrıca $(4.33)$ denklemi ile tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının birleştirilmesi biçiminde yazılabilen Lucas sayıları bulundu. Bu çalışmayı içeren makale ESCI kapsamında olan Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana isimli dergide yayımlanmıştır. Şimdi bu denklemlerden elde edilen bazı sonuçları verelim.

**Sonuç 5.1.** $2 \leq b \leq 10$ olmak üzere $b$ tabanında tüm rakamları aynı olan iki doğal sayının çarpımı biçiminde yazılabilen en büyük Fibonacci ve Lucas sayıları sırasıyla $144$ ve $1364$'tür. Bu sayılar farklı tabanlarda sırasıyla

$$144 = F_{12} = \frac{2\cdot(5^2-1)}{(5-1)} \cdot \frac{2\cdot(5^2-1)}{(5-1)} = (22)_5 \times (22)_5 = 12 \times 12,$$

$$144 = F_{12} = \frac{4\cdot(5^2-1)}{(5-1)} \cdot \frac{1\cdot(5^2-1)}{(5-1)} = (44)_5 \times (11)_5 = 24 \times 6,$$

$$144 = F_{12} = \frac{6\cdot(7^1-1)}{(7-1)} \cdot \frac{3\cdot(7^2-1)}{(7-1)} = (6)_7 \times (33)_7 = 6 \times 24,$$

$$144 = F_{12} = \frac{3\cdot(7^1-1)}{(7-1)} \cdot \frac{6\cdot(7^2-1)}{(7-1)} = (3)_7 \times (66)_7 = 3 \times 48,$$

$$144 = F_{12} = \frac{4\cdot(8^1-1)}{(8-1)} \cdot \frac{4\cdot(8^2-1)}{(8-1)} = (4)_8 \times (44)_8 = 4 \times 36,$$

$$1364 = L_{12} = \frac{2\cdot(4^1-1)}{(4-1)} \cdot \frac{2\cdot(4^5-1)}{(4-1)} = (2)_4 \times (22222)_4 = 2 \times 682$$

biçiminde ifade edilir.

**Sonuç 5.2.** $k \geq 1$, $n \geq 2$, $2 \leq b \leq 10$ ve $1 \leq d_2 \leq b-1$ koşullarını sağlayan $k, n$, $b$ ve $d_2$ tam sayıları için (4.1) denkleminde $m = d_1 = 1$ alınırsa

$$F_k = \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem $b$ tabanında en az iki basamaklı tüm rakamları aynı olan Fibonacci sayılarını ifade eder ve bu şekilde yazılabilen Fibonacci sayıları

$3 = F_4 = (11)_2$,
$5 = F_5 = (11)_4$,
$8 = F_6 = (22)_3 = (11)_7$,
$13 = F_7 = (111)_3$,
$21 = F_8 = (111)_4 = (33)_6$,
$55 = F_{10} = (55)_{10}$

biçiminde ifade edilir.

**Sonuç 5.3.** $k \geq 0$, $n \geq 2$, $2 \leq b \leq 10$ ve $1 \leq d_2 \leq b-1$ koşullarını sağlayan $k, n$, $b$ ve $d_2$ tam sayıları için (4.15) denkleminde $m = d_1 = 1$ alınırsa

$$L_k = \frac{d_2 \cdot (b^n - 1)}{b-1}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem $b$ tabanında en az iki basamaklı tüm rakamları aynı olan Lucas sayılarını ifade eder ve bu şekilde yazılabilen Lucas sayıları

$4 = L_3 = (11)_3$,
$7 = L_4 = (111)_2 = (11)_6$,
$11 = L_5 = (11)_{10}$,
$18 = L_6 = (33)_5 = (22)_8$

biçiminde ifade edilir.

**Sonuç 5.4.** $2 \leq b \leq 10$, $k \geq 1$ ve $1 \leq m \leq n$ koşullarını sağlayan $b, k, m$ ve $n$ tam sayıları için (4.1) denkleminde $d_1 = d_2 = b - 1$ alınırsa

$$F_k = (b^m - 1) \cdot (b^n - 1)$$

denklemi elde edilir.

**i)** $b = 2$ durumunda bu denklem Mersenne sayısı olan Fibonacci sayılarını veya iki Mersenne sayısının çarpımı biçiminde yazılabilen Fibonacci sayılarını ifade eder. Bu denklemin çözümleri $(k, m, n) = (1,1,1), (2,1,1), (4,1,2), (8,2,3)$ olup bu çözümler

$$F_1 = F_2 = 1 = (2^1 - 1) \cdot (2^1 - 1),$$
$$F_4 = 3 = (2^1 - 1) \cdot (2^2 - 1),$$
$$F_8 = 21 = (2^2 - 1) \cdot (2^3 - 1)$$

biçiminde gösterilir.

**ii)** $3 \leq b \leq 10$ ise

$$F_k = (b^m - 1) \cdot (b^n - 1)$$

denkleminin çözümü yoktur.

**Sonuç 5.5.** $2 \leq b \leq 10$, $k \geq 1$ ve $1 \leq m \leq n$ koşullarını sağlayan $b, k, m$ ve $n$ tam sayıları için (4.15) denkleminde $d_1 = d_2 = b - 1$ alınırsa

$$L_k = (b^m - 1) \cdot (b^n - 1)$$

denklemi elde edilir.

**i)** $b = 2$ durumunda bu denklem Mersenne sayısı olan Lucas sayılarını veya iki Mersenne sayısının çarpımı biçiminde yazılabilen Lucas sayılarını ifade eder. Bu denklemin çözümleri $(k, m, n) = (1,1,1), (2,1,2), (4,1,3)$ olup bu çözümler

$$L_1 = 1 = (2^1 - 1) \cdot (2^1 - 1),$$
$$L_2 = 3 = (2^1 - 1) \cdot (2^2 - 1),$$
$$L_4 = 7 = (2^1 - 1) \cdot (2^3 - 1)$$

biçiminde gösterilir.

**ii)** $3 \leq b \leq 10$ ise

$$L_k = (b^m - 1) \cdot (b^n - 1)$$

denklemin çözümü $(b, k, m, n) = (3,3,1,1)$ olup bu çözüm

$$L_3 = 4 = (3^1 - 1) \cdot (3^1 - 1)$$

biçiminde ifade edilir.

Bu çalışma göz önüne alınarak belli bir tabanında tüm rakamları aynı olan üç doğal sayının çarpımı biçiminde yazılabilen bazı özel sayı dizilerinin terimleri bulunabilir. Ayrıca tüm rakamları aynı olan üç doğal sayının birleştirilmesi biçiminde yazılabilen Pell veya Pell-Lucas sayı dizilerinin terimleri araştırılabilir. Tüm rakamları aynı olan üç doğal sayının birleştirilmesi biçiminde yazılabilen Fibonacci ve Balans sayı dizilerinin terimleri ile ilgili çalışmalarımız dergilere sunulmuş durumdadır.

# KAYNAKLAR


[1] Wiles, A., Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. Annals of Mathematics, 141(3): 443–551, 1995.

[2] Taylor, R., Wiles, A., Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras. Annals of Mathematics, 141(3): 553–572, 1995.

[3] Andreescu, T., Andrica, D., Quadratic Diophantine Equations. Springer, New York, 1-199, 2015.

[4] Mordell, L.J., Diophantine Equations. Academic Press INC, New York, 3-305, 1969.

[5] Özmen, A.Ş., Bachet Diyofant Denklemlerinin Cebirsel Sayılar Teorisi ile Çözümü. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2019.

[6] Ramanujan, S., Question 464. The Journal of the Indian Mathematical Society, 5(1): 120, 1913.

[7] Nagell, T., Løsning til oppgave 2: 29, 1943, Norsk Matematisk Tidsskrift, 30(1): 62-64, 1948.

[8] Le, M., Soydan, G., A brief survey on the generalized Lebesgue-Ramanujan-Nagell equation. 15: 473-523, 2020.

[9] Güllü, A.C., Diyofant Denklemleri. Yaşar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2017.

[10] Andreescu, T., Andrica, D., Cucurezeanu, I., An introduction to Diophantine equations. A problem-based approach, Birkhauser Verlag, New York, 3-326, 2010.

[11] Vajda, S., Fibonacci and Lucas Numbers and The Golden Sections. Ellis Horwood Limited Publications, England, 9-154, 1989.

[12] Koshy, T., Fibonacci and Lucas numbers with applications. John Wiley and Sons, Proc., New York-Toronto, 1-552, 2001.

[13] Moser, L., Carlitz, L., Advanced problem H-2. The Fibonacci Quarterly, 1: 46, 1963.

[14] Briggs, W.E., Newman, D.J., Erdos, P., Zassenhaus, H., Kenyon, H., Suvorov, F., Rollett, A. P., Adorno, D. S., Advanced Problems and Solutions: Problem for Solution: 5072-5081. The American Mathematical Monthly, 70(2): 215-216, 1963.

[15] Cohn, J.H.E., On square Fibonacci numbers. Journal of the London Mathematical Society, 39: 537-540, 1964.

[16] Wyler, O., In the Fibonacci series $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ the first, second and twelfth terms are squares. The American Mathematical Monthly, 71: 221–222, 1964.

[17] Alfred, B.U., On square Lucas numbers. The Fibonacci Quarterly, 2(1): 11–12, 1964.

[18] Cohn, J.H.E., Lucas and Fibonacci numbers and some Diophantine equations. Proceedings of the Glasgow Mathematical Association, 7(1): 24–28, 1965.

[19] London, H., Finkelstein, R., On Fibonacci and Lucas numbers which are perfect Powers. The Fibonacci Quarterly, 5: 476–481, 1969.

[20] Pethő, A., Full cubes in the Fibonacci sequence. Publicationes Mathematicae Debrecen, 30 (1-2): 117–127, 1983.

[21] Finkelstein, R., On Fibonacci numbers which are one more than a square, Collection of articles dedicated to Helmut Hasse on his seventy-fifth birthday. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 262/263: 171–178, 1973.

[22] Finkelstein, R., On Lucas numbers which are one more than a square. The Fibonacci Quarterly, 13(4): 340–342, 1975.

[23] Robbins, N., Fibonacci and Lucas numbers of the forms $w^2 - 1$, $w^3 \mp 1$. The Fibonacci Quarterly, 19(4): 369–373, 1981.

[24] Robbins, N., On Fibonacci numbers of the form $px^2$, where $p$ is prime. The Fibonacci Quarterly, 21(4): 266–271, 1983.

[25] Robbins, N., Fibonacci numbers of the forms $px^2 \mp 1$, $px^3 \mp 1$, where $p$ is prime, in: Applications of Fibonacci numbers (San Jose, CA, 1986), 77–88, Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 1988.

[26] Robbins, N., Fibonacci numbers of the form $cx^2$, where $1 \leq c \leq 1000$. The Fibonacci Quarterly, 28(4): 306–315, 1990.

[27] Robbins, N., Lucas numbers of the form $px^2$, where $p$ is prime. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 14(4): 697–703, 1991.

[28] Zhou, C., A general conclusion on Lucas numbers of the form $px^2$, where $p$ is prime. The Fibonacci Quarterly, 37(1): 39–45, 1999.

[29] Bugeaud, Y., Mignotte, M., Siksek, S., Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations I. Fibonacci and Lucas perfect powers. Annals of Mathematics, 163(3): 969-1018, 2006.

[30] Ddamulira, M., Luca, F., Rakotomalala, M., Fibonacci numbers which are products of two Pell numbers. The Fibonacci Quarterly, 54(1): 11–18, 2016.

[31] Şiar, Z., Keskin, R., Repdigits as sums of two Lucas numbers. Applied Mathematics E-Notes, 20: 33-38, 2020.

[32] Melham, R., Sums involving Fibonacci and Pell numbers. Portugaliae Mathematica, 56(3): 309-317, 1999.

[33] Rayaguru, S.G., Panda, G.K., Sum formulas involving powers of balancing and Lucas-balancing numbers – II. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 25(3): 102-110, 2019.

[34] Robinson, R.P., Mersenne and Fermat Numbers. Proceedings of the American Mathematical Society, 5(5): 842-846, 1954.

[35] https://www.math.u-bordeaux.fr/~pjaming/M1/exposes/MA2.pdf, Erişim Tarihi: 01.06.2021.

[36] Mollin, R.A., Fundamental Number Theory with Applications. CRC Press, Boca Raton, New York-London-Tokyo, 209-221, 1998.

[37] Gòmez, C.A., Gòmez, J.C., Luca, F., Two b-repunits in the Fibonacci sequence. Journal of Number Theory, 222: 393-422, 2021.

[38] Taşçı, D., Soyut Cebir. Öziş Matbaacılık, Ankara, 559-606, 2010.

[39] Gezer, B., Bizim, O., Soyut Cebir. Dora Yayınevi, Bursa, 521-572, 2017.

[40] Alaca, Ş., Williams, K.S., Introductory Algebrac Number Theory. Cambridge University Press, New York, 109-140, 2004.

[41] Bujačić, S., Filipin, A., Kristensen, S., Matala-aho, T., Oswald, N.M.R., Diophantine Analysis Course Notes from a Summer School. Würzburg University Press, Germany, 23-36, 2014.

[42] Bugeaud, Y., Linear forms in logarithms and applications. IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 28, European Mathematical Society, Zurich, 1-176, 2018.

[43] Gelfond, A.O., Sur le septiéme probléme de Hilbert. Bulletin of the Academiy of Sciences of the USSR, 4: 623-630, 1934.

[44] Schneider, T.H., Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I. Transzendenzvon Potenzen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 172: 65-69, 1934.

[45] Baker, A., Lineer forms in the logarithms of algebraic numbers. I. Mathematika, 13: 204-216, 1966.

[46] Baker, A., Lineer forms in the logarithms of algebraic numbers. II. Mathematika, 14: 102-107, 1967.

[47] Baker, A., Lineer forms in the logarithms of algebraic numbers. III. Mathematika, 14: 220-228, 1967.

[48] Ddamulira, M., Diophantine Equations and Linearly Recurrent Sequences. Graz University of Technology, Institute of Analysis and Number Theory, Doctoral Thesis, 2020.

[49] Natarajan, S., Thangadurai, R., Pillars of Transcendental Number Theory. Nature Singapore Pte Ltd., 108-111, 2020.

[50] Matveev, E.M., An Explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers II. Izvestiya Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., 64(6): 125-180, 2000. (Russian) Translation in Izvestiya Mathematics 64(6): 1217-1269, 2000.

[51] Lynch, B.E., Linear Forms in Logarithms and Fibonacci Numbers. Brock University, Faculty of Mathematics and Science, Master's Thesis, 2019.

[52] Faye, B., Diophantine Equations with Arithmetic Functions and Binary Recurrences Sequences. University of Witwatersrand, Philosophy in Mathematics, Doctoral Thesis, 2017.

[53] Baker, A., Davenport, H., The equations $3x^2-2=y^2$ and $8x^2-7=z^2$. Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series 2, 20(1): 129-137, 1969.

[54] Dujella, A., Pethő, A., A generalization of a theorem of Baker and Davenport. Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series 2, 49(3): 291-306, 1998.

[55] Bravo, J.J., Gòmez, C.A., Luca, F., Powers of two as sums of two k-Fibonacci numbers. Miskolc Mathematical Notes, 17(1): 85-100, 2016.

[56] Rayaguru, S.G., Panda, G.K., Balancing numbers which are concatenations of two repdigits. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 26(3): 911-919, 2020.

[57] Luca, F., Fibonacci and Lucas numbers with only one distinct digit. Portugaliae Mathematica, 57(2): 243-254, 2000.

[58] Alvarado, S.D., Luca, F., Fibonacci numbers Which are Sums of Two Repdigits. Aportaciones Matemáticas Investigación, 20: 97-108, 2011.

[59] Marques, D., Togbé, A., On repdigits as product of consecutive Fibonacci numbers. Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste, 44: 393-397, 2012.

[60] Luca, F., Repdigits as sums of three Fibonacci numbers. Mathematical Communications, 17(1): 1-11, 2012.

[61] Faye, B., Luca, F., Pell and Pell-Lucas numbers with only one distinct digit. Annales Mathematicae et Informaticae, 45: 55-60, 2015.

[62] Normenyo, B.V., Luca, F., Togbé, A., Repdigits as sums of three Pell numbers. Periodica Mathematica Hungarica, 77(2): 318-328, 2018.

[63] Normenyo, B.V., Luca, F., Togbé, A., Repdigits as sums of four Fibonacci or Lucas numbers. Journal of Integer Sequences, 21(7): Article No 18.7.7, 2018.

[64] Rayaguru, S.G., Panda, G.K., Repdigits as products of consecutıve Balancing or Lucas-Balancing numbers. The Fibonacci Quarterly, 57(3): 231-237, 2019.

[65] Irmak, N., Togbé, A., On repdigits as product of consecutive Lucas numbers. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 24(3): 95-102, 2018.

[66] Erduvan, F., Keskin, R., Fibonacci and Lucas numbers as products of two repdigits. Turkish Journal of Mathematics, 43(5): 2142-2153, 2019.

[67] Luca, F., Normenyo, B.V., Togbé, A., Repdigits as sums of three Lucas numbers. Colloquium Mathematicum, 156(2): 255-265, 2019.

[68] Luca, F., Normenyo, B.V., Togbé, A., Repdigits as sums of four Pell numbers. Boletín de la Sociedad Matematicà Mexicana, 25(2): 249-266, 2019.

[69] Normenyo, B.V., Kafle, B., Togbé, A., Repdigits as sums of two Fibonacci numbers and two Lucas numbers. Integers, 19: Article No 55, 2019.

[70] Adegbindin, C., Luca, F., Togbé, A., Lucas numbers as sums of two repdigits. Lithuanian Mathematical Journal, 59(3): 295-304, 2019.

[71] Şiar, Z., Erduvan, F., Keskin, R. Repdigits as products of two Pell or Pell-Lucas numbers. Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 88(2): 247-256, 2019.

[72] Erduvan, F., Keskin, R., Repdigits as products of two Fibonacci or Lucas numbers. Proceedings Mathematical Sciences, 130(1): Article No 28, 2020.

[73] Erduvan, F., Keskin, R., Şiar, Z., Repdigits base b as products of two Lucas numbers. Quaestiones Mathematicae, Doi: 10.2989/16073606.2020.1787539, 2020.

[74] Keskin, R., Erduvan, F., Şiar, Z., Repdigits base b as products of two Fibonacci numbers. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, (Yayına kabul edildi), Doi: 10.1007/s13226-021-00041-8, 2020.

[75] Adegbindin, C., Luca, F., Togbé, A., Pell and Pell-Lucas numbers as sums of two repdigits. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 43(2): 1253-1271, 2020.

[76] Ddamulira, M., Repdigits as sums of three Balancing numbers. Mathematica Slovaca, 70(3): 557-566, 2020.

[77] Adegbindin, C., Togbé, A., Can a Lucas number be a sum of three repdigits? Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 61(3): 383-396, 2021.

[78] Adegbindin, C.A., Luca, F., Togbé, A., Pell and Pell-Lucas numbers as sums of three repdigits. Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 90(1): 7-25, 2021.

[79] Erduvan, F., Keskin, R., Repdigits as sums of four Balancing numbers. Mathematica Bohemica, 146(1): 55-68, 2021.

[80] Alahmadi, A., Altassan, A., Luca, F., Shoaib, H., Fibonacci numbers which are concatenations of two repdigits. Quaestiones Mathematicae, 44(2): 281-290, 2021.

[81] De Weger, B.M.M., Algorithms for Diophantine Equations. CWI Tracts 65, Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1-69, 1989.

# EKLER

**Ek 1:** (4.1) denkleminin $(b, m, n, d_1, d_2, k, M, N, F_k)$ biçimindeki çözümleri

(2,1,1,1,1,1,1,1,1)

(3,1,1,1,1,1,1,1,1)

(4,1,1,1,1,1,1,1,1)

(5,1,1,1,1,1,1,1,1)

(6,1,1,1,1,1,1,1,1)

(7,1,1,1,1,1,1,1,1)

(8,1,1,1,1,1,1,1,1)

(9,1,1,1,1,1,1,1,1)

(10,1,1,1,1,1,1,1,1)

(2,1,1,1,1,2,1,1,1)

(3,1,1,1,1,2,1,1,1)

(4,1,1,1,1,2,1,1,1)

(5,1,1,1,1,2,1,1,1)

(6,1,1,1,1,2,1,1,1)

(7,1,1,1,1,2,1,1,1)

(8,1,1,1,1,2,1,1,1)

(9,1,1,1,1,2,1,1,1)

(10,1,1,1,1,2,1,1,1)

(3,1,1,1,2,3,1,2,2)

(3,1,1,2,1,3,2,1,2)

(4,1,1,1,2,3,1,2,2)

(4,1,1,2,1,3,2,1,2)

(5,1,1,1,2,3,1,2,2)

**Ek 1' in devamı:**

(5,1,1,2,1,3,2,1,2)

(6,1,1,1,2,3,1,2,2)

(6,1,1,2,1,3,2,1,2)

(7,1,1,1,2,3,1,2,2)

(7,1,1,2,1,3,2,1,2)

(8,1,1,1,2,3,1,2,2)

(8,1,1,2,1,3,2,1,2)

(9,1,1,1,2,3,1,2,2)

(9,1,1,2,1,3,2,1,2)

(10,1,1,1,2,3,1,2,2)

(10,1,1,2,1,3,2,1,2)

(2,1,2,1,1,4,1,3,3)

(4,1,1,1,3,4,1,3,3)

(4,1,1,3,1,4,3,1,3)

(5,1,1,1,3,4,1,3,3)

(5,1,1,3,1,4,3,1,3)

(6,1,1,1,3,4,1,3,3)

(6,1,1,3,1,4,3,1,3)

(7,1,1,1,3,4,1,3,3)

(7,1,1,3,1,4,3,1,3)

(8,1,1,1,3,4,1,3,3)

(8,1,1,3,1,4,3,1,3)

(9,1,1,1,3,4,1,3,3)

(9,1,1,3,1,4,3,1,3)

(10,1,1,1,3,4,1,3,3)

(10,1,1,3,1,4,3,1,3)

(4,1,2,1,1,5,1,5,5)

(6,1,1,1,5,5,1,5,5)

(6,1,1,5,1,5,5,1,5)

(7,1,1,1,5,5,1,5,5)

**Ek 1' in devamı:**

(7,1,1,5,1,5,5,1,5)

(8,1,1,1,5,5,1,5,5)

(8,1,1,5,1,5,5,1,5)

(9,1,1,1,5,5,1,5,5)

(9,1,1,5,1,5,5,1,5)

(10,1,1,1,5,5,1,5,5)

(10,1,1,5,1,5,5,1,5)

(3,1,2,1,2,6,1,8,8)

(3,1,2,2,1,6,2,4,8)

(3,1,2,2,1,6,2,4,8)

(5,1,1,2,4,6,2,4,8)

(5,1,1,4,2,6,4,2,8)

(6,1,1,2,4,6,2,4,8)

(6,1,1,4,2,6,4,2,8)

(7,1,1,2,4,6,2,4,8)

(7,1,1,4,2,6,4,2,8)

(8,1,1,2,4,6,2,4,8)

(8,1,1,4,2,6,4,2,8)

(9,1,1,1,8,6,1,8,8)

(9,1,1,2,4,6,2,4,8)

(9,1,1,4,2,6,4,2,8)

(9,1,1,8,1,6,8,1,8)

(10,1,1,1,8,6,1,8,8)

(10,1,1,2,4,6,2,4,8)

(10,1,1,4,2,6,4,2,8)

(10,1,1,8,1,6,8,1,8)

(3,1,3,1,1,7,1,13,13)

(2,2,3,1,1,8,3,7,21)

(4,1,3,1,1,8,1,21,21)

(6,1,2,1,3,8,1,21,21)

**Ek 1' in devamı:**

(6,1,2,3,1,8,3,7,21)
(8,1,1,3,7,8,3,7,21)
(8,1,1,7,3,8,7,3,21)
(9,1,1,3,7,8,3,7,21)
(9,1,1,7,3,8,7,3,21)
(10,1,1,3,7,8,3,7,21)
(10,1,1,7,3,8,7,3,21)
(10,1,2,1,5,10,1,55,55)
(10,1,2,5,1,10,5,11,55)
(5,2,2,1,4,12,6,24,144)
(5,2,2,2,2,12,12,12,144)
(5,2,2,4,1,12,24,6,144)
(7,1,2,3,6,12,3,48,144)
(7,1,2,6,3,12,6,24,144)
(8,1,2,4,4,12,4,36,144)

**Ek 2:** (4.15) denkleminin $(b, m, n, d_1, d_2, k, M, N, L_k)$ biçimindeki çözümleri

(3,1,1,1,2,0,1,2,2)
(3,1,1,2,1,0,2,1,2)
(4,1,1,1,2,0,1,2,2)
(4,1,1,2,1,0,2,1,2)
(5,1,1,1,2,0,1,2,2)
(5,1,1,2,1,0,2,1,2)
(6,1,1,1,2,0,1,2,2)
(6,1,1,2,1,0,2,1,2)
(7,1,1,1,2,0,1,2,2)
(7,1,1,2,1,0,2,1,2)
(8,1,1,1,2,0,1,2,2)
(8,1,1,2,1,0,2,1,2)

**Ek 2'nin devamı:**

(9,1,1,1,2,0,1,2,2)

(9,1,1,2,1,0,2,1,2)

(10,1,1,1,2,0,1,2,2)

(10,1,1,2,1,0,2,1,2)

(2,1,1,1,1,1,1,1,1)

(3,1,1,1,1,1,1,1,1)

(4,1,1,1,1,1,1,1,1)

(5,1,1,1,1,1,1,1,1)

(6,1,1,1,1,1,1,1,1)

(7,1,1,1,1,1,1,1,1)

(8,1,1,1,1,1,1,1,1)

(9,1,1,1,1,1,1,1,1)

(10,1,1,1,1,1,1,1,1)

(2,1,2,1,1,2,1,3,3)

(4,1,1,1,3,2,1,3,3)

(4,1,1,3,1,2,3,1,3)

(5,1,1,1,3,2,1,3,3)

(5,1,1,3,1,2,3,1,3)

(6,1,1,1,3,2,1,3,3)

(6,1,1,3,1,2,3,1,3)

(7,1,1,1,3,2,1,3,3)

(7,1,1,3,1,2,3,1,3)

(8,1,1,1,3,2,1,3,3)

(8,1,1,3,1,2,3,1,3)

(9,1,1,1,3,2,1,3,3)

(9,1,1,3,1,2,3,1,3)

(10,1,1,1,3,2,1,3,3)

(10,1,1,3,1,2,3,1,3)

(3,1,2,1,1,3,1,4,4)

(3,1,1,2,2,3,2,2,4)

**Ek 2’nin devamı:**

(4,1,1,2,2,3,2,2,4)

(5,1,1,1,4,3,1,4,4)

(5,1,1,2,2,3,2,2,4)

(5,1,1,4,1,3,4,1,4)

(6,1,1,1,4,3,1,4,4)

(6,1,1,2,2,3,2,2,4)

(6,1,1,4,1,3,4,1,4)

(7,1,1,1,4,3,1,4,4)

(7,1,1,2,2,3,2,2,4)

(7,1,1,4,1,3,4,1,4)

(8,1,1,1,4,3,1,4,4)

(8,1,1,2,2,3,2,2,4)

(8,1,1,4,1,3,4,1,4)

(9,1,1,1,4,3,1,4,4)

(9,1,1,2,2,3,2,2,4)

(9,1,1,4,1,3,4,1,4)

(10,1,1,1,4,3,1,4,4)

(10,1,1,2,2,3,2,2,4)

(10,1,1,4,1,3,4,1,4)

(2,1,3,1,1,4,1,7,7)

(6,1,2,1,1,4,1,7,7)

(8,1,1,1,7,4,1,7,7)

(8,1,1,7,1,4,7,1,7)

(9,1,1,1,7,4,1,7,7)

(9,1,1,7,1,4,7,1,7)

(10,1,1,1,7,4,1,7,7)

(10,1,1,7,1,4,7,1,7)

(10,1,2,1,1,5,1,11,11)

(5,1,2,1,3,6,1,18,18)

(5,1,2,3,1,6,3,6,18)

(7,1,1,3,6,6,3,6,18)

(7,1,1,6,3,6,6,3,18)

(8,1,2,1,2,6,1,18,18)

(8,1,2,2,1,6,2,9,18)

(8,1,1,3,6,6,3,6,18)

(8,1,1,6,3,6,6,3,18)

(9,1,1,3,6,6,3,6,18)

(9,1,1,6,3,6,6,3,18)

(10,1,1,2,9,6,2,9,18)

(10,1,1,3,6,6,3,6,18)

(10,1,1,6,3,6,6,3,18)

(10,1,1,9,2,6,9,2,18)

(4,1,5,2,2,15,2,682,1364)

**Ek 3:** $L_n, n$. Lucas sayısı olmak üzere ilk 175 Lucas sayısı

$L_0 = 2$

$L_1 = 1$

$L_2 = 3$

$L_3 = 4$

$L_4 = 7$

$L_5 = 11$

$L_6 = 18$

$L_7 = 29$

$L_8 = 47$

$L_9 = 76$

$L_{10} = 123$

$L_{11} = 199$

$L_{12} = 322$

$L_{13} = 521$

$L_{14} = 843$

$L_{15} = 1364$

**Ek 3'ün devamı:**

$L_{16} = 2207$

$L_{17} = 3571$

$L_{18} = 5778$

$L_{19} = 9349$

$L_{20} = 15127$

$L_{21} = 24476$

$L_{22} = 39603$

$L_{23} = 64079$

$L_{24} = 103682$

$L_{25} = 167761$

$L_{26} = 271443$

$L_{27} = 439204$

$L_{28} = 710647$

$L_{29} = 1149851$

$L_{30} = 1860498$

$L_{31} = 3010349$

$L_{32} = 4870847$

$L_{33} = 7881196$

$L_{34} = 12752043$

$L_{35} = 20633239$

$L_{36} = 33385282$

$L_{37} = 54018521$

$L_{38} = 87403803$

$L_{39} = 141422324$

$L_{40} = 228826127$

$L_{41} = 370248451$

$L_{42} = 599074578$

$L_{43} = 969323029$

$L_{44} = 1568397607$

$L_{45} = 2537720636$

**Ek 3'ün devamı:**

$L_{46} = 4106118243$

$L_{47} = 6643838879$

$L_{48} = 10749957122$

$L_{49} = 17393796001$

$L_{50} = 28143753123$

$L_{51} = 45537549124$

$L_{52} = 73681302247$

$L_{53} = 119218851371$

$L_{54} = 192900153618$

$L_{55} = 312119004989$

$L_{56} = 505019158607$

$L_{57} = 817138163596$

$L_{58} = 1322157322203$

$L_{59} = 2139295485799$

$L_{60} = 3461452808002$

$L_{61} = 5600748293801$

$L_{62} = 9062201101803$

$L_{63} = 14662949395604$

$L_{64} = 23725150497407$

$L_{65} = 38388099893011$

$L_{66} = 62113250390418$

$L_{67} = 100501350283429$

$L_{68} = 162614600673847$

$L_{69} = 263115950957276$

$L_{70} = 425730551631123$

$L_{71} = 688846502588399$

$L_{72} = 1114577054219522$

$L_{73} = 1803423556807921$

$L_{74} = 2918000611027443$

$L_{75} = 4721424167835364$

**Ek 3'ün devamı:**

$L_{76} = 7639424778862807$

$L_{77} = 12360848946698171$

$L_{78} = 20000273725560978$

$L_{79} = 32361122672259149$

$L_{80} = 52361396397820127$

$L_{81} = 84722519070079276$

$L_{82} = 137083915467899403$

$L_{83} = 221806434537978679$

$L_{84} = 358890350005878082$

$L_{85} = 580696784543856761$

$L_{86} = 939587134549734843$

$L_{87} = 1520283919093591604$

$L_{88} = 2459871053643326447$

$L_{89} = 3980154972736918051$

$L_{90} = 6440026026380244498$

$L_{91} = 10420180999117162549$

$L_{92} = 16860207025497407047$

$L_{93} = 27280388024614569596$

$L_{94} = 44140595050111976643$

$L_{95} = 71420983074726546239$

$L_{96} = 115561578124838522882$

$L_{97} = 186982561199565069121$

$L_{98} = 302544139324403592003$

$L_{99} = 489526700523968661124$

$L_{100} = 792070839848372253127$

$L_{101} = 1281597540372340914251$

$L_{102} = 2073668380220713167378$

$L_{103} = 3355265920593054081629$

$L_{104} = 5428934300813767249007$

$L_{105} = 8784200221406821330636$

**Ek 3'ün devamı:**

$L_{106} = 1421313452220588579643$

$L_{107} = 2299733474362740991027\,9$

$L_{108} = 3721046926584799848992\,2$

$L_{109} = 6020780400947540840020\,1$

$L_{110} = 9741827327532340689012\,3$

$L_{111} = 15762607728479881529032\,4$

$L_{112} = 25504435056012222218044\,7$

$L_{113} = 41267042784492103747077\,1$

$L_{114} = 66771477840504325965121\,8$

$L_{115} = 108038520624996429712198\,9$

$L_{116} = 174809998465500755677320\,7$

$L_{117} = 282848519090497185389519\,6$

$L_{118} = 457658517555997941066840\,3$

$L_{119} = 740507036646495126456359\,9$

$L_{120} = 1198165554202493067523200\,2$

$L_{121} = 1938672590848988193979560\,1$

$L_{122} = 3136838145051481261502760\,3$

$L_{123} = 5075510735900469455482320\,4$

$L_{124} = 8212348880951950716985080\,7$

$L_{125} = 13287859616852420172467401\,1$

$L_{126} = 21500208497804370889452481\,8$

$L_{127} = 34788068114656791061919882\,9$

$L_{128} = 56288276612461161951372364\,7$

$L_{129} = 91076344727117953013292247\,6$

$L_{130} = 147364621339579114964664612\,3$

$L_{131} = 238440966066697067977956859\,9$

$L_{132} = 385805587406276182942621472\,2$

$L_{133} = 624246553472973250920578332\,1$

$L_{134} = 1010052140879249433863199804\,3$

$L_{135} = 1634298694352222684783778136\,4$

**Ek 3'ün devamı:**

$L_{136} = 26443508352314721186469779407$

$L_{137} = 42786495295836948034307560771$

$L_{138} = 69230003648151669220777340178$

$L_{139} = 112016498943988617255084900949$

$L_{140} = 181246502592140286475862241127$

$L_{141} = 293263001536128903730947142076$

$L_{142} = 474509504128269190206809383203$

$L_{143} = 767772505664398093937756525279$

$L_{144} = 1242282009792667284144565908482$

$L_{145} = 2010054515457065378082322433761$

$L_{146} = 3252336525249732662226888342243$

$L_{147} = 5262391040706798040309210776004$

$L_{148} = 8514727565956530702536099118247$

$L_{149} = 13777118606663328742845309894251$

$L_{150} = 22291846172619859445381409012498$

$L_{151} = 36068964779283188188226718906749$

$L_{152} = 58360810951903047633608127919247$

$L_{153} = 94429775731186235821834846825996$

$L_{154} = 152790586683089283455442974745243$

$L_{155} = 247220362414275519277277821571239$

$L_{156} = 400010949097364802732720796316482$

$L_{157} = 647231311511640322009998617887721$

$L_{158} = 1047242260609005124742719414204203$

$L_{159} = 1694473572120645446752718032091924$

$L_{160} = 2741715832729650571495437446296127$

$L_{161} = 4436189404850296018248155478388051$

$L_{162} = 7177905237579946589743592924684178$

$L_{163} = 11614094642430242607991748403072229$

$L_{164} = 18791999880010189197735341327756407$

$L_{165} = 30406094522440431805727089730828636$

**Ek 3'ün devamı:**

$L_{166} = 4919809440245062100346243105858504 3$
$L_{167} = 7960418892489105280918952078941367 9$
$L_{168} = 1288022833273416738126519518479987 22$
$L_{169} = 2084064722522327266218414726374124 01$
$L_{170} = 3372087555795744004344934244854111 23$
$L_{171} = 5456152278318071270563348971228235 24$
$L_{172} = 8828239834113815274908283216082346 47$
$L_{173} = 1428439211243188654547163218731058 171$
$L_{174} = 2311263194654570182037991540339292 818$

**Ek 4:** (4.33) denkleminin $(n, d_1, d_2, m_1, m_2, L_n)$ biçimindeki çözümleri

(5,1,1,1,1,11)
(6,1,8,1,1,18)
(7,2,9,1,1,29)
(8,4,7,1,1,47)
(9,7,6,1,1,76)
(11,1,9,1,2,199)
(12,3,2,1,2,322)

# ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** **:** Fatih ERDUVAN

## ÖĞRENİM DURUMU

| **Derece** | **Eğitim Birimi** | **Mezuniyet Yılı** |
|---|---|---|
| Doktora | Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik | Devam ediyor |
| Yüksek Tezli Lisans | Marmara Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Uygulamalı Matematik | 2011 |
| Yüksek Tezsiz Lisans | Sakarya Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü / Matematik Öğretmenliği Enstitü Anabilim Dalı | 2008 |
| Lisans | Sakarya Üniversitesi / Fen Edebiyat Fakültesi / Matematik Bölümü | 2007 |
| Lise | İzmit Lisesi | 2003 |

## İŞ DENEYİMİ

| **Yıl** | **Yer** | **Görev** |
|---|---|---|
| 2012-Halen | Milli Eğitim Bakanlığı | Matematik Öğrt. |
| 2008-2009 | Dersium Dershanesi | Matematik Öğrt. |

## YABANCI DİL

İngilizce

## ESERLER (makale, bildiri, proje vb.)

1. Erduvan, F., Keskin, R., Nonnegative integer solutions of the equation $F_n - F_m = 5^a$. Turkısh Journal of Mathematics, 43(3): 1115-1123, 2019.

2. Erduvan, F., Keskin, R., Fibonacci and Lucas numbers as products of two repdigits. Turkish Journal of Mathematics, 43(5): 2142-2153, 2019.

3. Şiar, Z., Erduvan, F., Keskin, R. Repdigits as products of two Pell or Pell-Lucas numbers. Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 88(2): 247-256, 2019.

4. Erduvan, F., Keskin, R., Fibonacci numbers which are products of two balancing numbers. Annales Mathematicae et Informaticae, 50: 57-70, 2019.

5. Erduvan, F., Keskin, R., Repdigits as products of two Fibonacci or Lucas numbers. Proceedings Mathematical Sciences, 130(1): Article No 28, 2020.

6. Erduvan, F., Keskin, R., Şiar, Z., Repdigits base b as products of two Lucas numbers. Quaestiones Mathematicae, Doi: 10.2989/16073606.2020.1787539, 2020.

7. Keskin, R., Erduvan, F., Şiar, Z., Repdigits base b as products of two Fibonacci numbers. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, (Yayına kabul edildi), Doi: 10.1007/s13226-021-00041-8, 2020.

8. Erduvan, F., Keskin, R., Balancing numbers which are concatenations of three repdigits. (Yayına sunuldu), 2020.

9. Erduvan, F., Keskin, R., Fibonacci numbers and Lucas numbers which are products of two Jacobsthal-Lucas numbers. (Yayına sunuldu), 2020.

10. Şiar, Z., Erduvan, F., Keskin, R., Repdigits base b as difference of two Fibonacci numbers. (Yayına sunuldu), 2020.

11. Erduvan, F., Keskin, R., Repdigits base b as difference of two Lucas numbers. (Yayına sunuldu), 2020.

12. Erduvan, F., Keskin, R., Şiar, Z., Repdigits base b as products of two Pell numbers or Pell-Lucas numbers. (Yayına sunuldu), 2020.

13. Erduvan, F., Keskin, R., Pell and Pell-Lucas numbers as products of two repdigits. (Yayına sunuldu), 2020.

14. Erduvan, F., Keskin, R., Repdigits as sums of four Balancing numbers. Mathematica Bohemica, 146(1): 55-68, 2021.

15. Erduvan, F., Keskin, R., Lucas numbers which are concatenations of three repdigits. Results in Mathematics, 76(1): Article No 13, 2021.

16. Şiar, Z., Keskin, R., Erduvan, F., Fibonacci or Lucas Numbers Which are Products of Two Repdigits in Base b. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, Doi: 10.1007/s00574-021-00243-y, 2021.

17. Erduvan, F., Keskin, R., Lucas numbers which are concatenations of two repdigits. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 27(1): Article No 20, 2021.

18. Erduvan, F., Keskin, R., Fibonacci numbers which are products of two Jacobsthal numbers. Tbilisi Mathematical Journal, 14(2): 105-116, 2021.

19. Erduvan, F., Keskin, R., Fibonacci numbers which are concatenations of three repdigits. Matematički Vesnik, (Yayına kabul edildi), 2021.

20. Erduvan, F., Keskin, R., Luca, F., Fibonacci and Lucas numbers as difference of two repdigits. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, (Yayına kabul edildi), Doi: 10.1007/s12215-021-00645-3, 2021.

**HOBİLER**

Bisiklet sürme, Doğa yürüyüşü, Kamp, Yüzme