

Radyal Yataklarda Yağ Filmi Titreşimleri

Prof. Dr. Aybars ÇAKIR (*)

As. A. Yüksel ÇAVUŞOĞLU (**)

1. GİRİŞ

Yağ titreşimi (whip) veya yağ film titreşimi (whirl) bir çok araştırmacı tarafından dikkatle incelenmiş önemli bir titreşim hadisesidir. İsmindende anlaşılabilir gibi, yataktaki yağ filminin hareketinden doğan ve mil merkezinin yatak merkezi etrafında dairesel hareketi veya whirl olarak karakterize edilir. Whirl frekansının üst sınırı dönme hızının yarısıdır. Bu frekans, sistemin tabii frekansına yakın olduğu zaman aşırı titreşimler hasıl olabilir. Yağ whip'i hakkında yapılmış olan ilk çalışmaların çoğu, ilk raporunu 1924'de yazmış olan B. L. Newkirk tarafından başarılmıştır. 1925'te Newkirk ve Taylor (1) literatüre ilave bir katkıda bulunmuşlardır. Robertson (2) bu problemi 1934'te araştırmıştır. Hagg (3) literatüre tamamlayıcı katkıyı 1946'da yapmıştır. Tabii ki, aynı konuda bir çok araştırmacılar da çalışmışlardır.

2. SEMBOLLER

- Ψ : İzafi yatak boşluğu
 ε : Muylu eksantrisitesi, cm
 b : Yatak boşluğu, cm
 Ω : Muylu açısız hızı, rad/san
 ω : $d\theta/dt = D\theta =$ Muylu merkezinin yatak merkezine nazaran açısız hızı, rad/san
 η : Akışkan viskozitesi kg san/cm²
 x, y : Yatak merkezinin kârtzyen koordinatları
 m : Mil efektif kütlesi kg san²/cm
 F : Mile tesir eden kuvvet, kg

(*) Prof. Dr. İ.T.Ü. Makina Fakültesi.

(**) Asistan Y. Müh. Sakarya D.M.M.A.

3. YAĞ VORTEKSİ

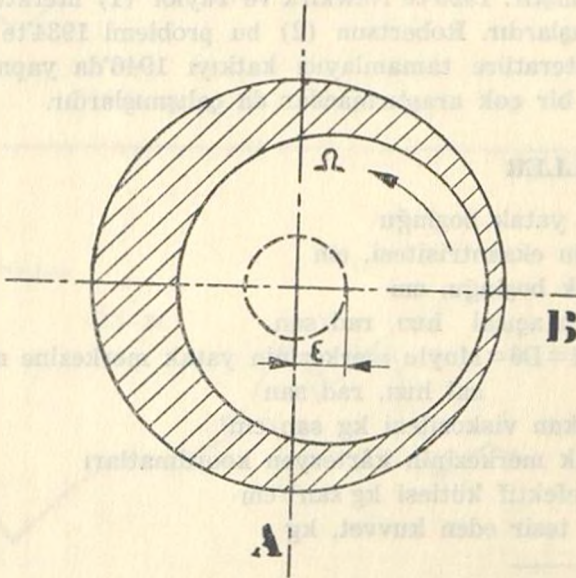
Bu hadise, rezonans film titreşimi (whirl), yağ film titreşimi (whirl), mil titreşimi (whip) veya yağ titreşimi (whip) olarak endüstride çeşitli şekillerde tasvir edilir. Teorik ve tecrübi bir çok araştırmaya konu olmuştur. Sebep ve neticeler hakkında fikir farklılıkları mevcuttur. Genel olarak yağ vorteksinin 3 basit şekli vardır.

1. Yarı hız vorteksi
 2. Rezonans vorteksi
 3. Geçici hal vorteksi
- 3.1. Yarı hız vorteksi

Mil merkezi mil dönme hızının yarısı veya yarı hızdan daha az bir hızla mil dönme yönünde bir dairesel yörünge çizer. Bu tipten titreşimler mil hızlarının geniş bir bölgesinde meydana gelir.

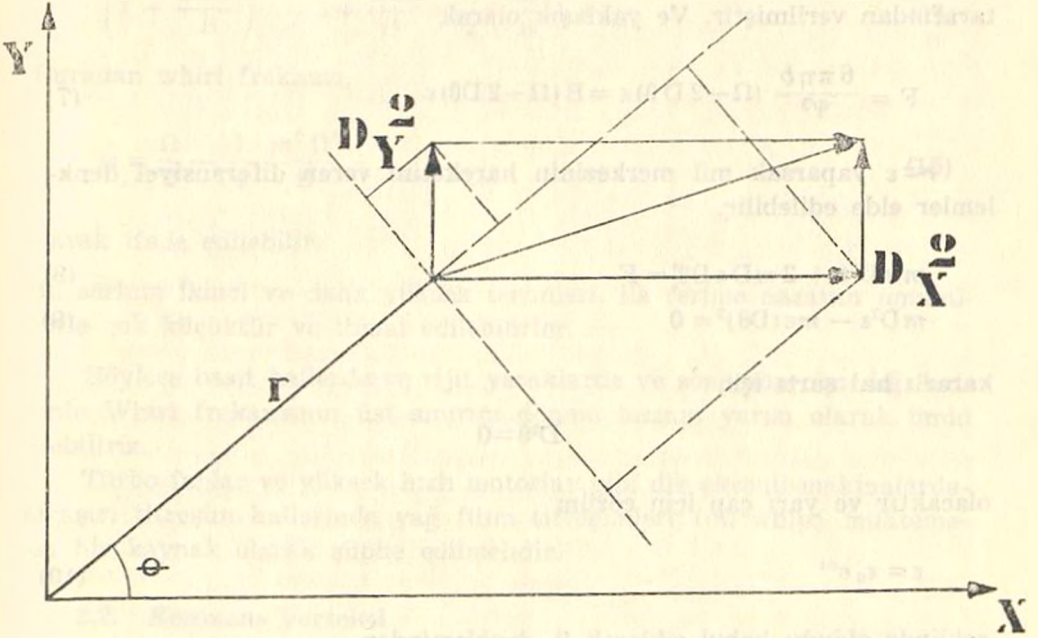
3.1.1. Yarı hız vorteksinin mekanizması

Bu hadisenin elemanter olarak incelenmesi için Şekil 1 de görülen radyal yatağı göz önüne alalım. Bu yatağın hafif olarak yüklü veya düşey olduğu göz önüne alınabilir. Böylece mile yatay doğrultuda dik olan



Şekil 1. Dik radyal yatak.

herhangi bir yük kuvveti ihmal edilmektedir. Eğer muylu şekilde görüldüğü gibi merkezden kaçıkça yağ çevreye, muylu tarafından pompalanacak ve A' dan B' ye kadar olan bölgede bir yüksek basınç bölgesi meydana getirecektir. Bu basınç veya kuvvet mili, yatak merkezi etrafında çok küçük (ε) yarı çaplı bir çember üzerinde hareket etmeye zorlayacaktır. Eğer sisteme enerji girişi, kayıpları geçerse bu (ε) whirl yarı çapı dikkate değer bir şiddette büyür ve ciddi bir titreşim problemi meydana getirir. En ciddi şart, dönme hızının esas kritik frekansının iki katı bölgesinde olduğu zaman meydana gelir. Bu şartlar altında whipping (Yağ film titreşimleri) çok şiddetli ve dönme hızı arttırılırsa dahi kendisini kritik frekansta muhafaza etmeye meyyal olacaktır.



Şekil 2. Mil merkezinin ivmesinin, polar koordinatlarda, lineer ivmelerden tayini.

Muhtemel whirl frekansını tayin için Hagg'ın analizi takip edilirse ve mil merkezinin polar koordinatlarda ivmesini elde etmek için Şekil 2 göz önüne alınırsa;

$$\text{Teğetsel ivme} = D_x^2 \sin \theta - D_y^2 \cos \theta \quad (1)$$

$$\text{Normal ivme} = -D_x^2 \cos \theta - D_y^2 \sin \theta \quad (2)$$

olduğundan

$$D_r^2 = D^2(r \cos \theta) = -2D\theta Dr \sin \theta - rD^2\theta \sin \theta + D^2r \cos \theta - r(D\theta)^2 \cos \theta \quad (3)$$

$$D_v^2 = D^2(r \sin \theta) = 2D\theta^i Dr \cos \theta + rD^i \theta \cos \theta + D^i r \sin \theta - r(D\theta)^2 \sin \theta \quad (4)$$

3 ve 4 nolu denklem 1 ve 2 nolu denklemlerde yerine konursa mil merkezinin normal ve teğetsel ivmeleri elde edilir.

$$\text{Teğetsel ivme} \quad rD^2\theta + 2D\theta Dr \quad (5)$$

$$\text{Normal ivme} \quad D^2r - r(D\theta)^2 \quad (6)$$

Yağ filminin hareketinden hasil olan teğetsel kuvvet Robertson (2) tarafından verilmiştir. Ve yaklaşık olarak

$$F = \frac{6\pi\eta b}{\psi^3} (\Omega - 2D\theta)\varepsilon = B(\Omega - 2D\theta)\varepsilon \quad (7)$$

$r = \varepsilon$ yaparsak mil merkezinin hareketini veren diferansiyel denklemler elde edilebilir.

$$m\varepsilon D^2\theta + 2mD\varepsilon D\theta^i = F \quad (8)$$

$$mD^2\varepsilon - m\varepsilon(D\theta)^2 = 0 \quad (9)$$

kararlı hal şartı için

$$D^2\theta = 0$$

olacaktır ve yarı çap için çözüm

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{\alpha t} \quad (10)$$

şeklinde olduğu kabul edilerek 9. denklemden

$$\alpha = L\Omega = \omega \quad (11)$$

elde edilir. Bu denklem 8. de yerine konarak

$$\omega^2 + \frac{B\omega}{m} - \frac{B\Omega}{2m} = 0 \quad (12)$$

elde edilir. Buradan ω bulunur;

$$\omega = -\frac{B}{2m} \left(1 \pm \left(1 + \frac{2m\Omega}{B} \right)^{1/2} \right) \quad (13)$$

parantez içindeki pozitif işaret (10) denkleminde negatif üssü vereceğinden ve stabil bir çözüm olacağından ilgi dışındadır. Parantez içindeki negatif işaretin kullanılması (ϵ) için pozitif bir değer verir ve ϵ nun değeri denklem 10 da verildiği gibi zamanla artacağından çözümün instabil olduğunu belirtir.

Karekök işaretinin altındaki terim açılırsa

$$\left(1 + \frac{2m\Omega}{B} \right)^{1/2} = 1 + \frac{m\Omega}{B} - \frac{1}{2} \left(\frac{m\Omega}{B} \right)^2 + \dots \quad (14)$$

Buradan whirl frekansı,

$$\omega = \frac{\Omega}{2} - \frac{1}{4} \frac{m^2 \Omega^2}{B} + \dots \quad (15)$$

olarak ifade edilebilir.

Bu serinin ikinci ve daha yüksek terimleri, ilk terime nazaran umumiyetle çok küçüktür ve ihmal edilebilirler.

Böylece basit hallerde ve rijit yataklarda ve sönümün olmadığı hallerde Whirl frekansının üst sınırını dönme hızının yarısı olarak ümid edebiliriz.

Türbo fanlar ve yüksek hızlı motorlar gibi dik eksenli makinalardaki aşırı titreşim hallerinde yağ filim titreşimleri (oil whip) muhtemelen bir kaynak olarak şüphe edilmelidir.

3.2. Rezonans vorteksi

Muylu merkezi, muylu rotasyon yönünden, bir kapalı yörünge çizer, fakat iz kompleks bir karakter de olabilir. Bu tipten whirl umumiyetle milin ilk kritik whirl hızının iki katının üzerindeki hızlarda ve ilk kritik hıza eşit hemen hemen sabit dönme frekanslarında meydana gelir.

3.2.1. Rezonans vorteksinin mekanizması

Bu tipten vorteks yarı hız vorteksinde olduğu gibi yağ filmi kuvvetleri tarafından ikaz edilir. Fakat bu halde, milin rijitliği kontrol edici faktördür ve vorteksin frekansı milin yatağı içindeki ilk kritik vor-

teks hızına eşittir. Poritsky (4) mutad hidrodinamik kabulleri yaparak ve milin esnekliğini hesaba katarak teorik olarak ilk kritik vorteks hızı geçinceye kadar milin stabil olduğunu göstermiştir ve aynı zamanda vorteks frekansının kritik hıza yakın ve mil dönmesi yönünde olduğunu da göstermiştir. Bu bilgiler tecrübi olarak doğrulanmıştır.

3.3. Geçici Hal Vorteksi

Hafif olarak yüklenmiş bir yatak istirahat durumundan harekete geçtiği zaman mil merkezi, mil son denge pozisyonunu buluncaya kadar spiral bir yörüngeneye çizer. Eğer yatak hafif olarak yüklü ise ve diğer müsait şartlar mevcutsa, mil merkezi yarı hız vorteksinde olduğu gibi dairesel bir yörüngede vorteks hareketine devam edebilir. Bununla beraber umumiyetle vorteks spirali hızla dönüp gider. Geçici hal vorteksi her ne kadar radyal yataklarda muhtemelen mevcut isede umumiyetle habersiz olarak geçilir.

4. ÇALIŞMA ŞARTLARININ VE YATAK KONSTRÜKSİYONUNUN YAĞ VORTEKSİ ÜZERİNE TESİRİ

Yağ filim vorteksini izah eden teoriler değişkenlerdeki aynı değişimler için aynı neticeleri vermemektedirler ve tecrübelerde bir çok neticesiz haller vermektedir. Bu muhtemelen bir tecrübi araştırmada yatak değişkenlerinden herhangi birini, diğerlerinden herhangi birine tesir etmeden, değiştirmenin güçlüğüne atfedilebilir. Bununla beraber çalışma şartları ve konstrüksiyonun tesirleri olarak belirli bir uygunluk derecesi mevcuttur. Değişkenlerdeki değişmelerin tesirleri kısaca gözden geçirilirse;

1 — Yük : Yarı hız vorteksi ve Rezonans vorteksinin her ikisi de daha ziyade hafif yüklü yataklarda meydana gelmesi bu gibi yatakların sadece küçük bir eksantrisite ve mil merkezine dairesel bir yörüngede harekete zorlayan yağ kuvveti bileşeninin tesirini artıran 90 dereceye yaklaşan konum açılarında çalışmalarını sebebiyledir. Bu muhakeme vorteksinin dik mili hiç bir sabit radyal yüke maruz olmayan yataklarda daha aşırı olduğu gerçeği ile teyit edilmiştir. Belirli endüstriyel türbin ve jeneratörlerde kritik vorteks hadisesi, harekete başlama esnasında bir harici sabit yükün kasten tatbik edilmesiyle önlenir.

2 — Dönme Hızı : Eğer kontrükte edilen yatak milinin hızı düşük ve mil rijitliği büyükse maksimum çalışma hızı ilk kritik vorteks hızının iki katından aşağıda olacaktır. Böylece rezonans vorteksi ortaya çıkmaz. Bununla beraber yarı hız vorteksi herhangi bir hızda meydana gelebilir.

Diğer taraftan eğer mil nisbeten az düşük rijitlikte ve çalışma hızı yükselirse rezonans vorteksi ilk kritik vorteks hızının üstündeki hızlarda meydana gelebilir.

3 — Yağ Vizkozitesi : İlk bakışta vizkozitedeki bir artışın yarı hız vorteksini söndürme tesirine sahip olacağını veya en azından daha vizkoz yağ filmi tarafından artırılmış olan pozitif sönüm sebebiyle amplitüdünün küçültüleceğini ümit etmek mantıklı olacaktır. Diğer taraftan vizkozitedeki bir azalma ile muhtemelen milin yeni konumundaki artırılmış eksantrisitesi ve azaltılmış konum açısı sebebiyle, belirli yataklarda vorteksin başlaması geciktirilmiş olarak bulunmuştur.

4 — Yağ besleme basıncı : Yatağın yüksüz tarafına yağı, basınç altında göndererek ve böylece muyluyu bir doğrultu üzerinde zorlayarak vorteksi bastırmak mümkündür.

5 — Yatak Boşluğu : Boşluktaki bir artışın umumiyetle vorteksin vuku bulduğu başlangıç hızını yükselttiği bulunmuştur. Protikte bununla beraber eğer vorteks halâ mevcutsa daha büyük amplitüde sahip olacağından ve yüksek hızlı yataklarda boşluk aralığında akış türbülans şartlarını artıracığından bunu yapmak arzulanmaz.

6 — Aynı eksen de bulunmama : Az bir kaçıklık (eksenler arası bozukluk) stabilize edici bir tesire sahiptir. Bu muhtemelen eksenleri aynı hızda olmıyan bir yatağın, hatta yüksüz bir yatakta dahi dengelenmiş yağ basıncının teşkiline sebep olacak, yatağın ucundaki kama şeklinde boşluk bölgesine sahip olması sebebiyledir.

5 — Kontrüksiyonda dikkat edilecek hususlar

Yukarıdaki münakaşalardan düşük bir hızda ve yüksek bir sabit yük altında çalışan yataklardan bir vorteks hareketi beklenmeyeceği neticesi çıkarılabilir. Problem yüksek hızlı hafif yüklü yatakların kontrüksiyonunda daha zor hale gelir. Konstrüktörler için mevcut whisl'ü azaltma metodlarının bazıları aşağıda verilmiştir.

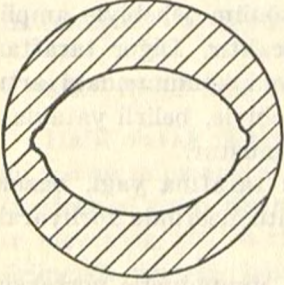
1 — Yatakta bir miktar sabit yükün mevcudiyetine müsaade edilmesi; eksantrisite yatak ünitesinin yükünü, daha küçük boyutlarda bir yatak kullanarak veya yatağın yüksüz tarafına yağı basınç altında göndermek suretiyle yük yükseltilerek artırılabilir.

2 — Küçük bir eksen kaçıklığı kasten meydana getirilir.

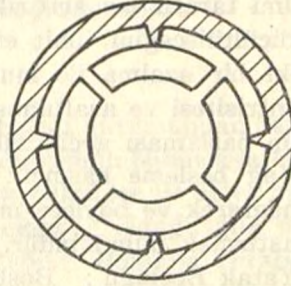
3 — Yağ akış şartlarındaki asimetri, dairesel olmıyan meselâ eliptik yataklarla Şekil 3 veya ayarlanabilen yastıklı yataklar kullanmak suretiyle meydana getirilebilir. Şekil 4.

4 — Yatak veya muylu yüzeyine ekstenel yivler (cep şeklinde yivler) açılır. Şekil 5. Bu vasıta ile konum açısındaki azalma sebebiyle hızı, vorteksin görüldüğü hıza yükseltmek mümkündür.

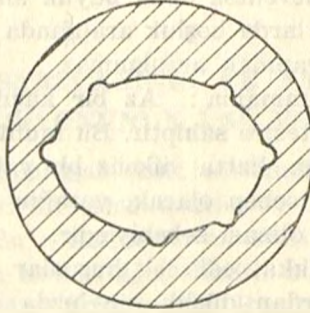
Bu özel şekilli yatakların yüksek imalat maliyetleri sebebiyle Vorteks'in normal yatak parametrelerinin değiştirilmesiyle önlenmesine teşebbüs daima tavsiye edilir. Özel kontrüksiyonlardan sadece yastıklı yatak, Vorteks'ten tam korunmak için talep edilir.



Şekil 3. Eliptik Yatak



Şekil 4. Ayarlanabilen Yastıklı Yatak



Şekil 5. Eksenel Yivli Yatak

Yatakların, rotor ve mil sisteminin elastikiyetinin ve kütlelerin, sistem dinamiği üzerinde önemli tesirleri mevcuttur. Esnek yataklar ve esnek mil, sistemi bir serbestlik derecesinden, çok serbest dereceli sistemlere değiştirebilir.

REFERANSLAR

1. Newkirk, B. L., ve Taylor, H. D.: «Shaft whipping Due to oil Action in journal Bearings», Gen. Elec. Rev., August, 1925.
2. Robertson, D.: «Whirling of Shafts», The Engineer. Vol. 158, 1954.
3. Hagg, A. C.: «The Influence of oil-film journal Bearings on the Stability of Rotating Machines», J. Appl. Mechanics, 14(1) A77 - A78 (March, 1947).
4. Poritsky, H.: «Contribution to the Theory of oil whip», Trans, ASME, Vol. 75, 1953 PP. 1153-1161.

Termal Elasto-Hidrokinamik Yağlama

İsmail CÜRGÜL (*)

NOTASYONLAR

C_0	$N/m^2 \text{ } ^\circ C$	Yağlayıcı akışkanın özgül ısınma ısısı
h	m	Yağ tabakası kalınlığı
k	$N/h \text{ } ^\circ C$	Yağlayıcının ısı iletim katsayısı
p	N/m^2	Yağlayıcı basıncı
T	$^\circ C$	Yağlayıcı sıcaklığı
T_1, T_2	$^\circ C$	Yüzey sıcaklıkları
t	sn	Temas süresi
u, v, w	m/sn	Koordinatlardaki akışkan hızları
U_1, U_2	m/sn	Yüzey hızları
x, y, z	m	Koordinatlar
α	m^2/N	Basıncı - viskozite katsayısı
β	$^\circ C$	Sıcaklık - viskozite katsayısı
γ	$^\circ C m^2/N$	Basıncı - sıcaklık katsayısı
μ	$N m^{-2} sn$	Yağlayıcı viskozitesi
μ_0	$N m^{-2} sn$	Yağlayıcı giriş viskozitesi
ρ	kg/m^3	Yağlayıcı yoğunluğu
ρ_0	kg/m^3	Yağlayıcı giriş yoğunluğu

(*) Doç. Y. Müh., Kocaeli D.M.M. Akademisi.

1. GİRİŞ

Elasto - hidrodinamik yağlama deyimi: birbirlerine göre yuvarlanma veya kayma hareketi yapan, genelde aşırı yüklenmiş nokta ve çizgi temaslı yüzeyler arasındaki yağlama hadisesinin tarifi olarak kullanılmıştır. Esas itibariyle yuvarlamalı yataklar ve dişli çarklardaki yağlama problemini içeren bu tarife aşırı yüklü kaymalı yataklardaki elasto - hidrodinamik yağlamanın da katılması ile elastik deformasyonların gözönüne alındığı hidrodinamik yağlama olarak genel bir tanım daha yapılabilir. Ancak burada yük taşıyıcı yüzeyler çok küçük, buna karşılık yüzey kalitesi oldukça yüksektir. Yüzeylerin elastik deformasyonu ise yağlayıcı hidrodinamik yağ tabakası kalınlığı kadardır veya bundan biraz büyüktür.

Ağır yükler altında kayma ve yuvarlanma hareketi yapan bu elemanlar güvenilirlik bakımından en zayıf mekanik bileşenler arasındadır. Bu elemanlar umumiyetle aşağıdaki bozulma hallerinden birisini gösterirler.

1 — Hızlı değişen gerilmeler altındaki yorulma sebebiyle pullanma (spalling) ve çukurcuk teşkili (pitting).

2 — Metal - metale temas sebebiyle çizilme ve kazıma.

3 — Temastaki aşırı lokal sıcaklık sebebiyle yağlayıcı ve yüzeylerin özelliklerini kaybetmesi.

Bu elemanların bozulmasında açık olarak basınç, sıcaklık ve yağ tabakası şekli kesin olarak önemli rol oynar. Yağlayıcının hidrodinamik tesirini, elastik sınırları ve yağlayıcıda ve katıdaki ısı geçişini göz önüne alarak bu değişkenlerin incelenmesine termal elasto - hidrodinamik yağlama adı verilir. Termal elasto - hidrodinamik yağlama problemini tam olarak aşağıdaki tesirler beraberce teşkil ederler.

1 — Hidrodinamik tesir, yağlayıcı viskoz akış kanunlarına tabidir.

2 — Elastik tesir, yüzeyler kendi elastik özelliklerine göre şekil değiştirebilirler.

3 — Termal tesir, sıcaklık değişmesi nedeniyle temas bölgesi içinden geçen akışkan viskozitesini önemli derecede değiştirmeye yeterli viskoz sürtünme ısısının meydana gelmesi halinde bir mana ifade eder.

4 — Değişken viskozite tesiri, sıcaklık ve basıncın viskoziteye olan tesirlerini içerir. Bu tesirler bilhassa aşırı yüklü durumlarda son derece önemlidir.

5 — Newton şartlarına uymayan ve reolojik tesirler adı verilen viskozite üzerindeki diğer tesirler.

6 — Değişken yoğunluk tesiri, yağlayıcı akışkanın yoğunluğu basınç etkisi ile değişir. Bu durum akışkanın sıkışabilirlik özelliğine bağlıdır.

Bu çalışmada amaç, aşırı olarak yüklenmiş evolvent profilli dişli çarkların yuvarlanma noktası teması esnasında izotermal elasto-hidrokinamik yağlamayı karakterize eden denklemlere [2] sıcaklık tesirlerini göz önüne alan enerji denklemi ve sıcaklık etkisinde viskozitedeki değişmelerin katılmasıyla oluşan termal elasto-hidrokinamik yağlama probleminin matematik modelinin ortaya konulması olacaktır.

2. ENERJİ DENKLEMİ

2.1. Genel Enerji Denklemi :

Akış bölgesi içinde Σ kapalı yüzeyi ile çevrili uzayda sabit bir V_0 kontrol hacmi göz önüne alınır. Enerjinin korunumu ilkesine göre V_0 hacmindeki akışkan kütlelerine dışarıdan eklenen enerji ile Σ kontrol yüzeyinden çıkan enerji arasındaki fark, V_0 hacminde biriken enerji miktarına eşit olmalıdır [6]. Böylece bilinen $i, j=1, 2, 3$ ($u_i u_i = u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3$) toplama şekli kullanılarak enerjinin korunumu prensibini veren ifade

$$\int_{V_0} \frac{\partial Q}{\partial t} dV_0 + \int_{\Sigma} u_i (\tau_{ij} n_j) d\Sigma - \int_{\Sigma} E_t \rho u_i n_i d\Sigma + \int_{\Sigma} k \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i d\Sigma = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} E_t \rho dV_0 \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\partial Q/\partial t$ birim hacimdeki akışkana dışarıdan verilen ısıyı, E_t sistemin birim kütlelerinin toplam enerjisini göstermektedir. Bu değer

$$E_t = \frac{1}{2} u_i u_i + K + E \quad (2)$$

şeklinde dir. Denklemdaki E , V_0 hacmindeki birim kütle için iç enerjisini, K potansiyel enerjisi ve $1/2 u_i u_i$ birim kütle için kinetik enerjisini ifade etmektedir. Ayrıca (1) denklemindeki u_{ij} hızın bileşenlerini; τ_{ij} viskoz gerilmenin bileşenlerini; n_{ij} , Σ yüzeyinin dış normalinin bileşenlerini; k ısı iletim kabiliyeti katsayısını; ρ yoğunluğu ve T ise sıcaklığı göstermek-

tedir. Aynı denklemde soldaki ilk iki terim sırasıyla dışarıdan verilen ısı ile kontrol yüzeyindeki viskoz sürtünme ısısını; kalan iki terim ise konveksiyon ve kondüksiyon yoluyla iletilen ısıyı göstermektedir.

Gauss teoremi

$$\int_{\Sigma} A n_i d\Sigma = \int_{V_0} \frac{\partial A}{\partial x_i} dV_0$$

yardımı ile yüzey integrali halindeki ifadeyi hacim integrali haline getirir ve hacmin keyfi olması sebebiyle ifadeyi sifıra eşitleyerek gerekli basitleştirmeleri yaparsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho u_i \frac{D u_i}{D t} + \rho u_i \frac{\partial K}{\partial x_i} + \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \rho u_i \frac{D u_i}{D t} \\ - \rho u_i \frac{\partial K}{\partial x_i} - \rho \frac{D E}{D t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

olur. Burada K dış kuvvetler potansiyelini ifade etmektedir.

Hız gradyerinin y doğrultusundaki değişimi x doğrultusundaki değişimine nazaran çok büyük olduğundan (yağ tabakası kalınlığı çok küçük) viskoz gerilmenin x doğrultusundaki bileşenleri ihmal edilebilir. Ayrıca v ve w akış hızları da ihmal edilebilecek kadar küçük olduğundan (yan kaçak yok ve akış iki paralel levha arasında kabul ediliyor) viskoz gerilme değeri

$$\tau'_{ij} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

şeklini alır. Diğer taraftan viskoz sürtünmeler ile olan kayıp fonksiyonu da

$$\Phi = \tau'_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

terimi ile ifade edilebilir. Yukarıda sıralanan sebeplerden dolayı

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

olacağından bu kayıp fonksiyonu

$$\Phi = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

olur. Böylece genel enerji denklemi de

$$\rho \left[\frac{DE}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \Phi \quad (4)$$

şeklinde yazılabilir.

2.2. Enerji Denkleminin Dişli Çark Yağlamasına Tatbiki :

(4) denkleminde üç boyutlu akış hali için kondüksiyonla ısı iletimini ifade eden terimi dişli çarklar için düşünürsek, diş temas genişliği ve uzunluğu yağ tabakası kalınlığına nazaran çok büyük olduğundan, x ve z yönlerindeki kondüksiyonla ısı iletimi ihmal edilebilecek durumdadır. Bu nedenle yağ tabakasında kondüksiyonla ısı iletimi sadece y doğrultusunda alınabilir ve enerji denklemi de

$$\rho \left[\frac{DE}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \Phi \quad (5)$$

şeklini alır.

Diğer taraftan genel termodinamik bağıntılardan hatırlanacağı gibi entalpi

$$E_i = E + pV$$

ifadesi ile verilir [8]. Burada E iç enerjiyi; p basıncı ve $V=1/\rho$ olarak özgül hacmi ifade etmektedir. Termodinamiğin birinci kanununa göre entalpinin diğer bir yazılışı

$$dE_i = C_p dT + \left[v - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right] dp$$

ile $V=1/\rho$ ifadesi yukarıdaki entalpi ifadesinde yerine yazılırsa (diferansiyel olarak)

$$dE = C_p dT - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dp - p d(1/\rho)$$

ve

$$\rho \frac{DE}{Dt} = C_p \rho \frac{DT}{Dt} - \frac{1}{V} T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{DP}{Dt} - p \rho \frac{D(1/\rho)}{Dt}$$

ifadesinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{DE}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] &= \rho C_p \frac{DT}{Dt} - \frac{1}{V} T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{DP}{Dt} \\ &= \rho C_p \frac{DT}{Dt} - \epsilon T \frac{DP}{Dt} \end{aligned} \quad (a)$$

bağıntısı bulunmuş olur. Burada

$$\epsilon = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

termik genişleme katsayısıdır. (a) bağıntısının ikinci tarafındaki birinci terimi göz önüne alırsak; burada sıcaklığın zamana bağlı değişimi sıfır ($\partial T/\partial t=0$) olduğu ve z doğrultusundaki akışın ihmal edilmesiyle ($\omega=0$) bu ifade

$$\frac{DT}{Dt} = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}$$

şeklini alır. İkinci terimde ise basıncın zamanla değişimi sıfır ($\partial P/\partial t=0$), yapılan kabullere göre basıncın y doğrultusundaki değişimi çok küçük, dolayısıyla $\partial P/\partial y=0$ ve $\omega=0$ olacağından

$$\frac{DP}{Dt} = u \frac{\partial P}{\partial x}$$

yazılır. Bu DT/Dt ve DP/Dt ifadeleri (a) da yerine yazılırsa

$$\rho \left[\frac{DE}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} \right] = \rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \epsilon T u \frac{\partial P}{\partial x} \quad (b)$$

olur. Bu son eşitlik (5) denkleminin sol tarafına yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \Phi + \epsilon T u \frac{\partial P}{\partial x} \quad (c)$$

ifadesi bulunur. Yağlama hadisesine dışarıdan bir ısı verilmesi söz konusu olmadığından $\partial Q/\partial t=0$ olur. Viskoz sürtünme ısı terimi (kayıp fonksiyonu) ve termik genişleme katsayısı ifadeleri yukarıda yerine yazılırsa denklem

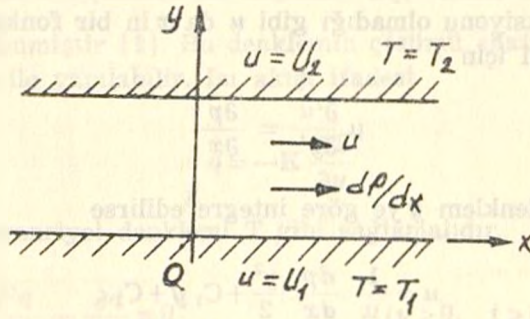
$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} T u \frac{\partial P}{\partial x} \quad (6)$$

olarak son şeklini almış olur. Denklemden soldaki ilk terim, akış kanalından yağlayıcı vasıtasıyla enerji taşınmasını (konveksiyon yoluyla ısı iletimi); ikinci terim yağ tabakası kesitinden kondüksiyon yoluyla ısı iletimini ifade eder. Sağ taraftaki ilk terim viskoz sürtünme, ikinci terim ise sıkıştırma sebebiyle ortaya çıkan ısıyı ifade etmektedir.

2.3. Akışkan Hız Gradyeninin Tayini :

İki boyutlu laminar akıştaki hız ifadesi basitleştirilmiş Navier-Stokes denklemi yardımı ile tayin edilebilir [6].

Paralel iki plaka arasında sabit viskoziteli sıkıştırılamayan bir akışkanın iki boyutlu laminar akış halini göz önüne alalım.



Şekil. 1

Laminar akıştan kasıt, akışkanın plakalara paralel tabakalar halinde hareket etmesidir. Bir hareket temin etmek için x doğrultusundaki (plaka boyunca) basınç farkları kesme kuvvetleri ile dengelenmelidir. Burada

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, t), & v &= 0, & \omega &= 0 \\ p &= p(x, y, t) \\ \partial(\quad)/\partial z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

yazılabilir. Burada u, v, w hızın koordinatlarını ve t zamanı ifade eder.

Süreklilik denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ile hareketin iki boyutlu olduğu hatırlanırsa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{ve böylece} \quad u = u(y, t) \quad (8)$$

olur. (7) ve (8) denklemleri akışkan hareketi denklemlerinde yerine konur ve X, Y, Z kütle kuvvetleri de ihmal edilirse

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \quad \text{veya} \quad p = p(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

bağıntıları bulunur. Son ifadeden kolaylıkla görülebilirki ileri sürülen problemde dP/dx sabit veya zamanın bir fonksiyonu olmalıdır. Çünkü p , y nin bir fonksiyonu olmadığı gibi u da x in bir fonksiyonu değildir. Düzgün akış hali için

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

yazılabilir. Bu denklem y ye göre integre edilirse

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \quad (10)$$

u hızının genel çözümü bulunmuş olur. Burada C_1 ve C_2 sınır şartları ile tayin edilecek keyfi sabitlerdir.

Problemimizdeki sınır şartları

$$y=0 \quad \text{iken} \quad u=U_1$$

$$y=h \quad \text{iken} \quad u=U_2$$

olduğuna göre

$$C_2 = U_1 \quad \text{ve} \quad C_1 = \frac{U_2 - U_1}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h$$

ifadeleri (10) da yerine yazılırsa

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) + \left(\frac{U_2 - U_1}{h} \right) y + U_1 \quad (11)$$

Bu ifadenin diferansiyeli

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (2y - h) + (U_2 - U_1) \frac{1}{h} \quad (12)$$

akışkan hız gradyenini verir.

2.4. Enerji Denklemi Sınır Şartları :

Bir yüzey boyunca u hızı ile hareket eden bir kaynaktan yüzeye ısı verildiğinde bu hadise bir lineer ısı akış problemi olarak göz önüne alınabilir. Sabit termal konduktivite için bu lineer ısı akış denklemi

$$\frac{K}{\rho C} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

şeklinde düzenlenmiştir [1]. Bu denklemin çözümü «hata fonksiyonu çözümü» metodu ile yapılabilir. Isı akışı ifadesi

$$q = -K \frac{\partial T}{\partial y}$$

yukarıdaki diferansiyel denklemi T gibi sağlamalıdır.

$$\frac{K}{\rho C} \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad (y > 0, t > 0)$$

Sabit ısı akışı (q_0) için bu son ifadenin çözümü ($y=0$ ve $t>0$ için)

$$q = q_0 \operatorname{erfc} \frac{y}{\sqrt{\frac{Kt}{\rho C}}}$$

olmaktadır. Burada hata fonksiyonu formülü kullanılırsa denklem

$$\begin{aligned} T &= \frac{q_0}{K} \int_y^\infty \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{\frac{Kt}{\rho C}}} dy \\ &= \frac{2q_0}{K} \left[\left(\frac{KT}{\pi\rho C} \right)^{1/2} \cdot e^{-y^2/4} \cdot \frac{Kt}{\rho C} - \frac{y}{2} \operatorname{erfc} \frac{y}{2(Kt/\rho C)^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

ve burada $y=0$ daki sıcaklık denklemi olarak

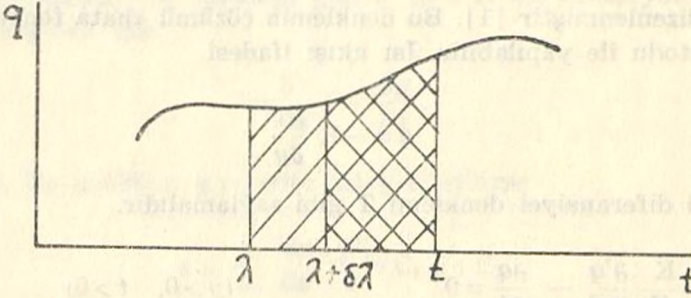
$$T = \frac{2q_0}{(\pi\rho CK)^{1/2}} \cdot t^{1/2} \quad (15)$$

ifadesi bulunur. Eğer yüzeyimiz sabit ısı akışı bölgesi boyunca bir U_s hızı ile hareket ederse denklem

$$T = \frac{2q_0}{(\pi K_s \rho_s C_s U_s)^{1/2}} t^{1/2} \quad (16)$$

şeklini alır. Buradaki (s) indisleri katıyı ifade etmektedir.

Şimdi hareket etmeyen yüzeye tatbik edilen ısı akışını zamanın bir fonksiyonu gibi göz önüne alalım, $q=q(t)$.



Şekil. 2

t zamanındaki δT sıcaklık artışı, $t=\lambda$ dan $t=\lambda+\delta\lambda$ periyodu süresince temin edilmiş ısı olarak düşünülebilir. Bu ise ,

$$\delta T = \frac{2q}{(\pi\rho_s K_s C_s)^{1/2}} [(t-\lambda)^{1/2} - (t-\lambda-\delta\lambda)^{1/2}]$$

ve bunun açılımından alınacak yeterli terim ile

$$\delta T = \frac{q}{(\pi\rho_s K_s C_s)^{1/2}} \cdot \frac{\delta\lambda}{(t-\lambda)^{1/2}}$$

şeklinde yazılmaktadır.

Toplam sıcaklık artışının $t=0$ dan $t=t$ aralığı boyunca temin edilen ısı ile üretildiği düşünülürse denklem

$$T = \frac{1}{(\pi\rho_1 K_1 C_1 U_1)^{1/2}} \cdot \int_0^t \frac{q d\lambda}{(t-\lambda)^{1/2}} \quad (17)$$

şeklini alır. Bir $q(\xi)$ ısı akış bölgesi için U hızı ile hareket eden bir yüzeyde $x=Ut$ ve $\lambda=\xi/U$ yazılırsa

$$T = \frac{1}{(\pi\rho_1 K_1 C_1 U_1)^{1/2}} \cdot \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{q d\xi}{(x-\xi)^{1/2}} \quad (18)$$

yazılabilir. Yağlanmış bir temastaki ısı akışı, yağ tabakası kesitinde

$$q = \left| K \frac{dT}{dy} \right|_{o,h}$$

şeklinde bir ifade ile verilmiştir. Bu durumda $\xi_1 = -\infty$ ve $\xi_2 = x$ aralığı için, alt yüzeydeki ($y=0$) sıcaklık

$$T(x,0) = \frac{1}{(\pi\rho_1 C_1 K_1 U_1)^{1/2}} \int_{-\infty}^x K \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1/2}} \quad (19)$$

ve üst yüzeydeki ($y=h$) sıcaklık

$$T(x,h) = \frac{1}{(\pi\rho_2 C_2 K_2 U_2)^{1/2}} \int_{-\infty}^x -K \frac{dT}{dy} \Big|_{y=h} \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1/2}} \quad (20)$$

denklemleri ile hesaplanabilir.

3. VİSKOZİTE - BASINÇ - SICAKLIK BAĞINTISI

Viskozitenin basınç ve sıcaklık etkisi altındaki değişimi

$$\mu = \mu_0 \exp(\alpha p + \beta/T - \beta/T_0 + \gamma p/T)$$

veya

$$\mu = \mu_0 \cdot e^{[\alpha p + \beta(1/T - 1/T_0) + \gamma p/T]}$$

şeklinde bir ifade ile verilmiştir [7].

4. SONUÇ

Dişli çarklar ve yuvarlanmalı yataklar çalışmalarındaki temas durumları itibariyle elasto-hidrodinamik yağlamaya dayanan makina elemanlarının en belli başlı olanlarıdır. Elasto-hidrodinamik yağlama probleminin çözümü, verilmiş bir çalışma şartları dizisi içinde aşağıdaki değişkenlerin tayininde yardımcı olur.

- 1 — Yağlayıcı tabaka içindeki basınç dağılımı
- 2 — Yağlayıcı tabaka kalınlığı
- 3 — Yağ tabakası ve sınır yüzeylerdeki sıcaklık artışı

Yağlayıcı tabakanın kalınlığı ve buradaki basınç dağılımı daha evvel tayin edilmiş ve nümerik çözümleri verilmişti [3]. Bu çalışmada elde edilen (19) ve (20) denklemlerinin çözümü ile yağlayıcı ve yüzeylerdeki sıcaklıkların tayini de mümkün olacaktır. Bu çözümü verecek uygun çözüm metodu ve program geliştirilmesi ileride ayrıca yapılacaktır. Ancak denklemlerin incelenmesinden de anlaşılacağı gibi sıcaklık yayılımının lineer olmayacağı açıktır. Buna karşılık yağlayıcı tabaka kalınlığı ve yağlayıcıdaki basınç profillerinin ısı etkisinde büyük bir değişme göstermediği birçok araştırmacı tarafından tesbit edilmiştir [4, 5].

R E F E R A N S L A R

1. CARSLAW, H. S., and JAEGER, J. C., Conduction of Heat in Solids, Oxford at the Clarendon Press, second edition, 1959.
2. CÜRGÜL, İ., Evovent Dişli Çarkların Elasto - Hidrokinamik Yağlanması, Yeterlik Tezi, Sakarya, 1976.
3. CÜRGÜL, İ., «Dişli Çark Yağlamasında Nümerik Çözüm Metodu», Sakarya D.M.M. Akademisi Dergisi, Sayı: MMA - 12, Mayıs 1982.
4. CHENG, H. S., «A Refined Solution to the Thermal Elasto - Hydrodynamic Lubrication of Rolling and Sliding Cylinders», ASLE Trans., Vol. 8, No. 4, p. 397 - 411, Oct. 1965.
5. CHENG, H. S., and STERNLICHT, B., «A Numerical Solution for the Pressure, Temperature and Film Thickness Between Two Infinitely Long, Lubricated Rolling and Sliding Cylinders, Under Heavy Loads», Presented at the ASME - ASLE International Lubrication Conference, Washington, D.C., Oct. 13 - 16, 1964.
6. PAI, SHIH-I, Viscous Flow Theory, I. Laminar Flow, D. Van Nostrand Co., Inc., 1956.
7. «Pressure - Viscosity Report», Research Publication, ASME, Vol. I and II, 1053.
8. REYNOLDS, W. C., Thermodynamics, McGraw - Hill, New York, 1968.