R_3 Uzayının Küre İzdüşümü Yardımı ile Gösterilmesi

Hilmi KAYTANCIOĞLU *)

ÖZET

Bu çalışmada; R_3 uzayının gösteriminde yeni bir metod kullanılmıştır (Nr. 1). Eğik S simetrisinde birbirine tekabül eden R_3 ün reel ve eşlenik imaginer nokta çiftleri π resim düzleminde ayni resim çemberleri ile gösterilmiştir (Nr. 2). R_3 ün reel ve eşlenik imaginer doğru çiftleri ile π nin E temel noktasından geçen konikleri arasında bire - bir bir tekabül kurulmuştur (Nr. 3).

1 — GİRİŞ

R_3 uzayının noktalarını π resim düzleminin çemberleriyle gösterme metotlarında *Siglografi* ve *Küre İzdüşümleri* özel bir rol oynarlar. R_3 ün noktaları Siglografide, bu noktalarla belirlenen C - Konileri yardımıyla gösterilir [1]. Küre izdüşümünde, her P noktası merkezi P olan ve diğer ikinci bir şartı gerçekleyen bir $\varkappa$ küresinin p^* izçemberiyle gösterilir. Bu zamana kadar yapılan çalışmalarda $\varkappa$ kürelerinin; yarıçaplarının eşit olması [2], sabit bir düzleme değmesi [3], sabit bir noktadan geçmesi [4], veya π resim düzlemine paralel bir doğruya değmesi [5] koşulları araştırılmıştır. Bu çalışmada, $\varkappa$ küreleri için *genel konumda sabit bir e doğrusuna değme* şartı koşularak yeni bir gösterme metodu incelenmiştir. e doğrusuna *temel doğru* ve e nin E iz noktasına *temel nokta* diyeceğiz.

2 — R_3 ÜN SONLU NOKTALARININ GÖSTERİMİ :

e den uzaklığı $\rho \neq 0$ olan R_3 ün sonlu reel her P noktası P nin $\varkappa$ (P, ρ) resim küresinin π deki p^* iz çemberi ile gösterilir. p^* çemberinin merkezi P nin P′ dik izdüşümüdür. P nin h yüksekliğinin ρ dan küçük veya büyük olmasına göre, p^* reel veya sıfırparçalıdır. $h = \rho$ durumunda

---

*) Doç. Dr. İ.T.Ü. Temel Bilimler Fakültesi, Uygulamalı ve Tasarı Geometri Kürsüsü.

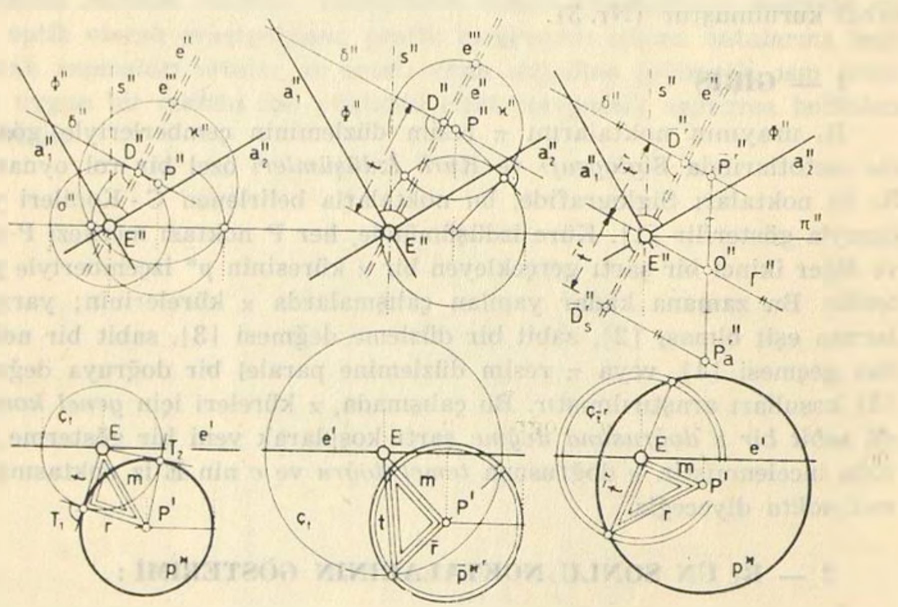
p^* bir sıfır çemberdir. $h<\rho$ halinde; E temel noktası p^* nin dışındadır. p^* nin E temel noktasından geçen teğetleri ve T_1, T_2 değme noktaları reeldir. $h>\rho$ durumunda T_1, T_2 eşlenik imaginerdir. E nin $\varkappa$ küresine olan teğet mesafesi e ile $\varkappa$ nın D ortak noktasıyla E noktası arasındaki uzaklıktır. σ (E, t) küresi $\varkappa$ küresini D noktasında dik keser. σ nun ç$_1$ (E, t) iz çemberi, $h>\rho$ durumunda p^* nin p^{*r} reel temsilci çemberini çapsal olarak keser. $h<\rho$ halinde; $m=\overline{EP'}$ doğru parçası, p^* nin r yarıçapı ve t arasında,

$$m^2=t^2+r^2 \tag{1}$$

bağıntısı ve $h>\rho$ durumunda,

$$m^2=t^2-\bar{r}^{\,2} \qquad (\bar{r}=i\cdot r \;\; p^{*r} \text{ yarıçapı}) \tag{2}$$

bağıntısı vardır (Şekil 1). Buna göre, *E temel noktasını içine almayan π nin reel her p'* çemberi, yine π nin sıfırparçalı her p^* çemberi R_3 ün



Şekil 1.

iki reel P, P_a noktasının resim çemberi olarak alınabilir, çünkü p^* den geçen ve e ye değen daima iki $\varkappa$, $\varkappa_a$ küresi vardır. P, P_a noktaları $\varkappa$, $\varkappa_a$ kürelerinin merkezleridir. $\varkappa$, $\varkappa_a$ nın e ye D, D_s değme noktalarının E den uzaklığı $\mp t$ dir. $\delta=D\perp e$, $\delta_s=D_s\perp e$ düzlemleri düşey $v=P'\perp\pi$ doğrusunu P ve P_3 da keserler. D, D_s noktaları E ye göre simetrik konumda olduklarından δ, δ_s düzlemleri $\Gamma = E \perp e$ düzlemine göre simetriktirler. Bu nedenle; P, P_3 noktaları *eğik S simetrisinde* birbirlerine tekabül ederler. Simetrinin çakışma düzlemi Γ ve simetri ışınları da düşey doğrultudaki doğrulardır. Bu nedenle; π nin E temel noktasını içine almayan reel çemberleri π nin bütün sıfırparçalı çemberleriyle birlikte R_3 *ün bütün reel sonlu noktalarının resim çemberlerini oluştururlar.*

Bu da; E temel noktasına imaginer $t = i \cdot t$ teğet uzaklığı olan π nin reel *her p^* çemberinin E yi içine aldığını* gösterir, dolayısıyla *p^* çemberi eşlenik imaginer P, P_3* noktalarının resim çemberini gösterir. Her iki noktanın $\varkappa$, $\varkappa_3$ resim küreleri *imaginerdir,* çünkü bu küreler p^* reel çemberini içerirler ve reel e teğetine sahiptirler, fakat merkezleri eşlenik imaginerdir. $\varkappa$, $\varkappa_3$ kürelerinin e ye D, D_s eşlenik imaginer değme noktaları *eliptik bir I_e involusiyonunun* esas noktaları olarak gösterilebilir. İnvolusiyonun merkezi E temel noktasıdır. O halde; P, P_3 noktaları eliptik bir I involusiyonunun esas noktaları olarak elde edilir. Öyleyse; bu esas noktalar S simetrisinin nokta çiftidir. m, r ve $\bar{t}$ arasında,

$$m^2 = r^2 - \bar{t}^2 \tag{3}$$

bağıntısı vardır, yani p^* çemberi $ç_1$ (E, t) çemberinin reel temsilcisini çapsal olarak keser. $\rho = h$ durumunda; R_3 ün bütün noktaları π nin *sıfır çemberleriyle* gösterilirler. Bu durumdaki her P noktasının resim küresi π resim düzlemine P′ de değer. Bu noktaların geometrik yeri, *tepe noktası E olan ikinci dereceden bir ϕ konisidir,* ϕ konisi S simetrisine nazaran automorftur. $\Sigma = e \perp \pi$ düzlemi ϕ nin bir *simetri düzlemidir.* ϕ nin Σ da bulunan anadoğruları $\sphericalangle(e, \pi) = 2\theta$ açısının açıortayları olan birbirine dik iki a_1, a_2 doğrusudur. Bu simetri anadoğruları π ile θ ve $90° - \theta$ açılarını yaparlar. ϕ nin Σ da bulunan s_1, s_2 *simetri eksenleri* a_1, a_2 nin açıortaylarıdır ve π ile $45° \mp \theta$ açılarını yaparlar. ϕ nin yatay düzlemlerle kesitleri *elipslerdir.* Her kesit elipsi, bu elipsi taşıyan π_1 düzlemi ile yarıçapı π_1 in yüksekliğine eşit ve dönme ekseni e olan dönel silindirin arakesit eğrisiyle identiktir. Elipslerin merkezleri e üzerinde bulunurlar. Her elipsin bir odak noktası $s = E \perp \pi$ doğrusuna aittir. Bu nedenle; s, θ nin bir *odak eksenidir.* s, e doğruları s_1 ile $45° - \theta$ açısını oluştururlar ve bu nedenle s_1 eksenine göre simetrik durumda bulunurlar, yani e temel doğrusu koninin *ikinci odak eksenidir.* R_3 uzayı koni tarafından iki bölgeye ayrılır. Bu nedenle; gösterme metodumuzun *sınır yüzeyidir.* ϕ nin dış bölgesinde bulunan noktalar için $h < \rho$,

ϕ üzerinde bulunan noktalar için $h=\rho$ ve ϕ nin iç bölgesinde bulunan noktalar için de $h>\rho$ dur. E tepeli doğrular destesinin herhangi bir P noktasından geçen ışını d ile; $\overline{EP}$ doğru parçası p ile ve ortak hipotenüslü üçgenlerin $\sphericalangle$PEP′, $\sphericalangle$PED taban açıları α, β ile gösterilirse:

$$\operatorname{Sin}\alpha=h:p\,,\qquad \operatorname{Sin}\beta=\rho:p$$

yazılabilir ve buradan da,

$$\operatorname{Sin}\alpha:\operatorname{Sin}\beta=h:\rho$$

elde edilir. O halde; α, β açılarının sinüsfonksiyonları h, ρ doğruparçalarıyla orantılıdır. E(d...) deste ışınlarının ϕ nin dışında, üzerinde veya içinde bulunmalarına göre, sırasıyla $\alpha \gtreqless \beta$ dır.

Elde edilen sonucu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

Teorem 1: Sabit c doğrusuyla belirlenen küre izdüşümünde; simetri ışınları düşey olan bir S simetrisinde birbirine tekabül eden R_3 uzayının nokta çiftleri ve π nin çemberleri arasında bire-bir bir bağıntı vardır. S nin Γ çakışma düzlemi, c nin E iz noktasından c ye dik olarak geçer. ϕ sınır konisinin dış bölgesinde bulunan reel nokta çiftleri π nin E yi içine almayan reel çemberleriyle; ϕ nin iç bölgesinde bulunan reel nokta çiftleri, π nin sıfırparçalı çemberleriyle; eşlenik imaginer nokta çiftleri, E yi içine alan π nin reel çemberleriyle gösterilir.

Gösterme metodumuzda; ϕ *nin noktaları* yanında Γ *nın noktaları* ve e *nin noktalarının resim çemberleri* özel rol oynarlar. ϕ nin her noktası, sözkonusu edildiği gibi, *bir sıfır çemberiyle gösterilir.* Γ nın her noktasının *resim çemberi E den geçer.* e nin her noktasının resim çemberinin reel temsilcisi, noktanın distans çemberinden oluşan bir *sıfırparçalı* çemberdir.

3 — DOĞRULARIN GÖSTERİLMESİ

R_3 uzayının reel her g doğrusu g(P...) nokta dizisi olarak gözönüne alınır ve g(P...) dizisinin her P noktası π de p^* resim çemberiyle gösterilir. Böylece, R_3 uzayının reel her g doğrusunun π deki resmi elde edilir. g nin bütün P noktalarının $\varkappa$ resim küreleri, zarf yüzeyi *bir par-*

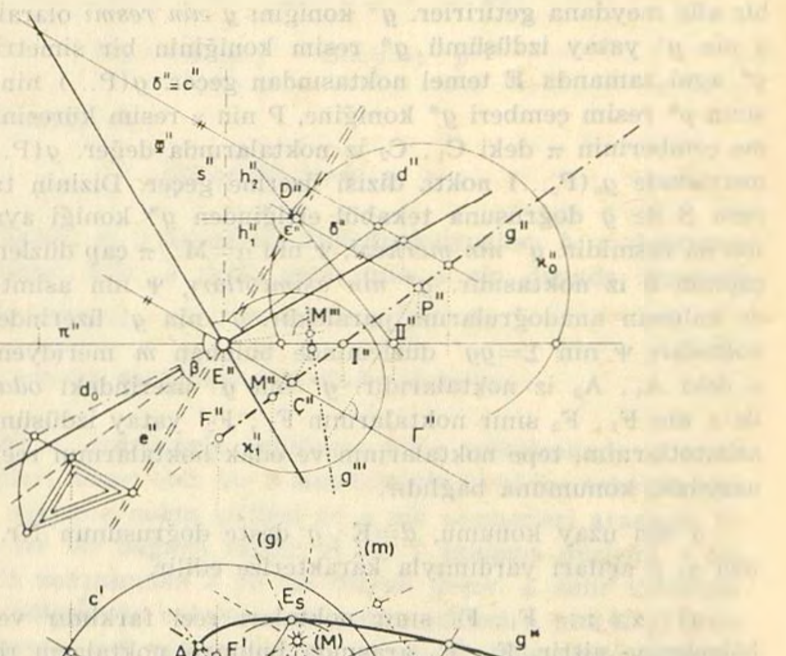
çalı Ψ *dönel hiperboloidi* olan, bir parametreli bir aile teşkil ederler. ϕ nin ekseni g, bir anadoğrusu e ve orta noktası g ile e nin orta dikmesinin g üzerindeki M dikme ayağıdır. $g(P...)$ nin P noktalarının p^* resim çemberleri, zarf eğrisi Ψ nin π deki g^* iz koniği olan, bir parametreli bir aile meydana getirirler. g^* koniğini *g nin resmi* olarak göstereceğiz. g nin g' yatay izdüşümü g^* resim koniğinin bir simetri eksenidir ve g^* ayni zamanda E temel noktasından geçer. $g(P...)$ nin her P noktasının p^* resim çemberi g^* koniğine, P nin $\varkappa$ resim küresinin Ψ ya c değme çemberinin π deki C_1, C_2 iz noktalarında değer. $g(P...)$ dizisi S simetrisinde $g_3(P_3...)$ nokta dizisi üzerine geçer. Dizinin taşıyıcı g_3 doğrusu S de g doğrusuna tekabül ettiğinden g^* koniği ayni zamanda g_3 nın da resmidir. *g^* nin merkezi,* Ψ nin $\mu=M/\pi$ çap düzleminin o eşlenik çapının 0 iz noktasıdır. *g^* nin asimtotları,* Ψ nin asimtot konisinin μ de bulunan anadoğrularına paraleldir. g^* nin g' üzerinde bulunan *tepe noktaları* Ψ nin $\Sigma=gg'$ düzleminde bulunan m meridyen hiperbolünün π deki A_1, A_2 iz noktalarıdır. g^* nin g' üzerindeki *odak noktaları,* g ile ϕ nin F_1, F_2 sınır noktalarının F_1', F_2' yatay izdüşümleridir. g^* nin asimtotlarının, tepe noktalarının ve odak noktalarının reel olması, g nin uzaydaki konumuna bağlıdır.

g nin uzay konumu, $d=E//g$ deste doğrusunun Nr. 2 de tanımlanan α, β açıları yardımıyla karakterize edilir.

a) $\alpha>\beta$: F_1, F_2 sınır noktaları reel farklıdır ve ϕ nin farklı bölgelerine aittir. F_1, F_2 arasında bulunan noktaların resim çemberleri reeldir. Bu çemberler g^* resim koniğine içten reel veya eşlenik imaginer nokta çiftlerinde değerler. g nin diğer noktaları sıfırparçalı çemberlerle gösterilirler. g^* resim koniği, *esas ekseni g' olan bir elipstir* (Şekil 4).

b) $\alpha=\beta$: g doğrusu ϕ nin bir anadoğrusuna paraleldir. F_1 sonlu bir nokta, F_2 sonsuzdaki bir noktadır. g doğrusuna ait ϕ nin dışında bulunan noktaların resim çemberleri reel; iç bölgesinde bulunan noktaların resim çemberleri sıfırparçalıdır. g^* resim koniği, *ekseni g' olan bir paraboldür* (Şekil 2).

c) $\alpha<\beta$: F_1, F_2 sınır noktaları *reel farklı, eşlenik imaginer veya çakışık* olabilirler. Birinci durumda F_1, F_2 noktaları ϕ nin ayni bölgesinde bulunur. g nin $\overline{F_1F_2}$ dışında bulunan noktalarının resim çemberleri reeldir ve g^* resim koniğine içten değerler. F_1F_2 nin arasında bulunan noktalar ise sıfırparçalı çemberlerle gösterilirler. g^* resim koniği, *esas ekseni g' olan bir hiperboldür* (Şekil 3). İkinci durumda, g nin bütün noktalarının resim çemberleri reeldir ve g^* hiperbolüne dıştan değerler. Bu durumda g^* resim koniği, *tali ekseni g' olan bir hiperboldür.* g^* nin $0 \perp g'$ esas ekseni üzerinde bulunan odak noktaları, eşlenik imaginer



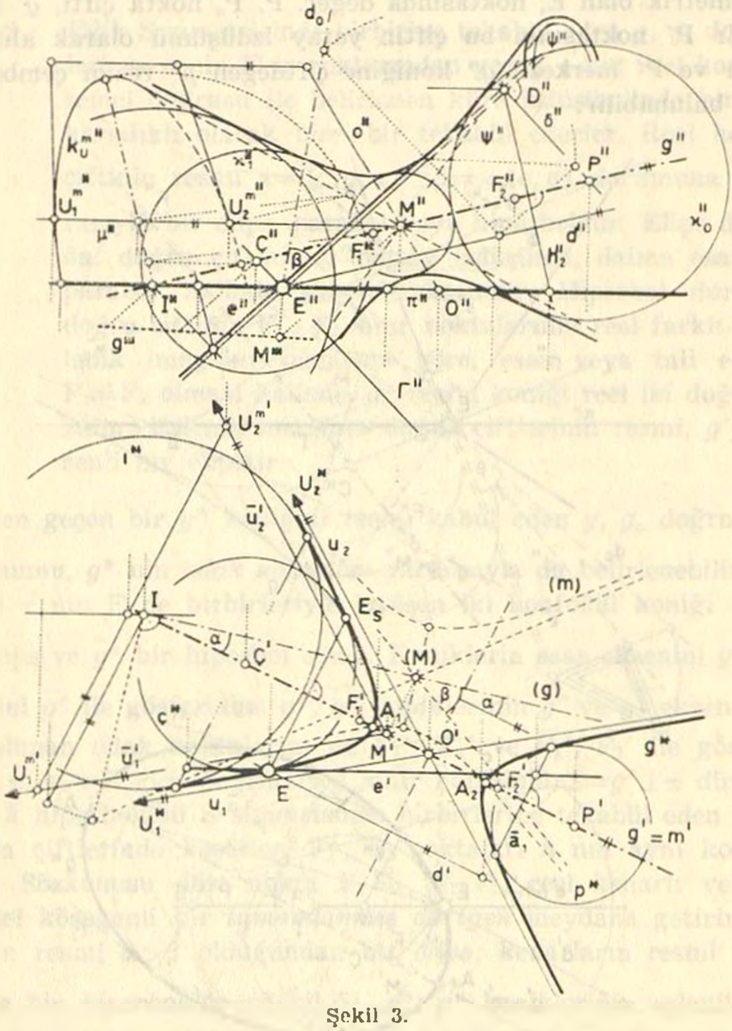
Şekil 2.

F_1', F_2' odak noktalarının reel temsilcileridirler. Üçüncü halde; g doğrusu *ϕ nin bir teğetidir.* g nin resmi, biri E den geçen *reel iki doğrudan* ibarettir.

Buradan şu sonuç elde edilir :

π nin E den geçen reel her g^* koniği, R_3 uzayının *reel bir g, g_a doğ-*

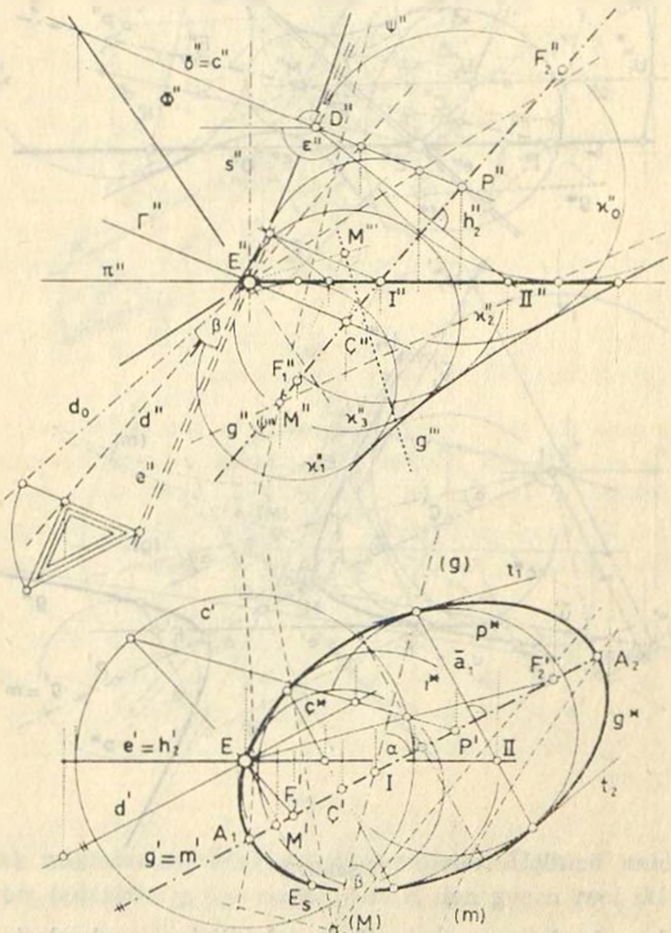
ru çiftinin resmi olarak alınabilir, g^* nin bir elips, hiperbol, parabol veya bir doğru çifti olması için gerek ve yeter şart, her defasında g, g_s doğru çiftinin yatay izdüşümünün g^* nin g' *esas ekseni olmasıdır*. Bu nedenle; π deki resmi E den geçen g^* *elipsi* olan ve g^* nin g' *tali eksenini* yatay izdüşümü kabul eden g, g_s doğru çifti *eşlenik imaginerdir.*



Şekil 3.

Buradan da hemen şunu ifade edebiliriz; merkezleri g' üzerinde bulunan ve g^* koniğine çiftdeğen ve *E temel noktasını içine alan* bütün p^* çemberleri, eşlenik imaginer nokta çiftlerinin resim çemberleridir.

Yukarıda sözü edilen herhangi bir g^* koniğini resmi kabul eden g, g_a doğru çiftinin uzay konumu, g^* resim koniğine çiftdeğen herhangi bir p^* çemberini resim çemberi olarak kabul eden P, P_a nokta çiftinin ve g, g_a doğrularının Γ da bulunan Ç ortak noktalarının gösterilmesiyle belirlenebilir. Ç nin resim çemberi g^* koniğine E de ve E ye g' ye nazaran simetrik olan E_s noktasında değer. P, P_a nokta çifti, g' nün herhangi bir P′ noktasının bu çiftin yatay izdüşümü olarak alınmasıyla belirlenir ve P′ merkezli g^* koniğine çiftdeğen p^* resim çemberi Nr. 2 ye göre bulunabilir.

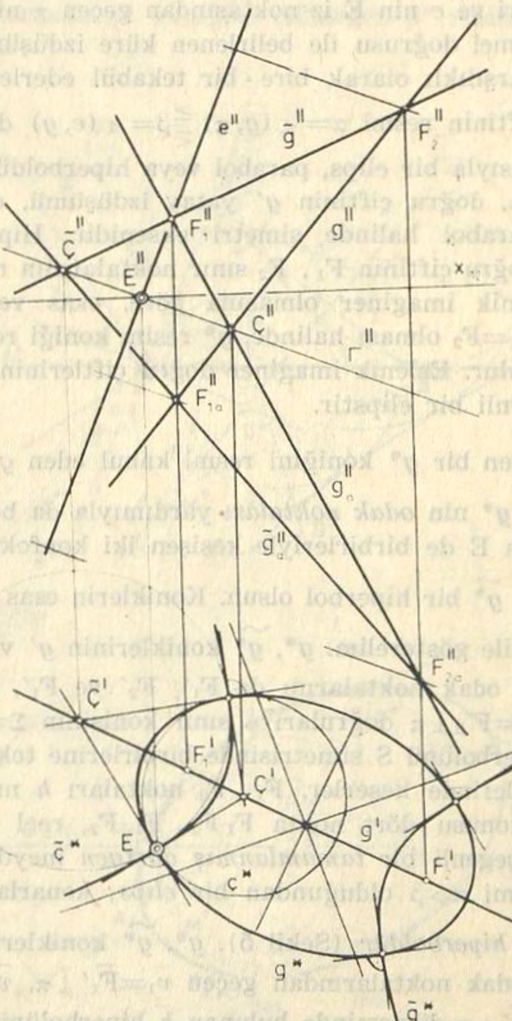


Şekil 4.

P' noktası g^* ile p^* nin değme kirişinin g' üzerinde bulunan C noktasına ve g^* nin A_1 tepe noktasındaki eğrilik çemberinin orta noktası, g^* nin A_1 tepe noktasına, merkezi g^* nin 0 orta noktası olan *benzerlikte* tekabül ederler. p^* resim çemberinin konstruksiyonunda bu bağıntı kullanılır. Buradan şu teoremi verebiliriz :

Teorem 2 : Eğik S simetrisinde birbirine tekabül eden g, g_a doğru çiftleri ve e nin E iz noktasından geçen π nin reel konikleri, e temel doğrusu ile belirlenen küre izdüşümünde birbirlerine karşılıklı olarak bire - bir tekabül ederler. Reel her doğru çiftinin resmi $\alpha = \sphericalangle(g, \pi) \gtreqless \beta = \sphericalangle(e, g)$ durumuna göre, sırasıyla bir elips, parabol veya hiperboldür. Elips durumunda, doğru çiftinin g' yatay izdüşümü, daima esas eksen; parabol halinde, simetri eksenidir. Hiperbol durumunda, doğru çiftinin F_1, F_2 sınır noktalarının reel farklı veya eşlenik imaginer olmasına göre, esas veya tali eksenidir. $F_1 = F_2$ olması halinde, g^* resim koniği reel iki doğruya bozulur. Eşlenik imaginer doğru çiftlerinin resmi, g' tali eksenli bir elipstir.

E den geçen bir g^* koniğini resmi kabul eden g, g_a doğru çiftinin uzay konumu, g^* nin *odak noktaları* yardımıyla da belirlenebilir. g^*, $\overset{\frown}{g}{}^*$ konikleri π nin E de birbirleriyle kesişen iki konfokal koniği olsunlar. g^* bir elips ve $\overset{\frown}{g}{}^*$ bir hiperbol olsun. Koniklerin esas eksenini g' ve tali eksenlerini $\bar{g}'$ ile gösterelim. g^*, $\overset{\frown}{g}{}^*$ koniklerinin g' ve $\bar{g}'$ eksenleri üzerinde bulunan odak noktalarını da F_1', F_2' ve $\bar{F}_1'$, $\bar{F}_2'$ ile gösterelim. $v_1 = F_1' \perp \pi$, $v_2 = F'_2 \perp \pi$ doğruları ϕ sınır konisinin $\Sigma = g' \perp \pi$ düzleminde bulunan h hiperbolünü S simetrisinde birbirlerine tekabül eden reel F_1, F_{2a} nokta çiftlerinde keserler. F_1, F_2 noktaları h nın ayni koluna ait olsunlar. Sözkonusu dört nokta $F_1 F_2$, $F_{1a} F_{2a}$ reel kenarlı ve $F_1 F_{2a}$, $F_{1a} F_2$ reel köşegenli bir *tamamlanmış dörtgen* meydana getirirler. Köşegenlerin resmi $\alpha > \beta$ olduğundan bir *elips;* kenarların resmi $\alpha < \beta$ olduğundan bir *hiperboldür* (Şekil 5). g^*, $\overset{\frown}{g}{}^*$ koniklerinin eşlenik imaginer $\bar{F}_1'$, $\bar{F}_2'$ odak noktalarından geçen $\bar{v}_1 = \bar{F}_1' \perp \pi$, $\bar{v}_2 = \bar{F}_2' \perp \pi$ doğruları, ϕ nin $\Sigma = \bar{g}' \perp \pi$ düzleminde bulunan $\bar{h}$ hiperbolünü iki eşlenik imaginer $\bar{F}_1$, $\bar{F}_{1a}$; $\bar{F}_2$, $\bar{F}_{2a}$ nokta çiftinde keserler. Bu nokta çiftleri S simetrisinde birbirlerine tekabül ederler. Bu noktalarla meydana getirilen tamamlanmış dörtgen imaginerdir. Dörtgenin $F_1 F_2$, $F_{1a} F_{2a}$ kenarları reel, köşegenleri eşlenik imaginerdir. Köşegenlerin resmi elips; kenarların resmi hiperboldür. Bu nedenle; resmi g^* elipsi olan imaginer $\bar{g}=F_1 F_{2a}$, $\bar{g}_a=F_{1a} F_2$ doğru çifti, reel koniklerin eşlenik imaginer kesit kirişlerinin teşkil ettiği tamamlanmış dörtgenin bilinen özelikleri yardımıyla gösterilebilir.



Şekil 5.

Sonuç olarak aşağıdaki teorem elde edilir :

Teorem 3 : Ortak noktalarından biri E olan π nin iki $\widehat{g^*\ g^*}$ konfokal orta nokta koniği, S simetrisinde birbirine tekabül eden dört doğru çiftinin resimleridir. Yatay izdüşümleri g^*, $\widehat{g^*}$ koniklerinin esas eksenleri olan iki çift reeldir. Yatay izdüşümleri g^*, $\widehat{g^*}$ nın tali eksenleri üzerinde bulunan iki çiftten biri reel diğeri eşlenik imaginerdir.

ϕ sınır konisinin yukarıda karakterize edilen teğetlerinden başka, *resimleri bazı özelikler gösteren* R_3 uzayının doğruları; π *resim düzlemine paralel* olan doğrular, $\Sigma(e,s)$ *doğrular alanına* ait doğrular, *e ye dik* ve *paralel* olan doğrular, *düşey* konumdaki doğrular, özellikle $s=E\perp\pi$ *doğrusu*, *E(d...) deste* doğruları ve $g_1=\pi\cap\Gamma$ *doğrusudur*. π resim düzlemine paralel olan doğruların resimleri, *asimtot açıları* β olan hiperbollerdir. $\Sigma(e,s)$ doğrular alanına ait her doğrunun resim koniğinin *esas tepe* noktalarından biri E temel noktasıdır. *e* ye dik (bu nedenle Γ ya paralel) doğrular, nokta çiftleriyle gösterilirler. Bu nokta çiftlerinin taşıyıcı doğruları $E(\pi)$ demetini meydana getirirler. Bu nokta çiftlerinden biri daima *E temel* noktasıdır. *e* ye paralel olan doğruların resimleri, ϕ nin tesviye konikleriyle *benzer olan* π *deki elipslerdir*. Düşey durumdaki doğrular *E ile* insident olan π nin çemberleriyle gösterilir. $s=E\perp\pi$ doğrusunun resmi *E sıfır çemberidir*. E(d...) deste doğruları, $E(\pi)$ *nin* belirli doğru çiftlerine transforme edilir. Bu doğru çiftleri E den geçen deste doğrusunun ϕ nin dışında, içinde ve üzerinde bulunmasına göre, sırasıyla reel farklı, eşlenik imaginer veya reel çakışıktır. *e* temel doğrusu, eşlenik imaginer doğru çiftiyle gösterilir. Bu doğru çiftinin reel mümessil çifti de, $\sphericalangle(e,\pi)\lesseqgtr 45°$ olmasına göre, reel farklı veya eşlenik imaginerdir. $g_1=\pi\cap\Gamma$ doğrusu *iki defa sayılan E temel* noktası ile gösterilir.

LİTERATÜR

[1] Müller, E. - Krames. J : Vorlesungen über Darstellende Geometrie. Bd. 2 Zyklographie. Leibzig und Wien, 1929.

[2] Aykan, F. : Siglografiye Analog Bir İzdüşüm Prensibi Hakkında. İstanbul, 1954.

[3] Akın, S. : Sur une transformation projective liee à la projection spheriqee. Bulletin of Tech. Univ. of Istanbul, 1965.

[4] Duman, K. N. : Sabit Noktalı Küre İzdüşüm Prensibi. Trabzon, 1972.

[5] Kaytancıoğlu, H. : Sabit Doğrulu Küre İzdüşüm Prensibi. İstanbul, 1974.

[6] Hohenberg, F. : Zur Geometrie im komplexen Gebiet. Bulletin of Tech. Univ. of Istanbul, 1977.

[7] Aykan, F. : Sphärographiesche Abbildung von Kegelschnitten und Lösung von Kegelschnittsaufgaben mittels dieser Abbildung. Bulletin of Tech. Univ. of Istanbul, 1961.