Dördüncü Mertebeden Runge-Kutta-Gill Metodunun Sınır Tabaka Benzerlik Denklemlerine Uygulanması

Asistan Y. Müh. Adil YÜKSELEN*)

1. GİRİŞ :

Daimi, iki boyutlu, laminer sınır tabaka denklemleri yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler olup genellikle analitik çözümlerini bulmak mümkün değildir. Bu tip problemleri incelemenin bir yolu da bazı hallerde özel dönüşümlerle değişken sayısını azaltarak adî diferansiyel denklemler elde etmek, daha sonra da, «benzerlik denklemi» olarak isimlendirilen bu adî diferansiyel denklemlerin çözümlerini aramak şeklindedir.

Bir adî diferansiyel denklemin çözümünü doğrudan Taylor açılımı ile yapmak, şayet açılımda yüksek mertebeden terimler alınmak isteniyorsa genellikle pratik olmaz. Zira çoğu halde yüksek mertebeden terimler gayet komplike olmakta, ilaveten her problemin çözümünde ayrı bir özel seriye ulaşılmaktadır. Bunun sonucu olarak basit ve kullanışlı algoritmalar elde etmek mümkün olamamaktadır.

Runge - Kutta metodları yüksek mertebeden Taylor açılımlarına eşdeğer hassaslıkta sonuçlar veren ancak bununla beraber sadece birinci mertebeden türevleri gerektiren, tek - adımlı çözüm metodlarıdır. En çok kullanılan Runge - Kutta metodları da ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden olanlarıdır. Burada söz konusu olan mertebeler metodun Taylor açılımındaki hangi mertebeden hassaslığa tekabül ettiğini belirtmektedir. Biz burada Runge - Kutta metodlarının en gelişmişi ve adî diferansiyel denklem çözümlerinde en çok kullanılanı olan dördüncü mertebeden metodun Gill tarafından değiştirilmiş şekli ile ilgileneceğiz.

*) I.T.Ü. Makina Fakültesi, Uçak Elemanları ve Motorları Kürsüsü.

2. RUNGE - KUTTA METODU :

Dördüncü mertebeden Runge - Kutta metodunun çıkarılışı ana hatlarıyla şu şekilde izah edilebilir. [1]

Başlangıç şartı $y(x_0)=y_0$ olarak verilen $y'=f(x,y)$ şeklindeki, birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemin x_0 noktası yakınındaki çözümü Taylor açılımı vasıtasıyla

$$y(x_0+h)-y(x_0)=k=hf+\frac{h^2}{2!}Df+\frac{h^3}{3!}(D^2f+f_yDf)+$$

$$+\frac{h^4}{4!}(D^3f+f_y\,.\,D^2f+f_y{}^2Df+3\,Df\,Df_y)+0\,(h^5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada D ile gösterilen diferansiyel operatörü

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+f\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Denklemin çözümünü integral formda

$$y(x_0+h)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h}f[x,y(x)]\,dx$$

şeklinde de yazmak mümkündür. Bu son bağıntının sağ tarafı ortalama değer teoremi yardımıyla $x=x_0+\theta h$, $0<\theta<1$ için

$$\int_{x_0}^{x_0+h}f[x,y(x)]\,dx=hf[x_0+\theta h,\ y(x_0+\theta h)]$$

yazılabilir. Her iki ifadeden

$$y(x_0+h)-y(x_0)=hf[x_0+\theta h,\ y(x_0+\theta h)]$$

elde edilir. Taylor açılımındaki yüksek mertebeden terimlerden kaçınmak için son ifade yardımıyla şu tanımlar yapılır.

$$k_1=hf(x_0,\ y_0)$$

$$k_2=hf(x_0+\alpha h,\ y_0+\beta k_1)$$

$$k_3=hf(x_0+\alpha_1 h,\ y_0+\beta_1 k_1+\gamma_1 k_2)$$

$$k_4=hf(x_0+\alpha_2 h,\ y_0+\beta_2 k_1+\gamma_2 k_2+\delta k_3)$$

$$\bar{y}(x_0+h)-y_0=\bar{k}=\mu_1 k_1+\mu_2 k_2+\mu_3 k_3+\mu_4 k_4$$

Daha sonra k_1, k_2, k_3 ve k_4 için tanımlanan fonksiyonların Taylor açılımları yapılır. Bunların son ifade içinde toplanmasıyla elde edilen açılım daha önce doğrudan Taylor açılımıyla elde edilen ifadeyle özdeş olacaktır. Sonuçta her iki ifadenin aynı mertebeden terimlerinin katsayıları eşitlenmek suretiyle α, β, γ, δ ve μ katsayıları seçilir. |1|

3. BİRİNCİ DERECEDEN BİR ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN GILL METODUNUN UYGULANMASI :

Yukarıda da belirtildiği gibi, birinci mertebeden

$$\frac{df}{d\eta}=F[\eta, f(\eta)]$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem $\eta=\eta_0$ noktasında $f=f_0$ değeri ile verildiği takdirde, h yeterince küçük bir değer olmak üzere $\eta=\eta_0+h$ gibi bir noktada fonksiyonun ve türevlerinin değerlerini Runge - Kutta metoduyla bulmak, diferansiyel denkleme ait çözümü böylece sürdürmek mümkündür. Gill tarafından ortaya konan katsayılarla $\eta=\eta_0+h$ noktasındaki değerler şu şekilde hesaplanacaktır.

$$k_1=hF(\eta_0, f_0)$$

$$k_2=hF\left(\eta_0+\frac{h}{2}, \quad f_0+\frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3=hF\left[\eta_0+\frac{h}{2}, \quad f_0+\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_1+\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_2\right]$$

$$k_4=hF\left[\eta_0+h, \quad f_0+\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_2+\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_3\right]$$

$$\bar{k}=\frac{1}{6}\left[k_1+2\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_2+2\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_3+k_4\right]$$

$$f(\eta_0+h)=f(\eta_0)+\bar{k}$$

Görüldüğü gibi bu yazılış tarzında k_3 ve k_4 katsayıları kendilerinden önce gelen ikişer katsayıya bağlıdırlar. Bu nedenle programlamaya daha yatkın bir algoritma elde edebilmek için yeni değişkenler ilavesiyle bu ifadelerin aşağıdaki şekilde yazılması daha uygundur :

$$k_1 = h \cdot F(\eta_0, f_0) \qquad f_1 = f_0 + \left(\frac{1}{2}\right)(k_1 - 2q_0)$$

$$k_2 = h \cdot F(\eta_0 + h/2, f_1) \qquad f_2 = f_1 + \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(k_2 - q_1)$$

$$k_3 = h \cdot F(\eta_0 + h/2, f_2) \qquad f_3 = f_2 + \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(k_3 - q_2)$$

$$k_4 = h \cdot F(\eta_0 + h, f_3) \qquad f_4 = f_3 + \left(\frac{1}{6}\right)(k_4 - 2q_3)$$

$$q_1 = q_0 + 3\left(\frac{1}{2}\right)(k_1 - 2q_0) - \left(\frac{1}{2}\right)k_1$$

$$q_2 = q_1 + 3\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(k_2 - q_1) - \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_2$$

$$q_3 = q_2 + 3\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(k_3 - q_2) - \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)k_3$$

$$q_4 = q_3 + 3\left(\frac{1}{6}\right)(k_4 - 2q_3) - \left(\frac{1}{2}\right)k_4$$

Bu ifadelerde görülen q_0, hesaplarda yapılacak yuvarlatma hatalarını kısmen de olsa giderebilmek amacıyla ilave edilmiş olup başlangıçta, yani $\eta = \eta_0$ daki değeri sıfırdır. Bundan sonraki her adım sonunda q_4'ün kalan değeri bir sonraki adım için q_0 olarak alınmak üzere saklanacaktır. Teorik olarak yuvarlatma hatasının sıfır olması halinde her adım sonunda q_4 için elde edilen değerin sıfır olacağını söylemek de mümkündür.

En son bulunan ifadeler kolayca

$$\left.\begin{aligned} k_j &\leftarrow hF(\eta_0 + \alpha_j h,\ f_{j-1}) \\ f_j &\leftarrow f_{j-1} + A_j(k_j - B_j q_{j-1}) \\ q_j &\leftarrow q_{j-1} + 3A_j(k_j - B_j q_{j-1}) - C_j k_j \end{aligned}\right\} \quad j = 1, 2, 3, 4$$

şeklinde basit bir algoritma ile ifade edilebilir ve görüldüğü gibi bu algoritmanın programlanması da çok kolaydır. Ancak, sabit noktalı sayılarla çalışılması halinde bu şekilde kullanılan algoritmanın, kayan noktalı sayılar halinde, yuvarlatma hatalarının daha da azaltılması için,

$$k_j = h \, . \, \bar{k}_j$$
$$q_j = h \, . \, \bar{q}_j$$

gibi bir dönüşümle, h adım uzunluğunun k_j için verilen ifadeden alınarak f_j için verilen ifadeye katılması suretiyle değiştirilerek

$$\left.\begin{array}{l} \bar{k}_j \leftarrow F(\eta_0, \alpha_j h, f_{j-1}) \\ f_j \leftarrow f_{j-1} + h \, . \, A_j(\bar{k}_j - B_j \bar{q}_{j-1}) \\ \bar{q}_j \leftarrow \bar{q}_{j-1} + 3 A_j (\bar{k}_j - B_j \bar{q}_{j-1}) - C_j \bar{k}_j \end{array}\right| \quad j = 1, 2, 3, 4$$

şeklinde yazılıp, kullanılması daha uygundur. Başlangıçta q_0 değeri sıfır olacağı için böyle bir dönüşüm yapma imkanı olduğu görülebilir.

4. METODUN ÜÇÜNCÜ DERECEDEN BİR ADİ DİFERANSİYEL DENKLEME UYGULANMASI :

Üçüncü dereceden bir adi diferansiyel denklemi

$$f''' + F(\eta, f, f', f'') = 0$$

şeklinde yazmak mümkündür. Bu denklem ;

$$f = y_1$$
$$f' = y_2$$
$$f'' = y_3$$

gibi yeni değişkenler ithal etmek suretiyle

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$y_3' = -F(\eta, f, f', f'')$$

şeklinde birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler takımı haline getirilebilir. Bu denklem takımının Gill metodu ile çözümü mümkündür. Esas denklem için

$$\eta = \eta_0 \quad \text{da} \quad f(\eta_0) = f_0$$
$$f'(\eta_0) = f_0'$$
$$f''(\eta_0) = f_0''$$

şeklinde olan sınır şartları bu yeni halde

$$\eta=\eta_0 \quad \text{da} \quad \begin{aligned} y_1(\eta_0)&=f_0 \\ y_2(\eta_0)&=f_0' \\ y_3(\eta_0)&=f_0'' \end{aligned}$$

şeklini alır.

Herhangi bir η noktasındaki değerler bilindiği takdirde $\eta+h$ noktasındaki değerleri hesaplayacak algoritma şu şekilde olacaktır.

$$\left.\begin{aligned} k_{1j} &\leftarrow y_{2,j-1} \\ k_{2j} &\leftarrow y_{3,j-1} \\ k_{3j} &\leftarrow -F(\eta, y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, y_{3,j-1}) \\ &\left.\begin{aligned} y_{ij} &\leftarrow y_{i,j-1}+ha_{j-1}(k_{ij}-b_{j-1}q_{i,j-1}) \\ q_{ij} &\leftarrow q_{i,j-1}+3a_{j-1}(k_{ij}-b_{j-1}q_{i,j-1})-C_{j-1}k_{ij} \end{aligned}\right\} i=1,2,3 \end{aligned}\right| \; j=2,3,4,5$$

Burada $j=2$ ve $j=4$ halinde $\eta=\eta+h/2$ alınacaktır. Yukarıdaki sabitlerin değerleri :

$$\begin{array}{lll} a_1=\dfrac{1}{2} & b_1=2 & c_1=\dfrac{1}{2} \\ a_2=1-\sqrt{\dfrac{1}{2}} & b_2=1 & c_2=1-\sqrt{\dfrac{1}{2}} \\ a_3=1+\sqrt{\dfrac{1}{2}} & b_3=1 & c_3=1+\sqrt{\dfrac{1}{2}} \\ a_4=\dfrac{1}{6} & b_4=2 & c_4=\dfrac{1}{2} \end{array}$$

şeklindedir.

NOT : FORTRAN dilinde sıfır indis bulunmadığından algoritmadaki indisleme ona göre ayarlanmıştır.

$\eta+h$ noktasındaki değerlerin bir adım sonrası için başlangıç şartı olarak hazırlanması da

$$\left.\begin{aligned} y_{i,1} &\leftarrow y_{i,5} \\ q_{i,1} &\leftarrow q_{i,5} \end{aligned}\right\} i=1,2,3$$

şeklindeki bir algoritma ile sağlanmaktadır.

5. ÜÇÜNCÜ DERECEDEN SINIR TABAKA BENZERLİK DENKLEMLERİ İÇİN UYGULAMA :

Metodun sınır tabaka benzerlik denklemlerine uygulanması halinde başlangıç şartları

$$\eta=0 \quad \text{da} \quad \begin{aligned} y_1(0)&=f_0=0 \\ y_2(0)&=f_0'=0 \\ y_3(0)&=f_0''=C_2 \end{aligned}$$

şeklini alır. Buradaki C_2 bir sonraki paragrafta izah edileceği gibi iterasyonla değiştirilecek bir değerdir.

$\eta=\eta_0$ daki başlangıç şartları bilinmek üzere üçüncü dereceden bir sınır tabaka benzerlik denklemini adım adım çözen ve her adımda elde edilen değerleri ana programa aktaran bir alt programa ait akım şeması TABLO I'de verilmiştir.

6. İTERASYON :

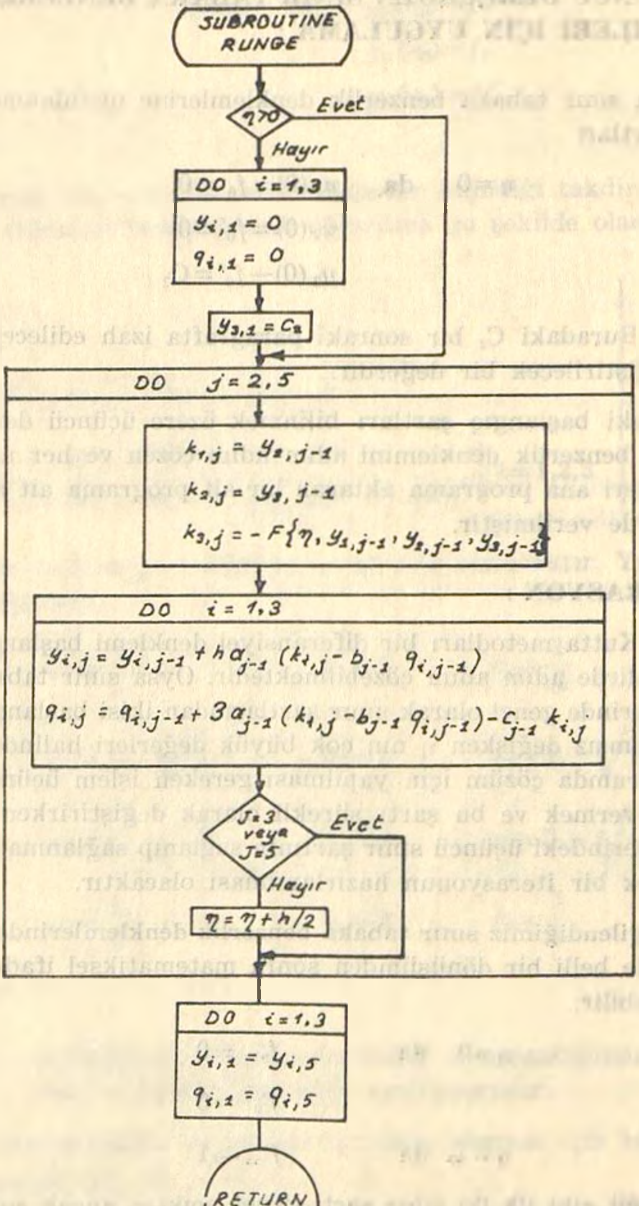
Runge - Kutta metodları bir diferansiyel denklemi başlangıç şartları bilindiği takdirde adım adım çözebilmektedir. Oysa sınır tabaka benzerlik denklemlerinde genel olarak sınır şartlarından ikisi başlangıçta, üçüncüsü ise bağımsız değişken η'nın çok büyük değerleri halinde verilmektedir. Bu durumda çözüm için yapılması gereken işlem üçüncü bir başlangıç şartı vermek ve bu şartı sürekli olarak değiştirirken η'nın çok büyük değerlerindeki üçüncü sınır şartının sağlanıp sağlanmadığını kontrol edebilecek bir iterasyonun hazırlanılması olacaktır.

Bizim ilgilendiğimiz sınır tabaka benzerlik denklemlerinde sınır şartları genellikle belli bir dönüşümden sonra matematiksel ifade olarak şu şekle getirilebilir.

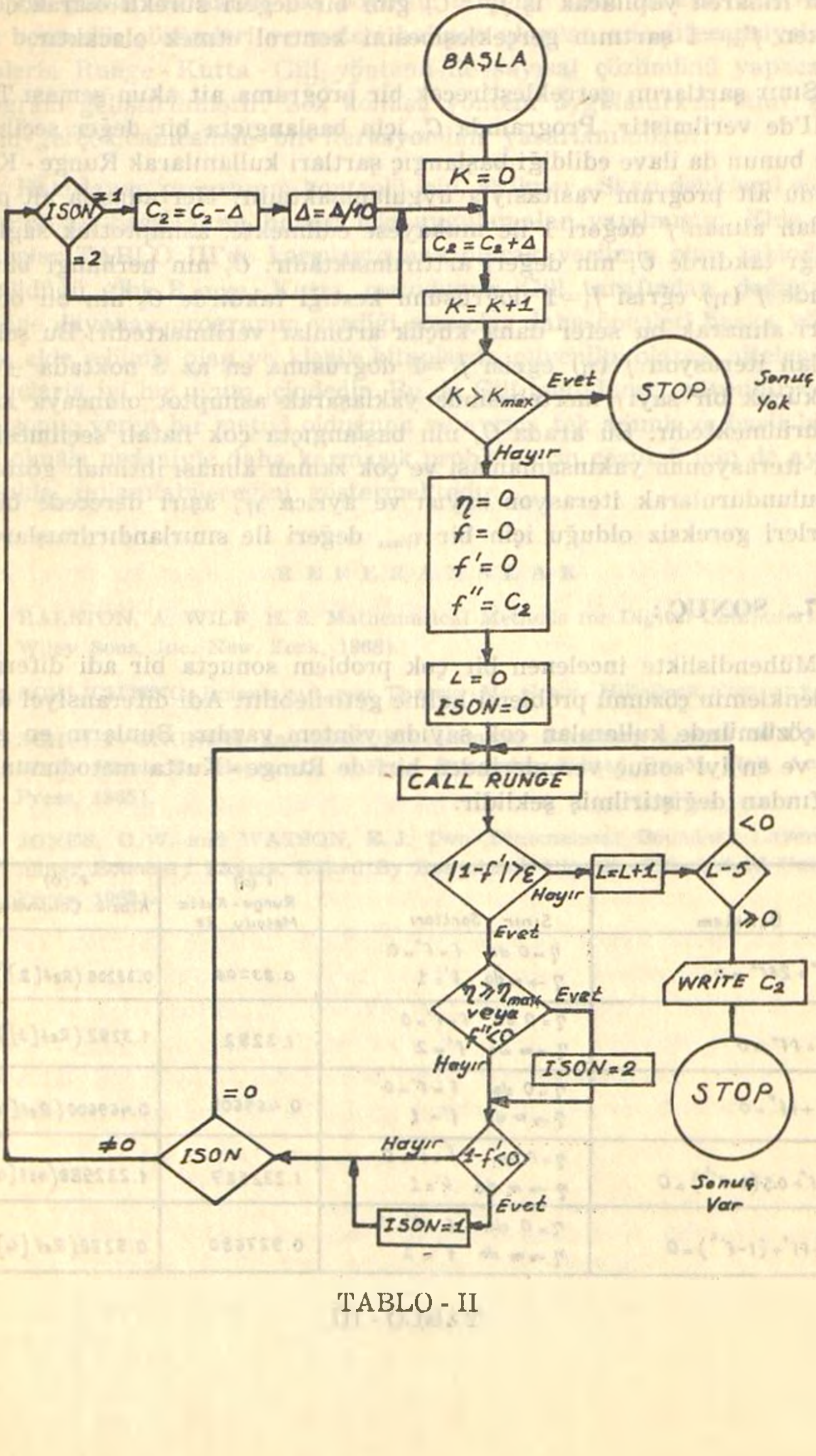
$$\eta=0 \quad \text{da} \quad \begin{aligned} f_0&=0 \\ f'_0&=0 \end{aligned}$$

$$\eta=\infty \quad \text{da} \quad f'_\infty \rightarrow 1$$

Görüldüğü gibi ilk iki sınır şartı gayet açıktır, ancak sonuncu sınır şartının η'nın hangi değerinde gerçekleşeceği kesinlikle belli değildir. Yani asimptotik bir sınır şartıdır. Öte yandan Runge - Kutta metodunun kullanılabilmesi için $\eta=0$ da f_0'' nün de bilinmesi gerekir. O halde bu nok-


SUBROUTINE RUNGE
η>0
Evet
Hayır
DO i=1,3
$y_{i,1} = 0$
$q_{i,1} = 0$
$y_{3,1} = C_3$
DO j = 2, 5
$k_{1,j} = y_{2,j-1}$
$k_{2,j} = y_{3,j-1}$
$k_{3,j} = -F\{\eta, y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, y_{3,j-1}\}$
DO i = 1,3
$y_{i,j} = y_{i,j-1} + h\alpha_{j-1}(k_{i,j} - b_{j-1} q_{i,j-1})$
$q_{i,j} = q_{i,j-1} + 3\alpha_{j-1}(k_{i,j} - b_{j-1} q_{i,j-1}) - C_{j-1} k_{i,j}$
J=3 veya J=5
Evet
Hayır
$\eta = \eta + h/2$
DO i=1,3
$y_{i,1} = y_{i,5}$
$q_{i,1} = q_{i,5}$
RETURN

TABLO - 1


BAŞLA
K=O
ISON
=1
=2
C2=C2-Δ
Δ=Δ/10
C2=C2+Δ
K=K+1
K>Kmax
Evet
STOP
Sonuç Yok
Hayır
η=O
f=O
f'=O
f''=C2
L=O
ISON=O
CALL RUNGE
|1-f'|>ε
Hayır
L=L+1
L-5
<0
≥0
WRITE C2
STOP
Sonuç Var
Evet
η≥ηmax veya f''<0
Evet
ISON=2
Hayır
1-f'<0
Hayır
Evet
ISON=1
ISON
=0
≠0

TABLO - II

tadan itibaren yapılacak iş $f_0'' = C_2$ gibi bir değeri sürekli olarak değiştirirken $f'_{\infty} = 1$ şartının gerçekleşmesini kontrol etmek olacaktır.

Sınır şartlarını gerçekleştirecek bir programa ait akım şeması TABLO II'de verilmiştir. Programda C_2 için başlangıçta bir değer seçilmekte ve bunun da ilave edildiği başlangıç şartları kullanılarak Runge - Kutta metodu alt program vasıtasıyla uygulanmaktadır. Her adımda alt programdan alınan f' değeri 1 ile mukayese edilmekte, asimptotluk sağlanamadığı takdirde C_2'nin değeri arttırılmaktadır. C_2'nin herhangi bir değerinde $f'(\eta)$ eğrisi $f_1 = 1$ doğrusunu kestiği takdirde C_2'nin bir önceki değeri alınarak bu sefer daha küçük artımlar verilmektedir. Bu şekilde yapılan iterasyon $f'(\eta)$ egrisi $f_1 = 1$ doğrusuna en az 5 noktada $\pm\varepsilon$ (ε çok küçük bir sayı) mertebesinde yaklaşarak asimptot oluncaya kadar sürdürülmektedir. Bu arada C_2'nin başlangıçta çok hatalı seçilmesi sonucu iterasyonun yakınsamaması ve çok zaman alması ihtimali gözönünde bulundurularak iterasyon sayısı ve ayrıca η, aşırı derecede büyük değerleri gereksiz olduğu için bir η_{max} değeri ile sınırlandırılmışlardır.

7. SONUÇ :

Mühendislikte incelenen bir çok problem sonuçta bir adi diferansiyel denklemin çözümü problemi haline getirilebilir. Adi diferansiyel denklem çözümünde kullanılan çok sayıda yöntem vardır. Bunların en güvenilir ve en iyi sonuç verenlerinden biri de Runge - Kutta metodunun Gill tarafından değiştirilmiş şeklidir.

Denklem	Sınır Şartları	$f''(0)$ Runge - Kutta Metodu İle	$f''(0)$ Klasik Çalışmalardan
$f''' + 2ff'' = 0$	$\eta = 0$ da $f = f' = 0$ $\eta \to \infty$ da $f' = 1$	0.33206	0.33205 (Ref[2])
$f''' + ff'' = 0$	$\eta = 0$ da $f = f' = 0$ $\eta \to \infty$ da $f' = 2$	1.3282	1.3282 (Ref[3])
$f''' + ff'' = 0$	$\eta = 0$ da $f = f' = 0$ $\eta \to \infty$ da $f' = 1$	0.469600	0.469600 (Ref[4])
$f''' + ff'' + 0.5(1 - f'^2) = 0$	$\eta = 0$ da $f = f' = 0$ $\eta \to \infty$ da $f' = 1$	1.232587	1.232588 (Ref[4])
$f''' + ff'' + (1 - f'^2) = 0$	$\eta = 0$ da $f = f' = 0$ $\eta \to \infty$ da $f' = 1$	0.927680	0.9278 (Ref [4])

TABLO - III

Bu çalışmada daimi, iki boyutlu, laminer sınır tabaka denklemlerinin benzerlik çözümleri vermeleri halinde ulaşılan adi diferansiyel denklemlerin Runge - Kutta - Gill yöntemi ile sayısal çözümünü yapacak bir program geliştirilmiştir. Söz konusu yöntem uygulanırken sınır şartlarının gerçeklenmesinde bir iterasyondan yararlanılmıştır.

Hazırlanan programın kontrolü için, Falkner - Skan denklemi ele alınmış, çeşitli basit akım halleri için uygulamalar yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar TABLO III'de karşılaştırmalı olarak verilmiş olup tablodan da görüldüğü gibi Runge - Kutta metodunun Gill tarafından değiştirilmiş şekline dayanan programın verdiği sonuçlar daha önceleri başka yöntemlerle elde edilmiş olan ve klasik kitaplarda güvenilir olarak nitelendirilen sonuçlarla iyi bir uyum içindedir. Bu da Gill metodunun güvenilir ve hassas sonuç veren bir metod olduğunu ve ayrıca tek adımlı ve basit bir metod olması nedeniyle daha karmaşık problemlerin çözümü için de aynı rahatlıkla kullanılabileceğini göstermektedir.

REFERANSLAR

(1) RALSTON, A. WILF, H. S. Mathematical Methods for Digital Computers (John Wiley Sons, Inc. New York, 1968).

(2) SCHLICHTING. Boundary Layer Theory (Mc Graw - Hill Book Company, 1968).

(3) SCHULT - GRUNOW and BREUER. Laminar Boundary Layers on Combered Walls (Basic Developments in Fluid Dynamics, Edited By M. Holt Academic Press, 1965).

(4) JONES, C. W. and WATSON, E. J. Two - Dimensional Boundary Layers (Laminar Boundary Layers, Edited By Rosenhead. PP 198 - 256, Oxford University Press, 1963).