Taşıma Gücü Hesabında Plastik Mafsal Yerinin Bulunmasına Ait Bir Metod

Mustafa KARADUMAN *

1 — GİRİŞ

Sistemlerin taşıma gücünün bulunabilmesi için plastik mafsalların yerlerinin bilinmesi gerekir. Sistemin ve yüklemenin durumuna göre plastik mafsalların yeri genellikle bulunabilir. Meselâ sadece tekil yüklerin tesir etmesi halinde plastik mafsalların yerleri belirlidir. Ancak yayılı ve tekil yüklerin birlikte tesir etmesi halinde plastik mafsal yeri tam olarak bilinemediği için taşıma gücünün kesin değeri de bulunamamaktadır. Bu durumda plastik mafsal yeri tahmin edilmek suretiyle ardışık yaklaşımla gerçek çözüme ulaşılmaya çalışılmaktadır.

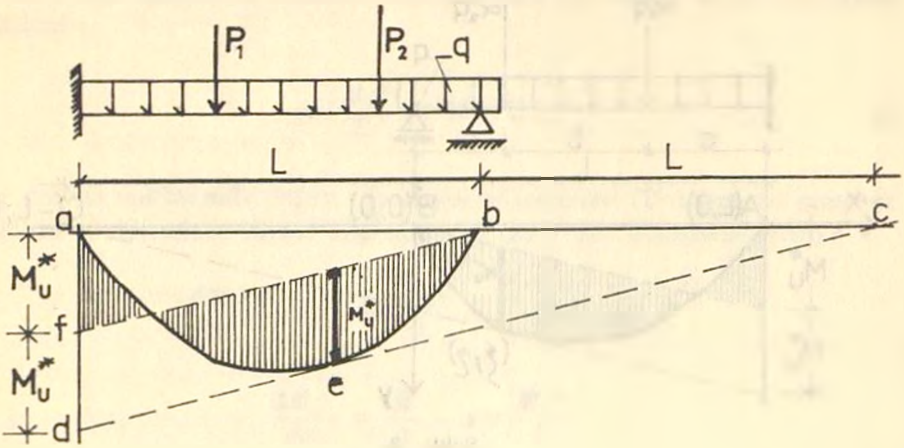
Bu çalışmada en genel yükleme halinde plastik mafsal yerinin bulunmasına ait bir metod geliştirilmiştir. Bu konuda daha önce Prof. Orhan ÜNSAÇ tarafından bir ucu kayıcı, bir ucu ankastre kiriş için verilmiş olan grafik metod mütemadi kiriş ve çerçevelere de uygulanacak hale getirilmiş; ayrıca metodun matematik ifadesi bulunarak çeşitli sistemlere tatbik edilmiştir.

2 — PLASTİK MAFSAL YERİNİN BULUNMASI

2.1. — GRAFİK METOD

Plastik mafsal yerinin bulunması ile ilgili bir misâl olmak üzere bir ucu ankastre bir ucu kayıcı mafsallı kirişin taşıma gücünü bulmak üzere ikinci mafsal yerinin bulunuşu verilecektir. Şekil 1.

* Yük. Müh. Mustafa Karaduman, S.D.M.M. Akademisi - Ahşap ve Çelik Yapılar Kürsüsü.

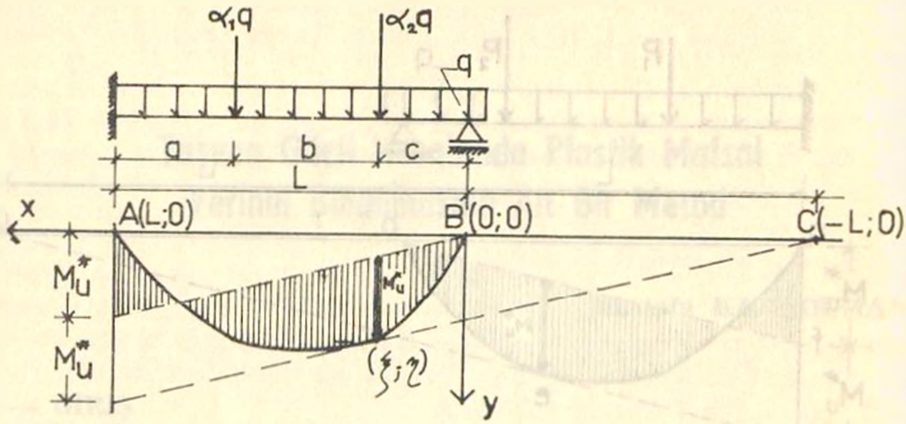


Şekil 1.

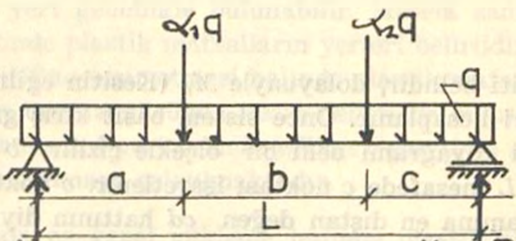
Kirişin kesiti bellidir, dolayısıyle M_u (Kesitin eğilmede taşıma gücü momenti) değeri hesaplanır. Önce sistem basit kiriş gibi kabul edilerek eğilme momenti diyagramı belli bir ölçekle çizilir. *b* ucundan itibaren *ab* uzantısında *L* mesafede *c* noktası işaretlenir. *c* noktasından geçen ve moment diyagramına en dıştan değen *cd* hattının diyagrama değdiği *e* noktası ikinci mafsalın yerini verir. Zira *ce* doğrusu *a* noktasından indirilen düşey hattı kestiği *d* noktasına kadar uzatılır ve *ad* doğrusunun *f* orta noktası alınarak *b* noktası ile birleştirilecek olursa sistemin plastik mafsallar dolayısıyle oynak olmasına tekabül eden en büyük yüklemeye ait moment diyagramı elde edilmiş olur. Bu çizim ile bulunan M_u moment değeri, kesitin problemde verilmiş olması sebebiyle hesapla da tayin edilmiş olduğundan, basit kiriş için keyfi bir ölçek ile önceden çizilmiş olan moment diyagramlarının hakiki ölçeği böylece tayin edilmiş olur ve buradan da yıkılmaya tekabül eden en büyük yükleme bulunabilir. Sembolik olarak q_u ile göstereceğimiz bu yükleme bulunduktan sonra bundan bir *n* emniyetiyle uzak kalacak şekilde *q* seçilebilir.

2.2. — METODUN MATEMATİK İFADESİ

Basit kiriş olarak sistemin bu yükler altındaki moment ifadesi yazılır.



Şekil 2.



Şekil 3.

$$\Sigma M_A = 0$$

$$\alpha_1 \cdot q \cdot a + \alpha_2 \cdot q \cdot (a + b) + L \cdot q \cdot \frac{L}{2} - B \cdot L = 0$$

$$B = \frac{a}{L} \; \alpha_1 \cdot q + \frac{a+b}{L} \; \alpha_2 \cdot q + \frac{q \cdot L}{2}$$

$q_u = 1$ için tam plastik moment M_u^* olarak alınıyor. Moment ifadesi :

$$M_x = B \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} \qquad\qquad M_x^* = \frac{B}{q} \; x - \frac{x^2}{2} \tag{1}$$

$C(-L, 0)$ dan geçen ve moment diyagramına en dıştan değen doğrunun denklemi :

$$y = \frac{M_u^*}{L} x + M_u^* \text{ dur.} \tag{2}$$

Eğer değme noktasında doğru (2), moment eğrisine (1) teğet ise moment eğrisinin o noktadaki türevi doğrunun eğimine eşit olmalıdır. Yani :

$$\frac{dM_x^*}{dx} = M_x^{*\prime} = \frac{M_u^*}{L} \quad \text{olmalıdır.}$$

$$\frac{dM_x^*}{dx} = \frac{B}{q} - x = \frac{M_u^*}{L}$$

$$x = \frac{B}{q} - \frac{M_u^*}{L} \tag{3}$$

(1), (2), (3) denklemlerinden $M_u^*, x = \zeta, y = \eta$ değerleri bulunur.

(3) den $M_u^* = \dfrac{B \cdot L}{q} - x \cdot L$, bunu (2) de yerine koyarsak :

$$y = \left(\frac{B \cdot L}{q} - x \cdot L\right)\frac{x}{L} - \left(\frac{B \cdot L}{q} - x \cdot L\right) = -x^2 + \left(\frac{B}{q} - L\right) \cdot x + \frac{B \cdot L}{q}$$

$$x = \xi \; ; \; y = \eta$$

$$y = \frac{B \cdot x}{q} - \frac{x^2}{2}$$

yerine konur çözülürse

$$\left.\begin{aligned} \eta &= -\xi^2 + \left(\frac{B}{q} - L\right)\xi + \frac{B \cdot L}{q} \\ \eta &= \frac{B}{q}\xi - \frac{\xi^2}{2} \end{aligned}\right| \quad \xi^2 + 2 \cdot L \cdot \xi - \frac{B}{q} = 0$$

elde edilir.

$$\xi_{1,2} = -L \pm \sqrt{L^2 + \frac{B \cdot L}{q}} \qquad \xi < 0 \text{ çözüm olamaz.}$$

$$\xi = -L + \sqrt{L^2 + \frac{B \cdot L}{q}} \quad \text{bulunur.}$$

$0 < \zeta < c$ ise bizim için uygun çözümdür.

$\zeta > c$ ise çözüm olamaz.

$\zeta = c$ ise çözüm olabilir. Yani $x = \zeta = c$ için

$$y = \frac{M_u^*}{L} x + M_u^*$$

den M_u^* bulunur.

$$y = \frac{B}{q} x - \frac{x^2}{2} \tag{4}$$

M_u da zaten belli : $\dfrac{M_u^*}{M_u} = \dfrac{q_u^*}{q_u}$ $\quad (q_u^* = 1$ idi.)

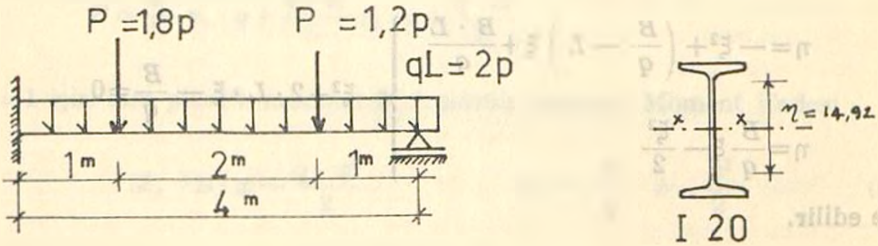
Buradan taşıma gücü q_u bulunur.

İşletme yükü $q = \dfrac{q_u}{n}$ dir. (n emniyet katsayısı)

(Not : $x = \zeta = c$ nin çözüm olabilmesi için bulunan ζ ve η nin hesap yapılan bölgenin komşusu olan bölgedeki moment denklemini de sağlaması gerekir. Sağlamıyorsa plastik mafsal incelenen bölgede değildir. Komşu bölge için aynı işlem tekrarlanmalıdır.)

3 — UYGULAMA

3.1. — Metodun, bir ucu kayıcı bir ucu ankastre mesnedli bir kirişe grafik ve matematik olarak uygulanması.



Şekil 4.

$\sigma_F = 2400 \text{ kg/cm}^2$ $\qquad$ $F = 33{,}5 \text{ cm}^2$

$p_u = ?$ $\qquad$ $S_x = 125 \text{ cm}^3$

$q_u =$

Kesitin alabileceği max. moment M_u

$$M_u = \frac{F}{2} \cdot \eta\, 2400 = \frac{33{,}5}{2} \cdot 14{,}92 \cdot 2400 = 599784 \text{ Kg. cm.}$$

$$M_u = 5907{,}8 \text{ kg. m.}$$

Şekil 4. deki bir ucu mafsallı bir ucu ankastre olan kirişi basit kiriş gibi kabul ederek moment diyagramını çizelim.

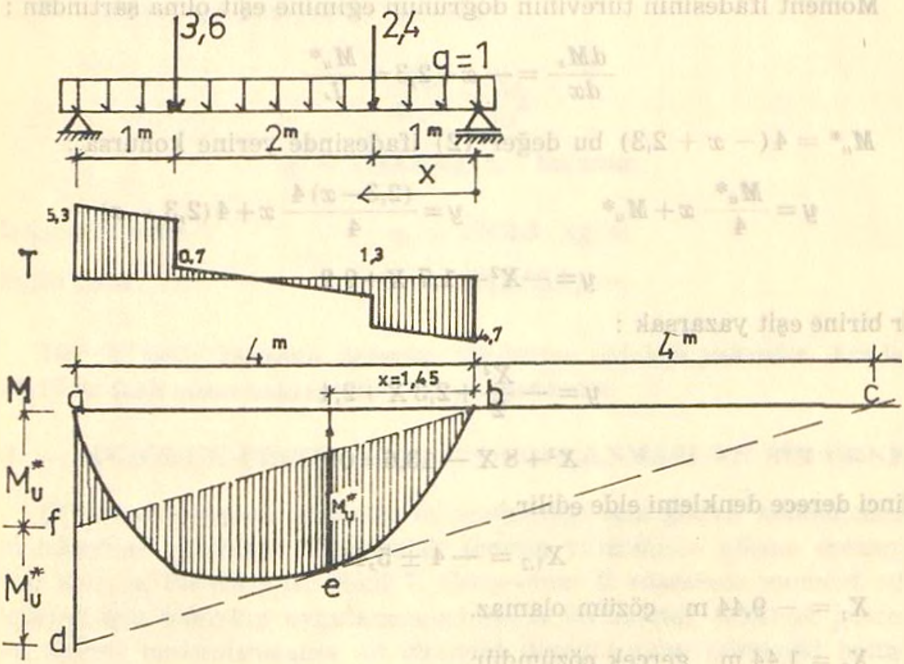
$q_u^* = 1$ için $\qquad p = 2$

$$1{,}2\ p = 2{,}4$$

$$1{,}8\ p = 3{,}6$$

$M_A = 0 \qquad 3{,}6.1 + 4.2 + 2{,}4.3 - B.4 = 0 \qquad B = 4{,}7$

$Y = 0 \qquad 3{,}6 + 2{,}4 + 4 - 4{,}7 - A = 0 \qquad A = 5{,}3$



Şekil 5.

$x = 1{,}45$ m $\qquad M_u{}^* = 3{,}5$

$$\frac{M_u}{M_u{}^*} = \frac{q_u}{q_u{}^*} \qquad \frac{5997{,}8}{3{,}5} = \frac{q_u}{1} \qquad q_u = 1713{,}65 \text{ kg/m}$$

Matematik Metod :

İşlemleri azaltmak bakımından plastik mafsal meydana gelme ihtimali en fazla olan bölgede işlemleri yapmak uygun olur (Plastik mafsalın tahmin edilen bölgede olmaması halinde komşu bölge için işlem tekrarlanır). Bu sebepten son plastik mafsalın (2) bölgesinde olabileceği düşüncesiyle, işleme buradan başlanır.

(2) bölgesinden kesim yapılarak moment ifadesi yazılırsa :

$$M_x{}^* = -\frac{x^2}{2} + 2{,}3\,x + 2{,}4$$

Doğrunun denklemi

$$y = \frac{M_u{}^*}{L}\,x + M_u{}^* \quad \text{idi} \qquad (2)$$

Moment ifadesinin türevinin doğrunun eğimine eşit olma şartından :

$$\frac{dM_x}{dx} = -x + 2{,}3 = \frac{M_u{}^*}{L}$$

$M_u{}^* = 4(-x + 2{,}3)$ bu değer (2) ifadesinde yerine konursa :

$$y = \frac{M_u{}^*}{4}\,x + M_u{}^* \qquad y = \frac{(2{,}3 - x)\,4}{4}\,x + 4\,(2{,}3 - x)$$

$$y = -X^2 - 1{,}7\,X + 9{,}2$$

Bir birine eşit yazarsak :

$$y = -\frac{X^2}{2} + 2{,}3\,X + 2{,}4$$

$$X^2 + 8\,X - 13{,}6 = 0$$

ikinci derece denklemi elde edilir.

$$X_{1,2} = -4 \pm 5{,}44$$

$X_1 = -9{,}44$ m çözüm olamaz.

$X_2 = 1{,}44$ m gerçek çözümdür.

Yani açıklıktaki plastik mafsal sağ mesnedden 1,44 m mesafede meydana gelir.

$$y = \frac{M_u}{4} X + M_u$$

$$y = M_x = -\frac{X^2}{2} + 2{,}3\,X + 2{,}4$$

$X = 1{,}44$ m için $y = 4{,}675$ bulunur.

Bu değer (2) ifadesinde yerine konursa

$$y = 4{,}675 = \frac{M_u^*}{4}\, 1{,}44 + M_u^*$$

$M_u^* = 3{,}44$ bulunur.

$$M_u = 5997{,}8 \text{ kg.m}$$

$$q_u^* = 1$$

idi. Bu değerler aşağıda yerine konursa :

$$\frac{M_u}{M_u^*} = \frac{q_u}{q_u^*}$$

$q_u = 1743{,}5$ kg/m bulunur.

Matematik yolla $q_u = 1743{,}5$ kg/m

Grafik yolla $q_u = 1713{,}65$ kg/m

Her iki yolla bulunan değerler bir birine oldukça yakındır. Aradaki % 0 17 lik fark çizim hatasından ileri gelmektedir.

3.2. — METODUN ÇERÇEVELERE UYGULANMASI VE BİR ÖRNEK

Çerçevenin taşıma gücünün bulunabilmesi için göçme mekanizmasının bilinmesi gerekiyor. Kinematik teorem yardımıyle göçme mekanizması kolayca bulunabilir. Şekil 7. Çerçevenin B köşesinde moment sıfır olmadığı için metodun uygulanması burada bir miktar farklılık gösteriyor. Göçme mekanizmasına ait moment diyagramının bilinmesi halinde uygulama yukarıda olduğu kadar basittir.

$m = 0{,}2\,M_u^* - 1$ olur. Dolayısıyle doğrunun denklemi :

$$y = (0{,}2\,M_u^* - 1)\left(x - \frac{3\,M_u^*}{1 - 0{,}2\,M_u}\right)$$

$$y = (0{,}2\,M_u^* - 1)\,x + 3\,M_u^* \qquad (5)$$

$$y = M_x = 2{,}5\,x - 0{,}25\,x^2 \qquad \text{(moment denklemi)} \qquad (6)$$

Doğrunun (5) moment eğrisine (6) teğet olduğu noktada, doğrunun eğiminin moment eğrisinin türevine eşit olma şartından :

$$\frac{dM_x}{dx} = 2{,}5 - 0{,}5\,x \qquad\qquad m = 0{,}2\,M_u^* - 1$$

$$0{,}2\,M_u^* - 1 = 2{,}5 - 0{,}5\,x$$

$$M_u^* = \frac{3{,}5 - 0{,}5\,x}{0{,}2} \qquad (7)$$

(7) ifadesini (5) de yerine koyarsak :

$$y = \left(0{,}2\,\frac{3{,}5 - 0{,}5\,x}{0{,}2} - 1\right)\cdot x + 3\cdot\frac{3{,}5 - 0{,}5\,x}{0{,}2}$$

$$y = -0{,}5\,x^2 - 5x + 52{,}5 \qquad (8)$$

Teğet noktasının koordinatlarını bulmak için (6) ve (8) ifadelerini bir birine eşitlersek :

$$x^2 + 30x - 210 = 0 \qquad \text{elde edilir.}$$

$$x_{1,2} = -15 \mp \sqrt{225 + 210} \qquad x_{1,2} = -15 \mp 20{,}86$$

Negatif değer söz konusu olamaz.

$x = 5{,}86$ m gerçek çözümdür (Plastik mafsalın meydana geldiği nokta). Bu değeri (5) de yerine koyarak M_u^* değerini hesaplıyalım.

$$y = 2{,}5x - 0{,}25x^2 \qquad y = 2{,}5\cdot 5{,}86 - 0{,}25\cdot 5{,}86^2$$

$$y = 6{,}06 \qquad \text{(teğet noktasının ordinatı)}$$

(5) den :

$$6{,}06 = (0{,}2\,M_u^* - 1)\cdot 5{,}86 + 3\cdot M_u^*$$

$$M_u^* = 2{,}857$$

$$\frac{M_u}{M_u^*} = \frac{P_u}{P_u^*} \qquad \frac{3{,}97}{2{,}857} = \frac{P_u}{1}$$

$$P_u = 1{,}3895\ t. \qquad P_u = 1389{,}5\ \text{kg}.$$

$$P = \frac{P_u}{n} \qquad \text{işletme yükü}$$

Bulduğumuz bu değeri «Hodge»'nin kitabında verilen netice ile karşılaştıracak olursak bir birlerine oldukça yakın olduklarını görüyoruz.

Kitapta verilen çözüm	Kendi bulduğumuz
$\frac{X}{L} = 1{,}175$	$\frac{X}{L} = 1{,}172$
$\frac{P\cdot L}{2M_u} = 1{,}77 \mp 0{,}018$	$\frac{P\cdot L}{2M_u} = 1{,}7500875$

Kesitlerin aynı olduğunu kabul ederek taşıma gücünü bulursak :

$$P_u = 1405{,}38 \mp 14{,}29\ \text{kg} \qquad P_u = 1389{,}5\ \text{kg}$$

Eğer çerçeveye yayılı yükten başka tekil yüklerde tesir etmiş olsaydı yine aynı yol izlenerek taşıma gücü kolayca bulunabilirdi.

4 — SONUÇ

Taşıma gücünün kesin değerinin bulunmasını kolaylaştıran metod iki örnek (bir ucu mafsallı, diğer ucu ankastre kiriş ve tek katlı çerçeve) üzerinde anlatılmıştır. Metodun mütemadi kirişlere uygulanması da oldukça basittir.

Yükleme durumunun kesin göçme yükünün bulunmasını zorlaştırdığı hallerde bu metodla kesin çözümün bulunması kolaydır. Ancak şurasını belirtmek gerekir ki, bu metod yalnız başına çözüm için yeterli olmayıp (göçme mekanizmasının bulunmasında) «Kinematik Teoreme» muhtaçtır.

Alt sınır ve üst sınır teoremleri yardımıyla bulunacak yaklaşık çözümler pratik amaçlar için yeterli yaklaşıklıktadır. Ancak kesin çözümlerin kolayca elde edilebilmesi için bu metod tavsiye edilebilir.

FAYDALANILAN ESERLER

1 — Hodge Philip Prof. : Yapıların Plastik Analizi. Çevirenler : Doç. Dr. E. Şuhubi, Doç. Dr. V. Cinemre.

2 — Karaduman M. Yük. Müh. : Taşıma Gücü Teorisinde Yeni Gelişmeler.

3 — Ünsaç Orhan Prof. : Elementer Plastisite ve Limit Analiz Metodu ile Boyut Tayini. Mühendislik Haberleri Dergisi. 1961, sayı 74.

4 — Ünsaç Orhan Prof. : Mukavemet (kitap).