Dansite matrisinin açısal korrelasyonlara tatbiki

İhsan ULUER [1]

GİRİŞ :

$|i>$ durumundaki bir çekirdeğin gama ışıması ile $|j>$ durumuna, buradan da yine bir gama ışıması ile $|f>$ durumuna geçtiğini düşünelim. Bu durumlar umumiyetle saf değildirler, yani kesin kuantum sayıları ile belirlenmemişlerdir. Saf bir nükleer durumunun enerjisi, paritesi, J ve M değerlerinin kesinlikle bilinmesi gerekir. Oriyent olmamış bir nükleer durumda bir J değeri için $2J+1$ adet M değeri vardır. Dolayısı ile oriyent olmamış bir nükleer durum saf durumların koherent olmayan süperpozisyonlardır.

Koherent olmayan süperpozisyon yapabilmek için başlangıç $|J_i M_i>$ durumu ile $|J_j M_j>$ orta durumun arasında geçiş ihtimalini hesaplayıp bütün ön durumlar için ortalama alınır. Böylece orta durum için belli bir oriyentasyon bulunmuş olurki, bu durumdan nihai duruma geçiş için aynı operasyon yapılarak süperpozisyon elde edilir. Fakat bu işlemler çok zor ve uzun olmaktadır. Dansite matrisi bütün bu işlemleri kolaylaştırabilir.

DANSİTE MATRİSİNİN ÖZELLİKLERİ :

Bir sistem karışmış bir duruma sahipse, bu durum çeşitli ağırlıklardaki saf durumların $|\psi_n>$ eldeki bilgilere göre koherent olmayan süperpozisyonları ile gösterilebilir. Sistemin $|\psi_n>$ durumunda bulunma ihtimali P_n ise, bir A işlemcisinin karışmış durumda beklenen değeri

$$<A> = \Sigma P_n <\psi_n | A | \psi_n> \tag{1}$$

dir.

Dansite operatörünü

$$\rho = \sum_n |\psi_n> P_n <\psi_n| \tag{2}$$

olarak tarif eder ve $|\psi_n>$ 'in $|\phi_n>$ bazlarından oluştuğunu kabul edersek

---

[1] Dr, Sakarya D.M.M. Akademisi

$$|\psi_n\rangle = \sum_n C_{nm} \, |\phi_m\rangle \text{ ve}$$

$$\langle\psi_n| A |\psi_n\rangle = \Big(\sum_l \langle\phi_l| \, C_{ln}^*\Big) A \Big(\sum_m C_{nm} \, |\phi_m\rangle\Big)$$

$$= \sum_{lm} C_{ln}^* \, C_{nm} \langle\phi_l | A | \phi_m\rangle$$

$$= \sum_{lm} C_{lm} \, C_{nm} \, a_{lm} \tag{3}$$

burada a_{lm}, A işlemcisini $|\phi_m\rangle$ bazında temsil eden işlemcidir.

(1) ve (3) nolu eşitlikleri birleştirirsek :

$$\langle A\rangle = \sum_n P_n \sum_{lm} C_{ln}^* \, C_{nm} \, a_{lm}$$

(2) nolu eşitlikte gösterilen dansite işlemcisi kullanılırsa ρ_{lm} matris elemanı

$$\rho_{lm} = \langle\phi_l | \rho | \phi_m\rangle$$

$$= \sum_n \langle\phi_l | \phi_n\rangle P_n \langle\phi_n | \phi_m\rangle$$

$$= \sum_n P_n \, C_{nl} \, C_{mn}^*$$

ρA işlemcisini temsil eden matris ise

$$(\rho A)_{lk} = \sum_m \rho_{lm} \, a_{mk}$$

$$= \sum_m \Big(\Big(\sum P_n \, C_{nl} \, C_{mn}^* \Big) a_{mk} \Big)$$

ve diyagonal elemanları

$$(\rho A)_{ll} = \sum_{mn} P_n \, C_{nl} \, C_{mn}^* \, a_{ml}$$

Treys ρA ise bütün bu diyagonal elemanlarının toplamıdır :

$$\sum_{l} (\rho A)_{ll} = T_r(\rho A) = \sum_{n} \sum_{lm} P_n C_{nl} C_{mn}^* a_{ml}$$

l ve m dami indis olduklarından yer değiştirilebilirler:

$$T_r(\rho A) = \sum_{n} P_n \sum_{lm} C_{ln}^* C_{nm} a_{lm}$$

bu ise

$$T_r(\rho A) = \langle A \rangle \tag{4}$$

Bu demektirki karışmış durumun özellikleri dansite matrisi içinde bulunmaktadır. Böylece karışmış hallerde sade durumlar üzerinde ortalama alıp herhangi bir operatörün beklenilen değerini bulmak için sadece bir treys işlemi yapmamız gerekmektedir. Eğer A bir birim işlemci ise

$$I = \sum_{n} P_n \langle \psi_n \mid \psi_n \rangle$$

bu ise $\langle \psi_n |$ 'in normalize olmasını gerektirir yani

$$\langle \psi_n | \psi_n \rangle = 1 .$$

(4) eşitliğinde

$A=1$ koyarsak

$Tr\,\rho=1$ olur.

Bazı hallerde $Tr\,\rho \neq 1$ dir ve $\langle A \rangle = Tr\,(\rho A)/Tr\,\rho$ yazılarak normalizasyon yapılır.

MATRİS ELEMANLARININ MANASI.

Diyagonal elementi mm sisteminin $|\phi_m\rangle$ saf durumunda bulunması ihtimalini verir. Quantum mekaniğinin süperpozisyon teoremine göre sistem $|\psi_n\rangle$ saf durumunda olduğu bilinirken, deneysel olarak sistemin $|\psi_m\rangle$ halinde olabilmesi ihtimali $|C_{nm}|^2$ dir. Karışmış halde bu ihtimalin P_n'e göre ağırlığı alınmalıdır :

Sistemi $|\phi_m\rangle$ de bulma ihtimali $= \Sigma_n P_n |C_{nm}|^2 = \rho_{mm}$.

Diyagonal elementleri reel olacağından ρ bir Hermitian matrikstir.

ORİENT OLMAMIŞ NÜKLEER HALLER

Bir nükleer durumun açısal momentumu J ise, sistemin mümkün olan saf halleri $|\psi_m> = |JM>$ dir.

Sistem için $2J+1$ adet böyle saf durum vardır. Eğer sistem oriyent olmamışsa her $|JM>$ durumu aynı populasyona sahiptir ve $P_m = (2J+1)^{-1}$ dir.

Böylece $$\rho = \sum_n |\psi_n> \frac{1}{2J+1} <\psi_n|$$

$$= (2J+1)^{-1} \sum_n |\psi_n><\psi_n|$$

Burada $|\psi_n>$ bir tam set'e sahip olduğundan

$$\sum_n |\psi_n><\psi_n| = I \quad \text{ve} \quad \rho = (2J+1)\, I \quad \text{dır.} \tag{5}$$

bu da gösterir ki ρ nun diyagonal harici elemanları durumun oriyentasyonu ile ilgilidir.

DANSİTE MATRİSİNİN TRANSFORMASYONU

Bir geçişin bir sistemi kuantum numarası a ve dansite matrisi ρ_A olan bir A durumundan, kuantum numarası b ve dansite matrisi ρ_B olan bir B durumuna götürdüğünü düşünelim. A durumu hakkında yeterli bilgimiz olduğunu farzedersek ρ_A nın elemanlarını bulabiliriz. Böylece B deki çeşitli saf durumlara giden geçişleri bulabilmek için A daki saf durumlar üzerinde ortalama alabiliriz. B deki gözetlenebilir şeyleri hesaplayabilmek için ρ_B'yi hesaplayabilmek gerekir.

ρ_A'nın $|a>$ ve ρ_B nin $|b>$ bazına göre hesabını yapalım.

İlk halin $|\psi_n>$ saf durumlarının koherent olmayan süperpozisyonundan meydana geldiğini farzedersek

$$\rho_A = \sum_n |\psi_n> P_n <\psi_n|$$

A dan B ye geçiş H gibi bir işlemci ile belirlenebilir; öyleki A daki her saf $|\psi_n>$ durumu B'de $|H\psi_n>$ durumuna dönüşür. Bu halde Pn, geçişten önce A'nın $|\psi_n>$ durumunda ve B'nin de geçişten sonra $|H\psi_n>$ durumunda bulunabilme ihtimalidir.

Böylece :

$$\rho_B = \sum_n | H\, \psi_n > P_n < H\, \psi_n |$$

$$= \sum_n H\, | \psi_n > P_n < \psi_n |\, H^+$$

ρ_B 'nin $|b>$ bazında yazılışı ise

$$<b\,|\,\rho_B\,|\,b'> = \sum_n <b\,|\,H\,|\,\psi_n > P_n < \psi_n\,|\,H^+\,|\,b'> \qquad (6)$$

diğer taraftan $|a>$ bazına göre $|\psi_n>$ ise

$$|\,\psi_n> = \sum_a C_{na}\,|\,a> \quad \text{dır.}$$

$|a>$ lar orthogonal olduklarından

$$<a\,|\,\psi_n> = \sum_{a'} C_{na'} < a\,|\,a'> = C_{na'}$$

ve dolayısı ile

$$|\,\psi> = \sum_a |\,a> < a\,|\,\psi_n>$$

eşitliğini bununla beraber kullanırsak

$$<b\,|\,\rho_B'> = \sum_n <b\,|H|\Big(\sum_a |\,a> <a\,|\,\psi_n>\Big) P_n \Big(\sum_{a'} <\psi_n|a'> <a'\,|H^+|\,b'>\Big)$$

$$= \sum_a \sum_{a'} <b\,|H|\,a> <a\,|\Big(\sum_n |\psi_n> P_n <\psi_n|\Big)|\,a'> <a'\,|H^+|\,b'>$$

$$= \sum_a \sum_{a'} <b\,|\,H\,|\,a> <a\,|\,\rho_A\,|\,a'> <a'\,|\,H^+\,|\,b'> \quad \text{dur.}$$

verim matrisi hesabı yapılacak olursa, $\in(k_1, k_2)$ bunu son durum dansite matrisi ρ_c ile çarpıp treysini alarak açısal korelasyon fonksiyonu

$$W(k_1, k_2) = Tr\, \rho_c \in (k_1, k_2)$$

bulunur.

REFERANSLAR :

K. S. Krane, R. M. Steffen, R. M. Wheeler, Nuclear Data Tables Vol. 11 No: 5, 1973, 352.

R. M. Steffen, K. Alder «Angulard Distribution and Correlations of Gamma - Rays - I» in «Chapt. XII The Electromagnetic Interastion in Nuclear Physics» (W. D. Hamilton, ed.) North Holland - Amsterdam (1972)

R. M. Steffen, H. Fraunfelder, in «Perturbed Angular Correlations» (E. Karlsson, E. Matthias, K. Siegbahn, ed) North Holland - Amsterdam (1965)