Yıllık akış serilerinin kurak devreleri

Zekâi ŞEN [1]

Giriş

Tabiatta çok karışık bir şekilde meydana gelen yağış, yüzeysel akış, buharlaşma, sızma, yer altı suyu ve benzeri hidrolojik olayların ortak yönleri rastgele oluşlarıdır. Bir hidroloğun en önemli amacı bu tip olayların oluşlarını fizik matematik, istatistik ve ihtimal kanunlarından yararlanarak objektif bir şekilde kontrol altına alabilmektir.

Hidrolojik olayların incelenmesinde birbirinden farklı iki metod kullanılır. Bunlardan ilki olayın tamamen fiziksel kanunlarla izah edilebileceği ve meydana gelişinde hiçbir şekilde rastgeleliğin bulunmadığı esasına dayanan belirgin (deterministik) metodlardır. Bu tip incelemeye örnek olarak birim hidrograf, rasyonel metot v.s. gibi klasik hidrolojik metodlar gösterilebilir. Belirgin metodlar su kaynakları sisteminin plan ve projelendirilmesinde, daha ziyade kısa süreli tahminlerin yapılmasında kullanılır. Meselâ birim hidrograf yağıştan hemen sonra akarsu havzasının çıkış noktasında meydana gelebilecek akış hidrografının belirlenmesinde faydalı olabilir; ancak uzun sürelerin (yağıştan bir ay, bir sene sonra gibi) söz konusu olması halinde geçerli olabilecek bir fikir veremezler. Uzun süreli tahminlerin objektif olarak, belirlenebilmesi olayın rastgele olmasını esas alarak, fiziksel kanunları ihmal edip sadece matematik, istatistik ve ihtimal kanunlarının kullanılması ile mümkün olabilmektedir ki bunlara stokastik metodlar denir. Mesela, 100 senede bir defa meydana gelmesi ihtimal dahilinde olan debinin hesap edilmesi ancak stokastik metodlarla mümkündür.

Her iki metodunda güvenilir bir şekilde su kaynakları sisteminin çeşitli problemlerinin çözümünde kullanılabilmesi için incelenen hidrolojik olayın geçmiş gözlemlerinin yapılmış olması gerekir. Ancak bu ölçmelerin mevcut olması halinde belirgin veya stokastik metodlardan birisi veya ikisi aynı anda kullanılabilir. Meselâ, birim hidrografın kullanılabilmesi için akarsu havzasındaki artık yağış yüksekliğinin ölçme-

---

1) Dr. Zekâi ŞEN, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi

ler neticesinin bilinmesi gerekir. Geçmiş yıllar boyunca gözlenmiş yıllık maksimum değerlerin bulunması, gelecekteki herhangi bir süre boyunca en az bir defa meydana gelmesi ihtimal dahilinde olan maksimum taşkın debisinin hesabı için gereklidir. Belirgin metodlar bu makalenin dışında bırakılmıştır. Geçmişte yapılmış gözlemlerden, o hidrolojik olayın su mühendisliğinde faydalı olabilecek, yıllık ortalama değer, yıllık maksimum veya minimum değerler, kurak ve sulak devre özellikleri ve benzeri büyüklüklerin hesap edilmesi, stokastik metodlar yardımıyla bunların gelecekteki değerlerinin ne olabileceğinin bulunması mümkündür.

Kurak devrelerin, bir tarım ülkesi olan memleketimiz bakımından önemi çok büyüktür. Memleketimizde su kaynakları sisteminin henüz etkili bir şekilde gelişmemiş olması tarım rekoltesinin büyük ölçüde iklime bağlı olması neticesini doğurmuştur. Halbuki, kurak devrelerin önceden objektif olarak tahminlerinin yapılması hangi zamanlarda ne miktarda ki bir suyun kuraklığın etkileyeceği tarım bölgesine transferinin gerektiği veya o bölgede ne gibi su kaynaklarının (baraj, su kuyusu, su kanaletleri v.s. gibi) geliştirilmesinin zorunlu olduğu sorusuna cevap verebilir. Diğer taraftan, endüstrinin ihtiyacı olan enerjinin aksamadan verilebilmesi için, bir hidroelektrik santralinin güvenilir debisinin hesabında kurak devrelern önemi büyüktür. Netice olarak, kurak devrelerin bir memleketin ekonomik, sosyal ve politik durumları üzerinde tesirinin olduğu gerçektir.

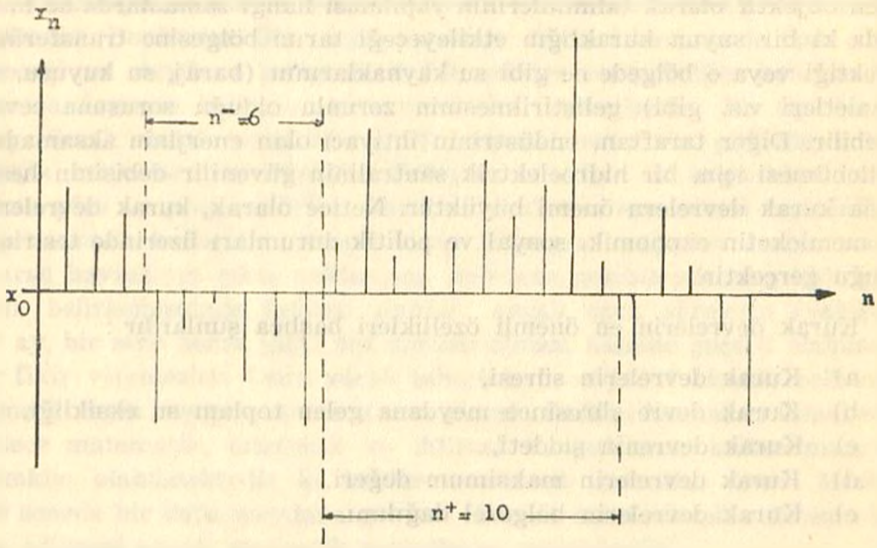
Kurak devrelerin en önemli özellikleri başlıca şunlardır :

a) Kurak devrelerin süresi,
b) Kurak devre süresince meydana gelen toplam su eksikliği,
c) Kurak devrenin şiddeti,
d) Kurak devrelerin maksimum değeri,
e) Kurak devrelerin bölgesel dağılımı.

Kuraklığın Tarifi

Genel manada kuraklık bir değişkende belirli bir referans seviyesine göre görülen eksiklik olarak tanımlanabilir. Ancak bu kavram universal olmayıp çeşitli araştırıcılar tarafından değişik olarak yorumlanabilir. Meselâ bir ziraatçi için kuraklık zemindeki nemin bitkinin hayatını sürdürebilmesi için gerekli bir minimum değerden aşağıya düşmesi halinde söz konusudur. Bir rezervuar halinde ise talebin gelen ve rezervuarda bulunan sudan fazla olması halinde başka bir deyimle talebin tam olarak karşılanamaması halinde kuraklık vardır. Diğer taraftan giderin gelirden fazla olması halinde ekonomik kuraklıktan bahsetmek mümkündür. Ancak bu makalede su kaynakları sistemi ile ilişkili problemlerdeki kuraklıklar söz konusu olacaktır.

Kuraklığın açık bir tarifi gidiş (run) uzunluklarını esas alarak Yevjevich (1967) tarafından yapılmıştır. Tek boyutlu değişkenler için ayrık gözlem serisinin bulunması halinde, bu gözlemlerin önceden seçilen keyfi bir kesme seviyesinin altında kalan dizileri kuraklığa karşı gelir. Bu kavramı daha iyi açıklamak için zaman ekseni boyunca yapılmış gözlemler dizisini ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibi) ve bu diziyi belirli bir seviyede Şekil 1 de görüldüğü gibi x_0 seviyesini düşünelim. x_0 seviyesinde kesilen bu akım serisinden şekilde belirtildiği gibi, serinin çeşitli karakteristiklerini yansıtan büyüklükler tanımlamak mümkündür. Bunlar,



Şekil 1. Verilen bir x_0 kesim seviyesi için pozitif ve negatif gidiş uzunluklarının tanımı.

n^+ : Pozitif gidiş uzunluğu,

n^- : Negatif gidiş uzunluğu,

n_t : Toplam gidiş uzunluğu,

S : Pozitif gidiş toplamı ; n^+ boyunca olan fazlalıkların toplamıdır,

D : Negatif gidiş toplamı : n^- boyunca olan eksikliklerin toplamıdır,

s : Pozitif gidiş şiddeti ; S in n^+ ya oranıdır.

d : Negatif gidiş şiddeti ; D nin n^- ye oranıdır,

T : Toplam gidiş toplamı : n_t boyunca olan fazlalık ve eksikliklerin toplamına eşittir.

Bu şekilde tanımlanmış büyüklükler su mühendisliğinde son derece önemli karar büyüklüklerine karşı gelirler. Meselâ, pozitif gidiş uzunluğu sulak devre uzunluğuna, pozitif gidiş toplamı sulak devre boyunca rezervuarda biriktirilmesi gerekli su miktarına; negatif gidiş uzunluğu bu araştırma çalışmasının yoğun bir şekilde incelediği kurak devre süresine, negatif gidiş toplamı ise kurak devre boyunca rezervuardan çekilmesi gerekli toplam suyun veya başka bir su kaynağı alternatifinden kuraklık süresince kuraklığın hüküm sürdüğü bölgeye transferi gerekli toplam suyun temsilcisidirler. Kurak devre başta ve sonda fazlalıklarla sınırlanmış ardışık eksiklikler dizisidir. Benzer olarak sulak devre başta ve sonda eksikliklerle sınırlı ardışık fazlalıklar dizisidir şeklinde tanımlanabilir. Böyle bir tarif Llamas ve Siddiqui (1969); Saldarriga ve Yevjevich (1970) ve Millan ve Yevjevich (1971) gibi araştırıcılar tarafından kullanılmıştır. Bu tip bir tarif akarsu havzasının belirli bir noktasında yapılmış gözlemler için geçerli olup sadece o noktadaki kurak devre özellikleri hakkında bilgi verir. Kurak devrelerin bölgesel dağılımlarının incelenebilmesi için o bölgenin çeşitli noktalarında yapılmış olan gözlemler dizisinin aynı anda göz önüne alınması gerekir ki bu durumda önceki kurak devre tarifi geçersiz olur. Bölgesel kurak devre kavramı Yevjevich (1972) tarafından verilmiştir. Bölgesel kuraklıkların incelenmesi bu makalenin kapsamına alınmamıştır.

Yukarda yapılan tarifin altında hidrolojik kurak devrelerin analizi, istatistik ilmindeki gidiş analizi (runs analysis) ile çakışmaktadır. İstatistik gidiş analizi günümüze kadar sadece stasyoner olan gözlemler dizisi için geliştirilmiş olduğundan, paralel olarak hidroloji ilminde de kurak devrelerin analizi stasyoner hidrolojik süreler için geliştirilmiştir. Hidrolojik orijinal gözlemler dizisi genellikle peryodik stokastik karakterde oldukları için stasyoner süreçler için geliştirilmiş gidiş analizinin direk olarak uygulanması mümkün değildir.

Gidiş Analizi

Hidrolojide şimdiye kadar yapılan araştırmalar daha ziyade stasyoner olan yıllık akım serileri içindir. İlk çalışmalar ise gözlemlerin birbirinden bağımsız olmaları hali için yapılmıştır. Önceki bölümde açıklanan kesim seviyesinin ihtimal teorisine göre eşitlerini şu şekilde yazma mümkündür,

$$q = F(x_i \leq x_0) \tag{1}$$

ve

$$p = 1 - q = 1 = F(x_i \leq x_0) = F(x_i > x_0) \tag{2}$$

Bu ifadelerin yansıttıkları en önemli özellik göz önüne alınan sürecin bağımsız olması halinde gidiş özelliklerinin x_i rastgele değişkeninin dağılımından tamamen bağımsız olması bakımındandır. Çünkü, dağılım ne tip olursa olsun (normal, log - normal, gamma v.s.) (2) ifadesine göre örneğin x_0 ın medyan değerine eşit olması halinde, $p = q = 1/2$ olur ki buda dağılımın bağımsız olduğunu ispat eder. Downer ve arkadaşları (1967) sırasıyla n^+ ve n^- olarak gösterdikleri pozitif ve negatif gidiş uzunluklarının dağılımını sonsuz seri hali için şu şekilde ifade etmişlerdir,

$$P(n^+ = j) = q \,.\, p^{j-1} \tag{3}$$

ve

$$P(n^- = j) = p \,.\, q^{j-1} \tag{4}$$

olarak bulunmuştur. Gözlemlerin simetrik olması halinde $p = q = 0.5$ aksi takdirde medyan değerine göre $p = q = 0.5$ olduğu göz önünde tutularak yukardaki ifadeler,

$$E(n^+) = \frac{1}{q} \quad \text{ve} \quad E(n^-) = \frac{1}{p} \tag{5}$$

$$V(n^+) = \frac{p}{q^2} \quad \text{ve} \quad V(n^-) = \frac{q}{p^2} \tag{6}$$

olarak bulunmuştur. Gözlemlerin simetrik olması halinde $p = q = 0.5$ aksi takdirde medyan değerine göre $p = q = 0.5$ olduğu göz önünde tutularak yukardaki ifadeler,

$$P(n^+) = P(n^-) = \frac{1}{2^j} \tag{7}$$

ve

$$E(n^+) = E(n^-) = 2 \; ; \qquad V(n^+) = V(n^-) = 2 \tag{8}$$

hallerine dönüşürler. Yukarda belirtildiği üzere (7) ve (8) denklemleri gözlemlerin dağılımlarından bağımsızdırlar.

Hidrolojik incelemelerde sonsuz serilerden ziyade sonlu seriler için gidiş uzunluklarının çeşitli özelliklerinin bilinmesine ihtiyaç vardır. Zira tabiatta gözlenmiş dizilerin uzunluğu sonludur. Meselâ, Keban akım ölçme istasyonunda sadece 1936 senesinden beri ölçmeler yapılmakta olup bugün elimizde 40 senelik bir sonlu dizi mevcuttur. Sonlu dizilerle ilk çalışmalar Wishart ve Hirsheld (1936) tarafından başlatılmıştır. Sonlu serilerin gidiş özelliklerini incelemeye yarayan metoda kombinatorik yaklaşım denir. Kombinatorik yaklaşımın esası, göz önüne alınan bir hidrolojik gözlem serisinin önce bir transformasyon ile + ve — değerlerini alabilen daha basit bir seriya dönüştürülmesi, daha sonrada bu yeni serinin Binom dağılımı ile incelenmesidir. N sayıdaki gözlemler N^+ sayıda + ve N^- sayıda — elemanlara ayrılmış olur. Böylece,

$$N = N^+ + N^-$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca + tipten bir eleman için p, — tipten bir eleman içinde $q = 1 - p$ gibi iki ihtimal söz konusudur. Kombinatorik analiz neticesi belirli bir gidiş uzunluğunun sonlu bir dizide kaç tane bulunduğunun ihtimalini hesap etmek mümkündür. Halbuki, su mühendisliğinde çok önemli olan gidiş uzunluklarının beklenen değerleri hakkında bu yaklaşımla hiçbir ifade bulmak mümkün değildir. Bu bakımdan kombinatorik yaklaşımla bulunacak gidiş özellikleri direk olarak su mühendisliğinde kullanılamaz. K_i^+, i uzunluğundaki bir pozitif gidişin sayısını ve K_i^- ise i uzunluğundaki bir negatif gidişin uzunluklarının sayısını belirtsinler. Bu takdirde N elemandan teşkil edilebilecek pozitif gidişlerin ve N elemandan teşkil edilebilecek negatif gidişlerin sayısını sırasıyla,

$$K^+ = \sum_{i=1} K_i^+$$

ve

$$K^- = \sum_{i=1} K_i^-$$

hesap etmek mümkündür. Buna göre toplam gidiş sayısı,

$$K = K^+ + K^-$$

olarak belirir.

Bu tip bir örneklemede gidiş uzunluklarının sayıları için aşağıdaki ihtimaller bulunmuştur.

$$P(K^+ = k^+,\quad N^+ = n^+,\quad N^- = n^-) = \binom{n^+ - 1}{k^+ - 1}\binom{n^- - 1}{k^-} \cdot p^{n^+} \cdot q^{n^-} \qquad (9)$$

$$P(K^- = k^-,\quad N^+ = n^+,\quad N^- = n^-) = \binom{n^- - 1}{k^- - 1}\binom{n^+ - 1}{k^+} \cdot p^{n^-} \cdot q^{n^+} \qquad (10)$$

$$P(K=2\cdot m,\ \ N^{+}=n^{-},\ \ N^{-}=n^{-})=2\cdot\binom{u^{+}-1}{m-1}\binom{n^{-}-1}{m-1}\cdot p^{n^{-}}\cdot q^{n^{+}} \quad (11)$$

ve nihayet,

$$P(K=2\cdot m+1,\ \ N^{+}=n^{+},\ \ N^{-}=n^{-})=\left[\binom{v^{+}-1}{m-1}\binom{n^{-}-1}{m-1}+\right.$$

$$\left.+\binom{n^{+}-1}{m}\binom{n^{-}-1}{m-1}\right]\cdot p^{n^{+}}\cdot q^{n^{-}} \quad (12)$$

Bu denklemlerdeki büyük harfler rastgele değişkenleri küçük harfler ise bu değişkenlerin alabileceği değerleri gösterir. Meselâ, N pozitif gidişi, n ise bu gidişin uzunluğunu ifade ederler. Aynı yazarlar N nin çok büyük değerleri için şu moment değerlerini bulmuşlardır,

$$E(K)=2\cdot n\cdot p\ q+p^{2}+q=2\cdot(N-2)\ p\cdot q+1 \quad (13)$$

ve

$$V(K)=4\cdot N\cdot p\cdot q\cdot(1-3\cdot p\cdot q)-2\cdot p\cdot q\cdot(3-10\cdot p\cdot q) \quad (14)$$

Bu son ifadeler toplam gidiş uzunlukları için geçerlidirler. Pozitif veya negatif gidiş uzunluklarının sayılarının beklenen değerleri

$$E(K^{+})=p+(N-1)\cdot p\cdot q \quad (15)$$

$$E(K^{-})=q+(N-1)\cdot p\cdot q \quad (16)$$

ve

$$E(N^{+})=N\cdot p\,, \qquad E(N^{-})=N\cdot q \quad (17)$$

Göz önüne alınan sürecin bağımlı olması halinde yapılmış olan araştırmalar sadece basit bağımlılıklar için geliştirilebilmiştir. İki durumlu bir Markov zincirinin istatistiksel olarak gidiş uzunluklarının analizi ilk defa Cox ve Miller (1965) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bir Markov zincirinin iki durumlu olması halinde geçiş ihtimalleri matrisi,

$$P=\begin{array}{c|cc|} & 1 & 2 \\ 1 & 1-a & a \\ 2 & b & 1-b \end{array} \quad (18)$$

şeklinde belirtilmiştir ki burada a zincirin 1 durumundan 2 durumuna geçmesi ihtimalini, b ise 2 durumundan 1 durumuna geçmesi ihtimalını gösterirler. İki durumlu Markov zinciri için gidiş ihtimalleri basit olarak

$$P(N^{+}=k)=a\cdot b\ (1-b)^{k-2} \qquad (k=2,3,\dots\ \text{için}) \quad (19)$$

ve

$$P(N^+=k)=1-a \qquad (k=1 \text{ için}) \tag{20}$$

beklenen değer ise,

$$E(N^+)=\frac{a+b}{b} \tag{21}$$

olarak bulunabilir.

Daha sonra, Saldarriaga ve Yevjevich (1970) sonsuz uzunluktaki seriler için çok katlı normal integralleri icra ederek gidiş uzunluklarının ihtimal dağılımlarını araştırarak birtakım yaklaşık ifadeler elde etmişlerdir. Bu metoda integrasyon yaklaşımı adı verilir. Çok katlı normal integraller genel bir inceleme olup tüm normal süreçler için geçerlidir. Ancak bu integrallerin alınmasında büyük güçlüklerle karşılaşılmaktadır ve basit haller için bu integrallerin alınması mümkün olabilmektedir. İntegrasyon yaklaşımına temel olan denklemler Feller (1957) tarafından aşağıdaki şekilde çıkartılmıştır.

$$P(n^+>j)=P(j^+)+\sum_{k=1}^{\infty} P(k^-,\ j^+) \tag{22}$$

Burada $P\ (n^+ > j)$ pozitif gidiş uzunluğunun j den büyük olma ihtimalini ; $P\ (j^+)$ ilk j adet gözlemin aynı anda pozitif olması ihtimalini; $P\ (k^-, j^+)$ ise ilk k adet gözlemin negatif olması ile onu takip eden j adet gözlemin pozitif olması olaylarının ortak ihtimalini gösterir. Gidiş uzunluğunun j ye eşit olması için Feller

$$P(n^+=j)=P(n^+>j)-P(n^+>j+1) \tag{23}$$

ifadesini vermiştir. Denklem (22) de dikkat edilmesi gerekli noktalardan bir tanesi $P\ (j^+)$ ihtimalinin, $P\ (k^-, j^+)$ ihtimalinin $k=0$ olması halindeki özel bir şekli olduğudur. Genel olarak, $P\ (k^-, j^+)$ teriminin hesap edilmesi çok katlı bir integralin alınması ile mümkündür.

$$P(k^-,\ j^+)=\underbrace{\int_{-\infty}^{x_0}\cdots\int_{-\infty}^{x_0}}_{k}\cdot\underbrace{\int_{x_0}^{+\infty}\cdots\int_{x_0}^{+\infty}}_{j} f(x_1,\ x_2,\ldots x_{k+j})\cdot dx\cdot dx_2\ldots dx_{k+j} \tag{24}$$

Burada $f\ (x_1, x_2, \ldots, x_{k+j})$ gözlemlerin çok katlı ihtimal yoğunluk fonksiyonudur. Çok katlı ihtimal yoğunluk fonksiyonunun normal olması halinde Saldarriaga ve Yevjevich (24) denklemini nümerik olarak hesap etmişler ve neticeleri tablolar halinde sunmuşlardır. Bu araştırıcıların sundukları tablolar sadece birinci mertebeden Markov süreci içindir. Verilen sonuçların birinci mertebeden korelasyon katsayısının 0.4 den küçük olması halinde oldukça hassas yaklaşık değerler vereceği açıklanmıştır.

Geliştirilen Metot

Birinci mertebeden Markov sürecini esas alarak integrasyon yaklaşımının da kullanılması ile Şen (1976) gidiş uzunluklarının çeşitli istatistiksel özelliklerini kesin olarak analitik ifadeler şeklinde elde etmiştir. Geliştirilen metodun iyi bir şekilde anlaşılabilmesi çin önce en basit süreç olan bağımsız süreç için daha önce literatürde bulunmuş olan analitik ifadeler çıkartılacaktır.

Burada geliştirilen metot esas itibari ile denklem (24) ün çarpım şeklinde yazılabileceğine dayanır. Yıllık akış serilerinin normal. bağımsız ve idantik bir dağılıma haiz oldukları kabul edilecek olursa, (24) deki çok katlı ihtimal yoğunluk fonksiyonu j + k adet çarpım terimi şeklinde yazılabilir :

$$P(k^-,\ j^+) = \prod_{i=1}^{k} \int_{-\infty}^{x_0} f(x_i) \cdot dx_i \cdot \prod_{i=k+1}^{j+k} \int_{x_0}^{+\infty} f(x_i) \cdot dx_i \tag{25}$$

Diğer taraftan,

$$p = P(x_i > x_0) = \int_{x_0}^{+\infty} f(x_i) \cdot dx_i$$

ve

$$q = 1 - p = P(x_i \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x_i) \cdot dx_i$$

göz önünde tutularak (25) denklemi,

$$P(k^-,\ j^+) = \prod_{i=1}^{k} P(x_i \leq x_0) \cdot \prod_{1=k+1}^{j+k} P(x_i > x_0)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca p ve q ihtimalleri cinsinden

$$P(k^-,\ j^+) = \prod_{i=1}^{k} q \cdot \prod_{i=k+1}^{k+j} p = q^k \cdot p^j \tag{26}$$

yazılabilir. $k = 0$ için (26) denklemi

$$P(j^{+}) = p^{j} \tag{27}$$

haline dönüşür. Denklem (26) ve (27) nin önce (22) de yok edilmesi ile

$$P(n^{+} > j) = p^{j-1} \tag{28}$$

daha sonra da (23) den

$$P(n^{+} = j) = q \cdot p^{j-1} \tag{29}$$

elde edilir. Negatif gidiş uzunluklarının düşünülmesi halinde ise benzer olarak,

$$P(n^{-} = j) = p \cdot q^{j-1} \tag{30}$$

Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde birinci mertebeden Markov süreci için analitik ifadeler Şen (1976) tarafından çıkartılmıştır. Bilindiği gibi Markov sürecinin en önemli özelliği herhangi bir andaki değerin kendisinden hemen önce gelen değere bağlı olduğu diğer anlardaki deerlerin bir etkisinin olmadığıdır. İşte bu özellik sebebi ile çok katlı ihtimal yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bir takım şartlı ihtimallerin çarpımı halinde yazılabilir.

$$f(x_1, x_2, .. x_{k+j}) = f(x_1) \cdot f(x_2 \mid x_1) \cdot f(x_3 \mid x_2) .. f(x_{k+j} \mid x_{k+j-1})$$

Benzer özellikten yararlanarak (22) denklemi

$$P(k^{-}, j^{+}) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x_1) \cdot dx_1 \prod_{i=2}^{k} f(x_i \mid x_{i-1}) \cdot dx_i \prod_{i=k+1}^{k+j} \int_{x_0}^{+\infty} f(x_i \mid x_{i-1}) \cdot dx_i \tag{31}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan kesim seviyesi x_0 cinsinden (31)

$$P(k^{-}, j^{+}) = P(x_1 \leq x_0) \prod_{i=2}^{k} P(x_i \leq x_0 \mid x_{i-1} \leq x_0) \cdot$$

$$\cdot P(x_{k+1} > x_0 \mid x_k \leq x_0) \prod_{i=k+2}^{k=j} P(x_i > x_0 \mid x_{i-1} > x_0) \tag{32}$$

formunda da yazılabilir. Böylece çok katlı bir integralin hesabı yerine sadece şartlı ihtimallerin hesap edilmeleri ile çözüme ulaşmak mümkün olabilecektir.

Şartlı ihtimaller ise,

$$P(x_i > x_0 \mid x_{i-1} > x_0) - \frac{P(x_1 > x_0, \; x_i > x_0)}{p} \tag{33}$$

burada x_i ve x_{i-1} iki katlı normal ihtimal dağılımına haiz değişkenler olup ortalama değerlerinin sıfır ve varyanslarının bir olması halinde (33) deki ortak ihtimal fonksiyonu,

$$P(x_i > x_0, x_{i-1} > x_0) = \int_{x_0}^{+\infty} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{2p(1-p^2)^{1/2}} exp \left[-\frac{1}{2(1-p^2)} (x_i^2 - 2p x_i x_{i-1} + x^2_{i-1}) \right] dx_1 \, dx_{i+1i} \quad (34)$$

Diğer taraftan,

$$r = P(x_i > x_0 \mid x_{i-1} > x_0) \quad (35)$$

olduğunu kabul ederek Şen (1976) tarafından,

$$P(x_i > x_0 \mid x_{i-1} \leq x_0) = \frac{p}{q}(1-r) \quad (36)$$

$$P(x_i > x_0 \mid x_{i-1} \leq x_0) = 1 - \frac{p}{q}(1-r) \quad (37)$$

$$P(x_i \leq x_0 \mid x_{i-1} > x_0) = (1-r) \quad (38)$$

ifadeleri bulunmuştur. Bulunan bu şartlı ihtimallerin ışığı altında (32)

$$P(k^-, j^+) = p(1-r) \left[1 - \frac{p}{q}(1-r) \right]^{k-1} \cdot r^{j-1} \quad (39)$$

şeklinde yazılabilir. (39) da $k = 0$ konulursa,

$$P(j^+) = p \cdot r^{j-1} \quad (40)$$

(39) ve (40) denklemlerinin (22) de yerlerine konması ile,

$$P(n^+ > j) = r^{j-1} \quad (41)$$

Denklem (23) den de,

$$P(n^+ = j) = (1-r) \cdot r^{j-1} \quad (42)$$

(42) denkleminin kullanılarak pozitif gidiş uzunluğunun ihtimallerinin bulunabilmesi için herşeyden önce r değerlerinin (33), (34) ve (35) denklemlerinin kullanılması ile nümerik olarak çözülmüş olması lâzımdır. Çeşitli ρ ve x_0 değerlerine karşı gelen r değerleri Tablo 1 de sunulmuştur. $\rho = 0.0$ olması halinde $r = p$ değerini alır bu takdirde ise (41) ve (42) denklemleri bağımsız süreç için bulunmuş olan (28) ve (29) denk-

lemleri haline indirgenir. Bu makalede geliştirilmi olan metodoloji negatif gidiş uzunluklarının ihtimallerinin bulunması içinde kullanılabilir.

Tablo 1

Değişik Kesim Seviyeleri için r Değerleri

ρ	Kesim Seviyeleri				
	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0.0	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300
0.1	0.718	0.625	0.532	0.437	0.340
0.2	0.736	0.650	0.564	0.475	0.382
0.3	0.754	0.676	0.597	0.514	0.426
0.4	0.774	0.703	0.631	0.555	0.472
0.5	0.795	0.732	0.666	0.598	0.520
0.5	0.818	0.762	0.704	0.643	0.574
0.7	0.844	0.796	0.747	0.694	0.632
0.8	0.873	0.835	0.795	0.752	0.701
0.9	0.911	0.884	0.856	0.826	0.788

Gidiş uzunluklarının istatistiksel özellikleri

İstatistiksel özelliklerin hesap edilebilmesi için gerekli olan ihtimaller önceki bölümde bulunmuşlardır. Bu istatistiksel özellikler arasında beklenen değer, varyans, değişim katsayısı ve çarpıklık katsayısı önemli yer işgal ederler ve bu büyüklüklerin pozitif gidiş uzunlukları için analitik ifadeleri bu bölümde detaylı olarak çıkartılmıştır.

Ortalama Değer : İstatistikte gidiş uzunluklarının birinci mertebeden momentleri genel olarak ;

$$E(n^{+}) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot P(n^{+} = j) \tag{43}$$

şeklinde tanımlanır. Bu son ifadede (42) denkleminin yerine konulması ile,

$$E(n^{+}) = (1-r) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot r^{j-1} \tag{44}$$

Bu son denklemin sağ tarafındaki ilk terim

$$\cdot \sum_{j=1}^{\infty} j^3 \cdot P(n^+ = j),$$

veya (42) denkleminin göz önünde tutulması ile bu son ifade,

$$\cdot \sum_{j=1}^{\infty} j^3 \cdot P(n^+ = j) = (1-r) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j^3 \cdot r^{j-1} \tag{58}$$

şeklini alır ki (58) deki sağ tarafta bulunan sonsuz toplamın değeri bir takım cebirsel işlemlerin yapılması ile,

$$\cdot \sum_{j=1}^{\infty} j^3 \cdot r^{j-1} \; \frac{1+4 \cdot r + r^2}{(1-r)^4} \tag{59}$$

haline dönüşür. Buna göre,

$$E(^{+3}) = \frac{1+4 \cdot r + r^2}{(1-r)^3}$$

Merkeze göre üçüncü meretebeden moment ise orijine göre momentler cinsinden,

$$E[n^+ - E(n^+)]^3 = E(n^{+3}) - 3 \cdot E(n^+) \cdot E(n^{+2}) + 2 \,.\, E^3(n^+)$$

Bu son ifadenin sağ tarafındaki terimlerin hepsinin r cinsinden değerleri yukarda bulunmuştur. Bu değerlerin yerlerine konularak gerekli cebirsel işlemlerin tamamlanması ile.

$$E[n^+ - E(n^+)]^3 = \frac{r \cdot (1+r)}{(1-r)^3}$$

Çarpıklık katsayısı bulunan bu üçüncü mertebeden momentin standard sapmanın üçüncü dereceden kuvvetine bölümüne eşittir. O halde gerekli işlemlerin yapılması ile,

$$\gamma_{n^+} = \frac{(1-r)}{r^{1/4}} \tag{60}$$

olarak bulunur. Kesim seviyesinin ortalama değere eşit olması halinde ise

$$\gamma_{n^+} = \frac{(3 \,.\, \pi - 2 \cdot \text{arc} \sin \rho)}{[2\pi(\pi - 2 \cdot \text{arc} \sin \rho)]} \tag{61}$$

Uygulamalar

Gidiş uzunluklarının stasyoner stokastik süreçlere uygulanmasında birbirinden farklı iki gaye mevcuttur. Bunlardan birincisi gidiş uzunluklarının bir hidrolojik serinin bağımlı olup olmadığının araştırılmasıdır. Bir gözlem serisinin pozitif veya negatif gidiş uzunluğunun $p = q = 1/2$ seviyesinde beklenen değerinin 2 olması halinde bağımsız bir süreç mahsülü olduğu ortaya çıkar. Aksi taktirde seri bağımlıdır ve bağımlılığının derecesi pozitif gidiş uzunluğunun beklenen deeri ile ölçülebilir.

Gidiş uzunluklarının kullanılmasındaki diğer önemli nokta ise verilen bir hidrolojik serinin gerek kurak ve gerekse sulak devrelerinin gelecekte alabilecekleri değerlerin tahmin edilmesinde kullanılır. Seriyi türeten mekanizmanın bilinmesi halinde, bu makalede çıkartılmış olan analitik ifadelerle, sulak veya kurak devrelerin gelecek değerleri hakkında ihtimal yorumları yaparak objektif bir tahmin yapmak mümkündür.

Özet ve Sonuçlar

Gözlemlerin birinci mertebeden lineer bağımlı olmaları halinde gidiş özelliklerinin çeşitli istatistiksel ve ihtimal büyüklükleri hakkında nümerik sonuçlara ulaşmayı mümkün kılacak analitik bir yaklaşım bu makalede geliştirilmiştir. Yapılan araştırmalar sonunda gidiş özelliklerinin kesim seviyesi ve birinci mertebeden otokorelasyon katsayısının bir fonksiyonu olacağı anlaşılmıştır. Bu çalışma neticesinde aşağıdaki sonuçları çıkartmak mümkündür.

1) Birinci mertebeden otokorelasyon katsayısı, birinci mertebeden otoregressif süreçlerin gidiş özelliklerinde çok önemli bir yer işgal ederler.

2) Bu makalede geliştirilmiş olan analitik ifadeler hidrolojik gözlemler serisinin bağımsızmı yoksa bağımlımı olduğunun incelenmesine yararlar.

3) Birinci mertebeden otokorelasyon katsayısının artması ile gidiş uzunluklarının uzunlukları da artar, ve böylece süreç daha ısrarlı bir hale gelir.

REFERANSLAR

(1) Cox, D. R., Miller, H. R. 1968. The Theory of Stochastic Processes, New York, John Wiley and Sons, Inc.

(2) Downer, R. N., Siddiqui, M. M., Yevjevich, V., 1967. Application of Runs to Hydrologic Droughts, Proceedings of the International Hydrology Symposium, Fort Collins, Colorado.

(3) Feller, W., 1957. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1, New York, Wiley and Sons, Inc.

(4) Llamas, J., Siddiqui, M. M., 1969. Runs of Precipitation Series, Hydrology Paper No. 33, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.

(5) Millan, J., Yevjevich, V., 1971. Probabilities of Observed Droughts, Hydrology Paper No. 50, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.

(6) Saldarriaga, J., Yevjevich, V., 1970 : Application of Run Lengths to Hydrologic Series, Hydrology Paper No. 40, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.

(7) Yevjevich, V., 1967. An Objective Approach to Definition and Investigations of Continental Hydrologic Droughts, Hydrology Paper No. 23, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.

(8) Yevjevich, V., 1972. Probability and Statistic in Hydrology, Water Resources Publications, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.

(9) Şen, Z., 1976. Wet and Dry Periods of Annual Flow Series, ASCE, Journal of Hydraulics Division. ASCE, Vol. 102, No. HY 10, Proc. paper 12457, October, pp. 1503 - 1514.

(10) Wishard, J., Hirschfeld, H. O., 1936. A Theory Concerning the Distribution of Joint Between Line Segments, London, Mathematicol Society Journal, Vol. 11.