Quelques Reflexions sur la Cinematique Dans le Plau de Lobatchevski

Siegfried HARTMANN (*)

Dans la présente étude nous considérons l'espace de groupe du groupe des mouvements du plan de LOBATCHEVSKI.

Par analogie à l'application cinematique de BLASCHKE - GRÜNWALD nous construirons une application cinematique du plan de LOBATCHEVSKI $\mathfrak{L}^2$ dans l'espace hyperbolique $\mathcal{H}^3$ de dimension trois.

Dans $\mathcal{H}^3$ sont examinés quelques problèmes de la théorie des courbes et surfaces et mis en rapport avec la cinematique dans $\mathfrak{L}^2$.

Les mouvements à deux paramètres, trouvés dans $\mathfrak{L}^2$, se divisent en un produit de deux mouvements de un paramètre. Par rapport à l'application cinematique ces mouvements correspondent à des surfaces dans $\mathcal{H}^3$.

1 — ANTIQUATERNIONS ET LEUR CORRELATION AVEC LE MOUVEMENT DANS LE PLAN DE LOBATCHEVSKI $\mathfrak{L}^2$

Soient e_j les unités quaternionaires (j=0, 1, 2, 3) avec $e_0=1$ et la table des produits :

(1. 1)

e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_0	e_3	e_2
e_2	$-e_3$	e_0	$-e_1$
e_3	$-e_2$	e_1	$-e_0$

Si alors

$$Q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3, \quad q_i \in R, \quad i=0,1,2,3 \tag{1.2}$$

(*) Université d'Oran - Oran/Algérie.

est un antiquaternion, la «conjuguée» sera définie par

(1.3) $$\widetilde{Q} = q_0e_0 \quad q_1e_1 - q_2e_2 - q_3e_3$$

dans laquelle, ici et par la suite les q_i sont des nombres réels.

Alors

(1.4) $$Q\widetilde{Q} = <QQ> = q^2_0 - q^2_1 - q^2_2 - q^2_3$$

Nous désignons le produit scalaire des antiquaternions par

(1.5) $$<QQ'> = q_0q'_0 \quad q_1q'_1 + q_2q'_2 - q_3q'_3$$

Le (4) est désigné également comme la norme de Q:

(1.6) $$Q\widetilde{Q} = N(Q),$$

par conséquent

(1.7) $$N(QQ') = N(Q)\,N(Q').$$

Un antiquaternion avec

(1.8) $$Q + \widetilde{Q} = 2q_0 = 0$$ s'appelle vecteur:

(1.9) $$\underline{q} = q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3.$$

Si nous représentons le produit scalaire de vecteurs par

(1.10) $$<\underline{q}, \underline{q}'> = -q_1q_1' - q_2q_2' + q_3q_3'$$

et leur produit vectoriel par

(1.11) $$[\underline{q}, \underline{q}'] = -(q_2q_3' - q_3q_2')e_1 - (q_3q_1' - q_1q_3')e_2 + (q_1q_2' - q_2'q_1')\,e_3.$$

nous avons pour $Q = q_0 + \underline{q}$, $Q' = q_0' + \underline{q}'$

(1.12) $$QQ' = q_0q_0' + q_0\underline{q}' + q_0'\underline{q} - <\underline{q}, \underline{q}'> + [\underline{q}, \underline{q}']$$

L'antiquaternion normé peut également prendre la forme suivante :

(1.13) $$Q = ch\,\varphi + \underline{q}\,.\,sh\,\varphi, \quad \underline{q}\,\underline{q} - 1$$

Nous constatons que les mouvements dans le plan de LOBATCHEVSKI peuvent se représenter très aisément à l'aide des antiquaternions: Si nous introduisons notamment les vecteurs

(1.14)
$$\underline{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$
$$\underline{x}' = x_1' e_1 + x_2' e_2 + x_3' e_3$$

et l'antiquaternion normé :

(1.15)
$$\breve{Q}Q = N(Q) = 1,$$

la transformation $\underline{x}' \to \underline{x}$

(1.16)
$$\underline{x} = Q\underline{x}'\underline{Q}$$

une substitution orthogonale proprement dite des x_i' en x_i. Car nous avons

(1 17)
$$N(\underline{x}) = N(\breve{Q})N(\underline{x}')N(Q) = N(\underline{x}')$$

ou

(1.18)
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2.$$

En outre, si $\underline{x}'$ est un vecteur, il en est de même de $\underline{x}$ parce que

$$\underline{x} + \breve{\underline{x}} = \breve{Q}(\underline{x}' + \breve{\underline{x}}')Q = 0.$$

La déterminante de (16) est égale $+1$. Les transformations (16) forment le groupe G_3.

Considérons les x_i comme coordonnées homogènes d'un point dans le plan de LOBATCHEVSKI. La transformation (16) qui transforme x_i' à x_i, elle représente le mouvement dans ce plan. A cause de (18) ce plan

(1.19)
$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

est invariable, par rapport des transformations linéaires orthogonales (16). Par conséquent, les distances entre les points restent invariables.

Nous obtenons de la sorte une concordance mono-univoque entre les antiquaternions Q et les mouvements dans le plan de LOBATCHEVSKI.

2 — L'ESPACE HYPERBOLIQUE $\mathcal{H}^3$ ET APPLICATION DES DROITES DU $\mathcal{H}^3$ DANS LE PLAN $\mathcal{L}^2$

Prenons les coordonnées q_i d'un antiquaternion normé Q comme coordonnées homogènes d'un point dans un espace projectif $\mathcal{E}^3$ de dimension 3. Nous appelons de nouveau Q le point déterminé par q_i dans $\mathcal{E}^3$.

De la sorte q'il existe une correspondance mono-univoque entre les mouvements (1.16) dans le plan dé LOBATCHEVSKI et les points de $\mathfrak{C}^3$:

L'espace projectif $\mathfrak{C}^3$ est l'espace de groupes du groupe G_3 des mouvements du plan de $\mathfrak{L}^2$.

L'ensemble des points Q dans $\mathfrak{C}^3$, avec $N(Q)=0$ forme la quadrique :

(2.1) $$<Q\,Q> = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 = 0.$$

On l'appelle le quadrique absolue de mesure.

Si enfin nous exprimons la distance entre deux points normés Q, Q', par

(2.2) $$d^2 = (q_0 - q_0')^2 - (q_1 - q_1')^2 - (q_2 - q_2')^2 + (q_3 - q_3')^2$$
$$<QQ> = <Q'Q'> = 1,$$

nous introduisons une métrique dans $\mathfrak{C}^3$.

L'espace $\mathfrak{C}^3$ ainsi «métrisé» est l'espace hyperbolique $\mathcal{H}^3$ avec l'indice 2.

Les points pour lesquels vaut :

(2.3) $$<QQ'> = 0,$$

s'appellent mutuellement polaires.

En applicant x, x' une transformation orthogonale :

(2.4) $$\underline{x}'^* = \widetilde{R}'\underline{x}'R', \quad \underline{x}^* = \widetilde{R}\underline{x}R, \quad R\widetilde{R}' = R\widetilde{R} = 1,$$

la transformation (1.16) est remplacée par la nouvelle

(2.5) $$\underline{x}^* = \widetilde{Q}^* \underline{x}'^* Q^*$$

dans laquelle

(2.6) $$Q^* = R'QR, \quad R\widetilde{R}' = R\widetilde{R} = 1.$$

Ce passage de q_i ve. . les q_i' est une transformation antiquaternaire orthogonale. Il est aisé de voir que sa déterminante est égale à 1. Il est clair que l'on peut représenter toute transformation de ce genre par un choix approprié de R, R' dans (6).

Les transformations orthogonales (6) laissant invariante la distance entre les points dans $\mathcal{H}^3$, on peut se les figurer comme des mouvements dans l'espace hyperbolique $\mathcal{H}^3$.

Prenons maintenant Q, Q' deux points polaires normés dans le: $\mathcal{H}^3$:

(2.7) $$<QQ> = <Q'Q'> = 1, \quad <QQ'> = 0.$$

Nous formons les produits

(2.8) $$\underline{x} = \widetilde{Q}Q' \ , \quad \underline{x}' = \widetilde{Q'}Q$$

et nous constatons que x, x' sont des vecteurs unitaires:

$$x + \widetilde{\underline{x}} = \widetilde{Q}Q' + \widetilde{Q'}\,Q = 2<QQ'> = 0,$$

(2.9) $$\underline{x}' + \widetilde{\underline{x}'} = \widetilde{Q'}Q + \widetilde{Q}Q' = 2<QQ'> = 0,$$

$$\widetilde{\underline{x}}\,\underline{x} = \widetilde{\underline{x}'}\,\underline{x}' = 1$$

Tout comme dans le § 1, nous considérerons les x_i, x_i' comme coordonnées homogènes des points dans le plan $\mathcal{L}^2$. A son tour, le point des coordonnées x_i, p.ex. sera désigné par $\underline{x}$.

Alors il est adjoint univoquement à chaque droite g passant par deux points polaires Q, Q' un couple de points $\underline{x}$, $\underline{x}'$ dans $\mathcal{L}^2$. Les points $\underline{x}$, $\underline{x}'$ ne dépendent pas de choix des points Q, Q' sur la droite g. Aux droites du faisceau de droites dans $\mathcal{H}^3$ avec le centre de faisceau Q correspondent les champs de points $\{\underline{x}\}$, $\{\underline{x}'\}$ dans le plan de l'image qui se confondent par le mouvement Q.

L'image d'un point, conçu comme porteur d'un faisceau de rayons, est donc un mouvement dans le plan $\mathcal{L}^2$.

L'application cinématique que l'on obtient du plan $\mathcal{L}^2$ sur les points de l'espace $\mathcal{H}^3$ est beaucoup plus générale que l'application cinématique connue de BLASCHKE - GRÜNWALD du plan euclidien sur les points de l'espace quasi-elliptique, ainsi que les applications des rotations de la sphère (mouvement du plan elliptique) sur les points de l'espace elliptique [1], [2], [4].

Aux mouvement de l'espace $\mathcal{H}^3$ (6) rapportés sur la droite g, correspondent de manière indépendante des mouvements (4).

On en déduit le résultat que le groupe G_6 des mouvements de l'espace $\mathcal{H}^3$ est isomorphe au produit des groupes G_3, G_3' des mouvements du plan $\mathcal{E}^2$.

A chaque droite g, passant par deux points polaires Q et Q' du $\mathcal{H}^3$, correspond en $\mathcal{E}^2$, par (8) le couple de points $(\underline{x}, \underline{x}')$.

Si nous réalisons la liaison avec les coordonnées droites de PLÜCKER g_{ik} de la droite g, nous avons

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g_{01} + g_{23}\,, & x_1' &= g_{01} - g_{23} \\
x_2 &= g_{02} + g_{31}\,, & x_2' &= g_{02} - g_{31} \qquad (2.10) \\
x_3 &= g_{03} - g_{12}\,, & x_3' &= g_{03} + g_{12}
\end{aligned}
$$

où x_i et x_i' sont des coordonnées des vecteurs $\underline{x}$, $\underline{x}'$.

Deux droites $(\underline{x}, \underline{x}')$, $(\underline{x}^*, \underline{x}'^*)$ en $\mathcal{H}^3$ sont appelées parallèles gauches ou parallèles droites lorsque

$$(2.11) \qquad \underline{x} = \underline{x}^* \quad \text{ou} \quad \underline{x}' = \underline{x}'^* \;.$$

Toutes les droites parallèles gauches coupent une même paire de droites non coplanaires qui appartiennent au «groupe droit» et inversément.

Pour des droites parallèles gauches et pour des droites parallèles droites nous avons

$$
(2.12) \qquad
\begin{aligned}
g_{01} - g_{23} &= g_{01}^* - g_{23}^* & \qquad g_{01} + g_{23} &= g_{01}^* + g_{23}^* \\
g_{02} - g_{31} &= g_{02}^* - g_{31}^* \quad \text{ou} & g_{02} + g_{31} &= g_{02}^* + g_{31}^* \\
g_{03} + g_{12} &= g_{03}^* + g_{12}^* & g_{03} - g_{12} &= g_{03}^* - g_{12}^*
\end{aligned}
$$

Le parallélisme introduit de cette manière correspond au parallélisme de CLIFFORD.

D'une manière analogue à la transposition dans la géométrie euclidienne, la transformation

$$(2.13) \qquad X' = AX \quad \text{ou} \quad X^* = XB$$

transfère en $\mathcal{H}^3$ toutes les droites parallèles gauches et toutes les droites parallèles droites les unes dans les autres.

Nous désignons cette transformation par déplacement à gauche ou déplacement à droite.

Un mouvement quelconque en $\mathcal{H}^3$

$$X' = AXB \tag{2.14}$$

peut être représenté comme le produit d'un déplacement à gauche et d'un déplacement à droite.

D'une manière correspondant à ce glissement de plan, nous désignons le plan permettant une représentation canonique

$$X(u, v) = A(u)\, B(v) \tag{2.15}$$

Ici se pose le problème de trouver dans $\mathcal{H}^3$ les surfaces qui peuvent se représentent comme deux espèces essentiellement différentes ayant la forme (15) (généralisation du problème de S.LIE [3] dans le $\mathcal{H}^3$)

En cinématique, ce problème correspond à la recherche, dans le plan $\mathcal{L}^2$, de mouvements de deux paramètres, qui peuvent s'analyser de deux manières essentiellement différentes en produit de deux mouvements d'un paramètre.

3 — MOUVEMENTS D'UN PARAMETRE

a) Mouvements dans l'espace hyperbolique $\mathcal{H}^3$

Soient données g et g^* deux droites de $\mathcal{H}^3$. D'une manière analogue à ce qui est exposé au § 2, leurs images sont représentées dans le plan $\mathcal{L}^2$ par les couples de points $(\underline{x}, \underline{x}')$, $(\underline{x}^*, \underline{x}'^*)$. Nous désignons l'angle φ et l'angle φ' entre les droites g et g^* par

$$ch\, \varphi = \langle \underline{x}, \underline{x}^* \rangle \quad \text{ou} \quad ch\, \varphi' = \langle \underline{x}', \underline{x}'^* \rangle \tag{3 1}$$

Si les droites se coupent de sorte que $\varphi = \varphi'$, alors

$$\langle \underline{x}, \underline{x}^* \rangle = \langle \underline{x}_1', \underline{x}'^* \rangle \tag{3.2}$$

Si nous considérons un point Q sur g, et traçons à travers lui une droite $\overset{\frown}{g}$ parallèle gauche par rapport à g^*, ou parallèle droite par rapport à g^*, l'angle entre g et $\overset{\frown}{g}$ devient égal à φ ou respectivement à φ'.

Si maintenant nous considérons en $\mathcal{H}^3$ le mouvement

$$Q^* = \overset{\frown}{R}'\, Q\, R\,, \tag{3.3}$$

où $\qquad R' = ch\, \varphi' + \underline{a}'\, sh\, \varphi'\,, \; R = ch\, \varphi + \underline{a}\, sh\, \varphi$

Lors de ce mouvement, chaque point Q sur la droite $(\underline{a}, \underline{a}')$ est transformé en un nouveau point Q sur cette droite. Alors le mouvement (3) laisse invariant la droite $(\underline{a}, \underline{a}')$ et sa polaire comme un ensemble.

Si nous mettons en (3) $R' = \cos\varphi' + \underline{e} \sin\varphi'$, $R = \cos\varphi + \underline{e} \sin\varphi$, la droite $(\underline{e}, \underline{e})$ et sa polaire restent également invariant comme un ensemble.

Si maintenant $\varphi = \varphi'$, le mouvement (3) s'analyse en une rotation autour de la droite $(\underline{a}, \underline{a}')$ ou $(\underline{e}, \underline{e})$ de $\mathcal{H}^3$.

De cette façon, un mouvement quelconque (3) dans le $\mathcal{H}^3$ laisse invariant une droite déterminée et sa polaire comme un ensemble, c'est à dire qu'un mouvement quelconque peut se figurer comme hélicoide.

b) Mouvement dans le plan $\mathcal{E}^2$

Par

$$\underline{x}(t) = \tilde{Q}(t)\, \underline{x}'\, Q(t) \quad , \quad \tilde{Q}Q = 1 \quad , \quad t \in I \tag{3.4}$$

un processus de mouvement d'un paramètre $M = K'/K$ du système de coordonnées K' est décrit dans le plan $\mathcal{E}^2$, par rapport au système de coordonnées fixes K, lors duquel le paramètre t («temps») parcourt un intervalle ouvert réel I. L'image d'un point fixe $\underline{x}'$ de K' parcourt dans le système de coordonnées fixes K une courbe $\underline{x}(t)$ que nous désignons comme trajectoire du point $\underline{x}'$.

Dans l'espace hyperbolique $\mathcal{H}^3$ le point $Q(t)$ décrit une trajectoire C. Nous y rattachons le tétraèdre mobile ayant les somments $Q_0 = Q(t)$, Q_1, Q_2, Q_3 de sorte que le point Q_1 vient se poser sur la tangente en Q à C, et que le point Q_2 vient se poser dans le plan osculateur de C en Q_0. Alors, Q_3 est le pôle du plan osculateur par rapport au quadrique absolu (2.1).

Alors sont valables en $\mathcal{H}^3$ les équations dérivées de la forme:

$$\begin{aligned} dQ_0 &= Q_1\, ds \\ dQ_1 &= -<Q_1 Q_1> Q_0\, ds + Q_2\, \mathcal{K}\, ds \\ dQ_2 &= -<Q_1 Q_1><Q_2 Q_2> Q_1\, \mathcal{K}\, ds + Q_3\, \tau\, ds \\ dQ_3 &= -<-Q_2 Q_2><Q_3 Q_3> Q_2\, \tau\, ds \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $ds = \sqrt{|<\dot{Q}\dot{Q}>|}\; dt$ est l'arc parametrique et $\mathcal{K}$, τ

$$(3.6)\qquad \mathcal{K} = \left| \frac{<\dot{Q}\dot{Q}> <\ddot{Q}\ddot{Q}> - <\dot{Q}\ddot{Q}>^2}{<\dot{Q}\dot{Q}>^3} - 1 \right|, \quad \mathcal{K} = \frac{[Q\dot{Q}\ddot{Q}\dddot{Q}]}{<\dot{Q}\dot{Q}>^3}$$

sont la courbure et la torsion de la courbe C.

Les formules (5) représentent l'analogie avec les équations de FRENET de la théorie des courbes dans l'espace euclidien.

La tangente à la courbe $Q(t)$ dans le $\mathcal{H}^3$ a comme représentation dans le plan $\mathcal{L}^2$ le couple de point $(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$. Au dévoloppable à la courbe $Q(t)$ correspondent en $\mathcal{L}^2$ deux courbes $p^{(1)}$ et $p'^{(1)}$ isométriques entre elles

$$(3.7)\qquad \underline{p}^{(1)} = \widetilde{Q}(t)\dot{Q}_1(t) = \frac{\widetilde{Q}\dot{Q}}{\sqrt{|<\dot{Q}\dot{Q}>|}}, \quad \underline{p}'^{(1)} = -\frac{\widetilde{\dot{Q}}Q}{\sqrt{|<\dot{Q}\dot{Q}>|}}$$

Soit $\underline{x}'$ un point fixe en K' de $\mathcal{L}^2$.

De (4) suit par dérivation de t :

$$(3.8)\qquad d\underline{x} = d\widetilde{Q}\,\underline{x}'Q + \widetilde{Q}\,\underline{x}'dQ$$

Si, dans (7) nous remplaçons $\underline{x}'$ par (4) en tenant compte de (5), nous obtenons

$$(3.9)\qquad d\underline{x} = 2[\underline{x}, \underline{p}]\, ds$$

Ici, $\frac{d\underline{x}}{dt}$ signifie la vitesse absolue du point $\underline{x}'$ de K' par rapport au système fixe K.

De

$$(3.10)\qquad \underline{p} = \widetilde{Q}\underline{p}'Q$$

par suite

$$(3.11)\qquad d\underline{p} = \{d\widetilde{Q}\,\underline{p}'Q + \widetilde{Q}\underline{p}'dQ\} + \widetilde{Q}d\underline{p}'Q$$

où l'expression entre parenthèses, tenant compte de (7) devient égale à zéro et l'on obtient alors

$$(3.12)\qquad d\underline{p} = \widetilde{Q}d\underline{p}'Q$$

Etant donné que chaque point de temps possède un pôle momentané, p prend, au cours du mouvement M, différentes positions dans les deux systèmes de coordonnées.

On déduit de ceci à l'aide de (12) que le mouvement d'un paramètre en $\mathcal{L}^2$ peut se représenter comme un roulement sans glissement de la courbe polaire mobile $p(t)$ sur la courbe polaire fixe $p'(t)$, et qu'elle sont donc en relation isométrique.

En considérant un mouvement d'un paramètre en $\mathcal{H}^3$, dans lequel un point quelconque décrit une trajectoire C (courbe $Q(t)$), la droite (p, p') est sa polaire forment les axes hélicoidaux momentanés du mouvement.

Si maintenant $Q(t)$ (courbe décrite C dans $\mathcal{H}^3$) est une droite, notre mouvement dans le plan se réduit au mouvement autour du point fixe p.

4 — HELICES DANS $\mathcal{H}^3$

Les courbes de BERTRAND les plus simples dans le $\mathcal{H}^3$ sont les hélices, dans lesquelles la courbure $\mathcal{K}$ et la torsion τ sont constants. Elles naissent comme des trajectoires de groupes de mouvements monotermes dans le $\mathcal{H}^3$. Prenons par exemple un tel groupe autour de l'axe (e_1, e_2) :

(4.1) $$Q(t) = (e_0 ch\alpha t - e_1 sh\alpha t) Q' (e_0 ch\beta t + e_2 sh\beta t)$$

Le point (1) ayant

(4.2) $$Q' = e_0 ch\varphi + e_2 sh\varphi$$

décrit alors une hélice S dans $\mathcal{H}^3$.

Si nous posons

(4.3) $$\alpha - \beta = \gamma, \quad \alpha + \beta = \delta$$

nous obtenons pour S

(4.4) $$Q(t) = (ch\varphi ch\gamma t)e_0 + (ch\varphi sh\gamma t)e_1 + (sh\varphi ch\delta t)e_2 - (sh\varphi sh\delta t)e_3$$

Par conséquent S se trouve sur le cylindre

(4.5) $$q_0^2 - q_1^2 = ch^2\varphi \quad \text{ou} \quad q_2^2 - q_3^2 = sh^2\varphi$$

(C'est la surface réglée dont les génératices sont parallèles.

Il s'ensuit d'apres (3.6) que

$$(4.6)\qquad \mathcal{K}^2 = \left| \frac{\gamma^4 ch^2\varphi - \delta^4 sh^2\varphi}{\sigma^2} - 1 \right| , \qquad \tau\mathcal{K}^2 = \frac{\gamma\delta(\gamma^2+\delta^2)^2 ch^2\varphi - sh^2\varphi}{\sigma^2}$$

où nous avons mis $\sigma=\gamma^2 ch^2\varphi-\delta^2 sh^2\varphi$.

Lors de l'application S dans le plan $\mathcal{L}^2$, si, en vue de la simplification, on introduit les grandeurs $\gamma+\delta=\mu$ et $\gamma-\delta=\nu$ on obtient :

$$(4.7)\qquad \begin{aligned} a\, p(t) &= (\gamma ch^2\varphi-\delta sh^2\varphi)e_1 + (\nu ch\varphi sh\varphi sh\mu t)e_2 - (\nu ch\varphi sh\varphi ch\mu t)e_3 \\ a.p'(t) &= (\gamma ch^2\varphi + \delta sh^2\varphi)e_1 + (\mu ch\varphi sh\varphi sh\nu t)e_2 - (\mu ch\varphi sh\varphi ch\nu t)e_3 \\ a^2 &= |\sigma| \end{aligned}$$

Ce sont des cercles du plan $\mathcal{L}^2$. Plus particulièrement, pour $\gamma=0$ (resp. $\delta=0$) S devient une coupe plane du cylindre (5), *c.* à *d.* donc une droite ou un cercle dans $\mathcal{H}^3$.

Si nous considérons maintenant le groupe des mouvements autour de l'axe (e_3, e_3) soit donc

$$(4.8)\qquad Q(t)=(e_0 cos\alpha t - e_3 sin\alpha t)Q'(e_0 cos\beta t + e_3 sin\beta t)$$

le point (8) décrit avec (2) une hélice S' dans $\mathcal{H}^3$, dont on peut représenter les coordonnées par

$$(4.9)\qquad q_0 = ch\varphi cos\gamma t,\quad q_1 = sh\varphi cos\delta t,\quad q_2 = sh\varphi sin\delta t,\quad q_3 = ch\varphi sin\gamma t$$

S' se trouve sur le cylindre

$$(4.10)\qquad q_0^2+q_3^2 = ch^2\varphi \quad ou \quad q_1^2+q_2^2 = sh^2\varphi .$$

La courbure $\mathcal{K}$ et la torsion τ de S' correspondent aux expressions de (6). Si nous appliquons S' dans le plan $\mathcal{L}^2$, nous obtenons comme pour S des cercles du plan $\mathcal{L}^2$:

$$(4.11)\qquad \begin{aligned} a\, .\, p(t) &= (-\nu ch\varphi sh\varphi sin\mu t)e_1 + (\nu ch\varphi sh\varphi cos\mu t)e_2 + (\gamma ch^2\varphi - \delta sh^2\varphi)e_3 \\ a\, .\, p'(t) &= (\mu ch\varphi sh\varphi sin\nu t)e_1 + (-\mu ch\varphi sh\varphi cos\nu t)e_2 - (\gamma ch^2\varphi - \delta sh^2\varphi)e_3 \end{aligned}$$

5 — MOUVEMENTS À DEUX PARAMETRES DANS $\mathcal{L}^2$ ET L'APPLICATION CINEMATIQUE DE LA SURFACE DE TRANSPOSITION DE $\mathcal{H}^3$

Nous considérons un mouvement de deux paramètres dans le plan $\mathcal{L}^2$

(5.1) $$x(u,v)=\widetilde{Q}(u,v)x'Q(u,v), \quad \widetilde{Q}Q=1$$

Dans l'espace $\mathcal{H}^3$ le point $Q=Q(u,v)$ décrit une surface ϕ. Nous y rattachons le tétraèdre mobile Q, Q_u, Q_v, P—où P est le pôle du plan tangent par rapport à la quatrique absolue.

Supposé que

(5 2) $$p_1=\frac{Q\,Q_u}{\sqrt{|E|}}, \quad p_1'=\frac{Q_u\widetilde{Q}}{\sqrt{|E|}}$$
$$p_2=\frac{\widetilde{Q}\,Q_v}{\sqrt{|G|}}, \quad p_1'=\frac{Q_v\widetilde{Q}}{\sqrt{|G|}}$$

où E, G soient les coefficients de la première forme quadratique de surface :

$$<dQ\;dQ> = E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$
$$E=<Q_u\,Q_u>\;,\quad F=<Q_u\,Q_v>\;,\quad G=<Q_v\,Q_v>\quad .$$

Pour les surfaces de la courbure de GAUSS nul, p_1, p_2 resp. p_1', p_2' ne sont dépendants que de u resp. de v et on a

$$Q(u,v)=R(u)\,Q(O,O)\,R'(v)$$

alors la surface de la courbure nul est la surface de transposition

(5.3) $$Q(u.v)=R(u)\,R'(v)$$

Les mouvements, lesquels correspondent aux surfaces de la courbure nul, se divisent en un produit de deux mouvements à une paramètre.

(5 4) $$x(u)=\widetilde{R}(u)x'\,R(u)\;,\; x(v)=\widetilde{R}'(v)\,x'\,R'(v)$$

Ici se pose le problème de trouver les mouvements à deux paramètres dans le plan $\mathcal{L}^2$, qui s'analysent de deux manières essentiellement différentes en un produit de deux mouvements d'un paramètre.

Soit donné dans $\mathcal{H}^3$ un groupe de mouvement d'un paramètre autour de l'axe (e_1, e_1) :

(5.5) $$X=(e_0\,ch\,\alpha t-e_1\,sh\,\alpha t)\,Q\,(e_0\,ch\,\beta t+e_1\,sh\,\beta t)$$

Lors de ce mouvement la courbe plane

(5.6) $$q_0=u\;,\;q_1=o\;,\;q_2=r(u)\;,\;q_3=s(u)\;,\;u^2-r^2+s^2=1$$

decrit une hélicoîde :

$$(5.7a)\qquad \begin{aligned} x_0 &= u\, ch\, v \\ x_1 &= u\, sh\, v \\ x_2 &= r(u)\, ch\, \varphi v + s(u)\, sh\, \varphi v \\ x_3 &= r(u)\, sh\, \varphi v + s(u)\, ch\, \varphi v \end{aligned} \qquad \text{où}\ \begin{aligned} \varphi \,.\, v &= (\alpha - \beta) t \\ v &= (\alpha + \beta) t \end{aligned}$$

Dans le cas particulier, lorsque $\varphi=0$, nous obtenons une surface de révolution autour de l'axe $(e_1 e_1)$:

$$(5.7b)\qquad \begin{aligned} x_0 &= u\, ch\, v \\ x_1 &= u\, sh\, v \\ x_2 &= r(u) \\ x_3 &= s(u) \end{aligned}$$

Enfin dans $\mathcal{H}^3$ l'équation d'une surface réglée peut être representée par

$$(5.8)\qquad X(u, v) = Q(u) \cos v + Q'(u) \sin v \qquad \text{avec}$$

$$\langle QQ \rangle = \langle Q'Q' \rangle = 1\ ,\ \langle Q.Q' \rangle = 0$$

Pour l'application cinématique nous considérons maintenant comme surfaces de transposition, des surfaces, qui sont engendrées par déplacement à droite de l'hélice $B(v)$ le long de l'autre hélice $A(u)$ dans $\mathcal{H}^3$ ou par déplacement à gauche de l'hélice $A(u)$ le long de l'hélice $B(v)$.

Alors nous obtenons comme surfaces de transposition (dans la représentation canonique)

$$(5.9)\qquad X(u, v) = A(u)\, B(v)$$

où

$$A(u) = (ch\varphi\, ch\alpha u)\, c_0 + (sh\varphi\, ch\,(1-\alpha)u) e_1 + (ch\varphi\, sh\alpha u)\, c_2 + (sh\varphi\, sh(1-\alpha)u) e_3$$

$$B(v) = (sh\Psi\, sh\alpha v)\, c_0 + (ch\Psi\, sh(1-\alpha)v)\, e_1 + (sh\Psi\, ch\alpha v) c_2 + (ch\Psi\, ch(1-\alpha)v) e_3$$

Ces surfaces (9) correspondent aux mouvements à deux paramètres dans $\mathcal{L}^2$, qui se divisent en un produit de deux mouvements d'un paramètre correspendants aux courbes $A(u)$, $B(v)$ dans $\mathcal{H}^3$.

$$(5.10)\qquad \underline{x}(u) = \widetilde{A}(u)\, \underline{x}' A(u)\ ,\quad \underline{x}(v) = \widetilde{B}(v)\, \underline{x}' B(v)$$

Si l'on représente ces mouvements d'un paramètre en coordonnées, on obtient de (10) pour $A(u)$.

$$x_1=(ch^2\varphi\, ch\,2\alpha u - sh^2\varphi\, ch\,2(1-\alpha)u)x_1' - (sh\,2\varphi\, sh\,u)x_2' + (ch^2\varphi\, sh\,2\alpha u + sh^2\varphi\, sh\,2(1-\alpha)u)x_3'$$

$$(5.11)\qquad x_2=(sh\,2\varphi\, sh(1-2\alpha)u)x_1' + (ch\,2\varphi)x_2' - sh\,2\varphi\, ch(1-2\alpha)u)x_3'$$

$$x_3=(ch^2\varphi\, sh\,2\alpha u - sh^2\varphi\, sh\,2(1-\alpha)u)x_1' - (sh\,2\varphi\, ch\,u)x_2' + (ch^2\varphi\, ch\,2\alpha u + sh^2\varphi\, ch\,2(1-\alpha)u)x_3'$$

et pour $B(v)$

$$x_1=(sh^2\Psi\, ch\,2\alpha v - ch^2\Psi\, ch\,2(1-\alpha)v)x_1' - (sh\,2\Psi\, sh\,v)x_2' + (sh^2\Psi\, sh\,2\alpha v + ch^2 sh\,2(1-\alpha)v)x_3'$$

$$(5.12)\qquad x_2=(sh\,2\Psi\, sh(1-2\alpha)v)x_1' - (ch\,2\Psi)x_2' - (sh\,2\Psi\, ch(1-2\alpha)v)x_3'$$

$$x_3=(sh^2\Psi\, sh\,2\alpha v - ch^2\Psi\, sh\,2(1-\alpha)v)x_1' - (sh\,2\Psi\, ch\,v)x_2' + (sh^2\Psi\, ch\,2\alpha v + ch^2\Psi\, ch\,2(1-\alpha)v)x_3'$$

On peut se représenter ces mouvements comme le roulement de la trajectoire polaire mobile sur la trajectoire polaire immobile.

On obtient de (11 pour la trajectoire polaire mobile resp. pour la trajectoire polaire immobile

$$\delta_1 x_1 = (1-2\alpha)\, ch\varphi\, sh\varphi\, sh\,u \qquad \delta_1 x_1' = ch\varphi\, sh\varphi\, sh(1-2\alpha)u$$

$$\delta_1 x_2 = \alpha ch^2\varphi - (1-\alpha) sh^2\varphi \qquad \text{resp.} \qquad \delta_1 x_2' = \alpha ch^2\varphi - (1-\alpha) sh^2\varphi$$

$$\delta_1 x_3 = -(1-2\alpha) ch\varphi\, sh\varphi\, ch\,u \qquad \delta_1 x_3' = -ch\varphi\, sh\varphi\, ch(1-2\alpha)u$$

$$\text{où} \quad \delta_1^2 = |\alpha^2 ch^2\varphi - (1-\alpha)^2 sh^2\varphi|$$

et par analogie de (12)

$$\delta_2 x_1 = (1-2\alpha)\, ch\Psi\, sh\Psi\, sh\,v \qquad \delta_2 x_1' = ch\Psi\, sh\Psi\, sh(1-2\alpha)v$$

$$\delta_2 x_2 = -(1-2\alpha) ch^2\Psi + \alpha sh^2\Psi \qquad \text{resp} \qquad \delta_2 x_2' = -(1-\alpha) ch^2\Psi + \alpha sh^2\Psi$$

$$\delta_2 x_3 = -(1-2\alpha) ch\Psi\, sh\Psi\, ch\,v \qquad \delta_2 x_3' = -ch\Psi\, sh\Psi\, ch(1-2\alpha)v$$

$$\text{ou} \quad \delta_2^2 = |\alpha^2 sh^2\Psi - (1-\alpha)^2 ch^2\Psi|$$

Ce sont des cercles avec des rayons différents dans $\mathfrak{L}^2$. Si l'on considère d'autres genres de surfaces de transposition (9) on obtient comme des trajectoires polaires également des cercles, mais avec rayons different.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLASCHKE, W.: Kinematik und Quaternionen, Berlin 1960.

[2] BLASCHKE, W. - MÜLLER, H. R.: Ebene Kinematik, München 1956.

[3] LIE, S.: Das Abelsche Theorem und die Translationsmanigfaltigkeiten, Bericht 29 Leipzig 1897.

[4] MÜLLER, H. R.: Sphärische Kinematik, Berlin 1962.