Homojen Ağırlıklarına Bağlı Galois Halkaları Üzerinde Tanımlı Lineer Kodlarda Sınırlar ve Mükemmel Kodlar

Proje No: 109T328

Doç.Dr. Mehmet ÖZEN
Prof. Dr. İrfan ŞİAP
Yrd. Doç. Dr. Vedat ŞİAP
Arş. Gör. Elif Segah ÖZTAŞ

MAYIS 2012
SAKARYA

ÖNSÖZ

Mükemmel kod inşa etme konusu, kodlama teorisinde son zamanlarda araştırma konusu olan önemli konulardan biridir. Aşikar olmayan mükemmel kod elde etme birçok disiplinler arası çalışmalar açısından önemlidir. Bunlardan birkaçı kombinatorik, kriptografi, çizge teorisi, grup teorisi ve geometri vb. olarak sıralanabilir. Bununla birlikte, mükemmel kod varlığının tespiti kodlama teorisinde en zor problemlerden biri olmasından dolayı çok sayıda araştırmacı tarafından ele alınmış bir konudur.

Mükemmel kod çalışması farklı metrik uzaylar ele alınarak çalışılmıştır. Özellikle, Hamming metriği üzerinde mükemmel kodlar ile ilgili farklı çalışmalar bulunmaktadır. Bu metrik kullanılarak lineer kodlar için farklı uzaylar üzerinde Hamming sınırı elde edilmiş ve bu sınırda eşitlik olması durumunda mükemmel kod varlığının olup olmadığı araştırması yapılmıştır. Bu bağlamda, TÜBİTAK tarafından desteklenen 109T328 nolu bu projede de benzer bir çalışma Homojen metriği ele alınarak Galois halkasının özel durumları olan halkalar üzerinde bazı homojen ağırlıklara göre sınırlar elde edilmiş ve eşitlik durumlarında mükemmel kod varlığının olup olmadığı araştırması yapılmıştır.

İÇİNDEKİLER

TABLO ve ŞEKİL LİSTELERİ

ÖZET

Kodlama teorisinde aşikar olmayan mükemmel kodun varlığının olup olmadığı problemi en zor problemlerden bir tanesidir. Bu yüzden araştırmacılar tarafından dikkatle ele alınarak farklı metrikler üzerinde farklı metotlar üretilerek problemin zorluğu aşılmaya çalışılmıştır. Bu çalışmada, mükemmel kod varlığının olup olmadığı Homojen metriği ele alınarak çalışılmıştır. Homojen metriğine göre Galois halkalarının özel durumları üzerinde belirli ağırlıklara göre lineer kodlar için sınırlar elde edilmiştir. Mükemmel kod varlığının olup olmadığı elde edilen sınırlarda eşitlik durumuna bakılarak irdelenmiştir. Eşitlik durumunda aşikar olmayan mükemmel kod parametrelerini verecek pozitif tamsayı değerlerinin olup olmadığı araştırması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sınırlar, Lineer kodlar, Galois Halkaları, Homojen Ağırlıklar, Mükemmel Kodlar

ABSTRACT

The topic of perfect codes is one of the most important and investigated recently topics in coding theory. The study of nontrivial perfect codes is important from coding point of view. However, the problem of the existence of perfect codes is one of the most difficult problems in coding theory and it has been studied by many researchers. In this study, we obtain bounds for error correcting codes of some particular homogeneous weights over the special cases of Galois rings. We also study these bounds to check the existence of perfect linear codes.

Keywords: Bounds, Linear Codes, Homogenous Weights, Galois Rings, Perfect Codes

1. GİRİŞ

Preparata, Kerdock, vs. gibi iyi parametrelere sahip bazı lineer olmayan kodlar, uzaklığı koruyan Gray fonksiyonu yardımıyla bazı lineer $\mathbb{Z}_4$ kodların görüntüsü olarak elde edilmiştir. Bu ise lineer olmayan yani cebirsel olarak zayıf bir yapıya sahip kodları, bazı özel halkalar üzerinde tanımlı lineer yani cebirsel yapıya sahip kodlar olarak temsil etme olanağı sağlamıştır. Bu nedene bağlı olarak, bazı özel halkalar üzerinde tanımlı kodları ve bu kodlar ile sonlu cisimler üzerinde tanımlı klasik kodlar arasındaki ilişkileri araştırma yönelimi artmıştır. Bu yöndeki çalışmalara bir örnek ise Galois halkası üzerinde tanımlı ve homojen ağırlığa bağlı kodlardır.

Kodların parametreleri kodların kapasiteleri hakkında bilgi verir; örneğin hata düzeltme yeteneğini gösterir. Dolayısıyla, kodların parametreleri arasındaki ilişkileri veren ve sınırlar olarak adlandırılan eşitsizlikler önemlidir. Optimal yada mükemmel olarak adlandırılan ve en iyi parametrelere sahip olan kodlar önemlidir. Bu tip kodların var olup olmadıkların çok önemli bir problemdir. Bu sorular literatürde farklı kod ve metriklere göre çalışılmaktadır. Bu çalışmada Galois halkası üzerinde tanımlı ve homojen ağırlığa bağlı olarak kodlar için sınır eşitsizliği ispat edilecektir. Bu genellemenin özel bir hali olan Lee metriğine bağlı olarak $\mathbb{Z}_4$ (quaternary) kodlar için bir sınır eşitsizliği verilecektir. Ayrıca, bu sınırı sağlayan ve mükemmel kodlar olarak adlandırılan kodların varlığı araştırılacaktır. Mükemmel kodların varlığı durumunda ise belli bir parametre büyüklüğüne kadar sonuçlar araştırılarak listelenecektir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Galois Halkası, Lineer Kodlar ve Ağırlıklar

p asal bir sayı ve $\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{p-1}\}$ kümesi p asal sayıya ölümden kalan sayılar sınıfı olsun. $\mathbb{Z}_p$ kümesinin bir cisim olduğu bilinmektedir. $k \geq 1$ için $\mathbb{Z}_{p^k}$ sıfır bölenli bir halkadır. $h(x) \in \mathbb{Z}_{p^k}[x]$ polinomu t. dereceden monik ve indirgenmeyen (irreducible) bir polinom olsun. Bu durumda, $R = \mathbb{Z}_{p^k}[x]/(h)$ bölüm halkası bir Galois halkasıdır.

R halkasının idealleri,

$$\{0\} = (0) \subset (p^{k-1}) \subset ... \subset (p^2) \subset (p) \subset (1) = R$$

şeklinde olup (p) ideali R halkasının tek maksimal idealidir. Ayrıca, (p) maksimal idealinin dışındaki bütün elemanlar tersinirdir (çarpmaya göre tersleri vardır).

Tanım 2.1.1 R^n, R-modülünün boş olmayan bir R-alt modülüne C lineer kodu denir. C lineer kodun elemanlarına ise kodsöz (codeword) denir. C lineer kodun dışındaki elemanlara ise söz denir.

$k=1$ durumda R halkası bir Galois cismidir. $q=p^t$ elemanlı bir cisim F_q ile gösterilir. C, F_q üzerinde tanımlı lineer kod olsun. Bu durumda C bir alt vektör uzayıdır.

Tanım 2.1.2 $x,y\in F_q$ vektörlerin farklı bileşenlerinin sayısına aralarındaki Hamming uzaklık denir ve $d_H(x,y)$ ile gösterilir.

$x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ ise

$$d_H(x,y)=\left|\{i : x_i \neq y_i\}\right|$$

dır. Aynı şekilde kodun Hamming minimum uzaklığı

$$d_H(C)=\min_{x,y\in C, x\neq y} d_H(x,y)$$

dır. Kodlamada bir kodun uzunluğu, boyutu (ya da eleman sayısı) ile birlikte minimum uzaklığının büyüklüğü de çok önemlidir.

Eğer $C\subseteq F_q$, $boy(C)=k$ ve $d_H(C)=d$ ise C lineer kodun parametreleri $[n,k,d]$ şeklinde gösterilir.

Çok iyi bilinen ve çeşitli sonuçlar elde edilmiş Hamming uzaklığından başka Homojen ağırlığa bağlı
uzaklık tanımı Galois halkası üzerinde tanımlı kodlar için aşağıdaki gibidir:

Tanım 2.1.3 $x\in R$ olsun.

$$w_{\hom}(x)=\begin{cases} p^k, & x\in(p) \ \ ve \ \ x\neq 0 \\ p^k-p^{k-1}, & x\notin(p) \\ 0, & 0 \end{cases}$$

şeklinde R Galois halkası elemanları için homojen ağırlık denilen bir ağırlık fonksiyonu tanımlıdır.

Tanım 2.1.3 incelendiğinde $R=\mathbb{Z}_4=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$ halkası için $w_{\hom}=w_L$ özel hali elde edilir. Bu ise,

$$w_L(\bar{0})=\bar{0}, w_L(\bar{1})=\bar{1}=w_L(\bar{3}), w_L(\bar{2})=\bar{2}$$

değerlerini verir ki bu çok iyi bilinen Lee ağırlık fonksiyonudur.

Tanım 2.1.4 $c=(c_1,c_2,...,c_n)\in R^n$ olmak üzere,

$$w_{\text{hom}} = \sum_{i=1}^{n} w_{\text{hom}}(c_i),$$

c sözün homojen ağırlığı olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.5 $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$ verilsin.

$$d_{\text{hom}}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} w_{\text{hom}}(x_i - y_i)$$

şeklinde tanımlanan d_{hom} fonksiyonuna x ile y arasındaki homojen uzaklık denir.

Teorem 2.1.6 d_{hom} fonksiyonu bir metriktir.

2.2 Kod Parametrelerine Bağlı Sınırlar ve Mükemmel Kodlar

C, bir Galois cismi F_q üzerinde tanımlı lineer kod olsun. Eğer $C \subseteq F_q^n$, $boy(C) = k$ ve $d_H(C) = d$ ise C lineer kodun parametreleri $[n, k, d]$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.2.1 (Hamming Sınırı**)** C lineer kodun parametreleri $[n, k, d]$ ve $d(C) = d$ olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \binom{n}{i} (q-1)^i \leq q^{n-k}$$

ilişkisi vardır.

Tanım 2.2.2 Teorem 2.2.1'de eşitlik durumunu veren parametrelere sahip olan lineer koda mükemmel lineer kod denir.

Galois halkası üzerinde tanımlı lineer kodların yapıları ve buna bağlı olarak tip tanımlamalarını burada ele almayacağız. Ancak konunun temelleri ile ilgili bilgiler [1] gibi benzer kaynaklarda mevcuttur.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Bu araştırmada, Sapna ve diğerleri [2] tarafından yapılan çalışmadan esinlenerek, literatürde henüz yapılmamış Galois halkalarının özel durumları üzerinde tanımlı lineer kodlar için homojen ağırlık ve uzaklığına bağlı olarak bir üst sınır elde edilmiştir. Bu üst sınırın hesaplanması, lineer kodların cebirsel yapılarına bağlı olarak elde edilen kosetlerin sınıf liderleri ve kosetlerin sayısına bağlı olarak ve de lineer kodun hata düzeltme kabiliyetine paralel olarak belli bir ağırlığa sahip ya da daha düşük hata vektörlerin sayısının hesaplanması ile elde edilmiştir. Galois halkaları üzerinde tanımlı lineer kodların eleman sayısı yani kod sözlerin sayısı lineer kodun tipine bağlı olarak irdelenecektir. Bu çalışmanın başlangıcı en temel ve önemli bir

Galois halkası olan $\mathbb{Z}_4$ halkasıdır. (TÜBİTAK başvuru formu Başarı Ölçütleri ve B Planı kısmında belirtildiği üzere öngörülmemiş gelişmelerle karşılaşılması durumunda neler yapılacağı ile ilgili en azından $\mathbb{Z}_4$ halkası üzerinde homojen ağırlığa göre lineer kodlar için sınırların elde edilmesi ve mükemmel kod varlığının araştırılması çalışmasının yapılacağı vurgulanmıştır.) Bu noktada $\mathbb{Z}_4$ halkası üzerinde homojen ağırlığa göre mükemmel lineer kodların var olmadığı sonucuna varılmıştır. Bu çalışma Bulgular kısmında ele alınacaktır. Daha sonra sırasıyla $\mathbb{Z}_{2^l}, \mathbb{Z}_{3^l}$ ve $\mathbb{Z}_{p^l}$ halkaları üzerinde benzer çalışmalar yapılmış ve belli homojen ağırlıklara göre lineer kodlar için sınırlar elde edilmiştir. Eşitlik durumunda mükemmel kod parametrelerinin elde edilip edilemediği çalışması yapılmıştır. Fakat bu halkalar üzerinde uygulanan metodun daha genel hali olan halkalar üzerine uygulanması çok elverişli olmadığı görülmüştür. Bu problemin ilk ele alınışında farklı metotlara da başvurulmuş (örneğin Gray izometrisi) fakat bu metodun $\mathbb{Z}_{2^l}$, $\mathbb{Z}_{3^l}$ ve $\mathbb{Z}_{p^l}$ halkaları için hiçbir sonuç vermediği gözlenmiştir. Bütün ele alınan halkalar üzerinde tanımlı lineer kodlar için elde edilen sınır eşitsizliğine bağlı olarak mükemmel kod tanımı verilmiştir. Mükemmel kodların varlığı bu eşitsizliği sağlayan parametrelerin var olup olmamasına bağlı olduğundan parametrelerin durumuna göre sınıflandırma yapılmıştır.

4. BULGULAR

Bu projede elde edilen bulgular sırasıyla aşağıdaki gibidir:

a) Homojen ağırlıklarına bağlı $\mathbb{Z}_4$ halkası üzerinde lineer kodlar için sınır elde edilmiş ve bu halka üzerinde mükemmel lineer kod olmadığı Gray izometrisi kullanılarak gösterilmiştir. $\mathbb{Z}_4$ halkası üzerindeki bu çalışma Kısım 4.1’ de ele alınmıştır.

b) $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde bazı belirli homojen ağırlıklara bağlı hata düzelten kodlar için sınırlar elde edilmiş ve bu sınırlar kullanılarak bir hata düzelten mükemmel kodların varlığının olmadığı sonucuna varılmıştır. $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerindeki bu çalışma Kısım 4.2’de ele alınmıştır.

c) $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası üzerinde benzer çalışmalar yapılmış elde edilen sınırlara göre mükemmel lineer kod parametrelerinin var olup olmadığı çalışması yapılmıştır. $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası üzerindeki bu çalışma Kısım 4.3’te ele alınmıştır.

d) b) ve c) de elde edilen bulgular [2] nolu makaledeki metot dikkate alınarak elde edilmiştir. $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkasına bakılmasının sebebi bu metot uygulanarak daha genel halkalar için bir sonuç verip veremeyeceğini tespit etmektir. Fakat bu metodun daha genel halkalar için elverişli olmadığı sonucuna varılmıştır.

e) Benzer çalışmalar, $\mathbb{Z}_{p^l}$ halkası üzerinde ağırlığı $t=(p-1)(p^{l-2})$ ya da daha küçük sözler için sonuç verdiği sonucuna varılmıştır.

f) Daha genel halkalar için sınırlar ile ilgili farklı metotların olup olamayacağı literatürden araştırılmış ve danışmanın yönlendirmesi sonucu [3-5] nolu makaleler gözden geçirilmiştir. Fakat homojen ağırlıklarına bağlı daha genel halkalar için benzer bir uygulamanın veya uygulamaların elde edilmesi problemin mevcut yaklaşımlar ile çözülmesinin zor olduğu kanaatine varılmıştır.

4.1 $\mathbb{Z}_4$ halkası üzerinde homojen ağırlığa bağlı lineer kodlar için sınır ve mükemmel kodlar

4.1.1 $\mathbb{Z}_4$- Lineer Kodlar

$\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ üzerinde n uzunluklu bir C lineer kodu, $\mathbb{Z}_4^n$ un $\mathbb{Z}_4$ modülünün bir toplamsal alt modülü olarak tanımlanır. C serbest modülü, C kodunu geren lineer bağımsız elemanlardan oluşan bir modüldür. C kodu, k_1 tane serbest ve k_2 tane serbest olmayan baz içeriyorsa bu taktirde, C kodu (k_1,k_2) tip kodu olarak adlandırılır.

$\mathbb{Z}_4$ kümesinin elemanları olan 0,1,2 ve 3 ün homojen ağırlıkları sırasıyla 0,1,2 ve 1 şeklindedir.

$$w_{\text{hom}}(a) = \begin{cases} 0, & a = 0 \\ 1, & a = 1,3 \\ 2, & a = 2 \end{cases}$$

Buna ek olarak, $\mathbb{Z}_4^n$ deki n sıralı bir elemanın homojen ağırlığı bileşenlerinin homojen ağırlıklarının toplamına eşittir yani, $u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{Z}_4^n$ olmak üzere,

$$d_L(u,v) = \sum_{i=1}^{n} w_L(u_i - v_i)$$

dir. $\mathbb{Z}_4$- lineer kodun Lee ağırlığına eşit olan sıfırdan farklı minimum homojen uzaklığı d_{hom} ile gösterilir. n uzunluklu, tipi (k_1,k_2) ve minimum homojen uzaklığı d_{hom} olan bir $\mathbb{Z}_4$-lineer kod kısaca $[n,(k_1,k_2),d_{\text{hom}}]$ olarak ifade edilir.

Teorem 4.1.1.1 C, $\mathbb{Z}_4$ üzerinde bir lineer kod olsun. Eğer C, homojen ağırlığı t ye eşit ya da t den küçük tüm hataları düzeltirse, bu taktirde

$$\frac{|\mathbb{Z}_4|^n}{|C|} \geq N_{\text{hom}}(t)$$

dır. Burada $|.|$ simgesi kümenin kardinalitesini ve $N_{\text{hom}}(t)$ homojen ağırlığı t ye eşit ya da t den küçük hataların sayısını gösterir.

İspat: C toplamsal bir altgruptur. Eğer C, homojen ağırlığı t ye eşit ya da t den küçük tüm hataları düzeltirse, bu taktirde bütün bu hatalar farklı eşlenik sınıflarına düşmelidir. Bu yüzden C nin kendisini içeren eşlenik sınıflarının sayısı $N_{\text{hom}}(t)$ sayısına eşit ya da daha büyük olmalıdır.

Sonuç 4.1.1.2 C kodu tipi (k_1,k_2) olan bir $\mathbb{Z}_4$- lineer kod olsun. Eğer C, homojen ağırlığı t ye eşit ya da t den küçük tüm hataları düzeltirse, bu taktirde

$$2^{2n-2k_1-k_2} \geq N_{\text{hom}}(t)$$

dır.

Tanım 4.1.1.3 Eğer C tipi (k_1,k_2) olan bir $\mathbb{Z}_4$- lineer kod ve $2^{2n-2k_1-k_2} = N_{\text{hom}}(t)$ ise, bu taktirde C tipi (k_1,k_2) olan $\mathbb{Z}_4$- lineer kodu, mükemmel $\mathbb{Z}_4$- lineer kodu olarak adlandırılır.

4.1.2 Bazı Homojen Ağırlıklı Sözlerin Sayısı

Tanım 4.1.2.1 Homojen ağırlığı t olan sözlerin sayısı $N_{\text{hom}}(t)$ ile gösterilecektir.

Lemma 4.1.2.2 C, n uzunluklu $\mathbb{Z}_4$- lineer kod olsun. Bu taktirde,

$$N_{\text{hom}}(t) = \sum_{i=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} 2^{t-2i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{t-2i}$$

dir. Burada $\lfloor . \rfloor$ sembolü taban fonksiyonudur.

Örnek 4.1.2.3

Homojen Ağırlıkları	Sözlerin Sayısı
$t=0$	$2^0 \binom{n}{0}\binom{n}{0} = 1$
$t=1$	$2^1 \binom{n}{0}\binom{n}{1} = 2n$
$t=2$	$2^2 \binom{n}{0}\binom{n}{2} + 2^0 \binom{n}{1}\binom{n-1}{0}$
$t=3$	$2^3 \binom{n}{0}\binom{n}{3} + 2^1 \binom{n}{1}\binom{n-1}{1}$

$t=4$	$2^4\binom{n}{0}\binom{n}{4}+2^2\binom{n}{1}\binom{n-1}{2}+2^0\binom{n}{2}\binom{n-2}{0}$
$t=5$	$2^5\binom{n}{0}\binom{n}{5}+2^3\binom{n}{1}\binom{n-1}{3}+2^1\binom{n}{2}\binom{n-2}{1}$
$t=6$	$2^6\binom{n}{0}\binom{n}{6}+2^4\binom{n}{1}\binom{n-1}{4}+2^2\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}+2^0\binom{n}{3}\binom{n-3}{0}$
$t=7$	$2^7\binom{n}{0}\binom{n}{7}+2^5\binom{n}{1}\binom{n-1}{5}+2^3\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}+2^1\binom{n}{3}\binom{n-3}{1}$

Tablo 1

Teorem 4.1.2.3 C, n uzunluklu $\mathbb{Z}_4$- lineer kod olsun. Bu taktirde,

$$N_{\text{hom}}(t)=\sum_{i=0}^{\lfloor t/2\rfloor}\binom{2n}{i}$$

dır.

İspat: $Q(x)=\sum_{i=0}^{n}q_i x^i$ polinomunu, $\mathbb{Z}_4^n$ deki sözlerin Lee ağırlık yayılım polinomu olarak tanımlayalım. Tablo 1 deki toplamların her bir birinci,ikinci, … toplanılan rakamları sırasıyla aşağıdaki $p_0(x)$, $p_1(x)$,... polinomlarının katsayılarına karşılık gelir. Yani,

$$p_0(x)=\binom{n}{0}x^0(1+2x)^n=\sum_{i=0}^{n}2^i x^i\binom{n}{i}$$

$$p_1(x)=\binom{n}{1}x^2(1+2x)^{n-1}=\binom{n}{1}\left(\sum_{i=0}^{n}2^i x^{i+2}\binom{n-1}{i}\right)$$

$$p_2(x)=\binom{n}{2}x^4(1+2x)^{n-2}=\binom{n}{2}\left(\sum_{i=0}^{n}2^i x^{i+4}\binom{n-2}{i}\right)$$

$$p_3(x)=\binom{n}{3}x^6(1+2x)^{n-3}=\binom{n}{3}\left(\sum_{i=0}^{n}2^i x^{i+6}\binom{n-3}{i}\right)$$

.

.

.

$$p_k(x)=\binom{n}{k}x^{2k}(1+2x)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\sum_{i=0}^{n}2^i x^{i+2k}\binom{n-2}{k}\right)$$

şeklindedir. Bu taktirde, $\sum_{i=1}^{n}p_i(x)=Q(x)$ elde edilir. $Q(x)$ polinomunun i inci katsayısı, homojen ağırlığı i olan $\mathbb{Z}_4^n$ deki sözlerin sayısını verir. Diğer taraftan,

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x)=(1+2x)^n\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\frac{x^i}{(1+2x)^{2i}}\right)=(1+2x)^n\left(1+\frac{x^2}{1+2x}\right)^n$$

$$=(1+2x)^n\left(\frac{1+2x+x^2}{1+2x}\right)^n=(1+x)^{2n}$$

dır.

4.1.3 Mükemmel $\mathbb{Z}_4$-Lineer ve İkili Kodlar

n uzunluklu bir ikili lineer kod F_2^n nin F_2 altuzayıdır. F_2^n deki bir n sıralı bir v sözünün sıfırdan farklı yerinin sayısı v nin Hamming ağırlığı olarak adlandırılır ve $w_H(v)$ olarak gösterilir. u ve v sözleri arasındaki Hamming uzaklığı $d_H(u,v)$ ile gösterilir. C kodundaki kodsözlerin en küçük sıfırdan farklı ağırlığı $w_H(C)$ dir ve C lineer olduğundan $w_H(C)=d_H(C)$ dir.

$\mathbb{Z}_4$- lineer kodları ve ikili lineer kodları arasındaki en önemli ilişki [6] nolu makalede A.R. Hammons Jr., P.V. Kumar, A.R. Calderbank, N.J.A. Sloane ve P. Sole tarafından kurulmuştur. Bu makalede en iyi bilinen lineer olmayan ikili kodlar olan Kerdock ve Prepeta Kodlar Gray eşlemesi kullanılarak $\mathbb{Z}_4$- lineer kodların görüntüsü olarak elde edilmiştir. Gray eşlemesi olan ϕ sırasıyla 0,1,2 ve 3 sayılarını $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ ve $(1,0)$ eşler. Yapılan bu çalışmadan sonra, diğer sonlu halkalar üzerindeki kodlar ve $\mathbb{Z}_4$- lineer kodlar ile ilgili çalışmalar artarak günümüze kadar devam etmiştir. Buna ek olarak, Gray eşlemesi $\left(\mathbb{Z}_4^n,\ \text{Homojen uzaklık}\right)$ dan $\left(\mathbb{Z}_2^{2n},\ \text{Hamming uzaklık}\right)$ e bir izometridir.

Aşağıdaki iyi bilinen lemma ikili kodlar ve $\mathbb{Z}_4$- lineer kodlar arasındaki ilişkiyi verir.

Lemma 4.1.3.1 C kodu, n uzunluklu, tipi (k_1,k_2) ve minimum homojen uzaklığı $d_{\text{hom}}(C)=d$ olan bir $\mathbb{Z}_4$- lineer kodu ve ϕ Gray eşlemesi olsun. Bu taktirde, $\phi(C)$ $2n$ uzunluklu, minimum Hamming uzaklığı $d_{\text{hom}}(C)=d$ olan bir ikili bir koddur.

Lemma 4.1.3.2 (İkili Lineer Kodlar için Hamming Sınırı)

C kodu n uzunluklu, minimum uzaklığı d ve eleman sayısı $M=2^k$ olan bir ikili bir kod olsun. Bu taktirde,

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor}\binom{n}{i}\le 2^{n-k}$$

dır.

Tanım 4.1.3.3 Hamming sınırında eşitlik durumu varsa ikili lineer kodlar, mükemmel lineer kodlar olarak adlandırılır.

İkili mükemmel kodlar aşağıdaki iyi bilinen teoremle karakterize edilmektedir.

Teorem 4.1.3.4 ([7]**)** q asalın bir kuvveti olmak üzere; aşikar olmayan mükemmel q'lu kod, Hamming $\left(\left[2^r-1,2^r-r-1,3\right],r\geq 2\right)$ ya da Golay $\left([23,12,7]\right)$ kodlarından birisinin parametreleriyle aynı parametrelere sahip olmalıdır.

Teorem 4.1.3.5 C, n uzunluklu, tipi (k_1,k_2) olan bir $\mathbb{Z}_4$- lineer kod olsun. Eğer C kodu t- hata düzelten mükemmel $\mathbb{Z}_4$- lineer kod ise bu taktirde, $\phi(C)=C$ kodu t- hata düzelten mükemmel $\mathbb{Z}_4$- lineer koddur.

İspat: İspatı, tanımları kullanarak elde edelim. C, n uzunluklu, tipi (k_1,k_2) olan bir $\mathbb{Z}_4$- lineer kod olduğundan,

$$N_{\text{hom}}(t)=\sum_{i=0}^{\lfloor t/2\rfloor}\binom{2n}{i}=2^{2n-2k_1-k_2}$$

eşitliği sağlanır. $\phi(C)$ fonksiyonunun eleman sayısı $M=2^{2k_1-k_2}$ ve bu ikili kodun uzunluğu $2n$ olduğundan, mükemmel ikili kodun tanımından $\phi(C)$ kodu t- hata düzelten mükemmel $\mathbb{Z}_4$- lineer koddur.

Çift uzunluğa sahip aşikar olmayan mükemmel ikili bir kod olmadığından aşağıda verilecek sonuç açıktır.

Sonuç 4.1.3.6 Tek veya çift uzunluğa sahip aşikar olmayan mükemmel $\mathbb{Z}_4$- lineer kod yoktur.

Kısım 4.1'de elde edilen sonuçlar, uluslar arası bir konferansta sunulmuştur [8]. Aynı zamanda, $\mathbb{Z}_4$ halkası üzerinde elde edilen bu sonuçlar uluslar arası bir yayın olarak basılmıştır ve ekte sunulmuştur [9].

4.2 $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde homojen ağırlığa bağlı lineer kodlar için sınır ve mükemmel kodlar

Kısım 4.1'de verilen Gray izometriden yararlanılarak mükemmel $\mathbb{Z}_4$-lineer kod olup olmadığını araştırma işleminin $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkasında işe yaramadığı görülmüştür. Bu yüzden, $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde mükemmel lineer kod varlığı [2] nolu kaynak baz alınarak aşağıdaki metotla ele alınmıştır:

V vektör uzayı ve $C\subset V$ bir lineer kod olsun. Bu taktirde;

$$\frac{|V|}{|C|} = \text{ağırlığı } t \text{ ya da daha küçük vektör sayısı} \tag{1}$$

dır. Eğer, eşitlik verilen parametreler için sağlanıyorsa bu parametreler için mükemmel kod olabileceği sonucuna varılır.

4.2.1 $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde belli homojen ağırlığa sahip sözlerin sayısının belirlenmesi

$l \geq 3$ olmak üzere; $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası için homojen ağırlık aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$w_{\text{hom}}(x) = \begin{cases} 2^{l-1} & , \quad x \in 2^{l-1}\mathbb{Z}_{2^l} \\ 2^{l-2} & , \quad x \notin 2^{l-1}\mathbb{Z}_{2^l} \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde verilen homojen ağırlık tanımı baz alınarak belli t homojen ağırlıklara sahip sözlerin sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2. Homojen Ağırlıkları t olan sözlerin sayısı

$$t = 0.\left(2^{l-2}\right) \rightarrow \left(2^l - 2\right)^0 \binom{n}{0}\binom{n}{0}$$

$$t = 1.\left(2^{l-2}\right) \rightarrow \left(2^l - 2\right)^1 \binom{n}{0}\binom{n}{1}$$

$$t = 2.\left(2^{l-2}\right) \rightarrow \left(2^l - 2\right)^2 \binom{n}{0}\binom{n}{2} + \left(2^l - 2\right)^0 \binom{n}{1}\binom{n-1}{0}$$

$$t = 3.\left(2^{l-2}\right) \rightarrow \left(2^l - 2\right)^3 \binom{n}{0}\binom{n}{3} + \left(2^l - 2\right)^1 \binom{n}{1}\binom{n-1}{1}$$

$$t = 4.\left(2^{l-2}\right) \rightarrow \left(2^l - 2\right)^4 \binom{n}{0}\binom{n}{4} + \left(2^l - 2\right)^2 \binom{n}{1}\binom{n-1}{2} + \left(2^l - 2\right)^0 \binom{n}{2}\binom{n-2}{0}$$

$$t = 5.\left(2^{l-2}\right) \rightarrow \left(2^l - 2\right)^5 \binom{n}{0}\binom{n}{5} + \left(2^l - 2\right)^3 \binom{n}{1}\binom{n-1}{3} + \left(2^l - 2\right)^1 \binom{n}{2}\binom{n-2}{1}$$

$$t = 6.\left(2^{l-2}\right) \rightarrow \left(2^l - 2\right)^6 \binom{n}{0}\binom{n}{6} + \left(2^l - 2\right)^4 \binom{n}{1}\binom{n-1}{4} + \left(2^l - 2\right)^2 \binom{n}{2}\binom{n-2}{2} + \left(2^l - 2\right)^0 \binom{n}{3}\binom{n-3}{0}$$

$$t=7.\left(2^{l-2}\right)\rightarrow\left(2^{l}-2\right)^{7}\binom{n}{0}\binom{n}{7}+\left(2^{l}-2\right)^{5}\binom{n}{1}\binom{n-1}{5}+\left(2^{l}-2\right)^{3}\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}+\left(2^{l}-2\right)^{1}\binom{n}{3}\binom{n-3}{1}$$

$$t=8.\left(2^{l-2}\right)\rightarrow\left(2^{l}-2\right)^{8}\binom{n}{0}\binom{n}{8}+\left(2^{l}-2\right)^{6}\binom{n}{1}\binom{n-1}{6}+\left(2^{l}-2\right)^{4}\binom{n}{2}\binom{n-2}{4}+\left(2^{l}-2\right)^{2}\binom{n}{3}\binom{n-3}{2}$$
$$+\left(2^{l}-2\right)^{0}\binom{n}{4}\binom{n-4}{0}$$

$$t=9.\left(2^{l-2}\right)\rightarrow\left(2^{l}-2\right)^{9}\binom{n}{0}\binom{n}{9}+\left(2^{l}-2\right)^{7}\binom{n}{1}\binom{n-1}{7}+\left(2^{l}-2\right)^{5}\binom{n}{2}\binom{n-2}{5}+\left(2^{l}-2\right)^{3}\binom{n}{3}\binom{n-3}{3}$$
$$+\left(2^{l}-2\right)^{1}\binom{n}{4}\binom{n-4}{1}$$

Yukarıdaki elde edilen sonuçlar aşağıdaki teorem kolayca genelleştirilebilir:

Teorem 4.2.1.1 Homojen ağırlığı $t=r\cdot\left(2^{l-2}\right)$ olan kodsözlerin sayısı; $s=\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor$ olmak üzere $\sum_{i=0}^{s}\left(2^{l}-2\right)^{r-2i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{r-2i}$ şeklindendir.

4.2.2 $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde ağırlığı $t=2^{l-2}$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Bu alt bölümde bazı özel ağırlıklar için mükemmel kodların varlık problemi araştırılacaktır.

Ağırlığı $t=2^{l-2}$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısı Tablo 2 aracılığıyla,

$$\left(2^{l}-2\right)n+1$$

dır. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için (1) nolu eşitlik aracılığıyla aşağıdaki eşitliğin incelenmesi gerekir:

$$\left(2^{l}-2\right)n+1=2^{s}. \tag{2}$$

Burada $|V|=2^{ln}$ olduğundan ve $|C|=a$ alınırsa,

$$\frac{|V|}{|C|} = 2^{ln-a}$$

elde edilir. $ln-a$ değeri s ile gösterilecektir.

$s=0$ durumu, söz sayısı şu anda incelenen ve daha sonra incelenecek ağırlıklara göre hiçbir zaman 1 değerini vermediğinden modüler aritmetiğe göre yapılacak incelemelerde dikkate alınmayacaktır.
(2) nolu eşitlik mod 2 ye göre incelenirse;

$$\begin{aligned} \left(2^l-2\right)n+1 &= 2^s \quad \mod 2 \\ 2\left(2^{l-1}-1\right)n+1 &= 2^s \quad \mod 2 \\ 1 &= 0 \quad \mod 2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise n parametresi için ağırlığı $t=2^{l-2}$ ya da daha küçük olan sözler için mükemmel lineer kod olmadığı sonucuna ulaştırmaktadır.

Sonuç 4.2.2.1 $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde ağırlığı $t=2^{l-2}$ ya da daha küçük olan sözler için mükemmel kod yoktur.

4.2.3 $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde ağırlığı $\mathrm{t}=2^{l-1}$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=2^{l-1}$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısı Tablo 2 aracılığıyla,

$$\left(2^l-2\right)^2\binom{n}{0}\binom{n}{2}+\left(2^l-2\right)\binom{n}{0}\binom{n}{1}+n+1$$

dır. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için (1) nolu eşitlik aracılığıyla aşağıdaki eşitliğin incelenmesi gerekir:

$$\left(2^l-2\right)^2\binom{n}{0}\binom{n}{2}+\left(2^l-2\right)\binom{n}{0}\binom{n}{1}+n+1=2^s \,. \tag{3}$$

(3) nolu eşitlik mod 2 ye göre incelenirse;

$$\begin{aligned}
\left(2^l-2\right)^2\binom{n}{0}\binom{n}{2}+\left(2^l-2\right)\binom{n}{0}\binom{n}{1}+n+1&=2^s \quad \mathrm{mod}\,2\\
n+1&=0 \quad \mathrm{mod}\,2\\
n&=1 \quad \mathrm{mod}\,2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise n parametresinin tek sayı olabileceğini gösterir. Dolayısıyla n uzunluk parametresi çift değerleri alamaz.

Ağırlığı $t=2^{l-1}$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$4\left(2^{l-1}-1\right)^2\binom{n}{2}+2\left(2^{l-1}-1\right)n+n+1 \,. \tag{4}$$

n tek sayı olduğunda (4) nolu ifadenin 2 sayısının bir kuvveti olup olmadığını irdeleyelim. $\binom{n}{2}$ ifadesi bir pozitif tamsayı olacağından 1. ifade en az 2 tane 2 çarpanı içerir. Benzer şekilde, n ve $\left(2^{l-1}-1\right)$ tek sayılar olduğundan 2. ifade sadece bir tane 2 çarpanı içerir. 3. ifade olan $n+1$ ise çift sayıdır. Eğer $n=3,7,11,...$ gibi tek sayılardan oluşuyorsa $n+1$ değeri en az 2 tane 2 çarpanı içerir. Dolayısıyla bu durumlar göz önüne alınarak (4) nolu ifade 2 çarpanı parantezine alınırsa aşağıdaki gibi bir durum elde edilir:

$$2\left(Ç+T+Ç\right)=2T \,.$$

Dolayısıyla $2T \neq 2^s$ olamayacağından $n=4x+3$ değerini alan uzunluk parametreleri için mükemmel kod olamayacağı sonucuna varılır. Burada, T herhangi bir tek sayıyı ve $Ç$ herhangi bir çift sayıyı temsil etmektedir. (4) nolu ifade göz önüne alınırsa T hiçbir zaman 1 değerini alamaz.

Kabul edelim ki $n = 4x + 1$ olsun. Bu değer (3) nolu eşitlikte yerine yazılıp düzenlenirse;

$$32\left(2^{l-1}-1\right)^2 x^2 + 8\left(2^{l-1}-1\right)^2 x + 8\left(2^{l-1}-1\right)x + 2\left(2^{l-1}-1\right) + 4x + 2 = 2^s \tag{5}$$

elde edilir. (5) nolu eşitliğin her iki tarafı 4 e bölünürse;

$$8\left(2^{l-1}-1\right)^2 x^2 + 2\left(2^{l-1}-1\right)^2 x + 2\left(2^{l-1}-1\right)x + 2^{l-2} + x = 2^{s-2} \tag{6}$$

bulunur. (6) nolu eşitliğin sağlanması için $x = 2x_1$ olması gerekir. Bu değer (6) nolu eşitlikte yerine yazılıp 2 ile bölünürse,

$$16\left(2^{l-1}-1\right)^2 x_1^{\ 2} + 2\left(2^{l-1}-1\right)^2 x_1 + 2\left(2^{l-1}-1\right)x_1 + 2^{l-3} + x_1 = 2^{s-3} \tag{7}$$

elde edilir. (7) nolu eşitliğin sağlanabilmesi için $x_1 = 2x_2$ olması gerekir. Bu değer (7) nolu eşitlikte yerine yazılıp 2 ile bölünürse,

$$32\left(2^{l-1}-1\right)^2 x_2^{\ 2} + 2\left(2^{l-1}-1\right)^2 x_2 + 2\left(2^{l-1}-1\right)x_2 + 2^{l-4} + x_2 = 2^{s-4} \tag{8}$$

(7) ve (8) nolu eşitliklerden görülür ki aşağıdaki gibi bir değerde denklem sonlanır:

$$2^{l+1}\left(2^{l-1}-1\right)^2 x_{l-2}^{\ 2} + 2\left(2^{l-1}-1\right)^2 x_{l-2} + 2\left(2^{l-1}-1\right)x_{l-2} + x_y + 1 = 2^{s-l}\,. \tag{9}$$

Burada x_y bir tek sayıdır. $x_y = 2r + 1$ olsun. (9) nolu eşitlikte yerine yazılıp düzenlenirse;

$$2^{l+1}\left(2^{l-1}-1\right)^2 4r^2+2\left(2^{l-1}-1\right)^2 4r+2^{l+1}\left(2^{l-1}-1\right)^2+4\left(2^{l-1}-1\right)^2 r+2\left(2^{l-1}-1\right)^2$$
$$+4\left(2^{l-1}-1\right)r+2\left(2^{l-1}-1\right)+2r+2=2^{s-l} \qquad (10)$$

(10) nolu eşitlik mod 4 e göre işleme alınırsa,

$$2r+2=0 \mod 4$$

elde edilir. Buradan $r=2z+1$ şeklindedir. Dolayısıyla $n=4x+1=2^l\left(4z+3\right)+1$ olur. Bu değer (3) nolu eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\left(2^l-2\right)^2\frac{\left(2^l\left(4z+3\right)+1\right)2^{l-1}\left(4z+3\right)}{2}+\left(2^l-2\right)\left(2^l\left(4z+3\right)+1\right)+2^l\left(4z+3\right)+2=2^s \qquad (11)$$

(11) nolu eşitlik 2 ye bölünür ve mod 2 e göre işleme alınırsa çelişki $1=0 \mod 2$ sonucu elde edilir. Bu da $n=4x+1$ değerinin olamayacağını gösterir. n tek sayıları ya $n=4x+1$ ya da $n=4x+3$ olduğundan n tek sayıları için mükemmel kod yoktur sonucuna varılır.

Sonuç 4.2.3.1 $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde ağırlığı $t=2^{l-1}$ ya da daha küçük olan sözler için mükemmel kod yoktur.

Not 4.2.3.2 Kısım 4.2.3'te ele alınan mükemmel kod olup olmadığı için yapılan işlemler yayına kabul edilen [10] nolu makalede diskriminant metodu kullanılarak daha kısa bir şekilde mükemmel kod olmadığı sonucuna ulaştırmıştır. Fakat Kısım 4.2.3'te ele alınan yerine koyarak yapılan işlemler Gelişme raporu 3'te ifade edilmiştir.

4.2.4 $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde ağırlığı $\mathrm{t}=3.2^{l-2}$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=3.2^{l-2}$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısı Tablo 2 aracılığıyla,

$$\left(2^l-2\right)^3\binom{n}{0}\binom{n}{3}+\left(2^l-2\right)^2\binom{n}{0}\binom{n}{2}+\left(2^l-2\right)\begin{bmatrix}\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\\+\binom{n}{0}\binom{n}{1}\end{bmatrix}+n+1 \tag{12}$$

dır. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için (1) nolu eşitlik aracılığıyla aşağıdaki eşitliğin incelenmesi gerekir:

$$\left(2^k-2\right)^3\binom{n}{0}\binom{n}{3}+\left(2^k-2\right)^2\binom{n}{0}\binom{n}{2}+\left(2^k-2\right)\begin{bmatrix}\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\\+\binom{n}{0}\binom{n}{1}\end{bmatrix}+n+1=2^s. \tag{13}$$

(13) nolu eşitlik mod 2 ye göre incelenirse;

$$\left(2^k-2\right)^3\binom{n}{0}\binom{n}{3}+\left(2^k-2\right)^2\binom{n}{0}\binom{n}{2}+\left(2^k-2\right)\begin{bmatrix}\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\\+\binom{n}{0}\binom{n}{1}\end{bmatrix}+n+1=2^s=2^s \quad \mathrm{mod}\,2$$

$$n+1=0 \qquad \mathrm{mod}\,2$$

$$n=1 \qquad \mathrm{mod}\,2$$

elde edilir. Bu ise n değerinin tek sayı olabileceğini gösterir. Dolayısıyla n uzunluk parametresi çift değerleri alamaz.

n tek sayı olduğunda (13) nolu ifadenin 2 sayısının bir kuvveti olup olmadığını irdeleyelim. $\binom{n}{3}$ ifadesi bir pozitif tamsayı olacağından 1. ifade en az 3 tane 2 çarpanı içerir. Benzer şekilde, $\binom{n}{2}$ ifadesi bir pozitif tamsayı olacağından 2. ifade en az 2 tane 2 çarpanı içerir. n tek olduğundan parantez içi çift olur ve $\left(2^l-2\right)$ sayısı 1 tane 2 çarpanı içerir. 4. ifade olan $n+1$ ise çift sayıdır. Eğer $n=3,7,11,...$ gibi tek sayılardan oluşuyorsa $n+1$ değeri en az 2 tane 2 çarpanı içerir. Dolayısıyla bu durumlar göz önüne alınarak (13) nolu ifade 2 çarpanı parantezine alınırsa aşağıdaki gibi bir durum elde edilir:

$$2\left(Ç + Ç + Ç + T\right) = 2T \; .$$

Dolayısıyla $2T \neq 2^s$ olamayacağından $n = 4x + 3$ değerini alan uzunluk parametreleri için mükemmel kod olamayacağı sonucuna varılır. Burada, T herhangi bir tek sayıyı ve $Ç$ herhangi bir çift sayıyı temsil etmektedir. (17) nolu ifade göz önüne alınırsa T hiçbir zaman 1 değerini alamaz. $n = 4x + 1$ değerleri için mükemmel kod olup olamayacağı üzerinde çalışılmaktadır.

Sonuç 4.2.4.1 $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde $n = 4x + 3$ şeklindeki n tek sayı değerleri dışında ağırlığı $t = 2^{l-2}$ ya da daha küçük olan hata vektörleri için mükemmel kod yoktur.

Kısım 4.2'de $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde elde edilen sonuçlar uluslar arası yayın (SCI) olarak yayına kabul edilmiştir ve ekte sunulmuştur [10]. Aynı zamanda, $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde uzunluk parametresi $n = 2^r$ ise aşağıdaki sonuca ulaşılmıştır ve bu sonuç ekte de sunulan uluslar arası bir konferansta sunulmuş ve tam metin olarak Procedia Computer Science dergisinde yayına kabul edilmiştir [11].

Sonuç 4.2.4.2 $n = 2^r$ olmak üzere, $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde homojen ağırlığı t ya da daha küçük sözler için mükemmel kod yoktur.

4.3 $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası üzerinde homojen ağırlığa bağlı lineer kodlar için sınır ve mükemmel kodlar

Kısım 4.2'de ele alınan metot, belli homojen ağırlıklar baz alınarak $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası için uygulanmıştır. Benzer şekilde (1) nolu eşitlik kullanılarak bu halka üzerinde lineer kodlar için bir sınır elde edilmiştir ve bu sınır sayesinde mükemmel kod parametrelerinin var olup olmadığı çalışması yapılmıştır.

4.3.1 $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası üzerinde belli homojen ağırlığa sahip sözlerin sayısının belirlenmesi

$l > 1$ olmak üzere; $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası için homojen ağırlık aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$w_{\text{hom}}(x)=\begin{cases} 3^{l-1} & , \quad x\in 3^{l-1}\mathbb{Z}_{2^l} \\ 2.3^{l-2} & , \quad x\notin 3^{l-1}\mathbb{Z}_{2^l} \\ 0 & , \quad x=0. \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası üzerinde verilen homojen ağırlık tanımı baz alınarak belli t homojen ağırlıklara sahip sözlerin sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3. Homojen Ağırlıkları t olan sözlerin sayısı

$$t=0.\left(3^{l-2}\right)\to\left(3^l-3\right)^0\binom{n}{0}\binom{n}{0}$$

$$t=2.\left(3^{l-2}\right)\to\left(3^l-3\right)^1\binom{n}{0}\binom{n}{1}$$

$$t=3.\left(3^{l-2}\right)\to 2\binom{n}{0}\binom{n}{1}$$

$$t=4.\left(3^{l-2}\right)\to\left(3^l-3\right)^2\binom{n}{0}\binom{n}{2}$$

$$t=5.\left(3^{l-2}\right)\to 2\left(3^l-3\right)\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}$$

$$t=6.\left(3^{l-2}\right)\to 2^2\binom{n}{2}+\left(3^l-3\right)^3\binom{n}{3}$$

$$t=7.\left(3^{l-2}\right)\to 2\left(3^l-3\right)^2\binom{n}{1}\binom{n-1}{2}$$

$$t=8.\left(3^{l-2}\right)\to 2^2\left(3^l-3\right)\binom{n}{2}\binom{n-2}{1}+\left(3^l-3\right)^4\binom{n}{4}$$

4.3.2 $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası üzerinde ağırlığı $t=2.3^{l-2}$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=2.3^{l-2}$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısı Tablo 3 aracılığıyla,

$$\left(3^l-3\right)n+1$$

dır. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için (1) nolu eşitlik aracılığıyla aşağıdaki eşitliğin incelenmesi gerekir:

$$\left(3^{l}-3\right)n+1=3^{s}. \tag{14}$$

Burada $|V|=3^{ln}$ olduğundan ve $|C|=a$ alınırsa,

$$\frac{|V|}{|C|}=3^{ln-a}$$

elde edilir. $ln-a$ değeri s ile gösterilecektir.

$s=0$ durumu, söz sayısı şu anda incelenen ve daha sonra incelenecek ağırlıklara göre hiçbir zaman 1 değerini vermediğinden modüler aritmetiğe göre yapılacak incelemelerde dikkate alınmayacaktır.
(14) nolu eşitlik mod 3 ye göre incelenirse;

$$\begin{aligned}\left(3^{l}-3\right)n+1&=3^{s} \quad \mod 3\\ 3\left(3^{l-1}-1\right)n+1&=3^{s} \quad \mod 3\\ 1&=0 \quad \mod 3\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise n parametresi için ağırlığı $t=2.3^{l-2}$ ya da daha küçük olan sözler için mükemmel lineer kod olmadığı sonucuna ulaştırmaktadır.

Sonuç 4.3.2.1 $\mathbb{Z}_{3^{l}}$ halkası üzerinde ağırlığı $t=2.3^{l-2}$ ya da daha küçük olan sözler için mükemmel kod yoktur.

4.3.3 $\mathbb{Z}_{3^{l}}$ halkası üzerinde ağırlığı $t=3^{l-1}$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=3^{l-1}$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısı Tablo 3 aracılığıyla,

$$\binom{n}{0}+\left(3^{l}-3\right)\binom{n}{1}+2\binom{n}{1}$$

dır. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için (1) nolu eşitlik aracılığıyla aşağıdaki eşitliğin incelenmesi gerekir:

$$\binom{n}{0}+\left(3^{l}-3\right)\binom{n}{1}+2\binom{n}{1}=3^{s}. \tag{15}$$

(15) nolu eşitlikte aşağıdaki gibi düzenlemeler yapılırsa,

$$1+\left(3^{l}-3\right)n+2n=3^{s}$$
$$1+\left(3^{l}-1\right)n=3^{s}$$

$$\left(3^{l}-1\right)n=3^{s}-1$$
$$n=\frac{3^{s}-1}{3^{l}-1}$$

elde edilir. Burada l, s pozitif tamsayısının bir çarpanı ise n parametreleri elde edilebilir. Örneğin, $s=4$ ve $l=2$ değerleri için $n=10$ parametre değeri elde edilir.

Sonuç 4.3.3.1 l, s değerinin bir çarpanı değil ise, $\mathbb{Z}_{3^{l}}$ halkası üzerinde ağırlığı $t=3^{l-1}$ ya da daha küçük olan sözler için mükemmel kod yoktur.

4.3.4 $\mathbb{Z}_{3^{l}}$ halkası üzerinde ağırlığı $\mathrm{t}=4.3^{l-2}$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=4.3^{l-2}$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısı Tablo 3 aracılığıyla,

$$\binom{n}{0}+\left(3^{l}-3\right)\binom{n}{1}+2\binom{n}{1}+\left(3^{l}-3\right)^{2}\binom{n}{2}$$

dır. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için (1) nolu eşitlik aracılığıyla aşağıdaki eşitliğin incelenmesi gerekir:

$$\binom{n}{0}+\left(3^{l}-3\right)\binom{n}{1}+2\binom{n}{1}+\left(3^{l}-3\right)^{2}\binom{n}{2}=3^{s}\,. \tag{16}$$

(16) nolu denklem düzenlenirse;

$$\left(\frac{3^{2l}}{2}-3^{l+1}+\frac{9}{2}\right)n^{2}+\left(-\frac{3^{2l}}{2}+4.3^{l}-\frac{11}{2}\right)n+1$$

elde edilir. Mükemmel kod olup olmadığı tespiti aşağıdaki gibi incelenir:

$$\left(3^{2l}-2.3^{l+1}+9\right)n^{2}+\left(-3^{2l}+8.3^{l}-11\right)n+2=2.3^{ln-k=s}\,. \tag{17}$$

(17) nolu denklemin her iki tarafı 2 ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}&\left(3^{2l}-2.3^{l+1}+9\right)n^{2}+\left(-3^{2l}+8.3^{l}-11\right)n+2=2.3^{ln-k=s}\\&\left(\underbrace{3^{2l}-6.3^{l}+9}_{a}\right)n^{2}+\left(\underbrace{-3^{2l}+8.3^{l}-11}_{b}\right)n+\underbrace{2-2.3^{s}}_{c}=0\end{aligned} \tag{18}$$

elde edilir. (18) nolu denklemin diskriminantı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\Delta&=b^{2}-4ac\\&=\left(-3^{2l}+8.3^{l}-11\right)^{2}-4\left(3^{2l}-6.3^{l}+9\right)\left(2-2.3^{s}\right)\\&=\left(-3^{2l}+8.3^{l}-11\right)^{2}+4\left(3^{2l}-6.3^{l}+9\right)\left(2.3^{s}-2\right)\end{aligned} \tag{19}$$

Son eşitlik incelendiğinde $l \geq 2$ için her zaman pozitiftir. Yani $\Delta > 0$ dır. Dolayısıyla (19) nolu denklemin pozitif iki kökü vardır. Bu köklerin pozitif bir tamsayı olup olmadığı ile ilgili çalışma yapmak gerekmektedir.Eğer bu kökler tamsayı değilse bu takdirde böyle n değerleri bulunamayacağından mükemmel kod yoktur sonucuna varılır.

Bu kökler;

$$r_{1}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ r_{2}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \tag{20}$$

dır. Her iki kökün içerisinde bulunan $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu incelemek gerekir.

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-3^{2l}+8.3^{l}-11\right)^{2}+4\left(3^{2l}-6.3^{l}+9\right)\left(2.3^{s}-2\right)} \tag{21}$$

ifadesi için delta kökün dışına çıkamıyorsa bu taktirde (20) nolu kökler hiçbir zaman pozitif bir tamsayı olamaz. Bu yüzden, $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu aşağıdaki gibi üç farklı şekilde inceleyebiliriz:

(i) $l = s$
(ii) $s > l$
(iii) $s < l$

(i) $l = s$ olsun. Bu taktirde, (21) nolu denklem

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-3^{2l} + 8.3^{l} - 11\right)^2 + 4\left(3^{2l} - 6.3^{l} + 9\right)\left(2.3^{l} - 2\right)} \tag{22}$$

olur. (22) nolu denklemde $x = 3^l$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} &= \sqrt{\left(x^2 - 8x + 11\right)^2 + 8\left(x^2 - 6x + 9\right)\left(x - 1\right)} \\ &= \sqrt{x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 56x + 49} \\ &= \sqrt{\left(x^2 - 4x + 7\right)^2} \\ &= \left|x^2 - 4x + 7\right| \\ &= \left|\left(x - 2\right)^2 + 3\right| \end{aligned} \tag{23}$$

elde edilir. (23) nolu ifade de mutlak değerin içi daima pozitif olduğundan,

$$\sqrt{\Delta} = x^2 - 4x + 7 \tag{24}$$

olarak elde edilir. (24) nolu denklem (20) nolu köklerde sırasıyla yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-\left(-3^{2l} + 8.3^{l} - 11\right) - \left(x^2 - 4x + 7\right)}{2\left(3^{2l} - 6.3^{l} + 9\right)} \\ &= \frac{x^2 - 8x + 11 - x^2 + 4x - 7}{2\left(x^2 - 6x + 9\right)} \\ &= \frac{-4\left(x - 1\right)}{2\left(x - 3\right)^2} \\ &= -2\frac{\left(x - 1\right)}{\left(x - 3\right)^2} \end{aligned} \tag{25}$$

elde edilir. (25) nolu eşitlikte $x=3^l$ ve $l\geq 2$ olduğundan r_1 kökü her zaman negatiftir. Dolayısıyla, r_1 pozitif değeri ile ilgilendiğimizden burada çözüm yoktur. Diğer kökte yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-\left(-3^{2l}+8.3^l-11\right)+\left(x^2-4x+7\right)}{2\left(3^{2l}-6.3^l+9\right)} \\ &= \frac{x^2-8x+11+x^2-4x+7}{2x^2-12x+18} \\ &= \frac{2x^2-12x+18}{2x^2-12x+18} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{26}$$

elde edilir. (26) nolu eşitlikte r_2 kökü istenilen değer olan pozitif tamsayı değeri olarak elde edilir. Yani, $n=1$ dır.

(ii) $s>l$ olsun. $s>l$ ise $s=l+k$ yazılabilir. Burada, $k\neq 0$ dır.

(21) nolu ifadede $s=l+k$ ve $x=3^l\left(l\geq 2\right)$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} &= \sqrt{\left(-3^{2l}+8.3^l-11\right)^2+4\left(3^{2l}-6.3^l+9\right)\left(2.3^{l+k}-2\right)} \\ &= \sqrt{\left(x^2-8x+11\right)^2+8\left(x^2-6x+9\right)\left(x.3^k-1\right)} \\ &= \sqrt{x^4+\left(-16+8.3^k\right)x^3+\left(78-48.3^k\right)x^2+\left(-128+72.3^k\right)+49} \end{aligned}$$

elde edilir. Pozitif tamsayı kökler ilgi alanımızda olduğundan,

$$x^4+\left(-16+8.3^k\right)x^3+\left(78-48.3^k\right)x^2+\left(-128+72.3^k\right)+49=\left(ax^2+bx+c\right)^2 \tag{27}$$

şeklinde olmalıdır. (27) nolu eşitliğin sağ tarafı açık bir şekilde yazılıp polinom eşitliği kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$x^4+\left(-16+8.3^k\right)x^3+\left(78-48.3^k\right)x^2+\left(-128+72.3^k\right)+49=a^2x^2+2abx^3+\left(b^2+2ac\right)x^2+2bcx+c^2$$

ise

$$\begin{array}{ll} a^2=1 & (28.1)\\ 2ab=-16+8.3^k & (28.2)\\ b^2+2ac=78-48.3^k & (28.3)\\ 2bc=-128+72.3^k & (28.4)\\ c^2=49 & (28.5) \end{array} \qquad (28)$$

dır. 4 durum mevcuttur:

a) $a=1, c=7$

(28.2) ve (28.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$\begin{array}{ll} 2b=-16+8.3^k \Rightarrow b=-8+4.3^k & (29.1)\\ b^2+14=78-48.3^k & (29.2) \end{array} \qquad (29)$$

elde edilir. (29.1), (29.2) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &\left(-8+4.3^k\right)^2+14=78-48.3^k\\ &\Rightarrow 64-64.3^k+16.3^{2k}+14=78-48.3^k\\ &\Rightarrow 16.3^{2k}-16.3^k=0\\ &\Rightarrow 3^k\left(3^k-1\right)=0 \end{aligned}$$

elde edilir. $3^k \neq 0$ olduğundan $3^k=1 \Rightarrow k=0$ bulunur. Fakat $k \neq 0$ dır. Dolayısıyla bu eşitlik sağlanmaz.

b) $a=1, c=-7$

(28.2) ve (28.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$\begin{array}{ll} 2b=-16+8.3^k \Rightarrow b=-8+4.3^k & (30.1)\\ b^2-14=78-48.3^k & (30.2) \end{array} \qquad (30)$$

elde edilir. (30.1), (30.2) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &\left(-8+4.3^k\right)^2-14=78-48.3^k\\ &\Rightarrow 64-64.3^k+16.3^{2k}-14=78-48.3^k\\ &\Rightarrow 16.3^{2k}-16.3^k-28=0\\ &\Rightarrow 4m^2-4m-7=0 \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemin kökleri irrasyonel olduğundan 3^k değerleri bu denklem için her zaman irrasyonel elde edilir.

c) $a=-1, c=7$

(28.2) ve (28.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$\begin{array}{ll} -2b=-16+8.3^k \Rightarrow b=8-4.3^k & (31.1) \\ b^2-14=78-48.3^k & (31.2) \end{array} \qquad (31)$$

elde edilir. (31.1), (31.2) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &\left(8-4.3^k\right)^2-14=78-48.3^k \\ &\Rightarrow 64-64.3^k+16.3^{2k}-14=78-48.3^k \\ &\Rightarrow 16.3^{2k}-16.3^k-28=0 \\ &\Rightarrow 4m^2-4m-7=0 \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemin kökleri irrasyonel olduğundan 3^k değerleri bu denklem için her zaman irrasyonel elde edilir.

d) $a=-1, c=-7$

(28.2) ve (28.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$\begin{array}{ll} -2b=-16+8.3^k \Rightarrow b=8-4.3^k & (32.1) \\ b^2+14=78-48.3^k & (32.2) \end{array} \qquad (32)$$

elde edilir. (32.1), (32.2) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &\left(8-4.3^k\right)^2+14=78-48.3^k \\ &\Rightarrow 64-64.3^k+16.3^{2k}+14=78-48.3^k \\ &\Rightarrow 16.3^{2k}-16.3^k=0 \\ &\Rightarrow 3^k\left(3^k-1\right)=0 \end{aligned}$$

elde edilir. $3^k \neq 0$ olduğundan $3^k=1 \Rightarrow k=0$ bulunur. Fakat $k \neq 0$ dır. Dolayısıyla bu eşitlik sağlanmaz.

Bu 4 durumdan da görüleceği üzere, $\sqrt{\Delta}$ değeri $s>l$ için kök dışına çıkamaz. Dolayısıyla kökler her zaman irrasyonel sayı olarak elde edilir.

(iii) $s<l$ olsun. $s<l$ ise $l=s+k$ yani $s=l-k$ yazılabilir. Burada, $k \neq 0$ dır.

(21) nolu ifadede $s=l-k$ ve $x=3^l\left(l \geq 2\right)$ yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\Delta} &= \sqrt{\left(-3^{2l}+8.3^{l}-11\right)^{2}+4\left(3^{2l}-6.3^{l}+9\right)\left(2.3^{l-k}-2\right)} \\
&= \sqrt{\left(x^{2}-8x+11\right)^{2}+8\left(x^{2}-6x+9\right)\left(x.3^{-k}-1\right)} \\
&= \sqrt{x^{4}+\left(-16+8.3^{-k}\right)x^{3}+\left(78-48.3^{-k}\right)x^{2}+\left(-128+72.3^{-k}\right)+49}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Pozitif tamsayı kökler ilgi alanımızda olduğundan,

$$
x^{4}+\left(-16+8.3^{-k}\right)x^{3}+\left(78-48.3^{-k}\right)x^{2}+\left(-128+72.3^{-k}\right)+49=\left(ax^{2}+bx+c\right)^{2} \tag{33}
$$

şeklinde olmalıdır. (33) nolu eşitliğin sağ tarafı açık bir şekilde yazılıp polinom eşitliği kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$
x^{4}+\left(-16+8.3^{-k}\right)x^{3}+\left(78-48.3^{-k}\right)x^{2}+\left(-128+72.3^{-k}\right)+49=a^{2}x^{2}+2abx^{3}+\left(b^{2}+2ac\right)x^{2}+2bcx+c^{2}
$$

ise

$$
\begin{aligned}
&a^{2}=1 && (34.1)\\
&2ab=-16+8.3^{-k} && (34.2)\\
&b^{2}+2ac=78-48.3^{-k} && (34.3)\\
&2bc=-128+72.3^{-k} && (34.4)\\
&c^{2}=49 && (34.5)
\end{aligned}
\tag{34}
$$

dır. 4 durum mevcuttur:

a) $a=1, c=7$

(34.2) ve (34.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
&2b=-16+8.3^{-k} \Rightarrow b=-8+4.3^{-k} && (35.1)\\
&b^{2}+14=78-48.3^{-k} && (35.2)
\end{aligned}
\tag{35}
$$

elde edilir. (35.1), (35.2) de yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&\left(-8+4.3^{-k}\right)^{2}+14=78-48.3^{-k}\\
&\Rightarrow 64-64.3^{-k}+16.3^{-2k}+14=78-48.3^{-k}\\
&\Rightarrow 16.3^{-2k}-16.3^{-k}=0\\
&\Rightarrow 3^{-k}\left(3^{-k}-1\right)=0
\end{aligned}
$$

elde edilir. $3^{-k}\neq 0$ olduğundan $3^{-k}=1 \Rightarrow k=0$ bulunur. Fakat $k\neq 0$ dır. Dolayısıyla bu eşitlik sağlanmaz.

b) $a = 1, c = -7$

(34.2) ve (34.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} &2b = -16 + 8.3^{-k} \Rightarrow b = -8 + 4.3^{-k} && (36.1) \\ &b^2 - 14 = 78 - 48.3^{-k} && (36.2) \end{aligned} \qquad (36)$$

elde edilir. (36.1), (36.2) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &\left(-8 + 4.3^{-k}\right)^2 - 14 = 78 - 48.3^{-k} \\ &\Rightarrow 64 - 64.3^{-k} + 16.3^{-2k} - 14 = 78 - 48.3^{-k} \\ &\Rightarrow 16.3^{-2k} - 16.3^{-k} - 28 = 0 \\ &\Rightarrow 4m^2 - 4m - 7 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemin kökleri irrasyonel olduğundan 3^k değerleri bu denklem için her zaman irrasyonel elde edilir.

c) $a = -1, c = 7$

(34.2) ve (34.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} &-2b = -16 + 8.3^{-k} \Rightarrow b = 8 - 4.3^{-k} && (37.1) \\ &b^2 - 14 = 78 - 48.3^{-k} && (37.2) \end{aligned} \qquad (37)$$

elde edilir. (37.1), (37.2) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &\left(8 - 4.3^{-k}\right)^2 - 14 = 78 - 48.3^{-k} \\ &\Rightarrow 64 - 64.3^{-k} + 16.3^{-2k} - 14 = 78 - 48.3^{-k} \\ &\Rightarrow 16.3^{-2k} - 16.3^{-k} - 28 = 0 \\ &\Rightarrow 4m^2 - 4m - 7 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemin kökleri irrasyonel olduğundan 3^{-k} değerleri bu denklem için her zaman irrasyonel elde edilir.

d) $a = -1, c = -7$

(34.2) ve (34.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} &-2b = -16 + 8.3^{-k} \Rightarrow b = 8 - 4.3^{-k} && (38.1) \\ &b^2 + 14 = 78 - 48.3^{-k} && (38.2) \end{aligned} \qquad (38)$$

elde edilir. (38.1), (38.2) de yerine yazılırsa,

$$\left(8-4.3^{-k}\right)^2+14=78-48.3^{-k}$$
$$\Rightarrow 64-64.3^{-k}+16.3^{-2k}+14=78-48.3^{-k}$$
$$\Rightarrow 16.3^{-2k}-16.3^{-k}=0$$
$$\Rightarrow 3^{-k}\left(3^{-k}-1\right)=0$$

elde edilir. $3^{-k}\neq 0$ olduğundan $3^{-k}=1\Rightarrow k=0$ bulunur. Fakat $k\neq 0$ dır. Dolayısıyla bu eşitlik sağlanmaz.

Bu 4 durumdan da görüleceği üzere, $\sqrt{\Delta}$ değeri $l>s$ için kök dışına çıkamaz. Dolayısıyla kökler her zaman irrasyonel sayı olarak elde edilir.

Sonuç 4.3.4.1 $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası üzerinde ağırlığı $t=4.3^{l-2}$ ya da daha küçük olan sözler için mükemmel kod yoktur.

Kısım 4.3'te elde edilen sonuçlar uluslar arası bir konferansta sunulmuştur. Aynı zamanda tam metin olarak konferans kitapçığında basıma kabul edilmiştir [12].

4.4 $\mathbb{Z}_{p^l}$ halkası üzerinde homojen ağırlığa bağlı lineer kodlar için sınır ve mükemmel kodlar

Bu kısımda, $p>2$ asal olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^l}$ halkası için belli homojen ağırlıklarına göre sözlerin sayısı elde edilmiştir. Ayrıca, Tablo 4 kullanılarak diğer kısımlarda elde edilen çalışmalar baz alınarak lineer kodlar için sınırlar elde edilebileceği görülmüştür. Ek olarak, (1) nolu makaledeki metot kullanılarak ağırlığı $t=(p-1)\left(p^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısına göre mükemmel kod varlığı incelenmiştir.

4.4.1 $\mathbb{Z}_{p^l}$ halkası üzerinde belli homojen ağırlığa sahip sözlerin sayısının belirlenmesi

$l>1$ ve $p>2$ asal bir sayı olmak üzere; $\mathbb{Z}_{p^l}$ halkası için homojen ağırlık aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$w_{\text{hom}}(x)=\begin{cases} p^{l-1} & , \quad x\in p^{l-1}\mathbb{Z}_{p^l} \\ (p-1).p^{l-2} & , \quad x\notin p^{l-1}\mathbb{Z}_{p^l} \\ 0 & , \quad x=0. \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_{p^l}$ halkası üzerinde verilen homojen ağırlık tanımı baz alınarak belli t homojen ağırlıklara sahip sözlerin sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4. Homojen Ağırlıkları t olan sözlerin sayısı

$$t=0\left(p^{l-2}\right)\rightarrow\left(p^l-p\right)^0\binom{n}{0}$$

$$t=(p-1)\left(p^{l-2}\right)\rightarrow\left(p^l-p\right)\binom{n}{1}$$

$$t=p\left(p^{l-2}\right)\rightarrow 2\left(p^l-p\right)^0\binom{n}{1}$$

$$t=(2p-2)\left(p^{l-2}\right)\rightarrow\left(p^l-p\right)^2\binom{n}{2}$$

$$t=(2p-1)\left(p^{l-2}\right)\rightarrow 2\left(p^l-p\right)\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}$$

4.4.2 $\mathbb{Z}_{p^l}$ halkası üzerinde ağırlığı $t=(p-1)\left(p^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=(p-1)\left(p^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan sözlerin sayısı Tablo 4 aracılığıyla,

$$\left(p^l-p\right)n+1$$

dır. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için (1) nolu eşitlik aracılığıyla aşağıdaki eşitliğin incelenmesi gerekir:

$$\left(p^{l}-p\right)n+1=p^{s}. \tag{39}$$

Burada $|V|=p^{ln}$ olduğundan ve $|C|=a$ alınırsa,

$$\frac{|V|}{|C|}=p^{ln-a}$$

elde edilir. $ln-a$ değeri s ile gösterilecektir.

$s=0$ durumu, söz sayısı şu anda incelenen ve daha sonra incelenecek ağırlıklara göre hiçbir zaman 1 değerini vermediğinden modüler aritmetiğe göre yapılacak incelemelerde dikkate alınmayacaktır.

(39) nolu eşitlik $\bmod p$ ye göre incelenirse;

$$\begin{aligned}\left(p^{l}-p\right)n+1&=p^{s} \quad \bmod p\\ p\left(p^{l-1}-1\right)n+1&=p^{s} \quad \bmod p\\ 1&=0 \quad \bmod p\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise n uzunluk parametresi için ağırlığı $t=(p-1)\left(p^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan sözler için mükemmel lineer kod olmadığı sonucuna ulaştırmaktadır.

Sonuç 4.4.2.1 $\mathbb{Z}_{p^{l}}$ halkası üzerinde ağırlığı $t=(p-1)\left(p^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan sözler için mükemmel kod yoktur.

5. SONUÇ

Bu çalışmada, ele alınan metotlara göre homojen ağırlığa bağlı Galois halkasının özel durumları için kısmi sonuçlar elde edilmiştir. Belli homojen ağırlıklara göre bu halkalar üzerinde lineer kodlar için sınırlar elde edilmiştir. Bu sınırlarda eşitlik durumu incelenmiş ve bu inceleme sonucunda mükemmel lineer kodların var olup olmadığı sonucuna varılmıştır. Galois halkalarının ailesinden ve kodlama teorisinde en çok uygulama bulmuş ailesinden olan $\mathbb{Z}_{2^{l}}$ halkası üzerinde kodlar için Bu projede mükemmel kod varlığı problemine çözüm sunulmuştur. Genelde ise $\mathbb{Z}_{p^{l}}$ halkası üzerindeki kodların mükemmel olması için gerek şart elde edilmiştir ve $p=3$ durumu ile genelde p durumunun özel ağırlıklı mükemmel kod varlığı problemine çözüm sunulmuştur.

Ancak, gelişme raporları boyunca kullanılan metotlar ve burada (1) nolu kaynakta ele alınan metot, Galois halkaları üzerinde homojen ağırlığa bağlı ağırlığı t ya da daha küçük olan sözler için mükemmel kodun var olup olmadığını özel durumlar dışında doğrudan söylememize olanak vermemektedir. Dolayısıyla, Galois halkaları üzerinde homojen ağırlığa bağlı ağırlığı t ya da daha küçük olan sözler için mükemmel kodun var olup olmadığını doğrudan elde edilebilecek bir metot problemin çözümünü kolaylaştıracaktır. Yaptığımız çalışmalar ve proje deneyimim süresince direkt bir yöntemin varlığını destekleyecek bir bulguya rastlanmamıştır. Bu nedenle projenin sonuçlarını daha ileriye taşıma problemi önümüzdeki yıllarda da araştırmacıların dikkatini çekecek önemli bir problem olarak gündemde kalmaya devam edecektir.

KAYNAKLAR

1. WAN Z.X., Quaternary Codes, Vol:8, World Scientific Pub., Singapore, (1997). Pp: 77.

2. JAIN S., Nam K.B., Lee K.S., On Some Perfect Codes with Respect to Lee Metric, Linear Algebra and Its Applications, 405, 104-120, (2005).

3. QUISTORFF J., New Upper Bounds on Lee Codes, Discrete Applied Mathematics, 154, 10, 1510-1521, (2006).

4. ASTOLA J.T., An Elias-type Bound for Lee Codes over Large Alphabets and Its Applications to Perfect Codes, IEEE Trans Inform Theory, 28, 111-113, (1982).

5. GREFERATH M., O'Sullivan M.E., On Bounds for Codes over Frobenius Rings under Homogeneous Weights, Discrete Mathematics, 289, 11-24, (2004).

6. HAMMONS A.R., Kumar Jr. P.V., Calderbank A.R., Sloane N.J., Sole P., The $\mathbb{Z}_4$-Linearity of Kerdock, Preparata, Goethals and Related Codes, IEEE Trans Inform Theory, 40, 304-319, (1994).

7. TIETAVAINEN A., On the Nonexistence of Perfect Codes over Finite Fields, SIAM J. Appl. Math., 24, 88-96, (1973).

8. SIAP, I., Ozen M., Siap V., On the Existence of Perfect Quaternary Codes, SIAM Conference on Discrete Mathematics, Texas-USA, (2010) pp: 45.

9. OZEN M., Siap V., On the Existence of Perfect Codes over $\mathbb{Z}_4$ with Respect to Homogeneous Weight, Applied Mathematical Sciences, 6, 2005-2011, (2012).

10. SIAP I., Ozen M., Siap V., On the Existence of Perfect Linear Codes over $\mathbb{Z}_{2^l}$ with Respect to Homogenous Metric, The Arabian Journal for Science and Engineering, Yayına Kabul Edildi.

11. On the Existence of $\mathbb{Z}_{2^k}$-Perfect Linear Codes with Respect to Homogeneous Metric, Procedia Computer Science, Yayına Kabul Edildi.

12. OZEN M, Siap V., Kara O., On the Existence of Perfect Lİnear Codes over the Ring $\mathbb{Z}_{3^l}$ of Integer modulo 3^l with Respect to Homogenous Metric, ICM Proceedings, (2012).

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje No: 109T328
Proje Başlığı: Homojen Ağırlıklarına Bağlı Galois Halkaları Üzerinde Tanımlı Lineer Kodlarda Sınırlar ve Mükemmel Kodlar
Proje Yürütücüsü ve Araştırmacılar: Doç. Dr. Mehmet ÖZEN (Yürütücü), Prof. Dr. İrfan ŞİAP (Araştırmacı), Yrd. Doç. Dr. Vedat ŞİAP (Bursiyer), Arş. Gör. Elif Segah ÖZTAŞ(Bursiyer)
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi: Sakarya Üniversitesi, Esentepe Kampüsü, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Serdivan, Sakarya
Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi:
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri: 15.01.2010 – 15. 05. 2012
Öz (en çok 70 kelime) Kodlama teorisinde aşikar olmayan mükemmel kodun varlığının olup olmadığı problemi en zor problemlerden bir tanesidir. Bu yüzden araştırmacılar tarafından dikkatle ele alınarak farklı metrikler üzerinde farklı metotlar üretilerek problemin zorluğu aşılmaya çalışılmıştır. Bu çalışmada, mükemmel kod varlığının olup olmadığı Homojen metriği ele alınarak çalışılmıştır. Homojen metriğine göre Galois halkalarının özel durumları üzerinde belirli ağırlıklara göre lineer kodlar için sınırlar elde edilmiştir. Mükemmel kod varlığının olup olmadığı elde edilen sınırlarda eşitlik durumuna bakılarak irdelenmiştir. Eşitlik durumunda aşikar olmayan mükemmel kod parametrelerini verecek pozitif tamsayı değerlerinin olup olmadığı araştırması yapılmıştır.
Anahtar Kelimeler: Sınırlar, Lineer kodlar, Galois Halkaları, Homojen Ağırlıklar, Mükemmel Kodlar
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu mu? **Evet** ☐ **Gerekli Değil x** Fikri Ürün Bildirim Formu'nun tesliminden sonra 3 ay içerisinde patent başvurusu yapılmalıdır.
Projeden Yapılan Yayınlar: 1. OZEN M., Siap V., On the Existence of Perfect Codes over $\mathbb{Z}_4$ with Respect to Homogeneous Weight, Applied Mathematical Sciences, 6, 2005-2011, (2012). 2. SIAP I., Ozen M., Siap V., On the Existence of Perfect Linear Codes over $\mathbb{Z}_{2^l}$ with Respect to Homogenous Metric, The Arabian Journal for Science and Engineering, Yayına Kabul Edildi. 3. On the Existence of $\mathbb{Z}_{2^k}$ -Perfect Linear Codes with Respect to Homogeneous Metric, Procedia Computer Science, Yayına Kabul Edildi. 4. OZEN M, Siap V., Kara O., On the Existence of Perfect Lİnear Codes over the Ring $\mathbb{Z}_{3^l}$ of Integer modulo 3^l with Respect to Homogenous Metric, ICM Proceedings, (2012).