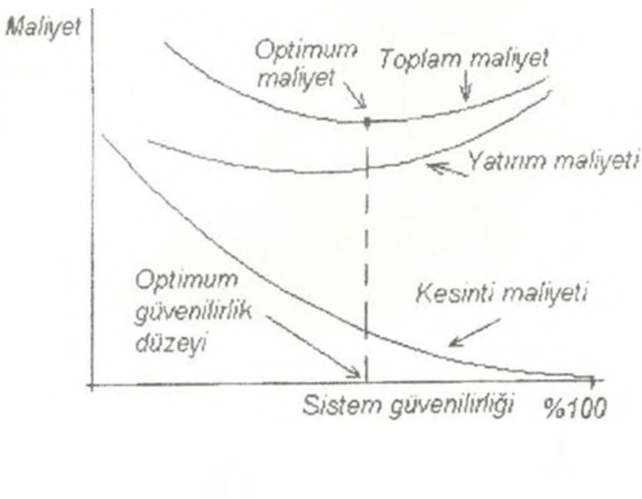
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ YAYINLARI
Yayın No : 16

# ELEKTRİK İLETİM ve DAĞITIM SİSTEMLERİNDE GÜVENİLİRLİK


Yrd. Doç. Dr. Elk. Yük. Müh. ve Teorik Fizikçi
**Şerafettin ÖZBEY**

Elk. Yük. Müh.
**Zafer DEMİR**

# ELEKTRİK İLETİM VE DAĞITIM SİSTEMLERİNDE GÜVENİLİRLİK




*Yrd.Doç.Dr.Elk.Yük.Müh. ve Teorik Fizikçi*
***Şerafettin ÖZBEY***

*Elk.Yük.Müh.*
***Zafer DEMİR***

## ÖNSÖZ

Bu yayın *Elektrik İletim ve Dağıtım Sistemlerinde Güvenilirlik* adlı dersin müfredatına uygun olarak hazırlanmıştır. Birinci bölümde güvenilirlik ile ilgili tanımlar, ve konumuzu anlatmıya yetecek kadar cümleler ve ihtimal hesabı ile ilgili temel tanım ve elemanter işlemler verilmiştir. İkinci bölümde dağıtım sistemlerinde güvenilirlik, üçüncü bölümde ise elektrik iletim sistemlerinde güvenilirlik konuları anlatılmıştır.

Bu kitabın yazılmasında ve her zaman manevi desteğini gördüğümüz Sayın Prof.Dr.Hüseyin ÇAKIR, Sayın Prof.Dr.İsmail ÇALLI , ve bizi yetiştiren tüm hocalarımıza teşekkür ederiz. Ayrıca bu eserin bilgisayarla yazımında yardımcı olan Ülküser ÖZBEY'e teşekkür ederiz.

Elektrik mühendisliğinde bu konu ile ilgili Türkçe yayın olmadığından, bu yayının faydalı olacağını ümit eder ve yapacağınız uyarılar için şimdiden teşekkür ederiz.

SAKARYA-KOCAELI, 1996

Şerafettin ÖZBEY, Zafer DEMİR

# İÇİNDEKİLER

# *BÖLÜM 1*

# *GÜVENİLİRLİK*

## *TEMEL KAVRAMLAR*

***Giriş***

Elektrik enerji sisteminin planlanması, işletilmesi ve genişletilmesi için yapılan analizler yük akışı, arıza, kararlılık ve güvenilirlik analizleridir.

Bu analizlerden bu kitabın konusu güvenilirlik, geçmişteki istatistiki bilgilere dayanılarak gelecekteki olaylar hakkında ihtimaller hesabınıda kullanarak yapılır, ve tanımı aşağıdaki gibi yapılabilir.

Güvenilirlik, belirtilen bir süre içinde belirtilen şartlarda gerekli olan bir fonksiyonu yerine getiren bir elemanın yeteneğidir. Yukardaki güvenilirlik tanımına ek olarak aşağıdaki tanımların burada verilmesi faydalı olacaktır.

## *1.1. GÜVENİLİRLİK İLE İLGİLİ TANIMLAR*

***1.1.1. Tanım: Devre dışı,*** Bir elemanın, doğrudan etkilendiği olaydan kaynaklanan, amaçlanan görevini yapmasının mümkün olmadığı durumu tanımlar. Bu tanım arıza tanımınıda içermesine rağmen kapsamı biraz daha geniştir. Örnek olarak bir yıldırım düşmesinde devre açıcıları devreyi açmıştır ve devre açıcıları arızalı olmamasına rağmen istenen fonksiyonları yerine getiremiyor ve devre dışı olmuş, bir transformatör bobin teli kopmuş arızalıdır ve bu nedenle devre dışı olmuştur. Devre dışı, sistem tertibine bağlı olarak tüketici devrelerinde kesintiye yol açabileceği gibi açmayabilirde.

***1.1.2. Tanım: Zorunlu devre dışı,*** Acil durumlarda bir elemanın ya otomatik olarak veya anahtarlama işlemleriyle devreden hemen çıkarılması neticesinde oluşan ***devre dışı*** kalma olayıdır. Ekipmanın düzensiz çalışması yada insan hatasından kaynaklanan devre dışı da zorunlu devre dışı grubuna girer.

***1.1.3. Tanım: Programlı devre dışı,*** Elemanlardan birisinin genellikle montaj, peryodik bakım veya tamir esnasında devre dışında kalması sırasında oluşan ***devre dışı*** durumudur. Bir devre dışının zorunlu devre dışımı yoksa programlı devre dışımı olduğunu anlamanın yolu şöyledir. Eğer bir devre dışı olayı istendiğinde ertelenebiliniyorsa bu devre dışı ***programlı devre dışı***, aksi taktirde ***zorunlu devre dışıdır***. Devre dışını ertelemek bazen istenebilir, mesela birimlerin fazla yüklenmesini önlemek veya müşteriye hizmetin kesintiye uğramasını önlenmek için gibi...

***1.1.4. Tanım: Kısmi devre dışı,*** Bir elemanın fonksiyonunu yerine getirmesinin kısmi olarak azaltılması fakat eleman görevini kısmen yerine getirmesi durumudur.

***1.1.5. Tanım: Geçici zorunlu devre dışı,*** Bir elemanın devre dışı kalmasının sebebi kısa sürede ortadan kalkması ve elemanın, mümkün olan en kısa zamanda, otomatik olarak ,anahtarla, devre kesicilerle, yada sigorta ise yenisi yerine takılarak normal servise alınması durumundaki devre dışı kalma olayıdır. ***Geçici zorunlu devre dışına*** örnek olarak yıldırım çarpmasından dolayı bir elemanın geçici olarak devre dışı kalmasını örnek olarak verebiliriz.

***1.1.6. Tanım: Sürekli zorunlu devre dışı,*** Bir elemanın ***devre dışı*** kalması derhal giderilemiyorsa ve ancak tehlikenin elimine edilmesi veya onarılması yada değiştirilmesi ile normal servise geri dönebiliyorsa, bu tür devre dışı kalmalara ***sürekli zorunlu devre dışı*** denir. Örnek: ***sürekli zorunlu devre dışı*** olma, yıldırım çarpması nedeni ile izolatörlerin kırılması, parçalanması ve bu elemanın tamir yada yenisi ile değiştirilinceye kadar ***devre dışı*** kalma olayıdır

***1.1.7. Tanım: Kesinti,*** Bir veya daha fazla tüketici veya tesisin, sistem konfigirasyonuna bağlı olarak bir veya daha fazla elemanın devre dışı olması nedeniyle enerjisiz kalmasıdır.

***1.1.8. Tanım: Zorunlu kesinti, Zorunlu devre dışının*** sebep olduğu kesintidir.

***1.1.9. Tanım: Programlı kesinti, Programlı devre dışının*** sebep olduğu kesintidir.

*1.1.10. Tanım: Anlık kesinti,* Sistemin yeniden düzenlenmesi amacıyla, kumanda merkezlerinde otomatik olarak yapılan anahtarlama işlemleri veya lokal alanlarda bir teknisyenin manuel olarak çabucak gerçekleştirebileceği anahtarlama işlemleri için, geçen kısa bir zaman peryotudur. Bu şekildeki bir anahtarlama işlemi tipik olarak birkaç dakika sürer.

*1.1.11. Tanım: Geçici kesinti,* Operatörün kısa bir sürede ulaşamayacağı bir yerden kesinti giderilebiliyorsa, bu durumda, anahtarlama işlemleri ile, enerji kesintisinden, enerji kesintisi giderilinceye kadar geçen zaman peryotuna *geçici kesinti* denir. Bu tür anahtarlama işlemleri 1 - 2 saat içinde yapılır.

*1.1.12. Tanım: Sürekli kesinti, Anlık* veya *geçici kesinti* sınıflarına girmeyen kesintidir.

*1.1.13. Tanım: Sistem kesinti frekans indeksi,* Servis verilen, tüketici sayısı başına birim zamanda gerçekleşen ortalama kesinti sayısıdır. Bir yıl içinde gerçekleşen toplam kesinti sayısının, toplam tüketici sayısına bölünmesi ile bulunur.

*1.1.14. Tanım: Tüketici kesinti frekans indeksi,* Kesintiden etkilenen tüketici sayısı başına, birim zamanda gerçekleşen ortalama kesinti sayısıdır. Bir yıl içinde gerçekleşen tüketici kesintilerinin, bu kesintilerden etkilenen tüketici sayısına bölünmesi ile bulunur.

*1.1.15. Tanım: Yük kesinti indeksi,* Sisteme bağlı yüklerin birim zamanda kesintiye uğrayan ortalama güç (kva) değeridir. Yıllık kesintiye uğrayan yükün(kva), toplam yüke(kva) bölünmesi ile bulunur.

*1.1.16. Tanım: Tüketici kısa-kesinti indeksi,* Kesintiden etkilenen tüketici başına yılda yükün kVA-dakika'lık enerji kesintisine uğramasıdır. Senelik kısa-kesintinin(kVA-dakika), bir yıl içinde kesintiden etkilenen tüketici sayısına oranıdır.

*1.1.17. Tanım: Tüketici kesinti süresi indeksi,* Belirli bir zaman peryodu içinde güç kesilmesi yaşayan tüketiciler için güç kesilme süresi toplamıdır.Tüketici tarafından belirli bir zaman peryodunda maruz kalınan toplam kesilme süresinin, bu zaman süresince gerçekleşen toplam kesilme sayısına bölünmesi ile bulunur.

## *1.2. GÜVENİLİRLİK RAPORU*

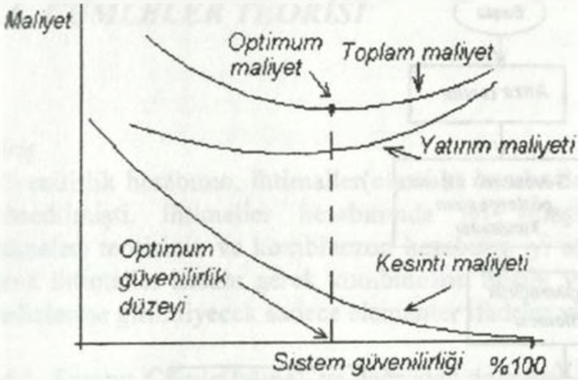
Bir devre dışı raporunda aşağıdaki bilgiler olmalıdır.

*a)* Sınıflandırma amacı ile tip, dizayn, imalatçı firma, gerekli diğer bilgiler
*b)* Tesis edilme tarihi, sistem içindeki yeri, bir hattın söz konusu olması durumunda hattın uzunluğu
*c)* Arıza modu (kısa devre, yanlış çalışma, ..., v.s.)
*d)* Arıza nedeni (yıldırım, ağaç, ..., v.s.)
*e)* Zamanlar (servis dışı kaldığı ve tekrar servise alındığı zamanlar) , tarih, arızanın gerçekleştiği zamanki meteorolojik şartlar.
*f)* Devre dışı kalmanın tipi (zorunlu veya programlı, geçici veya sürekli )

Raporda bunlara ilave olarak servisdeki benzer elemanların toplam sayısınıda vermek gerekir. Böylece servis yılı ve eleman başına devre dışı kalma oranı kolaylıkla belirlenebilir. Ayrıca servis kelimesine dikkat edilmeksizin, her eleman arızası belirtilmelidir, böylece eleman arıza oranları uygun şekilde belirlenebilecektir. Arıza raporları, koruyucu bakım programları yapma ekipman değitirmeleri için çok faydalı bilgiler içerir.
Genellikle tahmin edilen *arıza oranları* ile *maruz kalınan arıza oranları* arasında bazı farklar bulunur. Bu farklar aşağıdaki nedenlerden kaynaklanır.
*a)* Arıza tanımı
*b)* Tahmin yapıldığı ortam ile gerçek ortamın aynı olmaması
*c)* Bakım yapılabilirlik, destek, test ekipmanları, özel personel
*d)* Elemanların kompozisyonu ve tahmin yapılırken kabul edilen arıza oranları
*e)* Denetim ve kalite kontrolü içeren imalat işlemleri
*f)* Arızaların zaman içinde dağılımı
*g)* Eleman arızalarının bağımsızlığı

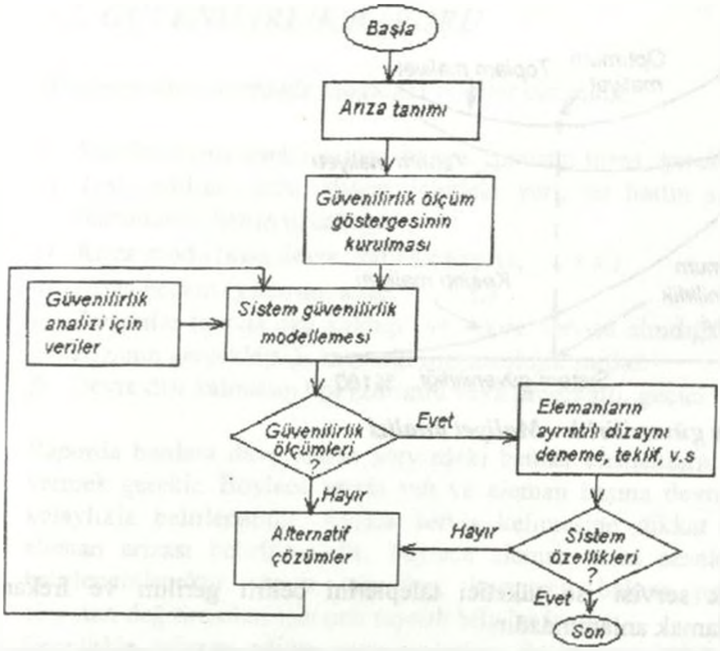
## *1.3. GÜVENİLİRLİK DÜZEYİ*

Elektrik enerjisini ileten ve dağıtan kuruluşlar, enerjinin iletim ve dağıtımında güvenilirlik ve yeterliliğin artırılmasını amaçlayan çalışmalar yaparlar. Burada ***güvenilirlik*** terimi sistemin emniyeti ve enerji kesilmelerinden kaçınmayı tanımlar. ***Yeterlilik*** terimi ise tüketicilerin elektrik enerjisi ihtiyaçlarını sağlamada kullanılan sistemin yeterli oluşu anlamındadır. Ayrıca sürekli ve kaliteli elektrik servisi, tüketicilere, ekonomik olarak sağlamak isterler. Burada sürekli elektrik servisi, tüketicinin talep ettiği kadar enerjiyi gerekli personel ve techizatla emniyetli bir şekilde sağlamak anlamındadır.




*Şekil 1.1. Sistem güvenilirlik - Maliyet analizi*

Kaliteli elektrik servisi ise tüketici taleplerini belirli gerilim ve frekans sınırlarında sağlamak anlamındadır.
Elektrik kesintisi tüketicinin işini zamanında yapamamasına bu nedenle hizmet, para ve eşya kaybına sebebiyet vermektedir.Bu nedenledirki tüketicilere sunulan güvenli servisin devamı için, Elektrik kuruluşu, elemanların devre dışı olduğu durumlarda, elektrik kesintilerini önlemek için yeterli malzemeyi bulundurmalıdır. Güvenilirlik maliyetini hesaplamak için, devre dışı maliyeti tesbit edilmelidir. Güvenilirlik maliyeti , ücretin tekrar gözden geçirilmesine ve ücret artışının tesbiti için kullanılır. Sistem güvenilirliğini iyileştirmek amacıyla,
sisteme ilave yatırımlar yapmak, gerekli yatırım miktarı tesbit etmek için, sistem güvenilirliğinin ekonomik analizi en iyi bir planlama aracıdır.
Burada belirtilmelidirki, kesintilere sebep olan eleman arızasını veya elemanlar grubunun arızasını önlemek ne mümkündür nede istenen bir durumdur. Güvenilirlik düzeyi, tüketici kesintileri nedeni ile oluşacak maliyetin, kesintiler nedeni ile oluşmuş maliyeti geçmesinin engellendiği durumda, uygundur denir. Tüketici bakış açısından uygun güvenilirlik düzeyi, toplam enerji ücretine ilaveten kesinti ücretinin minimum olduğu durumdur. Bu kavram teorik olarak Şekil 1.1. de görülmektedir. Şekildende görüldüğü gibi sistem güvenilirliğinin iyileşmesi ile yatırım arasında lineer bir bağıntı olmayıp, sistemin optimum (uygun) güvenilirlik düzeyi optimum maliyete karşılık gelir, yanı minimum toplam maliyete karşılık gelir.
Elektrik kesilmelerinin doğal sebepleri, yıldırım düşmesi, rüzgar, yağmur, buzlanma ve hayvanlar dır. Diğer kesinti nedenleri ise bozuk veya defolu




***Şekil 1.2. Güvenilirlik planlama yöntemi***

malzeme kullanma, araçlarla direklere çarpma, ağaç devrilmeleri, yer altı kablolarını etkileyen kazı işlemleri, ...., dir.

Koruyucu bakım programlarının kordinasyonu güvenilirlik analizi ile oldukça etkilidir. Elekltrik kuruluşları sistemlerini muhtemel durum seviyelerini göz önüne alarak dizayn ederler, örnek tek muhtemel durum, bu nedenledırki sistemde yeterince fazlalık ve anahtarlama alternatifi oluşur, bir eleman arızası nedeniyle tüketici devre dışı olmaz. Muhtemel durum analizi ile ayrıca sistemin en zayıf noktaları bulunur. Verilen muhtemel durumun ihtimali açıkca ve hassasiyetle ifade edilebiliyorsa, bu muhtemel durum analizinin özel haline risk analizi denir. Risk analizi yalnızca, sistem ve/veya tüketicinin önemli kesimleri için yapılır. Sonuç olarak elde edilen bilgiler, sistemi belirli muhtemel durum düzeyine kadar inşa etme veya verilen hizmetin aksamasını riske edip etmeme kararını vermede kullanılır. ***Şekil 1.2.*** de güvenilirlik planlaması prosedürünün akış dıyağramı görülmektedir.

## 1.4. CÜMLELER TEORİSİ

***Giriş***

Güvenilirlik hesabının, ihtimaller(olasılık) hesabı ile yapıldığından daha önce bahsedilmişti. İhtimaller hesabınında iyi anlaşılabilmesi için cümleler (kümeler) teorisinin ve kombinezon hesabının iyi anlaşılması gerekir. Burada gerek ihtimaller hesabı gerek kombinezon hesabı ve gerekse cümleler teorisi analizlerine girilmiyecek sadece elemanter ifadeler ve işlemler verilecektir.

***1.4.1. Tanım: Cümle(küme)***, ya doğrudan doğruya veya bir kurala bağlı olarak verilen ve ***eleman (öge)*** adını alan bir takım bireylerden oluşur. Elemanları $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$ olan bir $A$ cümlesi genellikle

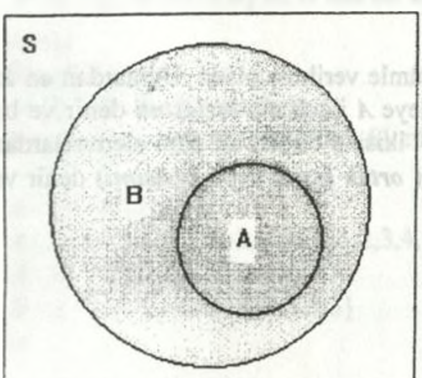
$A=\{ x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n \}$

şeklinde gösterilir.

***Örnek 1.4.1.1.***

{1,120,385} cümlesinin elemanları doğrudan doğruya, {0,2,-2,4,-4,6,-6,...} cümlesinin elemanları ise "çift sayı olma" kuralı ile verilmiştir.

***1.4.2. Tanım:*** Bir $a$ elemanının, bir $A$ cümlesinin elemanı olduğu (A cümlesine ait olduğu), $a \in A$ şeklinde ifade edilir; eğer $b$, $A$ nın elemanı değilse $b \notin A$ yazılır.




$A \subset B$

***Şekil:1.3. Cümle ve alt cümle***

*Not: Venn diyagramı,* Cümleler bazen Venn diyagramı denilen, düzlemdeki bir takım geometrik şekillerle gösterilirler. Ancak, bu diyagramlar, cümlelerle ilişkin bir önermeyi ispat etmek için kesinlikle kullanılmazlar, yalnızca bazı durumları göz önünde canlandırmayı kolaylaştırırlar.Yukarıda ***Şekil 1.3.*** de görüldüğü gibi, yeri geldikçe ***Venn diyagramı*** ile ilgili örnekler verilecektir.

***1.4.3. Tanım: Örnek uzay***, göz önüne alınan cümlenin tümünü temsil eder ve şekillerde $S$ ile gösterilmiştir( Buna *evrensel cümle* de denir ve $U$ ile gösterilir, tanımıda başka bir deyişle: aksi ispatlanmadığı sürece tüm cümleler *evrensel cümle* denilen bir cümlenin alt cümlesidir, diye yapılabilir.)

***1.4.4. Tanım:***. Hiçbir elemanı bulunmayan cümleye ***boş cümle*** denir ve bu cümle $\varnothing$ işaretiyle gösterilir. Boş cümle her cümlenin bir alt cümlesidir.

***1.4.5. Tanım:*** $A$ ve $B$ gibi iki cümle aynı elemanlardan oluşuyorsa $A$, $B$ ye eşittir denir ve $A=B$ yazılır.

***1.4.6. Tanım:*** $A$ ve $B$ gibi iki cümle verildiğine göre, $A$ nın her elemanı $B$ nin de bir elemanı ise $A$ ya ***B nin bir alt cümlesi***, $B$ ye de $A$ nın ***bir üst cümlesi*** denir ve $A \subset B$ veya $B \supset A$ yazılır. Boş cümle, her cümlenin bir alt cümlesidir, yani her $A$ cümlesi için $\varnothing \subset A$ dır; öte yandan daima $A \subset A$ dır. $\varnothing$ ve $A$ ya ***A nın triviyal alt cümleleri*** denir. $A$ nın triviyal alt cümlelerden farklı bir alt cümlesine de ***A nın bir has alt cümlesi*** adı verilir.

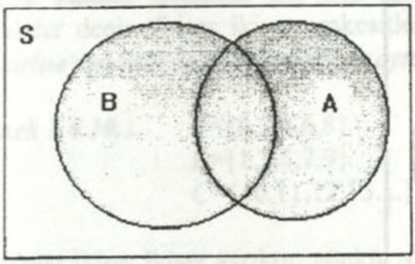
***Örnek 1.4.6.1.*** $A=\{1,3,5,7\}$ cümlesi, $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ cümlesinin bir has alt cümlesidir.

***Örnek 1.4.6.2.*** $A=\{4,8,12,16,...\}$ cümlesi, $B=\{2,4,6,8,...\}$ cümlesinin bir has alt cümlesidir. Çünkü $\varnothing \neq A \subset B$ dir; öte yandan $2 \in B$, fakat $2 \notin A$ olduğundan $A \neq B$ dir.

***1.4.7. Tanım:*** $A$ ve $B$ gibi herhangi iki cümle verilmiş olsun. Bunlardan en az birine ait olan elemanlardan oluşan cümleye $A$ ile $B$ nin ***birleşimi*** denir ve bu cümle, $A \cup B$ ile gösterilir. $A$ ve $B$ nin ikisine birden ait olan elemanlardan oluşan cümleye de $A$ ile $B$ nin ***arakesiti*** ( ***ortak kısmı*** veya ***kesişimi***) denir ve bu cümle, $A \cap B$ ile gösterilir.

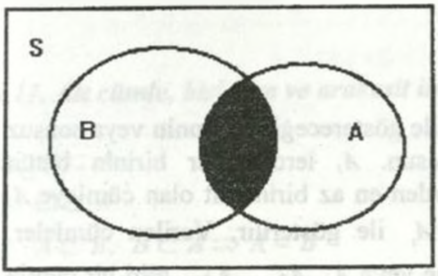
$$A \cup B=\{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$




$A \cup B$

*a* )




$A \cap B$

*b* )

***Şekil 1.4. a)*** $A \cup B$ ***Bileşim cümlesi, b)*** $A \cap B$ ***Kesişim cümlesi***

***1.4.8. Tanım:*** $A$ ve $B$ gibi herhangi iki cümle verilmiş olsun. $A$ nın $B$ ye ait olmayan elemanlarından oluşan cümleye $B$ nin $A$ dan ***farkı*** denir ve bu cümle, $A \setminus B$ ile gösterilir:

$A \setminus B = \left\{ x \in A \middle| x \notin B \right\}$ B, A nın bir alt cümlesi ise $A \setminus B$ yerine genellikle $A$-$B$ yazılır.

***Örnek 1.4.8.1.***

$A=\{0,2,4,6,8,10,...\}$ cümlesi,

$B=\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ cümlesi ise

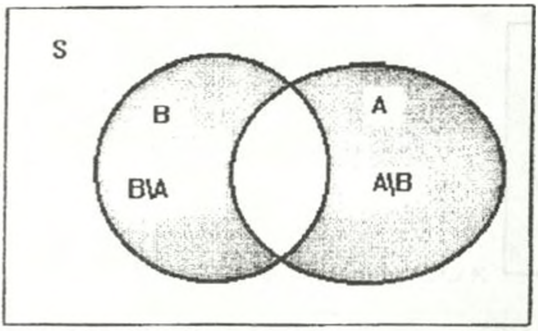
$A \cap B = \{0,2,4,6\}$,

$A \cup B == \{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,8,10,12,...\}$,

$A \setminus B = \{8,10,12,...\}$,

$B \setminus A = \{-6,-5,-4,-3,-2,-1,1,3,5\}$

tir.




*Şekil 1.5. Fark cümleleri*

***1.4.9. Tanım:*** İçlerinden herhangi biri $A_i$ ile göstereceğimiz, sonlu veya sonsuz sayıda bir takım cümleler verilmiş olsun. $A_i$ lerden her birinin bütün elemanlarını içeren ve her elemanı, $A_i$ lerden en az birine ait olan cümleye ***$A_i$ lerin birleşimi*** denir ve bu cümle, $\bigcup A_i$ ile gösterilir. Verilen cümleler, örneğin $A_1, A_2, ..., A_k$ gibi sonlu sayıda ise veya $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ gibi bir cümle dizisi oluşturuyorsa, bunların birleşimi sırasıyla

$\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ile gösterilir.

Her elemanı $A_i$ lerden her birine ait olan ve $A_i$ lerin hepsine birden ait olan her elemanı içeren cümleye ***$A_i$ lerin arakesiti*** (***ortak kısmı*** veya ***kesişimi***) denir ve bu cümle, $\bigcap A_i$ ile gösterilir. Verilen cümleler, örneğin $A_1, A_2, ..., A_k$ gibi sonlu sayıda ise veya $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ gibi bir cümle dizisi oluşturuyorsa, bunların arakesiti sırasıyla

$\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ ve $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ile gösterilir.

***Örnek 1.4.9.1.*** $A_1=\{0,1,2,3,4,...\}$
$A_2=\{0,2,4,6,8,...\}$
$A_3=\{0,3,6,9,12,...\}$
....................
$A_n=\{0,n,2n,3n,4n,...\}$
....................

cümle dizisi için

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\} \quad , \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1$$

**1.4.10. Tanım:** Arakesiti boş olan iki cümleye ***birbirine yabancı*** veya ***ayrık*** cümleler denir. İkişer ikişer arakesitleri boş olan cümlelere de ***ikişer ikişer birbirine yabancı*** veya ***ikişer ikişer ayrık*** cümleler denir.

**Örnek 1.4.10.1.** $A=\{0,2,4,6,8\}$
$B=\{1,3,5,7,9\}$
$C=\{10,11,12,13,...\}$

cümleler ikişer ikişer ayrıktır, çünkü $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ ve $B \cap C = \varnothing$ tur.

**1.4.11. Alt cümle, birleşim ve arakesit ile ilgili temel özellikler**

*I*.1) $A \subset A$

2) $\varnothing \subset A$

3) $A \subset B,\ B \subset A \Rightarrow A = B$

*II*.1) $A \cup B = B \cup A$

2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = (A \cup B \cup C)$

3) $A \cup A = A$

4) $A \cup \varnothing = A$

5) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

*III*.1) $A \cap B = B \cap A$

2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = (A \cap B \cap C)$

3) $A \cap A = A$

4) $A \cap \varnothing = \varnothing$

5) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

*IV*.1) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

2) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

**1.4.12. Tanım:** $A$ ve $B$ gibi iki cümle verilmiş olsun, $a \in A$, $b \in B$ olmak üzere, mümkün olan bütün sıralanmış $(a,b)$ çiftlerinden oluşan cümleye $A$ ve $B$ cümlelerinin (***bu sıradaki***) ***kartezyen çarpımı*** denir ve bu cümle, $A \times B$ ile gösterilir.

$A \times B = \{(a,b) | a \in A,\ b \in B\}$.

***Örnek 1.4.12.1.*** $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{1,3,5,7\}$ ise

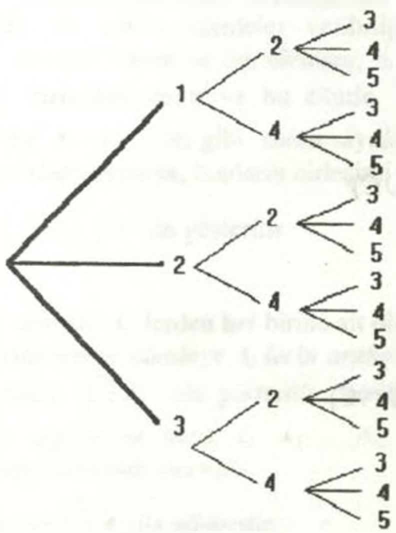
$A\times B=$ $\{(-1,1), (-1,3), (-1,5), (-1,7), (0,1), (0,3), (0,5), (0,7), (1,1), (1,3), (1,5), (1,7)\}$

ve

$B\times A=$ $\{(1,-1),(1,0), (1,1), (3,-1), (3,0), (3,1), (5,-1), (5,0), (5,1), (7,-1), (7,0), (7,1)\}$

dir. Görüldüğü gibi, $A\times B \neq B\times A$ dır.

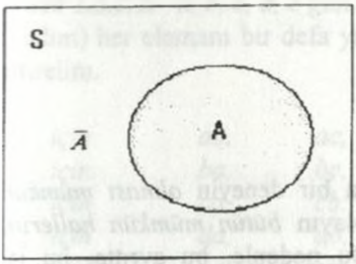
***Örnek 1.4.12.2.*** İkiden fazla cümlenin kartezyen çarpımının elemanlarını belirlemek için genellikle ağaç diyagramı adı verilen bir diyagramdan yararlanılır. Örneğin $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4\}$, $C=\{3,4,5\}$ cümle üçlüsü için $A\times B\times C$ kartezyen çarpım cümlesi sorulduğu taktirde




şeklinde bir ***ağaç diyagramı*** çizilir ve bu ağacın her bir dalı üzerinde soldan sağa doğru haraket edilerek, sıralanmış eleman üçlüleri oluşturulur ve böylece

$A\times B\times C=$ $\{(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,4,3), (1,4,4), (1,4,5),$
$(2,2,3), (2,2,4), (2,2,5), (2,4,3), (2,4,4), (2,4,5),$
$(3,2,3), (3,2,4), (3,2,5), (3,4,3), (3,4,4), (3,4,5)\}$

bulunur.



$\overline{A} = S - A$

***Şekil 1.6. Tamamlayıcı cümle,*** $\overline{A}$

***1.4.13. Tanım:*** $S$ bir cümle, $A$ da $S$ nin herhangi bir alt cümlesi olsun. $S$ nin $A$ ya ait olmayan elemanlarının cümlesine $A$ nın $S$ içindeki ***tamamlayıcısı*** (***bütünleyeni*** veya ***komplemanteri*** ) denir ve bu cümle $\overline{A}$ ile gösterilir.

***1.4.14. Tamamlayıcı cümle ile ilgili temel özellikler***

$I.\quad A \cup \overline{A} = S$

$II.\quad A \cap \overline{A} = \varnothing$

$III.\quad (\overline{\overline{A}}) = A$

$IV.\quad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$V.\quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$VI.\quad \overline{S} = \varnothing$

$VII.\quad \overline{\varnothing} = S$

$VIII.\quad A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

# *1.5. KOMBİNEZON HESAPLARI*

***Giriş***

Bir kümedeki ögelerin sayısını bulurken veya bir deneyin *olması mümkün bütün sonuçlarını* tek tek sayma, yada bir olayın *bütün mümkün hallerini* bulmak çok zaman alıcı ve zor bir iştir. Bu nedenle, bu ayrıtta, bu işi kolaylaştıran *kombinezon* hesap yöntemlerinden bahsedilecektir.

***1.5.1. Tanım: Faktöriyel,*** *n* pozitif bir tamsayı olsun, 1 den *n* ye kadar sayıların çarpımına *n* sayısının ***faktöriyeli*** denir ve *n*! ile gösterilir; açık bir şekilde,

$n! = 1\times2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n$

olarak yazılır ve sıfır faktöriyel

$0! = 1$

dir.

***Örnek 1.5.1.1.*** 5! i bulalım.

$5! = 1\times2\times3\times4\times5 = 120$

dir.

***1.5.2. Tanım: Permütasyon,*** *n* tane farklı eleman içinden *r* tane farklı eleman alınmak suretiyle değişik gruplar meydana getirilebilir$(n \geq r)$, eğer bu gruplar, içlerindeki elemanların cinsi yada diziliş sırası bakımından birbirine benzemiyor ise, bu gruplara *n* tane elemanın *r* li ***permütasyonu*** denir ve grupların sayısı $P(n,r)$ ile gösterilir.

***Örnek 1.5.2.1.*** *n* elemanın 2 şerli gruplandırmak istersek,

1.adım: *n* tane eleman içinden herhangi birini seçersek geriye *n-1* eleman kalır. Seçtiğimiz elemanın yanına geriye kalan *n-1* elemandan her birini birer defa getirirsek *n-1* tane farklı grup elde edilir.
2. adım: Verilen *n* tane eleman içinden 1. adımda seçtiğimiz elemandan başka bir eleman seçelim. Yine geriye kalan *n-1* elemandan her birini bu seçtiğimiz elemanın yanına getirelim. Bu defada *n-1* tane grup elde edilir.
Böylece devam edersek, her elemandan *n-1* tane grup elde edilebilir. Elimizde *n* tane eleman olduğundan bunlardan $n(n-1)$ tane ikili grup türetilebilir.
Şu halde $P(n,2)=n(n-1)$ bulunur.

*Örnek 1.5.2.2.* *a, b, c, d, e* gibi beş elemanın üçlü permütasyonunu bulalım.
1. adım) her elemanı bir defa yazalım ve yanına kendinden başka bir elemanı getirelim.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *a* | *için* | *ab,* | *ac,* | *ad,* | *ae* |
| *b* | *için* | *ba,* | *bc,* | *bd,* | *be* |
| *c* | *için* | *ca,* | *cb,* | *cd,* | *ce* |
| *d* | *için* | *da,* | *db,* | *dc,* | *de* |
| *e* | *için* | *ea,* | *eb,* | *ec,* | *ed* |

*a, b, c, d, e* gibi farklı beş elemanın ikişer ikişer alınmak suretiyle, içlerindeki elemanların cinsi yada bunların diziliş sırası bakımından değişik olan 20 grup elde edilebileceği görülüyor.
2. adım) Yukarda elde ettiğimiz 20 gruptan herhangi birini, örneğin *ab* yi ele alalım. *a, b, c, d, e* elemanlarından . *a, b* yi çizersek geriye *c, d, e* gibi üç eleman kalır. Bu elemanların her birini birer defa *ab* nin yanına getirerek *abc, abd, abe* grupları elde edilir. Demekki yukardaki ikişerli grupların her birinden üç tane üçerli grup türetilebiliyor. Tabloda 20 tane ikişerli grup olduğundan toplam 60 tane üçerli grup türetilebilir. $P(5,3)$=20

*Örnek: 1.5.2.3.* $n$ elemanın $r$ li permütasyon sayısını veren formülü bulalım.
$r-1$ li permütasyonların tablosunun yapıldığını düşünelim. Bu tabloda $P(n,r-1)$ tane farklı grup vardır. Bu gruplardan herhangi birini göz önüne alalım; bu grup içinde $r$-1 tane eleman vardır. Başlangıçta verilen n farklı elemandan bu $r$-1 elemanı çizersek geriye $n-(r-1)=n-r+1$ tane eleman kalır. Geriye kalan $n-r+1$ elemandan her birini bir defa bir önceki örnekte olduğu gibi, bu grubun yanına yazarsak bu gruptan $n-r+1$ tane grup elde ederiz. Bir gruptan $n-r+1$ tane grup türetildiğine göre, $P(n,r-1)$ tane farklı gruptan $(n-r+1)P(n,r-1)$ tane $r$ li grup elde ederiz; yani $P(n,r)=.(n-r+1)P(n,r-1)$ olur.

$P(n,1)=n$ olduğu gözönüne alınarak
$P(n,r)=.(n-r+1)P(n,r-1)$ bağıntısından

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $r=1$ | için | $P(n,1)=$ | $n$ | |
| $r=2$ | için | $P(n,2)=$ | $(n-1)P(n,1)$ | Bu eşitlikleri |
| $r=3$ | için | $P(n,3)=$ | $(n-2)P(n,2)$ | taraf tarafa çarpalım |
| $r=4$ | için | $P(n,4)=$ | $(n-3)P(n,3)$ | ve her iki yanda aynı |
| ... | | .... | | olan çarpanları |
| $r=r$ | için | $P(n,r)=$ | $(n-r+1)P(n,r-1)$ | sadeleştirelim |

$$P(n,r)=n(n-1)\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

elde edilir.

$n=r$ için ise $P(n,n)= P_n = n!$
dir.

***1.5.3. Tanım:*** Bir şey $n$ farklı yoldan gerçekleşsin, başka bir şey de $m$ farklı yoldan gerçekleşiyorsa, bu iki şey birlikte $m \times n$ farklı yoldan gerçekleşir.

***1.5.4. Tanım: Kombinezon,*** birbirinden farklı $n$ tane eleman gözönüne alalım. Elemanların diziliş sırası gözetilmeksizin bunların $r$ li gruplarına, bu $n$ tane elemanın r li ***kombinezonları*** denir ve $C(n,r)$ olarak yazılır.

***Örnek 1.5.4.1.*** *a, b, c, d, e* gibi 5 elemanın ikili kombinezonlarını yazıp grupların sayısını bulalım,
Her elemanı bir defa yazalım ve yanına kendinden sonra gelen başka bir elemanı getirelim.:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *a* | *için* | *ab,* | *ac,* | *ad,* | *ae* |
| *b* | *için* | *bc,* | *bd,* | *be* | |
| *c* | *için* | *cd,* | *ce,* | | |
| *d* | *için* | *de* | | | |
| *e* | *için* | | | | |

*a, b, c, d, e* gibi 5 elemanın ikili kombinezonları,

*ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de* olup $C(5,2)=10$ dur.

***Örnek: 1.5.4.2.*** $n$ tane farklı elemanın $r$ li kombinezonlarının sayısını bulunuz.

n elemanın r li permütasyonlarının tablosunu gözönüne alalım. Bu tabloda aynı $r$ tane elemanı değişik sırada ihtiva eden $r!$ tane grup vardır. Bu $r!$ grup, kombinezon tablosunda bir grup sayılacaktır. Buna göre, permütasyon tablosunun aynı elemanları değişik sırada ihtiva eden $r!$ tane grubuna, kombinezon tablosunda, bir grup tekabül eder.

Permütasyon tablosundaki grupların sayısı $P(n,r)$ ile gösterildiğinden

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

olur.

## *1.6. İHTİMALLER HESABI*

***Giriş***

İhtimaller hesabı, son yıllarda çok önem kazanmıştır. Bugün ihtimaller hesabına her alanda rastlamak mümkündür, örnek olarak fizik, kimya, biyoloji, tıp, siyasal bilgiler, ekonomi, mühendislikler,...,gibi . Bu bölümde, ihtimaller hesabının bazı tanımları, postülatları ve teoremleri verilmeye çalışılacaktır.

***1.6.1. Tanım: Deneme,*** bir gözlem yada ölçmenin sonuçları ile, bir cismin analizi ile içerdiği bir maddenin aranması, ..., vb,. ile ilgilenebiliriz. İşte bütün ölçme ve gözlemler deneme adını alırlar. Bir denemenin sonuçları (outcomes) VAR/YOK gibi yalın olabileceği gibi karmaşık da olabilir.

***1.6.2. Tanım: Örnek uzay,*** yapılan bir denemenin mümkün bütün sonuçlarını içeren $S$ cümlesine denir. $S$ cümlesinin ögelerinden her birine ***örnek*** veya ***örnek uzayda bir nokta*** adını alır.

***1.6.3. Teorem:*** $m$ elemanlı $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ cümlesinden rastgele bir elemanı seçtikten sonra, $n$ elemanlı $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ cümlesinden bir eleman seçmenin $m \times n$ tane farklı yolu vardır. Mümkün olan bütün seçimler $X$, $Y$ cümlelerinin

$X \times Y = \{(x_i, y_j) \mid x_i \in X \; ; \; y_j \in Y \; ; (i=1, 2, \ldots, m), (j=1, 2, \ldots, n) \}$
kartezyen çarpımını oluşturur.

***1.6.4. Tanım: olay,*** eğer $S$ örnek uzayı, sonlu yada sayılabilir sonsuzlukta ise $S$ nin her alt cümlesi bir olaydır.
$\varnothing$ boş cümlesi : mümkün olmayan bir olayı,
$S$ evrensel cümlesi: kesin olayı
gösterir.

***<u>Olay türleri:</u>***
a) Elemanter olay
b) Ayrık olay
a) Tümler olay
dır.

***1.6.5. Tanım: Elemanter olaylar,*** örnek uzay'ın bir noktasından yani $S$ evrensel cümlesinin bir elemanından oluşan cümle bir ***elemanter olaylar***'dır.
$S=\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ örnek uzayında

$\{E_1\}, \{E_2\}, \ldots, \{E_n\}$ kümelerinin her biri *elemanter olay*'dır.

***1.6.6. Tanım: Ayrık olaylar,*** $S$ örnek uzayında $A$, $B$ gibi iki olay gözönüne alalım. Eğer

$A \cap B = \varnothing$ .ise $A$, $B$ ayrık olaylardır,yani

$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A, B$ ayrık olaylar

***Örnek 1.6.6.1.*** $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ örnek uzayında
$A=\{2, 4, 5\}$, $B=\{1, 3\}$, $C=\{2, 3, 4, 6\}$ olayları ikişer ikişer ayrıkmıdır ?

***Çözüm:*** $A \cap B = \varnothing \;.\Rightarrow$ ayrık olaylardır.
$A \cap C = \{2, 3, 4, 6\} \;.\Rightarrow$ $A$, $C$ ayrık olaylar değildir
$B \cap C = \{3\} \;.\Rightarrow$ $B$, $C$ ayrık olaylar değildir

***1.6.7. Tanım: Tümler olaylar,*** $S$ örnek uzayında $A$, $B$ olayları,

$A \cap B = \varnothing$ ve $A \cup B = S$ ise $A$ ve $B$ tümler olaylardır.
$A \cap B = \varnothing$ ve $A \cup B = S \Leftrightarrow$ $A$ ve $B$ tümler

***Örnek 1.6.7.1.*** $S=\{a, b, c, d, e, f\}$ örnek uzayında
$A=\{a, d\}$, $B=\{b, c, e, f\}$tümler olaylar mıdır?
***Çözüm:***
$A \cap B = \varnothing$ ve $A \cup B = S$
şartları sağlandığından $A$, $B$ tümler olaylardır.

***1.6.8. Tanım: Bir olayın olma ihtimal,*** şansa bağlı bir deney ( deneme sonuçları önceden bir formülle kestirilemiyen) yapmak isteyelim ve deney bittiğinde çeşitli sonuçları elde edelim. Eğer bir $A$ olayı bu deneyde $m$ defa oluyorsa, ***A olayının olma ihtimali***

$$p = P(A) = \frac{m}{n}$$

dir diye tanımlanır.
Burada $p$ = $A$ olayının ihtimali = $P(A)$
$n$ = olması mümkün bütün sonuçlar

dır. ***A olayının olmama ihtimali*** $q = P(\overline{A}) = \dfrac{n-m}{n} = 1 - p = 1 - P(A)$ dir

***1.6.9. İhtimaliyet postülaları:*** $S$ örnek uzayı kesikli(discrete) olsun.

***Postüla I)*** $S$ örnek uzayındaki her $A$ olayı için $0 \leq P(A) \leq 1$ dir.
***Postüla II)*** $P(S) = 1$
***Postüla II)*** $S$ örnek uzayındaki $A$, $B$ ayrık olayları için,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dir.

***1.6.10. Teorem:*** $P(A)+P(\overline{A})=1$ dir.

***İspat:*** $A \cap \overline{A} = \varnothing$ olduğundan $A$, $\overline{A}$ ayrıktır.

Postüla III ' den : $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

Postüla I ' den : $P(A \cup \overline{A}) = P(S) = 1$

Şu halde $P(A)+P(\overline{A})=1$ yazılabilir.

***1.6.11. Teorem:*** $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$ dir.

***İspat:*** Şekil 1.5.(*a*) dan görüldüğü gibi $A$ ve $B \setminus A$ ayrık, Postüla III 'e göre

$P(A \cup (A \setminus B)) = P(A) + P(B)$ ;

burada $A \cup (A \setminus B) = B$ yerine yazarsak

$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ ve Postüla I den $P(B \setminus A) \geq 0$ olduğundan

$P(A) \leq P(B)$ dir

***1.6.12. Teorem:*** $S$ örnek uzayında $A$, $B$ olayları herhangi iki olay ise,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.

***İspat:*** Şekil 1.5.(*b*) den de görüleceği gibi,

$(A \setminus B) \cap B = \varnothing$ olduğundan , $A \setminus B$, $B$ ayrık olaylardır.

$P((A \setminus B) \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$ de, $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ yi yerine yazarsak

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B) \tag{1.1}$$

olur.

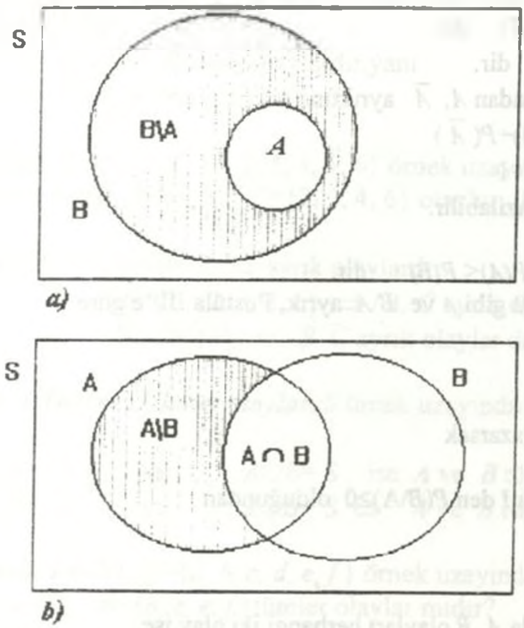
$A \setminus B$, $A \cap B$ olayları da ayrık olduğundan

$P((A \setminus B) \cup (A \cap B)) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$ ve $(A \setminus B) \cup (A \cap B = A$ ile

$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ yi (1.1) de yerine yazarsak

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

elde edilir.




*Şekil 1.7. a)* $B\backslash A$ cümlesi *b)* $A\backslash B$ cümlesi

***1.6.13. Tanım: İhtimaliyet uzayı,*** $S$ örnek uzayının $\{E_1, E_2,\ldots, E_n\}$ elemanları olsun, $E_i\,(E_i\in S)$ elemanlarının ihtimali,

1) $p_i \geq 0$ 2) $p_1+p_2+\ldots+p_n=\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

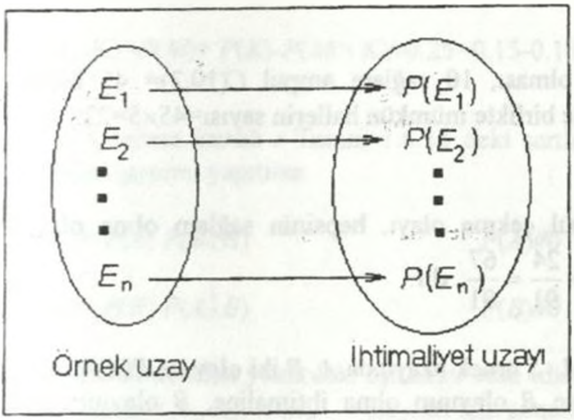
şartlarını gerçekleştiriyorsa, bu $p_i$ ( $p_i\in R$) sayılarının oluşturduğu kümeye, S örnek uzayının ***ihtimaliyet uzayı*** denir.

***Örnek 1.6.13.1.*** $A$, $B$ ve $C$ gibi üç at yarışacaktır. $A$ nın $B$ ye göre 2 misli, $B$ nin de $C$ ye göre 2 misli kazanma şansı olduğu sanılıyor. $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $S$, İhtimaliyet uzayı nedir ?

$P(C)=p$ dersek $P(B)=2\,P(C)=2p$ ve $P(A)=2P(B)=4p$ olur.

$S=\{A, B, C\}$ olduğundan $P(A)+P(B)+P(C)=1 \Rightarrow 4p+2p+p=1$ ve $p=\frac{1}{7}$ olur.

Buradan $P(A)=\frac{4}{7}$ , $P(B)=\frac{2}{7}$ , $P(C)=\frac{1}{7}$ ve




*Şekil 1.8.* İhtimaliyet uzayı

***1.6.14. Tanım: Eşit İhtimaliyet uzayı,*** $S=\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ örnek uzayı $n$ tane elemanter olayı içeriyor ve bu elemanter olayların ihtimalleri birbirine eşit ise yani. $P(E_1)=P(E_2)=\ldots=P(E_n)$ ise ihtimaliyet uzayı ***eşit ihtimaliyet uzayı*** adını alır ve

$P(E_i)=\frac{1}{n}$ dir.

Eğer bir $A$ olayı r tane elemanter olay içeriyorsa bu olayın ihtimali

$P(A)=\frac{r}{n}$ dir. Başka bir deyişle

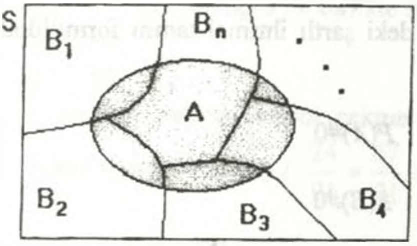
$$P(A)=\frac{A \text{ nın eleman sayısı}}{S \text{ nin eleman sayısı}}=\frac{\text{Uygun hallerin sayısı}}{\text{Mümkün hallerin sayısı}}$$

dır.

***Örnek 1.6.14.1.*** 5 i yanmış olan 15 ampulden 3 ü rasgele çekiliyor. a) Hiç birinin yanmamış olması, b) Yalnız birinin yanmış olması, c) En az birinin yanmış olması ihtimallerini bulunuz.

***Çözüm:*** Mümkün hallerin sayısı $C(15,3)=\frac{15!}{3!(15-3)!}=455$ dir.

a) 10 sağlam ampul olduğuna göre, uygun hallerin sayısı=$C(10,3)$=120, buradan




*Şekil 1.9.* $S=B_1\cup B_2\cup \ldots \cup B_n$ ve $A$ olayı

***1.6.17. Bayes kanunu:*** $B_1, B_2, \ldots, B_n$ olayları, $S$ örnek uzayının elemanları ve $B_i$ olayları karşılıklı olarak birbirinin dışında olsun; yani

$S=B_1\cup B_2\cup \ldots \cup B_n$ ve her $i\neq j$ için $B_i\cap B_j=\varnothing$ ( $i, j=1, 2, \ldots, n$) tur.

Eğer başka bir $A$ ($A\in S$ ) olayı yalnız ve yalnız $B_i$ lerden en az biri vuku bulduğunda gerçekleşiyorsa, ihtimaliyet

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)+P(A|B_n)}$$

olur.

***İspat:***

$A\in S \quad \Rightarrow \quad A=S\cap A=(B_1\cup B_2\cup \ldots\cup B_n)\cap A=(B_1\cap A)\cup(B_2\cap A)\cup\ldots\cup(B_n\cap A)$

Buradan

$P(A)=P(B_1\cap A)+P(B_2\cap A)+\ldots+P(B_n\cap A)$ olur.

Yukardaki eşitliğe çarpım kuralını uygularsak

$$P(A)=P(B_1)\,P(A\mid B_1)+P(B_2)\,P(A\mid B_2)+\ldots+P(B_n)\,P(A\mid B_n) \qquad (1.1)$$

olur. Diğer taraftan, herhangi bir ($i$) için $A$ bilindiğine göre $B_i$ nin şartlı ihtimali

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i\cap A)}{P(A)} \qquad (1.2)$$

olur. Yine çarpım kuralı ile

$P(B_i \cap A) = P(B_i)P(A \mid B_i)$ (1.3)

eşitliği elde edilir.

(1.2) denkleminde (1.1) ve (1.3) yerlerine yazarsak

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \ldots + P(B_n)P(A|B_n)}$$

olur ve bu eşitliğe Bayes kanunu denildiği gibi Bayes kuralı veya Bayes teoremi de denir.

***Örnek 1.6.17.1.*** $A$, $B$, $C$ gibi üç makina bir fabrikadaki ürünlerin sırasıyla %50, %30, %20 sini üretmektedirler ve %3, %4, %5 oranında bozuk ürün vermektedirler.

*a*) Rasgele seçilen bir ürünün bozuk olma ihtimali nedir ?

*b*) Rasgele seçilen bir ürünün bozuk olduğunu var sayınız. Bu ürünün $A$ makinasında üretilme ihtimalini bulunuz; yani $P(A \mid X)$ i bulunuz.

***Çözüm:***

$X$, ürünün bozuk olduğu olay olsun.

*a* ) (1.1) denklemine göre

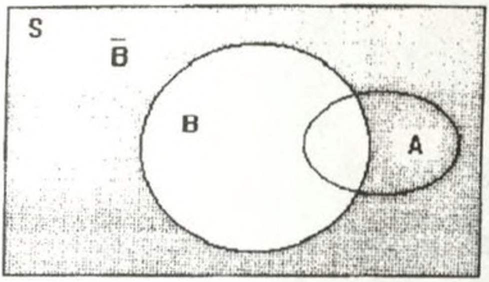
$$\begin{aligned} P(X) &= P(A)P(X \mid A) + P(B)\,P(X \mid B) + P(C)\,P(X \mid C) \\ &= (0.50)(0.03) + (0.30)(0.04) + (0.20)(0.05) \\ &= 0.037 \end{aligned}$$

*b* ) Bayes kanununa göre

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A)P(X|A)}{P(A)P(X|A) + P(B)P(X|B) + P(C)P(X|C)}$$

$$= \frac{(0.50)(0.03)}{(0.50)(0.03) + (0.30)(0.04) + (0.20)(0.05)} = \frac{15}{37}$$

olur.




*Şekil 1.10. $S = B \cup \overline{B}$* olayları

*Örnek 1.6.17.1.* Farzedelimki $B$ herhangi bir olay ve tamamlayıcısı $\overline{B}$ olsun. Yani $S = B \cup \overline{B}$ dir. Eğer başka bir $A$ olayı yalnız ve yalnız $B$ veya $\overline{B}$ vuku bulduğunda gerçekleşiyorsa, ihtimaliyet

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

olduğunu ispatlayınız.

***Çözüm:***

$A = S \cap A = (B \cup \overline{B}) \cap A = (B \cap A) \cup (\overline{B} \cap A)$

yazılabilir. Buradan

$P(A) = P(B \cap A) + P(\overline{B} \cap A)$

olur ve bu denkleme çarpım kuralını uygularsak

$P(A) = P(B)\, P(A \mid B) + P(\overline{B})\, P(A \mid \overline{B})$

olur ve ayrıca bunun ile birlikte çarpım kuralı ile elde ettiğimiz $P(A \cap B) = P(B)$ $P(A \mid B)$ bu denklemi aşağıdaki eşitlikte yerine yazalım.

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Sonuç olarak aşağıdakı denklem elde edilir.

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

*1.6.18.* ***Bağımsız olaylar:*** Eğer $B$ olayının olma ihtimali $P(B)$, bir $A$ olayının olma veya olmamasından etkilenmiyorsa $B$ olayı $A$ olayından bağımsızdır denir. Matematiksel olarak

$P(B|A)= P(B) \Leftrightarrow$ $B$ olayı $A$ olayından bağımsızdır.

şeklinde ifade edilir.

*1.6.19.* ***Teorem:*** $B$ olayı $A$ olayından bağımsız ise, $A$ olayıda $B$ olayından bağımsızdır, yani

$$P(B|A)= P(B) \Leftrightarrow P(A|B)= P(A)$$

dir.

***İspat:***

$$P(B\cap A)= P(A)\,P(B|A)$$

$$P(A\cap B)= P(B)\,P(A|B)$$

$A\cap B = B\cap A \Rightarrow P(A\cap B)= P(B\cap A)$

olduğundan yukardaki denklemlerin sol tarafları eşit olduğundan sağ taraflarıda eşittir. Buna göre

$$P(A)\,P(B|A)= P(B)\,P(A|B) \qquad \textbf{(1.4)}$$

$P(B|A)= P(B)$ tanımını ***(1.4)*** denkleminde yerine yazarsak,

$$P(A)\,P(B)= P(B)\,P(A|B) \Rightarrow P(A|B)= P(A) \qquad \textbf{(1.5)}$$

olur yani, $A$ olayı $B$ olayından bağımsızdır.

*1.6.20.* ***Teorem:*** $A$, $B$ olayları birbirinden bağımsız ise,

$$P(A\cap B)= P(A)\,P(B)$$

dir.

***İspat:***

$P(A\cap B)= P(B)\,P(A|B)$ eşitliğinde ***(1.5)*** denklemi kullanılırsa

$$P(A\cap B)= P(A)\,P(B)$$

olur.

*Örnek 1.6.20.1.* $A$ ve $B$ olayları bağımsız ise $\overline{A}$ ve $\overline{B}$ ninde bağımsız olaylar olduklarını gösteriniz.

***Çözüm:***

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ tamamlayıcı cümle özelliği kullanarak

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$
$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)\,P(B) = [1 - P(A)]\,[1 - P(B)] = P(\overline{A})\,P(\overline{B})$$

elde edilir.

***Örnek: 1.6.20.2.***
$A$=Bir ailenin hem kız hem erkek çocukları vardır, olayı ve
$B$= Bir ailenin ençok bir erkek çocukları vardır, olayı olsun
*a*) Eğer ailenin üç çocuğu varsa $A$ ve $B$ nin bağımsız olaylar olduklarını,
*b*) Eğer ailenin iki çocuğu varsa $A$ ve $B$ nin bağımlı olaylar olduklarını, gösteriniz.
***Çözüm:***

*a*) S={EEE, EEK, EKE, EKK, KEE, KEK, KKE, KKK} eşit ihtimaliyet uzayı vardır.

$A$={EEK, EKE, EKK, KEE, KEK, KKE} ve $P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$B$={EKK, KEK, KKE, KKK} ve $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$A \cap B$={EKK, KEK, KKE} ve $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$ olur.

$P(A)\,P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = P(A \cap B)$ olduğundan $A$ ve $B$ bağımsızdırlar.

*b*) S={EE, EK, KE, KK } eşit ihtimaliyet uzayı vardır.

$A$={EK, KE } ve $P(A) = \frac{1}{2}$

$B$={EK, KE, KK} ve $P(B) = \frac{3}{4}$

$A \cap B$={EK, KE} ve $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ olur.

$P(A)\,P(B) \neq P(A \cap B)$ olduğundan $A$ ve $B$ bağımlıdırlar.

## *1.7. İHTİMALİYET DAĞILIMLARI*

***1.7.1. Tanım: Raslantı değişkeni,*** Bir $S$ örnek uzayından $R_X$ reel sayılar cümlesine tanımlanmış bir fonksiyona ***raslantı değişkeni*** denir ve $X, Y, \ldots$ gibi büyük harflerle gösterilir, matematiksel olarak da

$$S \xrightarrow{X} R_X$$

şeklinde tanımlanır.

***Örnek: 1.7.1.1*** Bir parayı 2 kere atalım. Örnek uzay,
$S=\{YY, YT, TY, TT\}$
olur. $X$ raslantı değişkeni gelen yazı sayısı olsun, buna göre $X$ in alabileceği bütün $x$ değerlerinin kümesi

$$R_X=\{X \mid x=0,\ 1,\ 2\}$$

olur. Bu olay 3 farklı şekilde gerçekleşebilir, yani raslantı değişkeni 0, 1, veya 2 değerlerinden birini (şansa bağlı olarak) rasgele alabilir. Bu da, X fonksiyona niçin raslantı değişkeni dendiğini açıklamaktadır.

***Örnek: 1.7.1.2*** Bir çift zar atılıyor, örnek uzay

$$S=\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ \ldots,(6,6)\}$$

dır. $X$ raslantı değişkeni gelen zarların enbüyüğü olsun ve $Y$ raslantı değişkeni gelen sayıların toplamı olsun. $X$ ve $Y$ raslantı değişkenleri kümesini bulunuz.

***Çözüm:***

$$R_X=\{X \mid x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$$R_Y=\{Y \mid y=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$$

olur.

***Örnek: 1.7.1.3*** Bir sınıftaki öğrenciler cümlesi örnek uzayımız olsun.
$X$ raslantı değişkeni, öğrencilerin bir yarıyılda başarılı oldukları derslerin sayısı,
$Y$ raslantı değişkeni, öğrencilerin boylarının uzunluğu olsun.

Sınıfta en kısa öğrencinin boyu 152.7cm ve en uzun boylu öğrencinin boyu 195.4cm ve bir yarıyılda 9 ders okumaktadırlar.
Eren isimli bir öğrencinin başarılı olduğu ders sayısı 7, boyunun uzunluğu 175.8 dir.

$R_X = \{X \mid x=1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

$R_Y = \{Y \mid y=[152.7,\ldots,195.4]\}$

$X$(Eren)=7

$Y$(Eren)=175.8 cm dir. Bu örnekte,
$Y$ raslantı değişkeni süreklidir ve [152.7,...,195.4] kapalı aralığında her değeri alabilir; $X$ raslantı değişkeni ise kesiklidir, ancak tam sayı değerleri alabilir.

*1.7.2. **Tanım: İhtimaliyet fonksiyonu,*** $X$ raslantı değişkeni kesikli olsun ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değerlerine

$P(X=x_i)= f(x_i)$ ; $\qquad i=1, 2, \ldots$

ihtimallerini atayan $f$ fonksiyonuna $X$ rastlantı değişkeninin ***dağılım***, yada ***ihtimaliyet fonksiyonu*** denir.
$f$ nin bir ihtimaliyet fonksiyonu olabilmesi için gerek ve yeter şart

a) $f(x_i) \geq 0$ , $\qquad i=1, 2, \ldots, n$

b) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

dır.

*1.7.3. **Tanım:*** Kesikli bir $X$ raslantı değişkeninin ihtimaliyet fonksiyonu $f$ ise,

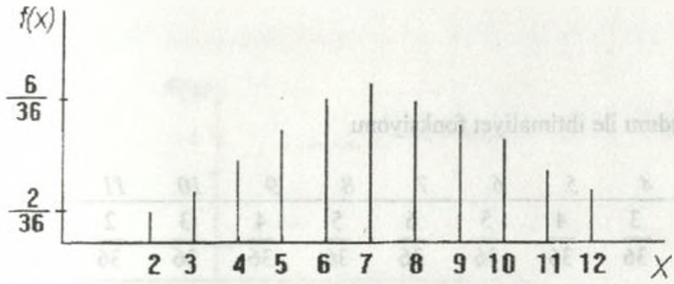
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $f(x_n)$ |

$X$ raslantı değişkeninin
***Beklenen yada ortalama değeri,***

$$\mu=E(X)= x_1 . f(x_1)+ x_2 . f(x_2)+\ldots+ x_n . f(x_n)= \sum_{i=1}^{n} x_i \ f(x_i)$$

eşitliği ile; ***Varyansı,***

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X-\mu_X)^2] = E(X^2) - (\mu_X)^2 = E(X^2) - \mu^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu_X) f(x_i)$$




*Şekil 1.9.* ***X in dağılımı***

eşitliği ile ve ***Standart sapması*** ise,

$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

eşitliği ile tanımlanırlar.

***Örnek: 1.7.3.1.*** Bir çift tavla zarı atılıyor ve gelen zarların toplamı *X* raslantı değişkeni olarak alınıyor. *X* raslantı değişkeninin beklenen değerini, varyansı ve standart sapmasını bulunuz.

***Çözüm:***

Aşağıdaki tabloya göre raslantı değişkeni

$R_X = \{X \mid x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

dir.

| | Örnek uzay | | Toplam | Uygun hallerin sayısı |
|---|---|---|---|---|
| $S=\{$ | (1,1), | → | 2 | 1 |
| | (1,2), (2, 1) | → | 3 | 2 |
| | (1,3), (3,1), (2,2) | → | 4 | 3 |
| | (1,4),(4,1), (2,3), (3,2) | → | 5 | 4 |
| | (5,1), (1,5), (2,4), (4,2), (3,3) | → | 6 | 5 |
| | (1,6),(6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3) | → | 7 | 6 |
| | (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4) | → | 8 | 5 |
| | (3,6), (6,3), (4,5), (5,4) | → | 9 | 4 |
| | (4,6), (6,4), (5,5) | → | 10 | 3 |
| | (5,6), (6,5), (4,3) | → | 11 | 2 |
| | (6,6) $\}$ | → | 12 | 1 |

Mümkün hallerin sayısı=*36*

Yukardaki tablo yardımı ile ihtimaliyet fonksiyonu

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

olur. Beklenen değer,

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}$$

$$\mu=E(X)=\frac{252}{36}=7$$

olur. Varyans,

$$\sigma^2_X=Var(X)=E(X^2)-\mu^2=(2^2\cdot\frac{1}{36}+3^2\cdot\frac{2}{36}+\ldots+12^2\cdot\frac{1}{36})-49=\frac{1974}{36}-49=54.8-49$$

$$\sigma^2_X=Var(X)=54.8-49=5.8$$

dır ve Standart sapması ise,

$$\sigma_X=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{5.8}=2.4$$

olur. $X$ dağılım ise Şekil 1.9. da görülmektedir.

***1.7.4.Tanım: Kümülatif dağılım (cumulative distribution) fonksiyonu,*** Kesikli $X$ rastlantı değişkeninin ***kümülatif dağılım fonksiyonu***

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_i f(x_i)$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada

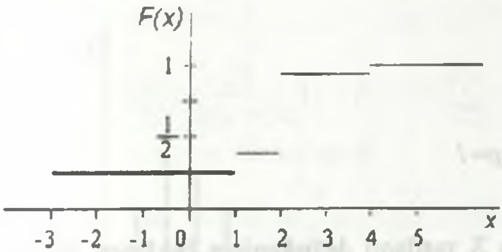
$$0\le F(x)\le 1$$

dir.

***Örnek: 1.7.4.1.***

| $x_i$ | -2 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ |

$F(x)=P(X\le x)=\sum_i f(x_i)$ Eşitliği kullanılarak




***Şekil 1.10. Kümülatif dağılım fonksiyonu***

| | |
|---|---|
| $F(-2)=\frac{1}{4}$ | $F(1)=F(-2)+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ |
| $F(2)=F(1)+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$ | $F(4)=F(2)+\frac{1}{8}=1$ |

yazılabilir. Buna göre $X$ in kümülatif dağılım fonksiyonu ***Şekil 1.10.*** de görülmektedir.

***1.7.5. Tanım: Kesikli üniform dağılım,*** $X$ raslantı değişkeni $x_1, x_2, \ldots, x_n$, değerlerini eşit ihtimalle alıyorsa yani

$$P(X=x_i)=P(X=x_j)=\frac{1}{n}; \qquad i,j=1,2,\ldots,n \tag{1.7.8.1}$$

ise $X$ rastlantı değişkeni ***kesikli üniform dağılımlıdır*** denir. (1.7.8.1) denklemi ile verilen ihtimaliyet fonksiyonuna ise ***kesikli üniform ihtimaliyet fonksiyonu*** denir.

***1.7.6. Tanım: Bernoulli dağılımı,*** Tekrarlı, bağımsız denemelerin iki sonucu varsa ve bu sonuçların gerçekleşme ihtimalleri denemeden denemeye değişmiyorsa bu tür bir denemeye ***Bernoulli denemesi*** adı verilir. Bir Bernoulli denemesinin sonuçları $A$ ve $\bar{A}$ ile gösterilsin. Bu denemelerin ihtimalleri

$$P(A)=p, \quad P(\bar{A})=1-p=q$$

olur. $A$ olayı gerçekleşti ise $X$ ratlantı değişkeni 1 değerini, $\bar{A}$ gerçekleşti ise 0 değerini alsın.

$$P(X=x)=p^x q^{1-x} \quad ; \quad x=0,1$$

eşitliği ile verilen fonksiyona ***Bernoulli ihtimaliyet fonksiyonu*** denir ve bu fonksiyon

a) $P(X=x)=p^x q^{1-x} \geq 0$

b) $\sum_{x=0}^{1} P(X=x) = \sum_{x=0}^{1} p^x q^{1-x} = q+p=1$

şartlarını gerçekler.Bu dağılımda X rastlantı değişkeninin beklenen değer ve varyansı ise

$\mu_X = E(X) = \sum_{x=0}^{1} xP(X=x) = \sum_{x=0}^{1} xp^x q^{1-x} = p$

$E(X^2)=p$

$\sigma_X^2 = E(X^2)-[E(X)]^2=p(1-p)$

olur.

*1.7.7.* ***Tanım: Binom dağılımı,*** Bir Bernoulli denemesi $n$ kez tekrarlansın. Sonuçları $A$ ve $\overline{A}$ ile gösterilsin ve bunların bir denemede gerçekleşme ihtimalleri sırasıyla $p$, $q$ olsun. Burada

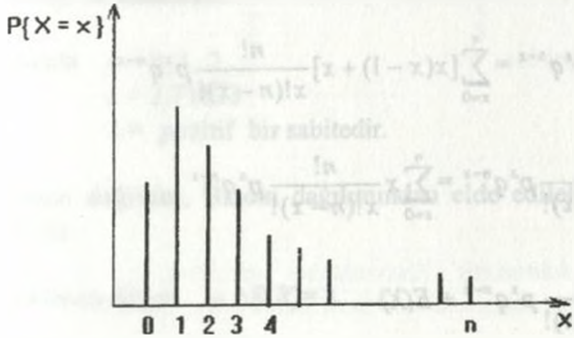
$p, q \geq 0$ ve $p+q=1$

dir. $A$ sonucunun $x$ kez gerçekleşmesinin ihtimali

$$P(X=x)= \sum_{x=0}^{n} C(n,x)p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

ile verilir ve bu eşitliğe ***binom dağılımı***, $X$ ratlantı değişkeni için ***Binom dağılımdadır*** denir.

***Not:*** Binom açılımı $(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} C(n,x)p^x q^{n-x}$ dir.




*Şekil 1.11. n ve p sabit değerleri için Binom ihtimaliyet dağılımı*

*Örnek:1.7.7.1.* Binom dağılımında, $X$ rastlantı değişkeninin Beklenen değerini ve Varyansını bulunuz.

$$\mu=E(X)=\sum_{x=0}^{n} x.C(n,x)p^x q^{n-x}=\sum_{x=0}^{n} x\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}$$

$x=0$ için ilk terim sıfır olduğundan

$$\mu=E(X)=\sum_{x=1}^{n} x\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}=np\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}p^{x-1}q^{n-x}$$

yazılır.
$t=x-1$ dönüşümü yapılırsa

$x=1$ için $t=0$ ve $x=n$ için $t=n-1$ olur.

$$\mu=E(X)= np\sum_{t=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{t![(n-1)-t]!}p^t q^{(n-1)-t}=np(p+q)^{n-1}$$

ve $p+q=1$ olduğundan

$\mu=np$

olur.

varyans,

$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

$$E(X^2)= \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} [x(x-1)+x] \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$E(X^2)= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$E(X^2)= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + E(X)$$

$$E(X^2)= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!} p^2 p^{x-2} q^{n-x} + E(X)$$

$$E(X^2)= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x} + E(X)$$

$p+q=1$ olduğundan

$$E(X^2)= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + E(X) = n(n-1)p^2 + E(X)$$

$$E(X^2)= n(n-1)p^2 + np$$

yazılabilir.

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq$$

***1.7.8. Tanım: Poison dağılımı,*** Binom ihtimaliyet fonksiyonunda $n$ sayısı yeterince büyük, p sayısının yeterince küçük, ortalama değer $\lambda = \mu = np$ nın sonlu olması durumunda, ***Poison dağılımı*** Binom dağılımının özel bir hali olup

$$f(x)= \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

eşitligiyle yada

$$P(x;\lambda)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Burada $x = 0, 1, 2, \ldots$
$e = 2.71823$
$\lambda =$ pozitif bir sabitedir.

Poison dağılımı, Binom dağılımından elde edilebilir ve özellikleri aşağıdaki gibidir.

Beklenen değer $\mu = E(X)= \lambda$

Varyans $\sigma^2 = \lambda$

Standart sapma $\sigma = \sqrt{\lambda}$

*1.7.9.* ***Tanım: Sürekli raslantı değişkeni,*** *X* raslantı değişkenin tanım bölgesi bir aralık yada aralıklar kümesi olsun. *X* raslantı değişkeni *S* örnek uzayından reel sayılar cümlesine bir fonksiyon olduğundan *X* raslantı değişkeni tanım aralığında ***sürekli raslantı değişkenidir.***

*1.7.10.* ***Tanım: Sürekli ihtimaliyet*** (yada ***sürekli ihtimaliyet yoğunluk) fonksiyonu,*** *X* sürekli raslantı değişkeninin *f(x)* fonksiyonu

*a)* $f(x) \geq 0$

*b)* $\int_R f(x)dx = 1$

şartlarını sağlıyorsa, bu *f(x)* fonksiyonuna *X* sürekli raslantı değişkeninin ***sürekli ihtimaliyet yoğunluk fonksiyonu*** yada ***Sürekli ihtimaliyet fonksiyonu*** denir.

*1.7.11.* ***Tanım:*** Sürekli bir *X* raslantı değişkeninin ihtimaliyet yoğunluk fonksiyonu *f(x)* ise, *X* raslantı değişkeninin,
***Beklenen yada ortalama değeri,***

$$\mu = E(X) = \int_R x.f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$$

eşitliği ile, ***Varyansı***

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X-\mu_X)^2] = E(X^2) - \mu^2 = \int_R (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_R x^2 . f(x)dx - \mu^2$$

eşitliği ile ve ***Standart sapması*** ise,

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

eşitliği ile tanımlanırlar.

***1.7.12. Tanım: Sürekli kümülatif (cumulative distribution) dağılım fonksiyonu,*** Sürekli $X$ rastlantı değişkeninin kümülatif dağılım fonksiyonu

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada

$0 \leq F(X) \leq 1$

dir.

***Örnek:1.7.12.1.*** $X$ rastlantı değişkeni aşağıdaki gibi sürekli ihtimaliyet yoğunluk fonksiyonu olsun:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{Diğer durumlar için} \end{cases}$$

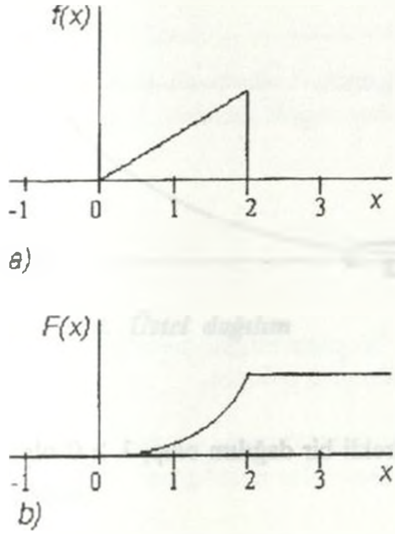
$F$ sürekli kümülatif dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Burada $0 \leq x \leq 2$ için

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}tdt = \frac{1}{4}x^2$$

dir ve ***Şekil 1.12.*** de dağılım fonksiyonları görülmektedir.




*Şekil 1.12. a) f dağılım fonksiyonu , b) F dağılım fonksiyonu*

*1.7.13. Tanım: Normal (Gaussian) dağılımı,* Sürekli bir dağılım olup

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (-\infty < x < +\infty \ ; \sigma > 0)$$

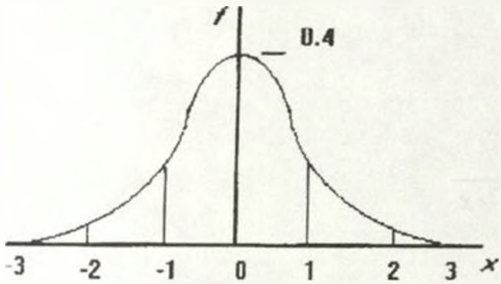
eşitliği ile tanımlanır ve bu dağılım ile ilgili özellikler aşağıdaki gibidir.

$E(X) = \mu$

$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

$\mu = 0$

$\sigma = 1$




*Şekil 1.13. Standart normal dağılım*

***1.7.14. Üstel (Eksponansiyel) dağılım,*** Sürekli bir dağılım olup, $\lambda \geq 0$ olmak üzere

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

eşitliğe tanımlanır.

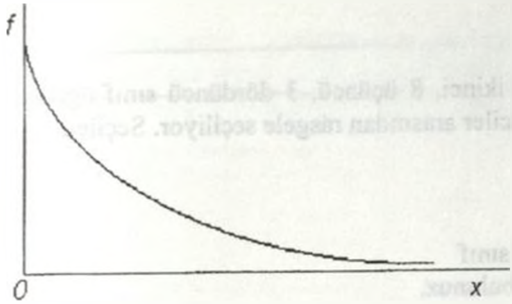
***Örnek: 1.7.14.1.***
Üstel dağılımın, ihtimalyet yoğunluk fonksiyonu olduğunu, ortalama beklenen değerini ve varyans ' ı bulunuz.

a) $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \geq 0$

b) $\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$

olduğundan ihtimaliyet yoğunluk fonksiyonudur.
Beklenen değer,

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$




*Şekil 1.14. Üstel dağılım*

Varyans,

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda\, e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

olur.

*PROBLEMLER*

1.1. Bir sınıfta 5 birinci, 4 ikinci, 8 üçüncü, 3 dördüncü sınıf öğrencisi vardır. Bir sınıf başkanı bu öğrenciler arasından rasgele seçiliyor. Seçilen öğrencinin

a ) ikinci sınıf

b ) dördüncü sınıf

c ) üçüncü yada dördüncü sınıf

öğrencisi olma ihtimalini bulunuz.

1.2. Bir kutuda 3 vida ile 3 somun vardır. İki parça rasgele çekildiğinde birinin vida diğerinin somun olma ihtimalini bulunuz.

1.3. Bir nokta, kenar uzunluğu 3 olan bir eşkenar üçgenin içinden rasgele seçiliyor. Bu noktanın herhangi bir köşeye olan uzaklığının 1 den büyük olma ihtimalini bulunuz.

1.4. Hedefe vurma ihtimali $A$ nin $\frac{1}{4}$, $B$ nin $\frac{1}{3}$ tür.

a ) Her biri ikişer atış yaparsa, hedefin en az bir kez vurulma ihtimalini bulunuz.

b ) Her biri birer atış yapar ve hedef vurulursa, hedefin $A$ tarafından vurulmuş olma ihtimalini bulunuz.

c ) $A$, yalnız iki atış yaparsa, hedefin en az %90 ihtimalle vurulması için $B$ nin kaç atış yapması gerektiğini bulunuz.

1.5. Bir takım 0.5 ihtimalle kazanır, 0.3 ihtimalle kaybeder ve 0.2 ihtimalle berabere kalır. Bu takım iki maç yapar.

a ) S örnek uzayını belirleyip her olayın ihtimallerini bulunuz.

b ) Takımın en az bir kez kazanma ihtimalini bulunuz.

1.6. Hilesiz bir para, bir tura yada dört yazı gelene kadar atılıyor. Para atışlarının beklenen değerini bulunuz.

1.7. Bir makinada üretilen malların %1 'i bozuktur. 100 maldan 3 yada daha fazlasının bozuk olma ihtimalini bulunuz.

1.8. Bir kutuda 5 kırmazı, 3 beyaz ve 2 mavi bilye vardır. Yerine koyma şartıyla 6 top çekiliyor. Yani top öteki çekilmeden yerine konuyor.

a ) 3 kırmızı, 2 beyaz ve 1 mavi bilye çekme

b ) her renkten e şer tane çekme

ihtimalini bulunuz.

# BÖLÜM 2

# DAĞITIM SİSTEMİNDE GÜVENİLİRLİK

## 2.1. TEMEL GÜVENİLİRLİK KAVRAMLARI

Verilen bir elemanın (veya sistemin) arıza ihtimalini, zamanın bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür.

$$P(T \leq t) = F(t) \qquad t \geq 0 \tag{2.1}$$

Burada
$T$ = arıza zamanını temsil eden bir raslantı değişkenidir.
$F(t) = t$ anında elemanın arızalanma ihtimalidir.
Burada, $F(t)$ arıza dağılım fonksiyonu olup güvenilirsizlik fonksiyonu olarak bilinir. Bu nedenle, verilen bir $t$ zamanında, elemanın bozuk olmayıp kendinden istenen görevi yerine getirme ihtimalı o ***elamanın güvenilirliği*** diye tanımlanır.
Yukardaki tanımları göz önüne alarak güvenilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) \\ &= P(T > t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

olarak yazılabilir. Burada
$R(t)$ = güvenilirlik fonksiyonu

$F(t)$ = güvenilirsizlik fonksiyonu

İşaret edilmelidirki $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonu, $t$ zamanında elemanın çalışıyor olma ihtimalini temsil eder.

Diğer taraftan, eğer $T$ arıza zamanı raslantı değişkenin yoğunluk fonksiyonu $f(t)$ ise, (2.2) denkleminden

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) \\ &= 1 - \int_0^t f(t)dt \\ &= \int_t^\infty f(t)dt \end{aligned} \tag{2.3}$$

yazılır. $(t_1, t_2)$ gibi verilen belirli bir zaman aralığında verilen bir sistemin arıza ihtimalini güvenilirsizlik fonksiyonu terimleri ile,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{t_2} f(t)dt - \int_{-\infty}^{t_1} f(t)dt \\ &= F(t_2) - F(t_1) \end{aligned} \tag{2.4}$$

yada güvenilirlik fonksiyonu terimleri ile,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt &= \int_{t_1}^{\infty} f(t)dt - \int_{t_2}^{\infty} f(t)dt \\ &= R(t_1) - R(t_2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

olarak verilir. Aşağıda arızanın vuku bulduğu verilen bir $(t_1, t_2)$ zaman aralığındaki oran, bu zaman aralığındaki, ***kaza oranı*** veya ***arıza oranı*** olarak tanımlanır. Buradaki, ihtimalde, arıza birim zamanda olmuştur, $t_1$ anından önce arıza olmamıştır, yani $t_1$ anı zaman başlangıcı olarak seçilmiştir. Buna göre

$$h(t) = \frac{R(t_1) - R(t_2)}{(t_2 - t_1)R(t_1)} \tag{2.6}$$

dir. Eğer zaman aralığını aşağıdaki gibi tanımlarsak

$t_1 = t$

$t_2 = t + \Delta t$

veya

$\Delta t = t_2 - t_1$

bundan sonra ***kaza oranı, anlık arıza oranı*** olup,

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\{bir\ elemanın\ yaşı\ t,\ bozulma\ süresi\ \Delta t \mid t\quad bozulmadan\ kaldığı\ süre\}}{\Delta t} \tag{2.7}$$

veya

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t \cdot R(t)}.$$

$$= \frac{1}{R(t)}\left[-\frac{d}{dt}R(t)\right]$$

$$= \frac{f(t)}{R(t)} \tag{2.8}$$

olarak yazılır. Burada

$f(t) = -\dfrac{dR(t)}{dt}$ =ihtimaliyet yoğunluk fonksiyonu

dur.

(2.3) denklemini (2.8) eşitliğinde yerine yazarsak

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \tag{2.9}$$

olur. Buradan

$$h(t)dt = \frac{dF(t)}{1 - F(t)} \tag{2.10}$$

yada

$$\int_0^t h(t)dt = -\ln\left[1 - F(t)\right]_0^t \tag{2.11}$$

Sonuç olarak

$$\ln \frac{1-F(t)}{1-F(0)} = -\int_0^t h(t)dt \tag{2.12}$$

veya

$$1-F(t) = \exp\left[-\int_0^t h(t)dt\right] \tag{2.13}$$

yazılır.
(2.13) eşitliğinin türevini alarak veya (2.13) eşitliğini (2.9) denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$f(t) = h(t)\exp\left[-\int_0^t h(t)dt\right] \tag{2.14}$$

(2.3) eşitliğini (2.13) denkleminde kullanarak

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t h(t)dt\right] \tag{2.15}$$

Burada

$$\exp[\ ] = e^{[\ ]} \tag{2.16}$$

dir.

$$\lambda(t) = h(t) \tag{2.17}$$

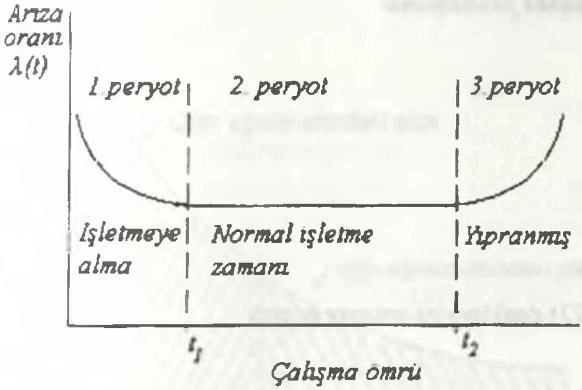
kabulü ile

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(t)dt\right] \tag{2.18}$$

***genel güvenilirlik fonksiyonu*** denilen (2.18) denklemi elde edilir.Dikkat edilmelidirki (2.18) denkleminde gerek ***güvenilirlik fonksiyonu*** ve gerekse ***kaza*** (veya ***arıza***) ***oranı*** zamanın fonksiyonudur.
Farzedelimki kaza veya arıza fonksiyonu zamandan bağımsız olsun, yani

$h(t)=\lambda$ arızalar/ birim zaman

olsun. (2.14) formülünden, arıza yoğunluk fonksiyonu




*Şekil 2.1. Kaza fonksiyonu*

$$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t} \tag{2.19}$$

olduğundan, (2.8) denkleminden güvenilirlik fonksiyonu

$$R(t) = \frac{f(t)}{h(t)}$$

$$= e^{-\lambda t} \tag{2.20}$$

olarak ifade edilir ve zamandan bağımsızdır. Burada sabit arıza oranlarının sebepleri, ***zaman-arıza raslantı değişkeni*** üstel yoğunluk fonksiyonu olmasın - dandır.

*Şekil 2.1.* de tipik bir ***kaza fonksiyonu*** eğrisi görülmektedir. Eğride arıza oranı zamanın fonksiyonu olarak çizilmiştir. İlk peryot deneme çalışmalarına başlama peryotudur. Bu peryotta arıza oranları azalma eğilimindedir. Bu peryotta arızalar üretim ve dizayn dan kaynaklanmakta olup, arızalar bulunup giderilir.

İkinci peryot normal çalışma peryotudur. Arıza oranları bu peryotta sabittir, ve arızalar tesadüfen beklenmedik bir anda meydana gelir , bu nedenle şansa bağlı arıza, tesadüfi arıza, felaket arızası gibi adlandırılabilir.

Üçüncü peryot yaşlanma peryotudur. Burada, elemanın yıpranmasına, yaşlanmasına, eskimesine bağlı olarak kaza oranları artar. Şüphesiz, eğer $t_2$ zamanı hassasiyetle önceden tahmin edilebilirse, eskime faz başlangıcında yenisi ile değiştirilmelidir.

Özet olarak, ***İhtimaliyet yoğunluk fonksiyonu***

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt} \tag{2.21}$$

olarak verilir ve

$$f(t)dt = -dR(t) \tag{2.22}$$

şeklinde de gösterilebilir. (2.22) denklemini entegre ederek

$$\int_0^t f(t)dt = -\int_0^{R(t)} dR(t)$$

$$= -[R(t)-1]$$

$$= 1-R(t) \tag{2.23}$$

bulunur. Bununla birlikte

$$\int_0^t f(t)dt + \int_t^\infty f(t)dt = \int_0^\infty f(t)dt = 1 \tag{2.24}$$

yazılabilir. (2.24) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

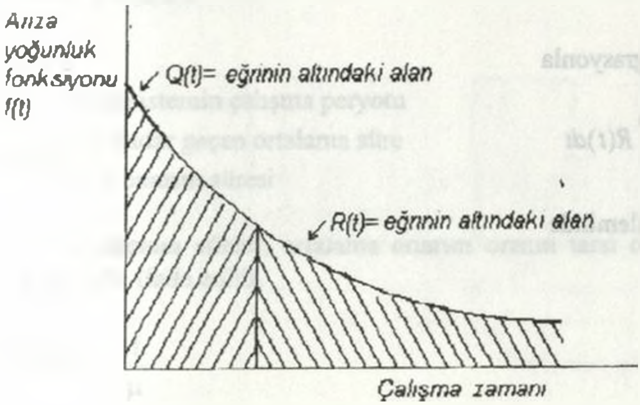
$$\int_0^t f(t)dt = 1 - \int_t^\infty f(t)dt \tag{2.25}$$

(2.23) ve (2.25) denklemlerinden , ***güvenilirlik*** aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$R(t) = \int_t^\infty f(t)dt \tag{2.26}$$

$$R(t)+Q(t)=1 \tag{2.27}$$

Buradan ***güvenilirsizlik***




***Şekil 2.2. Kaza fonksiyonu***

$Q(t) = 1 - R(t)$

$$= 1 - \int_t^\infty f(t)dt$$

$$= \int_0^t f(t)dt \qquad (2.28)$$

dir.
Güvenilirlik ve güvenilirsizlik arasındaki ilişki ***Şekil 2.2*** de görülmektedir.

## *2.2. TEMEL TEK-ELEMAN KAVRAMI*

Teorik olarak, ***beklenen ömür***, başka bir ifadeyle, elemanın serviste kalacağı ve görevini başarıyla icra edeceği zaman yani ***beklenen zaman*** (***beklenen süre***),

$$E(T) = \int_0^\infty t\, f(t)dt \qquad (2.29)$$

olarak ifade edilir. Denklem (2.21) in (2.2.1) da kullanılması ile

$$E(T) = -\int_0^{\infty} t \frac{dR(t)}{dt} dt \quad (2.30)$$

elde edilir. Kismi integrasyonla

$$E(T) = -t(R(t)|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t)dt \quad (2.31)$$

elde edilir. (2.31) denkleminde

$$R(t=0)=1 \quad (2.32)$$

ve

$$R(t=\infty)=0 \quad (2.33)$$

iken beklenen ömür

$$E(T) = \int_0^{\infty} R(t)dt \quad (2.34a)$$

veya

$$E(T) = \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left[ -\int_0^{t} \lambda(t)dt \right] \right\} dt \quad (2.34b)$$

şeklinde ifade edilir. Sabit arıza oranında, faydalı ömrün özel bir hali (2.20) denklemini (2.34$a$) eşitliğinde kullanarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E(T) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (2.35)$$

Eğer bahis konusu olan sistem, bakım ve onarımla yenilenmiyorsa, sadece iyi bir sistem ile değiştirilmesi durumunda, ***E(T) faydalı ömrü***, ***ortalama arızaya kadar süre*** olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$MTTF = \bar{m} = \frac{1}{\lambda} \quad (2.36)$$

Burada $\lambda$ = sabit arıza oranı

Benzer şekilde bahis konusu olan sistem, bakım ve onarımla yenileniyorsa, ***E(T) faydalı ömrü***, ***arızalar arası ortalama süre*** (zaman) olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$MTBF = \bar{T} = \bar{m} + \bar{r} \tag{2.37}$$

Burada

$\bar{T}$ = ortalama sistemin çalışma peryotu

$\bar{m}$ = arızaya kadar geçen ortalama süre

$\bar{r}$ = ortalama onarım süresi

***Ortalama onarım süresi***, ortalama onarım oranın tersi olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$MTTR = \bar{r} = \frac{1}{\mu} \tag{2.38}$$

Burada

$\mu$ = ***ortalama onarım oranı***

dır.

***Şekil 2.3a.*** da görülen iki durumlu modeli göz önüne alalım. ***Şekil 2.3b.*** de görüldüğü gibi, verilen bir zaman aralığında sistem ya ***faal*** (devrede) durumda yada ***çökmüş*** (devre dışı) durumda olduğunu farzedelim. Bu durumda ***arızaya kadar geçen ortalama süre***, tatmin edici bir tahminle aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$MTTF = \bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n} \tag{2.39}$$

Burada

$\bar{m}$ = arızaya kadar geçen ortalama süre

$m_i$ = $i$ 'yinci çalışma peryotunda arızaya kadar gözlenen süre

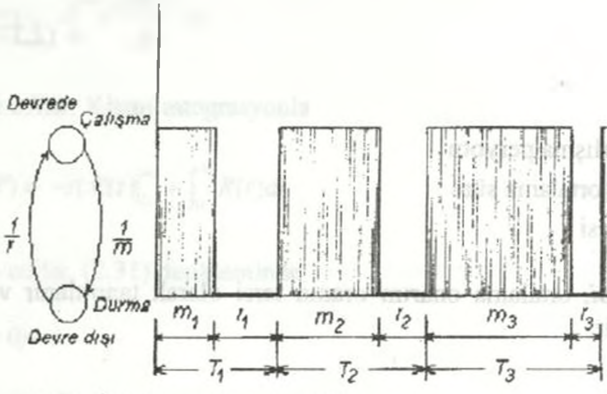
$n$ = toplam çalışma peryotu sayısı

Benzer şekilde, ***ortalama tamir süresi***, tatmin edici bir tahminle aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$MTTR = \bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n} \tag{2.40}$$

Burada

$\bar{r}$ = ***ortalama onarım (tamir) süresi***




***Şekil 2.3. İki durumlu y-modeli***

$r_i$ = $i$ 'yinci çalışma peryotunda ***gözlenen onarım süresi***
$n$ = toplam çalışma peryotu sayısı

Bu nedenledirki (2.37) denklemi

$$MTBF = MTTF + MTTR \tag{2.41}$$

şeklinde ifade edilebilir.
Tamir edilen sistem ve yeni bir sistemin arıza bakış açısı yönünden özdeş davranacaklarının kabülü , yenileştirme teorisinin temelini teşkil eder. Bununla birlikte, umumiyetle, mükemmel bir yenileştirme mümkün değildir, böyle durumlarda, ***ilk arızaya kadar geçen ortalama süre***, ***ikinci arızaya kadar geçen ortalama süre*** gibi terimleri kullanmak uygun olur.
***Ortalama çalışma peryotu*** tanımı, elemanın bir peryotluk çalışma süresinin ortalamasıdır, yani arızalanma, tamir, tekrar çalışma. Bundan dolayı

$$\overline{T} = \overline{m} + \overline{r} \tag{2.42}$$

yazılabilir. (2.36) ve (2.38) denklemlerini (2.42) denkleminde kullanılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\overline{T} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda\,\mu} \tag{2.43}$$

Ortalama çalışma peryotunun tersine ***ortalama arıza frekansı*** denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\bar{f} = \frac{1}{\bar{T}} = \frac{\lambda\,\mu}{\lambda + \mu} \tag{2.44}$$

Verilen bir eleman ***Şekil 2.3.*** te görüldüğü gibi iki durumlu bir modelle karakterize edilebilir, bu durumda eleman ya çalışır ( servis için uygun) yada bozuk (servise uygun değil) olduğu farzedilmiştir. Buda aşağıdaki gibi gösterilir.

$$A+U=1 \tag{2.45}$$

Burada

$A$ = elemanın ***kullanılabilirliği(uygulanabilirlik, elde edilebilirlik)***; örnek: bu zaman diliminde eleman devrede, çalışıyor(faal).

$U=\bar{A}=$ elemanın kullanılamazlığı; örnek: bu zaman diliminde eleman bozuk (çökmüş)

Burada, $t$ zamanı sonsuza giderken, ortalama olarak, ***kullanılabilirliğin*** aşağıdaki eşitliklerle gösterilebileceği ispatlanabilir.

$$A = \frac{\bar{m}}{\bar{T}} = \frac{MTTF}{MTBF} \tag{2.46}$$

$$A = \frac{\bar{m}}{\bar{m}+\bar{r}} = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} \tag{2.47}$$

$$A = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \tag{2.48}$$

Buradan, ***kullanılamazlık*** (kullanılabilirlikte olmayış, çökmüş)

$$U=1-A \tag{2.49}$$

dır.

(2.46) denklemi (2.49) da kullanılırsa

$$U = 1 - \frac{\overline{m}}{\overline{T}}$$

$$= \frac{\overline{T} - \overline{m}}{\overline{T}}$$

$$= \frac{(\overline{m} + \overline{r}) - \overline{m}}{\overline{T}}$$

$$= \frac{\overline{r}}{\overline{T}} = \frac{MTTR}{MTBF} \qquad (2.50)$$

olur. Bu denklemi

$$U = \frac{\overline{r}}{\overline{r} + \overline{m}} = \frac{MTTR}{MTTF + MTTR} \qquad (2.51)$$

veya

$$U = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \qquad (2.51)$$

olarak yazılabilir.

Verilen bir sistemin kullanılabilirliği için (2.47) denklemini göz önüne alalım.

$$A = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} \qquad (2.52)$$

Sisteme dahil olan eleman sayısı oldukca büyük olduğunda ve

$MTTF \gg MTTR$

olduğundan bölme işlemi çok sıkıcı olmaktadır. Bununla birlikte bölmenin yaklaşık şeklini kullanmak mümkündür. Bu nedenle, (2.47) denklemini

$$\frac{MTTF}{MTTF + MTTR} = 1 - \frac{MTTR}{MTTF} + \cdots (-1)^n \frac{(MTTR)^n}{(MTTF)^n} \qquad (2.53)$$

veya

$$\frac{MTTF}{MTTF + MTTR} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(MTTR)^n}{(MTTF)^n} \qquad (2.54)$$

yaklaşık olarak

$$\frac{MTTF}{MTTF + MTTR} \cong 1 - \frac{MTTR}{MTTF} \tag{2.55}$$

yazarız. Bu tam doğru olmasada, belirli uygulamalarda kullanımı gelenek haline gelmiştir; örnek: nükleer enerji santrallarının güvenilirlik uygulamalarında, tamir edilemeyen ve tamir edilebilen eleman veya sistemler de *MTBF* kullanılmıştır. Her hangi bir olayda, bir arızanın vukuunda , ortalama zaman aynı istatistiksel kavramlardaki gibidir. Bu nedenle, bu kavramları kullanarak, örnek olarak ***kullanılabilirlik***,

$$A = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} \tag{2.56}$$

ve ***kullanılamazlık***

$$U = \frac{MTTR}{MTTR + MTBF} \tag{2.57}$$

şeklinde yazılır.

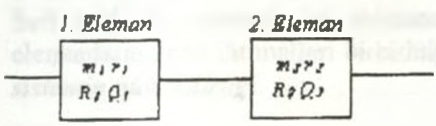
## *2.3. SERİ SİSTEMLER*

### *2.3.1. TAMİR EDİLEMİYEN SERİ ELEMANLAR*

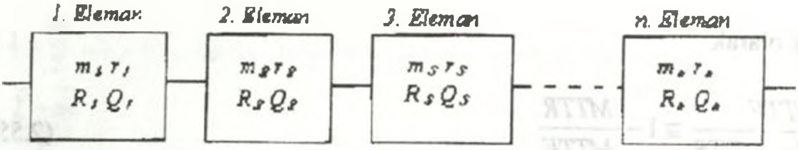
***Şekil 2.4.*** de iki elemanın seri bağlandığı sistemin blok diyagramı görülmektedir. İki elemanın bağımsız olduklarını farzedelim. Ayrıca, istenen fonksiyonları yerine getiren bu sistemin, her iki elemanı (veya alt sistemi) başarılı bir şekilde çalışsın. Bu sistem için

$$R_{sis}=P(E_1 \cap E_2) \tag{2.58}$$

yazılabilir ve elemanlar bağımsız kabul edildiklerinden ,




***Şekil 2.4. 2 elemanlı seri sistemin blok diyagramı***




***Şekil 2.5.* *n elemanlı seri sistemin blok diyagramı***

$$R_{sis}=P(E_1)P(E_2) \tag{2.59}$$

veya

$$R_{sis}=R_1 . R_2$$

yada

$$R_{sis}=\prod_{i=1}^{2} R_i \tag{2.60}$$

dir. Burada

$E_i$ = $i$ 'yinci elemanın (veya $i$ 'yinci alt sistemin) düzenli çalıştığı olay
$R_i = P(E_i)$ = $i$ 'yinci ***elemanın*** (veya $i$ 'yinci alt sistemin) ***güvenilirliği***
$R_{sis}$ =***sistemin*** (veya sistem güvenilirlik endeksinin) ***güvenilirliği***
dir.

Yukardaki düşünce tarzını $n$ elemanlı sistem için genelleştirelim. ***Şekil 2.5.*** te görüldüğü gibi sistem, $n$ tane bağımsız elemandan meydana gelsin,bu durumda ***güvenilirlik***,

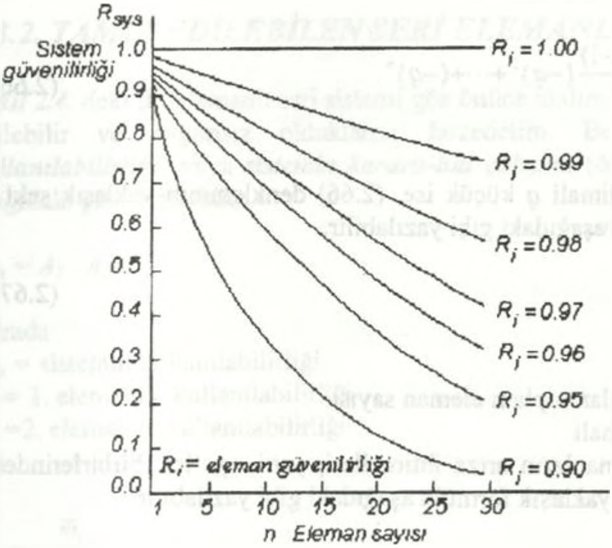
$$R_{sis}=P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \ldots \cap E_n) \tag{2.61}$$

olur. $n$ eleman bağımsız olduğundan,

$$R_{sis}=P(E_1)P(E_2)\,P(E_3)\ldots P(E_n) \tag{2.62}$$

veya

$$R_{sis}=R_1 . R_2 . R_3 \ldots R_n$$




***Şekil 2.6. n özdeş elemanlı seri sistemin güvenilirliği***

yada

$$R_{sis} = \prod_{i=1}^{n} R_i \tag{2.63}$$

dir. (2.63) denklemi, çarpma kuralı veya güvenilirlik zincir kuralı' nı gösterdiğine dikkat edilmelidir. Sistemin güvenilirliği, en az güvenilirliğe sahip elemanın güvenilirliğinden daha küçük veya ona eşit olmalıdır, bunun ifadesi

$$R_{sis} \leq \min_i \{R_i\} \tag{2.64}$$

şeklindedir. Sistem güvenilirliği, seri sistemin özelliği nedeniyle, seri eleman sayısının ve eleman güvenilirlik seviyesinin fonksiyonudur. Seri bir sistemin güvenilirliği, eleman sayısını azaltarak veya elemanların güvenilirliğini artırarak iyileştirilebilir. ***Şekil 2.6.*** da bu kavram görülmektedir.

Seri bağlı bir sistemde bir elemanın arıza (bozulma) ihtimalı $q$ ve bütün elemanların arıza ihtimalleri birbirinin aynı olduğunu farz edelim. Bu nedenle ***sistemin güvenilirliği***.

$$R_{sis} = (1-q)^n \tag{2.65}$$

veya binom açınımını kullanarak

$$R_{sis} = 1 + n(-q)^1 + \frac{n(n-1)}{2}(-q)^2 + \cdots + (-q)^n \tag{2.66}$$

şeklinde yazılabilir

Eğer elemanın arıza ihtimali $q$ küçük ise, (2.66) denkleminin yaklaşık şekli, ***sistem güvenilirliği*** için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$R_{sis} \cong 1 - nq \tag{2.67}$$

Burada

$n$ = sistemde seri bağlı olan toplam eleman sayısı

$q$ = elemanın arıza ihtimali

dir. Diğer taraftan, elemanların arıza ihtimalleri, yani $q_i$ 'ler, birbirlerinden farklı ise, güvenilirliğin yaklaşık formülü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$R_{sis} \cong 1 - \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{2.68}$$

***Örnek:2.3.1.1.*** Verilen bir sistemde 15 tane özdeş elemanın seri bağlandığını farzedelim. Eğer sistemin minimum güvenilirliği 0.99 ise, elemanların yaklaşık güvenilirliklerini hesaplayınız.

***Çözüm:*** (2.67) denkleminden

$$R_{sis} \cong 1 - nq$$

$0.99 = 1 - 15(q)$

yazılır ve buradan

$q = 0.0007$

bulunur. Elemanın yaklaşık güvenilirliği münferit sistemin güvenilirliğine karşılık gelir ve

$R_i = 0.9993$

olarak bulunur.

### *2.3.2. TAMİR EDİLEBİLEN SERİ ELEMANLAR*

***Şekil 2.4.*** deki iki elemanlı seri sistemi göz önüne alalım. Bu elemanların tamir edilebilir ve bağımsız olduklarını farzedelim. Bu nedenle, ***sistemin kullanılabilirliği*** veya ***sistemin kararlı-hal çalışma*** (örnek: ***başarı***) ***ihtimali*** aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$A_{sis} = A_1 \, . \, A_2 \tag{2.69}$$

Burada
$A_{sis}$ = sistemin kullanılabilirliği
$A_1$ = 1. elemanın kullanılabilirliği
$A_2$ =2. elemanın kullanılabilirliği
dir.

$$A_1 = \frac{\overline{m}_1}{\overline{m}_1 + \overline{r}_1} \tag{2.70}$$

ve

$$A_2 = \frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_2 + \overline{r}_2} \tag{2.71}$$

iken, (2.70) ve (2.71) denklemini (2.69) eşitliğinde yerine yazalım,

$$A_{sis} = \frac{\overline{m}_1}{\overline{m}_1 + \overline{r}_1} \frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_2 + \overline{r}_2} \tag{2.72}$$

veya

$$A_{sis} = \frac{\overline{m}_{sis}}{\overline{m}_{sis} + \overline{r}_{sis}} \tag{2.73}$$

olur.Burada
$\overline{m}_1$ =1. eleman için arızaya kadar geçen ortalama süre
$\overline{m}_2$ =2. eleman için arızaya kadar geçen ortalama süre
$\overline{m}_{sis}$ =sistem için arızaya kadar geçen ortalama süre
$\overline{r}_1$ =1. eleman için ortalama onarım süresi

$\bar{r}_2$ =2. eleman için ortalama onarım süresi

$\bar{r}_{sis}$ =sistem için ortalama onarım süresi

***Ortalama sistemin arıza frekansı***, 1. sistemin arıza frekansı ile 2. sistemin kullanılabilirliğinin çarpımı na, 2. sistemin arıza frekansı ile 1. sistemin kullanılabilirliğinin çarpımının eklenmesi ile bulunur.

$$\bar{f}_{sis} = A_2.\bar{f}_1 + A_1.\bar{f}_2 \tag{2.74}$$

Burada

$\bar{f}_{sis}$ = sistemin ortalama arıza frekansı

$\bar{f}_i$ = $i$. yinci elemanın ortalama arıza frekansı

$A_i$ = $i$. yinci elemanın kullanılabilirliği

dir.

$$\bar{f}_i = \frac{1}{\overline{m}_i + \bar{r}_i} \tag{2.75}$$

ve

$$A_i = \frac{\overline{m}_i}{\overline{m}_i + \bar{r}_i} \tag{2.76}$$

iken (2.75) ve (2.76) denklemlerini (2.74) te yerine yazarsak

$$\bar{f}_{sis} = \frac{1}{\overline{m}_1 + \bar{r}_1}\frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_2 + \bar{r}_3} + \frac{1}{\overline{m}_2 + \bar{r}_2}\frac{\overline{m}_1}{\overline{m}_1 + \bar{r}_1} \tag{2.77}$$

olur. Ayrıca (2.73) denklemi aşağıdaki gibi yazılabileceğine işaret edelim.

$$A_{sis} = \overline{m}_{sis} \cdot \bar{f}_{sis} \tag{2.78}$$

İki elemanlı seri bir sistemde arızaya kadar geçen ortalama süre

$$\overline{m}_s = \frac{1}{1/\overline{m}_1 + 1/\overline{m}_2} \tag{2.79}$$

ve $n$ elemanlı seri bir sistemde arızaya kadar geçen ortalama süre ise

$$\overline{m}_s = \frac{1}{1/\overline{m}_1 + 1/\overline{m}_2 + 1/\overline{m}_3 + \cdots + 1/\overline{m}_n} \tag{2.80}$$

olur.

İki elemanlı bir sistemde, arızaya kadar geçen ortalama sürenin karşıtı ***arıza oranı*** olarak tanımlanır ve

$$\lambda_{sis} = \lambda_1 + \lambda_2 \tag{2.81}$$

olarak ve $n$ elemanlı bir sistem için ise

$$\lambda_{sis} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n \tag{2.82}$$

olarak yazılır.
Benzer şekilde, iki elemanlı seri bir sistemde, ***ortalama tamir sürenin***

$$\overline{r}_{sis} = \frac{\lambda_1 \overline{r}_1 + \lambda_2 \overline{r}_2 + (\lambda_1 \overline{r}_1)(\lambda_2 \overline{r}_2)}{\lambda_{sis}} \tag{2.83}$$

olduğu ve yaklaşık olarak

$$\overline{r}_{sis} = \frac{\lambda_1 \overline{r}_1 + \lambda_2 \overline{r}_2}{\lambda_{sis}} \tag{2.84}$$

n elemanlı bir sistem içinde

$$\overline{r}_{sis} = \frac{\lambda_1 \overline{r}_1 + \lambda_2 \overline{r}_2 + \lambda_3 \overline{r}_3 + \cdots + \lambda_n \overline{r}_n}{\lambda_{sis}} \tag{2.85}$$

olduğu gösterilebilir.

## 2.4. PARALEL SİSTEMLER

### 2.4.1. TAMİR EDİLEMİYEN PARALEL ELEMANLAR

*Şekil 2.6.* da paralel bağlı, iki elemanlı bir sistemin blok diyağramı verilmiştir. Bu iki elemanın bağımsız olduklarını farzedelim. Verilen bu sistemin arızalanması ve istenen fonksiyonları yerine getirememesi için, her iki elemanında aynı anda arızalı olması gerekir. Bu düşüncelerin ışığı altında sistemin güvenilirsizliği

$$Q_{sis} = P\left[\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2\right] \tag{2.86}$$

olarak yazılır ve elemanlar bağımsız olduklarından,

$$Q_{sis} = P\left(\overline{E}_1\right)\left(\overline{E}_2\right) \tag{2.87}$$

veya

$$Q_{sis} = \prod_{i=1}^{2}\left(1 - R_i\right) \tag{2.88}$$

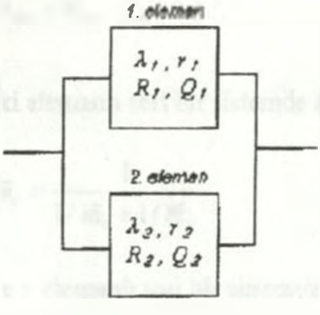
olur. Burada

$\overline{E}_i$ = $i$ 'yinci elemanın arızalanma olayı

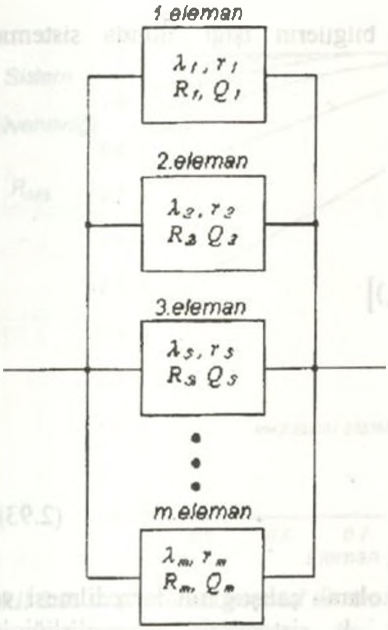
$Q_i = P\left(\overline{E}_i\right)$ = $i$ 'yinci elemanın güvenilirsizliği

$Q_{sis}$ = sistemin güvenilirsizliği

dir.




***Şekil 2.7. İki elemanlı paralel sistemin blok diyagramı***




***Şekil 2.8.  m  elemanlı paralel sistemin blok diyagramı***

Güvenilirsizliğin tamlayanı ise, iki elemanlı sistemin güvenilirliği olup aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$R_{sis} = 1 - \prod_{i=1}^{2}(1 - R_i) \tag{2.89}$$

Yukardaki düşünce tarzı, *Şekil 2.8.* de görülen $m$ elemanlı sisteme uygulanarak genelleştirmek mümkündür. Buna göre sistemin güvenilirsizliği

$$Q_{sis} = P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap \cdots \cap \overline{E}_m) \tag{2.90}$$

olur. $m$ tane eleman bağımsız olduğundan

$$Q_{sis} = P(\overline{E}_1)P(\overline{E}_2)P(\overline{E}_3)\cdots P(\overline{E}_m) \tag{2.91}$$

veya

$$Q_{ss} = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdots Q_m \tag{2.92}$$

şeklinde formüle edilebilir. Yukardaki bilgilerin ışığı altında sistemin güvenilirliği

$$\begin{aligned} R_{ss} &= 1 - Q_{ss} \\ &= 1 - \left[Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdots Q_m\right] \\ &= 1 - \left[(1-R_1)(1-R_2)(1-R_3)\cdots(1-R_m)\right] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{m} Q_i \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{m} (1-R_i) \end{aligned} \tag{2.93}$$

olur. Burada, bütün ünitelerin eş zamanlı olarak çalıştığının farzedilmesi ve herhangi bir arızada, çalışmakta olan alt sistemlerin güvenilirliğinin etkilenmedi-ği ima edilmektedir.

Münferit elemanların arıza oranlarının ve arızalar arası ortalama sürenin sabit olmasına rağmen, paralel sistemin ani arıza oranı, çalışma zamanının değişken bir fonksiyonudur. Bu nedenle, sistem güvenilirliği , her bir kolda arızalar arası ortalama zaman ile paralel kol sayısının birleşik fonksiyonudur. ***Şekil 2.9.*** da görüldüğü gibi, paralel kol sayısının artması ile sistem güvenilirliğinde marjinal kazanç, verilen bir elemanın güvenilirliğinde ise hızlı bir azalma görülür. Sistem güvenilirliğindeki en büyük kazanç, bir kola ikinci bir kol eklendiğinde olur. Paralel sistemin güvenilirliği yalnızca bir üstlü ifade olmayıp, üslerin toplamı olan bir üstel ifadedir. Bu nedenle iki elemanlı paralel bir sistemin güvenilirliği

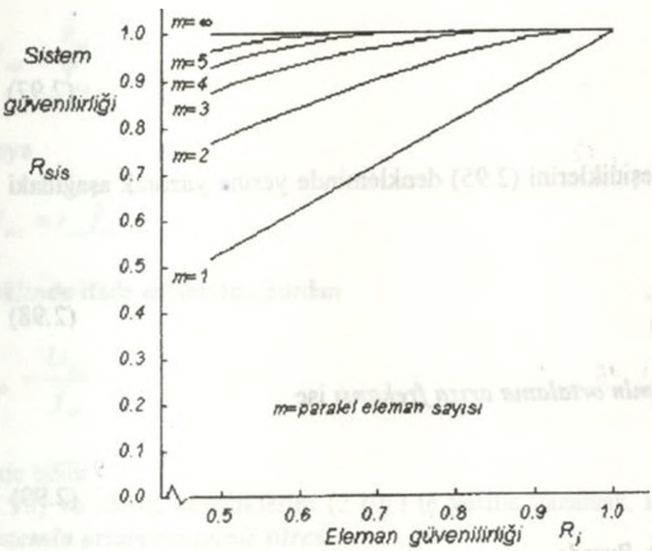
$$\begin{aligned} R_{ss}(t) &= 1 - (1 - e^{\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t}) \\ &= e^{\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \end{aligned} \tag{2.94}$$

dir. Burada

$\lambda_1$= 1. elemanın arıza oranı

$\lambda_2$= 2. elemanın arıza oranı

dır.




***Şekil 2.9. n elemanlı paralel sistemin güvenilirliği***

## 2.4.2. TAMİR EDİLEBİLEN PARALEL ELEMANLAR

*Şekil 2.7.* de görülen iki elemanlı paralel bir sistemi göz önüne alalım. Elemanların bağımsız ve tamir edilebilir olduklarını farzedelim. Buna göre ***sistemin, kullanılamazlığı*** veya ***kararlı-hal arıza ihtimali*** aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U_{sis} = U_1 \cdot U_2 \tag{2.95}$$

Burada

$U_{sis}$ = sistemin kullanılamazlığı

$U_1$ = 1. elemanın kullanılamazlığı

$U_2$ = 2. elemanın kullanılamazlığı

dır.

$$U_1 = 1 - A_1$$

$$= \frac{\lambda_1 \bar{r}_1}{1 + \lambda_1 \bar{r}_1} \tag{2.96}$$

ve

$$U_2 = 1 - A_2$$
$$= \frac{\lambda_2 \bar{r}_2}{1 + \lambda_2 \bar{r}_2} \qquad (2.97)$$

ise, (2.96) ve (2.97) eşitliklerini (2.95) denkleminde yerine yazarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$U_{su} = \frac{\lambda_1 \bar{r}_1}{1 + \lambda_1 \bar{r}_1} \frac{\lambda_2 \bar{r}_2}{1 + \lambda_2 \bar{r}_2} \qquad (2.98)$$

Bununla birlikte, ***sistemin ortalama arıza frekansı*** ise

$$\bar{f}_{su} = U_2 \bar{f}_1 + U_1 \bar{f}_2 \qquad (2.99)$$

şeklinde formüle edilir. Burada

$\bar{f}_{su}$ = sistemin ortalama arıza frekansı

$\bar{f}_i$ = *i.* yinci elemanın ortalama arıza frekansı

$U_i$ = *i.* yinci elemanın kullanılamazlığı

dır.

$$\bar{f}_1 = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1 \bar{r}_1} \qquad (2.100)$$

ve

$$\bar{f}_2 = \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2 \bar{r}_2} \qquad (2.101)$$

ise, (2.96), (2.97) ve (2.100), (2.101) denklemlerini (2.99) denkleminde yerine yazıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\bar{f}_{su} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)}{(1 + \lambda_1 \bar{r}_1)(1 + \lambda_2 \bar{r}_2)} \qquad (2.102)$$

$$U_{sis} = \frac{\overline{r}_{sis}}{\overline{T}_{sis}} \tag{2.103}$$

veya

$$U_{sis} = \overline{r}_{sis}\overline{f}_{sis} \tag{2.104}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burdan

$$\overline{r}_{sis} = \frac{U_{sis}}{\overline{f}_{sis}} \tag{2.105}$$

elde edilir.

(2.98) ve (2.102) eşitliklerini (2.105) te yerine yazarsak, iki elemanlı paralel ***sistemin ortalama tamir süresi***

$$\overline{r}_{sis} = \frac{\overline{r}_1 \cdot \overline{r}_2}{\overline{r}_1 + \overline{r}_2} \tag{2.106}$$

veya

$$\frac{1}{\overline{r}_{sis}} = \frac{1}{\overline{r}_1} + \frac{1}{\overline{r}_2} \tag{2.107}$$

olur.

Benzer şekilde, (2.51) den, ***sistemin kullanılamazlığı***

$$\overline{U}_{sis} = \frac{\overline{r}_{sis}}{\overline{r}_{sis} + \overline{m}_{sis}} \tag{2.108}$$

olara yazılır ve buradan

$$\overline{m}_{sis} = \frac{\overline{r}_{sis}(1 - U_{sis})}{U_{sis}} \tag{2.109}$$

elde edilir.

(2.98) ve (2.106) denklemini (2.109) eşitliğinde yerine yazılarak, paralel ***sistemin ortalama arızaya kadar zamanı*** ( veya ***işletme zamanı, çalışma zamanı***)

$$\overline{m}_{sis} = \frac{1+\lambda_1\overline{r}_1+\lambda_2\overline{r}_2}{\lambda_1\lambda_2(\overline{r}_1+\overline{r}_2)} \qquad (2.110)$$

olarak yazılabilir. Paralel ***sistemin arıza oranı*** ise

$$\lambda_{sis} = \frac{1}{\overline{m}_{sis}} \qquad (2.111)$$

veya

$$\overline{m}_{sis} = \frac{\lambda_1\lambda_2(\overline{r}_1+\overline{r}_2)}{1+\lambda_1\overline{r}_1+\lambda_2\overline{r}_2} \qquad (2.112)$$

dır.

İkiden fazla özdeş ünite paralel ise ve/veya sistemde sadece gereğinden fazla şeyler olmadığında, başka bir deyişle paralel ise, sistemin durum veya modlarının ihtimali binom dağılımı veya şartlı ihtimaliyet kullanılarak hesaplanır.

***Örnek 2.4.2.1***

***Şekil 2.10.*** da bir yük merkezine elektrik enerjisi sağlayan 4 mil uzunluğunda besleme hattı görülmektedir. Hattın yük merkezi tarafında 1 mil uzunluğundaki kısmı estetik amacıyla yeraltından geçirilmiş ve geri kalan kısmı ise hava hattıdır. Yeraltı kablosu iki terminal (uç) noktasına sahiptir. Son 10 yılda ortalama olarak. hava hattında mil başına 2 arıza, yeraltı hattında mil başına 1 arıza rapor edilmiştir. Yıllık kablo terminali (ucu) arıza oranı, kablo terminali (ucu) başına yüzde 0.3 olarak verilmiştir. Şimdiye kadarki tecrübelere dayanarak, ortalama tamir zamanları , hava hattı, yeraltı hattı ve herbir kablo terminali (ucu) için sırasıyla 3, 28, 3 saattır. Verilen bilgileri kullanarak, aşağıdaki istenenleri hesaplayınız.

*a* ) Besleme sisteminin (Fiderin ) toplam yıllık arıza oranı

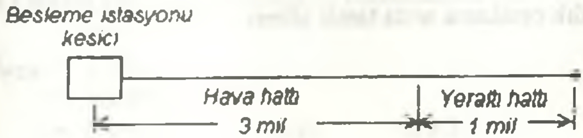
*b* ) Saat olarak, besleme sisteminin (fiderin) yıllık arıza tamir-bakım (restorasyon) süresi

*c* ) Besleme sisteminin (fiderin) kullanılamazlığı

*d* ) Besleme sisteminin (fiderin) kullanılabilirliği

***Çözüm***

***a* ) Besleme sisteminin toplam yıllık arıza oranı**




***Şekil 2.10.***

$$\lambda_{FDR} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \lambda_{OH} + \lambda_{UG} + 2\lambda_{CT}$$

Burada

$\lambda_{OH}$ =Fiderin hava hattı kısmının yıllık toplam arıza oranı

$\lambda_{UG}$ =Fiderin yeraltı hattı kısmının yıllık toplam arıza oranı

$\lambda_{CT}$ =Kablo uçlarının yıllık toplam arıza oranı

dır. Buradan

$$\lambda_{FDR} = 3\left(\frac{2}{10}\right) + 1\left(\frac{1}{10}\right) + 2(0.003)$$
$$= 0.706 \text{ arıza / yıl}$$

elde edilir.

*b* ) Saat olarak, besleme sisteminin yıllık arıza restorasyon süresi

$$\bar{r}_{FDR} = \sum_{i=1}^{3} \bar{r}_i = \bar{r}_{OH} + \bar{r}_{UG} + 2\bar{r}_{CT}$$

Burada

$\lambda_{OH}$ =Fiderin hava hattı kısmının, saat olarak ortalama tamir süresi

$\lambda_{UG}$ =Fiderin yeraltı hattı kısmının , saat olarak ortalama tamir süresi

$\lambda_{CT}$ =Kablo uçlarının, saat olarak ortalama tamir süresi

dır. Buradan

$$\bar{r}_{FDR} = 3 + 28 + 2(3)$$
$$= 37 \text{ saat}$$

Bununla birlikte, fiderin yıllık ortalama arıza tamir süresi

$$\bar{r}_{FDR} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \times \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i}$$

veya

$$\bar{r}_{FDR} = \frac{(l_{OH} \times \lambda_{OH})(\bar{r}_{OH}) + (l_{UG} \times \lambda_{UG})(\bar{r}_{UG}) + (2\lambda_{CT})(\bar{r}_{CT})}{\lambda_{FDR}}$$

$$= \frac{(3 \times 0.2)(3) + (1 \times 0.1)(28) + (2 \times 0.003)(3)}{0.706}$$

$$= \frac{4.618}{0.706}$$

$$= 6.54 \text{ saat}$$

*c* ) Fiderin (besleme sisteminin) kullanılamazlığı

$$U_{FDR} = \frac{\bar{r}_{FDR}}{\bar{r}_{FDR} + \bar{m}_{FDR}}$$

dir. Burada

$$\bar{m}_{FDR} = \text{yıllık arızaya kadar ortalama süre}$$
$$= 8760 - \bar{r}_{FDR}$$
$$= 8760 - 6.54$$
$$= 8753.46 \text{ saat / yıl}$$

dır. Yukarda bulunanları aşağıdaki ifadede yerine yazarak

$$U_{FDR} = \frac{6.54}{6.54 + 8753.46}$$
$$= 0.0007 = \%0.07$$

$$U_{FDR} = \frac{6.54}{6.54 + 8753.46}$$

$$= 0.0007 \quad \text{veya} \quad \%0.07$$

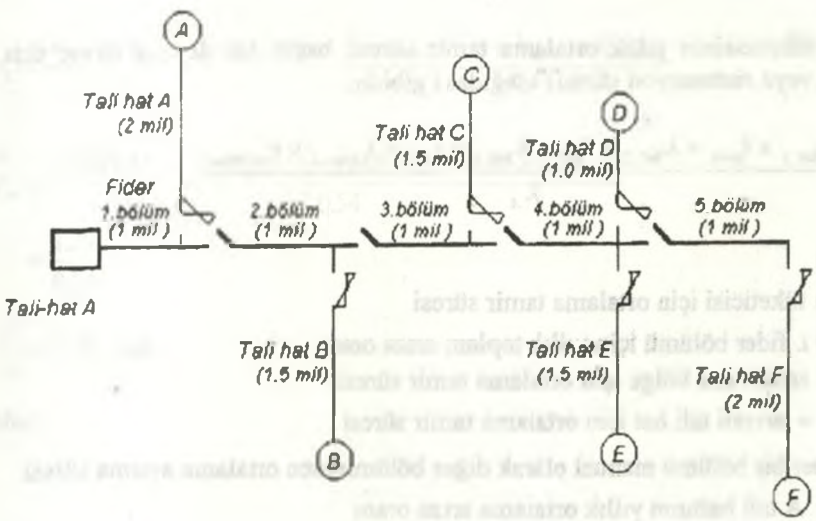
elde edilir.

*d* ) Fiderin (besleme sisteminin) kullanılabilirliği

$$
\begin{aligned}
A_{FDR} &= 1 - U_{FDR} \\
&= 1-0.0007 \\
&= 0.9993 \qquad \text{veya} \qquad \%99.3
\end{aligned}
$$

olur.

***Örnek 2.4.2.2 Şekil 2.11.*** de görülen ana (besleme hattı) fider manuel olarak bölümlendirildiğini ve şimdi ilk üç fider bölümü mevcut olup A, B, C tüketicilerine enerji verdiğini farzedelim. Yıllık arıza oranları ana besleyici ve tali hatlar için sırasıyla 0.08 ve 0.2 hata/mil dir. Ortalama tamir süreleri ise her bir ana besleyici bölüm ve her bir tali hat için yine sırasıyla 3.5 ve 1.5 sattır. Her bir besleme (fider) bülümü için ortalama manuel açma kapama (anahtarlama) süresi 0.75 saattır. Fiderin (besleme hattının) herhangi bir bölümünde arıza olduğu zaman, arızalı kısım manuel olarak (arıza akımı ana akım olmadan) diğer bölümlerden ayrılıyor. Yalnızca arızalı kısımlar değil devre kesicilerde sistemden ayrılıyor, burda anlatılmak istenen şey ise, elemanların tamir edilebilir oluşudur. Verilen bilgilerin ışığı altında, yalnızca ilk muhtemel durum için kesinti analizini hazırlayın, ancak eş zamanlı devre dışı kalma ihtimallerini ihmal ediniz ve aşağıdaki soruları cevaplayınız.




***Şekil 2.11.***

*a* ) A, B ve C tüketicilerinin yıllık toplam kesinti oranlarını hesaplayınız.
*b* ) A, B ve C tüketicilerinin yıllık ortalama tamir sürelerini hesaplayınız.

***Çözüm:***

*a* ) A, B ve C tüketicilerinin yıllık toplam kesinti oranları

$$\lambda_A = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = \lambda_{böl.1} + \lambda_{böl.2} + \lambda_{böl.3} + \lambda_{tal.A}$$

$$= (1\ \text{mil})(0.08) + (1\ \text{mil})(0.08) + (1\ \text{mil})(0.08) + (2\ \text{mil})(0.2)$$

$$= 0.64\ \text{arıza / yıl}$$

$$\lambda_B = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = \lambda_{böl.1} + \lambda_{böl.2} + \lambda_{böl.3} + \lambda_{tal.B}$$

$$= (1\ \text{mil})(0.08) + (1\ \text{mil})(0.08) + (1\ \text{mil})(0.08) + (1.5\ \text{mil})(0.2)$$

$$= 0.54\ \text{arıza / yıl}$$

$\lambda_C = \lambda_B = 0.54$ arıza / yıl
dır.

*b* ) *A* tüketicisinin yıllık ortalama tamir süresi, başka bir deyişle devre dışı süresi (veya restorasyon süresi) aşağıdaki gibidir.

$$\bar{r}_A = \frac{\lambda_{böl.1} \times \bar{r}_{arıza} + \lambda_{böl.2} \times \bar{r}_{MS} + \lambda_{böl.3} \times \bar{r}_{MS} + \lambda_{arıza,A} \times \bar{r}_{tal.arıza}}{\lambda_A}$$

burada
$\bar{r}_A$ = A tüketicisi için ortalama tamir süresi
$\lambda_{böl.i}$ = *i*. fider bölümü için yıllık toplam arıza oranı
$\bar{r}_{arıza}$ = arızalı ana bölge için ortalama tamir süresi
$\bar{r}_{tal.arıza}$ = arızali tali hat için ortalama tamir süresi
$\bar{r}_{MS}$ = her bir bölümü manuel olarak diğer bölümlerden ortalama ayırma süresi
$\lambda_{tal.A}$ = A tali hattının yıllık ortalama arıza oranı
dır. Veriler değerler kullanılırsa,

$$\bar{r}_A = \frac{(0.08)(3.5) + (0.08)(0.75) + (0.08)(0.75) + (2 \times 0.2)(1.5)}{0.64}$$

$$= \frac{1.0}{0.64}$$

$$= 1.56 \quad \text{saat.}$$

Benzer şekilde *B* tüketicisi için,

$$\bar{r}_B = \frac{\lambda_{böl,1} \times \bar{r}_{arıza} + \lambda_{böl,2} \times \bar{r}_{arıza} + \lambda_{böl,3} \times \bar{r}_{MS} + \lambda_{tal,B} \times \bar{r}_{tal,arıza}}{\lambda_B}$$

$$\bar{r}_A = \frac{(0.08)(3.5) + (0.08)(3.5) + (0.08)(0.75) + (1.5 \times 0.2)(1.5)}{0.54}$$

$$= \frac{1.07}{0.54}$$

$$= 1.98 \quad \text{saat.}$$

ve *C* tüketicisi için ise,

$$\bar{r}_C = \frac{\lambda_{böl,1} \times \bar{r}_{arıza} + \lambda_{böl,2} \times \bar{r}_{arıza} + \lambda_{böl,3} \times \bar{r}_{MS} + \lambda_{tal,C} \times \bar{r}_{tal,arıza}}{\lambda_C}$$

$$\bar{r}_A = \frac{(0.08)(3.5) + (0.08)(3.5) + (0.08)(3.5) + (1.5 \times 0.2)(1.5)}{0.54}$$

$$= \frac{1.29}{0.54}$$

$$= 2.39 \quad \text{saat.}$$

olur.

### 2.4.3. SERİ VE PARALEL SİSTEM KOMBİNASYONLARI

Basit seri ve paralel bağlı elemanlar (veya alt sistemler) eşdeğer paralel ve seri elemanlara indirgenerek analiz edilebilir.

***Şekil 2.12.*** de paralel-seri sistem verilmiştir. Her bir paralel kolda *n* eleman olan, *m* tane paralel koldan oluşan ***sistemin güvenilirliği***

$$R_{sis} = 1 - (1 - R^n)^m \tag{2.113}$$

dir. Burada

$R_{sis}$ = sistemin eşdeğer güvenilirliği

$R^n$ = her paralel kolun eşdeğer güvenilirliği

$R$ = elemanın güvenilirliği

$n$ = her koldaki seri eleman sayısı

$m$ = paralel kol sayısı

dır.

***Şekil 2.13.*** te seri- paralel sistem verilmiştir. Her biri *m* elemanın paralel bağlanması ile meydana gelen ünitelerden *n* tanesinin bir araya gelmesinden (seri bağlanmasından) oluşan sistemin güvenilirliği

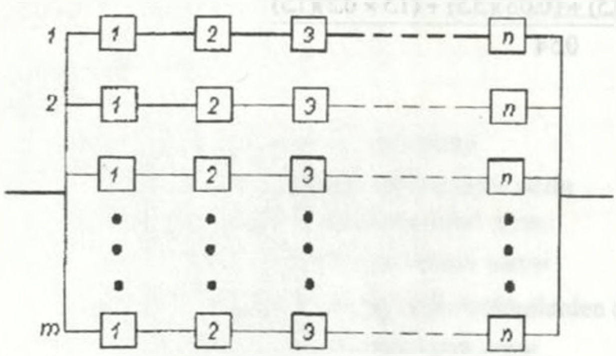
$$R_{sis} = 1 - (1 - R^m)^n \tag{2.114}$$

dir. Burada

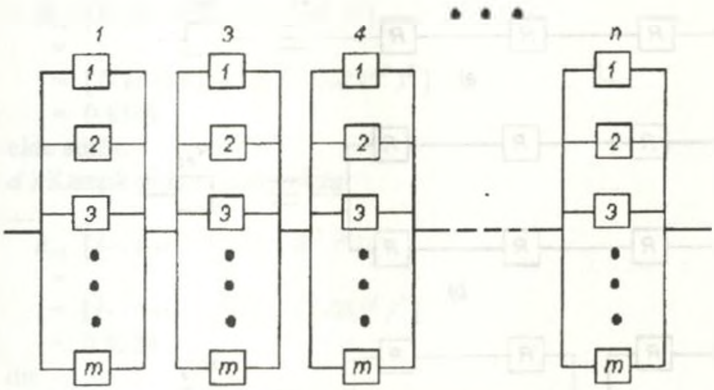
$R_{sis}$ = sistemin eşdeğer güvenilirliği

$1 - (1 - R^m)$ = paralel bağlı bir ünitenin eşdeğer güvenilirliği

$R$ = elemanın güvenilirliği




***Şekil 2.12. Paralel-seri sistem***



*Şekil 2.13. Seri-paralel sistem*

$m$ = bir paralel ünitedeki toplam eleman sayısı
$n$ = toplam ünite sayısı
İki sistemi karşılaştırırsak, seri-paralel sistemin güvenilirliği , paralel-seri sistemin güvenilirliğinden daha yüksek sistem güvenilirliğine sahiptir. Özet olarak, eğer güvenilirliği artırma için fazla paralel eleman kullanılıp istenen güvenilirliğe erişilemedi ise, seri-paralel sistem dizaynına gidilmesi sonucu çıkmaktadır. Tabi ki, elemanların güvenilirliği yüksekse, seri-paralel ve paralel-seri sistem farkından bahsedilmez.

***Örnek:2.4.3.1 Şekil 2.14.*** te çeşitli konfigirasyonda verilen sistemlerin güvenilirliklerini göz önüne alalım. Değişik dizilişte oluşturulan blok diyagramdaki elemanların her birinin güvenilirliği 0.85 tir. Her bir konfigirasyon için eşdeğer güvenilirliği bulunuz.

*a* ) Şekil 2.14. deki seri sistemin, eşdeğer sistem güvenilirliği ,

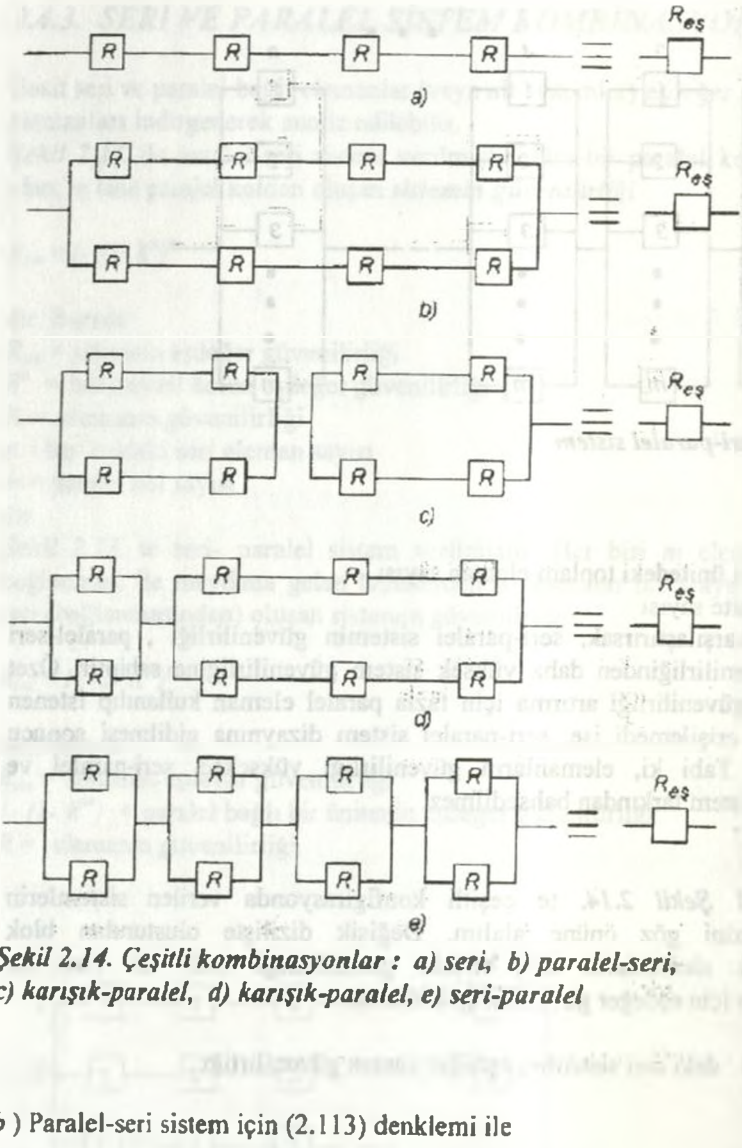
$$\prod_{i=1}^{4} R_i$$

$$R_{eş} = R_{sis} =$$

$$= (0.85)^4$$

$$= 0.5220$$

dir.




***Şekil 2.14. Çeşitli kombinasyonlar : a) seri, b) paralel-seri, c) karışık-paralel, d) karışık-paralel, e) seri-paralel***

*b* ) Paralel-seri sistem için (2.113) denklemi ile

$$
\begin{aligned}
R_{eş} &= 1-(1-R^4)^2 \\
&= 1-[1-(0.85)^4]^2 \\
&= 0.7715
\end{aligned}
$$

*c* ) Karışık-paralel sistem için

$$R_{eş} = [1-(1-R^2)^2][1-(1-R^2)^2]$$
$$= [1-(1-0.85^2)^2][1-(1-085^2)^2]$$
$$= 0.8519$$

elde edilir.

*d* ) Karışık-paralel sistem için

$$R_{eş} = [1-(1-R)^2][1-(1-R^3)^2]$$
$$= [1-(1-0.85)^2][1-(1-085^3)^2]$$
$$= 0.8320$$

dir.

*e* ) Seri- paralel sistem için (2.113) denklemi ile

$$R_{eş} = [1-(1-R)^2]^4$$
$$= [1-(1-0.85)^2]^4$$
$$= 0.9130$$

elde edilir.

***Örnek:2.4.3.2 Şekil 2.15.*** deki sistem, güvenilirlikleri farklı değerlere sahip, *A*, *B*, *C*, *D* ve *E* gibi 5 elemandan oluştuğunu farzedelim. Buna göre aşağıda istenenleri hesaplayınız.

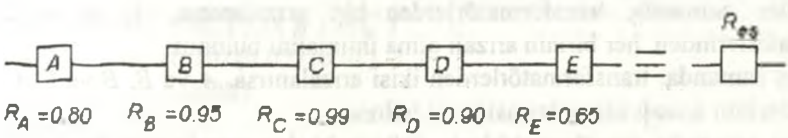
*a* ) Sistemin eşdeğer güvenilirliği

*b* ) Sistemin eşdeğer güvenilirliğinin en az 0.80, veya %80 olması isteniyor. Sistemdeki elemanları en az birer kez kullanarak arzu edilen sistem dizaynını yapınız.

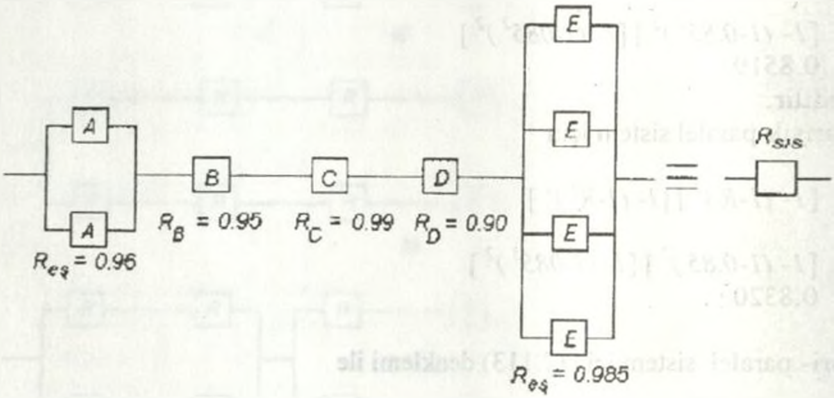
***Çözüm:***

*a* ) (2.63) eşitliğini kullanarak sistemin eşdeğer güvenilirliği aşağıdaki gibi olur.

$$R_{eş} = \prod_{i=1}^{5} R_i$$
$$= (0.8)(0.95)(0.99)(0.9)(0.65)$$
$$= 0.4402 \quad \text{veya} \quad \%44.02$$




***Şekil 2.15. Sistemin konfigirasyonu***




*Şekil 2.16. Modifiye sistemin konfigirasyonu*

*b* ) Genelde, tüm sistemin güvenilirliğini artırmanın en iyi yolu az güvenilirliği olan elemanları paralel bağlamaktır. Bu sebeple sistemde en az güvenilirliği olan *A* ve *E* elemanlarından fazla sayıda alınarak *Şekil 2.16.* da görüldüğü gibi paralel bağlanmışlardır. Buna göre, eşdeğer yeni sistemin güvenilirliği aşağıdaki gibi olur.

$$R_{eş} = \prod_{i=1}^{5} R_i$$

$$= [1\text{-}(1\text{-}0.8)^2](0.95)(0.99)(0.9)[1\text{-}(1\text{-}0.65)^2]$$

$$= 0.8004 \quad \text{veya} \quad \%80.04$$

***Örnek:2.4.3.3*** *A*, *B* ve *C* gibi üç adet tek-fazlı transformatörden oluşan üç-fazlı bir transformatör olduğunu farzedelim. *A* adı verilen 1.tranformatör eski bir ünite olması nedeniyle güvenilirliği 0.90, *B* adı verilen 2.tranformatör 20 yıldır çalışmakta olup güvenilirliği 0.95, *C* olarak adlandırılan 3.tranformatör yepyeni olup güvenilirliği 0.99 dur. Verilen bilgilere göre ve ünitelerin bağımsız olduklarını farzederek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

*a* ) Verilen zamanda, transformatörlerden hiç birinin arıza yapmama ihtimalini bulunuz.

*b* ) Verilen zamanda, transformatörlerden biri arızalanırsa, *A*, *B* ve *C* transformatörlerinden her birinin arızalı olma ihtimalini bulunuz.

*c* ) Verilen zamanda, transformatörlerden ikisi arızalanırsa, *A* ve *B*, *B* ve *C*, *C* ve *A* ünitelerinin arızalı olma ihtimallerini bulunuz.

*d* ) Verilen zamanda, transformatörlerin üçünün birden arızalanma ihtimalini bulunuz.

*a* ) Verilen zamanda, transformatörlerden hiç birinin arıza yapmama ihtimali

$$P[A \cap B \cap C] = P(A)\,P(B)\,P(C)$$
$$= (0.90)\,(0.95)\,(0.99)$$
$$= 0.84645$$

olur.

*b* ) Verilen zamanda, transformatörlerden biri arızalanırsa, *A*, *B* ve *C* transformatörlerinden her birinin arızalı olma ihtimali

$$P[\bar{A} \cap B \cap C] = P(\bar{A})\,P(B)\,P(C)$$
$$= (0.10)\,(0.95)\,(0.99)$$
$$= 0.09405$$

$$P[A \cap \bar{B} \cap C] = P(A)\,P(\bar{B})\,P(C)$$
$$= (0.90)\,(0.05)\,(0.99)$$
$$= 0.04455$$

$$P[A \cap B \cap \bar{C}] = P(A)\,P(B)\,P(\bar{C})$$
$$= (0.90)\,(0.95)\,(0.01)$$
$$= 0.00855$$

dir.

*c* ) Verilen zamanda, transformatörlerden ikisi arızalanırsa, *A* ve *B*, *B* ve *C*, *C* ve *A* ünitelerinin arızalı olma ihtimali aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$P[\bar{A} \cap \bar{B} \cap C] = P(\bar{A})\,P(\bar{B})\,P(C)$$
$$= (0.10)\,(0.05)\,(0.99)$$
$$= 0.00495$$

$$P[A \cap \bar{B} \cap \bar{C}] = P(A)\,P(\bar{B})\,P(\bar{C})$$
$$= (0.90)\,(0.05)\,(0.01)$$
$$= 0.00045$$

$$P[\bar{A} \cap B \cap \bar{C}] = P(\bar{A})\,P(B)\,P(\bar{C})$$
$$= (0.10)\,(0.95)\,(0.01)$$
$$= 0.00095$$

*d* ) Verilen zamanda, transformatörlerin üçünün birden arızalanma ihtimali

$$P[\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}] = P(\bar{A})\,P(\bar{B})\,P(\bar{C})$$
$$= (0.10)\,(0.05)\,(0.01)$$
$$= 0.00005$$

olur.

Yukarda hesaplanan güvenilirlikler Tablo 2.4.3.1 de topluca gösterilmiştir.

*Tablo 2.4.3.1*

| Arızalı transformatör sayısı | Sistem modları | İhtimal |
|---|---|---|
| 0 | $A \cap B \cap C$ | 0.84645 |
| 1 | $\overline{A} \cap B \cap C$ | 0.09405 |
| | $A \cap \overline{B} \cap C$ | 0.04455 |
| | $A \cap B \cap \overline{C}$ | 0.00855 |
| 2 | $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ | 0.00495 |
| | $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ | 0.00045 |
| | $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$ | 0.00095 |
| 3 | $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ | 0.00005 |
| | | $\sum$ =1.00000 |

Burda işaret edilmelidir ki. Verilen zaman sonsuza giderse, tanım gereği, güvenilirlik sıfıra gider.

## 2.5. MARKOV İŞLEMLERİ

Stokastik işlem, { $X(t)$; $t\in T$ } raslantı değişkenler cümlesi olsun; burada $t$ değişkeni $T$ 'nin elemanı ve $X(t)$ de raslantı değişkenidir. $T$ genellikle elemanları pozitif tam sayı olan bir cümle olarak alınır.
Güvenilirlik hesaplarında, $t$ değişkeni zamanı, $X(t)$ ise $t$ anında sistemin halini (durumunu) tarif eder. Verilen bir $t_n$ zamanındaki durum (hal), o anda sisteme gelen tüm dış girişleri ifade eder. Bu nedenle mümkün hallerin sayısı sonlu olduğu gibi sonsuzda olabilir. Örnek olarak Poisson dağılımını alalım,

$$P_n(t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \qquad n=0,1,2,\ldots \qquad (2.115)$$

bu sonsuz sayıda durumu (hali) olan bir stokastik işlemi (süreci, yöntemi) temsil eder. Eğer sistemin çalışmaya başlama anını zaman başlangıcı olarak 0 alırsak, $n$ değişkeni 0 ile t arasındaki olayların sayısını gösterir. Bu nedenle, sistemin verilen bir $t$ anındaki durumu (hali) $n = 0, 1, 2, \ldots$ ile verilir.
Bir Markov işlemi (işlevi, metodu), bir stokastik sistem olup, gelecekteki bir olayın durumu en fazla bir önceki olayın durumuna bağlı.olup ondan evvelki hiç bir olayın durumuna bağlı değildir. Bu nedenle Markoviyan işlemi hafızasız olarak karakterize edilir. Bundan dolayı kesikli parametreli bir stokastik işlem { $X(t)$; $t = 0, 1, 2, \ldots$ },veya sürekli parametreli bir stokastik işlem {$X(t)$; $t \geq 0$ }, bir Markov işlemi olabilmesi için aşağıdaki Markoviyan özelliklerine sahip olması gerekir.

$$\begin{aligned} P\{ X(t_n)\geq x_n \mid X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2, \ldots, X(t_{n-1})=x_{n-1} \} \\ = P\{ X(t_n)\leq x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1} \} \end{aligned} \qquad (2.116)$$

$n$ elemanlı $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ zaman cümlesi bir işlevin oluştuğu zaman ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reel değişkenler cümlesi ise ihtimaliyet

$$p_{x_{n-1},x_n} = P\left\{x(t_n)=x_n \middle| X(t_{n-1})=x_{n-1}\right\} \qquad (2.117)$$

olur, bu geçiş ihtimaliyeti olarak adlandırılır ve $t_{n-1}$ anında $x_{n-1}$ verilmiş iken $t_n$ anında $x_n$ olması ihtimali, sistemin şartlı ihtimali olur. $t_{n-1}$ ve $t_n$ anında sistemi temsil eden bu ihtimale, tek-adım geçiş ihtimali de denir. Şüphesiz, ***k-adım geçiş ihtimalini*** yazmak istersek, bu kolayca

$$p_{x_n,x_{n+k}} = P\left\{X(t_{n+k})=x_{n+k} \middle| X(t_n)=x_n\right\} \qquad (2.118)$$

veya

$$p_{i_{n-k}, i_n} = P\left\{X(t_n) = x_n \middle| X(t_{n-k}) = x_{n-k}\right\} \qquad (2.119)$$

olarak yazılabilir.

Bir Markov zinciri $\{X(t_n)\}$, kesikli raslantı değişkenleri ile tanımlanır, burada $t_n$ kesikli değerler aldığı gibi sürekli değerlerde alabilir. Bu nedenle Markov zinciri, Markov işlevindeki gibi, kesikli durum uzay değişkenleri ile tanımlanabilir. Buna göre

$$p_{i,j} = P\left\{X(t_n) = j \middle| X(t_{n-1}) = i\right\} \qquad (2.120)$$

(2.120) denklemi, $t_{n-1}$ anındaki $i$ durumundan $t_n$ anındaki $j$ durumuna gidişi ifade eder ve, tek-adım geçiş ihtimali olarak tanımlanır, bu ihtimalin zamanla değişmediği farzedilir. Bu varsayımı tanımlamak için kullanılan terim bir durağanlaştırma (kararlılık, sabitleştirme) olayıdır. Eğer geçiş ihtimali yalnız zaman farkına bağlı ise, Markov zinciri zamana göre duragan (kararlı) dır denir. Bundan dolayı bir Markov zinciri, $i$. durumdan $j$. duruma giden, geçiş ihtimalleri ile tanımlanır, matris şeklinde aşağıdaki gibi gösterilir.

$$P = \underset{\text{durumdan}}{i} \quad \begin{array}{c|cccccc} & \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\hspace{6cm}}^{j \text{ duruma}}} \\ & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \hline 0 & p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots & p_{0n} \\ 1 & p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ 2 & p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ 3 & p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{array} \qquad (2.121)$$

Bütün $p_{i,j}$ geçiş ihtimalleri sabit ve zamandan bağımsız iken, $P$ matrisi tek-adım geçiş matrsi olarak adlandırılır. Eğer bir karışıklık yapma söz konusu olmazsa, ***P* geçiş matrisi** olarakta adlandırılır. $p_{i,j}$ ***şartlı ihtimal*** ise, aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

$$\sum_{j}^{n} p_{i,j} = 1 \qquad \text{bütün } i \text{ ler için} \qquad (2.122)$$

ve

$p_{i,j} \geq 0$ bütün $ij$ ler için (2.123)

Burada
$i = 0, 1, 2, \ldots, n$
$j = 0, 1, 2, \ldots, n$
dir. Geçiş(durum, hal) adedi çok sayıda değilse, $P$ geçiş matrisi bilgileri, ***geçiş diyagramı*** denilen bir şekille gösterilebilir. Geçiş diyagramı olayın(işlemin) çizimle bir temsili olup, durumlar (haller) düğümlerle geçişler ise oklarla gösterilir. Burada odak noktası zaman olmayıp uygun geçişlerin yapısıdır. $i$ düğümünden $j$ düğümüne çizilen ok $p_{ij}$ şeklinde gösterilir. $P$ matrisinin $i$. satırı $i$. düğümüden çıkan okları göstermekte olup ihtimallerinin toplamı 1'e eşit olmalıdır. Elimizde, durum (hal) 1 ve durum 2 diye ifade edebileceğimiz, iki durumlu bir sistem olduğunu farzedelim. Örnek: burada, durum 1 ve durum 2 sistemin sırasıyla çalışmakta ve durmakta olduklarını temsil etsin. Buna göre, ***durum geçiş ihtimalleri*** aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$p_{11}$=0 anında 1.halde olma ihtimali verilmiş iken, t anında 1.halde olma ihtimali
$p_{22}$=0 anında 2.halde olma ihtimali verilmiş iken, t anında 2.halde olma ihtimali
$p_{12}$=0 anında 1.halde olma ihtimali verilmiş iken, t anında 2.halde olma ihtimali
$p_{21}$=0 anında 2.halde olma ihtimali verilmiş iken, t anında 1.halde olma ihtimali

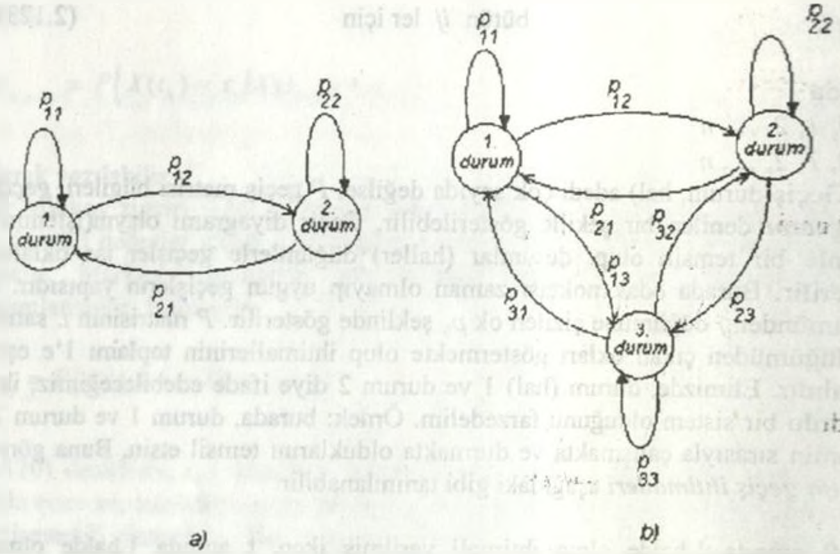
Yukarda söylenenlerden faydalanarak, ***durum geçiş matrisi***

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \qquad (2.124)$$

şeklinde yazılır ve geçiş diyagramı ise ***Şekil 2.17a*** deki gibi çizilir.
Aynı şekilde, eğer sistemde üç durum var ise, o zaman ***geçiş matrisi*** aşağıdaki gibi olur;

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \qquad (2.125)$$

ve bu matrisin geçiş diyagramı ***Şekil 2.17b*** deki gibi çizilebilir.




***Şekil 2.17 Geçiş sistemi a) iki-durumlu sistem b) üç-durumlu sistem***

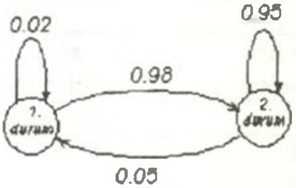
***Örnek 2.5.1.*** Daha önceki yıllarda, elektrik dağıtım kuruluşlarından biri bulunduğu mahalli bölgede, dağıtım transformatörlerinin çalışması ile ilgili aşağıdaki bilgileri toplamıştır. Kayıtlar, transformatörlerin yalnızca %2 sinin şimdilik bozuk olduğunu ve bu nedenle şimdi onarılmakta, gelecekte bozuk olacaklarını ve onarıma ihtiyaç duyacaklarını ifade etmektedir. Kayıtlar ayrıca bu transformatörlerin %5 inin şimdi çalışmakta olduklarını, gelecek zamanda bozulacaklarını ve bu nedenlede onarımda olacaklarını ifade etmektedir. İşlemin kesikli, markoviyan ve durağan geçiş ihtimaline sahip olduğunu farzederek, aşağıdaki soruları belirleyiniz.

*a* ) Şartlı ihtimalleri
*b* ) Geçiş matrisi
*c* ) Geçiş diyağramı

***Çözüm:***

*a* ) $t$ ve $t+1$ zamanı sırasıyla şimdiki zamanı (yani, şu andaki zamanı) ve gelecek zamanı temsil etsin. Buna göre şartlı ihtimal aşağıdaki gibi yazılabilir.

$P\{X_{t+1} = \text{bozuk} \mid X_t = \text{bozuk}\} = 0.2$
$P\{X_{t+1} = \text{faal} \mid X_t = \text{bozuk}\} = 0.98$
$P\{X_{t+1} = \text{bozuk} \mid X_t = \text{faal}\} = 0.05$




*Şekil 2.18 Geçiş diyagramı*

$P\{X_{t+1} = \text{faal} \mid X_t = \text{faal}\} = 0.95$

*b* ) 1 ve 2 sayıları, sırasıyla bozuk ve faal (sağlam) durumları temsil etsin. Buna göre (2.120)denklemini kullanarak ve örneğin *a* şıkkınıda göz önüne alarak,

$p_{11} = 0.02$ $\qquad p_{12} = 0.98$
$p_{21} = 0.05$ $\qquad p_{22} = 0.95$

olur veya (2.121)denklemini kullanarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

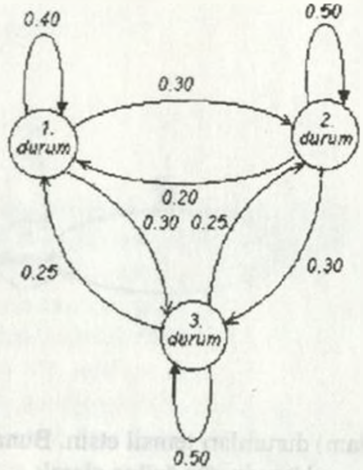
$$= \begin{bmatrix} 0.02 & 0.98 \\ 0.05 & 0.95 \end{bmatrix}$$

*c* ) Geçiş diyağramı ***Şekil 2.18*** deki gibi çizilebilir.

***Örnek 2.5.2.*** Bir elektrik dağıtım kuruluşlarından biri, bulunduğu mahalli bölgede, fider(besleyici)lerin devre dışı kalma istatistikleri ile ilgili araştırma yaptırmış; araştırma neticesi elde edilen bilgiler şöyledir: bir $t$ ve $t+1$ zamanında 1) fiderlerin devre dışı olma olayları markoviyandır 2) ve bu olay durağan (sabit) dır. Sonuç olarak elde edilen bilgiler ***Tablo 2.5.1.*** de özetlenmiştir. Örneğin tablodan görüldüğü gibi, şu anda eğer 1.fider devre dışı ise; 1, 2, 3, numaralı fiderlerin bir sonraki zamanda devre dışı olmaları yüzde olarak sırasıyla 40, 30, 30 dur. Verilen dataları kullanarak, aşağıda istenenleri bulunuz.

*a* ) Şartlı devre dışı olma ihtimalleri

*b* ) Geçiş matrisi




***Şekil 2.19 Geçiş diyagramı***

*c* ) Geçiş diyağramı

***Çözüm:***

*a* ) $t$ ve $t+1$ zamanı sırasıyla şimdiki zamanı(yani, şu andaki zamanı) ve gelecek (bir sonraki)zamanı temsil etsin. Buna göre, şu anda 1 numaralı fider devre dışı ise, bir sonraki (gelecek) zamanda yine 1 numaralı fiderin devre dışı olma ihtimali aşağıdaki gibi olur.

$p_{11} = P\{X_{t+1} = 1 \mid X_t = 1\} = 0.40$

Burada

$X_{t+1}$ = gelecek (bir sonraki ) zamanda devre dışı olacak fider(besleyici)

$X_t$ = şu anda(şimdi) devre dışı olan beslcyici

Benzer şekilde

$p_{12} = P\{X_{t+1} = 2 \mid X_t = 1\} = 0.30$

$p_{13} = P\{X_{t+1} = 3 \mid X_t = 1\} = 0.30$

$p_{21} = P\{X_{t+1} = 1 \mid X_t = 2\} = 0.20$

$p_{22} = P\{X_{t+1} = 2 \mid X_t = 2\} = 0.50$

$p_{23} = P\{X_{t+1} = 3 \mid X_t = 2\} = 0.30$

$p_{31} = P\{X_{t+1} = 1 \mid X_t = 3\} = 0.25$

$p_{32} = P\{X_{t+1} = 2 \mid X_t = 3\} = 0.25$

$p_{33} = P\{X_{t+1} = 3 \mid X_t = 3\} = 0.50$

*Tablo 2.5.1. Devre dışı fider verileri*

| Şu anda devre dışı kalan fider | Bir sonraki anda devre dışı kalacak fiderin yüzdeleri | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 40 | 30 | 30 |
| 2 | 20 | 50 | 30 |
| 3 | 25 | 25 | 50 |

elde edilir.

*b* ) Geçiş matrisi

$$
P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \end{array}
= \begin{bmatrix} 0.40 & 0.30 & 0.30 \\ 0.20 & 0.50 & 0.30 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}
$$

olarak elde edilir.

*c* ) Geçiş diyagramı ***Şekil 2.19*** da görüldüğü gibidir.

## *2.5.1. CHAPMAN - KOLMOGOROV DENKLEMLERİ*

Farzedelimki $S_j$, verilen bir sistemin ayrıntılı ve karşılıklı özel durumlarını (dış girişlerini) herhangi bir zamanda temsil etsin, burda $j$=0, 1, 9, .....Bundan başka $t_0$ anında sistem $S_j$ durumunda iken, sisteminin markoviyan olduğunu ve de $p_j^{(0)}$ mutlak ihtimaliyeti temsil edildiğini farzedelim. Bundan dolayı, eğer verilen bir markov zincirinin $p_j^{(0)}$ ve $P$ geçiş matrisi biliniyorsa, $n$-adım geçişinden sonra sistemin mutlak ihtimaliyeti kolayca tesbit edilebilir. ***Tek-adım geçiş ihtimali*** tanımdan;

$$p_{ij} = p_{ij}^{(1)} = P\{X(t_1) = j \mid X(t_0) = i\}$$ (2.126)

olarak yazılabilir.
***n*-adım geçiş ihtimali** matematik-indüksiyon metodu ile

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X(t_n) = j \mid X(t_0) = i\}$$ (2.127)

olarak tanımlanabilir.
Başka bir deyişle, $t_0$ anında $i$ durumunda olduğu verilen bir işlemin, $t_n$ anında $j$ durumuna gelme ihtimali (mutlak ihtimalı) $p_{ij}^{(n)}$ dir denir. Bu tanımdan gözlenen sonuç, $p_{ij}^{(0)}$ nin değeri, eğer $i=j$ olursa 1 diğer durumlarda 0 olmalıdır.
Chapman-Kolmogorov denklemleri, $n$-adım geçiş ihtimalinin hesap metotlarını vermektedir. Bu denklemin, en genel şekli,

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(n-m)} \cdot p_{kj}^{(m)} \qquad \forall_{ij}$$ (2.128)

olup; burada herhangi bir $m$, sıfır ile $n$ arasındaki her değeri alır. (2.128) denklemi matris formunda aşağıdaki gibi yazılabileceğine işaret edelim.

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^{(n-m)}\, \boldsymbol{P}^{(m)}$$ (2.129)

Daha yüksek dereceden geçiş matrisinin elemanları, yani $\left\| p_{ij}^{(n)} \right\|$ matrisinin elemanları, matris çarpımı ile doğrudan doğruya aşağıdaki formülle bulunabilir.

$$\left\| p_{ij}^{(n)} \right\| = \boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^{(n-m)}\, \boldsymbol{P}^{(m)} = \boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^{n}$$ (2.130)

(2.128) eşitliğinin özel bir hali

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(n-1)} \cdot p_{kj} \qquad \forall_{ij}$$ (2.131)

dir ve (2.129) ile (2.130) eşitliklerinin özel halleri ise sırasıyla

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}^{(n-1)}\, \boldsymbol{P}$$ (2.132)

ve

$$\left\| p_{ij}^{(n)} \right\| = P^{(n-1)} P = P^{(n)} = P^n \tag{2.133}$$

dir.

Şartsız ihtimal ise

$$p_j^{(n)} = P\{X(t_n) = j\} \tag{2.134}$$

şeklinde yazılır ve, buna ***mutlak ihtimaliyet*** veya ***durum ihtimali*** denir. Durum ihtimalini tesbit etmek için başlangiç şartlarının bilinmesi gerekir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} p_j^{(n)} &= P\{X(t_n) = j\} \\ &= P\sum_i \{X(t_n) = j | X(t_0) = i\} P\{X(t_0) = i\} \\ &= \sum_i p_i^{(0)} p_{ij}^{(n)} \end{aligned} \tag{135}$$

yazılabilir ve (135) denklemi matris formunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$p^{(n)} = p^{(0)} P^{(n)} \tag{2.136}$$

Burada

$p^{(n)}$ = $t_n$ anında durum ihtimaliyet vektörü

$p^{(0)}$ = $t_0$ anında başlangıç durum ihtimaliyet vektörü

$P^{(n)}$ = $n$-adım geçiş matrisi

Şüphesiz, durum (hal) ihtimali veya mutlak ihtimaliyet, vektör şeklinde

$$p^{(n)} = \left[ p_1^{(n)} \; p_2^{(n)} \; p_3^{(n)} \cdots p_k^{(n)} \right] \tag{2.137}$$

ve

$$p^{(n)} = \left[ p_1^{(0)} \; p_2^{(0)} \; p_3^{(0)} \cdots p_k^{(0)} \right] \tag{2.138}$$

olarak tanımlanır.

*Örnek: 2.5.1.2* İki durumlu, tek-adım geçiş matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

olan bir Markov zincirinin başlangıç durum ihtimal vektörü,

$p^{(0)} = [0.8 \quad 0.2]$

olarak verildiğine göre,
*a* ) $t_1$ anındaki durum ihtimal vektörünü
*b* ) $t_4$ anındaki durum ihtimal vektörünü
*c* ) $t_8$ anındaki durum ihtimal vektörünü
hesaplayınız.
***Çözüm:***
*a* ) Denklem (2.136) dan,

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = \boldsymbol{p}^{(0)}\, \boldsymbol{P}^{(1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.54 & 0.46 \end{bmatrix}$$

elde edilir.
*b* ) Denklem (2.136) dan,

$$\boldsymbol{p}^{(4)} = \boldsymbol{p}^{(0)}\, \boldsymbol{P}^{(4)}$$

olur, burada

$$\boldsymbol{P}^{(2)} = \boldsymbol{P}^{(1)}\, \boldsymbol{P}^{(1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.39 & 0.61 \end{bmatrix}$$

ve bir adım daha ilerlersek,

$$\boldsymbol{P}^{(4)} = \boldsymbol{P}^{(2)}\, \boldsymbol{P}^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.39 & 0.61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.48 & 0.52 \\ 0.39 & 0.61 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4332 & 0.5668 \\ 0.4251 & 0.5749 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Buradan

$$p^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4332 & 0.5668 \\ 0.4251 & 0.5749 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4316 & 0.5684 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

*b* ) Denklem (2.136) dan,

$$p^{(8)} = p^{(0)} P^{(8)}$$

olarak yazılır, burada

$$P^{(8)} = P^{(4)} P^{(4)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4332 & 0.5668 \\ 0.4251 & 0.5749 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4332 & 0.5668 \\ 0.4251 & 0.5749 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4286 & 0.5714 \\ 0.4285 & 0.5715 \end{bmatrix}$$

olup, buradan

$$p^{(8)} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4286 & 0.5714 \\ 0.4285 & 0.5715 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4286 & 0.5714 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Bu örnekte, görülen ilginç şeylerden biri $P^{(8)}$ geçiş matrisinin satırları birbirlerine

eşit olmaya meyletmesidir. Bundan başka, $p^{(8)}$ durum ihtimaliyet vektörü, $P^{(8)}$

geçiş matrisinin satırlarına eşit olmaya yönelmiştir. Bu sonuçlarda gösteriyorki,

zaman geçtikçe, mutlak ihtimaliyet, $p^{(0)}$ ile gösterilen başlangıç durum ihtimalin-

den bağımsızdır. Bu nedenle, neticede olarak elde edilen ihtimallere kararlı-hal ihtimalleri denir ve $\pi_j$ cümlesi ile gösterilir, burada,

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_j^{(n)} = \lim_{n \to \infty} P\{X(t_n) = j\} \tag{2.139}$$

Genel olarak, $n$ artarken, $n$-adım geçiş ihtimalinde, başlangıç durumlarının önemi azalmaya meyleder, şöyleki

$$\lim_{n \to \infty} P\{X(t_n) = j | X(t_0) = i\} = \lim_{n \to \infty} P\{X(t_n) = j\} = \Pi_j \tag{2.140}$$

böylece, başlangıç şartlarını göz önüne almadan, $n$-adım geçiş ihtimalinden, şartsız kararlı-hal ihtimal dağılımı elde edebilir. Bu nedenle,

$$\boldsymbol{p}^{(n)} = \boldsymbol{p}^{(n-1)} \boldsymbol{P} \tag{2.141}$$

veya

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{P}^{(n)} = \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{P}^{(n-1)} \boldsymbol{P} \tag{2.142}$$

olur, buradan

$$\Pi = \Pi \boldsymbol{P} \tag{2.143}$$

yazılır, burada

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_k \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_k \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_k \end{bmatrix} \tag{2.144}$$

dir. $\Pi$ matrisinin satırları birbirine özdeş (eşit) olup her satırı,

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \cdots & \pi_k \end{bmatrix} \tag{2.145}$$

şeklinde bir satır vektörüdür.

$\Pi$ satır vektörünün transpozesi, $\Pi^t$ olarak gösterilen bir sütun vektörü olup, (2.143) denklemi de, aşağıdaki gibi ifade edilebilen lineer denklemler cümlesidir.

$$\Pi^t = P^{(t)}\,\Pi^{(t)} \tag{2.146}$$

(2.143) veya (2.146) denklemini çözebilmek için, başka bir deyişle, $\pi_i$ lerin herbirinin değerini bulabilmek için ek bir denkleme daha ihtiyaç vardır.
Bu denkleme ***normalleştirme denklemi*** denir ve aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sum_{\text{tüm } i \text{ ler}} \pi_i \tag{2.147}$$

## 2.5.2. *MARKOV ZİNCİRİNDE DURUMLARIN SINIFLANDIRILMASI*

$i$ ve $j$ gibi iki durum ilişkili ise, $i \sim j$ şeklinde gösterilir, eğer birinden diğeri kolayca bulunuyorsa, başka bir deyişle, eğer bazı ardışık mümkün geçişler varsa işlem $i$ halinden $j$ haline geçişlidir denir.
Bir kapalı durum cümlesi öyle bir cümledirki eğer sisteme, bir kez bu cümlenin durumlarından birinde kalındığında, cümlede belirsiz kalınırsa, başka bir deyişle, bir kere kapalı cümleye girildiğinde, çıkılamıyorsa, bu cümleye kapalı cümle denir. Bu nedenle, durumların ergodik cümlesi öyle bir cümledirki, bütün durumlar ilişkili ve bir kez girildiğinde çıkmak mümkün değildir. Şüphesiz, bir ergodik durum, ergodik cümlenin bir elemanıdır. Bir durum eğer ergodik değilse geçicidir denir. Eğer kapalı cümlenin tek bir durumu varsa buna yutucu durum denir. Buradan bir durumun yutucu olabilmesi için yalnız ve yalnız $p_{ii} = 1$ şartını sağlaması gerekir.

## 2.5.3. *KARARLI-HAL İHTİMALİNİ TESBİT ETMEK İÇİN DURUM-GEÇİŞ MODELİNİN GELİŞTİRİLMESİ*

Markov tekniği kararlı hal ihtimalin tesbitinde kullanılabilir. Bu bölümde verilen modelin temelini Koval ve Billinton tarafından geliştirilmiş bölge-kol tekniği teşkil edecektir.
Bir markoviyan modelinde verilen işlemin indirgenemez ve bütün durumların ergodik olduğunu farzederek, ***kararlı-hal ihtimalini*** tesbit etmek için aşağıdaki lineer denklem takımı yazılabilir.

$$\pi_i = \lim_{t\to\infty} p_i(t) \qquad (2.148)$$

Buradan haraketle, bir ***tek-elemanın durum denklemi*** diffiransiyel denklem biçiminde aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} P_0'(t) \\ P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\lambda+\hat{n}) & \hat{m} & \mu & 0 \\ \hat{n} & -(\hat{m}+\lambda') & 0 & \mu' \\ \lambda & 0 & -(\mu+\hat{n}) & \hat{m} \\ 0 & \lambda' & \hat{n} & -(\mu'+\hat{m}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{bmatrix} \qquad (2.149)$$

Burada

$\lambda$ = normal hava şartlarında elemanın arıza oranı
$\mu$ = normal hava şartlarında elemanın tamir oranı
$\lambda'$ = kötü hava şartlarında elemanın arıza oranı
$\mu'$ = kötü hava şartlarında elemanın tamir oranı
ayrıca

$$\hat{n} = \frac{1}{N} \qquad (2.150)$$

ve

$$\hat{m} = \frac{1}{S} \qquad (2.151)$$

dir. Burada

$N$ = normal hava şartlarında beklenen süre
$S$ = kötü hava şartlarında beklenen süre

dir. (2.148) eşitliği matris şeklinde

$$\left[\frac{dP(t)}{dt}\right] = \boldsymbol{P(t)\Lambda} \qquad (2.152)$$

olarak yazılabilir. Burada

$\left[\dfrac{dP(t)}{dt}\right]$ = $( i, j )$ 'yinci elemanı, $\dfrac{dp_{ij}(t)}{dt}$ olan matris

$P(t)$= $( i, j )$ 'yinci elemanı, $p_{ij}(t)$ olan matris

$\Lambda$= $( i, j )$ 'yinci elemanı, $\lambda_{ij}$ olan matris

olup, (2.152) matris denkleminin elemanları

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_k p_{ik}(t)\lambda_{kj} \tag{2.153}$$

veya

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lim_{t\to\infty} \sum_k p_{ik}(t)\lambda_{kj} \tag{2.154}$$

olup bu eşitlikler aşağıda ifade edilen formüllerin varlığı sonucu yazılmıştır. .

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) \tag{2.155}$$

$$\frac{d}{dt} \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \sum_k \lim_{t\to\infty} p_{ik}(t)\lambda_{kj} \tag{2.156}$$

veya

$$\frac{d\pi_j}{dt} = \sum_k \pi_k \lambda_{kj} \tag{2.157}$$

Sabitlerin türevi sıfır olduğundan

$$\frac{d\pi_j}{dt} = 0 \tag{2.158}$$

yazılır ve (2.157) denklemi

$$0 = \sum_k \pi_k \lambda_{kj} \tag{2.159}$$

veya matris şeklinde

$$0 = \Pi \Lambda \tag{2.160}$$

olarak yazılır, burada

$0$ = sıfır satır vektörü
$\Lambda$ = geçiş oranları matrisi
$\Pi$ = kararlı-hal ihtimalleri satır vektörüdür.

(2.160) matris şeklindeki eşitlikler lineer bağımlı olup, ek bir denkleme gerek vardır, o da ***normalleştirme denklemi*** olup, bilindiği gibi

$$\sum \pi_i = 1 \tag{2.161}$$

dir.
$\Lambda$ matrisi

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.162}$$

olarak yazılabilir, burada

$\lambda_{ij} = -d_i$ , $i=j$ ise, buna, $i$. durumdan haraket oranı diye tanımlanır.
$\lambda_{ij} = e_{ij}$ , $i \neq j$ ise, buna, $i$. durumdan $j$. duruma giriş oranı diye tanımlanır.

Bundan dolayı, (2.162) matris eşitliği

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -d_1 & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & -d_2 & \cdots & e_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & -d_n \end{bmatrix} \tag{2.163}$$

olarak, benzer şekilde,

$$\Pi = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \tag{2.164}$$

olarak ifade edilebilir. (2.163) ve (2.164) eşitliklerini (2.160) eşitliğinde yerine yazarak

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_1 & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & -d_2 & \cdots & e_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & -d_n \end{bmatrix} \tag{2.165}$$

veya

$$\begin{aligned} 0 &= -p_1 d_1 \quad + \quad p_2 e_{21} \quad + \quad \cdots \quad + \quad p_n e_{n1} \\ 0 &= p_1 e_{12} \quad + \quad -p_2 d_2 \quad + \quad \cdots \quad + \quad p_n e_{n2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= p_1 e_{1n} \quad + \quad p_2 e_{2n} \quad + \quad \cdots \quad + \quad -p_n d_n \end{aligned} \tag{2.166}$$

elde edilir. Buradan

$$0 = -p_i \sum d_i + \sum p_j e_{ij} \tag{2.167}$$

veya

$$p_i \sum d_i = \sum p_j e_{ij} \tag{2.168}$$

elde edilir. Aynı zamanda,

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1 \tag{2.169}$$

veya

$$p_1 \left( 1 + \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_3}{p_1} + \cdots + \frac{p_n}{p_1} \right) = 1 \tag{2.170}$$

olur.

Koval ve Billintion, her bir durumun kararlı-hal ihtimalini (2.168) ve (2.170) denklemleri ile hesaplanmasını, $i$.'yinci bölge ve $j$.'yinci kol'un toplam arıza oranı ve ortalama tamir oranını kolayca hesaplanabileceğini önermişlerdir. Bu oranların etkileri, sistemin diğer kısımlarındaki kesintilerde de göz önüne alınır. $i$. 'yinci bölge ve $j$. 'yinci koldaki ***toplam arıza oranı***, Koval ve Billintion tarafından

$$\lambda_{ij} = \lambda_s + \sum RIA(ij,k) \times \lambda_l \tag{2.171}$$

olarak verilmiştir; burada

$\lambda_{ij}$ = . $i$. bölge ve $j$. koldaki toplam arıza oranı
$\lambda_s$ = kaynağın toplam arıza oranı
$\sum RIA(ij,k)$ = tanıma ve yalıtım sıra katsayısı
$l$ = arızalı bölge-kol sıra katsayısı = FZB($k$)

Benzer şekilde, her bir $i$.'yinci bölge ve $j$.'yinci koldaki ortalama ***bozuk kalma***, başka bir şekilde söylemek gerekirse ***tamir süresi***

$$r_{ij} = \frac{\sum DTA(ij,k) \times \lambda_l}{\lambda_{ijT}} \tag{2.172}$$

veya

$$r_{ij} = \frac{i.\text{ bölge } j.\text{ dal'ın yıllık toplam devre dışı kalma zamanı}}{i.\text{ bölge } j.\text{ dal'ın toplam arıza oranı}} \tag{2.173}$$

olarak verilmiştir, burada
$r_{ij}$ = her bir $i$. bölge ve $j$. kol'un ortalama tamir süresi
$\sum DTA(ij,k)$ = bozuk kalma sıra katsayısı
l = bozuk bölge-kol sıra katsayısı
dır.

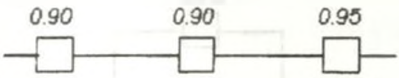
## *PROBLEMLER*

2.1. $A_{sis} = \bar{m}_{sis} \cdot \bar{f}_{sis}$ eşitliğini kullanarak, iki elemanlı bir sistemin ortalama tamir süresi,

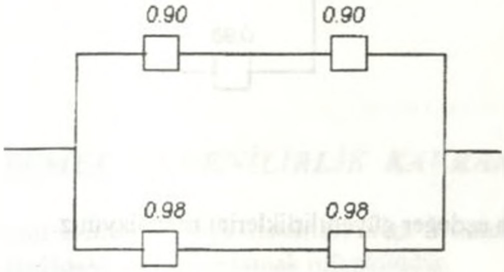
$$\bar{r}_{sis} = \frac{(\bar{m}_1 + \bar{r}_1)(\bar{m}_2 + \bar{r}_2) - \bar{m}_1\bar{m}_2}{\bar{m}_1 + \bar{m}_2}$$

olduğunu ispatlayınız.

2.2 Şekildeki sistemlerin eşdeğer güvenilirliklerini hesaplayınız.

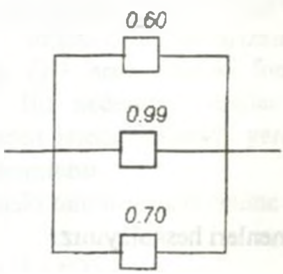


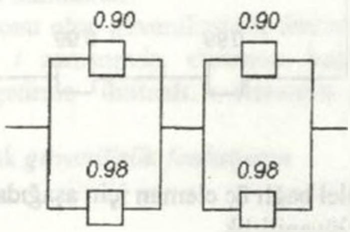

*a* )




*b* )

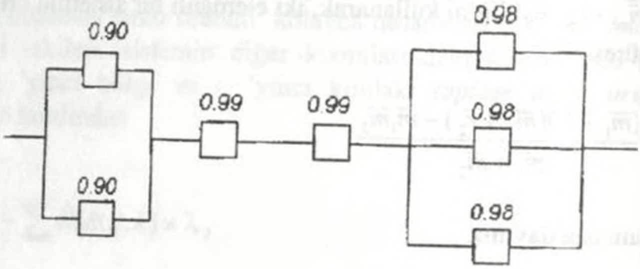
2.3 Şekildeki sistemlerin eşdeğer güvenilirliklerini hesaplayınız.



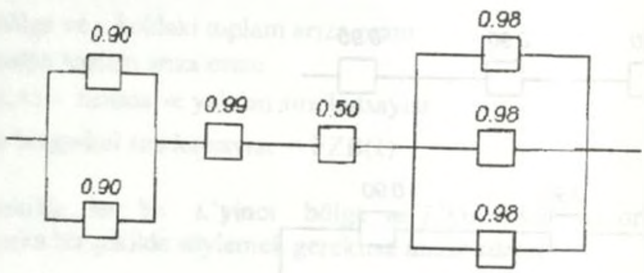




*a* ) *b* )

2.4 Şekildeki sistemlerin eşdeğer güvenilirliklerini hesaplayınız.

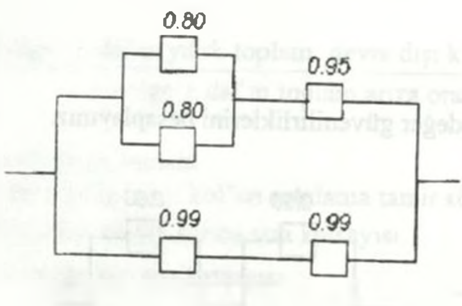



*a* )




*b* )

2.5 Şekildeki sistemlerin eşdeğer güvenilirliklerini hesaplayınız.




2.6 Paralel bağlı üç eleman için aşağıda istenenleri hesaplayınız.
*a* ) Güvenilirlik
*b* ) MTTF
*c* ) Kullanılabilirlik
*d* ) Kaza oranı

# BÖLÜM 3

# İLETİM SİSTEMİNDE GÜVENİLİRLİK

## 3.1. TEMEL GÜVENİLİRLİK KAVRAMLARI

Verilen bir elemanın (veya sistemin) ***arıza ihtimalini*** zamanın bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür.

$$P(T \leq t) = F(t) \qquad t \geq 0 \tag{3.1}$$

Burada
$T$ = arıza zamanını temsil eden bir raslantı değişkenidir.
$F(t) = t$ anında elemanın arızalanma ihtimalidir.
Burada, $F(t)$ arıza dağılım fonksiyonu olup güvenilirsizlik fonksiyonu olarak bilinir. Bu nedenle, verilen bir $t$ zamanında, elemanın bozuk olmayıp kendinden istenen görevi yerine getirme ihtimalı, o elamanın güvenilirliği diye tanımlanır.
Yukardaki tanımları göz önüne alarak ***güvenilirlik fonksiyonu***

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - F(t) \\ &= P(T > t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak yazılabilir. Burada
$R(t)$ = güvenilirlik fonksiyonu

$F(t)$ = güvenilirsizlik fonksiyonu

İşaret edilmelidirki $R(t)$ güvenilirlik fonksiyonu, $t$ zamanında elemanın çalışıyor olma ihtimalini temsil eder.

Diğer taraftan, eğer $T$ ***arıza zamanı raslantı değişkenin yoğunluk fonksiyonu*** $f(t)$ ise, (3.2) denkleminden

$$
\begin{aligned}
R(t) &= 1 - F(t) \\
&= 1 - \int_0^t f(t)dt \\
&= \int_t^\infty f(t)dt
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

yazılır. $(t_1, t_2)$ gibi verilen belirli bir zaman aralığında verilen bir ***sistemin arıza ihtimalini*** güvenilirsizlik fonksiyonu terimleri ile,

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{t_2} f(t)dt - \int_{-\infty}^{t_1} f(t)dt \\
&= F(t_2) - F(t_1)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

yada güvenilirlik fonksiyonu terimleri ile,

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt &= \int_{t_1}^{\infty} f(t)dt - \int_{t_2}^{\infty} f(t)dt \\
&= R(t_1) - R(t_2)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

olarak verilir.Aşağıda, vuku bulan arızanın, verilen bir $(t_1, t_2)$ zaman aralığındaki oranı, bu zaman aralığındaki, kaza oranı veya arıza oranı olarak tanımlanır. Buradaki, ihtimalde, arıza birim zamanda olmuştur, $t_1$ anından önce arıza olmamıştır, yani $t_1$ anı zaman başlangıcı olarak seçilmiştir. Buna göre

$$
h(t) = \frac{R(t_1) - R(t_2)}{(t_2 - t_1)R(t_1)}
\tag{3.6}
$$

dir. Eğer zaman aralığını aşağıdaki gibi tanımlarsak

$t_1 = t$

$t_2 = t + \Delta t$

veya

$\Delta t = t_2 - t_1$
bundan sonra ***kaza oranı***, ***anlık arıza oranı*** olup,

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left\{ bir\ elemanın\ yaşı\ t,\ bozulma\ süresi\ \Delta t \middle|\ t\ bozulmadan\ kaldığı\ süre \right\}}{\Delta t} \tag{3.7}$$

veya

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t \cdot R(t)}.$$

$$= \frac{1}{R(t)} \left[ -\frac{d}{dt} R(t) \right]$$

$$= \frac{f(t)}{R(t)} \tag{3.8}$$

olarak yazılır. Burada

$f(t) = -\dfrac{dR(t)}{dt}$ =ihtimaliyet yoğunluk fonksiyonu

dur.
(3.3) denklemini (3.8) eşitliğinde yerine yazarsak

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \tag{3.9}$$

olur. Buradan

$$h(t)dt = \frac{dF(t)}{1 - F(t)} \tag{3.10}$$

yada

$$\int_0^t h(t)dt = -\ln[1 - F(t)]_0^t \tag{3.11}$$

Sonuç olarak

$$\ln\frac{1-F(t)}{1-F(0)}=-\int_0^t h(t)dt \tag{3.12}$$

veya

$$1-F(t)=\exp\left[-\int_0^t h(t)dt\right] \tag{3.13}$$

yazılır.
(3.13) eşitliğinin türevini alarak veya (3.13) eşitliğini (3.9) denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$f(t)=h(t)\exp\left[-\int_0^t h(t)dt\right] \tag{3.14}$$

(3.3) eşitliğini (3.13) denkleminde kullanarak

$$R(t)=\exp\left[-\int_0^t h(t)dt\right] \tag{3.15}$$

Burada

$$\exp[\ ]=e^{[\ ]} \tag{3.16}$$

dir.

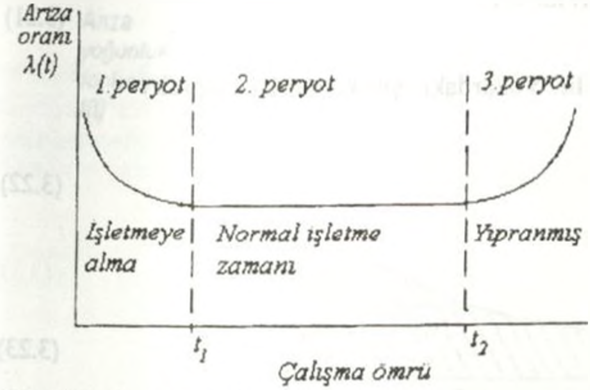
$$\lambda(t)=h(t) \tag{3.17}$$

kabulü ile

$$R(t)=\exp\left[-\int_0^t \lambda(t)dt\right] \tag{3.18}$$

yazılır. bu fonksiyona genel güvenilirlik fonksiyonu denir.Dikkat edilmelidirki $\lambda(t)$ arızası bir geçiş oranı olup elemanın normal çalışma durumu ve arızalı hal arasındaki geçiş sayısı ile ilgilidir. Verilen bir zaman peryotunda olan arıza ve bunların sayısı ile arızaya maruz eleman sayısının fonksiyonu olan $\lambda(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\lambda(t)=\frac{\textit{birim zamanda arıza sayısı}}{\textit{arızaya maruz kalmış eleman sayısı}}$$




**Şekil 3.1. *Kaza fonksiyonu***

Farzedelimki kaza oranı zamandan bağımsız, yani

$h(t)=\lambda$ arızalar/ birim zaman

olsun, bu durumda ***arıza yoğunluk fonksiyonu***

$$f(t)=\lambda\ e^{-\lambda t} \tag{3.19}$$

olarak yazılabilir, ***güvenilirlik fonksiyonu*** ise

$$R(t)=\frac{f(t)}{h(t)}$$

$$= e^{-\lambda t} \tag{3.20}$$

olarak ifade edilir.

***Şekil 3.1.*** de tipik bir kaza fonksiyonu eğrisi görülmektedir. Eğride arıza oranı zamanın fonksiyonu olarak çizilmiş olup, üç ayrı bölümden meydana gelmiştir. İlk peryot deneme çalışmalarına başlama peryotudur. Bu peryotta arıza oranları azalma eğilimindedir. Bu peryotta arızalar üretim ve dizayn dan kaynaklanmakta olup, arızalar bulunup giderilir. İkinci peryot normal çalışma peryotu, faydalı çalışma peryotudur. Arıza oranları bu peryotta sabittir, ve raslantı arızası olarak adlandırılır. Üçüncü peryot yaşlanma peryotu olup, elemanın yaşlanmasına bağlı olarak arıza oranı artar.

Buna göre,

$$\int_0^t f(t)dt + \int_t^\infty f(t)dt = \int_0^\infty f(t)dt = 1 \qquad (3.21)$$

eşitliğinin varlığı gösterilebilir. Yukardaki eşitlikten faydalanarak

$$\int_0^t f(t)dt = 1 - \int_t^\infty f(t)dt \qquad (3.22)$$

denklemi yazılır. Burada

$$R(t) = \int_t^\infty f(t)dt \qquad (3.23)$$

ve

$$R(t)+Q(t)=1 \qquad (3.24)$$

dir. Bu nedenle ***güvenilirsizlik***

$$Q(t)=1- R(t)$$

$$= 1 - \int_t^\infty f(t)dt$$

$$= \int_0^t f(t)dt \qquad (3.25)$$

olarak tanımlanır.

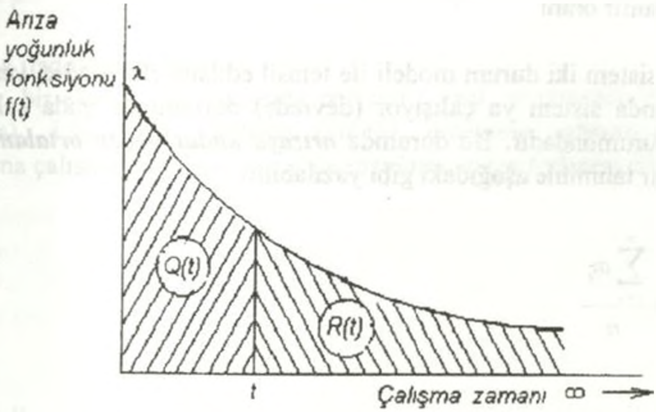
Güvenilirlik ve güvenilirsizlik arasındaki ilişki ***Şekil 3.2*** de görülmektedir.

Bir ***elemanın beklenen ömrü***, elemanın serviste kalacağı ve görevini başarıyla icra edeceği zamandır. Bu,

$$E(T) = \int_0^\infty t\, f(t)dt \qquad (3.26)$$

veya

$$E(T) = \int_0^\infty \left\{ \exp\left[ -\int_0^t \lambda(t)dt \right] \right\} dt \qquad (3.27)$$




***Şekil 3.2. Kaza fonksiyonu***

olarak ifade edilir, fakat eğer ***arıza oranı*** sabit ise

$$E(T) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \tag{3.28}$$

olur.

Eğer eleman, bakım ve onarımla yenilenemiyorsa, fakat sadece yeni bir eleman eskisi ile değiştirilerek yenileniyorsa, ***beklenen ömre, arızaya kadar ortalama süre*** olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$MTTF = \bar{m} = \frac{1}{\lambda} \tag{3.29}$$

Burada λ=sabit arıza oranıdır.

Bununla birlikte, eğer eleman bakım ve onarımla yenileniyorsa, faydalı ömür, ***arızalar arası ortalama süre*** (zaman) olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$MTBF = \bar{T} = \bar{m} + \bar{r} \tag{3.30}$$

Burada

$\bar{T}$= ortalama sistemin çalışma peryotu

$\bar{m}$= arızaya kadar geçen ortalama süre

$\bar{r}$ = ortalama onarım süresi (MITR), $=1/\mu$
$\mu$ = ortalama tamir oranı
dır.

Farzedelimki sistem iki durum modeli ile temsil edilsin. Buna göre, verilen bir zaman aralığında sistem ya çalışıyor (devrede) durumunda yada çalışmıyor (devre dışı) durumundadır. Bu durumda ***arızaya kadar geçen ortalama süre***, tatmin edici bir tahminle aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$MTTF = \bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n} \qquad (3.31)$$

Burada
$\bar{m}$ = arızaya kadar geçen ortalama süre
$m_i$ = $i$ 'yinci çalışma peryotunda arızaya kadar gözlenen süre
$n$ = toplam çalışma peryotu sayısı

Benzer şekilde, ***ortalama onarım süresi***, tatmin edici bir tahminle aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$MTTR = \bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n} \qquad (3.32)$$

Burada
$\bar{r}$ = ortalama onarım süresi
$r_i$ = $i$ 'yinci çalışma peryotunda gözlenen onarım süresi
$n$ = toplam çalışma peryotu sayısı

Buradan, (3.30) denklemi

$$MTBF = MTTF + MTTR \qquad (3.33)$$

şeklinde ifade edilebilir.
(3.30) denklemi değişik bir şekilde,

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \qquad (3.34)$$

veya

$$\overline{T}=\frac{\lambda+\mu}{\lambda\,\mu} \tag{3.35}$$

olarakta ifade edilebilir.

Burada, bir elemanın bir çalışma peryotu ( yani, arızalanma, tamir, ve tekrar çalışma) için geçen ortalama zamana, ***ortalama çalışma peryotu*** denir. Ortalama çalışma peryotunun tersine ***ortalama arıza frekansı*** denir ve

$$\overline{f}=\frac{1}{\overline{T}} \tag{3.36}$$

veya

$$\overline{f}=\frac{\lambda\,\mu}{\lambda+\mu} \tag{3.37}$$

olarak gösterilir.

Alternatif olarak, iki durumlu bir modelde eleman, ya çalışır( servis için uygun) yada bozuk (servise uygun değil) tur. Buda aşağıdaki gibi gösterilir.

$$A+U=1 \tag{3.38}$$

Burada

$A$ = elemanın kullanılabilirliği; örnek: bu zaman diliminde eleman devrede, çalışıyor.

$U=\overline{A}$ = elemanın kullanılamazlığı; örnek: bu zaman diliminde eleman bozuk

Burada, $t$ zamanı sonsuza giderken, kullanılabilirlik

$$A\overset{\Delta}{=}\frac{\overline{m}}{\overline{T}} \tag{3.39}$$

veya

$$A=\frac{MTTF}{MTBF} \tag{3.40}$$

olur. (3.33) denklemi (3.40) eşitliğinde kullanılırsa,

$$A = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} \tag{3.41}$$

veya

$$A = \frac{\bar{m}}{\bar{m} + \bar{r}} \tag{3.42}$$

yada

$$A = \frac{\mu}{\mu + \lambda} \tag{3.43}$$

elde edilir.

Buradan, ***kullanılamazlık***(kullanılabilirlikte olmayış)

$$U \stackrel{\Delta}{=} 1 - A \tag{3.44}$$

şeklinde

$$U = \frac{\bar{r}}{\bar{T}} \tag{3.45}$$

veya

$$U = \frac{\bar{r}}{\bar{r} + \bar{m}} \tag{3.46}$$

yada

$$U = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \tag{3.47}$$

olarak yazılabilir.

### 3.2.1. SERI SISTEMLER

Bir takım elemanlardan meydana gelen bir sistemde, sistemin başarılı bir şekilde çalışması için, eğer bütün elemanların güvenilirlik şartlarında çalışması gerekiyorsa, ve sistemin bozulması için, eğer yalnız bir elemanın çalışmaması yetiyorsa böyle bir sisteme ***seri sistem*** denir. ***Şekil 3.3a.*** da iki bağımsız elemanın seri bağlanmasından meydana gelen seri bir sistemin blok diyagramı görülmektedir. Burada, sistemin seri bir sistem olabilmesi ve kendinden istenen fonksiyonları yerine getirebilmesi için, her iki elemanında başarılı bir şekilde çalışması gerekir. Bu nedenle, seri sistemde, bir elemanın görevini üslenen başka bir eleman bulunmaz. Sistemin başarılı bir şekilde çalışmasının ihtimali olarak ***güvenilirlik,***

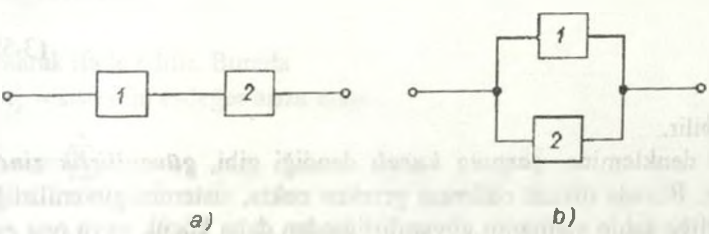
$$R_{sis}=P(E_1 \cap E_2) \tag{3.48}$$

veya, elemanların bağımsız oldukları kabulü ile

$$R_{sis}=P(E_1)P(E_2) \tag{3.49}$$

olarak ifade edilir.
Buradan

$$R_{sis}=R_1 \times R_2 \tag{3.50}$$




***Şekil 3.3. İki elemanlı bir sistemin blok diyagramı***
***a )seri bağlı*** ***b) paralel bağlı***

veya

$$R_{sis} = \prod_{i=1}^{2} R_i \tag{3.51}$$

olarak yazılır. Burada

$E_i$ = *i*. elemanın başarılı bir şekilde çalıştığı olay
$R_i = P(E_i)$ = *i*. elemanın güvenilirliği
$R_{sis}$ =sistemin güvenilirliği
dir.

Yukardaki düşünce tarzını *n* tane seri bağlı bağımsız elemandan meydana gelen sistemin güvenilirliği için genelleştirmek istenirse

$$R_{sis}=P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \ldots \cap E_n) \tag{3.52}$$

veya

$$R_{sis}=P(E_1)P(E_2)P(E_3)\ldots P(E_n) \tag{3.53}$$

yada

$$R_{sis}=R_1 . R_2 . R_3 \ldots R_n \tag{3.54}$$

şeklinde yazılabileceği gibi kapalı formda

$$R_{sis} = \prod_{i=1}^{n} R_i \tag{3.55}$$

olarakta yazılabilir.
Burada, (3.55) denklemine, ***çarpma kuralı*** dendiği gibi, ***güvenilirlik zincir kuralı*** da denir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, sistemin güvenilirliği, en az güvenilirliğe sahip elemanın güvenilirliğinden daha küçük veya ona eşit olmasıdır. Aşağıda, son yazdığımız cümlenin matematiksel olarak ifadesi görülmektedir.

$$R_{sis} \le \min_i \{R_i\} \tag{3.56}$$

Çarpım kuralına göre, eleman sayısı arttıkca, seri bir sistemin güvenilirliği azalır. Bundan dolayı, seri sistemin güvenilirliği, seri eleman sayısının ve eleman güvenilirlik seviyesinin fonksiyonudur. Alternatif olarak, seri bir sistemin ***güvenilirsizliği*** (veya ***arıza***) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Q_{sis} = 1 - R_{sis} \tag{3.57}$$

veya

$$Q_{sis} = 1 - \prod_{i=1}^{n} R_i \tag{3.58}$$

(3.55) denklemi ile verilen çarpım kuralı, zamana-bağımlı ve zamandan-bağımsız ihtimal hesabı için uygulanabileceğine dikkat edilmelidir. Zamana-bağımlı ihtimal durumunda, eğer arıza oranı $\lambda_i$ olan bir elemanın güvenilirliği üstel(negatif) dağılımla temsil edilebiliniyorsa, ***sistem güvenilirliği***

$$R_{sis}(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp(-\lambda_i t) \tag{3.59}$$

veya

$$R_{sis}(t) = \exp(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t) \tag{3.60}$$

yada

$$R_{sis}(t) = \exp(-\lambda_e t) \tag{3.61}$$

olarak ifade edilir. Burada

$\lambda_e$ = sistemin eşdeğer arıza oranı

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{3.62}$$

dır.

Alternatif olarak, eğer bir elemanın arıza ihtimali $q$ ve verilen seri sistemde $n$ tane eleman için aynı değere sahipse,

$$R_{sis} = (1-q)^n \tag{3.63}$$

olur.Binom açınımına göre,

$$R_{ss} = 1 + n(-q)^1 + \frac{n(n-1)}{2}(-q)^2 + \cdots + (-q)^n \tag{3.64}$$

şeklinde yazılabilir, burada
$q$ = elemanın arıza ihtimali
$n$ = sistemde seri bağlı olan toplam eleman sayısı
dir.

Eğer elemanın arıza ihtimali $q$ küçük ise, ***sistem güvenilirliği*** yaklaşık olarak

$$R_{ss} \cong 1 - nq \tag{3.65}$$

olur. Diğer taraftan, elemanların arıza ihtimalleri, yani $q_i$ 'ler, birbirlerinden farklı ise, güvenilirliğin yaklaşık formülü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$R_{ss} \cong 1 - \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{3.66}$$

### *3.2.2. PARALEL SİSTEMLER*

Bir takım elemanlardan meydana gelen bir sistemde, sistemin başarılı bir şekilde çalışması için, eğer yalnız bir elemanın güvenilirlik şartlarında çalışması yetiyorsa, veya sistemin bozulması için, eğer tüm elemanların çalışmaması gerekiyorsa böyle bir sisteme ***paralel sistem*** denir. Burada sistemin paralel bir sistem olabilmesi ve kendinden istenen fonksiyonları yerine getirebilmesi için, yalnız bir elemanında başarılı bir şekilde çalışması yeter. Bu nedenle, paralel sistemde, bir elemanın görevini üslenen başka bir eleman vardır. ***Şekil 3.3b.*** de iki bağımsız elemanın paralel bağlanmasından meydana gelen ***paralel bir sistemin blok diyagramı*** görülmektedir. Bu sistemin her iki elemanı aynı anda arızalı iken sistemin güvenilirliği, güvenilirsizliğe sebep olur ve

$$Q_{ss} = P\left[\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2\right] \tag{3.67}$$

veya

$$Q_{sis} = P(\overline{E}_1)(\overline{E}_2) \tag{3.68}$$

olarak yazılır ve elemanlar bağımsız olduklarından,

$$Q_{sis} = Q_1 Q_2 \tag{3.69}$$

veya

$$Q_{sis} = \prod_{i=1}^{2} Q_i \tag{3.70}$$

yada

$$Q_{sis} = \prod_{i=1}^{2}(1 - R_i) \tag{3.71}$$

olur. Burada

$\overline{E}_i$ = $i$. elemanın arızalanma olayı

$Q_i = P(\overline{E}_i)$ = $i$. elemanın güvenilirsizliği

$Q_{sis}$ = sistemin güvenilirsizliği

ise, sistemin güvenilirliği

$$R_{sis} = 1 - Q_{sis} \tag{3.72}$$

veya

$$R_{sis} = 1 - \prod_{i=1}^{2}(1 - R_i) \tag{3.73}$$

olur. $n$ tane paralel bağımsız elemanlı ***sistemin güvenilirsizliği***

$$Q_{sis} = P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3 \cap \cdots \cap \overline{E}_n) \tag{3.74}$$

veya

$$Q_{sis} = P(\overline{E}_1)P(\overline{E}_2)P(\overline{E}_3)\cdots P(\overline{E}_n) \tag{3.75}$$

yada

$$Q_{ns} = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdots Q_n = \prod_{i=1}^{n} Q_i \qquad (3.76)$$

olarak ifade edilir. Buradan, sistemin güvenilirliği

$$R_{ns} = 1 - Q_{ns}$$

$$= 1 - [Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdots Q_n]$$

$$= 1 - [(1 - R_1)(1 - R_2)(1 - R_3) \cdots (1 - R_n)]$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} Q_i$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i) \qquad (3.77)$$

olarak ifade edilir.

Burada, paralel kol sayısı arttıkça sistemin güvenilirsizliği azalır. Alternatif olarak, paralel kol sayısı arttıkça sistemin güvenilirliği artar. (3.77) eşitliği zamana-bağımlı ve zamandan-bağımsız ihtimaliyetin her ikisinede uygulanabileceğine burada işaret edelim. Zamana-bağımlı ihtimaliyet halinde, arıza oranı $\lambda_i$ olan elemanın güvenilirsizliği üstel bir dağılımla temsil etmek mümkün ise, sistemin güvenilirsizliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Q_{ns}(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_i t}) \qquad (3.78)$$

## 3.2.3. SERİ-PARALEL SİSTEM KOMBİNASYONLARI

Basit seri-paralel bağlı sistemler indirgeme tekniği kullanılarak(devre indirgeme tekniklerinde yapıldığı gibi) analiz edilebilir. İndirgeme tekniği seri ve paralel elemanların eşdeğerleri alınarak, seri ve paralel olarak bağlı sistemde tek bir eşdeğer eleman kalıncaya kadar devam edilir. Örnek olarak, farzedelimki seri-paralel sistem kombinazonunda, *m* tane paralel kol ve, her bir paralel kolda *n* eleman bulunsun. Böyle bir sisteme paralel-seri sistem denir. ***Sistemin güvenilirliği*** ise

$$R_{sis} = 1 - (1 - R^n)^m \tag{3.79}$$

dir. Burada

$R_{sis}$ = sistemin eşdeğer güvenilirliği

$R^n$ = her paralel kolun eşdeğer güvenilirliği

$R$ = elemanın güvenilirliği

$n$ = her koldaki seri eleman sayısı

$m$ = paralel kol sayısı

dır.

Diğer taraftan, farzedelimki seri-paralel sistem kombinazonunda, $n$ tane seri birim ve her bir birimde de $m$ tane paralel eleman bulunsun. Böyle bir sisteme seri- paralel sistem denir. Bu sistemin ***eşdeğer güvenilirliği***

$$R_{sis} = 1 - (1 - R^m)^n \tag{3.80}$$

olur. Burada

$R_{sis}$ = sistemin eşdeğer güvenilirliği

$1 - (1 - R^m)$ = paralel bağlı bir ünitenin eşdeğer güvenilirliği

$R$ = elemanın güvenilirliği

$m$ = bir paralel ünitedeki toplam eleman sayısı

$n$ = toplam ünite sayısı

Seri-paralel sistemin güvenilirliği , paralel-seri sistemin güvenilirliğinden daha yüksek bir sistem güvenilirliğine sahip olduğu burada işaret edilmelidir.

## 3.3. TAMİR EDİLEBİLEN ELEMANLI SİSTEMLER

Bölüm 3.2 de sunulan seri ve paralel sistemlerdeki elemanların tamir edilemez oldukları varsayılmıştır. Bununla birlikte, en gerçekçi bir yaklaşım, elemanların bağımsız ve tamir edilebilir olacaklarının varsayımı olacaktır.

### 3.3.1. TAMİR EDİLEBİLEN SERİ ELEMANLAR

***Şekil 3.3a.*** daki iki elemanlı seri sistemi göz önüne alalım. Bu elemanların tamir edilebilir ve bağımsız olduklarını farzedelim. Bu nedenle, sistemin kullanılabilirliği veya ***kararlı-hal çalışma*** (başarı) ***ihtimali*** aşağıdaki gibi yazılabilir. .

$$A_{sis} = A_1 \,.\, A_2 \tag{3.81}$$

Burada
$A_{sis}$ = sistemin kullanılabilirliği
$A_1$ = 1. elemanın kullanılabilirliği
$A_2$ =3. elemanın kullanılabilirliği
dir.

$$A_1 = \frac{\overline{m}_1}{\overline{m}_1 + \overline{r}_1} \tag{3.82}$$

ve

$$A_2 = \frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_2 + \overline{r}_2} \tag{3.83}$$

iken, ***sistemin kullanılabilirliği***

$$A_{sis} = \frac{\overline{m}_1}{\overline{m}_1 + \overline{r}_1} \cdot \frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_2 + \overline{r}_2} \tag{3.84}$$

veya

$$A_{sis} = \frac{\overline{m}_{sis}}{\overline{m}_{sis} + \overline{r}_{sis}} \tag{3.85}$$

olarak ifade edilir.Burada
$\overline{m}_1$ =1. eleman için arızaya kadar geçen ortalama süre
$\overline{m}_2$ =3. eleman için arızaya kadar geçen ortalama süre
$\overline{m}_{sis}$ =sistem için arızaya kadar geçen ortalama süre
$\overline{r}_1$ =1. eleman için ortalama onarım süresi
$\overline{r}_2$ =3. eleman için ortalama onarım süresi
$\overline{r}_{sis}$ =sistem için ortalama onarım süresi
Ortalama sistemin arıza frekansı , 1.'inci sistemin arıza frekansı ile 2. inci sistemin kullanılabilirliği (çalışabilirliği) nin çarpımı na, 2. inci sistemin arıza frekansı ile 1. inci sistemin kullanılabilirliği (çalışabilirliği) nin çarpımının eklenmesi ile bulunur.

$$\bar{f}_{sis} = A_2 . \bar{f}_1 + A_1 . \bar{f}_2 \tag{3.86}$$

Burada

$\bar{f}_{ss}$ = sistemin ortalama arıza frekansı

$\bar{f}_i$ = $i$. 'yinci elemanın ortalama arıza frekansı

$A_i$ = $i$. 'yinci elemanın kullanılabilirliği

dir.

$$\bar{f}_i = \frac{1}{\overline{m}_i + \bar{r}_i} \tag{3.87}$$

ve

$$A_i = \frac{\overline{m}_i}{\overline{m}_i + \bar{r}_i} \tag{3.88}$$

iken

$$\bar{f}_{ss} = \frac{1}{\overline{m}_1 + \bar{r}_1}\,\frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_2 + \bar{r}_2} + \frac{1}{\overline{m}_2 + \bar{r}_2}\,\frac{\overline{m}_1}{\overline{m}_1 + \bar{r}_1} \tag{3.89}$$

yazılabilir. (3.85) denkleminden

$$A_{ss} = \overline{m}_{ss} \cdot \bar{f}_{ss} \tag{3.90}$$

elde edilir. İki elemanlı seri bir sistemde ***arızaya kadar geçen ortalama süre***

$$\overline{m}_s = \frac{1}{1/\overline{m}_1 + 1/\overline{m}_2} \tag{3.91}$$

ve $n$ elemanlı seri bir sistemde ***arızaya kadar geçen ortalama süre ise***

$$\overline{m}_s = \frac{1}{1/\overline{m}_1 + 1/\overline{m}_2 + 1/\overline{m}_3 + \cdots + 1/\overline{m}_n} \tag{3.92}$$

olur.

İki elemanlı bir sistemde, arızaya kadar geçen ortalama sürenin karşıtı ***arıza oranı*** olarak tanımlanır ve

$$\lambda_{ss} = \lambda_1 + \lambda_2 \tag{3.93}$$

olur ve $n$ elemanlı bir sistem için ise

$$\lambda_{sis} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n \tag{3.94}$$

olarak yazılır.
Benzer şekilde, iki elemanlı seri bir sistemde, ***ortalama tamir sürenin***

$$\bar{r}_{sis} = \frac{\lambda_1\bar{r}_1 + \lambda_2\bar{r}_2 + (\lambda_1\bar{r}_1)(\lambda_2\bar{r}_2)}{\lambda_{sis}} \tag{3.95}$$

olduğu ve yaklaşık olarak

$$\bar{r}_{sis} = \frac{\lambda_1\bar{r}_1 + \lambda_2\bar{r}_2}{\lambda_{sis}} \tag{3.96}$$

$n$ elemanlı bir sistem içinde

$$\bar{r}_{sis} \cong \frac{\lambda_1\bar{r}_1 + \lambda_2\bar{r}_2 + \lambda_3\bar{r}_3 + \cdots + \lambda_n\bar{r}_n}{\lambda_{sis}} \tag{3.97}$$

veya

$$\bar{r}_{sis} \cong \frac{\lambda_1\bar{r}_1 + \lambda_2\bar{r}_2 + \lambda_3\bar{r}_3 + \cdots + \lambda_n\bar{r}_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} \tag{3.98}$$

olduğu gösterilebilir. Seri bir sistemde toplam ***ortalama devre dışı süresi***

$$\begin{aligned} U_{sis} &= \frac{\bar{r}_{sis}}{\bar{r}_{sis} + 1/\lambda_{sis}} \\ &\cong \lambda_{sis}\bar{r}_{sis} \end{aligned} \tag{3.99}$$

olup, iki elemanlı seri bir sistem için,

$$U_{sis} \cong \lambda_1\bar{r}_1 + \lambda_2\bar{r}_2 \tag{3.100}$$

ve $n$ elemanlı seri bir sistem için ise

$$U_{sis} \cong \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\bar{r}_i \tag{3.101}$$

olur.

## *3.3.2. TAMİR EDİLEBİLEN PARALEL ELEMANLAR*

*Şekil 3.3a.* de görülen iki elemanlı paralel bir sistemi göz önüne alalım. Elemanların bağımsız ve tamir edilebilir olduklarını farzedelim.Buna göre, ***sistemin kullanılamazlığı*** veya ***kararlı-hal arıza ihtimali*** aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U_{sis} = U_1 \cdot U_2 \tag{3.102}$$

Burada
$U_{sis}$ = sistemin kullanılamazlığı
$U_1$ = 1. elemanın kullanılamazlığı
$U_2$ = 3. elemanın kullanılamazlığı
dır.

$$U_1 = 1 - A_1$$
$$= \frac{\lambda_1 \bar{r}_1}{1 + \lambda_1 \bar{r}_1} \tag{3.103}$$

ve

$$U_2 = 1 - A_2$$
$$= \frac{\lambda_2 \bar{r}_2}{1 + \lambda_2 \bar{r}_2} \tag{3.104}$$

olduğundan sistemin ***güvenilirsizliği***

$$U_{sis} = \frac{\lambda_1 \bar{r}_1}{1 + \lambda_1 \bar{r}_1} \frac{\lambda_2 \bar{r}_2}{1 + \lambda_2 \bar{r}_2} \tag{3.105}$$

veya ***toplam ortalama devre dışı süresinin*** yaklaşık değeri

$$U_{sis} \cong \lambda_1 \lambda_2 \bar{r}_1 \bar{r}_2 \tag{3.106}$$

olarak elde edilir.
Bununla birlikte, ***sistemin ortalama arıza frekansı ise***

$$\bar{f}_{sis} = U_2 \bar{f}_1 + U_1 \bar{f}_2 \tag{3.107}$$

şeklinde formüle edilir. Burada

$\bar{f}_i$ = $i$. 'yinci elemanın ortalama arıza frekansı

$U_i$ = $i$. 'yinci elemanın kullanılamazlığı

dır.

$$\bar{f}_1 = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1 \bar{r}_1} \tag{3.108}$$

ve

$$\bar{f}_2 = \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2 \bar{r}_2} \tag{3.109}$$

ise, ***sistemin ortalama arıza frekansı***

$$\bar{f}_{sis} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)}{(1+\lambda_1 \bar{r}_1)(1+\lambda_2 \bar{r}_2)} \tag{3.110}$$

olarak elde edilir.

***Sistemin kullanılamazlığı***

$$U_{sis} = \frac{\bar{r}_{sis}}{\bar{T}_{sis}} \tag{3.111}$$

veya

$$U_{sis} = \bar{r}_{sis} \bar{f}_{sis} \tag{3.112}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burdan

$$\bar{r}_{sis} = \frac{U_{sis}}{\bar{f}_{sis}} \tag{3.113}$$

elde edilir.

(3.105) ve (3.110) eşitliklerini (3.113) te yerine yazarsak, iki elemanlı ***paralel sistemin ortalama tamir süresi***

$$\bar{r}_{sis} = \frac{\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2}{\bar{r}_1 + \bar{r}_2} \tag{3.114}$$

veya

$$\frac{1}{\bar{r}_{sis}} = \frac{1}{\bar{r}_1} + \frac{1}{\bar{r}_2} \tag{3.115}$$

olur. Benzer şekilde, ***sistemin kullanılamazlığı***

$$\bar{U}_{sis} = \frac{\bar{r}_{sis}}{\bar{r}_{sis} + \bar{m}_{sis}} \tag{3.108}$$

olarak yazılır ve buradan

$$\bar{m}_{sis} = \frac{\bar{r}_{sis}(1 - U_{sis})}{U_{sis}} \tag{3.109}$$

elde edilir.

***Paralel sistemin ortalama arızaya kadar zamanı (devrede olma zamanı, işletme zamanı,*** veya ***çalışma zamanı)***

$$\bar{m}_{sis} = \frac{1 + \lambda_1 \bar{r}_1 + \lambda_2 \bar{r}_2}{\lambda_1 \lambda_2 (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)} \tag{3.110}$$

olarak yazılabilir. Paralel ***sistemin arıza oranı*** ise

$$\lambda_{sis} = \frac{1}{\bar{m}_{sis}} \tag{3.111}$$

veya

$$\lambda_{sis} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)}{1 + \lambda_1 \bar{r}_1 + \lambda_2 \bar{r}_2} \tag{3.112}$$

dir. Seri sistemin aksine, paralel bağlı iki elemanlı sistem için çıkarılan eşitliklerinden, *n* elemanlı sistem eşitliklerine genelleştirme kolayca yapılamaz. Belirli bazı paralel sistemlerde, her seferinde, iki elemanın eşdeğerini göz önüne alarak haraket etmek mümkündür. Bununla birlikte, sistemin ihtimallerini binom dağılımı veya şartlı ihtimalle hesaplamak en tavsiye edilen yoldur.

## *3.4. KARMAŞIK SİSTEMLERDE GÜVENİLİRLİK DEĞERLENDİRMESİ*

Birçok sistem, basit paralel-seri yapı olarak sınıflandırılamaz. Bu seri-paralel olmayan sistemler kompleks sistem karakteristiği gösterirler. Burada, şartlı ihtimal metodu ve minimum-kesitleme metodu ile çözüme gidilir.

### *3.4.1. ŞARTLI İHTİMAL METODU*

Bu metotda, verilen karmaşık sistemde uygun bir eleman, (buna $C_i$ diyelim) ilk önce kısa devre (başka bir şekilde ifade etmek gerekirse, hiçbir zaman arıza yapmayacak bir eleman tarafından ikame edilir) ve daha sonra açık devre (başka bir şekilde ifade etmek gerekirse, arızalı olduğu farzedilir) edilir. Sonuçta oluşan paralel-seri alt-sistemler, şartlı ihtimal kavramına göre yeniden birleştirilirler. Bundan dolayı, sistemin başarılı bir şekilde çalışması (yani, sistemin güvenilirliği)

$$R_{sis} = P(\text{sistem çalışıyor} \mid C_i \text{ çalışıyor})P(C_i) + P(\text{sistem çalışıyor} \mid C_i \text{ arızalı})\, P(\overline{C}_i) \qquad (3.113)$$

olarak ifade edilir.

Benzer şekilde, ***sistemin arızalı olma ihtimali*** (sistemin güvenilirsizliği)

$$Q_{sis} = P(\text{sistem arızalı} \mid C_i \text{ çalışıyor})P(C_i) + P(\text{sistem arızalı} \mid C_i \text{ arızalı})\, P(\overline{C}_i) \qquad (3.114)$$

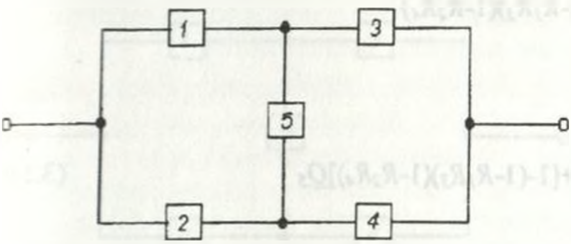
olarak ifade edilir.

Örnek olarak, Şekil 3.4'te görülen köprü-tipi devreyi göz önüne alalım. Burada, sistemin çalışması ($C_1C_3$, $C_2C_4$, $C_1C_5C_4$ ve $C_2C_5C_3$ elemanlarından oluşan) kollardan en az birinin elverişli durumda olmasını zorunlu kılar,böylece sistem çalışır. Burada, $C_i$ elemanı için en iyi tercih 5. (yani, $C_5$) elemandır. 5. elemanın sırasıyla önce kısa devre ve daha sonra açık devre edilmesiyle devrenin modifiye edilmiş hali Şekil 3.4*b* ve Şekil 3.4*c*'de görülmektedir. Bundan dolayı, 3.113 eşitliğinden, ***sistemin güvenilirliği***

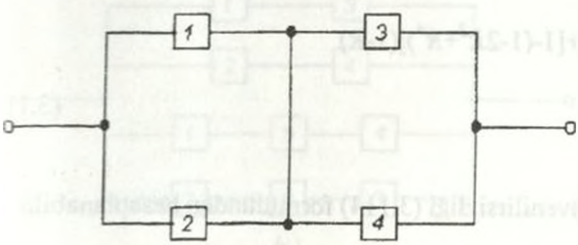
$$R_{sis} = P(\text{sistem çalışıyor} \mid C_5 \text{ çalışıyor})P(C_5) + P(\text{sistem çalışıyor} \mid C_5 \text{ arızalı})\, P(\overline{C}_5) \qquad (3.115)$$

veya, alternatif olarak

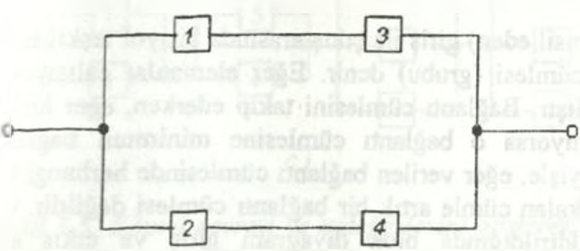
$R_{sis} = R_{sis}(\text{eğer } C_5 \text{ çalışıyorsa})R_5 + R_{sis}(\text{eğer } C_5 \text{ arızalıysa})Q_5$




a)




b)




c)

***Şekil 3.4. Güvenilirlik blok diyagramı a ) köprü tipi devre b ) 5. eleman kısa devre edilerek modifiye edilmiş devre c) 5. eleman açık devre edilerek modifiye edilmiş devre***

yazılabilir, burada

$R_{sis}$(eğer $C_5$ çalışıyorsa)=$(1\text{-}Q_1Q_2)(1\text{-}Q_3Q_4)$

$R_{sis}$(eğer $C_5$ arızalıysa)$=1-(1-R_1R_3)(1-R_2R_4)$

dir.
Bundan dolayı,

$$R_{sis}=[(1-Q_1Q_2)(1-Q_3Q_4)]\,R_5+[1-(1-R_1R_3)(1-R_2R_4)]Q_5 \quad (3.116)$$

dir.
Eğer elemanlar özdeş ise, ***sistemin güvenilirliği***

$$\begin{aligned} R_{sis} &= [1-2Q^2+Q^4]R+[1-(1-2R^2+R^4)]Q \\ &= [1-2(1-R)^2+(1-R)^4]R+[1-(1-2R^2+R^4)](1-R) \\ &= 2R^2+2R^3-5R^4+2R^5 \end{aligned} \quad (3.117)$$

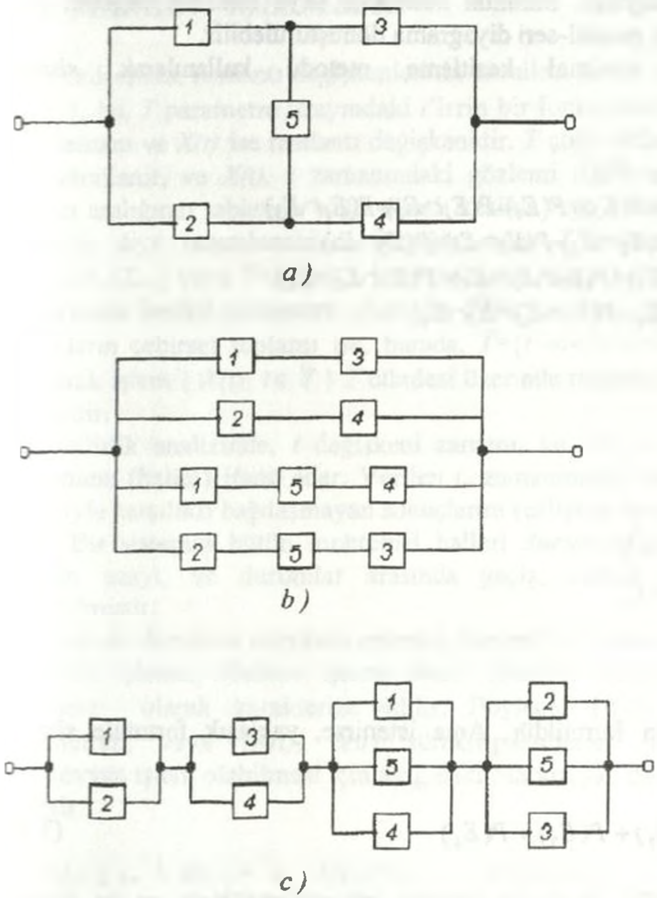
olur.
Benzer şekilde, sistemin güvenilirsizliği (3.114) formülünden hesaplanabilir.

## 3.4.2. MİNİMAL- KESİTLEME METODU

Uç noktaları (elemanları temsil eden) giriş ile çıkış arasında bir yol teşkil eden cümleye (gruba) bağlantı cümlesi (grubu) denir. Eğer elemanlar çalışıyorsa sistemde düzgün olarak çalışır. Bağlantı cümlesini takip ederken, eğer hiçbir düğüm birden fazla geçmiyorsa o bağlantı cümlesine minimum bağlantı cümlesi denir. Diğer bir deyişle, eğer verilen bağlantı cümlesinde herhangi bir eleman kaldırılırsa, geriye kalan cümle artık bir bağlantı cümlesi değildir. Uç noktalar (elemanların) kaldırıldığında blok diyagram giriş ve çıkış alt-bloklarına ayrılırsa bu kesitlemedir. Diğer bir deyişle, verilen kesitlemenin elemanları arızalı ise, sistem de arızalıdır. Verilen kesitleme diğer bir kesitleme ile alt cümlelere bölünemiyorsa buna minimal kesitleme denir. Bundan dolayı, eğer minimal kesitlemenin bütün elemanları arızalı ise, sistem arızalıdır.
Örnek olarak, Şekil 3.5a'da verilen köprü-tipi devreyi göz önüne alalım. Şekil 3.5b'de görüldüğü gibi, minimal bağlantı cümlesi (grubu), $C_1C_3$, $C_2C_4$, $C_1C_5C_4$ ve $C_2C_5C_3$ elemanlarından oluşur. Bu,

$$S=(C_1\cap C_3)\cup(C_2\cap C_3)\cup(C_1\cap C_5\cap C_4)\cup(C_2\cap C_5\cap C_3) \quad (3.118)$$

şeklinde gösterilebilir.




***Şekil 3.5. Köprü devresi ve eşdeğerlerini gösteren sistemin Güvenilirlik blok diyagramları a ) köprü tipi devre b ) eşdeğer minimal bağlantı diyagramı c) eşdeğer minimal kesitleme diyagramı***

Benzer şekilde, Şekil 3.5c'de görüldüğü gibi, minimal kesitleme, $C_1C_2$, $C_3C_4$, $C_1C_5C_4$, $C_2C_5C_3$ elemanlarından oluşur. Bu,

$$\bar{S} = (\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) \cup (\bar{C}_3 \cap \bar{C}_4) \cup (\bar{C}_1 \cap \bar{C}_5 \cap \bar{C}_4) \cup (\bar{C}_2 \cap \bar{C}_5 \cap \bar{C}_3) \qquad (3.119)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bunun üzerine, Şekil 3.5'de ifade edildiği gibi, verilen paralel-seri olmayan yapıların lojik diyagramı, minimal kesitleme veya minimal bağlantı grubu metodu kullanılarak paralel-seri diyagrama dönüştürülebilir.
Bundan dolayı, minimal kesitleme metodu kullanılarak, ***sistemin güvenilirsizliği***

$$
\begin{aligned}
Q_{sis} &= P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) \\
&= P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)+P(E_4)-P(E_1 \cap E_2)-P(E_1 \cap E_3) \\
&\quad -P(E_1 \cap E_4)-P(E_2 \cap E_3)-P(E_2 \cap E_4)-P(E_3 \cap E_4) \\
&\quad +P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)+P(E_1 \cap E_2 \cap E_4)+P(E_1 \cap E_3 \cap E_4) \\
&\quad +P(E_2 \cap E_3 \cap E_4)-P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) \qquad (3.120)
\end{aligned}
$$

elde edilir. burada

$$
\begin{aligned}
P(E_1) &= \overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \\
P(E_2) &= \overline{C}_3 \cap \overline{C}_4 \\
P(E_3) &= \overline{C}_1 \cap \overline{C}_5 \cap \overline{C}_4 \\
P(E_4) &= \overline{C}_2 \cap \overline{C}_5 \cap \overline{C}_3
\end{aligned}
$$

tür.

(3.120) eşitliği tam formüldür. Ama istenirse, yaklaşık formülle ***sistemin güvenilirsizliği***

$$Q_{sis} \cong P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) \qquad (3.121)$$

olarak ifade edilebilir, ve bu da sistemin güvenilirsizliğinin en üst limitidir. Yeniden

$$Q_{sis} \cong Q_1Q_2 + Q_3Q_4 + Q_1Q_5Q_4 + Q_2Q_5Q_3 \qquad (3.122)$$

olarak da ifade edilebilir, Eğer bütün elemanlar eşdeğer ise ***sistemin güvenilirsizliği***

$$Q_{sis} = 2Q^2 + 2Q_3^2 \qquad (3.123)$$

olur.

## 3.5. MARKOV İŞLEMLERİ

Stokastik işlem, rastlantı değişkenlerinin bir ailesi olarak tanımlanabilir, { $X(t)$; $t \in T$ }, bu, $T$ parametre uzayındaki $t$'lerin bir fonksiyonudur. Burada, $t$, $T$'nin bir elemanı ve $X(t)$ ise rastlantı değişkenidir. $T$ çoğu defa zaman aralığı olarak da tanımlanır, ve $X(t)$, $t$ zamanındaki gözlemi ifade eder. Stokastik işlem, zaman aralığının tabiatına bağlı olarak kesikli veya sürekli parametrelerin bir işlevidir diye tanımlanabilir. Örneğin, eğer $T$ sonsuz bir diziyse, yani, $T=\{0,\pm1,\pm2,..\}$ veya $T=\{0,1,2,..\}$ise, stokastik işlem { $X(t)$; $t \in T$ }, $T$ üzerinde tanımlanan kesikli-parametre işlemidir. Öbür taraftan, eğer $T$ bir aralık veya aralıkların cebirsel toplamı ise, burada, $T=\{t:-\infty<T<+\infty\}$veya $T=\{t:0\leq t<+\infty\}$, stokastik işlem { $X(t)$; $t \in T$ } $T$ cümlesi üzerinde tanımlanan sürekli-parametre işlemidir.

Güvenilirlik analizinde, $t$ değişkeni zamanı, ve $X(t)$, $t$ zamanında sistemin durumunu (halini) ifade eder. Verilen $t_n$ zamanındaki hal, sistemin o andaki birbiriyle karşılıklı bağdaşmayan sonuçlarını (çalışma, arıza, bakım, vb.) temsil eder. Bir sistemin bütün muhtemel halleri ***durum uzayı*** olarak tanımlanır. Durum uzayı, ve durumlar arasında geçiş, durum uzayı diyagramında gösterilmiştir.

Gelecekteki durumun meydana gelmesi, hemen bir önceki duruma bağlı olduğu stokastik işleme, Markov işlemi denir. Bundan dolayı, Markovyan işlem hafızasız olarak karakterize edilir. Böylece, $\{X(t);\ t=0,1,2,..\}$ kesikli-parametreli, veya $\{X(t);\ t\geq 0\}$ sürekli-parametreli stokastik işlem, bir Markovyan işlem olabilmesi için aşağıdaki Markovyan özellikleri gerçeklemesi gerekir.

$$P\{\, X(t_n) \geq x_n \mid X(t_1) = x_1 , X(t_2) = x_2 , \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1} \}$$

$$= P\{\, X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1} \} \tag{3.124}$$

burada,

$t_1 < t_2 < \dots < t_n$ $n$ elemanlı zaman cümlesi olup, işlevlerin oluştuğu zamanlardır,

ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ ise reel değişkenler cümlesidir. Matematiksel olmayan bir dille ifade etmek gerekirse, işlemin 'mevcut' durumu verildiğinde, 'gelecek', 'geçmişten' bağımsızdır denilebilir.

$$p_{x_{n-1}x_n} = P\{x(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \tag{3.125}$$

Yukarıdaki eşitlikte, sistemde $t_{n-1}$ anında $x_{n-1}$ olduğu verilmiş iken, $t_n$ anında $x_n$ olma ihtimali, ***geçiş ihtimaliyeti*** olarak adlandırılır, ve ***sistemin şartlı***

***ihtimalini*** temsil eder. Bu, $t_{n-1}$ ve $t_n$ arasında sistemi temsil eden bu ihtimal, ***tek-adım geçiş ihtimali*** olarak da tanımlanır.

Markov zinciri, kesikli-değerli raslantı değişkenleri $\{X(t_n)\}$ ile tanımlanır, burada $t_n$ kesikli değerler aldığı gibi sürekli değerlerde alabilir. Bu nedenle Markov zinciri, Markov işlevindeki gibi, kesikli durum uzayı ile tanımlanabilir. Buna göre, $t_{n-1}$ anındaki $i$ durumundan $t_n$ anındaki $j$ durumuna gidişi ifade eden ***tek adım geçiş ihtimali***

$$p_{i,j} = P\left\{X(t_n) = j \middle| X(t_{n-1}) = i\right\} \tag{3.126}$$

dir, ve bu ihtimalin zamanla değişmediği farzedilir. Eğer geçiş ihtimali yalnızca zaman farkına dayanıyorsa, bu faraziyeyi anlatmak için kullanılan terim '***durağan***'dır ve Markov zinciri zamana göre durağan olarak tanımlanır. Bunun üzerine, Markov zinciri, i'inci halden j'inci hale gidişteki geçiş ihtimalleri ile tam anlamı ile tanımlanır, matris formunda

$$P = \begin{array}{c} \\ i \\ \text{durumdan} \end{array} \begin{array}{c|cccccc|} & \multicolumn{6}{c}{j \text{ duruma}} \\ & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \hline 0 & p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots & p_{0n} \\ 1 & p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ 2 & p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ 3 & p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{array} \tag{3.127}$$

olarak tanımlanır. Bütün $p_{i,j}$ geçiş ihtimalleri sabit ve zamandan bağımsız olduğunda, $P$ matrisi ***tek-adım geçiş matrisi*** olarak adlandırılır. Eğer bir karışıklık yapma söz konusu olmazsa, $P$ matrisi, geçiş matrisi olarakta adlandırılır. $p_{i,j}$ şartlı ihtimal olduğundan, aşağıdaki eşitlikler sağlamalıdır.

$$\sum_{j}^{n} p_{i,j} = 1 \qquad \forall_i \tag{3.128}$$

ve

$$p_{i,j} \geq 0 \qquad \forall_{ij} \tag{3.129}$$

Burada

$i = 0, 1, 2, \dots, n$

$j = 0, 1, 2, \dots, n$

dir. Geçiş (durum, hal) adedi çok sayıda değilse, verilen $P$ geçiş matrisi bilgileri, geçiş diyagramı ile gösterilebilir. Örnek olarak, burada, verilen sistemin iki durumu vardır: 1) 1. durumda sistemin çalışmakta, 2) 2: durumda sistem çalışmamakta (bozuk) dır.Buna bağlı geçiş ihtimalleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$p_{11}$=0 anında 1.halde olma ihtimali verilmiş iken, $t$ anında 1.halde olma ihtimali
$p_{12}$=0 anında 1.halde olma ihtimali verilmiş iken, $t$ anında 2.halde olma ihtimali
$p_{21}$=0 anında 2.halde olma ihtimali verilmiş iken, $t$ anında 1.halde olma ihtimali
$p_{22}$=0 anında 2.halde olma ihtimali verilmiş iken, $t$ anında 2.halde olma ihtimali

Buradan, ***durum geçiş matrisi***

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \qquad (3.130)$$

olarak ifade edilebilir ve geçiş diyagrami Şekil 3.6'daki gibi çizilebilir.
Tanım olarak, ***tek-adım geçiş ihtimalleri***

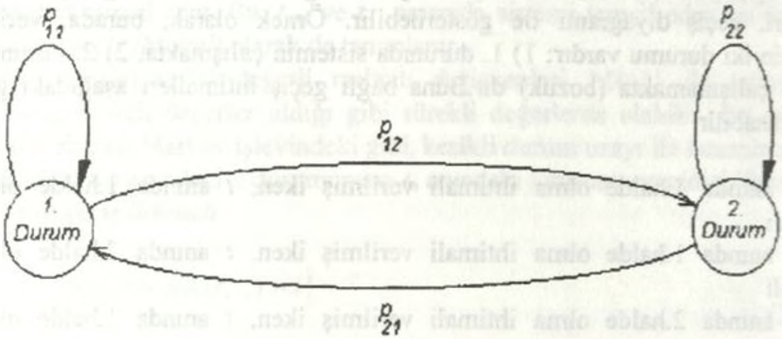
$$p_{ij} = p_{ij}^{(1)} = P\{X(t_1) = j | X(t_0) = i\} \qquad (3.131)$$

dir. Bundan dolayı, ***n-adım geçiş ihtimalleri***, matematiksel indiksiyonla

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X(t_n) = j | X(t_0) = i\} \qquad (3.132)$$

olarak yazılabilir. Başka bir ifade ile, $p_{ij}^{(n)}$ , verilen $t_0$ zamanında $i$ durumunda olan işlemin, $t_n$ zamanında $j$ durumunda olma ihtimali (mutlak ihtimal) dir. Tabi ki, bu tanımdan, $p_{ij}^{(0)}$ değeri eğer $i=j$ ise 1, diğer durumlarda 0 olduğu görülür.
Chapman-Kolmogorov eşitlikleri, $n$-adım geçiş ihtimallerinin tayin eden metodu sağlar. Genel şekilde, bu eşitlikler, sıfır ile $n$ arasındaki herhangi bir $m$ için

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(n-m)} p_{kj}^{(m)} \qquad \forall_{ij} \qquad (3.133)$$




*Şekil 3.6. İki durumlu sistemin geçiş diyagramı*

olarak verilir. Bu eşitliğin matris formunda ifadesi

$$P^{(n)} = P^{(n-m)}\,P^{(m)} \tag{3.134}$$

olarak verilir.

Bu nedenle, daha yüksek dereceden geçiş matrisinin elemanları, yani $\left\|p_{ij}^{(n)}\right\|$ matrisinin elemanları, matris çarpımı ile doğrudan doğruya aşağıdaki formülle elde edilebilir.

$$\left\|p_{ij}^{(n)}\right\| = P^{(n)} = P^{(n-m)}\,P^{(m)} = P^{(n)} = P^{n} \tag{3.135}$$

(3.133) eşitliğinin özel bir hali

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(n-1)} \cdot p_{kj} \qquad \forall_{ij} \tag{3.136}$$

dir ve (3.134) ile (3.135) eşitliklerinin özel halleri ise sırasıyla

$$P^{(n)} = P^{(n-1)}\,P \tag{3.137}$$

ve

$$\left\|p_{ij}^{(n)}\right\| = P^{(n-1)}\,P = P^{(n)} = P^{n} \tag{3.138}$$

dir. Şartsız ihtimal ise

$$p_j^{(n)} = P\{X(t_n) = j\} \tag{3.139}$$

şeklinde yazılır ve, buna ***mutlak ihtimaliyet*** veya durum ihtimali denir. ***Durum ihtimalini*** tesbit etmek için başlangiç şartlarının bilinmesi gerekir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} p_j^{(n)} &= P\{X(t_n) = j\} \\ &= P\sum_i \{X(t_n) = j \mid X(t_0) = i\} P\{X(t_0) = i\} \\ &= \sum_i p_i^{(0)} p_{ij}^{(n)} \end{aligned} \tag{3.140}$$

yazılabilir ve (3.140) denklemi matris formunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$p^{(n)} = p^{(0)} P^{(n)} \tag{3.141}$$

Burada

$p^{(n)}$ = $t_n$ anında durum ihtimali vektörü
$p^{(0)}$ = $t_0$ anında başlangıç durum ihtimali vektörü
$P^{(n)}$ = $n$-adım geçiş matrisi

Şüphesiz, ***durum*** (hal) ***ihtimali*** veya ***mutlak ihtimaliyet***, vektör şeklinde

$$p^{(n)} = \left[p_1^{(n)}\ p_2^{(n)}\ p_3^{(n)}\ \Lambda\ p_k^{(n)}\right] \tag{3.142}$$

ve

$$p^{(n)} = \left[p_1^{(0)}\ p_2^{(0)}\ p_3^{(0)}\ \Lambda\ p_k^{(0)}\right] \tag{3.143}$$

olarak tanımlanır. Uzun vadeli mutlak ihtimaller, başlangıç durum ihtimali $p^{(0)}$ 'dan bağımsızdır. Bu nedenle, neticede olarak elde edilen ihtimallere ***kararlı-hal ihtimalleri*** denir ve $\pi_j$ cümlesi ile tanımlanır, burada

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P\{X(t_n) = j\} \tag{3.144}$$

dir. Genel olarak, $n$ artarken, $n$-adım geçiş ihtimalinde, başlangıç durumlarının önemi azalmaya meyleder, yani

$$\lim_{n\to\infty} P\{X(t_n) = j \mid X(t_0) = i\} = \lim_{n\to\infty} P\{X(t_n) = j\} = \Pi_j \tag{3.145}$$

olur, böylece, şartsız kararlı hal ihtimal dağılımı, ***n-adım geçiş ihtimalinden***, başlangıç durumunu hesaba katmadan, $n$'i sonsuza götürerek elde edilir. Bu nedenle,

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} P \tag{3.146}$$

veya

$$\lim_{n \to \infty} P^{(n)} = \lim_{n \to \infty} P^{(n-1)} P \tag{3.147}$$

olur, buradan

$$\Pi = \Pi P \tag{3.148}$$

yazılır, burada

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \Lambda & \pi_k \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \Lambda & \pi_k \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \Lambda & \pi_k \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \Lambda & \pi_k \end{bmatrix} \tag{3.149}$$

dir. $\Pi$ matrisinin satırları birbirine özdeş (eşit) olup her satırı,

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \Lambda & \pi_k \end{bmatrix} \tag{3.150}$$

şeklinde bir satır vektörüdür. $\Pi$ satır vektörünün transpozesi, $\Pi^t$ olarak gösterilen bir sütun vektörü olup, (3.148) denklemi de, aşağıdaki gibi ifade edilebilen lineer denklemler cümlesidir.

$$\Pi^t = P^{(t)} \Pi^{(t)} \tag{3.151}$$

Herbir $\Pi_i$ için (3.148) veya (3.150) denklem sistemini çözebilmek için ek bir denkleme daha ihtiyaç vardır. Bu ***denkleme normalleştirme*** denklemi denir ve aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sum_{\text{tüm } i\text{ler}} \pi_i \tag{3.152}$$

### 3.6.İLETİM SİSTEMLERİNDE GÜVENİLİRLİK METODLARI

Son yıllarda, iletim sistem güvenilirliği oldukça önem kazandı. İletim sistemleri güvenirliliğini kantitatif olarak ölçebilmek için sayısız metod geliştirilmiştir. Bu bölümde, geliştirilmiş bu metodlardan bazıları yer alacaktır.

### 3.6.1. ORTALAMA KESİNTİ ORANI METODU

Bu metod, Todd tarafından 1964 yılında sunulmuştur. Bu metod, tüketici kesinti oranını ve kesinti sayısının belirlenen süreyi aşma beklentisini hesaplamak için verilen minimum bir sürede zorunlu devre dışı kalma ihtimalini tayin eder. Burada, zorunlu devre dışı oranı, toplam elemanların devre dışı kalma zamanının toplam riske maruz kalma zamanına oranıdır. Diğer bir deyişle, zorunlu devre dışı kalma oranı $p$, elemanın devre dışı kalma ihtimalidir ve

$$p = \frac{\textit{Belirlenen minimum süreli devre dışı kalmaların oluştuğu günler toplamı}}{\textit{Toplam günler}} \tag{3.153}$$

eşitliğinden hesaplanabilir. Bu metod, seri-paralel bağlı elemanlı sistemlere kolayca uygulanabilir. Burada, paralel elemanlar olduğundan, yük merkezlerine sürekli enerji sağlandığı varsayımına dayanır. Bir yılda, verilen bir yük merkezi için belirlenen devre dışı kalmaların oluşacağı günlerin beklenen sayısına *ortalama yıllık tüketici kesinti oranı* denir. Seri ve paralel konfigürasyonlara sahip sistemler, devre indirgeme metodu kullanılarak *ortalama kesinti oranı metodu*na dahil edilebilirler. Diğer bir alternatif minimal kesitleme prosedürü kullanmaktır. Bu metodda, bütün devre dışı kalmalar genellikle eşzamanlı olarak meydana geldiği farzedilir.

### 3.6.2. FREKANS VE SÜRE METODU

Genelde, verilen bir iletim hattının arıza oranı, normal ve kötü (örn. fırtına,buz, veya yoğun yağmur) hava şartları ile tanımlanan çevrenin dalgalanmasının bir fonksiyonudur. Kötü hava şartlarındaki arıza oranının, normal hava şartlarındaki arıza oranından birkaç kat daha fazla olması mümkündür. Ayrıca, kötü hava şartlarında, paralel sistemlerin çoklu arıza yapması da mümkündür.

Bu çevresel kuvvetlerin büyük değerler aldığı zamanlarında zorunlu devre dışı kalmaların üst üste gelme olayına ***arıza demeti*** denir.

Gaver, Montmeat, ve Patton tarafından, değişen çevresel şartları hesaba katan bir metod sunulmuştur. Önerilen iki durumlu hava modeli, havanın normal ile fırtınalı dönemler arasında dalgalandığını farzeder. Bu, ilk metotdaki gibi gene seri ve paralel sistemlerle ilgilidir.Bu metot, elemanın arıza zamanın, tamir zamanının, fırtına süresinin, ve normal hava süresinin üstel ihtimaliyet dağılımı ile temsil edilebileceği faraziyesine dayanır. Ayrıca, paralel elemanlı devrelerde yük merkezlerine olan enerji tedarikinin sürekli olduğu varsayımına da dayanır. Ne yazık ki, paralel bağlı elemanların sayısı arttıkça, metod yaklaşık neticelerle sonuçlanır. Metodun hesaplama verimliliğini arttırmak için bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Metot, seri ve paralel sistemler için iki ayrı denklem takımı vermektedir. Kullanılan parametreler

$\lambda_i$ = Birim yılda normal havadaki arızalar içinde, i'inci elemanın normal hava arıza oranı

$\lambda_i'$ = Birim yılda kötü havadaki arızalar içinde, i'inci elemanın kötü hava arıza oranı

$\lambda_i''$ = Bir yıldaki devre dışı kalmalar içinde, i'inci elemanın koruyucu-bakım devre dışı oranı

$r_i$ =(Yıllar içinde) *i*'inci elemanın bütün zorunlu devre dışı durumlarında, beklenen (tahmin edilen) tamir süresi

$r_i''$ =(Yıllar içinde) *i*'inci elemanın koruyucu-bakım (tamir) oranı (başka bir şekilde ifade etmek gerekirse, bakım için devre dışı kalma süresi)

$N$ =Yıl içinde, normal hava döneminin beklenen süresi

$S$ = Yıl içinde, fırtınalı hava döneminin beklenen süresi

## *3.6.2.1. SERİ SİSTEMLER*

*i*'inci elemanın yaklaşık tüm (normal ve kötü hava) ***yıllık zorunlu devre dışı*** kalma oranı, $\lambda_f$

$$\lambda_{f_i} = \frac{N}{N+S}\lambda_i + \frac{S}{N+S}\lambda_i' \quad \textit{devre dışı / yıl} \qquad (3.154)$$

olarak ifade edilebilir. Bundan dolayı, $n$-elemanlı seri bir ***sistemin toplam yıllık zorunlu devre dışı kalma oranı*** (başka bir şekilde ifade etmek gerekirse, arıza oranı)

$$\lambda_{f,e} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{f,i} \quad \textit{devre dışı / yıl} \tag{3.155}$$

dir. Benzer şekilde, $n$-elemanlı seri sistemin ***yıllık bakım için devre dışı*** kalma oranı

$$\lambda_e'' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'' \quad \textit{devre dışı / yıl} \tag{3.156}$$

olarak verilebilir. Bir seri sistem, diğer elemanlar ile paralel ise,bu durumda devrenin eşdeğeri için, ***normal ve kötü hava arıza oranlarını***

$$\lambda_e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \textit{devre dışı / yıl} \tag{3.157}$$

ve

$$\lambda_e' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' \quad \textit{devre dışı / yıl} \tag{3.158}$$

gibi hesaplamak mümkündür. Zorunlu devre dışı kalmadan kaynaklanan ***beklenen devre dışı kalma süresi***

$$r_{f,e} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_{f,i}}{\lambda_{f,e}} \quad \textit{yıl} \tag{3.159}$$

den hesaplanabilir. Benzer şekilde, bakım nedeniyle devre dışı kalmadan kaynaklanan, ***beklenen devre dışı kalma süresi***

$$r_e'' = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'' r_i''}{\lambda_e''} \quad \textit{yıl} \tag{3.160}$$

den hesaplanabilir.

Buradan, *toplam yıllık devre dışı kalma oranı*

$$\lambda_{ss} = \lambda_{f,e} + \lambda_e'' \quad \text{devre dışı / yıl} \tag{3.161}$$

olarak ifade edilebilir. ***Beklenen devre dışı kalma süresi*** (örn. onarma, yenileme süresi)

$$r_{ss} = \frac{\lambda_{f,e} r_{f,e} + \lambda_e'' r_e''}{\lambda_{ss}} \quad yıl \tag{3.162}$$

veya

$$r_{ss} = 8760 \frac{\lambda_{f,e} r_{f,e} + \lambda_e'' r_e''}{\lambda_{ss}} \quad saat \tag{3.163}$$

olarak ifade edilebilir. ***Her bir yılda toplam devre dışı kalma zamanı***

$$U_{ss} = \frac{r_{ss}}{r_{ss} + 1/\lambda_{ss}} \quad yıl / yıl \tag{3.164}$$

veya

$$U_{ss} \cong \lambda_{ss} r_{ss} \quad yıl / yıl \tag{3.165}$$

veya

$$U_{ss} \cong 8760 \lambda_{ss} r_{ss} \quad saat / yıl \tag{3.166}$$

olarak ifade edilebilir.
Burada belirtelimki, bir görüşe göre, bakım nedeniyle devre dışı kalmaları rastlantı parametresi olarak yukarıda verilen eşitliklere dahil edilmiştir. Ama, başka bir görüş, bakımın, bir tesadüfi devre dışı kalma davranışı olarak tanımlanıp tanımlanamayacağı tartışılır bulduğundan, bunları hariçte bırakmayı önerir.

### *3.6.2.2. PARALEL SİSTEMLER*

Bu metotda, elemanlar çift (o anda iki tane) olarak düşünülür, ve devre indirgeme tekniğine göre, ilerideki bazı devre kombinasyonları için, eşdeğer bir elemana indirgenir. Ne yazık ki, paralel bağlı elemanların sayısı arttıkça, hesaplamalardaki yaklaşık değer bulma artar. Bundan dolayı, iki-elemanlı paralel sistem için normal ve kötü hava zorunlu devre dışı kalmalardan kaynaklanan yaklaşık toplam yıllık arıza oranı

$$\lambda_{uz} = \frac{N}{N+S}\left[\lambda_1\lambda_2(r_1+r_2)+\frac{S}{N}(\lambda_1\lambda_2' r_1+\lambda_2\lambda_1' r_2)\right]$$
$$+\frac{S}{N+S}\left[\lambda_1'\lambda_2 r_1+\lambda_2'\lambda_1 r_2+2S\lambda_1'\lambda_2'\right] \quad \textit{devre dışı / yıl} \qquad (3.167)$$

olarak ifade edilebilir.
Bakımın, değerlemeye dahil edildiği durumda, bakım arıza oranı bileşeni 3.167 eşitliğinin sağ tarafına eklenmelidir.Burada, bakım nedeniyle devre dışı kalmaların sadece normal hava şartlarında tesadüfi olarak oluştuğu farzedilir. Bakım arıza oranı

$$\lambda_e'' = \lambda_1''\lambda_2 r_1''+\lambda_2''\lambda_1 r_2'' \quad \textit{devre dışı / yıl} \qquad (3.168)$$

den hesaplanabilir, burada

$\lambda_i''$ = Bir yıldaki devre dışı kalmalarda, elemanın bakım nedeniyle devre dışı kalma oranı

$r_i''$= Yıl içinde, elemanın bakımı için tamir oranı

dır. Paralel sistemlerin, diğer elemanlarla paralel çalıştığı durumlarda, normal ve kötü hava şartlarında devre dışı kalma oranı, ve ilerideki bazı devre kombinasyonları için, paralel sistemleri temsil eden eşdeğer eleman için, ***beklenen devre dışı kalma süresi***

$$\lambda_e = \lambda_1\lambda_2(r_1+r_2)+\frac{S}{N}(\lambda_1'\lambda_2 r_1+\lambda_2'\lambda_1 r_2) \quad \textit{devre dışı / yıl} \qquad (3.169)$$

$$\lambda_e' = \lambda_1\lambda_2' r_1+2S\lambda_1'\lambda_2' \quad \textit{devre dışı / yıl} \qquad (3.170)$$

$$r_e = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} \quad \textit{yıl} \qquad (3.171)$$

olarak ifade edilebilir. Benzer şekilde, elemanın zorunlu devre dışı kalma döneminin, elemanın bakım nedeniyle devre dışı kalma dönemiyle üst üste gelmesi, ve bunun neticesi iki-elemanlı ***paralel sistemin eşdeğer arıza oranı***

$$\lambda''_{m,e} = \lambda'_1\lambda_2 r''_1 + \lambda''_2\lambda_1 r''_2 \quad devre\ dışı\ /\ yıl \tag{3.172}$$

olarak ifade edilebilir. Bundan dolayı, elemanın zorunlu devre dışı kalmasının, elemanın bakım nedeniyle devre dışı kalması ile üst üste gelmesinden kaynaklanan, iki-elemanlı ***sistemin beklenen çalışmama*** (arıza) ***süreli***

$$r''_{m,e} = \frac{\lambda'_1\lambda_2 r''_1}{\lambda'_1\lambda_2 r''_1 + \lambda''_2\lambda_1 r''_2}\,\frac{r_2 r''_1}{r_2 + r''_1} + \frac{\lambda''_2\lambda_1 r''_2}{\lambda'_1\lambda_2 r''_1 + \lambda''_2\lambda_1 r''_2 +}\,\frac{r_1 r''_2}{r_1 + r''_2} \quad yıl \tag{3.173}$$

olarak ifade edilebilir veya (3.172) eşitliğini (3.173) denkleminde yerine koyarsak

$$r''_{m,e} = \frac{\lambda'_1\lambda_2 r''_1}{\lambda''_{m,e}}\,\frac{r_2 r''_1}{r_2 + r''_1} + \frac{\lambda''_2\lambda_1 r''_2}{\lambda''_{m,e} +}\,\frac{r_1 r''_2}{r_1 + r''_2} \quad yıl \tag{3.174}$$

elde edilebilir. Kötü ve normal hava şartlarındaki yaklaşım uygulanamadığı, ve toplam yıllık arıza oranları kullanıldığı durumda, iki elemandan oluşan bir ***paralel sistem için beklenen arıza sayısı***

$$\lambda_{f,e} = \lambda_1\lambda_2(r_1 + r_2) \quad devre\ dışı\ /\ yıl \tag{3.175}$$

olarak ifade edilebilir. ***Beklenen çalışmama*** (arıza) ***süresinin yaklaşık değeri***

$$U_{\omega} \cong \lambda_{f,e} r_T \quad yıl\ /\ yıl \tag{3.176}$$

larak ifade edilebilir, burada

$r_T$ = Üst üste gelen zorunlu devre dışı kalmalardan kaynaklanan beklenen çalışmama (arıza) süresi

$$= \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \quad yıl \qquad (3.177$$

Bundan dolayı, (3.177) eşitliğini (3.176) denkleminde yerine yazarak, ***beklenen çalışmama***(arıza) ***süresi*** yeni bir şekilde

$$U_{ps} \cong \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \lambda_{f,e} \quad yıl\,/\,yıl \tag{3.178}$$

olarak ifade edilebilir. Yukarıda zikredilen eşitlikler, sürekli devre dışı kalmalardan kaynaklanan arıza oranlarını verir. Billinton ve Grover, geçici devre dışı kalmaları hesaba katmak için eşitlikler türetmişlerdir. Örneğin, elemanın geçici devre dışı kalması, elemanın sürekli devre dışı kalması ile üst üste gelmesi neticesi oluşan, iki-elemanlı paralel sistemin ***eşdeğer geçici arıza oranı***

$$\lambda_{t,e} = \lambda_{1T}\lambda_2 r_2 + \lambda_{2T}\lambda_1 r_1 \quad devre\ dışı/yıl \tag{3.179}$$

olarak ifade edilebilir, burada

$\lambda_{iT}$ =Bir yıldaki devre dışı kalmalar içinde, *i*'inci elemanın geçici devre dışı kalma oranı

İki elemanın özdeş olduğu durumda, sistemin geçici devre dışı kalma oranı

$$\lambda_{t,e} = 2\lambda_T \lambda r \quad devre\ dışı/yıl \tag{3.180}$$

olarak ifade edilebilir. Benzer şekilde, bir elemanın geçici devre dışı kalmasının, elemanın bakım nedeniyle devre dışı kalmasıyla üst üste gelmesinden kaynaklanan, iki-elemanlı ***paralel sistemin eşdeğer geçici arıza oranı***

$$\lambda''_{t,e} = \lambda_{1T}\lambda''_2 r''_2 + \lambda_{2T}\lambda''_1 r''_1 \quad devre\ dışı\,/\,yıl \tag{3.181}$$

olarak ifade edilebilir. Eğer iki eleman özdeş ise,

$$\lambda''_{t,e} = 2\lambda_T \lambda'' r'' \quad devre\ dışı\,/\,yıl \tag{3.182}$$

dır. Bundan dolayı, bir elemanın geçici devre dışı kalmasının, elemanın sürekli ve bakım nedeniyle devre dışı kalması ile üst üste gelmesinden kaynaklanan, toplam devre dışı kalma oranı

$$\lambda''_{T,e} = \lambda_{t,e}\lambda''_{t,e} \quad devre\ dışı\,/\,yıl \tag{3.183}$$

olarak verilebilir. Yukarıda zikredilen eşdeğer geçici devre dışı kalma eşitlikleri, kötü havadan kaynaklanan arıza demetlerini hesaba katmak için modifiye edilebilir.

### 3.6.3. MARKOV UYGULAMA METODU

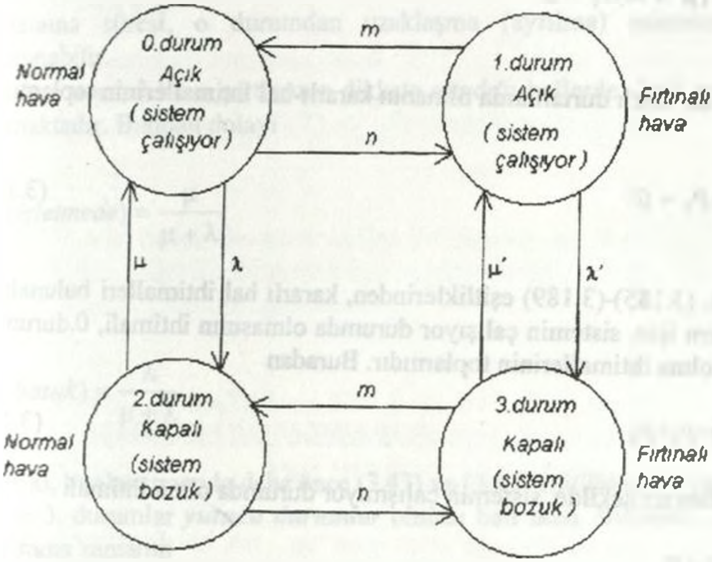
1964 yılında, Desieno ve Stine, Markov işlevinin uygulanmasını özet olarak sundular. Markov yaklaşımının, dağıtım hususunda, yapılan faraziyeler dahilinde, teorik olarak en doğru yaklaşım olduğu gerçeğini ifade ettiler. Billinton ve Bollinger, Markov metodunun, iki-durumlu hava şartları çerçevesinde çalışan, seri-paralel elemanlara uygulanmasını gösterdiler. Geçiş ihtimal matisinin, bir durumdan, diğer herhangi bir duruma geçişteki, bütün ihtimalleri içerdiğini gösterdiler. Örneğin, iki-drumlu hava şartları çerçevesinde,_sınırlayan ihtimalleri tayin etmek için, çözülmesi gerekli olan eşzamanlı denklem_sayısı, iki-durum dalgalanan hava koşulu çevresindeki bir $n$-elemanlı sistem için_$2x2^n$ dir. Eleman sayısı artarken bu sayıda hızla artmaktadır.
Bu metotda, hava sürelerinin üstel bir dağılım gösterdiği ve sözkonusu olan sistemin iki-durumlu çevçevede (başka bir şekilde ifade etmek gerekirse,normal ve kötü havada) çalıştığı farzedilir. İlave olarak, sistemi ya işletim durumunda (çalışıyor) ya da devre dışı durumunda (çalışmıyor) olarak iki halde temsil etmek mümkündür. Bundan dolayı, Şekil 3.7'de gösterildiği gibi, her eleman için bir durum uzayı diyagrami geliştirilebilir. Burada, gerekli diferansiyel eşitlikler, direkt olarak durum uzay diyagramından yararlanılarak matris formunda

$$\begin{bmatrix} P_0'(t) \\ P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\lambda+n) & m & \mu & 0 \\ n & -(m+\lambda') & 0 & \mu' \\ \lambda & 0 & -(\mu+n) & m \\ 0 & \lambda' & n & -(\mu'+m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{bmatrix} \qquad (3.184)$$

şeklinde ifade edilebilir, burada

$\lambda$ = normal hava şartlarında, elemanın arıza oranı
$\mu$ = normal hava şartlarında, elemanın tamir oranı
$\lambda'$ = kötü hava şartlarında, elemanın arıza oranı
$\mu'$ = kötü hava şartlarında, elemanın tamir oranı
ayrıca

$$n = \frac{1}{N}$$




*Şekil 3.7. Normal ve kötü hava şartlarında çalışan tek bir elemanın durum uzay diyagramı*

ve

$$m = \frac{1}{S}$$

dir. Burada
$N$ = normal hava döneminin beklenen süresi
$S$ = kötü hava döneminin beklenen süre
dir.

Bundan dolayı, çeşitli hallerde bulunmanın ***uzun-vade*** veya ***kararlı-hal ihtimalleri,*** diferansiyel matrisini sıfıra eşitleyerek bulunabilir, şöyleki

$$-(\lambda + n)P_0 + mP_1 + \mu P_2 = 0 \tag{3.185}$$

$$nP_0 - (m + \lambda')P_1 + \mu' P_3 = 0 \tag{3.186}$$

$$\lambda P_0 - (\mu + n)P_2 + mP_3 = 0 \tag{3.187}$$

$$\lambda' P_1 + nP_2 - (\mu' + m)P_3 = 0 \tag{3.188}$$

dir.
Ayrıca, tabi ki, farklı durumlarda olmanın kararlı-hal ihtimallerinin toplamı 1'e eşittir, yani

$$P_0+P_1+P_2+P_3 = 0 \tag{3.189}$$

dir. Böylece, (3.185)-(3.189) eşitliklerinden, kararlı hal ihtimalleri bulunabilir. Verilen sistem için, sistemin çalışıyor durumda olmasının ihtimali, 0.durum ve 1. durumda olma ihtimallerinin toplamıdır. Buradan

$$P(çalışıyor)=P_0+P_1 \tag{3.190}$$

elde edilir. Benzer şekilde, sistemin çalışmıyor durumda olma ihtimali

$$P(bozuk)=P_2+P_3 \tag{3.191}$$

olarak bulunabilir. Buradan, tamir oranının, çevre şartlarından (örnek, $\mu = \mu'$) bağımsız olduğu var sayılarak, ***sistemin işletmede***(çalışıyor) ve ***işletme dışı*** (çalışmıyor) ***durumda olma ihtimalleri***

$$P(çalışıyor) = \frac{\mu}{m+n}\,\frac{(m+n)^2 + m(\mu+\lambda') + n(\mu+\lambda)}{(\mu+\lambda)(\mu+\lambda') + m(\mu+\lambda) + n(\mu+\lambda')} \tag{3.192}$$

ve

$$P(bozuk) = \frac{1}{m+n}\,\frac{n\lambda'(n+\mu) + m\lambda(m+\mu) + nm(\lambda+\lambda') + \lambda\lambda'(m+n)}{(\mu+\lambda)(\mu+\lambda') + m(\mu+\lambda) + n(\mu+\lambda')} \tag{3.193}$$

olarak ifade edilebilir.
Kötü hava muhalefeti esnasında, hiçbir onarım işi yapılamadığına (yani, $\mu' = 0$), göre, ***sistemin işletme dışı*** (çalışmama) ***durumda olma ihtimali***

$$P(bozuk) = \frac{1}{m+n}\,\frac{m(\lambda m + \lambda' n) + n(\lambda'\mu + \lambda m + \lambda' n)}{(\mu+\lambda)(\mu+\lambda') + m(\mu+\lambda) + n(\mu+\lambda')} \tag{3.194}$$

olur.
Verilen bir durumda olma frekansı, o durumda olmanın kararlı-hal ihtimali ile, o durumdan uzaklaşma (ayrılma) oranının çarpımı ile bulunabilir. Bir durumun

ortalama süresi, o durumdan uzaklaşma (ayrılma) oranının karşıtından bulunabilir.
Sadece normal hava şartlarının dikkate alındığı hallerde, $\lambda=0$, $m=1$ ve $n=0$ olmaktadır. Bundan dolayı

$$P(işletmede) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} \tag{3.195}$$

ve

$$P(bozuk) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \tag{3.196}$$

olur ki, bunlar sırasıyla daha önce (3.43) ve (3.47) eşitlikleri ile verilmişti..
2. ve 3. durumlar ***yutucu durumlar*** olması hali iken, Billinton, arızaya kadar ortalama zamanın

$$MTTF = \frac{m+\lambda'+n}{\lambda m+\lambda' n+\lambda\lambda'} \tag{3.197}$$

olduğunu göstermiştir.
Şüphesiz, sadece normal hava şartları dikkate alındığında, $\lambda'=0$, $m=1$, ve $n=0$ olmaktadır. Buradan

$$MTTF = \frac{1}{\lambda} \tag{3.198}$$

daha önce (3.29) eşitliği ile verilen denklem elde edilmiş oldu. ***Ortalama arıza oranı*** (3.197) eşitliğinden

$$\lambda_{ort} = \frac{1}{MTTF}$$

$$\lambda_{ort} = \frac{\lambda m+\lambda' n+\lambda\lambda'}{m+\lambda'+n} \tag{3.199}$$

olarak bulunabilir. $\lambda\lambda' << \lambda m+n$ ve $\lambda' << m+n$ durumunda, (3.199) denkleminden, yaklaşık ortalama arıza oranı

$$\lambda_{ort} = \frac{\lambda m}{m+n} \frac{\lambda' n}{m+n} \tag{3.200}$$

veya

$$\lambda_{ort} = \frac{N}{N+S}\lambda + \frac{S}{N+S}\lambda' \tag{3.201}$$

olarak bulunur.

## 3.6.4. İLETİM HATLARININ ZORUNLU DEVRE DIŞI KALMASININ ORTAK SEBEPLERİ

Bir devre dışının ortak-sebep veya ortak-mod'ları, tek bir dış sebebin çoklu arıza etkileri ile birlikte, bu etkilerin birbirinin sonucundan oluşmadığı bir olay olarak tanımlanır. Sıklıkla, söz konusu devre dışı kalmalar, aynı geçiş güzergahı üzerinde yeralan iletim hatları arasında rastlanır. Genel olarak, bu tür devre dışı kalmaların sebepleri, fırtına, kasırga, yıldırım, su basması, hatların uçaklar tarafından koparılması ve direklere arabaların çarpması gibi ortak harici nedenlerleri içerir. Arızaların diğer sebeplerine örnek olarak, sistematik insan hatası, sistemin karakteristiğindeki değişiklikler, ve çevredeki değişiklikleri gösterebiliriz. Devre dışı kalmaların sebeplerine, paralel iletim (redundant) sistem modellerinin dahil edilmesinin önemi son zamanlarda anlaşılmıştır. Geliştirilen bütün modellerde, elemanın bir durumda bulunma zamanının üstel olarak dağıldığı farzedilmektedir. Son zamanlarda, bu faraziyenin geçerliliği Singh ve Ebrahimian tarafından tartışılmış olup, tamir zamanları için üstel-olmayan dağılımın kullanılmasını önermişlerdir, ve ayrıca, iletim sistemlerindeki ortak-mod arızalar için Markovyan-olmayan bir model de geliştirmişlerdir.

*PROBLEMLER*

*3.1.* Bir elemanın beklenen ömrü $E(T)=\int_0^\infty tf(t)dt$ eşitliği ile verildiğine göre, bu eşitlikten $E(T)=\int_0^\infty R(t)dt$ denklemini çıkarınız.

*3.2.* 10 adet özdeş elemanın verilen bir sisteme seri bağlandığını farzediniz. Kabul edilebilir minimum sistem güvenilirliği 0.98 dir. Her bir elemanın yaklaşık güvenilirliğini bulunuz.

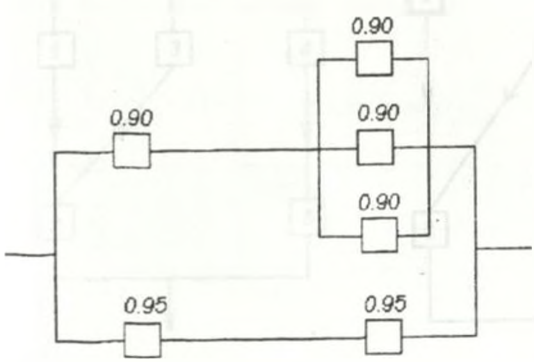
*3.3.* Sırasıyla güvenilirlikleri 0.90, 0.92, 0.94, 0.96 ve 0.98 olan beş eleman bir sisteme seri bağlanacaktır. Sistemin güvenilirliğini yaklaşık olarak bulunuz.

*3.4.* Paralel bağlanan iki elemanın ihtimalleri zamana bağlı üstel bir ifade olduğu farzediliyor. $\lambda_1$ ve $\lambda_2$ arıza oranları sırasıyla 1. ve 2. elemanın arıza oranları ise, sistemin güvenilirliğinin

$$R_{sis}(t)=R_{sis}(t)=e^{-\lambda_1 t}+e^{-\lambda_2 t}-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

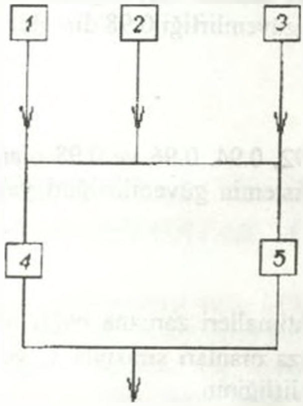
olduğunu gösteriniz.

*3.5.* Şekildeki sistemin eşdeğer güvenilirliğini bulunuz.



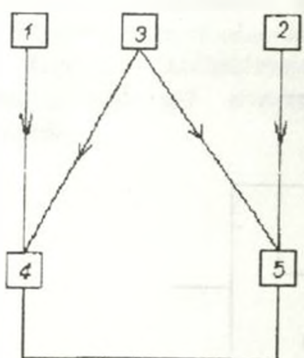

*Şekil P3.5.*

*3.6.* Bir sisteme enerji sağlıyan iki paralel kollu ( 14 ve 25) bir devrenin blok diyagramı aşağıdaki gibidir. Bu devre paralel kollardan en az biri bozuk değilse sisteme enerji sağlamaktadır. Ne 1 ve nede 2 güvenilir durumdaolmadıklarında, 4 veya 5' e enerji sağlamak için üçüncü bir eleman , 3, eklenmektedir. Sistemin güvenilirliğini, şartlı ihtimal metodu ( veya Bayes teoremi) ile hesaplayınız.



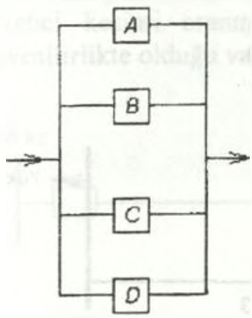

*Şekil P3.6.*

*3.7.* Problem 3.6 da verilen blok diyagram, *Şekil P3.7.* de görüldüğü gibi modifiye edlmiştir.. Sistemin güvenilirliğini, şartlı ihtimal metodu ( veya Bayes teoremi) ile hesaplayınız.



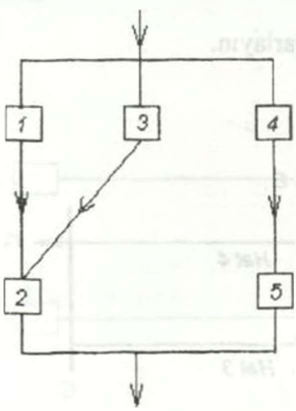

*Şekil P3.7.*

3.8. *Şekil P3.8.* de (bir yüke enerji sağlıyan dört iletim sistemini temsil eden ) bir devrenin blok diyagramı görülmektedir. Dört iletim hattından üçü devre dışı olduğunda bile sistem başarılı bir şekilde görevini yerine getirmekte olduğuna göre, sistemin güvenilirliğini, şartlı ihtimal metodu ( veya Bayes teoremi) ile hesaplayınız.




*Şekil P3.8.*

3.9. *Şekil P3.9.* da bir devrenin blok diyagramı görülmektedir. Şartlı ihtimal metdodunu ( veya Bayes teoremini) kullanarak sistemin güvenilirliğini hesaplayınız. Sistemin başarılı bir şekilde çalışması için, en az kollardan (güzergahlardan) birinin (yani, 12, 32, veya 45) sağlam ve çalışır durumda olması gerekmektedir.



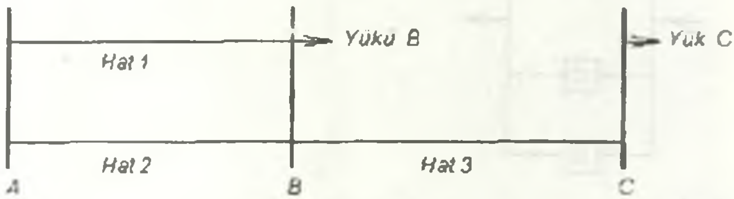

*Şekil P3.9.*

*3.10.* *Şekil P3.10.*.daki iletim hattı devresi göz önüne alınıyor. 1., 2. ve 3. hat bölümlerinin yıllık arıza oranları sırasıyla her bir yıl için 0.4, 0.3 ve 0.6 arıza olduğu farzediliyor. Ortalama kesinti oranı metodunu kullanarak aşağıdaki istenenleri bulunuz.

*a* ) 1, 2 ve 3 numaralı hatların her birinde meydana gelen devre dışı ihtimallerini hesaplayınız.

*b* ) *B* yük barasında oluşan devre dışı ihtimali ile birlikte yıllık ortalama tüketici kesinti oranını bulunuz.

*c* ) *b* ) şıkkını *C* yük barası için tekrarlayın.



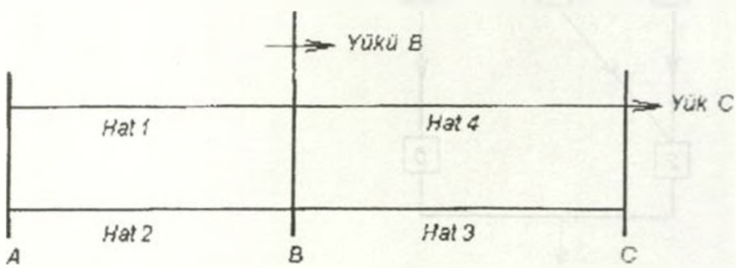

*Şekil P3.10.*.

*3.11.* Problem 3.10..da verilen iletim hattı devresine, B ile C barası arasına, yıllık arıza oranı her bir yıl için 0.5 arıza olan, bir 4. hat, *Şekil P3.11.*.de görüldüğü gibi, ekleniyor. Ortalama kesinti oranı metodunu kullanarak aşağıdaki istenenleri bulunuz.

*a* ) 4 numaralı hatta meydana gelen devre dışı ihtimalini hesaplayınız.

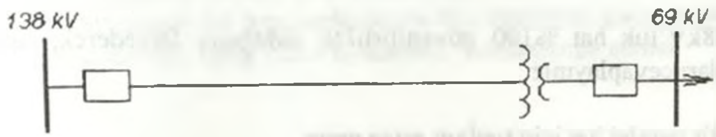
*b* ) *B* yük barasında oluşan devre dışı ihtimali ile birlikte yıllık ortalama tüketici kesinti oranını bulunuz.

*c* ) *b* ) şıkkını *C* yük barası için tekrarlayın.




*Şekil P3.11.*.

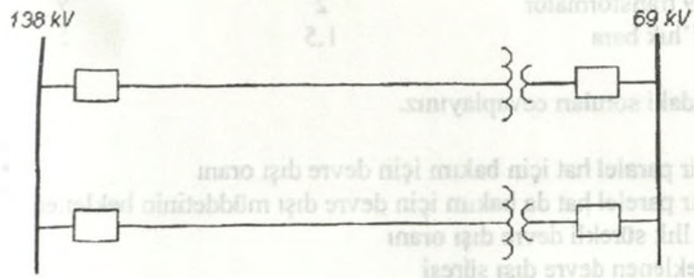
3.12. . *Şekil P3.12.* de görülen, 5 mil uzunluğunda 138 kV luk bir hat göz önüne alınıyor ve bu söz konusu hattın devre dışı oranı, her yıl ve her bir mil için 0.0065 olduğu farzediliyor. Ayrıca, yıllık arıza oranları 138 kV ' luk devre kesici, 69 kV' luk devre kesici, 138/69 kV' luk transformatör ve 69 kV' luk bara için sırasıyla 0.00857, 0.00612, 0.0891 ve 0.0111 olarak verilmiştir. Ortalma kesinti oranı metodunu kullanarak, 69 kV'luk yük barası için devre dışı ihtimali ile birlikte yıllık ortalama tüketici kesinti oranını hesaplayınız. 138 kV'luk baranın %100 güvenilirlikte olduğu varsayılıyor.




*Şekil P3.12.*

3.13. . Problem *3.12.* de verilen hatta özdeş bir hat, *Şekil P3.13.* te görüldüğü gibi ilk hatta paralel bağlanıyor. Ortalma kesinti oranı metodunu kullanarak

*a* ) 69 kV' luk yük barasında oluşan devre dışı ihtimalini
*b* ) Yıllık tüketici kesinti oranını
*c* ) Son 10 yılda gözlenen kesilme sayısını
bulunuz.




*Şekil P3.13.*

*3.14.* . *Şekil P3.13.* da görülen iletim sisteminin sürekli devre dışı dataları aşağıdaki gibi olsun.

| Sistem elemanları | Devre dışı oranı (devre dışı/yıl) | Ortalama tamir süresi (saat) |
|---|---|---|
| 138 kV'luk devre kesici | 0.0058 | 66 |
| 138kV'luk hat | 0.627 | 10 |
| 138/69 transformatör | 0.0119 | 360 |
| 69 kV kV'luk devre kesici | 0.0045 | 44 |
| 69 kV'luk bara | 0.0111 | 5 |

. 138kV'luk hat %100 güvenilirlikte olduğunu farzederek, aşağıdaki soruları cevaplayınız.

*a* ) Bir parelel hat için toplam arıza oranı
*b* ) Bir parelel hat için toplam tamir süresini
*c* ) Sistem için toplam arıza oranı
*d* ) Sistem için ortalama tamir sürelerinin toplamını
*e* ) Elemanın aynı zamanda, üst üste arızalanmasından dolayı, toplam arıza süresi

*3.15.* .Problem *3.14.*' te ele alınan sistemin, bakım için devre-dışı dataları aşağıda verilmiştir.

| Sistem elemanları | Devre dışı oranı (devre dışı/yıl) | ortalama tamir süresi (saat) |
|---|---|---|
| 138 kV'luk devre kesici | 2 | 10 |
| 138kV'luk hat | 4 | 9 |
| 138/69 transformatör | 2 | 9 |
| 69 kV'luk bara | 1.5 | 5 |

aşağıdaki soruları cevaplayınız.

*a* ) Bir paralel hat için bakım için devre dışı oranı
*b* ) Bir parelel hat da bakım için devre dışı müddetinin beklenen değeri
*c* ) Yıllık sürekli devre dışı oranı
*d* ) Beklenen devre dışı süresi
*e* ) Bir yıl için ortalama devre dışı süresi

*3.16.* .Problem *3.14.*' te ele alınan sistemin, zorunlu geçiçi devre-dışı dataları aşağıda verilmiştir.

| Sistem elemanları | Devre dışı oranı (devre dışı/yıl) | ortalama tamir süresi (saat) |
|---|---|---|
| 138kV hat | 3.069 | 7 |
| 138/69 transformatör | 0.0048 | 90 |
| 69 kV bara | 0.0164 | 7 |

Aşağıdaki istenenleri hesaplayınız.

*a* ) Bir parelel hat için geçici devre dışı oranı

*b* ) Bir parelel hat için geçici devre dışı süresinin beklenen değeri

*c* ) geçici devre dışı olma nedeniyle, yenileştirme süresi

## KAYNAKLAR


1. Prof.Dr. ŞENKOM Hülya" SOYUT CEBİR DERSLERİ " , İ.Ü.Yayını 1993
2. Prof.Dr.SEZGİNMAN İbrahim"OLASILIK TEORİ VE PROBLEMLERİ " Eğitim Yayınları A.Ş. 1995
3. LIPSCHUTZ Seymour "PROBABILITY" SCHAUM'S OUTLINE SERIES 1974
4. Prof.Dr. CERİT Cevdet, Y.Doç.Dr.YÜKSEL Müşerref "OLASILIK"
5. GÖNEN TURAN " ELECTRIC POWER DISTRIBUTION SYSTEM ENGINEERING " McGraw-Hill Book Company 1986
6. GÖNEN TURAN " ELECTRIC POWER TRANSMISSION SYSTEM ENGINEERING " JOHN WILEY & SONS 1988
7. TÜRK STANDARDLARI " GÜVENİLİRLİK TEMEL TERİMLERİ VE İLGİLİ MATEMATİK KAVRAMLARI" TS 10786/Mart 1993