T.C
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Huri ŞENCAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Ocak 2001

T.C

SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Huri ŞENCAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez ...../...../2001 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Y.Doç.Dr. Ö.Faruk GÖZÜKIZIL	Prof. Hamdi ARIKAN	Doç.Dr. Ali Kutluca
Jüri Başkanı	Jüri Üyesi	Jüri Üyesi

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her aşamasında bana yardımcı olan, her türlü bilgi, kaynak, rehberlik ve moral desteğinde bulunan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca beni daima destekleyen, çalışmalarımı daha iyi yapabilmem için tüm olanaklarını kullanan aileme de teşekkür ederim.

Huri ŞENCAN

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$x'(t)$	x(t)'nin birinci türevi
$x''(t)$	x(t)'nin ikinci türevi
$x^{(n)}(t)$	x(t)'nin n. türevi
$C'[a,b]$	[a,b] arlığında hem kendisi hem birinci türevleri sürekli fonksiyonlar kümesi
$C([t_0,\infty];R)$	$f:[t_0,\infty]\rightarrow R$ olmak üzere sürekli fonksiyonlar uzayı

Kısaltmalar

FDD	Fonksiyonel Diferansiyel Denklem
SADD	Sapmalı Argümentli Diferansiyel Denklem
ADD	Adi Diferansiyel Denklem
GDD	Gecikmeli Diferansiyel Denklem
DGDD	Doğrusal Gecikmeli Diferansiyel Denklem
DGDDS	Doğrusal Gecikmeli Diferansiyel Denklem Sistemleri
TGDD	Tarafsız Gecikmeli Diferansiyel Denklem
BFP	Başlangıç Fonksiyon Problemi

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelime : Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde gecikmeli diferansiyel denklemin tanımı verilmiştir. Ayrıca bu bölümde fonksiyonel diferansiyel denklemler sınıflandırılmış ve ayrı ayrı açıklanarak örneklendirilmiştir. Yine birinci bölümde doğrusal gecikmeli diferansiyel denklemler ile doğrusal gecikmeli diferansiyel denklem sistemlerinin tanımları ve Teorem 1.7.1 de n. mertebeden her DGDD'nin, birinci mertebeden n denklem ve n bilinmeyen fonksiyon içeren bir DGDDS'ye dönüştürülebildiği verilmiştir. Bu sayede birinci mertebeden DGDD'ler için bulunan tüm sonuçlar n. mertebeden DGDD'lere genişletilebileceği gösterilmiştir.

İkinci bölümde ise önce;
$x'(t)+px'(t-\tau)+qx(t-\sigma)=0 \qquad t \geq t_0$ sabit katsayılı tarafsız gecikmeli diferansiyel denklemin bütün çözümlerinin salınımlı olması için teoremler verilmiştir ki bunlar içinde en önemlisi çözümlerin salınımı için gerek yeter şartı içeren Teorem 2.1.6 dır. Daha sonra ise değişken katsayılı iki ayrı TGDD alınmış ve bunların çözümlerinin salınımı için koşullar incelenmiştir.

Üçüncü bölümde de ADD'ler ile GDD'ler arasındaki farklar verilmiştir. GDD'lerin kurallarına ADD'ler için bilinenlerden ulaşılsa da, ADD' ler gecikmenin sıfır kabul edildiği GDD'nin özel bir halidir. Bunun dışında ADD'ler ile GDD'ler arasında süreklilik ve çözümün tekliği bakımından farklar vurgulanmıştır.

Dördüncü bölümde GDD'ler için bazı çözüm yöntemleri verilmiştir. $x'(t)=ax(t-r)$ denklemine adım yöntemiyle çözüm aranmış ve
yine

$$\begin{aligned} x'(t) &= f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big) && 0 \leq t \leq T \\ x(t) &= \varphi(t) && -\tau \leq t \leq 0 \end{aligned}$$

başlangıç fonksiyon problemine Euler metodu ve tek adım yöntemi uygulanabilmiştir. Son olarak Lyapunov tekniğine bir giriş yapılmış ve oluşturulan Lyapunov sistemlerinin çözümü verilmiştir.

DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

Keywords : Delay Differential Equations

In the first chapter of this thesis which is composed of four chapters, the definition of the delay differential equation (DDE) is given. Furthermore, in this chapter functional differential equations are classified and examplified by describing in detail. Also, in the first chapter linear delay differential equations(LDDE) and the linear delay differential equation systems' (LDDES) definitions and in the theorem 1.7.1. converting each LDDE with n degree to a LDDES which is composed of n equation and n unknown function with the first degree is examined. Hence, all the results which are reached for the first degree LDDE can be expanded for the n degree LDDE is displayed.

In the second chapter, first; the theorems are given for constant coefficient neutral delay differential equations' oscillations of solutions with this equation;

$$x'(t)+px'(t-\tau)+qx(t-\sigma)=0 \qquad t \geq t_0 \qquad \text{(NDDE)}$$

The most important part of all these is theorem 2.1.6 which includes if and only if conditions, for the oscillations of solutions. Then two NDDE with variable coefficient are taken and the conditions for their oscillations of solutions are examined.

In the third chapter the differences between ordinary differential equations (ODE) and DDE are given. Even the rules of DDE are reached from the knowns for ODE, ODE are the special state of DDE which is accepted that the delay is zero. Moreover the continuity and the differences in the unique solution between ODE and DDE are expressed.

And in the fourth chapter some solution methods for DDE are given. To $x'(t)=ax(t-r)$ equation the solution is searched with step method and for

$$x'(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)) \qquad 0 \leq t \leq T$$
$$x(t)=\varphi(t) \qquad -\tau \leq t \leq 0$$

initial function problem. Euler method and one-step method can be applied. In conclusion, an introduction to Lyapunov technique and the solutions of Lyapunov systems were given.

BÖLÜM 1. ÖN BİLGİLER

1.1. Fonksiyonel

M, x(t) fonksiyonlarının bir uzayı olsun. Eğer M'nin her x(t) elemanını belirli bir sayıya götüren bir kural varsa buna bir fonksiyonel denir. Başka bir deyişle değer bölgesi R ya da C olan bir fonksiyona fonksiyonel denir.

Bunu J ile adlandırırsak;

$$J : M \to R$$

$$J : x(t) \to \text{sayı}$$

Örneğin;

$$M = C'[a,b], \quad J[x(t)] = x'(t_0) \qquad t_0 \in [a,b] \text{ sbt. nokta olsun.}$$

J bir fonksiyoneldir.

Yine $M = C'[a,b]$ $\quad J[x(t)] = \int_a^b \sqrt{1+(x'(t))^2}\, dt$ (yay uzunluğu) bir fonksiyoneldir.

Burada $C'[a,b]$, $[a,b]$ aralığında hem kendisi hem birinci türevleri sürekli fonksiyonlar kümesidir.

1.2. Fonksiyonel Denklem

Matematik, gerçek hayattaki olayları denklem biçimine dönüştürür ve bu denklemin çözümlerini araştırır. Bir denklem aynı uzayın ya da farklı uzayların elemanları arasında bir eşelemeyi ifade eder.

Fonksiyonel denklemler, fonksiyon uzaylarında ortaya çıkarlar ve yapılarında türev, integral, fark ve bunun çeşitli kombinezonları gibi operatörleri bulundururlar.

Örneğin;

Bir topluluğun herhangi bir t anındaki nüfusunun, bir yıl önceki nüfusla, iki yıl önceki nüfusun toplamına eşit olduğu biliniyorsa x(t) herhangi bir t anındaki nüfus olmak üzere;

$x(t) = x(t-1) + x(t-2)$ fark denklemi bir fonksiyonel denklemdir.

1.3. Fonksiyonel Diferansiyel Denklem (FDD)

Matematik olayları

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (1.3.1.)$$

şeklindeki başlangıç değer problemini kullanarak ta modelleyebilir. Burada t_0 başlangıç noktası, x_0 başlangıç değeridir. t_0 ve x_0 reel sabit sayılardır. Belirli koşullar altında 1.3.1. başlangıç değer probleminin tek bir çözümü vardır. Bu problem;

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \qquad t \geq t_0$$

integral denklemine eşdeğerdir.

Örneğin;

Herhangi bir t anındaki nüfus değişiminin, o andaki nüfus ile orantılı olduğu biliniyorsa, nüfus modeli olarak

$x'(t) = ax(t)$ diferansiyel denklemi alınabilir.

$x(t_0) = x_0$ koşulu ile çözüm

$x(t)=x_0e^{a(t-t_0)}$ olacaktır.

1.4. Sapmalı Argümentli Diferansiyel Denklem

Eğer t noktasındaki bir çözümün değişim oranı, sadece t noktasındaki çözüme değil aynı zamanda t den farklı değerlerdeki çözüme ve çözümün türevlerine bağlı olursa bu diferansiyel denkleme sapmalı argümentli diferansiyel denklem denir.

Yani;

$$F\left(t, x(f_{01}(t)),\ldots,x(f_{0m}(t)), x'(f_{11}(t)),\ldots,x'(f_{1m}(t)),\ldots,x^{(n)}(f_{n1}(t)),\ldots,x^{(n)}(f_{nm}(t))\right)=0 \tag{1.4.1.}$$

formundaki bir fonksiyonel denklemde, bilinmeyen fonksiyon veya türevlerinin argümentlerinden en az ikisi farklı ise buna n. mertebeden sapmalı argümentli diferansiyel denklem denir. Bunu SADD ile göstereceğiz.

$x'(t)=f\left(t,x(t),x(t-\tau),x'(t-\tau)\right)$ $t\geq t_0$ denklemi böyle bir diferansiyel denklem örneğidir. Burada τ gecikme terimidir ve pozitif bir sabittir. Bu FDD

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} f\left(s,x(s),x(s-\tau),x'(s-\tau)\right)ds$$

integral denklemi ile eşdeğerdedir. Bu denklemin çözümü için $x(t_0)=x_0$ başlangıç koşulu yerine FDD'lerde $[t_0-\tau,t_0]$ aralığında sürekli bir u(t) fonksiyonu alınır.

$t_0-\tau\leq t_0$ için x(t)=u(t) fonksiyonuna başlangıç fonksiyonu adı verilir.

Buradan

$$\begin{cases} x'(t)=f\left(t,x(t),x(t-\tau),x'(t-\tau)\right) & t\geq t_0 \\ x(t)=u(t) & t_0-\tau\leq t\leq t_0 \end{cases} \tag{1.4.2.}$$

şeklinde başlangıç fonksiyon problemi (BFP) elde edilir.

Örnek olarak;

Bir topluluktaki nüfus değişiminin o andaki nüfus ile değil de belirli bir r süre önceki nüfus ile orantılı olduğunu biliyorsak;

$$x'(t) = kx(t-r)$$

SADD başka bir nüfus modeli olur. Çözüm de

$t \in [-r,0]$ için $x(t) = \theta(t)$ koşulu ile

$t \in [0,r]$ için çözüm

$\int \theta(t-r)dt = \varphi(t-r) + c$ olmak üzere

$x(t) = b\,[\varphi(t,r) - \varphi(0,r)] - \theta(0)$ olur.

Eğer gecikme terimi t nin bir fonksiyonu ise $t \geq t_0$ için $t - \tau(t)$ ler t_0 dan küçük olmak üzere başlangıç fonksiyonu $t-\tau(t)$ nin bütün değerlerini içeren aralıkta verilmelidir.

Örneğin;

$x'(t) = f\left(t, x(t), x\left(t - \cos^2 t\right)\right)$ $\quad t \geq 0$ alınırsa

$\tau(t) = \cos^2 t$ ve $\cos^2 0 = +1$ $\quad t_0 - \tau = 0 - 1 = -1$ olduğu göz önüne alınarak u(t) başlangıç fonksiyonu $-1 \leq t \leq 0$ aralığı belirtilmelidir.

1.4.1. denklemin de argümentlerin hepsinin eşit olması halinde denklem, n. mertebeden

$F\left(t, y(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right) = 0$ adi diferansiyel denklemine (ADD) dönüşür.

1.5. Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

SADD'ler bilinmeyen fonksiyon içerdiği gecikmeli değişkene göre tanımlanabilirler.

İlerlemeli FDD, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin,argümentinin yalnız bir değeri için ifade edildiği bir diferansiyel denklemdir. Bu argüment diğer bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinin argümentlerinden büyük değildir.

Yani 1.4.1 formundaki bir SADD'de

$$j = 1,2,\ldots,m \quad \text{için} \quad f_{nj}(t) = f(t) \quad \text{ve} \quad i = 0,1,\ldots,n-1 \quad \text{olsun}$$
$$j = 1,2,\ldots,m \quad \text{için} \quad f_{ij}(t) \geq f(t) \quad \text{ise}$$

buna ilerlemeli diferansiyel denklem (IDD) denir.

Örnek : $x'(t) = -x(t+t^2) + x(t+4) - t + 2$

Tarafsız (Neutral) FDD, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin sapma argümentli ve sapma argümentsiz terimleri içerdiği diferansiyel denklemlerdir.

Örnek : $x''(t) = x(t) + x'(t-1) + x''(t+1)$

Mixed (Karışık) FDD, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin, argümentinin yalnız bir değeri için ifade edildiği bir diferansiyel denklemdir. Bu argümentten daha küçük ve büyük olan argümentler vardır.

Örnek : $x'(t) = 2x(t-1) - 3tx(t+1) - 8$

Gecikmeli (Delay) FDD, bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin, argümentinin yalnız bir değeri için ifade edildiği bir diferansiyel denklemdir. Bu argüment bilinmeyen fonksiyonun ve onun denklemdeki türevlerinin argümentlerinden daha küçük değildir.

Yani 1.4.1 formundaki bir SADD'de

$$j = 1,2,\ldots,m \quad \text{için} \quad f_{nj}(t) = f(t) \quad \text{ve} \quad i = 0,1,\ldots,(n-1) \quad \text{alındığında}$$

$$f_{ij}(t) \le f(t) \quad \text{oluyorsa}$$

buna gecikmeli diferansiyel denklem (GDD) denir.

Örnek : $x'(t) + tx(te^{-t}) + \sin t = 0$

$$x''(t) = x'(t) - 2x(t - \cos^2 t) \quad \text{birer GDD'dir.}$$

Bir başka nüfus modeli örneği de;

Herhangi bir anda doğanların sayısının, o andaki nüfus ile orantılı olduğu biliniyorsa, τ ortalama ömür olmak üzere

$$x'(t) = a[x(t) - x(t-\tau)]$$

gecikmeli diferansiyel denklemi ile gösterilebilen nüfus modelidir.

Bir GDD $i = 0,1,\ldots,n-1$ $j = 1,2,\ldots,m$ ve $r_{ij} > 0$ olmak üzere

$$F(t, x^{(i)}(f_{ij}(t - r_{ij})), x^{(n)}(t)) = 0$$

şeklinde gösterilebilir.

Burada $r_{ij}(t)$ lere gecikme denir. Herbir gecikme bir r_{ij} sabitiyse GDD, bir diferansiyel fark denklemi olur.

Yukarıda yapılan sınıflamalar FDD'ler için yeterli değildir. Öyle FDD'ler vardır ki hangi tipte olduğu belli değildir.

Örneğin;

$$x'(t+1) = tx(t+2\sin t) + t^2 x(t+1) \qquad \text{FDD verilsin.}$$

$\sin t \le \frac{1}{2}$ ise GDD

$\sin t \ge \frac{1}{2}$ ise IDD olacaktır.

1.6. Doğrusal Gecikmeli Diferansiyel Denklemler

f ve a_{ij} ler belirli fonksiyonlar olmak üzere

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)\, x^{(i)}\left(t - r_j(t)\right) + f(t)$$

şeklindeki GDD'lere n. mertebeden doğrusal gecikmeli diferansiyel denklem (DGDD) denir. $f(t) \equiv 0$ ise denklem homojendir. Bu denklemlerin doğrusallığı ispatlanabilir.

Teorem : C^n, n kere türevlenebilir fonksiyonların doğrusal uzayı olmak üzere

$$L : RxC^n \to C^n$$

$L(t,x) = x^{(n)}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t) x^{(i)}\left(t - r_j(t)\right)$ operatörü doğrusaldır.

İspat : $L(t, \lambda x + \mu y) = (\lambda x + \mu y)^{(n)}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)\ (\lambda x + \mu y)^{(i)}\left(t - r_j(t)\right)$

$$= \lambda\left[x^{(n)}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)\, x^{(i)}\left(t - r_j(t)\right)\right] + \mu\left[y^{(n)}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)\, y^{(i)}\left(t - r_j(t)\right)\right]$$

$$= \lambda L(t,x) + \mu L(t,y)$$

1.7. Gecikmeli Diferansiyel Denklem Sistemleri

$k = 1,2,\ldots,n$ olmak üzere

$$x'_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{kij}(t)\, x_i(t - r_j(t)) + f_k(t) \qquad (1.7.1.)$$

formundaki n denklemden oluşan ve n bilinmeyen fonksiyon içeren bir denklem sistemine, birinci mertebeden n bilinmeyenli doğrusal gecikmeli diferansiyel denklem sistemi (DGDDS) denir.

1.7.1 denklemi;

$$X(t) = [x_k(t)]_{nx1} \qquad A_j(t) = [a_{kij}]_{nxn} \qquad H(t) = [f_k(t)]_{nx1}$$

alınarak

$$X'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t) X(t - r_j(t)) + H(t) \qquad (1.7.2.)$$

vektörel formunda yazılabilir. $H(t) \equiv 0$ ise homojen DGDDS elde edilir.

Teorem 1.7.1 n. mertebeden her DGDD, 1. mertebeden n denklem ve n bilinmeyen fonksiyon içeren bir DGDDS'ne dönüştürülebilir. Böylece 1.7.2 formunda bir denklem elde edilir.

Doğrusal adi diferansiyel denklemlerde, 1. mertebeden doğrusal diferansiyel denklem sistemine dönüştürülebiliyordu. Gecikmeli sistemlerde de benzer şekilde n. mertebeden bir DGDD, 1. mertebeden bir DGDDS'ne dönüştürülebilir.

Bunu bir örnek üzerinde gösterelim :

$$x^{(iv)}(t) = x'''(t) + 2x'''(t-1) + x''(t) + x''(t-2) + 2x'(t) - 4x'(t-1) - x(t-2) + t^2$$

4. mertebeden, sabit gecikmeli, sabit katsayılı, homojen olmayan DGDD ele alalım.

Öncelikle; $x^{i-1}(t)=x_i(t)$ dönüşümünü yapalım. $i=1,2,3,4$ için

$$x(t)=x_1(t)$$

$$x'(t)=x_2(t)$$

$$x''(t)=x_3(t)$$

$$x'''(t)=x_4(t)$$ olacaktır.

Buradan da

$$x(t)=x_1(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t)=x_1'(t)$$

$$x'(t)=x_2(t) \quad \Rightarrow \quad x_1'(t)=x_2(t) \qquad \ldots ①$$

$$x''(t)=x_2'(t) \quad \Rightarrow \quad x_2'(t)=x_3(t) \qquad \ldots ②$$

$$x'''(t)=x_2''(t)=x_3'(t) \quad \Rightarrow \quad x_3'(t)=x_4(t) \qquad \ldots ③$$

$$x^{IV}(t)=x_3''(t) \quad \Rightarrow \quad x_4'(t)=x^{IV}(t) \qquad \ldots ④$$ elde edilir.

Böylece

$$x_1'(t)=x_2(t)$$

$$x_2'(t)=x_3(t)$$

$$x_3'(t)=x_4(t)$$

$$x_4'(t)=x_4(t)+2x_4(t-1)+x_3(t)+x_3(t-2)+2x_2(t)-4x_2(t-1)-x_1(t-2)+2t$$

DGDDS veya

$$X'(t)=\sum_{j=1}^{3}A_jX(t-j+1)+H(t)$$ vektörel denklemi bulunur.

Yukarıdaki vektörel denklemde

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}_{4x1} \quad A_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4x4} \quad A_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{4x4} \quad A_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4x4}$$

$$H(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix}_{4x1} \qquad X'(t)=\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix}_{4x1} \qquad \text{olur.}$$

1.8. GDD'lerin Çözümü

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümleri, adi diferansiyel denklemlere göre biraz daha farklıdır. Örneğin bir GDD'nin $t_0 \in R$ için $x(t_0)=x_0$ başlangıç koşulu altında bir çözümü olmayabilir ya da sonsuz çoklukta olabilir. Genellikle bir GDD'nin, t_0'ın her iki yanında nasıl çözüleceği henüz bilinmemektedir. Ancak t_0'ın sağında çözüm yöntemleri geliştirilmiştir.

$$x^{(n)}=F\left(t, x^{(i)}\left(t-r_j(t)\right)\right) \qquad i=0,\ldots,n-1 \qquad j=1,2,\ldots,m$$

GDD'sini, $t_0<t$ için çözmek gerektiğinde, $x^{(i)}\left(t-r_j(t)\right)$ lerin argümentlerini t_0'dan küçük kılan t değerleri için verilmiş olmaları gerekir.

O halde;

$t<t_0$ için $x(t)=\theta(t)$, $x^{(i)}(t)=\theta^{(i)}(t)$ olacak şekilde bir $\theta(t)$ başlangıç fonksiyonu verilirse bir başlangıç değer problemini çözmek için gerekli veri elde edilmiş olur. Problemin çözülebilirliği ancak bu aşama da söz konusudur.

$X(t)=[x_1(t),\ldots,x_n(t)]^T$, $r_j(t)>0$ $\quad j=1,\ldots,m$ olmak üzere

$X(t)=F\left(t, X\left(t-r_j(t)\right)\right)$ GDD'sini ele alalım.

(1.8.1.)

$\beta \in R$, $t_0 < t < \beta$ için $\gamma < t - r_j(t) < t_0$ olacak şekilde $\gamma < t_0$ gerçel sayısı olsun.

$\beta_1 \in [t_0, \beta]$ ve $\theta(t) : [\gamma, t_0] \rightarrow A$ $A \subset R^n$ başlangıç fonksiyonu olmak üzere $[\gamma, \beta_1)$ de

$$t \in [\gamma, t_0] \Rightarrow X(t) = \theta(t)$$

$$t \in [t_0, \beta_1] \Rightarrow X(t) = F(t, X(t - r_j(t)))$$

koşullarını sağlayan X(t) fonksiyonuna 1.8.1 denkleminin bir çözümü denir. Eğer herhangi iki çözüm, ikisinin birden tanımlandığı bölgede eşit ise, denklemin çözümü tektir denir.

F ve x_i fonksiyonlarını sürekli farzedelim. $X : [\gamma, \beta_1) \rightarrow D$ sürekli bir fonksiyon ise, F, t'ye göre de sürekli olacaktır.

1.9. Çözümlerin Salınımı

Önce Regüler (düzgün) çözümün tanımı yapılacaktır.

Örneğin; $x''(t) + a(t)x(t - \tau(t)) = 0$ denkleminin x(t) çözümlerine bakılırsa $[T_x, \infty)$ ışınları üzerindedirler ve her $[T, \infty)$, $T \geq T_x$ aralığında $|x(t)| \neq 0$ dır.

Böyle bir çözüme regüler çözüm denir.

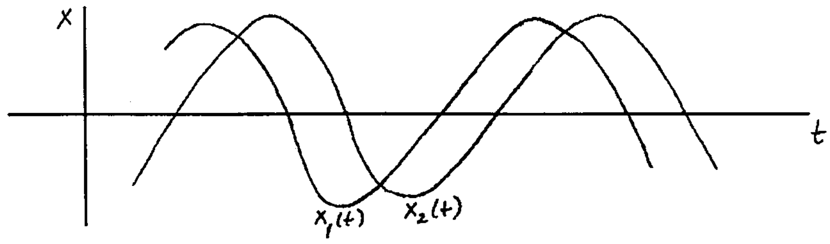
Regüler çözümlerin salınım tanımı iki şekilde verilebilir.

Tanım 1.9.1.

Trivial olmayan bir x(t) çözümünün $t \geq t_0$ için eğer keyfi büyük kökleri varsa salınımlıdır.

Yani $\lim_{n \to \infty} t_n = +\infty$ olacak şekilde x(t)'nin $\{t_n\}$ köklerinin bir dizisi vardır.

Aksi halde x(t) çözümü salınımsızdır.



Şekil 1.9.1.

Yukarıdaki şekilde $x''(t)+A(t)x(t)=0$ ın iki lineer bağımsız $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ çözümlerinin beraber yaptıkları salınımlar gösterilmektedir.

Salınımsız çözümlerde bütün $t \geq t_1$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde bir t_1 vardır.

Tanım 1.9.2. Trivial olmayan bir x(t) çözümü eğer (T,∞) aralığında işaret değiştiriyorsa bu çözüme salınımlıdır denir. T herhangi bir sayıdır.

Örnek :

$x''(t)+x(t)=0$ denkleminin $x_1(t)=\cos t$, $x_2=\sin t$ çözümleri salınımlıdır.

Örnek :

$x''(t)-x(-t)=0$ denkleminin

Salınımlı bir çözümü $x_1(t)=\sin t$

ve salınımsız bir çözümü de $x_2(t)=e^t+e^{-t}$ dir.

1.10. Karakteristik Fonksiyon – Karakteristik Kökler

Sabit katsayılı birinci mertebeden tarafsız gecikmeli diferansiyel denklem;

$$x'(t)+px'(t-\tau)+qx(t-\sigma)=0 \qquad t \geq t_0$$

şeklinde yazılabilir.

Burada q, τ, σ sabitler, $p \in R$ ve $q, \tau, \sigma > 0$ dır. Bu denklemin lineer operatörü $L(x)$ olan denklem

$$L(x) = x'(t) + px'(t-\tau) + qx(t-\sigma)$$

şeklindedir. L(x)=0 olduğunda denkleme homojen, L(x)=f olduğunda ise homojen olmayan denklem denir.

Homojen denklemlerin çözümleri basit çözümlerin lineer kombinasyonu olarak yazılır. Basit çözümlerde genelde üstel olduğundan diferansiyel denklemlerin çözümleri de üstel olarak bulunabilir.

$$L(e^{\lambda t}) = (\lambda + p\lambda e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma})e^{\lambda t} \quad \text{olur.}$$

λ sayısı $F(\lambda) = \lambda + p\lambda e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma}$ fonksiyonun bir kökü olduğunda $x = e^{\lambda t}$, $\forall t$ için $L(x) = 0$ ın bir çözümüdür. Karşıtı da doğrudur.

Burada; $L(x) = 0$ denkleminde

$F(\lambda)$ fonksiyonu L'nin karakteristik fonksiyonu

$F(\lambda) = 0$ ın kökleri de L'nin karakteristik kökleri olarak tanımlanır.

Karakteristik denklemler, homojen DGDDS'leri için de söz konusudur.

1.7.2. denkleminde gecikmeler ve $A_j(t)$ matrisleri sabit, $H(t) = 0$ alınarak

$$X'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j X(t - r_j) \qquad (1.10.1.)$$

DGDDS'i için ξ sabit bir $nx1$ vektör olmak üzere

$X(t) = e^{\lambda t}\xi$ çözüm önerisinde bulunulursa, I nxn birim matris olmak üzere

$$\left(\lambda I-\sum_{j=1}^{m}A_j e^{-\lambda r_j}\right)\xi=0$$ denklemi elde edilir.

Bu denklemin 0 dan farklı çözümlere sahip olması için gerek yeter şart olan $\lambda I-\sum_{j=1}^{m}A_j e^{-\lambda r_j}=0$ denklemi 1.10.1. DGDDS'nin karakteristik denklemidir.

BÖLÜM 2. BİRİNCİ MERTEBEDEN TARAFSIZ GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLARI

2.1. Sabit Katsayılı Birinci Mertebeden Tarafsız Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımları

$$x'(t)+px'(t-\tau)+qx(t-\sigma)=0 \qquad t\geq t_0 \qquad (2.1.1.)$$

Sabit katsayılı tarafsız gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. Burada τ, q, σ lar pozitif sabitler ve p reel bir parametredir.

Burada önce verilen denklemin çözümlerinin salınımı, p<-1 ve p>0 aralıklarında incelenecek. (Grammatikopoulos et. al. 1986) Daha sonra Sficas ve Stavroulakis (1987) tarafından 2.1.1. denkleminin çözümlerinin salınımı için ortaya koydukları gerek ve yeter koşulu içeren teorem ve ispatı verilecektir.

P<-1 Durumu

2.1.1. tarafsız gecikmeli diferansiyel denkleminin karakeristik denklemi

$$F(\lambda)=\lambda+\lambda pe^{-\lambda\tau}+qe^{-\lambda\sigma}=0 \quad \text{dır.}$$

Burada q,τ,σ pozitif sabit, $p<-1$ dir. $\lambda\leq 0$ için

$F(\lambda)=-\lambda\left(-pe^{-\lambda\tau}-1\right)+qe^{-\lambda\sigma}>0$ elde edilir. Böylece 2.1.1. denkleminin sahip olabileceği reel kökleri pozitiftir.

p>0 Durumu

p,q,τ ve σ nın pozitif sabitler olduğu bu durumda

$F(\lambda)=\lambda+\lambda pe^{-\lambda\tau}+qe^{-\lambda\sigma}=0$ karakteristik denklemi, negatif olmayan reel köklere sahip olamaz.

Aşağıda çözümlerin salınımları ile ilgili bazı teoremler verilmiştir.

Teorem 2.1.1. (2.1.1.) denklemi ele alınsın. q,τ ve σ lar pozitif sabitler p<-1 olduğunda denklemin her salınımsız çözümü $t\to\infty$ için $+\infty$ veya $-\infty$ a gider.

Teorem 2.1.2. (2.1.1.) denkleminde; q,τ ve σ pozitif sabitler p<-1, $\tau>\sigma$ ve $\frac{q(\sigma-\tau)}{p+1}>\frac{1}{e}$ olduğu kabul edildiğinde denklemin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 2.1.3. (2.1.1.) denklemini alalım. p,q,σ ve τ pozitif sabitler, denklemin her salınımsız çözümü, $t\to\infty$ için sıfıra gider.

Eğer $\tau\geq\sigma>0$ ise (2.1.1.) denklemi daima salınımsız çözümlere sahip olur. Burada $\lim\limits_{x\to-\infty}F(\lambda)=-\infty$ iken (2.1.1.) denkleminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda)=\lambda+\lambda pe^{-\lambda\tau}+qe^{-\lambda\sigma}=0 \qquad \text{ve } F(0)=q>0$$

Teorem 2.1.4. (2.1.1.) denklemi ele alınsın. p,q,τ,σ pozitif sabitler olsun. Bu denklemin bütün çözümlerinin salınımı için gerek koşul $\sigma>\tau$ olmasıdır.

Teorem 2.1.5. (2.1.1.) denklemini alalım. p, q, τ ve σ lar pozitif sabitler, $\sigma > \tau$ ve $\frac{q(\sigma-\tau)}{1+p} > \frac{1}{e}$ olduğunda denklemin her çözümü salınır.

Bu teoremde çözümlerin salınımı için yeter koşuldur.

Bir sonraki teorem, Sficas ve Stavroulakis (1987) tarafından (2.1.1.) tarafsız gecikmeli diferansiyel denklemin çözümlerinin salınımı için verdikleri gerek ve yeter koşulu içerir. Bu teorem ispatı ile birlikte verilecektir.

Teorem 2.1.6. (2.1.1.) Sabit katsayılı TGDD ele alınsın. τ, q, σ lar için önceki koşullar geçerlidir. (2.1.1.) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda + p\lambda e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma} = 0 \qquad (2.1.6.)$$

karakteristik denkleminin gerçel köklerinin olmamasıdır.

$P = 0$ olduğunda 2.1.1. denklemi $x'(t) + qx(t-\sigma) = 0$ (2.1.7)

olur.

Ladas'a göre (1979) (2.1.7.) denkleminin bütün çözümlerinin salınımı için gerek ve yeter koşul $q\sigma > \frac{1}{e}$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır. (Sficas ve Stavroulakis, 1987)

Bu durumda karakteristik denklem,

$$\lambda + qe^{-\lambda\sigma} = 0 \qquad (2.1.8.)$$

$q\sigma > \frac{1}{e}$ 2.1.8. ile düşünülürse $\lambda + \frac{1}{\sigma e^{\lambda\sigma+1}} < 0$ olacaktır ki bu 2.1.8. denkleminin gerçel köklerinin olamamasına eşdeğerdir.

$P = -1$ ise (2.1.1.) denklemi $x'(t) - x'(t-\tau) + qx(t-\sigma) = 0$ (2.1.9.)

P = -1 ise (2.1.1.) denklemi $x'(t)-x'(t-\tau)+qx(t-\sigma)=0$ (2.1.9.)

olur. Bu durumda Ladas ve Sficas'a (1986) göre 2.1.9. denkleminin her çözümü salınımlıdır. (Sficas ve Stavroulakis,1987)

Bu iki durum dışında teoremin ispatı için p'nin şu üç durumu düşünülmelidir.

i) $-1 < p < 0$ ii) $p > 0$ iii) $p < -1$

Aşağıdaki lemma (2.1.1.) denkleminin pozitif bir x(t) çözümünden asimptotik özellikli çözümler oluşturulabileceğini gösterir.

Lemma 2.1.1. x(t), (2.1.1.) denkleminin pozitif bir çözümü olsun.

a) p>-1 için $z(t)=x(t)+px(t-\tau)$ fonksiyonu, (2.1.1.) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Azalandır ve $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)=0$ dir.

b) p<-1 için $z(t)=-x(t)-px(t-\tau)$ fonksiyonu, (2.1.1.) denkleminin pozitif bir çözümüdür. Artandır ve $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)=+\infty$ dur.

Teorem 2.1.6. nın ispatı

İspatı olmayana ergi metoduyla yapacağız.

(2.1.1.) denkleminin salınımsız bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul, (2.1.6) karakteristik denkleminin bir gerçel kökünün olmasıdır.

Gereklilik : 2.1.6. denkleminin gerçel bir kökü olduğu kabul edilsin. Bu durumda (2.1.1) denklemi $x(t)=e^{\lambda t}$ salınımsız çözümüne sahiptir.

Yeterlilik : (2.1.1.) denkleminin bütün çözümleri salınımsız olmasın. Böylece 2.1.1 denkleminin pozitif x(t) çözümü var olur.

Artık şu durumu inceleyebiliriz;

i) -1< p <0 durumu

$$z(t)=x(t)+px(t-\tau) \qquad (2.1.10.)$$

olsun.

Lemma (2.1.1.)'e göre z(t) pozitif ve azalandır, x(t) de azalan olarak düşünülebilir.

$z(t)=x(t)+px(t-\tau)$ denkleminde $-1< p <0$ olmasından dolayı

$z(t)<x(t)$ olur. x(t) azalan olduğu için

$x(t)<x(t-\sigma)$

$x(t)<x(t-\sigma)$ dır. Buradan da

(2.1.11.)

bulunur. Şimdi

$$\Lambda(z)=\{\lambda>0 \;/\; z'(t)+\lambda z(t)<0\} \qquad (2.1.12.)$$

kümesi tanımlansın.

2.1.1. denkleminden, 2.1.10. ve 2.1.11. ile birlikte

$0=z'(t)+qx(t-\sigma)>z'(t)+qz(t)$ elde edilir. Böylece $q\in\Lambda(z)$ olur yani $\Lambda(z)$ boş değildir.

Bununla birlikte 2.1.1. denkleminden

$0=z'(t)+qx(t-\sigma)=z'(t)+qz(t-\sigma)-pqx(t-\tau-\sigma)$ bulunur.

Bunu t den $t+\tau$ ya integre ederek;

$$z(t+\tau)-z(t)+q\int_t^{t+\tau} z(s-\sigma)ds-pq\int_t^{t+\tau} x(s-\tau-\sigma)ds=0 \qquad (2.1.13.)$$

elde edilir. z(t) ve x(t) pozitif azalan olduğu için 2.1.13 denklemi

$$z(t+\tau)-z(t)+q\tau z(t+\tau-\sigma)-pq\tau x(t-\sigma)\le 0$$

eşitsizliğini sağlar. Bu da $-1< p <0$ olduğundan

$-pq\tau x(t-\sigma) \le z(t)$ olmasını gerektirir.

Sonuçta,

$$0 = z'(t) + qx(t-\sigma) \le z'(t) + \left(\frac{1}{-p\tau}\right) z(t) \quad \text{bulunur.}$$

Burada $\lambda_0 = \frac{1}{-p\tau}$, z'ye bağlı değil ve $\Lambda(z)$'nin üst sınırıdır.

Yani $\Lambda(z)$ boş değildir ve üsten sınırlıdır.

$$\lambda \in \Lambda(z) \text{ olsun ve } w(t) \equiv Tz = z(t) + p(z-\tau) \tag{2.1.14.}$$

ele alınsın.

$$m = \inf_{\lambda>0} \left\{ -\lambda - p\lambda e^{\lambda\tau} + qe^{\lambda\sigma} \right\} \tag{2.1.15.}$$

olsun.

Çelişki elde edebilmek için (2.1.6.) karakteristik denkleminin gerçek köklerinin olmadığını kabul edelim. Ayrıca

$\lim_{\lambda\to\infty} \left(-\lambda - p\lambda e^{\lambda\tau} + qe^{\lambda\sigma}\right) = +\infty$ dur ve bu yüzden m pozitiftir.

Şimdi de $\lambda + m \in \Lambda(w)$ olduğu gösterilecektir.

z(t) ve w(t) nin her ikisinin de denklemin çözümleri olduğu düşünülerek,

$$x'(t) + px'(t-\tau) + qx(t-\sigma) = 0 \quad \text{ise}$$

$$w'(t) + pw'(t-\tau) + qw(t-\sigma) = 0 \quad \text{dır.}$$

Buradan da

$$\underbrace{z'(t) + pz'(t-\tau)} + pz'(t-\tau) + p^2 z'(t-2\tau) + \underbrace{qz(t-\sigma)} + pqz(t-\tau-\sigma) = 0 \text{ olur.}$$

Yine

z(t) ninde çözüm olduğu düşünülerek $z'(t)+pz'(t-\tau)+qz(t-\sigma)=0$

olursa,

$$pz'(t-\tau)+p^2z'(t-2\tau)+pqz(t-\tau-\sigma)=0$$

$$\underbrace{z'(t-\tau)+pz'(t-2\tau)}+qz(t-\tau-\sigma)=0$$

$$w'(t-\tau)=-qz(t-\tau-\sigma)$$

$$w'(t)=-qz(t-\sigma) \qquad (2.1.16.)$$

elde edilir.

$u(t)=e^{\lambda t}z(t)$ tanımlayalım. u(t) azalandır.

$z(t)=e^{-\lambda t}u(t)$ yazılabileceğinden

$w(t)=e^{-\lambda t}u(t)+pe^{-\lambda t}e^{\lambda t}u(t-\tau)$ ve

$w'(t)=-qe^{-\lambda t}e^{\lambda\sigma}u(t-\sigma)$ olacaktır.

Buradan u(t) nin azalan olmasından $u(t)\leq u(t-\sigma)$ dır ancak negatif değerlerle çarpıldığından,

$$w'(t)+(\lambda+m)w(t)=e^{-\lambda t}\left[-qe^{\lambda\sigma}u(t-\sigma)+(\lambda+m)u(t)+(\lambda+m)pe^{\lambda\tau}u(t-\tau)\right]$$

$$\leq e^{-\lambda t}u(t)\left[-qe^{\lambda\sigma}+\lambda+m+\lambda pe^{\lambda\tau}+mpe^{\lambda\tau}\right]$$

$$\leq e^{-\lambda t}u(t)\left[\lambda+p\lambda e^{\lambda\tau}-qe^{\lambda\sigma}+m\right]$$

$$\leq e^{-\lambda t}u(t)\underbrace{\left[-m+m\right]}_{0}=0 \quad \text{elde edilir.}$$

Buradan da $(\lambda+m)\in\Lambda(w)$ olacaktır.

$z\equiv z_0 \qquad w\equiv Tz_0=z_1 \qquad z_2\equiv Tz_1 \qquad z_3\equiv Tz_2\ldots z_n\equiv Tz_{n-1} \qquad n=1,2,\ldots$

olsun.

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda \in \Lambda(z) & \lambda \in \Lambda(z_0) \\ \lambda + m \in \Lambda(w) & \lambda + m \in \Lambda(z_1) \end{array}\right\} \quad \lambda + nm \in \Lambda(z_n) \quad \text{dir.}$$

Bütün $\Lambda(z_n)$ ler için λ_0 ortak bir üst sınır olduğundan bu çelişkidir.

ii) p>0 durumu

Yine $z(t) = x(t) + px(t-\tau)$ ve $\Lambda(z) = \{\lambda > 0 : z'(t) + \lambda z(t) < 0\}$ olsun.

2.1.1. denkleminin karakteristik denklemi kullanılarak,

$$F(\lambda) = \lambda + \lambda p e^{-\lambda\tau} + q e^{-\lambda\sigma} = 0 \quad \text{olur.}$$

Grammatikopoulos, Grove ve Ladas'a (1986) göre,

$$\lim_{x \to -\infty} F(\lambda) = -\infty \quad \text{iken eğer} \quad \tau \geq \sigma > 0 \quad \text{ise} \quad F(0) = q > 0 \quad \text{dır.}$$

Bu nedenle Teorem 2.1.3. ten (2.1.1.) denklemi daima salınımsız çözümlere sahiptir. Böylece $\sigma > \tau$ denklemin bütün çözümlerinin salınımları için gerekli bir şarttır.

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + px(t-\tau) && \text{Lemma 2.1.1. e göre z(t), pozitif ve azalandır.} \\ &< x(t-\sigma) + px(t-\sigma) && \text{x(t) de azalan olarak düşünülebilir.} \\ &= (1+p)x(t-\sigma) \end{aligned}$$

O halde

$$x(t-\sigma) > \frac{1}{1+p} z(t) \quad \text{dir.}$$

(2.1.1.) denkleminden

$$0 = z'(t) + qx(t-\sigma)$$

$$0 > z'(t) + \frac{q}{1+p} z(t) \quad \text{olur. Böylece} \quad \frac{q}{1+p} \in \Lambda(z) \quad \text{dir.}$$

Yani $\Lambda(z)$ boş değildir. Şimdi $\Lambda(z)$ nin üstten sınırlı olduğunu gösterelim, (2.1.1.) denklemi otonomdur ve (2.1.1.) denkleminin çözümlerinin bir lineer kombinasyonu olarak (2.1.10.) denkleminde verilen z(t) nin kendisi (2.1.1.) denkleminin bir çözümüdür. Bu nedenle

$$z'(t)+pz'(t-\tau)+qz(t-\sigma)=0 \tag{2.1.17.}$$

olur.

Ayrıca $z'(t)=qx(t-\sigma)<0$ z(t) azalandır, $z'(t)<0$ olur.

$z''(t)=-qx'(t-\sigma)>0$ x(t) azalandı, $x'(t)<0$ olacaktır.

Bu durumda

$z'(t)$ artandır ve $z'(t)>z'(t-\tau)$ olur.

2.1.17. denklemi

$(1+p)z'(t-\tau)+qz(t-\sigma)\leq 0$ veya

$$z'(t)+\frac{q}{1+p}z(t-(\sigma-\tau))\leq 0 \tag{2.1.18.}$$

olur.

Bu eşitsizliği $t-((\sigma-\tau)/2)$ den t ye integre edersek

$$\int_{t-\frac{(\sigma-\tau)}{2}}^{t} z'(s)ds+\frac{q}{1+p}\int_{t-\frac{(\sigma-\tau)}{2}}^{t} z(s-(\sigma-\tau))ds\leq c_1$$ elde edilir.

z(t) pozitif ve azalan olmasından

$$z(t)-z\left(t-\frac{(\sigma-\tau)}{2}\right)+\frac{q}{1+p}\left(\frac{\sigma-\tau}{2}\right)z(t-(\sigma-\tau))\leq c_1 \tag{2.1.19.}$$

olur.

2.1.18. eşitsizliği t den $t+\frac{(\sigma-\tau)}{2}$ ye integre edilirse,

$$\int_t^{t+\frac{(\sigma-\tau)}{2}} z'(s)ds + \frac{q}{1+p}\int_t^{t+\frac{(\sigma-\tau)}{2}} z(s-(\sigma-\tau))ds \le c_2 \quad \text{ise}$$

$$z\left(t+\frac{(\sigma-\tau)}{2}\right)-z(t)+\frac{q}{1+p}\frac{(\sigma-\tau)}{2}z\left(t-\frac{(\sigma-\tau)}{2}\right) \le c_2 \qquad (2.1.20.)$$

elde edilir. 2.1.19. ve 2.1.20. 'de sabitler $c_1=c_2=0$ kabul edilebilir. 2.1.19. da z(t) pozitif olduğundan atılabilir. Aynı şekilde 2.1.20 de $z\left(t+\frac{(\sigma-\tau)}{2}\right)$ atılabilir.

Bu durumda 2.1.19.

$$\frac{q}{1+p}\cdot\frac{(\sigma-\tau)}{2}z(t-(\sigma-\tau)) \le z\left(t-\frac{(\sigma-\tau)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad z(t-(\sigma-\tau)) \le \frac{2(1+p)}{q(\sigma-\tau)}z\left(t-\frac{(\sigma-\tau)}{2}\right) \qquad (2.1.21.)$$

olur.

2.1.20. denkleminden ise

$$\frac{q}{1+p}\cdot\frac{(\sigma-\tau)}{2}\,z\left(t-\frac{\sigma-\tau}{2}\right) \le z(t) \quad \Rightarrow \quad z\left(t-\frac{\sigma-\tau}{2}\right) \le \frac{2(1+p)}{q(\sigma-\tau)}z(t)$$

(2.1.22.)

elde edilir. 2.1.21. ve 2.1.22. den

$$z(t-(\sigma-\tau)) \le \left[\frac{2.(1+p)}{q.(\sigma-\tau)}\right]^2 z(t) \qquad (2.1.23.)$$

bulunur. Daha sonra $z'(t)+qx(\tau-\sigma)=0$ denklemi $[t-\sigma+\tau, t]$ aralığında integre edilirse

$$z(t)-z(t-(\sigma-\tau))+q\int_{t-(\sigma-\tau)}^{t} x(s-\sigma)ds=0$$ elde edilir.

x(t) pozitif ve azalan, z(t) de pozitif olduğundan

$$q(\sigma-\tau)x(t-\sigma)\leq z(t-(\sigma-\tau)) \qquad (2.1.24.)$$

elde edilir.

2.1.23. ve 2.1.24. ten

$$x(t-\sigma)\leq \frac{[2(1+p)]^2}{q^3(\sigma-\tau)^3}z(t)$$ bulunur.

Böylece,

$$0=z'(t)+qx(t-\sigma)\leq z'(t)+\left[\frac{4(1+p)^2}{q^2(\sigma-\tau)^3}\right]z(t)$$ olur.

Bu nedenle, $\lambda_0=\left[\frac{4(1+p)^2}{q^2(\sigma-\tau)^3}\right]$, z'ye bağlı değil ve $\Lambda(z)$ nin bir üst sınırıdır.

Dolayısıyla $\Lambda(z)$ boş değildir ve üsten sınırlıdır.

Tıpkı $-1<p<0$ durumundaki gibi $\lambda\in\Lambda(z)$ olduğu düşünülerek ve w(t) ile m aynı şekilde tanımlayıp

$$\mu=\frac{m}{1+pe^{\lambda_0\tau}}>0$$ alınarak $\lambda+\mu\in\Lambda(w)$ olduğu gösterilecektir.

Yine,

$$w'(t)+(\lambda+\mu)w(t)=e^{-\lambda t}\left[-qe^{\lambda\sigma}u(t-\sigma)+(\lambda+\mu)u(t)+(\lambda+\mu)pe^{\lambda\tau}u(t-\tau)\right]$$

$$\leq e^{-\lambda t}u(t-\sigma)\left[-qe^{\lambda\sigma}+\lambda+\mu+\lambda pe^{\lambda\tau}+\mu pe^{\lambda\tau}\right]$$ (u(t) azalandı)

$$\leq e^{-\lambda t}u(t-\sigma)\left[-m+\mu\left(1+pe^{\lambda_0\tau}\right)\right]=0$$

elde edilir. Bu sonuç $\lambda+\mu\in\Lambda(w)$ olmasını gerektirir.

i durumunda olduğu gibi bu bir çelişkidir.

iii) p<-1 durumu

$\lambda \geq \sigma$ olsun. $z(t) = -x(t) - px(t-\tau)$ dir. z(t) pozitif ve artandır.

x(t) de artan olur.

O halde,

$$z(t) = -x(t) - px(t-\tau) \text{ ise} \tag{2.1.25.}$$

$$-px(t-\tau) > z(t)$$

$$x(t-\tau) > \frac{-1}{p} z(t) \qquad \text{ya da} \qquad x(t-\sigma) > \frac{1}{(-p)} z(t) \qquad \text{dir.}$$

$\Lambda(z) = \{\lambda > 0 : -z'(t) + \lambda(z) < 0\}$ kümesini tanımlayalım.

2.1.1. denkleminden

$$0 = -z'(t) + qx(t-\sigma) > -z'(t) + \frac{q}{(-p)} z(t) \quad \text{olur.}$$

Böylece,

$$\frac{q}{(-p)} \in \Lambda(z) \quad \text{ve} \quad \Lambda(z) \text{ boş değildir.}$$

Yine 2.1.25 ten $x(t-\tau) = \frac{1}{-p}[x(t) + z(t)]$ dir.

İki tarafta da $\tau - \sigma$ eklenirse

$$z'(t) = qx(t-\sigma)$$

$$= \frac{q}{-p}[x(t+\tau-\sigma) + z(t+\tau-\sigma)] \tag{2.1.26.}$$

olur.

2.1.26. denklemini $t-\tau$ dan t ye integre edelim. x(t) ile z(t) pozitif bir artan olduğu için

$$\int_{t-\tau}^{t} z'(s)ds = \int_{t-\tau}^{t} \frac{q}{-p}\left(x(s+\tau-\sigma)+z(s+\tau-\sigma)\right)ds$$

$$z(t)-z(t-\tau) \geq \frac{q}{-p}\tau x(t-\sigma)$$

veya $x(t-\sigma) \leq \frac{-p}{q\tau} z(t)$ olur.

Sonuçta $0=-z'(t)+qx(t-\sigma) \leq -z'(t)+\left(\frac{-p}{\tau}\right)z(t)$ bulunur.

Burada $\lambda_0 = \frac{-p}{\tau}$ z'ye bağlı değildir ve $\Lambda(z)$ nin bir üst sınırıdır.

O halde $\Lambda(z)$ boş değildir ve üstten sınırlıdır. Şimdi $\lambda+\mu \in \Lambda(w)$ olduğunu gösterilim.

$\lambda \in \Lambda(z)$ ve $w(t)=-z(t)-pz(t-\tau)$ kabul edilsin.

z, 2.1.1. denkleminin de çözümüdür.

$$\underbrace{z'(t)+pz'(t-\tau)}_{-w'(t)}+qz(t-\sigma)=0$$

yani, $w'(t)=qz(t-\sigma)$ dır.

Çelişki elde edebilmek için karakteristik denklemin gerçek köklerinin olmadığını kabul edelim.

$m=\inf\limits_{\lambda>0}\left\{\lambda+p\lambda e^{-\lambda\tau}+qe^{-\lambda\sigma}\right\}$ olsun. m pozitiftir.

$\mu = \dfrac{m}{-pe^{\lambda_0 \tau}} > 0$ olmak üzere $\lambda + \mu \in \Lambda(w)$ olduğunu gösterelim.

$u(t) = e^{-\lambda\tau} z(t) \quad \Rightarrow \quad u'(t) = [z'(t) - \lambda z(t)]e^{-\lambda\tau} > 0$ olur.

Bu yüzden u artandır.

$z(t) = e^{-\lambda\tau} z(t)$ ise

$$\begin{aligned} -w'(t) + (\lambda+\mu)w(t) &= e^{\lambda t}\left[-qe^{-\lambda\sigma}u(t-\sigma) - (\lambda+\mu)u(t) + (\lambda+\mu)(-p)e^{-\lambda\tau}u(t-\tau)\right] \\ &< e^{\lambda t}u(t)(t-\sigma)\left[-qe^{-\lambda\sigma} - (\lambda+\mu) + (\lambda+\mu)(-p)e^{-\lambda\tau}\right] \\ &\le e^{\lambda t}u(t-\sigma)\left[-m + \mu(-p)e^{-\lambda\tau} - \mu\right] \\ &< e^{\lambda t}u(t-\sigma)\left[-m + \mu(-p)e^{\lambda_0\tau}\right] = 0 \end{aligned}$$

sonucu çıkar.

Bu $\lambda + \mu \in \Lambda(w)$ olmasını gerektirir ve çelişkiye ulaşılır.

P<-1 de ispatın tamamlanması için $\sigma > \tau$ durumu kabul edilmelidir.

$$z(t) = -x(t) - px(t-\tau) + q\int_{t-\sigma}^{t-\tau} x(s)ds \qquad (2.1.27.)$$

olarak tanımlansın. Bu 2.1.1. denkleminin pozitif bir çözümüdür.

2.1.1. denkleminden

$$z'(t) = \underbrace{-x'(t) - px'(t-\tau)} + qx(t-\tau) - qx(t-\sigma)$$

$$z'(t) = qx(t-\tau) > 0$$

bulunur. Bu z(t) nin artan olmasını gerektirir ve x(t) de artan olur.

2.1.27. den

$$z'(t) < -px(t-\tau) + q\int_{t-\sigma}^{t-\tau} x(s)ds < -px(t-\tau) + q(\sigma-\tau)x(t-\tau)$$

$$= [q(\sigma-\tau)-p]\,x\,(t-\tau)$$

ya da

$$x(t-\tau) > \frac{1}{q(\sigma-\tau)-p}z(t) \quad \text{elde edilir.}$$

$\Lambda(z) = \{\lambda > 0 : -z'(t) + \lambda z(t) < 0\}$ idi.

$$0 = -z'(t) + qx(t-\tau)$$

$$0 > -z'(t) + \frac{q}{q(\sigma-\tau)-p}z(t) \quad \text{ve bu nedenle} \quad \frac{q}{q(\sigma-\tau)-p} \in \Lambda(z) \quad \text{dir.}$$

$\Lambda(z)$ boş değildir.

Z(t), 2.1.1. denkleminin bir çözümü olduğundan

$$z'(t) + pz'(t-\tau) + qz(t-\sigma) = 0 \quad \text{dir.}$$

Yani $z'(t) + pz'(t-\tau) \leq 0$ olur.

Ancak $z'(t) = qx(t-\tau)$ idi.

Böylece $qx(t-\tau) + pz'(t-\tau) \leq 0$ elde edilir.

Bu eşitsizlik $[t, t+\tau]$ aralığında integre edildiğinde $x(t)$ pozitif ve artan, $z(t)$ de pozitif olduğundan

$$0 \geq q\int_{t}^{t+\tau} x(s-\tau)ds + pz(t) - pz(t-\tau)$$

$$\geq q\tau x(t-\tau) + pz(t) - pz(t-\tau)$$

$$> q\tau x(t-\tau) + pz(t)$$

veya $\quad x(t-\tau)\le \frac{(-p)}{q\tau}z(t)$ olarak bulunur.

Sonuçta, $0=-z'(t)+qx(t-\tau)\le -z'(t)+\frac{-p}{\tau}z(t)$ elde edilir.

$\lambda_0=\frac{-p}{t}$ $\quad \Lambda(z)$ nin bir üst sınırıdır. λ_0, z'ye bağlı değildir.

$\Lambda(z)$ boş değildir ve üstten sınırlıdır.

$\lambda\in\Lambda(z)$ ve $w(t)=-z(t)-pz(t-\tau)+q\int_{t-\sigma}^{t-\tau}z(s)ds$ fonksiyonu alınsın.

z(t) ile w(t) 2.1.1. denkleminin çözümleri idi.

$$w'(t)=\underbrace{-z'(t)-pz'(t-\tau)}+qz(t-\tau)-\underbrace{qz(t-\sigma)}$$

buradan

$w'(t)=qz(t-\tau)$ elde edilir.

$m=\inf\limits_{\lambda>0}\{\lambda+p\lambda e^{-\lambda\tau}+qe^{-\lambda\sigma}\}$ ve $\quad u(t)=e^{-\lambda t}z(t)$ olsun.

$\mu=\frac{me^{\lambda_0\tau}}{(q/\lambda_0)}$ alınsın u(t) nin artan artan $\sigma>\tau$ olduğu düşünülerek;

$$-w'(t)+(\lambda+\mu)w(t)=e^{\lambda t}\Big[-qe^{-\lambda\tau}u(t-\tau)-(\lambda+\mu)u(t)+(\lambda+\mu)(-p)e^{-\lambda\tau}u(t-\tau)$$
$$+(\lambda+\mu)qe^{-\lambda t}\int_{t-\sigma}^{t-\tau}e^{\lambda s}u(s)ds\Big]$$

$$<e^{\lambda t}u(t-\tau)\left[-qe^{-\lambda\tau}-(\lambda+\mu)+(\lambda+\mu)(-p)e^{-\lambda\tau}+(\lambda+\mu)q\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\left(e^{\lambda(t-\tau)}-e^{\lambda(t-\sigma)}\right)\right]$$

$$=e^{\lambda t}u(t-\tau)\left[-qe^{-\lambda\tau}-\lambda-\mu+\lambda(-p)e^{-\lambda\tau}+\mu(-p)e^{-\lambda\tau}+qe^{-\lambda\tau}-qe^{-\lambda\sigma}+\frac{\mu q}{\lambda}e^{-\lambda\tau}-\frac{\mu q}{\lambda}e^{-\lambda\sigma}\right]$$

$$<e^{\lambda t}u(t-\tau)\left[-\lambda-p\lambda e^{-\lambda\tau}-qe^{-\lambda\sigma}-\mu pe^{-\lambda\tau}+\frac{\mu q}{\lambda}e^{-\lambda\tau}\right]$$

$$\leq e^{\lambda t}u(t-\tau)\left[-m+\mu e^{-\lambda_0\tau}\left(\frac{q}{\lambda_0}+(-p)\right)\right]=0$$

Bu sonuç $\lambda+\mu\in\Lambda(w)$ olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir.

2.2. Değişken Katsayılı Tarafsız Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımları

Bu bölümde iki denklemle çalışılacaktır. İlk olarak birinci mertebeden değişken katsayılı tarafsız gecikmeli diferansiyel denklem

$$\frac{d}{dt}[x(t)+p(t)\,x(t-\tau)]+Q(t)\,x(t-\sigma)=0 \qquad t\geq t_0 \qquad (2.2.1.)$$

burada A2.2.1. $p(t),Q(t)\in C([t_0,\infty];R)$

A2.2.2. $t\geq t_0$ için $Q(t)\geq 0$ olduğu varsayılmıştır.

A2.2.3. q sabit iken $t\geq t_0$ için $Q(t)\geq q>0$ olduğu varsayılmıştır.

$p=\max\{\tau,\sigma\}$ olduğunda başlangıç fonksiyonu $\phi(t)\in C([t_0-p,t_0];R)$ olsun.

İkinci verilen denklem ise

$$\frac{d}{dt}[x(t)+px(t-\tau)]+Q(t)\,x(t-\sigma)=0 \qquad t\geq t_0 \qquad (2.2.2.)$$

burada τ ve σ lar pozitif sabitler $Q(t)\in C([t_0,\infty];R)$

Reel parametre p ise $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ arasındadır.

Lemma 2.2.1. $\mu = \text{sbt.} > 0$ ve $p(t) \in C([t_0,\infty);(0,\infty))$ iken

$\liminf\limits_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}$ koşulu sağlansın.

O halde

i) $x'(t) - p(t)x(t+\mu) \geq 0 \quad t \geq t_0$ diferansiyel eşitsizliğinin pozitif çözümleri yoktur.

ii) $x'(t) + p(t)x(t-\mu) \leq 0 \quad t \geq t_0$ diferansiyel eşitsizliğinin pozitif çözümleri yoktur.

iii) $x'(t) - p(t)x(t+\mu) \leq 0 \quad t \geq t_0$ diferansiyel eşitsizliğinin negatif çözümleri yoktur.

iv) $x'(t) + p(t)x(t-\mu) \geq 0 \quad t \geq t_0$ diferansiyel eşitsizliğinin negatif çözümleri yoktur.

Bu lemma Ladas ve Stavroulakis'in (1982) gecikmeli diferansiyel eşitsizliklerin bir sonucunun geliştirilmiş versiyonudur. (Grammatikopoulos et.al 1986)

x(t), 2.2.1. denkleminin bir çözümü olsun.

$$z(t) = x(t) + p(t)x(t-\tau)$$

fonksiyonu

$$z'(t) + R(t)\,z'(t-\tau) + Q(t)\,z(t-\sigma) = 0 \qquad t \geq t_0 \tag{2.2.3.}$$

denkleminin sürekli diferansiyellenebilir bir çözümüdür.

Burada

$R(t) = p(t-\sigma)\dfrac{Q(t)}{Q(t-\tau)}$ olur.

Şimdi verilecek teoremler ve ispatlar dört ayrı bölüm altında incelenecektir.

A) p<-1 Durumu

Teorem 2.2.1. (2.2.2) denklemi ele alınsın. $p<-1, \tau>\sigma$ ve

$$-\frac{1}{p}\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+(\tau-\sigma)} Q(s)ds > \frac{1}{e} \qquad (2.2.4.)$$

olsun. Bu durumda (2.2.2.) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat : (2.2.2.) denkleminin negatif bir çözümü, (2.2.2.) denkleminin bir çözümü olduğundan, çözümün pozitif olduğu durumda teoremi ispatlamak yeterlidir. x(t), (2.2.2.) denkleminin pozitif bir çözümü olduğu kabul edilsin.

$z(t)=x(t)+px(t-\tau)$ olsun

O zaman z(t)<0, $z'(t)=-Q(t)x(t-\sigma)$

$z'(t)<0$

ve $z(t)>px(t-\tau)$ sonucu çıkar.

Yani,

$$z'(t)-\left(\frac{-1}{p}\right)Q(t)z(t+(\tau-\sigma))<0 \text{ olur.}$$

Ancak 2.2.4. ve Lemma 2.2.1.'in iii) şıkkına göre bu eşitsizliğin negatif bir çözümünün olması imkansızdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.2. (2.2.2) denklemi ele alınsın. $p<-1, \tau>\sigma$ ve τ periyotlu Q(t) periyodik bir fonksiyonu olsun. Ayrıca

$$-\frac{1}{p+1}\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+(\tau-\sigma)} Q(s)ds > \frac{1}{e} \qquad (2.2.5.)$$

kabul edilsin. O zaman denklemin her çözümü salınır.

İspat : Çelişki elde edebilmek için pozitif bir x(t) çözümü olsun.

$$z(t) = x(t) + px(t-\tau)$$

ve $\quad w(t) = z(t) + pz(t-\tau)$ olduğu kabul edilsin.

τ periyotlu Q(t) periyodik olduğundan z ve w, (2.2.2.) nin çözümleridir.

Böylece Teorem 2.2.1. deki gibi

$z(t)<0$ ve $z'(t) < 0$ elde edilir. (z(t) azalandı.)

-z(t) çözüm kabul edilirse

$w(t)>0$ ve $w'(t) > 0$ olmalıdır.

Böylece,

$$\begin{aligned} w(t) &= z(t) + pz(t-\tau) \\ &< (1+p)z(t-\tau) \end{aligned}$$

ve

$$-\frac{1}{p+1}Q(t)\,w(t+(\tau-\sigma)) \leq -Q(t)\,z(t-\sigma) = w'(t) \tag{2.2.6.}$$

olur. 2.2.6. eşitsizliğinden de

$$w'(t) - \left(\frac{-1}{1-p}\right)Q(t)\,w(t+(\tau-\sigma)) \geq 0 \qquad \text{sonucu çıkar.}$$

Ancak 2.2.5. ve Lemma 2.2.1.'in i) şıkkından eşitsizliğin pozitif çözümleri yoktur. Bu ise çelişkidir.

Teorem 2.2.3. (2.2.1.) denklemi ele alınsın. Eğer $p<-1$ ise bu denklemin her salınımsız çözümü $t \to \infty$ için $+\infty$ ya da $-\infty$'a gider.

Teorem 2.2.4. A2.2.1., A2.2.3. şartları, $p_1 \leq p(t) \leq p_2 < -1$ ve

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t-\sigma} \left[-\frac{Q(s-\tau)}{p(s-\sigma)} \right] ds > \frac{1}{e}$$ şartıyla birlikte sağlansın.

Bu durumda 2.2.1. denkleminin her çözümü salınımlıdır.

B) p>0 Durumu

Teorem 2.2.5. (2.2.2.) denkleminde p>0 olsun. Bu durumda denklemin her salınımsız çözümü $t \to \infty$ için sıfıra gider.

Teorem 2.2.6. (2.2.2.) denkleminde $p > 0, \sigma > \tau$ ve τ periyotlu Q(t) periyodik bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$\frac{1}{p+1} \liminf_{t\to\infty} \int_{t-(\sigma-\tau)}^{t} Q(s)ds > \frac{1}{e} \qquad (2.2.7.)$$

koşulu sağlansın. Bu durumda (2.2.2.) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat : (2.2.2.) denkleminin her çözümü salınımlı olmasın. x(t) (2.2.2.) denkleminin pozitif bir çözümü olsun.

$z(t) = x(t) + px(t-\tau)$ ve $w(t) = z(t) + pz(t-\tau)$ kabul edilsin.

O halde

$z(t)>0$, $z'(t) < 0$ (z(t) monoton azalandı.)

$w(t)>0$, $w'(t) < 0$ olur.

Bundan dolayı,

$$w(t) = z(t) + pz(t-\tau) < (1+p)\, z(t-\tau)$$

ve $$\frac{1}{p+1} w(t) < z(t-\tau)$$

$$\frac{-1}{p+1}Q(t)w(t) \geq -Q(t)\,z\,(t-\tau)$$

buradan $$\frac{-1}{p+1}Q(t)w\big(t-(\sigma-\tau)\big) \geq -Q(t)\,z\,(t-\sigma)$$ olur.

Ancak τ periyotlu Q(t)'nin periyodik olması z ve w'nın (2.2.2.) denkleminin çözümleri olmalarını gerektirir.

$$\frac{d}{dt}\Bigg[\underbrace{z(t)+pz(t-\tau)}_{w(t)}\Bigg]+Q(t)\,z\,(t-\sigma)=0$$

$$w'(t)=-Q(t)\,z\,(t-\sigma)$$ olur.

Yani,

$$w'(t)+Q(t)\,z\,(t-\sigma)=0$$ dır.

$$w'(t)+\frac{1}{1+p}Q(t)\,w\big(t-(\sigma-\tau)\big)\leq 0$$ olur.

Ancak 2.2.7. ve lemma 2.2.1., ii) şıkkına göre eşitsizliğin pozitif çözümleri yoktur. Böylece ispat tamamlanır.

C) –1<p≤0 Durumu

$-1<p\leq 0$ durumu ve D şıkkındaki karışık durumda Bainov ve Mishev (1991) şu teoremleri vermiştir.

Teorem 2.2.7. $-1\leq p_1 \leq p(t)\leq 0$ ve $\liminf\limits_{t\to\infty}\int_{t-\sigma}^{t}Q(s)ds > \frac{1}{e}$ (2.2.8.)

koşuluna ek olarak A2.2.1 ve A2.2.2 koşulları da sağlansın. Bu durumda (2.2.1.) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat : Denklemin her çözümü salınımlı olmasın. x(t) denklemin pozitif bir çözümü olduğunda $z(t)=x(t)+p(t)x(t-\tau)$ fonksiyonu 2.2.3. denkleminin bir çözümüdür.

Lemma 2.2.2. x(t), 2.2.1. denkleminin pozitif bir çözümü ve $z(t)=x(t)+p(t)x(t-\tau)$ olsun.

a) Eğer A2.2.1. ve A2.2.2. koşulları sağlanıyorsa z(t) monton azalan bir fonksiyondur. O halde $z'(t)$ negatiftir.

b) A2.2.1. ve A2.2.2. koşullarına ek olarak p_1 sbt. olmak üzere $-1<p_1\leq p(t)$ şartıda sağlanırsa z(t)>0 olur.

Yukarıda verilen lemma 2.2.2. a ve b den dolayı

$z'(t)<0$ ve z(t)>0 olur.

2.2.2. denkleminden dolayı $z'(t)+Q(t)z(t-\sigma)<0$ (2.2.9.)

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 2.2.1. ii) de ve hipotezden eşitsizliğin pozitif çözümleri yoktur. Bu da z(t)>0 olmasıyla çelişir.

D) Karışık Durum

Teorem 2.2.8. p_1,p_2 ler sabit olmak üzere $0\leq p(t)\leq p_2$ ve $-1<p_1\leq p(t)\leq 0$ koşullarına ek olarak A2.2.3. koşulunu sağlandığında 2.2.1. denkleminin her salınımsız x(t) çözümü $t\to\infty$ için sıfıra gider.

Teorem 2.2.9. $p(t)\geq 0$ veya $-1<p_1\leq p(t)\leq 0$ ile A2.2.2. koşulu da sağlandığında

a) (2.2.1.) denkleminin her salınımsız çözümü sınırlıdır.

b) $\int_{t_0}^{\infty} Q(s)ds = \infty$ (2.2.10.)

koşulu sağlanıp, x(t) de (2.2.1.) denkleminin salınımsız bir çözümü olduğunda $\liminf_{t \to \infty} x(t) = 0$ olur.

c) 2.2.10. koşulu sağlandığında (2.2.1.) denkleminin her salınımsız çözümü $t \to \infty$ için sıfıra gider.

Buraya kadar birinci mertebeden tarafsız gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin salınımları için teoremler verilmiştir. Bu teoremler içinde sabit katsayılı denklemlerin bütün çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şart verilmiş, ancak değişken katsayılı denklemlerin çözümlerinin salınımı için verilen teoremlerde yeter koşullara ulaşılmıştır.

BÖLÜM 3. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İLE GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER ARASINDAKİ FARKLAR

3.1 ADD ve GDD ler için başlangıç değer problemleri

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & t \geq t_0 \\ x(t_0) = \varphi \end{cases} \tag{3.1.1.}$$

3.1.1. Adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemidir. Burada t_0 başlangıç noktası ve φ başlangıç değeri olan reel sayıdır.

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))) & t_0 \leq t \leq T \\ x(t) = \varphi(t) & \overline{\tau} \leq t \leq t_0 \end{cases} \tag{3.1.2.}$$

3.1.2. de Gecikmeli diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemidir.

Burada da

i) $f \in C([t_0, T]xRxR, R)$

ii) $\tau(t) \in C([t_0, T], R^+)$

iii) $\varphi(t) \in C([\overline{\tau}, t_0], R)$

iv) $\overline{\tau} = \inf\limits_{t \geq t_0}(t - \tau(t))$

Şimdiki GDD ile ilgili bilgilere, ADD ile ilgili tecrübelerden yararlanarak ulaşılmıştır. Aslında ADD'ler, GDD'lerin özel bir halidir. ($\tau(t)=0$ olduğu özel durum.)

ADD'lerde ve GDD'lerin nümerik davranışlarında iki önemli zorluk vardır.

Birincisi; gecikme argümenti $x(t-\tau(t))$ genellikle zaten hesaplanmış olan (t_i, x_i) $i=0,1,\ldots$ takımında olmaz. Bu yüzden biz de hesaplanmış değerlerden tahmin yapmak zorunda kalırız. Gecikme argümentinin yaklaşık değerini bulmak için iki farklı prosedür uygulanır. İlki $t-\tau(t)$ ye bağlı diferansiyel denklem,n tekrar eden integrasyonudur. Diğeri gecikme argümentinin integrasyon noktalarından direkt tahmindir.

İkinci zorluk, gecikme argümentinin görüntüsünün sonucudur. ADD'lerde f nin sürekli olması çözümünde sürekli olmasını gerektirir. Fakat GDD'lerde f(t,x,y), $\tau(t,x)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonlarının C^{∞} (sürekli) ise de x çözümünün t_k noktasındaki k. mertebeden türevi süreksizdir. Fakat bu noktada daha aşağıdaki mertebeden türevleri süreklidir.

GDDS'lerde de aynı durum söz konusudur.

Teorem 3.1.1. (1.7.2.) denkleminin $t_0 - r < t < t_0$ için $X(t)=\theta(t)$ sürekli, koşulu altında sürekli çözümü olmayabilir.

İspat : Örnek vermek yeterli olacaktır. $x'(t) = 2x(t) + x(t-1)$ denklemini ele alalım, -1 < t < 0 için x(t)=3 koşulu altında bu denklemin sürekli çözümü yoktur.

Gerçekten de, $-\infty \leq t \leq 0$ için x(t) çözüm olsaydı,

$$(-1 \leq t \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 3) \quad \Rightarrow \quad 0 = 6 + x(t-1))$$

$\Rightarrow$ $(-2 \leq t \leq -1$ için $x(t) = -6)$ olurdu ve $t = -1$ için $x(t) = -6$ bulunurdu ki bu da koşul ile çelişir.

Teorem 3.1.2. (1.7.2.) denkleminin, $t_0 - r \leq t \leq t_0$ için $X(t) = \theta(t)$ sürekli, koşulu altında bir çözümü varsa bu tek olmayabilir.

İspat : Yine bir karşıt örnek vererek ispat yapılabilir.

$$1 \leq t \leq 2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \theta(t) = 0$$

$$x'(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ (\cos 2\pi t - 1)x(t-1) & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

denklemini ele alalım.

$$t=0 \quad \text{da} \quad x'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = c$$

$$0 \leq t \leq 1 \quad \text{de} \quad x(t-1) = c,\ x(0) = c,\ x'(t) = (\cos 2\pi t - 1)x(t-1)$$

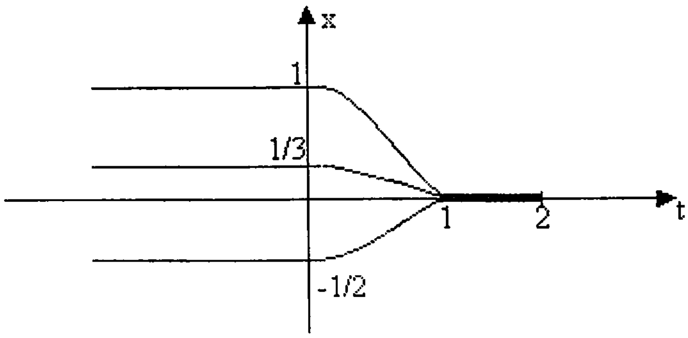
$$\Rightarrow \quad x(t) = c\left(\frac{-1}{2\pi}\sin 2\pi t - t + 1\right),\ x(1) = 0$$

$$t \geq 1 \quad \text{de} \quad x'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} x(t) = c \\ x(1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x(t) = 0$$

Buna göre herhangi bir $c \in R$ için

$$x(t) = \begin{cases} c & t \leq 0 \\ c\left(-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t - t + 1\right) & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

fonksiyonu denklemin sürekli çözümüdür. Fakat c değiştikçe sonsuz sürekli çözüm elde edilir.



Şekil 3.1.2.

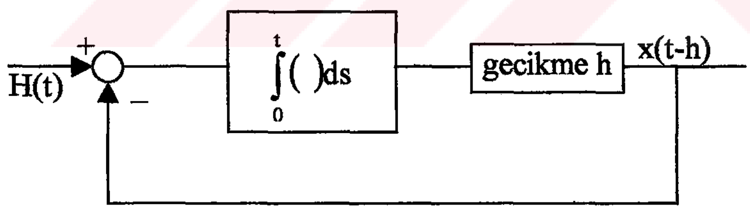
BÖLÜM 4. GDD'LER İÇİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

4.1. Adım Yöntemi

Aşağıdaki gecikmeli diferansiyel denklemin çözümünü düşünelim.

$$x'(t) = -x(t-h) + H(t) \quad (4.1.1.)$$

Bunun t<0 da hareketsiz bir sistem tanımladığını farzedelim. Uyarıcı t=0 da H(t) adımında uygulanıyor. h zaman gecikmesi 4.1.1. sistemine uygun bir sistemi şekille gösterelim.



$x'(t) = -x(t-h) + H(t)$ denkleminin sistemi

Şekil 4.1.1.

t = h den önce, gecikme geriitilimde anlamsızdır. Türev terimi gecikmeden etkilenmez.

Böylece;

$$x'(t) = H(t) \quad \text{ve} \quad x(t) = t\,.\,H(t) \quad \text{olur.}$$

$t = h$ de , zaman fonksiyonu, bu gecikmede depolanır.

$h < t < 2h$ aralığında enerji girişinin etkilerine ilaveten bu depolanmadan, türev dikkate değer biçimde etkilenir. Böylece $h < t < 2h$ aralığında denklem,

$$x'(t) = H(t) - (t-h).H(t-h) \quad \text{olur.}$$

Tahminen depolanmış fonksiyon enerji girişi görevini yapar ve problem birinci zaman aralığındakine benzer. Birbirini izleyen aralıklar önceki aralıkların tepkileri gibi davranırlar.

Bu yolla pek çok benzer problemin çözümünde başarıya ulaşırız.

$$x(t) = t.H(t) - \frac{1}{2}(t-h)^2 H(t-h) + \frac{1}{6}(t-2h)^3 H(t-2h) + \ldots + \frac{(-1)^r}{(r+1)!}(t-rh)^{r+1} H(t-rh) + \ldots$$

Bu yöntem adım yöntemi olarak ta tanımlanır ve daha yüksek mertebeden sistemlere genişletilebilir. Zorlukları ise sadece başlangıç koşulundan, diferansiyel katsayıların her bir adımda kurulması şeklinde ortaya çıkar.

Bununla beraber h gecikmesinin, exp(-sh) dönüşümü, Laplace dönüşümlerinin gecikme teoremlerinin açık bir sonucu olarak,

$$L\{x(t-h)H(t-h)\} = X(s)\exp(-sh) \quad \text{dir.}$$

Burada $X(s) = L\{x(t) \,.\, H(t)\}$ dir.

4.2. Bir başlangıç Fonksiyonuna Bağlı Çözüm Yöntemi

[-r,0] aralığında integrallenebilir bir başlangıç fonksiyonu alarak $x'(t) = ax(t-r)$, $r > 0$, $a \in R \setminus \{0\}$ denkleminin t>0 için çözümünü vereceğiz.

4.2.1. Adım Yöntemine Uygulanışı

$[t_0 - r, t_0]$ aralığında belirli bir başlangıç fonksiyonu kabul ederek $[t_0, t_0 + r]$ aralığında

$$x'(t) = ax(t-r) \tag{4.2.1.}$$

GDD'sini çözeceğiz.

x(t) çözüm fonksiyonu,

$t \in [t_0 - r, t_0] \quad \Rightarrow \quad x(t) = \theta(t)$

$t \in [t_0, t_0 + r] \quad \Rightarrow \quad x'(t) = ax(t-r)$ koşullarını sağlayacaktır.

Buna göre,

$$t \in [t_0, t_0 + r] \quad \Rightarrow \left.\begin{aligned} x(t-r) &= \theta(t-r) \\ x'(t) &= ax(t-r) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x'(t) = a\theta(t-r)$$

olduğundan, $x(t), x'(t) = a\theta(t-r)$ adi diferansiyel denkleminin çözümü olacaktır. Çözüm, $x(t_0) = \theta(t_0)$ başlangıç koşuluyla,

$\int a\theta(t-r)dt = \varphi(t) + c$ olmak üzere,

$$x(t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \theta(t_0) \tag{4.2.2.}$$

olur.

Böylece 4.2.1. denkleminin $[t_0, t_0 + r]$ aralığındaki çözümü olan 4.2.2. denklemi yeni bir başlangıç fonksiyonu olarak alınıp, aynı yöntemle $[t_0 + r, t_0 + 2r]$ aralığında da çözüm bulunabilir. Böyle devam edilerek istenildiği kadar geniş bir belirli aralıkta çözüm elde edilebilir.

Örnek : $t \in [-1,0] \quad \Rightarrow \quad x(t) = 1$

$t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad x'(t) = x(t-1)$ olsun.

Birinci adımda

$$\left.\begin{array}{lll} t \in [-1,0] & \Rightarrow & x(t)=1 \\ t \in [0,1] & \Rightarrow & t-1 \in [-1,0] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x'(t)=1 \\ x(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = t+1 \text{ bulunur.}$$

İkinci adımda

$t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad x(t) = t+1$

$t \in [1,2] \quad \Rightarrow \quad x'(t) = x(t-1)$ alınarak

$$\left.\begin{array}{lll} t \in [0,1] & \Rightarrow & x(t)=t+1 \\ t \in [1,2] & \Rightarrow & t-1 \in [0,1] \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{lll} x(t-1)=t & & \\ t \in [1,2] & \Rightarrow & x'(t) = x(t-1) \end{array}\right\} \Rightarrow x'(t) = t \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{t^2}{2} + c \\ x(1) = 2 \end{array}\right\}$$

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2} \qquad \text{elde edilir.}$$

Böyle devam edilerek beş adımda

$$x(t) = \begin{cases} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t \in [-1,0] \\ t+1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t \in [0,1] \\ \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{3}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t \in [1,2] \\ \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t^2}{2} + 2t + \dfrac{1}{6} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t \in [2,3] \\ \dfrac{t^4}{24} - \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{7t^2}{4} - \dfrac{5t}{2} + \dfrac{85}{24} \ldots\ldots\ldots t \in [3,4] \\ \dfrac{t^5}{120} - \dfrac{t^4}{8} + t^3 - \dfrac{13t^2}{12} + \dfrac{19t}{6} - \dfrac{1213}{40} \ldots\ldots t \in [4,5] \end{cases}$$

elde edilir.

4.3. Sabit Gecikmeli Durumda Euler Metodu

Adi diferansiyel denklemlerde alınan

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad 0 \le t \le T$$
$$x(0) = \varphi \in R$$

başlangıç değer problemi için Euler metodu çok basit bir çözüm getiriyordu.

Burada

$$f : [0,T]xR \rightarrow R$$

i) $f, t \in [0,T]$ için sürekli ve

ii) $|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \le L|u_1 - u_2| \qquad u_1, u_2 \in R$ için Lipschitz koşulunu

sağlasın.

Bu,

$$x^h(t_{i+1}) = x^h(t_i) + h_i f(t_i, x^h(t_i)) \qquad 0 \le i \le N$$
$$x^h(t_0) = \varphi$$

ile verilip burada eğer x tam çözümü [0,T] aralığında, sınırlı ikinci türeve sahipse,

$$|e^h(t_n)| \le \sum_{i=0}^{n-1} (1 + hL)^i . Bh^2$$

ile gösteriliyordu.

L , ii) deki Lipschitz sabiti ve B sabiti de x'in 2. türevinin üst sınırı olarak tanımlıydı.

Buradan da

$$|e^h(t_n)| \le ch \qquad c>0$$

elde ediliyordu.

Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerde ise

Başlangıç fonksiyon problemi

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) & 0 \le t \le T \\ x(t) = \varphi(t) & -\tau \le t \le 0 \end{cases}$$

alınsın.

Burada $\tau > 0$ ve T sabit, f ve φ ise $t \in [t_0, T]$ için süreklidir. Fakat çözümde ve türevlerinde süreksizlik olabilir.

El'sgol'ts Euler metodunun GDD'ler için uygulanabileceğini göstermiştir. [1964-1966]

$h = \dfrac{\tau}{m}$, m bir tamsayı seçersek Euler'in metodu

$$\begin{cases} x^h(t_{i+1}) = x^h(t_i) + hf(t_i, x^h(t_i), x^h(t_{i-m})) & 0 \le i \le N \\ x^h(t_i) = \varphi(t_i) & -m \le i \le 0 \end{cases} \qquad (4.3.1.)$$

olur. Burada da $T = (N+1) \cdot h$ olarak kabul edilmiştir.

4.3.1. için Cryer ve Tavernini ispatsız olarak, $x \in C^2[0,T]$ çözümü ise

$e^h = \theta(h)$ olduğunu söylemiştir.

Aşağıda bu sonucu ispatlıyoruz.

$x(t_{i+1})$ in Taylor açılımını yazarsak ve 4.3.1. den çıkarırsak,

$$\left|x^h(t_{i+1}) - x(t_{i+1})\right| \le \left|x^h(t_i) - x(t_i)\right| + hL\left|x^h(t_i) - x(t_i)\right| + \left|x^h(t_{i-m}) - x(t_{i-m})\right| + \frac{h^2}{2}\left|x''(\xi)\right|$$

(4.3.2.)

Yukarıdaki eşitsizlikte $L = \max\{L_1, L_2\}$, L_1 ile L_2 ise f'nin Lipschitz sabitleri ve $\xi \in [t_i, t_{i+1}]$ dir.

x'in t_j deki değerlerinin tahmini yapılırken $j<i+1$ için hata yapılmaz, yerel hata için sınır elde edebiliriz.

$$\left|e_l^{\,h}(t_{i+1})\right| \le Mh^2 \qquad M = \frac{1}{2}\max\left|x''(t)\right|$$

Global hata için 4.3.2. den başlarsak,

$$\begin{cases} \left|e^h(t_{i+1})\right| \le (1+hL)\left|e^h(t_i)\right| + hL\left|e^h(t_{i-m})\right| + Mh^2 \\ e_{-m} = e_{-m+1} = \ldots = e_0 = 0 \end{cases}$$

$i = 0,1,\ldots,2m+j$ ve $j \ge 0$ için

$$\left|e^h(t_1)\right| \le Mh^2$$

$\vdots$

$$\left|e^h(t_m)\right| \le Mh^2 \sum_{i=0}^{m-1}(1+hL)^i$$

$\vdots$

$$\left|e^h(t_{2m})\right| \le (1+hL)^m\left|e^h(t_m)\right| + MLh^3\sum_{i=0}^{m-1} i(1+hL)^i + Mh^2\sum_{i=0}^{m-1}(1+hL)^i$$

$$\left|e^h(t_{2m+j})\right| \le (1+hL)^j\left|e^h(t_{2m})\right| + jhL(1+hL)^{j-1}\left|e^h(t_m)\right| + hLMh^2\sum_{i=1}^{j-1} i(1+hL)^{i-1}$$
$$+ Mh^2\sum_{i=0}^{j-1}(1+hL)^i + (hL)^2 Mh^2 \sum_{i=0}^{j-3}\left(\tfrac{1}{2}i^2 + \tfrac{3}{2}i + 1\right)(1+hL)^i$$

$$\left|e^h(t_{2m+j})\right| \le \frac{M}{L}\left(T^2L^2e^{TL} + 2TLe^{TL} + 2e^{TL} + 2\right)h$$

Buradan,

$$\left|e^h(t_{2m+j})\right| \le ch \qquad \text{elde edilir.}$$

4.4. Sabit Gecikmeli Durumda Tek Adım Yöntemi

Sabit gecikmeli durumda, $h = \dfrac{\tau}{m}$, m tamsayı seçelim.

$$\begin{cases} x^h(t_{i+1}) = x^h(t_i) + h\phi\left(h, t_i, x^h(t_i), x^h(t_{i-m})\right) & 0 \le i \le N \\ x^h(t_i) = \varphi(t_i) & -m \le i \le 0 \end{cases}$$

$\phi(h,t,x,y))$ sürekli ve tüm h'ler için

$$\left|\phi(h,t_1,u_1,v_1) - \phi(h,t,u_2,v_2)\right| \le L_1\left|u_1 - u_2\right| + L_2\left|v_1 - v_2\right|$$

sağlansın.

$$\left(t \in [0,T] \qquad \text{ve} \qquad u_1, u_2, v_1, v_2 \in R\right)$$

Adi diferansiyel denklemlerde mevcut olan Runge-Kutta metodunu gecikmeli diferansiyel denklemlere göre değiştirilebiliriz.

2. mertebeye kadar R-K metodunu türeteceğiz.

x(t+h) 'nin h=0 etrafında Taylor açılımını yazarsak ve

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) & 0 \le t \le T \\ x(t) = \varphi(t) & -\tau \le t \le 0 \end{cases}$$

başlangıç fonksiyon problemini kullanırsak,

$$x(t+h)=x(t)+hf(t,x(t),x(t-\tau))+\frac{h^2}{2}x''(t)+\theta(h^3) \qquad (4.4.1.)$$

elde edilir.

Başlangıç fonksiyon problemi kullanılırsa kolayca görülür ki;

$$\begin{aligned} x''(t) &= f_t(t,x(t),x(t-\tau))+f_{x(t)}(t,x(t),x(t-\tau)).\,x'(t) \\ &\qquad + f_{x(t-\tau)}(t,x(t),x(t-\tau)).\,x'(t-\tau) \\ &= f_t(t,x(t),x(t-\tau))+f_{x(t)}(t,x(t),x(t-\tau))f(t,x(t),x(t-\tau)) \\ &\qquad + f_{x(t-\tau)}(t,x(t),x(t-\tau))f(t-\tau,x(t-\tau),x(t-2\tau)) \end{aligned}$$

4.4.1. den dolayı,

$$\begin{aligned} x^h(t_i+h) &= x^h(t_i)+\frac{h}{2}f(t_i,x^h(t_i),x^h(t_i-\tau))+\frac{h}{2}((f(t_i,x^h(t_i)),x^h(t_i-\tau)) \\ &+hf_t(t_i,x^h(t_i),x(t_i-\tau))+hf_{x(t)}(t_i,x^h(t_i),x^h(t_i-\tau))f(t_i,x^h(t_i),x^h(t_i-\tau)) \\ &\qquad +hf_{x(t-\tau)}(t_i,x^h(t_i),x^h(t_i-\tau))f(t_i-\tau,x^h(t_i-\tau),x^h(t_i-2h)) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$K_1 = hf(t_i,x^h(t_i),x^h(t_i-\tau))$$

$$\begin{aligned} K_2 = h(f(t_i,x^h(t_i),x^h(t_i-\tau))&+hf_t(t_i,x^h(t_i),x^h(t_i-\tau)) \\ +hf_{x(t)}(t_i,x^h(t_i),x^h(t_i-\tau))&f(t_i,x^h(t_i),x^h(t_i-\tau)) \\ +hf_{x(t-\tau)}(t_i,x^h(t_i),x^h(t_i-\tau))&f(t_i-\tau,x^h(t_i-\tau),x^h(t_i-2\tau))) \end{aligned}$$

olsun. O halde

$$x^h(t_i+h)=x^h(t_i)+\frac{1}{2}(K_1+K_2)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$K_1 = hf(t_i,x^h(t_i),x^h(t_i-\tau))$$

$$K = hf\left(t_i + h, x^h(t_i) + hf\left(t_i, x^h(t_i), x^h(t_i - \tau)\right),\right.$$
$$\left. x^h(t_i - \tau) + hf\left(t_i - \tau, x^h(t_i - \tau), x^h(t_i - 2\tau)\right)\right)$$

olduğunda

$$x^h(t_{i+1}) = x^h(t_i) + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \quad \text{yazılabilir.}$$

K_2 deki üçüncü f argümenti, Euler'in yakınsamasından elde edilen $x(t_{i+1-m})$ ara değerini bulundurur. Böylece

$$K_1 = hf\left(t_i, x^h(t_i), x^h(t_{i-m})\right)$$

$$K_2 = hf\left(t_{i+1}, x(t_i) + K_1, x^h(t_{i-m}) + hf\left(t_{i-m}, x^h(t_{i-m}), x^h(t_{i-2m})\right)\right) \quad \text{yazılabilir.}$$

Yamuk metoduna göre,

$$x^h(t_{i+1}) = x^h(t_i) + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

burada $\quad K_1 = hf\left(t_i, x^h(t_i), x^h(t_{i-m})\right)$

$$K_2 = hf\left(t_{i+1}, x^h(t_i) + \frac{1}{2}(K_1 + K_2), x^h(t_{i+1-m})\right) \quad \text{dir.}$$

4.5. Değişken Gecikmeli Durumda Euler Metodu

3.1.2. başlangıç fonksiyon problemini ele alalım. Eğer $(t - \tau(t))$, t'nin artan fonksiyonu kabul edilirse

El'sgol'ts çalışmasında $\forall i = \{1, \ldots, N+1\}$ için

$$\begin{cases} \quad t_i - \tau(t_i) \le 0 \\ \text{ya da} \\ \quad t_i - \tau(t_i) = t_{q(i)} \end{cases} \tag{4.5.1.}$$

Burada q(i), i'den küçük tamsayıdır. Böylece metod şu formda yazılabilir.

$$\begin{cases} x^h(t_{i+1}) = x^h(t_i) + \begin{cases} h_i f\left(t_i, x^h(t_i), \varphi(t_i - \tau(t_i))\right) & t_i - \tau(t_i) < 0 \text{ ise} \\ h_i f\left(t_i, x^h(t_i), x^h(t_{q(i)})\right) & \text{diğer durumda} \end{cases} \\ x^h(t_0) = \varphi(t_0) \end{cases} \qquad (4.5.2.)$$

Düzenli birbirine yaklaşan bu metodla, 1'e eşit ya da 1'den büyük sıra elde edeceğiz fakat bu durumun sağlanmasında $\tau(t)$, ne gibi şartların koyulması gerektiği çok açık değildir.

Örneğin, aşağıdaki B.F.P. için bu metod uygulanamıyor.

$$\begin{cases} x'(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) & 0 \le t \le 1 \\ x(o) = 1 \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!2^{k(k-1)/2}} \quad \text{tam çözümü için}$$

fakat 4.5.1.'den $t_1 - \frac{t_1}{2} \le 0$ olması $t_1 = 0$ demektir. Böylece 4.5.2. deki Euler metodu uygulanamamaktadır.

Feldstein [1964] Euler metodunun, yakın ara değerlerin kullanıldığı yeni versiyonlarını ortaya çıkarmıştır.

Feldstein, $0 \le t \le T$ için $t - \tau(t) \ge 0$ ve q(i) ile r(i) bulunduğunu öyle ki

$$t_i - \tau(t_i) = h[q(i) + r(i)] \qquad 1 \le i \le N$$

olduğunu öne sürmüştür. Burada da q(i) pozitif tamsayı ve $0 \le r(i) \le 1$ dir.

Böylece 4.5.2.

$$\begin{cases} x^h(t_{i+1}) = x^h(t_i) + hf\left(t_i, x^h(t_i), r(i)x^h(t_{q(i)+1}) + (1-r(i))x^h(t_{q(i)})\right) & 0 \le i \le N \\ x^h(t_0) = \varphi \end{cases}$$

şekline gelir.

4.6. Değişken Gecikmeli Durumda TEK ADIM YÖNTEMİ

$x(t-\tau)$ değerine yaklaşalım, τ aradeğer polinomunun ortalamasında bağımlı olabilir, içinde $x^h(t_i)$ nümerik çözümleri geçen ve türevleri $x'^h(t_i)$ türevi ile uyuşan ara değer bulmanın metoduna bağlı, önceki bazı noktalar q-1 olsun.

Biz bunu $Q_q^h(t_i)$ ile tanımlayalım.

Böylece

$$x\left(t_i - \tau\left(t_i, x^h(t_i)\right)\right) \cong Q_q{}^h\left(t_i - \tau\left(t_i, x^h(t_i)\right)\right) \quad \text{olacaktır.}$$

t_i deki x'in tem değeriyle ara değer polinomunu yapmak için h üssüz $Qq(t_i)$ gösterimini kullanacağız.

$$x\left(t_i - \tau\left(t_i, x(t_i)\right)\right) \cong Qq\left(t_i - \tau\left(t_i, x(t_i)\right)\right)$$

Burada r mertebeli Runge – Kutta formülü

$$x^h\left(t_{i+1}\right) = x^h(t_i) + h_i\phi\left(_i, x^h(t_i), Q_q^h\left(t_i - \tau\left(t_i, x^h(t_i)\right)\right), h\right) \quad \text{olacaktır.}$$

Burada artış fonksiyonu

$$\phi\left(t_i, x^h(t_i), Q_q^h\left(t_i - \tau\left(t_i, x^h(t_i)\right)\right)\right) = \sum_{i=1}^{r} c_i k_i \quad \text{formunda ve}$$

$$k_i = f\left(t_i + \lambda_i h_i , x^h(t_i) + h\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j , \right.$$

$$\left. Q_q^h\left(t_i + \lambda_i h_i - \tau\left(t_i + \lambda_i h_i , x^h(t_i) + h\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right)\right)\right) \quad \text{şeklindedir.}$$

Yamuk metodu

$$x^h(t_{i+1}) = x^h(t_i) + \frac{h}{2}\Big(f\big(t_i , x^h(t_i), x^h\big(t_i - \tau\big(t_i , x^h(t_i)\big)\big)\big)$$

$$+ f\big(t_{i+1}, x^h(t_{i+1}), x^h\big(t_{i+1} - \tau\big(t_{i+1}, x^h(t_{i+1})\big)\big)\big)\Big)$$

4.7. Lyapunov Tekniği

4.7.1. Lyapunov Denklemi

Bu bölümde Lyapunov tekniğine kısa bir giriş yapılmıştır. Bu tekniği Jury (1974) uzun uzadıya anlatmıştır.

$$J = \int_0^{\infty} e^T(t) V e(t) dt \qquad (4.7.1.)$$

$e(t), e'(t) = Ae(t)$ eşitliğini sağlayan sütun vektörü, A sabit bir matris ve $e(0)$ verilmiş olsun. $e^T(t)$, transpozenin yerini tutsun ve V pozitif tanımlı (diyagonal olabilir) simetrik matris olsun.

$$\frac{d}{dt}\left[e^T(t) P e(t)\right] = -e^T(t) V e(t) \qquad (4.7.2.)$$

olsun. Böylece

$$\int_0^{\infty} e^T(t) V e(t) dt = -\int_0^{\infty} \frac{d}{dt}\left[e^T(t) P e(t)\right] dt = e^T(0) P e(0)$$

olur ki burada $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ kabul edilmiştir.

P ise pozitif tanımlı bir matristir.

$$A^T P + PA = -V$$

denkleminin çözümüdür.

Yukarıdaki 4.7.2.

$$\frac{d}{dt}\left[e^T(t)Pe(t)\right] = \frac{de^T(t)}{dt}Pe(t) + e^T(t)P\frac{d}{dt}e(t)$$

$$= e^T(t)A^T Pe(t) + e^T PAe(t)$$

$$= e^T(t)(A^T P + PA)e(t)$$

$$= -e^T(t)Ve(t)$$

şeklinde elde edilmiştir.

Aşağıdaki teknikte, yine bir Lyapunov metodudur. Burada ise asli olarak $\phi(t)$ matrisi kullanılmıştır. Bu biraz değiştirildiğinde zaman – gecikmeli durumlara genişletilebildiği için avantajlıdır.

4.7.1. denklemini alalım. $\phi(t)$, $\frac{d\phi}{dt} = A\phi$ nin çözümüdür ve $\phi(0) = I_n$ olmak üzere $e(t) = \phi(t).e(0)$ yazalım ve e(0)'ı e_0 ile gösterelim.

$$J = \int_0^\infty e^T(t)Ve(t)dt = \int_0^\infty e_0^T \phi^T(t)V\phi(t)e_0 dt$$

$$= e_0^T \int_0^\infty \phi^T(t)V\phi(t)\,dt\,e_0$$

$$= e_0^T M e_0$$

Eğer M(s) fonksiyonunu $M(s) \equiv \int_s^{\infty} \phi^T(t-s)V\phi(t-s)dt$ ile tanımlarsak bu $M(s) = \int_0^{\infty} \phi^T(t)V\phi(t)dt$ değişkenin değişmesidir.

Böylece M(s) sabittir ve M ye eşittir.

Dolayısıyla, tekniği kullanırsak, integral işareti altında diferansiyeli

$$\frac{dM(s)}{ds} = 0 = \int_s^{\infty} \frac{\partial \phi(t-s)^T}{\partial s} V\phi(t-s)dt + \int_s^{\infty} \phi(t-s)^T V \frac{\partial \phi}{\partial s}(t-s)dt - V$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}\phi(t-s) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(t-s) = A\phi(t-s)$$

ve $A\phi$ nin değişme özelliğini kullanırsak,

$$A^T M + MA + V = 0 \qquad (4.7.3.)$$

elde ederiz.

Bu Lyapunov denkleminin çözümünü Barnett (1984) tanıtmıştır.Buna ilaveten daha pek çok kaynak bulunabilir.

4.7.2. Lyapunov Sistemleri

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t-h) \qquad (4.7.4.)$$

göz önüne alalım. Burada x(0), R^n de keyfi bir vektör ve x(t)=0 , t<0 olduğunu düşünelim.

J yi de x(0) başlangıç koşuluna bağlı olarak J (x(0)) şeklinde gösterelim. 4.7.4. ün ϕ matris çözümü

$$\phi'(t) = A\phi(t) + B\phi(t-h) \qquad \phi(0) = I \;,\; \phi(t) = 0 \qquad t < 0$$

için tanımlansın.

4.7.4. ün çözümü $x(t) = \phi(t)x(0)$ biçiminde yazılabilir.

Bu ifadenin yerine de

$$J(x(0)) = x(0)^T Mx(0)$$

$$M = \int_0^\infty \phi(t)^T V\phi(t)dt = \int_0^\infty \phi(t-s)^T V\phi(t-s)dt \qquad \forall s \geq 0$$

Bunu s'ye göre s = 0 olarak

$$0 = \int_s^\infty [A\phi(t) + B\phi(t-h)]^T V\phi(t)dt + \int_0^\infty \phi(t)^T V[A\phi(t) + B\phi(t-h)]dt + V$$

yapabiliriz.

Şimdi şu özdeşliği kullanacağız,

$$A\phi(t) + B\phi(t-h) = \phi(t)A + \phi(t-h)B$$

Laplace dönüşüm tekniği ile kolayca ispat edilebilir.

Dolayısıyla,

$$MA + A^T M + V + L(h)^T + L(h) = 0 \qquad (4.7.5.)$$

elde edilir.

Burada,

$$L(h)=\int_0^\infty \phi(t)^T V\phi(t-h)B dt=\int_0^\infty \phi(t+h)^T V\phi(t)B\, dt \text{ olur.}$$

4.7.5. denklemi, 4.7.3. gecikmeli denklemin benzeridir, sadece L(h) terimleri eklenmiştir. Netice de M'nin tanımına ilave denklemlere ihtiyaç duyulmuştur. Bunlar en genel fonksiyonun göz önünde tutulmasıyla bulunurlar,

$$L(s)=\int_0^\infty \phi(t+s)^T V\phi(t)B\, dt \qquad s\in[0,h] \qquad (4.7.6.)$$

L için bir diferansiyel denklem alalım, 4.7.6. eşitliğinin iki tarafını s'ye göre diferansiyelliyelim.

$$L'(s)=A^T L(s)+L(h-s)^T.B$$

Dolayısıyla M için tanımlanan denklemlerin Lyapunov kümesini elde ederiz, böylece J (x(0)) :

$$MA+A^T M+V+L(h)^T+L(h)=0$$

$$L'(s)=A^T L(s)+L(h-s)^T B \qquad s\in[0,h] \qquad (4.7.7.)$$

$$L(0)=MB \qquad (4.7.8.)$$

Yukarıdaki Lyapunov denklemlerinin analizindeki başlangıç noktası, 4.7.7. fonksiyonel diferansiyel denkleminin bir dönüşümüdür. 4.7.8. başlangıç koşuludur.

$$U(s)=\frac{1}{2}[L(s)+L(h-s)]$$

$$W(s)=\frac{1}{2}[L(s)-L(h-s)]$$

tanımlayabiliriz. Böylece,

$$L(s) = U(s) + W(s)$$
$$L(h-s) = U(s) - W(s) \quad \text{olur.}$$

4.7.7. denklemini, 4.7.8. koşuluyla iki lineer matris diferansiyel denklem biçiminde yazabiliriz.

$$U(s) = A^T W(s) - W(s)^T B \qquad s \in [0,h]$$

$$W(s) = A^T U(s) + U(s)^T B \qquad (4.7.9.)$$

$U(0) + W(0) = U(h) - W(h) = MB$ şartıyla,

$s = \frac{1}{2}h$ ye göre U simetrik olsun, W ise olmasın.

$$\begin{cases} U(s) = U(h-s) \\ W(s) = -W(h-s) \qquad s \in [0,h] \end{cases} \qquad (4.7.10.)$$

ile başlangıç değer problemi 4.7.7. ve 4.7.8. eşittir.

Sistem 4.7.9., bilinmeyenleri U(s) ve W(s) matrislerinin elemanları olan adi diferansiyel denklem takımına dönüştürülebilir.

Bu sonuçla;

$$\tilde{L} = \left(L^{(1)^T}, L^{(2)^T}, \dots, L^{(n)^T}\right)$$

$$\tilde{U} = \left(U^{(1)^T}, U^{(2)^T}, \dots, U^{(n)^T}\right)$$

$$\tilde{W} = \left(W^{(1)^T}, W^{(2)^T}, \dots, W^{(n)^T}\right)$$

tanımlayabiliriz.

Burada $L^{(i)}, U^{(i)}, W^{(i)}$ sıra ile L,U,W nın i. Sütunları olarak tanımlansın.

4.7.9. dan

$$\left(\tilde{U}'(s), \tilde{W}'(s)\right) = \left(\tilde{U}(s), \tilde{W}(s)\right)N \qquad (4.7.11.)$$

bulunur.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{diag}A + \beta \\ \underbrace{\operatorname{diag}A - B}_{n^2} & \underbrace{0}_{n^2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}n^2 \\ \}n^2 \end{array}$$

$$\beta = (\operatorname{diag}B^{(1)}, \operatorname{diag}B^{(2)}, \dots, \operatorname{diag}B^{(n)})$$

$B^{(i)}$, B'nin i. sütunu ve 4.7.11. sistemi için uygulanan standart teori aşağıdaki sonuçları verir.

Çözüm şu formülle verilir;

$$\left(\tilde{U}(s), \tilde{W}(s)\right) = \left(\tilde{U}(s_0), \tilde{W}(s_0)\right) \exp[N(s - s_0)] \qquad s_0 \in [0, h]$$

$P = \operatorname{diag}A + \beta \qquad Q = \operatorname{diag}A - \beta \qquad z = s - \dfrac{h}{2}$ tanımlarsak,

$$\exp(Nz) = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{(PQ)^i z^{2i}}{(2i)!} & P\dfrac{(QP)^i z^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ Q\dfrac{(PQ)^i z^{2i+1}}{(2i+1)!} & \dfrac{(QP)^i z^{2i}}{(2i)!} \end{pmatrix}$$

olur. 4.7.10. daki simetri koşullarının $\tilde{W}\left(\dfrac{h}{2}\right) = 0$ gerekliliğine eşit olduğu görülüyor.

Bu koşulu kullandıktan sonra 4.7.11. in çözümü katsayıların bilinmeyen nxn matrisiyle eşsiz derecede alakası olan $U\left(\dfrac{h}{2}\right)$ ye eşit tanımlanmıştır.

Bu çözüm açık bir formda yazılabilir,

$$\tilde{U}(s) = \tilde{U}\left(\frac{h}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(PQ)^i z^{2i}}{(2i)!}$$

$$\tilde{W}(s) = \tilde{U}\left(\frac{h}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(PQ)^i z^{2i+1}}{(2i+1)!} \cdot P$$

Dolayısıyla

$$\tilde{L}(s) = \tilde{U}\left(\frac{h}{2}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(PQ)^i z^{2i}}{(2i)!}\left(I + \frac{Pz}{2i+1}\right) \qquad \text{olur.}$$

Çözümü temsil eden bu seriler pratikte, gecikme h küçükse kullanışlı olabilir. [0,h] aralığında bu serilerin birbirine yaklaşması çok hızlıdır.

BÖLÜM 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmamızda gecikmeli diferansiyel denklemler genel olarak incelenmiştir. Birinci bölümde sapmalı argümentli diferansiyel denklemlerin tanımından yola çıkılıp ilerlemeli, tarafsız ve gecikmeli diferansiyel denklemlerin tanımına ulaşılmıştır.

Bu tanıma göre,

$$F\big(t, x(f_{01}(t)), \ldots, x(f_{0m}(t)), x'(f_{11}(t)), \ldots, x'(f_{1m}(t)), \ldots, x^{(n)}(f_{n1}(t)), \ldots, x^{(n)}(f_{nm}(t))\big) = 0 \qquad (1.4.1.)$$

formundaki bir SADD de

$J = 1,2,\ldots,m$ için $f_{nj}(t) = f(t)$ ve $i = 0,1,\ldots,(n-1)$ alındığında

$$f_{if}(t) \leq f(t)$$

oluyorsa bu denklem gecikmeli diferansiyel denklem olacaktır.

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlı olması için trivial olmayan bir x(t) çözümünün (T, ∞) aralığında işaret değiştirmesi gerektiği verilmiştir. Burada T herhangi bir sayı olarak alındı.

Bu tanımın ardından önce

$$x'(t) + px'(t-\tau) + qx(t-\sigma) = 0 \qquad t \geq t_0 \qquad (2.1.1.)$$

alındığında, τ, q, σ lar pozitif sabitler olmak üzere, 2.1.1. denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şart

$\lambda + p\lambda e^{-\lambda\tau} + qe^{-\lambda\sigma} = 0$ karakteristik denkleminin gerçel köklerinin olmamasıdır.

Sonra birinci mertebeden değişken katsayılı

$$\frac{d}{dt}[x(t) + p(t)x(t-\tau)] + Q(t)x(t-\sigma) = 0 \qquad t \geq t_0 \qquad (2.2.1.)$$

tarafsız gecikmeli diferansiyel denklemi ele alınmıştır. Burada $t \geq t_0$ için $Q(t) \geq 0$, q sabit iken $t \geq t_0$ için $Q(t) \geq q > 0$ ve $P(t), Q(t) \in C([t_0, \infty], R)$ olduğu varsayılmıştır.

Diğer değişken katsayılı GDD ise

$$\frac{d}{dt}[x(t) + px(t-\tau)] + Q(t)x(t-\sigma) = 0 \qquad t \geq t_0 \qquad (2.2.2.)$$

şeklindedir. Bu iki denklemin çözümlerinin salınımı için verilen teoremler de sadece yeter koşullarına ulaşılmıştır.

Adi diferansiyel denklemlerle, gecikmeli diferansiyel denklemler karşılaştırıldığında ADD'lerin, GDD'lerin özel bir hali, $\tau(t) = 0$ durumu, olduğu görülmüştür. Yine

Teorem 3.1.1. ile

$$X'(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t) X(t - r_j(t)) + H(t) \qquad (1.7.2.)$$

$X(t) = [x_k(t)]_{nx1}$ $\quad A_j(t) = [a_{kij}]_{nxn}$ $\quad H(t) = [f_k(t)]_{nx1}$ olsun.

1.7.2. denkleminin $t_0 - r < t < t_0$ için $X(t) = \theta(t)$ sürekli, koşulu altında sürekli çözümü olmayabileceği.

Teorem 3.1.2. ile 1.7.2. denkleminin $t_0 - r \leq t \leq t_0$ için $X(t) = \theta(t)$ sürekli, koşulu altında bir çözümü varsa bu tek olmayabilir sonuçlarına varılmıştır.

Bundan sonra çalışmamızda bazı çözüm yöntemleri verilmiştir. Bunlardan biri $[t_0 - r, t_0]$ aralığında belirli bir başlangıç fonksiyonu kabul ederek $[t_0, t_0 + r]$ aralığında $x'(t) = ax(t-r)$ GDD'sinin adım yöntemiyle çözülmesidir.

Bunun dışında sabit gecikmeli ve değişken gecikmeli durumlar için verilen BFP'lerine Euler metodu ve Tek adım yöntemleri ile çözüm bulunmuştur.

En son

$$MA + A^T M + V + L(h)^T + L(h) = 0$$

$$L'(s) = A^T L(s) + L(h-s)^T B \qquad s \in [0,h] \tag{4.7.7.}$$

$$L(0)=MB \tag{4.7.8.}$$

Şeklinde Lyapunov denklemlerinin kümesi için çözüm tezimiz içerisinde yer almıştır. Ancak bu çözümün pratikte h gecikmesi küçükse kullanışlı olduğu söylenebilir.

Burada gecikmelerin tesadüfi olmasına bağlı olarak diferansiyel denklemlerin oluşturulması ve çözümü ayrı bir araştırma konusu olarak görülmektedir.