T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEOMETRİDE YAKLAŞIK LİNEER UZAYLAR VE LİNEER UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Osman ÇİFCİ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÖZGÜR

Mayıs 2006

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEOMETRİDE YAKLAŞIK LİNEER UZAYLAR VE LİNEER UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Osman ÇİFCİ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Enstitü Bilim Dalı	**:**	**GEOTEKNİK**

Bu tez 08 / 06 /2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÖZGÜR	**Prof. Dr. Metin BAŞARIR**	**Doç. Dr. Elman ALİYEV**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanması aşamasında bana her türlü desteği veren danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÖZGÜR’e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A	: Afin düzlem
A1	: Afin düzlem aksiyomu bir
A2	: Afin düzlem aksiyomu iki
b	: Toplam doğru sayısı
$boy\mathscr{V}$	: $\mathscr{V}$ alt uzayının boyutu
$b(N)$	: Bir N noktasından geçen doğru sayısı
c_{ij}	: Koneksiyon (bağlantı) sayısı
$\mathscr{D}$	: Doğrular kümesi
$\mathscr{H}$	: Hiper düzlem (maksimal has alt uzay)
L1	: Lineer uzay aksiyomu bir
L2	: Lineer uzay aksiyomu iki
$\mathscr{N}$	: Noktalar kümesi
P1	: Projektif düzlem aksiyomu bir
P2	: Projektif düzlem aksiyomu iki
$R=(\mathscr{N}',\mathscr{D}',o')$	: Uzay
r_{ij}	: N_i noktasının d_j doğrusu üzerinde olma değeri
$S=(t,k,v)$	: Steiner sistemi
U=$(\mathscr{N},\mathscr{D},o)$	: Uzay
v	: Toplam nokta sayısı
$v(d)$	: Bir d doğrusu üzerindeki nokta sayısı
$\mathscr{V}$	: Alt uzay
$\mathscr{X}$	: Alt uzay
$\mathscr{Y}$	: Alt uzay
YL1	: Yaklaşık lineer uzay aksiyomu bir
YL2	: Yaklaşık lineer aksiyomu iki

o	: Üzerinde bulunma bağıntısı
$(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$	: Geometrik yapı
$\lvert X \rvert$	: X kümesinin eleman sayısı
$\lvert d_j \rvert$	: d_j doğrusunun nokta sayısı
$\langle \mathscr{X} \rangle$	: $\mathscr{X}$ alt uzayının örtüsü
$[d]$	: Bir d doğrusuna paralel bütün doğruların kümesi
Π	: Projektif düzlem
Π'	: Projektif düzlemin alt düzlemi

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Lineer Uzay, Yaklaşık Lineer Uzay, Projektif Uzay, Projektif Düzlem,Afin Uzay, Afin Düzlem.

Lineer uzaylar konusunun ele alındığı bu tezin birinci bölümünde geometrinin tanımı yapılarak geometrinin kronolojik gelişimi özetlendi. Ayrıca sonlu ve sonsuz geometriler hakkında bilgi verilerek merkezi izdüşürme ile projektif özeliklere değinildi.

İkinci bölümde yaklaşık lineer uzaylar ve temel kavramlar ele alındı. Bir yaklaşık lineer uzaydan yeni bir yaklaşık uzay elde edildi ve kısıtlanmış uzay, dual uzay, graf elde etme konularına değinildi. Ayrıca doğrusal regülerlik, noktasal regülerlik, alt uzay, boyut, baz gibi kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde lineer uzaylar işlendi. Bir yaklaşık lineer uzaydan lineer uzay elde etme, lineer uzayların sayısal özeliklerine değinildi. Lineer uzayların alt uzaylarla ve dual uzaylarıyla aralarındaki sayısal ilişkiler incelendi. Lineer uzaylarda nokta ve doğru sayısı arasındaki ilişki incelendi.

Dördüncü bölümde özel lineer uzaylar ele alındı. Projektif ve afin düzlemle ilgili önemli teoremlere yer verilerek yaklaşık lineer uzayların projektif düzleme gömülmesi örneklendirildi.

NEAR LINEAR SPACES AND LINEAR SPACES IN GEOMETRY

SUMMARY

Key words**:** Linear Spaces, Near-Linear Spaces, Projective Spaces, Projective Planes, Affine Spaces, Affine Planes.

In the first section of this thesis, historical development of geometry was summarized. Infinite and finite geometry, central of projection and projective properties were also referred.

In the second section, near-linear spaces and basic concepts were explained. A new near-linear spaces was obtained from a near-linear spaces and the topics about restriction spaces, dual spaces, obtain a graphs were touched on. Also, some concepts like line regular, point regular, subspace, dimension, base were presented.

In the third section, linear spaces were studied. Obtaining linear spaces from a near-linear spaces and numerical properties of linear spaces were explained. Numerical relationships of linear spaces related with subspaces and dual spaces were examined. The relations between number of points and number of lines at linear spaces were investigated.

In the fourth section, special linear spaces were explained. Important theorems about projective planes and affine planes were discussed and the examples about this embedding of near-linear spaces to projective planes were given.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bu kısımdaki temel bilgiler KAYA [9] nın, BÜKE [7] nin çalışmalarından özetlenmiştir.

1.1. Geometri Nedir?

Sözlük anlamı olarak ‘‘ cisimlerin büyüklüklerini ve biçimlerini inceleyen bilim dalı’’ olarak tanımlanan geometri kelimesi Yunanca kökenli olup yer ölçmek anlamına gelir. Tabiî ki bu tanım geometriciler tarafından kabul edilebilir olmaktan uzaktır.

Alman Matematikçi Felix Klein’e ait olan daha genel bir tanımsa şöyle der; ‘‘ S bir küme, G de S yi kendisine dönüştüren dönüşümlerden meydana gelen bir grup olmak üzere, S kümesinin G nin elemanları olan dönüşümler altında değişmez (invaryant) kalan özeliklerinin incelenmesine geometri denir.’’ Bu tanım geometriyi, cebirsel bir kavram olan bir dönüşümler grubuyla birleştirmek zorunluluğunu ortaya çıkarır. Dönüşümler de genel olarak geometrik kavram olmayan noktaların koordinatları yardımıyla formülleştirilebilirler. Bu sebeple Klein’in tanımı geometriyi bağımsız ve kendine özgü yöntemlerle incelenebilen bir bilim dalı olarak düşünme fikrine aykırı görüldüğünden tenkide uğramıştır. Buna karşın, bu tanım genel bir geometri tanımı olarak değil ama bir kümenin geometrisinin tanımı olarak düşünülebileceği için geometri kavramına daha geniş bir açıdan bakılabilmesini mümkün kılar.

Soyut ve aksiyomatik yöntem geometriye sınırları belirsiz bir boyut kazandırmıştır. Şöyle ki, ‘‘ Önceden doğruluğu varsayılan bir takım basit önermelerden hareketle elde edilebilecek bütün sonuçları inceleme ’’ gibi bir ifade göz önüne alınırsa, bu ifade teorik matematiğin birçok dalını ve geometriyi de içine alan genel bir tanım olarak düşünülebilir. [9]

1.2. Geometrinin Kısa Tarihçesi

Matematiğin orijininde de iki temel alan vardır: Aritmetik ve Geometri. Burada tarih boyunca geometrideki buluş ve gelişmeleri kronolojik bilgilerden bir derleme biçiminde aşağıda sunulmaktadır.

İnsanoğlunun dünyada oluşumu M.Ö. 2 000 000 lu yıllar olarak hesaplanmakta ve kabullenilmektedir. İlk insanların uzun asırlar, hatta uzun milleniumlar boyunca çok ilkel bir yaşam sürdürdükleri bilinmektedir. Ancak M.Ö 50 000 li yıllarda sayma belirtilerine rastlanmış, izleyen milleniumlar içinde (M.Ö. 25 000 li yıllar) taşlara işlenmiş primitif geometrik şekiller tespit edilmiştir. Daha sonra tarım sayesinde yerleşik yaşam yaygınlaşıyor, Maden Çağında (M.Ö. 4000 li yıllar) ilerleme ve medenileşme sürüyor. Gerçek gelişme yazının ve rakamların icadı (Mezopotamya da M.Ö. 3000 ler) ile oluyor. Mezopotamya da Sümerler, onları izleyen Babil ve Akadlar (M.Ö. 3500–2000 periyodunda) geometri adına şunları biliyorlardı:

Üçgen ve çokgenlerin ALANLARININ hesaplanması,

Pisagor Teoremi M.Ö. 1600–1900 arasında yazılan Plimpton tabletinde Pisagor üçlülerini kapsayan tablolar var.

Birçok basit geometrik cismin hacmini veren formüller,

Kesik kare piramidin hacmini veren formül,

Çapı gören çevre açı diktir.

Mezopotamyalılar ve biraz sonra söz edeceğimiz eski Mısırlılar açının ölçülmesini tam olarak geliştiremediler. Ancak yapı kirişlerinin eğimi hesabında kotanjanta benzer bir kavram geliştirmişlerdi. π yerine yaklaşık değerler kullanılıyordu.

Geometrinin orijininin Mısır olduğuna ilişkin yaygın fakat yanlış bir kanaat vardır. Oysa Mısırdaki matematiksel gelişmeler, Mezapotamyadakileri yaklaşık 500 yıl sonradan izlemiştir. Mısırlılar bu kavramlar dışında geometrik eşlik kavramını kullandılar. M.Ö. 2800 lerde Büyük Piramidi inşa ettiler.

İnsanoğlu yazının icadından hemen sonra tekerleği icat edince (M.Ö. 3000) ulaşım ve ticarette ulaşılan kolaylıkların sağladığı gelişmeler sayesinde π sayının varlığı ile karşılaştı. Çember, daire, kare, silindir gibi basit geometrik şekillerle ilgili olan bu harika sayı tamamen geometri orijinlidir. (r yarıçaplı çember için, π=çevre/2r=alan/r nin karesi). π üzerinde Mezopotamyalılar, Mısırlılar, Çinliler, Hintliler, Helenler ve hatta 1600 lü yıllardan itibaren birçok büyük matematikçi uğraşmışlardır. İrrasyonelliği 1767 J. F. Lambert tarafından ve transandant bir sayı olduğu çok sonraları (1882 de Alman matematikçi F. Lindemann tarafından) ispatlanmıştır.

Geometrideki gelişmeler, daha sonra Batı Anadolu da devam etmektedir. Yunanlıların çalışmaları ile Mısır ve Mezopotamya'dan öğrenilen bilgiler Miletli Tales (M.Ö. 595) ve Pisagor (M.Ö. 540) tarafından işlenmiş ve geliştirilmiştir. Tales ve Pisagor'un Dedüktif Geometri çalışmalarından hiçbir belge bugüne ulaşmamıştır. Bu dönemde İspatlı Geometriye geçilmiştir. Daha sonra gelişmeler, Trakya, Mora yarımadası ve İtalya'ya yaygınlaştı. Cetvel ve Pergel yardımıyla;

Bir çemberinin alanına eşit alanlı kare çizmek

Açıyı üçe bölmek

Küpün hacmini iki katına büyütmek

gibi klasik problemler ve benzerleri bu dönemde (M.Ö. 4. asırda) çalışılmıştır. (bu problemlerin izleyen asırda cebirsel eğriler yardımıyla çözüldüğü biliniyor). Sonra Eudemus (M.Ö. 335) Geometri Tarihini yazdı, Aristeaus (M.Ö. 320) konikler konusunu ayrıntılı inceledi.

M.Ö. 323 de Büyük İskender'in ölümü ile üçe parçalanan Roma İmparatorluğunun Mısır kesiminde I. Ptolemi döneminde bilimin yeniden şahlanmasını sağlayan gelişmeler oldu. İskenderiye'de tamamen serbest eğitim veren okullar kuruldu. Öklid M.Ö. 300 lerde Elementler adlı eserleri yazdı. Bu eserler üzerine çok şey söylenebilir. Tales, Pisagor ve Pisagoryanlarca ispat edilmiş geometrik ifadeler bu dönemde mükemmelleştirildi. Daha sonra M.Ö. 140 da Hiperkus, ilk düzenli trigonometri eserini yazdı, Heron birinci yüzyılda bazı formüller geliştirdi ve geometriye dayalı birçok icatlar yaptı. Pappus M.S. 320 de Pappus teoremini de kapsayan Koleksiyonu yazdı. (Pappus teoremi altıgenlerle ilgili bir özellik olarak ispatlanıyor, ama bugün Projektif geometride önemli bir role sahip bir aksiyom olarak bile kullanılmaktadır).

1143 yılında Elementler'in batı dillerine çevrildiği görüldü. 1635 de Cavalieri Geometri adlı eserini yayınlıyor, 1637 de Descartes Analitik Geometri'yi keşfediyor. 1639 ve 1640 da sırayla Desargues ve Pascal bugün kendi adlarıyla bilinen teoremlerini de kapsayan eserlerini yayınlıyorlar. 1678 de Ceva teoreminin ispatı veriliyor.

1670 de Hiperbolik Geometrinin ortaya atılışı, 1794 de Legendre'nin Geometrinin Elemanları, 1801 de Gauss'un paralellik kavramı üzerine çalışmaları, 1826 da Poncelet ve Plucker'in geometride Duallik İlkesi, 1827 de Mobius, Plucker ve Feurbach'ın Homojen Koordinatları işleyişleri gerçekleşiyor.

1822 de Poncelet'nin bugün kendi adıyla anılan teoremlerinide kapsayan Denemeler adlı eseri yayınladı. Kazan üniversitesinden Lobacevski'nin 1829 da yayınlanan çalışmaları ve bu konuda daha önce aynı sonuçlara ulaştığı ve ispatlandığı anlaşılan Macar Bolyai'nin çalışmaları ile Çok Paralelli (=hiperbolik) Geometrilerin varlığı görüldü.

1843 de 4-boyutlu uzayın vektör cebri ile ilgili olarak Hamilton Kuaterniyonları keşfedildi ki bu kavram bugün en ilginç ve somut (Dezargsel fakat Pappussel olmayan) projektif düzlemlerden birini inşa etmekte kullanılmaktadır.

Daha sonraki yıllarda ses getiren eserler olarak 1847 de Von Staudt'un Geometri Der Lage'si, 1854 de Riemann'ın Habıtatıonschrıft'i, 1872 de Klein'in yayınları ve son olarak 1889 da Hilbert'in Grundlagen Der Geometri'si görülüyor. [13]

1.3. Aksiyomatik Sistemler ve Özelikleri

Geometriyi inşa etmeye başlarken modern matematiğin gelişmesinde kullanılan aksiyomatik yöntem hakkında temel fikirleri edinmek önemlidir.

Aksiyomatik yöntem deney, gözlem, deneme-yanılma veya sezgisel kavrayış ile keşfedilen sonuçların (teoremler vs.) gerçekten doğru olduğunu gösterdiğimiz veya ispat ettiğimiz bir işleyişdir.

Bir aksiyomatik sistemde bir sonucun ispatı tamamıyla her biri öncekinden mantık yoluyla çıkarılan ve doğru olarak bilinen bir ifadeden, ispatlayacağımız sonuca götüren ifadelerin bir dizisidir. İlk olarak ikna edici bir ispat için bir ifadenin başka bir ifadeden ne zaman çıkacağını belirlemeye ait zeminin kurallarını oluşturmak gerekir. Bunun içinde iki değerli mantığa (doğru-yanlış) ait kurallara sahip olmalıyız. İkinci olarak ispatta kullanılan terimlerin ve ifadelerin her okuyucu tarafından açık bir anlama sahip olması önemlidir.

Tanımlar matematiğin her dalında olduğu gibi geometride de çok önemli bir role sahiptir. Bir kavramı tanımlamak ya da belirlemek için başka kavramları kullanmak zorunluluğu vardır. Bu başka kavramlar da daha başka kavramlar yardımıyla tanımlanabilir. Bu da gerek dilde bu amaçla kullanılacak sözcüklerin sonlu sayıda olması, gerekse lüzumsuz tekrarların önlenmesi bakımından bazı sözcük ya da terimlerin tanımlanmadan alınıp kullanılması sonucunu doğurur. Dolayısıyla tanımlanamayan ya da tanımlanmasına gerek görülmeyen bazı temel kavramların varlığını kabullenmek gerekmektedir. Bunlara ilkel ya da tanımsız (tanımlanmamış) kavramlar denir. [9]

İlkel kavramların kullanımıyla diğer kavramların tanımları elde edilir.

Sistemin önermelerine gelince durum terimlerdekinin aynısıdır. Bu önermenin, gerçekten doğru (veya yanlış) olduğunun ispatı ya sirküler veya lineer niteliklidir. Burada da ispatı bir yerde durdurmak gereği vardır ve söz konusu önermeleri ispatsız olarak kabul zorunluluğu vardır. Böylesi önermelere aksiyomlar (veya postulatlar) adı verilir. Postulatlar da aksiyomlar gibi ispatsız kabul olunan ama doğruluklarına o zamanki anlayışa göre, aksiyomlar kadar kesin gözle bakılmayan temel önermelerdir. Günümüzde bu çeşit temel önermeler arasında ayrım yapılmamaktadır.

Aksiyomlar, aksiyomatik sistemimin temel doğrularıdır. Diğer doğrular aksiyomlar veya postulatlar adı verilen önermelerle tanımların kullanımı sonucu ispatlanırlar. Böylesi önermelere sistemin teoremleri denir.

Her bir aksiyomatik sistem bir miktar tanımsız terim ihtiva eder. Bu terimler gerçekten tanımsız olduklarından doğuştan anlam sahibi değildir. Her okuyucu kendi yolunda bunları yorumlama seçimi yapabilir. Bir sistemde her tanımsız terime özel bir anlam vererek o sistemin bir yorumu meydana gelir. Eğer sistemin bir yorumu tüm aksiyomları gerçeklerse bu yoruma bir model adı verilir.

Bir aksiyomatik sistemin en önemli ve en temel özeliği tutarlılığıdır. Aksiyomatik sistemin tümünü sağlayan bir geometrik yapı oluşturulabiliyorsa bu aksiyomatik sistem tutarlıdır denir.

Bir diğer önemli özeliği de bağımsızlığıdır. Bir aksiyomatik sistemde bazı aksiyomlar diğer aksiyomlar tarafından elde edilebiliyorsa bu aksiyom sistemine bağımlıdır denir. Sistemin hiçbir aksiyomu sistemi oluşturan diğer aksiyomlar tarafından elde edilemiyorsa bu aksiyomatik sisteme bağımsızdır denir.

Örnek 1.3.1. Basit bir aksiyomatik sistem oluşturalım.

Tanımsız Terimler: X'ler , Y'ler ve ''ait olma'' , ''……den geçme'' , ''üzerinde olma''

Aksiyomlar:

A_1: Bu sistemde kesinlikle üç farklı X vardır.

A_2 : İki farklı X, kesinlikle bir Y ye aittir.

A_3 : X lerin tümü aynı Y ye ait değildir.

A_4 : Y lerin herhangi ikisi ortak olarak aynı X i bulundurur.

Teorem 1.3.1. Farklı iki Y kesinlikle ortak bir tek X ihtiva eder.

İspat: Olmayana ergi yoluyla iddianın aksini kabul edelim. Yani farklı iki Y ortak olarak farklı iki X ihtiva etsin. Bu takdirde A_2 ile çelişmiş oluruz. Bu kabul bizi çelişkiye götüreceğinden teoremin ifadesi doğrudur.

Teorem 1.3.2. Kesinlikle üç Y vardır.

İspat: A_2 'den X'lerin her bir çifti kesinlikle bir Y ye aittir. A_1 'den üç X in varlığını , A_3 'den bu üç X'in aynı Y ye ait olmadığını belirttiğinden X'lerin farklı çiftlerini oluşturup sayarsak üç Y'nin varlığını görürüz. Dört Y'nin var olup olmadığını şöyle sonuçlandırabiliriz. Eğer böyle bir Y var olsaydı diğer Y'lerle bir önceki teorem gereğince bir X paylaşacaktır. Bu durumda dört tane X olması gerekirdi. Buda A_1 ile çelişki yaratacağından üç Y vardır.

Teorem 1.3.3. Her bir Y kesinlikle kendisine ait iki farklı X 'e sahiptir.

İspat: Teorem 1.3.2. den kesinlikle üç Y'ye sahibiz. A_4 'den her bir Y'nin en az bir X'e sahip olduğu ve A_2 'den kesinlikle bir tane ihtiva etmesinin önlendiği görülür. A_2 ve A_3 den bir Y'nin iki X'e sahip olması gerektiği ve ikiden fazla sahip olamayacağı belirtilir.

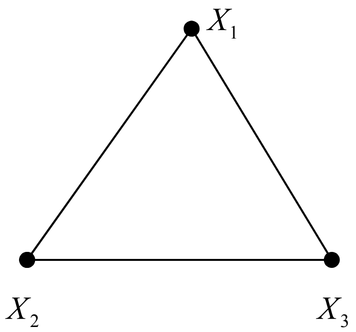
Yukarıdaki aksiyomatik yöntem ve soyut bir aksiyomatik sistem örneğini inceledik.

Bu aksiyomatik sistem için bir model üretelim.

X noktalar kümesi, Y doğrular kümesi olarak kabul edelim.

X=$\{X_1, X_2, X_3\}$

Y= $\{Y_1, Y_2, Y_3\} = \{\{X_1X_2\}, \{X_1X_3\}, \{X_2X_3\}\}$



Şekil 1.3.1. Basit bir geometri modeli

Oluşturacağımız aksiyomatik sistemlerin en önemli özelikleri tutarlılığı ve bağımsızlığıdır. Bir somut model üretildiğinde aksiyomatik sistemin mutlak tutarlılığı tesis edilmiş olur. Bir aksiyom diğer aksiyomlara ihtiyaç duyulmadan mantık yoluyla tek başına çıkarılabildiğinden bu sistem bağımsızdır denir.

1.4. Öklid Geometrisi

Öklid gelmiş geçmiş matematikçilerin arasında adı geometri ile en çok özleştirilen kişidir. Öklid derlemesinin tutarlı bir bütün olmasını sağlamak için, kanıt gerektirmeyen apaçık gerçekler olarak beş aksiyom ortaya koyar. Diğer bütün önermeler bu aksiyomlardan çıkarılır.

Öklid Elementleri on üç kitaptan oluşur. İskenderiye'de yazılmış olan Elementler'in içeriğinden çok, kapsamış olduğu konuların sunuluş biçimi önemlidir. Önce bir takım tanımlar, aksiyomlar ve postulatlar verilmiş ve teoremler bunlara dayanarak kanıtlanmıştır. Böylece geometri, belirli tanım ve ilkeler çerçevesinde yapılandırılmış olmaktadır.

Elementler'de nokta, çizgi, yüzey ve cisim gibi geometrik kavramlar tanımlandıktan sonra, aksiyomlara geçilmiştir. Öklid'in aksiyomları şunlardır;

Aksiyomlar:

1) Aynı şeye eşit olan şeyler birbirlerine de eşittir.

2) Eşit miktarlara eşit miktarlar eklenirse, eşitlik bozulmaz.

3) Eşit miktarlardan eşit miktarlar çıkarılırsa, eşitlik bozulmaz.

4) Birbirine çakışan şeyler birbirine eşittir.

5) Bütün, parçalardan büyüktür.

Aksiyomlardan sonra postulatlar verilmiştir. Postulat, ispat edilmeksizin doğru olarak benimsenen önerme demektir. Öklid'in postulatları ise şunlardır;

Postulatlar:

1) İki nokta arasını birleştiren en kısa yol bir doğrudur.

2) Bir doğru, doğru olarak sonsuza kadar uzatılabilir.

3) Bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bir çemberdir.

4) Bütün dik açılar birbirine eşittir.

5) Başka iki doğruyu kesen bir doğru bu iki doğruyla aynı tarafta, toplam iki dik açıdan küçük iç açılar meydana getirirlerse bu iki doğrunun uzantıları açıların iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişirler.

Bu önermelerden uzayla ilgili olduğu halde Öklid'in açıkça belirtmediği üç önerme daha çıkarılabilir.

1) Uzay üç boyutludur.

2) Uzay sonsuzdur.

3) Uzay homojendir.

Uzun süre postulat olarak adlandırılan önermelerin yapıları tam olarak anlaşılmamış ve Öklid'in paralellik postulatı adıyla tanınan beşinci postulatı matematikçiler tarafından sanki bir teoremmiş gibi kanıtlanmaya çalışılmıştır. Bazı matematikçiler ise bu postulatı daha kullanışlı başka bir postulat ile değiştirmek istemişlerdir. Paralellik postulatının yerine konulan en tanınmış postulatlar şunlardır;

1) Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 derecedir.

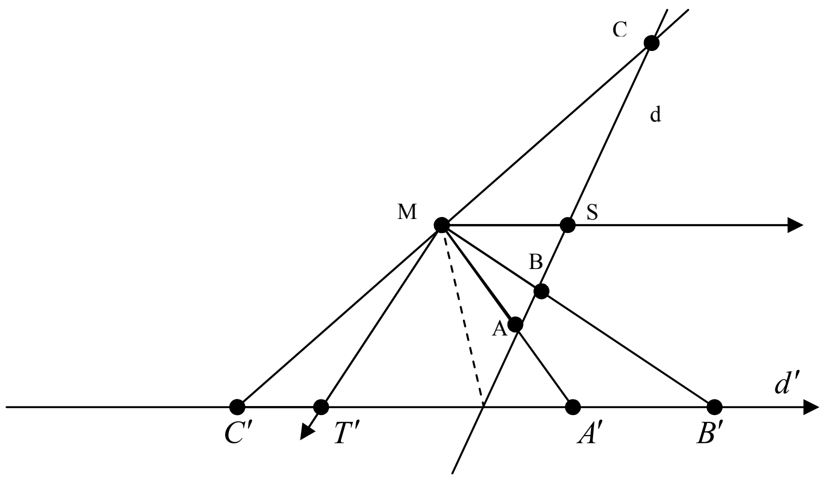
2) Bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnızca bir tek paralel çizebilir.

19. yüzyılda paralellik postulatının mümkün sonuçlardan sadece biri olduğunun ispatlanmasıyla Öklid dışı geometriler kuruldu.

1.5. Öklid Geometrisi Dışındaki Geometriler ve Projektif Geometri

Öklid geometrisinin en tartışılan postulatı şudur: Başka iki doğruyu kesen bir doğru bu iki doğruyla aynı tarafta, toplamları iki dik açıdan küçük iç açılar meydana getirirse bu iki doğrunun uzantıları açıların iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişirler. Buna göre, bir doğruya paralel olan ve bu doğru dışında verilen bir noktadan geçen bir tek doğru vardır. Öklid düzleminde kesişen d ve d' doğrularını göz önüne alalım. d ve d' nün noktaları, bu doğrulardan hiçbiri üzerinde bulunmayan bir M noktası ile birbirlerine şöyle eşleyelim: d üzerindeki herhangi X noktasına MX doğrusu ile d' nin ortak (arakesit) noktası karşı gelsin. Buna M merkezli izdüşüm denir.

Buna göre Şekil 1.5.1. d nin $A, B, C, ...$ noktaları d' nin $A', B', C', ...$ noktalarına eşlenir. Burada şu soru akla gelecektir. MS doğrusu d' ye paralel olacak biçimde seçilirse d nin S noktasına d' nin hangi noktası karşılık gelir? MT' doğrusu d ye paralelse d nin hangi noktası T' ye eşlenir? Açıkça görüldüğü gibi Öklid düzleminde bu sorulara cevap olacak nokta bulmak mümkün değildir. Bu da Öklid geometrisinde bir boşluk oluşturduğundan paralellik postulatına daima kuşku ile bakılmıştır ve uzun süreler ispat edilmeye çalışılmıştır. Daha sonraları J. Bolyai, N.I. Lobaçevski ve C.F. Gaus tarafından paralellik postulatının ispat edilemeyeceği onun mümkün hallerden yalnız bir tanesi olduğu görülmüştür. Aksiyomların gerçeklerden çok varsayımlar olduğu anlaşılmış ve bu geometrilerin doğmasına yol açmıştır.



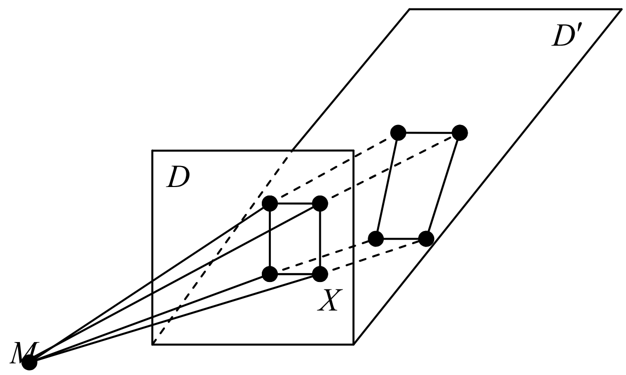
Şekil 1.5.1. Öklid düzleminde M merkezli izdüşürme

Yukarıdaki soruyu olumlu cevaplayabilmek için Öklid postulatını ‘‘düzlemde herhangi iki doğru en az bir arakesit noktasına sahiptir’’ varsayımı ile değiştirmekle eliptik (gerçel projektif) geometrinin temelleri atılmıştır. Bu alanda paralelliğin söz konusu olmadığı bir geometri ilk kez B. Riemann tarafından geliştirilmiştir. Bundan başka Öklid postulatı yerine ‘‘ bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel doğru çizilebilir’’ varsayımını almakla hiçbir çelişkiye düşmeden ve Öklid geometrisi kadar doğru olan başka geometrilerinde (Bolyai-Lobaçevski geometrisi) varlığı da gösterilmiştir. Bir doğruya aynı düzlem içinde, bu doğru dışındaki bir noktadan bir tek yada hiç yahutta birçok paralel doğru çizilebilen geometriler yalnızca Öklid geometrisi, Eliptik geometri ve Bolyai-Lobaçevski geometrisi değildir. Bu son saydıklarımız sırasıyla afin, projektif ve hiperbolik geometri denilen daha genel geometriler için birer örnektir. Bütün bu geometriler paralellik postulatı üzerindeki değişikliklerden hareketle genelleştirme ve soyutlama yoluyla kurulmuştur. Öklid geometrisinden paralellik postülatıyla ayrılan bu tür geometrilere Öklidyen olmayan geometriler denir. [9]

1.6. Metrik ve Projektif Özelikler

Şekillerin geometrik özelikleri mühim bazı gruplara ayrılabilir; bilhassa nicelik ve nitelik bakımından gruplama büyük önem taşır. Şekillerin bu çeşit özeliklerine çoğu defa sırasıyla metrik ve projektif özelikleri denir. Elementer geometri anlamıyla, iki nokta arasındaki uzaklık, iki doğru veya düzlem arasındaki açının ölçümü metrik birer özeliktir. Öte yandan, bir takım noktaların aynı bir doğru üzerinde bulunması; bir takım doğruların aynı düzlemde bulunması veya bir noktadan geçmesi; bir takım düzlemlerin aynı bir doğrudan geçmesi gibi özeliklerde projektik özeliklere birer örnektir.

Üç boyutlu Öklid uzayını göz önüne alalım. Bu uzayın herhangi düzlemini (düzlemde doğrular için paralellik kavramını ortadan kaldırmak için) şöyle genişletelim: Bu düzlemde birbirine paralel bütün doğruların kesiştiğini kabul ettiğimiz sonsuzdaki bir noktayı düzleme katalım. Böylece düzleme her doğrultuda bir yeni nokta katılmış olur. Bu yeni noktaların hepsini sonsuzdaki doğru denilen yeni bir doğru üzerinde de olduğunu kabul ederek bu doğruyu da düzleme katalım. Sonra bu genişletme yöntemiyle uzaydaki her düzlemi genişletelim. Son olarak bu uzaya bütün yeni (sonsuzdaki) doğruları üzerinde bulunduran bir (sonsuzdaki) düzlem katalım. Böylece elde edilen uzayda aşağıdaki dönüşümleri düşünelim: D ve D' bu uzayda iki düzlem olsun. D ve D' dışındaki bir M noktası yardımıyla D nin X noktasını, MX doğrusu ile D' düzleminin arakesit noktasına izdüşürelim. (Bkz. Şekil 1.6.1.)



Şekil 1.6.1. M merkezli izdüşürme sonucunda metrik ve projektif özelikler

M merkezli bu izdüşürme altında D düzlemindeki bir dikdörtgen D' düzleminde herhangi bir dörtgene dönüşür. D üzerindeki bir çemberin görüntüsü de genel olarak bir çember değildir. Buradan hemen şu sonuçlar elde edilir: İki nokta arasındaki uzaklık, iki doğrunun dikliği yada iki doğru arasındaki açının genişliği, bir üçgenin alanı, iki doğru parçasının (yada doğrunun) paralelliği merkezsel izdüşümler altında değişebilmektedir.

O halde bunlar projektif özelikler değildir. Aynı şekilde çemberin şekli de böyle dönüşümler altında korunmadığı için, çember bir projektif kavram olarak düşünülemez. Gerçekten, uzaklık, diklik, paralellik… v.s gibi ölçüye dayanan kavramlar özelikle projektif geometride hiç rol oynamazlar. Buna karşın, yukarıdaki tipte dönüşümler altında, bir nokta her zaman bir noktaya, bir doğru üzerindeki noktalar başka bir doğru üzerindeki noktalara (yani doğrular doğrulara) dönüşür. Yine, aynı doğru üzerinde olmayan üç nokta aynı özelikte üç noktaya, bir noktadan geçen doğrular bir noktadan geçen doğrulara dönüşür. Dolayısıyla, bir noktanın bir doğru üzerinde bulunması ve bir doğrunun bir noktadan geçmesi yada geçmemesi projektif özelikler; nokta, doğru, üçgen arakesit alma, noktaları birleştirme projektif kavramlardır. [7]

1.7. Geometrik Yapı

Bundan sonraki incelenen konuların çoğunda biri noktalardan oluşan küme, diğeri doğrulardan oluşan bir küme söz konusu olacaktır. Noktalardan oluşan kümeyi $\mathscr{N}$ ile, doğrulardan oluşan kümeyi $\mathscr{D}$ ile göstereceğiz. Burada $\mathscr{N}$ ile $\mathscr{D}$ ayrık kümelerdir. $\mathscr{N}$ ve $\mathscr{D}$ den başka, bazı noktalarla bazı doğrular arasında üzerinde bulunma ilkel kavramı göz önüne alınır. Dolayısıyla bu kavram $\mathscr{N}$ nin bir elemanıyla $\mathscr{D}$ nin bir elemanının birlikte düşünülmesi durumunda ortaya çıkar. Yani üzerinde bulunma bağıntısı sıralı ikililerle ilgilidir. Şöyle ki N, $\mathscr{N}$ den alınan bir nokta ve d de $\mathscr{D}$ den alınan bir doğru olmak üzere eğer N noktası ile d doğrusu için üzerinde bulunma söz konusu ise bunlar (N,d) biçiminde bir sıralı ikili diye düşünebiliriz. (N,d) yazılırsa, bu N noktası d doğrusu üzerindedir veya

d doğrusu N noktasından geçer demektir. Bu nedenle üzerinde bulunma kavramının incelenmesi $\mathscr{N} \times \mathscr{D}$ 'nin belli bir alt kümesinin incelenmesini zorunlu kılar. Böyle bir alt kümede $\mathscr{N} \times \mathscr{D}$ üzerinde bir bağıntı demektir. Bu bağıntıya üzerinde bulunma bağıntısı veya kesişme bağıntısı diyeceğiz. Bu bağıntıyı ‘‘o’’ ile göstereceğiz. (N,d) ikilisi o alt kümesindeyse, yani $(N,d) \in o$ ise, bu Nod veya doN yazılarak ifade edilir. Nod gösterimi ‘N noktası d doğrusu üzerindedir’ diye okunur. Benzer şekilde eğer $(N,d) \notin o$ ise bu durum $N\o d$ veya $d\o N$ gösterimiyle ifade edilir ve bu gösterim ‘N noktası d doğrusu üzerinde değildir’ diye okunur.

Sonuç olarak biri noktalardan diğeri doğrulardan oluşan ayrık $\mathscr{N}$ ve $\mathscr{D}$ kümeleri ile $\mathscr{N} \times \mathscr{D}$ üzerinde bir o bağıntısından meydana gelen ($\mathscr{N}$, $\mathscr{D}$, o) üçlü sistemleri söz konusudur. Bu konunun başlığındaki geometrik yapı deyimi ile de böyle sistemler kastedilmektedir.

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Yaklaşık Lineer Uzay

Tanım 2.1.1. $\mathscr{N}$ elemanları noktalar, $\mathscr{D}$ elemanları doğrular olan ayrık iki küme ve o üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere $\cup = (\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ geometrik yapısına uzay denir. [3]

Tanım 2.1.2.
YL1: Herhangi bir doğrunun en az iki noktası vardır.

YL2: İki nokta en çok bir doğru üzerindedir.

Aksiyomlarını sağlayan $\cup = (\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ uzayına bir yaklaşık-lineer uzay veya kısmi düzlem denir. [3]

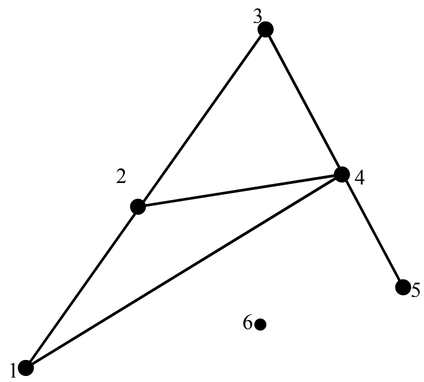
YL2 gereğince P ve Q gibi farklı iki noktadan bir tek doğru geçer. Bu doğruyu PQ ile gösterelim. Eğer R ve S de PQ doğrusu üzerinde farklı iki nokta ise YL2 gereğince $PQ = RS$ dir.

Örnek 2.1.1. $\mathscr{N}$ Öklid 3-uzayının noktalarının kümesi ve $\mathscr{D}$ alışılmış bütün doğruların kümesi olsun. Bu takdirde $\cup = (\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ bir yaklaşık-lineer uzaydır.

Örnek 2.1.2. $\mathscr{N}$ Örnek 2.1.1. deki küme olsun. $\mathscr{D}$ ise 3-uzayının bildiğimiz düzlemler kümesi olsun. Bu durumda $\cup = (\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ diye bir yaklaşık-lineer uzay olur mu?

İki noktadan sonsuz düzlem geçtiğinden, ikinci aksiyom (YL2) sağlanmaz. Dolayısıyla bir yaklaşık-lineer uzay olmaz.

Örnek 2.1.3. $\mathcal{N} = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve $\mathcal{D} = \{\{1,2,3\},\{2,4\},\{3,4,5\},\{1,4\}\}$ olsun. Bu uzay Şekil 2.1.1 ile gösterilmiştir. [3]



Şekil 2.1.1. Altı noktalı beş doğrulu bir yaklaşık-lineer uzay

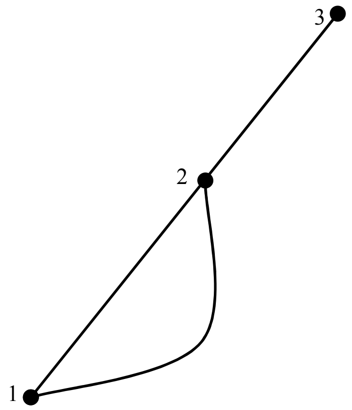
$d_1 = \{1,2,3\}, d_2 = \{3,4,5\}, d_3 = \{1,4\}, d_4 = \{2,4\}$ olarak belirtelim. YL1 aksiyomunun sağlandığı aşikârdır. Bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır. Doğrular üzerindeki noktalara bakıldığında iki noktanın en çok bir doğru üzerinde olduğu görülür. Dolayısıyla bu uzay bir yaklaşık lineer uzaydır.

Örnek 2.1.4. Örnek 2.1.3. deki uzayın doğrular kümesine $d_5 = \{3,4\}$ doğrusunu ilave edelim.

$\mathcal{N} = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve $\mathcal{D} = \{\{1,2,3\},\{2,4\},\{3,4,5\},\{1,4\},\{3,4\}\}$ biçiminde belirtelim.

3 ve 4 noktaları hem d_3 hem de d_5 doğrusu üzerinde olur ki bu YL2 ile çelişir. Bu durumda $\cup = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ bir yaklaşık-lineer uzay olmaz.

Örnek 2.1.5. $\mathscr{N} = \{1,2,3\}$ ve $\mathscr{D} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ olsun. Bu uzay Şekil 2.1.2. ile gösterilmiştir. [1]



Şekil 2.1.2. YL2 ile çelişen anlamsız bir uzay

1 ve 2 noktaları iki doğru belirttiğinden YL2 aksiyomu sağlanmaz. Dolayısıyla $\mathrm{U} = (\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ bir yaklaşık-lineer uzay değildir.

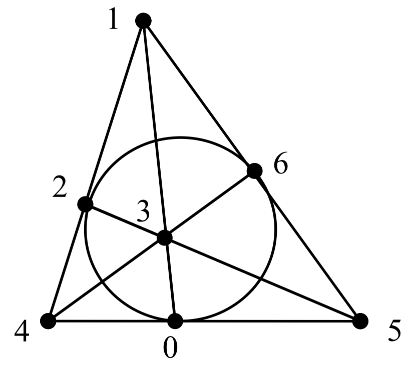
Boş kümeyi de bir yaklaşık-lineer uzay olarak düşünebiliriz. Bu kümede nokta ve doğrular bulunmadığından YL1 ve YL2 aksiyomlarının hipotez kısmı oluşamaz. Dolayısıyla ilgili aksiyomların sağlandığı kabul edilir. Geometrik yapı sadece noktadan oluşuyorsa yani doğrular kümesi boş ise bu yapı YL1 aksiyomu sağlar. YL2 aksiyomunun sağlandığı ise aşikârdır. O halde bu yapı bir yaklaşık-lineer uzaydır. Bu yapılar aşikâr yaklaşık-lineer uzay olarak bilinir. [1]

Örnek 2.1.6.

1) Yedi nokta ve yedi doğru vardır.

2) Her doğru üç noktaya sahiptir.

3) Her nokta üç doğru üzerindedir.



Şekil 2.1.3. Fano Düzlemi

Şekil 2.1.3. de böyle bir sistem tam olarak gösterilmektedir. Eğer noktalar 0, 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 ile gösterilirse, doğrular $\{1,2,4\},\{2,3,5\},\{3,4,6\},\{0,4,5\},\{1,5,6\},\{0,2,6\}$ ve $\{0,1,3\}$ kümeleri olarak seçilsin. Bu seçim keyfi olarak yapılsın. Bu seçimin özeliği 7 ile bölümünden kalanı kullanmak ve i 0 ile 6 arasındaki değerler olmak üzere her doğru $\{1+i,2+i,4+i\}$ biçimindedir. Yani $\{1+5,2+5,4+5\}=\{6,7,9\}$ kümesi $\{6,0,2\}$ doğrusudur. Bu yaklaşık-lineer uzaya Fano düzlemi denir.

Tanım 2.1.3. Bir X kümesinin elemanlarının sayısı $|X|$ ile gösterilir. [3]

Önerme 2.1.1. Bir yaklaşık-lineer uzayın iki farklı doğrusu en çok bir noktada kesişir.

İspat: d_1 ve d_2 farklı iki doğru olsun. Eğer $|d_1 \cap d_2| \geq 2$ olsaydı YL2 ile çelişki oluştururdu. Dolayısıyla iki doğru en çok bir noktada kesişir. [3]

Önerme 2.1.2. Bir yaklaşık-lineer uzayın d_1 ve d_2 doğruları için $\mathrm{d}_1 \subseteq d_2$ ise bu takdirde $d_1 = d_2$ dir.

İspat: YL1 gereğince d_1 en az iki noktaya sahiptir. Bunlar P ve Q olsun. PQ=d_1 dir. $d_1 \subseteq d_2$ olduğundan P,Q$\in d_2$, PQ=d_2 olur. d_1=PQ=d_2 dolayısıyla $d_1 = d_2$ olur. [3]

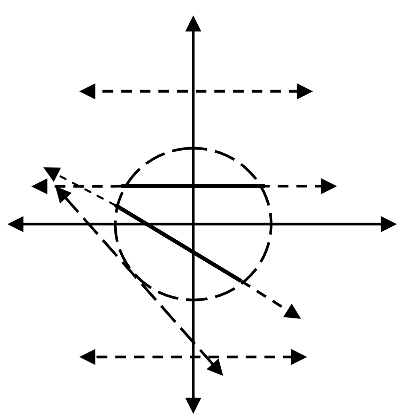
Gösterim: Bir yaklaşık-lineer uzaydaki toplam nokta sayısı v, toplam doğru sayısı b ile gösterilir. Bir d doğrusu üzerindeki nokta sayısı $v(d)$ ile, bir N noktasından geçen doğru sayısı $b(N)$ ile gösterilir. Bu sayıların sonsuz olması mümkündür.

2.2. Bir Yaklaşık Lineer Uzaydan Yeni Bir Yaklaşık Lineer Uzay Elde Etme

$\cup=(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ bir yaklaşık lineer uzay olsun. Bir $R=(\mathscr{N}', \mathscr{D}', o')$ geometrik yapısını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$\mathscr{N}'$, $\mathscr{N}$ nin herhangi bir alt kümesi olsun. $\mathscr{D}$ nin en az iki noktası $\mathscr{N}'$ de olan herhangi d doğrusu için $d \cap \mathscr{N}'$ yü yeni doğrular kümesinin bir elemanı yani $d' = d \cap \mathscr{N}'$ yü $\mathscr{D}'$ nün bir elemanı olarak tanımlayalım. Bu uzayın yaklaşık lineer uzay olduğu kolayca görülebilir. R ye yaklaşık-lineer uzay veya $\cup$ nun bir kısıtlanmışı, özellikle de $\cup$ nun $\mathscr{N}'$ ye kısıtlanmışı adı verilir. [3]

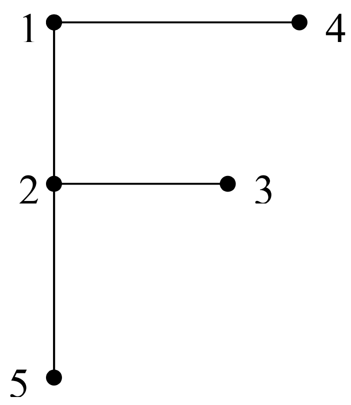
Örnek 2.2.1. $\mathscr{N}$, Öklid düzleminin noktalar kümesi, $\mathscr{D}$ bu düzlemde alışılmış doğrular kümesi , o üzerinde bulunma bağıntısı olsun. $\mathscr{N}'$ yü $\mathscr{N}$ nin orijin merkezli birim çemberinin iç noktalarının kümesi olarak tanımlayalım. $\mathscr{D}'$ nün elemanlarını $\mathscr{D}$ deki doğruların bu birim çemberdeki kısıtlanmışları , o' de o nun kısıtlanmışı olarak alınsın. Bu takdirde $R=(\mathscr{N}', \mathscr{D}', o')$ geometrik yapısı Öklid düzleminin bir kısıtlanmışı olur. [3] (Şekil 2.2.1.)



Şekil 2.2.1. Öklid uzayının bir kısıtlanmışı

Bu düzlemde doğru ve daire birbirine göre üç halde bulunur. Ya doğru daireyi keser, ya teğet ya da doğru dairenin hiçbir noktasını kapsamaz. Burada doğrular birim daireyi kesecektir. Ayrıca her biri çember üzerinde olmayan en az iki noktaya sahiptir. Bu yüzden her biri sonsuz sayıda nokta kapsar. Dolayısıyla YL1 aksiyomu sağlanır. YL2 nin sağlandığı açıktır.

Örnek 2.2.2. $\mathscr{N} = \{1,2,3,4,5\}$ ve $\mathscr{D} = \{\{1,4\},\{2,3\},\{1,2,5\}\}$ olsun. [10] (Şekil 2.2.2.)

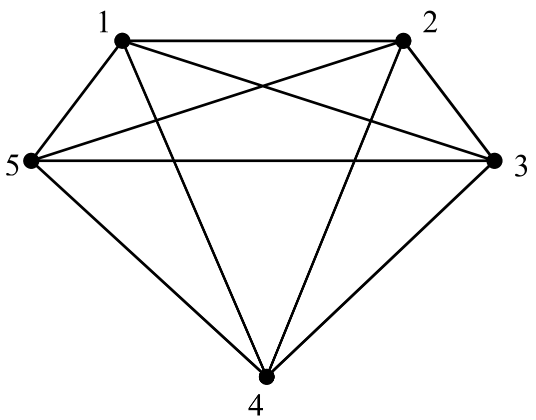


Şekil 2.2.2. Sonlu bir kısıtlanmış uzay

Genel olarak $\mathscr{N}'$ nün seçimi keyfi olduğundan $\mathscr{N}$ nin her alt kümesinden bir kısıtlama elde edilebilir. $\mathscr{N}' = \{2,3,4\}$ ve $\mathscr{D}' = \{\{2,3\}\}$ alalım. Tanım gereği $\mathscr{D}'$ ye doğru seçerken bu doğrunun en az iki noktasını da $\mathscr{N}'$ ye seçmeliyiz.

v sonlu ise kısıtlamaların sayısı 2^v dir. (2^v, v elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısıdır.) Ancak verilen bir uzayın bütün kısıtlamalarının hepsi farklı olmaz.

Örnek 2.2.3. $\mathscr{N} = \{1,2,3,4,5\}$ ve her nokta ikilisi bir doğru olsun. (Şekil 2.2.3.)



Şekil 2.2.3. Beş noktalı bir uzayın kısıtlanmışlarının seçimi için bir şekil

Burada mümkün bütün kısıtlamalar $\varnothing$, bir nokta, bir doğru, bir üçgen, köşegenleri dâhil bir dörtgen ve uzayın kendisi olarak ortaya çıkar.

Bu uzayın $2^5 = 32$ tane alt kümesi mevcut olup bunlardan farklı olanların sayısı 5 tir. Yani her kısıtlama farklı bir uzay değildir.

Tanım 2.2.1. $\mathsf{U}=\left(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o\right)$ bir yaklaşık lineer uzay olsun. Buna göre $R=\left(\mathscr{N}', \mathscr{D}', o'\right)$ aşağıdaki gibi tanımlansın. Yeni uzayın noktaları eski uzayın doğruları, doğruları ise U nun belli bir noktasından geçen U nun en az iki doğrusunu kapsamak şartı ile tüm doğruların kümesi , $\mathscr{D}'$ nün bir doğrusu olarak tanımlansın.

Kısaca ;

$\mathscr{N}' = \mathscr{D}$

$\mathscr{D}' = \{\{d_1, d_2, d_3, ..., d_m\} | d_i \in \mathscr{D}, m \geq 2 ve\, d_1, d_2, d_3, ..., d_m$ U nun belli bir noktasından geçen doğruların tamamı $\}$ ise R ye U nun dual uzayı denir. [3]

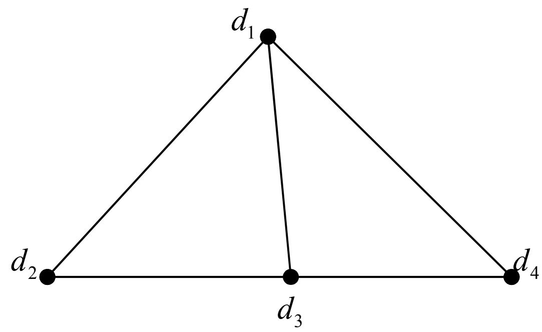
Örnek 2.2.4. Örnek 2.1.3. deki U nun dualini alalım. Bu tanım Şekil 2.1.1. ile açıklanabilir. [3]

Doğrular $d_1 = \{1,2,3\}, d_2 = \{3,4,5\}, d_3 = \{1,4\}, d_4 = \{2,4\}$ ile gösterilen yaklaşık-lineer uzayı ele alalım.

$\mathscr{N}' = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$

$\mathscr{D}' = \{\{d_1, d_2\}, \{d_1, d_3\}, \{d_1, d_4\}, \{d_2, d_3, d_4\}\}$

5 ve 6 bir doğru belirtmiyor.(Şekil 2.2.4.)



Şekil 2.2.4. Örnek 2.1.3. ün duali

Önerme 2.2.1. Bir yaklaşık-lineer uzayın dual uzayı da bir yaklaşık-lineer uzaydır.

İspat: Tanım gereğince dual uzayda herhangi bir doğrunun en az iki noktası vardır. Dual uzayın iki noktası düşünülsün ve $\cup = (\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ yaklaşık-lineer uzayının bu noktaları eşleyen doğrularının d_1 ve d_2 olduğu kabul edilsin. Dual uzayda d_1 ve d_2 yi birleştiren her doğru $\cup$ uzayında d_1 ve d_2 nin kesişim noktasına eşlenir ve Önerme 2.1.1. gereğince en çok bir kesişme noktası var olduğundan dual uzayda d_1 ve d_2 den geçen en çok bir doğru vardır. [3]

Tanım 2.2.2. Her doğru üzerinde tam olarak iki nokta bulunan bir yaklaşık-lineer uzaya bir grafı denir.

Şekil 2.2.3. de gösterdiğimiz yaklaşık-lineer uzay bir graftır.

Bir yaklaşık-lineer uzaydan dual uzayın elde ediliş yolunun aynısıyla bir grafını elde etmek mümkündür.

Tanım 2.2.3. $\cup$=($\mathscr{N}$, $\mathscr{D}$, o) bir yaklaşık-lineer uzay olsun. $\mathscr{N}' = \mathscr{D}$ ve $\mathscr{D}' = \{\{p,q\} \mid$ p ve q $\mathscr{D}$ nin kesişen farklı doğrularıdır $\}$ olmak üzere $R = ($ $\mathscr{N}', \mathscr{D}'$, o' $)$ ye $\cup$ nun çizgi grafı denir. [3]

Tanım 2.2.4. Lineer uzay olan bir grafa tam graf denir.

Örnek 2.2.5. Sonlu bir grafta $2b+v=v^2$ dir. v uzaydaki noktaların sayısını, b doğruların sayısını göstermektedir. $\binom{v}{2}$ adet farklı nokta ikilileri elde edilebilir. Her doğru üzerinde iki nokta olduğundan $\binom{v}{2} = b$ bulunur.

$$\frac{v!}{2!(v-2)!} = b \;\Rightarrow\; \frac{v(v-1)}{2} = b \;\Rightarrow\; v^2 - v = 2b \;\Rightarrow\; v^2 = 2b + v \text{ dir. [8]}$$

Örnek 2.2.6. Örnek 2.1.3. deki $\cup$ lineer uzayının grafını çizelim.

$R = ($ $\mathscr{N}', \mathscr{D}'$, o' $)$ uzayında noktalar ve doğrular kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

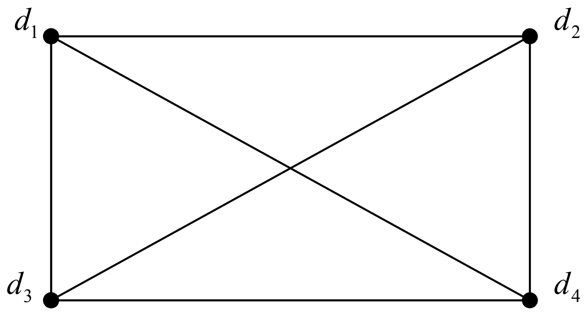
$\mathscr{N}' = \mathscr{D}$

$\mathscr{D}' = \{\{p,q\} \mid$ p ve q $\mathscr{D}$ nin kesişen farklı doğrusu $\}$ olmak üzere R bir grafıdır.

$\mathscr{N}' = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$

$\mathscr{D}' = \{\{d_1,d_3\},\{d_1,d_4\},\{d_1,d_2\},\{d_2,d_3\},\{d_2,d_4\},\{d_3,d_4\}\}$

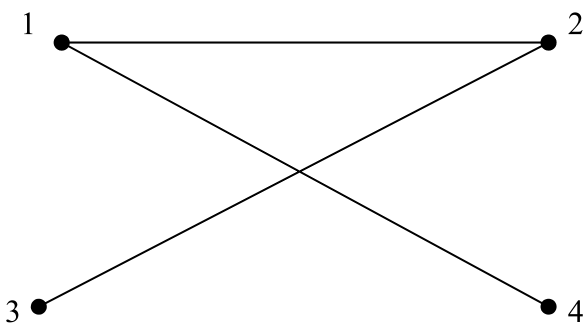
$\cup$ uzayından elde edilen grafı Şekil 2.2.5. de verilmiştir.



Şekil 2.2.5. Örnek 2.1.3. deki $\mathbb{U}$ lineer uzayın grafı

Tanım 2.2.5. $\mathbb{U}=(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ yaklaşık-lineer uzay $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{N}$ olsun. $\forall P,Q \in \mathcal{X}$ ve $P \neq Q$ olmak üzere PQ doğrusunun tamamı $\mathcal{X}$ de ise $\mathcal{X}$ e $\mathbb{U}$ nun bir alt uzayı denir. [3]

Bu tanıma göre $\varnothing$, herhangi bir nokta, herhangi bir doğru ve uzayın kendisi verilen uzayın birer alt uzayıdır.



Şekil 2.2.6. Dört noktalı bir yaklaşık-lineer uzay

Şekil 2.2.6. daki uzayın diğer alt uzayları $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$ tür.

Önerme 2.2.2. Bir uzayın herhangi sayıdaki alt uzaylarının ara kesiti de bir alt uzaydır.

İspat: Herhangi sayıdaki alt uzayların arakesiti $\mathcal{X}$ olsun. Bu durumda P ve Q, $\mathcal{X}$ in herhangi farklı noktaları iken PQ doğrusu tanımlı olmak üzere $PQ \subseteq \mathcal{X}$ olduğunu göstermek yeter. Ancak $\mathcal{X}$ i kapsayan herhangi bir alt uzay P ve Q noktalarını da kapsayacağından alt uzay tanımı gereğince PQ doğrusunu da kapsar. Böylece PQ doğrusu $\mathcal{X}$ i kapayan bütün alt uzaylar tarafından kapsanır. O halde $\mathcal{X}$ tarafından da kapsanır. [3]

2.3. Boyut

Tanım 2.3.1. $\mathcal{X}$ bir $\cup=(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ uzayının noktaları kümesinin bir alt kümesi olsun. $\mathcal{X}$ i kapsayan fakat $\mathcal{X}$ in üzerindeki hiçbir alt uzayı tam anlamıyla kapsamayan bir alt uzaya $\mathcal{X}$ in örtüsü (kapanışı) denir ve $\langle \mathcal{X} \rangle$ ile gösterilir. [3]

Şekil 2.1.3. deki uzayda $\langle\{5,6\}\rangle = \{1,5,6\}$ ve

$$\langle\{0,3,4\}\rangle = \{0,3,1,4,2,5,6\} = \cup \text{ olur.}$$

Şekil 2.1.1. deki uzayda $\langle\{1,2,5\}\rangle = \{1,2,3,4,5\}$ dir.

Önerme 2.3.1. $\cup=(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ bir yaklaşık-lineer uzay $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{N}$ ve $N \in \mathcal{N}$ olsun.

$$\langle \varnothing \rangle = \varnothing$$
$$\mathcal{X} \subseteq \langle \mathcal{X} \rangle$$
$$\langle \mathcal{X} \rangle = \langle\langle \mathcal{X} \rangle\rangle$$
$$\langle N \rangle = \{N\}$$
$$\langle \cup \rangle = \cup \text{ ve}$$
$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \text{ ise } \langle \mathcal{X} \rangle \subseteq \langle \mathcal{Y} \rangle \text{ dir.}$$

İspat: $\varnothing$ de hiç nokta bulunmadığından örtüsü kendisidir. Böylece $\langle \varnothing \rangle = \varnothing$ dir. $\langle \mathcal{X} \rangle$ kümesi $\mathcal{X}$ in bütün noktalarını kapsadığından $\mathcal{X} \subseteq \langle \mathcal{X} \rangle$ tır. $\langle \mathcal{X} \rangle$ $\cup$ nun bir alt uzayı olduğundan kendisini kapsayan en küçük alt uzay kendisidir. Yani

$\langle\langle\mathcal{X}\rangle\rangle=\langle\mathcal{X}\rangle$ dir. Aynı düşünceyle $\langle\mathsf{U}\rangle=\mathsf{U}$ ve $\langle N\rangle=\{N\}$ dir. $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{Y}$ olsun. $\forall X\in\langle\mathcal{X}\rangle$ için ya $X\in\mathcal{X}$ ve dolayısıyla $X\in\mathcal{Y}$ dir ki bu $X\in\langle\mathcal{Y}\rangle$ olmasını gerektirir. Ya da $X\in MN$ olacak şekilde $M,N\in\mathcal{X}$ noktaları vardır. $M,N\in\mathcal{Y}$ olduğundan MN, $\langle\mathcal{Y}\rangle$ alt uzayında bir doğrudur. Ve $X\in\langle\mathcal{Y}\rangle$ dir. Böylece $\forall X\in\langle\mathcal{X}\rangle$ için $X\in\langle\mathcal{Y}\rangle$ ve dolayısıyla $\langle\mathcal{X}\rangle\subseteq\langle\mathcal{Y}\rangle$ dir. [3]

Önerme 2.3.2. Bir $\mathcal{X}$ kümesinin örtüsü $\mathcal{X}$ üzerindeki bütün alt uzayların arakesitidir.

İspat: Önerme 2.2.2. gereğince bu arakesitin kendisi de alt uzaydır. Bunun $\mathcal{X}$ üzerindeki en küçük alt uzay olduğunu görmek kolaydır. Çünkü arakesit alındığında $\mathcal{X}$ üzerindeki her uzay alınır. Dolayısıyla arakesit $\mathcal{X}$ i kapsayan en küçük alt uzay olacaktır. [3]

Tanım 2.3.2. $\mathcal{X}$ kendi örtüsünü gerer (üretir) denir. Tersi olarak bir $\mathcal{V}$ alt uzayı verildiğinde eğer $\langle\mathcal{X}\rangle=\mathcal{V}$ ise $\mathcal{X}$ in $\mathcal{V}$ kümesi için bir Üretme (=Germe) kümesi olduğu söylenir. Öyle ki aynı zamanda $\mathcal{X}$, $\mathcal{V}$ yi gerer. [3]

Tanım 2.3.3. Kendi örtüsünü üretmek için tam yeter nokta kapsayan bir kümeye bağımsız küme denir. Bir bağımsız $\mathcal{X}$ kümesi $\forall X\in\mathcal{X}$ için $X\notin\langle\mathcal{X}\setminus\{X\}\rangle$ özeliğinde bir kümedir. [3]

Örnek 2.1.6. daki yaklaşık-lineer uzayda $\mathcal{X}=\{1,5,6\}$ kümesi bağımsız küme değildir. Çünkü kendi örtüsünü üretmek için gerekli olandan fazla nokta kapsamaktadır. Aslında 1 ve 5 noktaları yeterlidir.

$6\in\langle\mathcal{X}\setminus\{6\}\rangle$ dır. Böyle bir küme bağımlıdır denir. $\mathcal{X}=\{1,5\}$ kümesi bağımsızdır.

$1\notin\langle\mathcal{X}\setminus\{1\}\rangle=\{5\}$ ve $5\notin\langle\mathcal{X}\setminus\{5\}\rangle=\{1\}$ dir.

Şekil 2.1.1. deki $\{5,6\},\{4,5,6\}$ ve $\{2,4,5,6\}$ kümeleri bağımsızdır. Çünkü elemanlarından biri çıkarılınca $\bigcup$ elde edilmez. $\{1,2,4,5\}$ bağımlıdır. Çünkü $1 \in \langle\{1,2,4,5\} \setminus \{1\}\rangle = \{1,2,3,4,5\}$ dır.

Eğer küme bağımsızsa bütün elemanlar için bağımsızdır. Boş küme gereğinden fazla eleman kapsamadığından bağımsız kümedir. Bir tek nokta bağımsız kümedir. Herhangi bir nokta ikilisi yine bağımsız kümedir.

Tanım 2.3.4. Bir $\bigcup$ yaklaşık lineer uzayının noktalarının $\bigcup$ yu üreten bir bağımsız alt kümesine $\bigcup$ nun bir bazı denir. [3]

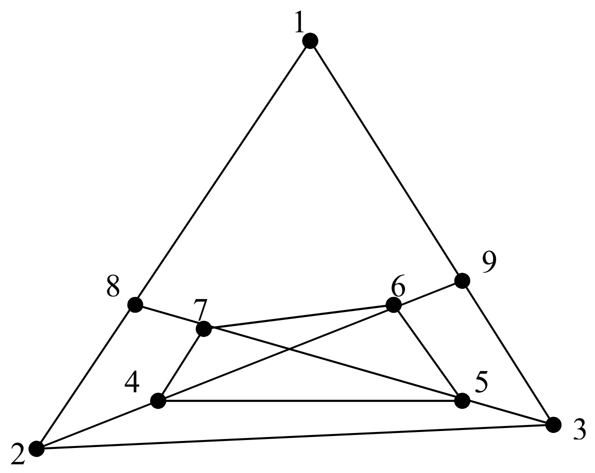
Örnek 2.1.6. daki uzayın $\{1,2,0\}$ ve $\{3,5,6\}$ iki bazıdır. Daha başka bazları da vardır.

Bir uzayı üreten bir çok baz bulunabilir.

Örnek 2.1.3. deki uzayın her bazı 6 noktasını kapsamak zorundadır. Buna göre uzayın bazları $\{1,2,4,6\},\{2,4,5,6\},\{3,4,5,6\}$ ve $\{1,3,5,6\}$ dır. Şekil 2.1.2. deki uzayın bazı kendisinin tamamıdır. Başka baz yoktur.

Verilen bir uzayın bütün bazlarının eleman sayıları aynı olması gerekmez.

Mesela Şekil 2.3.1. deki yaklaşık-lineer uzay için $\{4,5,6,7\},\{1,8,3\},\{1,2,3\}$ birer bazdır ve bunların eleman sayıları farklıdır.



Şekil 2.3.1. $\cup$ yaklaşık-lineer uzayında baz seçimleri için bir şekil

Tanım 2.3.5. $\cup$ bir yaklaşık-lineer uzay olsun. $\min = \{ \ |B| : B, \cup$ nun bir bazı $\}$ sayısının bir eksiğine $\cup$ yaklaşık-lineer uzayının bir boyutu denir. [3]

Boyutu bulmak için mümkün olan en az sayıda elemana sahip baz bulunur. Bu bazın eleman sayısından 1 çıkarılır.

Şekil 2.3.1. deki uzayın $\{2,4,6,7,9\}$ alt kümesinin boyutu 2 olduğu gibi uzayın kendisinin de boyutu da 2 dir. Şekil 2.2.3. deki uzayın boyutu 4 dür.

Bir doğru, bir nokta, $\varnothing$ den ibaret uzayların boyutları sırasıyla +1, 0, -1 dir.

2.4. Üzerinde Bulunma Matrisi

Herhangi bir $\cup$=$(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ uzayı bir matris (gerçekte birkaç matris) ile temsil edilebilir. Her nokta bu matrisin satırına ve her doğru bir kolonuna eşlenir. Matris de (i,j) inci yere eğer N_i noktası d_j doğrusu üzerinde ise 1, üzerinde değilse 0 yazılır. Böylece Şekil 2.1.1. deki yaklaşık-lineer uzay için bir matris

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$d_1 = \{1,2,3\}, d_2 = \{3,4,5\}, d_3 = \{1,4\}, d_4 = \{2,4\}$ olarak alınabilir.

Burada nokta ve doğruların farklı işaretlenmesiyle farklı bir matris elde edilir. Bu işaretlenmenin değiştirilmesi aslında matrisin satır (veya) sütunlarının değiştirilmesiyle sonuçlanır. Bu seçimi bir dereceye kadar kısıtlamak için aşağıdaki şartlar konulabilir. $v(d_1) \geq v(d_2) \geq v(d_3) \geq .... \geq v(d_b)$ şartı sağlanacak şekilde $d_1, d_2, d_3, ..., d_b$ olarak işaretlenmelidir. Benzer olarak noktalarda $b(N_1) \geq b(N_2) \geq ...... \geq b(N_v)$ olacak şekilde işaretlenmelidir.

Şekil 2.1.1. için oluşturulan matriste doğrular bu kritere uymaktadır. Ancak noktalar bu kritere göre düzenlenmemiştir. Bunun için matris de 1 ve 4 noktalarının yerini değiştirmek yeterlidir.

Gösterimi daha özenli hale getirmek için;

$v_j = v(d_j)$ ve $b_i = b(N_i)$ olarak tanımlansın. Aynı zamanda

$$r_{ij} = r_{(N_i, d_j)} = \begin{cases} 0, & N_i \notin d_j \\ 1, & N_i \in d_j \end{cases}$$

Tanımıyla bu matrisin (i, j) elemanlarının tam olarak r_{ij} sayısı olduğu görülür.

Tanım 2.4.1. r_{ij} değerine N_i noktasının d_j doğrusu üzerinde bulunma değeri, buradaki matrise de üzerinde bulunma matrisi denir. [3]

Bu matrise bakıldığında uzay hakkında bazı bilgiler elde edilebilir. Mesela satırda görülen 1 lerin sayısı bu satıra eşlenen noktadan geçen doğru sayısıdır. Bir sütunda görülen 1 lerin sayısı ona eşlenen doğru üzerindeki nokta sayısıdır. Böylece yukarıdaki matris de 4 noktası üç tane doğru üzerinde iken, 6 noktası hiçbir doğru üzerinde değildir. Eğer her sütundaki 1 ler toplanıp sütun sütuna eklenirse $\sum_{j=1}^{b} v_j$ elde edilir. Eğer satırdaki 1 ler toplanır satır satıra eklenirse $\sum_{i=1}^{v} b_i$ elde edilir.

Fakat aşikar olarak iki değişik yoldan aynı sayıda 1 sayılır.

$$\sum_{j=1}^{b} v_j = \sum_{i=1}^{v} b_i$$

Bu yüzden

$$\sum_{i=1}^{v} r_{ij} = v_j \qquad (d_j \text{ üzerindeki toplam nokta sayısı})$$

$$\sum_{j=1}^{b} r_{ij} = b_i \qquad (N_i \text{ noktasından geçen toplam doğru sayısı}) \qquad \text{ve}$$

$$\sum_{j=1}^{b} v_j = \sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{v} r_{ij} = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{b} r_{ij} = \sum_{i=1}^{v} b_i \quad \text{denklemi elde edilir.}$$

0 ve 1 lerden oluşan herhangi bir matris ne zaman bir yaklaşık-lineer uzay gösterir? YL1 ve YL2 aksiyomlarının sağlanıp sağlanmadığına bakılır. Bunun için her sütunda en az iki tane 1 olmalıdır ki YL1 sağlansın. YL2 için farklı i ve j için r_{ik} ve r_{jk} nın her ikisin birlikte 1 olacak şekilde en çok bir tane k sayısının var olduğu söylenir. [1]

U=$(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ bir yaklaşık-lineer uzay ve $R = (\mathscr{N}', \mathscr{D}', o')$ onun dual uzayı olsun. Bu iki uzayın üzerinde bulunma matrisleri arasında bir ilişki var mıdır sorusunu yanıtlayalım. $\bigcup$ nun doğruları $\mathscr{N}'$ nün noktaları olmaya başlar. Fakat $\mathscr{D}'$ nın doğruları yalnızca $\mathscr{N}$ nin öyle noktalarına eşlenir ki herhangi birinin üzerinde en az 2 nokta bulunur. Bu yüzden Şekil 2.1.1. deki örnekte 5 ve 6 noktaları elenir. Dual uzayın matrisi

$$\begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu matris yukarıda verilen matrisin 5 ve 6. satırları hariç tutulursa tranzpozudur. Yani bu matristeki r_{ji} değerleri ilk matristeki r_{ij} değerleridir. Birinci matrisin satır ve sütunları burada sırası ile sütun ve satır olmuştur. [10]

Önerme 2.4.1. Bir yaklaşık-lineer uzayda farklı iki noktayı birleştiren en az bir doğru varsa bu takdirde uzayın nokta ve doğru sayısı ile dual uzayın sırası ile doğru ve nokta sayıları eşittir. Üstelik bir M matrisi için $\left(M^t\right)^t = M$ olduğundan $\bigcup$ nun dualinin duali yine $\bigcup$ nun kendisidir. [3]

Dual uzayda elde edilen doğru ve noktaların daha önce belirtilen tarzda düzenlenmesinin şart olmadığı belirtilmelidir.

Yukarıda bahsedildiği gibi bir yaklaşık-lineer uzayın herhangi bir alt uzayının kendisi bir alt uzaydır. Fazladan olarak tüm uzaydaki noktalar ve doğrular yukarıdaki gibi düzenlenirse bu takdirde alt uzaydaki üzerinde bulunma düzenlemesi de istenilen tipten olur. Bu yüzden alt uzayın özel tertiplenmiş üzerinde bulunma matrisi sadece satırları alt uzayın noktalarına eşlenerek sütunları alt uzayda en az iki noktaya sahip olacak şekilde seçilerek elde edilmiştir.

Şekil 2.1.1. in $\{3,4,5\}$ alt uzayı $\begin{array}{cc} & d_2 \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$ matrisi elde edilir.

$$\{1,2,3,4,5\} \text{ alt uzayında da } \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ elde edilir.}$$

Eğer hiç doğru kapsamayan bir nokta seçilirse (mesela $\{1\}$ ve $\{2,6\}$) bir matris elde edilmez.

Tanım 2.4.2. $\mathsf{U}=(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ bir yaklaşık-lineer uzay olsun. U için $b \geq 1$ ve her doğru eşit sayıda nokta kapsıyorsa U ya doğrusal regülerdir (düzenlidir) denir. [3]

Tanım 2.4.3. $\mathsf{U}=(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ bir yaklaşık-lineer uzay olsun. U için $v \geq 1$ ve her nokta eşit sayıda doğru taşıyorsa U ya noktasal regülerdir (düzenlidir) denir. [3]

Gösterim: Bir yaklaşık-lineer uzayda doğrusal regülerlik sayısı s (her doğru üzerinde s tane nokta olması), noktasal regülerlik sayısı t (her noktadan geçen t tane doğru olması) şeklinde gösterelim.

Önerme 2.4.2. $\mathsf{U}=(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ yaklaşık-lineer uzayında doğrusal regülerlik sayısı s ve noktasal regülerlik sayısı t ise bu takdirde $vt = bs$ dir.

İspat: Üzerinde bulunma matrisi göz önüne alınarak ispat hemen görülür.

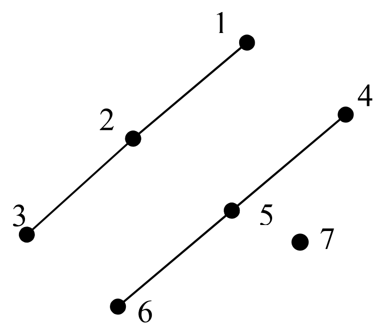
Bütün satırlardaki toplam 1 sayısı = Bütün sütunlardaki toplam 1 sayısı

Böylece v noktalı ve b doğrulu bir yaklaşık-lineer uzay hem nokta hem de doğrusal regüler iken, noktasal regülerliği doğrusal regülerliğini gerektirir ve tersi de doğrudur.

Tanım 2.4.4. k tane noktası olan bir doğruya bir $k-doğru$ denir. Benzer şekilde k tane doğrunun geçtiği noktaya da $k-nokta$ denir.

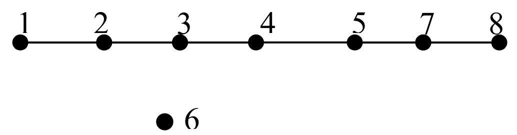
Önerme 2.4.3. Bir yaklaşık-lineer uzayda doğrusal regülerliği noktasal regülerliğini gerektirmediği gibi, noktasal regülerliği doğrusal regülerliğini gerektirmez. [3]

Şekil 2.4.1. deki yaklaşık lineer uzay doğrusal regülerdir. Fakat 7 noktasından eşit sayıda doğru geçmediğinden noktasal regüler değildir.

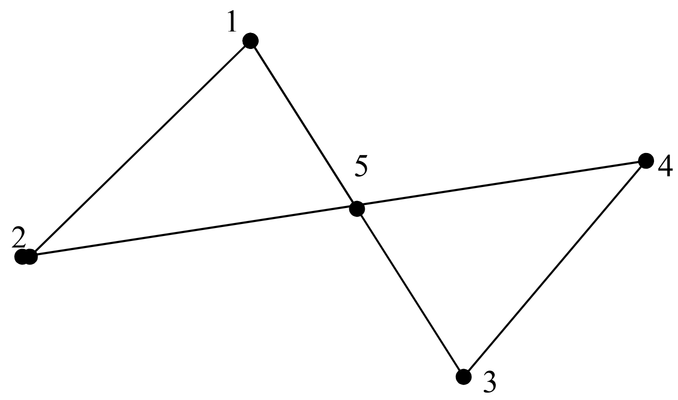


Şekil 2.4.1. Doğrusal regüler olduğu halde noktasal regüler olmayan yaklaşık-lineer uzay için bir örnek şekil

Şekil 2.4.2. deki yaklaşık-lineer uzayda doğrusal regülerdir. Ancak noktasal regüler değildir. Çünkü 1,2,3,4,5,7,8 den bir doğru geçtiği halde 6 dan hiçbir doğru geçmez.

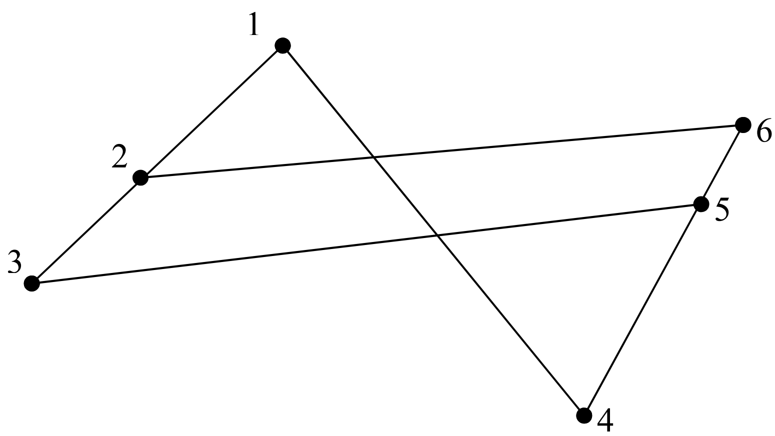


Şekil 2.4.2. Doğrusal regüler olduğu halde noktasal regüler olmayan yaklaşık-lineer uzay için bir örnek şekil



Şekil 2.4.3. Noktasal regüler olduğu halde doğrusal regüler olmayan yaklaşık-lineer uzay için bir örnek şekil

Şekil 2.4.3. deki yaklaşık-lineer uzayda her noktadan iki doğru geçtiğinden noktasal regülerdir. Fakat bazı doğruların üzerinde iki, bazlarının üzerinde üç nokta bulunduğundan doğrusal regüler değildir.



Şekil 2.4.4. Noktasal regüler olduğu halde doğrusal regüler olmayan yaklaşık-lineer uzay için bir örnek şekil

Şekil 2.4.4. deki yaklaşık-lineer uzayda noktasal regüler olduğu halde doğrusal regüler değildir.

2.5. Koneksiyon (Bağlantı) Sayısı

Tanım 1.5.1. Sonlu bir yaklaşık lineer uzayda d_j doğrusu üzerinde olmayan bir nokta N_i olsun. d_j doğrusunun noktalarını N_i ye birleştiren doğruların sayısına koneksiyon (bağlantı) sayısı denir ve c_{ij} ile gösterilir. Burada $c_{(N_i, d_j)}$ gösterimi de aynı anlamdadır. [3]

YL2 gereğince bu sayı N_i den geçip d_j yi kesen doğru sayısıyla aynıdır. Eğer $N_i o d_j \left(N_i \in d_j \right)$ ise koneksiyon sayısı ya $\left| d_j \right| = d_j$ nin nokta sayısı olmak üzere $c_{ij} = \left| d_j \right| - 1$ ya da $c_{ij} = 1$ olarak tanımlanabilir. Biz bu çalışmada ikinciyi kullanıyoruz. Yani $r_{ij} = 1$ ise $c_{ij} = 1$ olarak alıyoruz.

Önerme 2.5.1. Herhangi bir N_i noktası ve d_j doğrusu için $c_{ij} \le v_j$ dir. ($v_j ; d_j$ doğrusu üzerindeki nokta sayısı)

İspat: Eğer $N_i \notin d_j$ ise iddianın doğruluğu YL2 den görülür. Eğer $N_i \in d_j$ iddianın doğruluğu YL1 den görülür. $c_{ij} = 1$ olduğundan $1 \le 2$ olur. [3]

Önerme 2.5.2. Eğer $r_{ij} = 0$ ise N_i den geçip d_j yi kesmeyen doğru sayısı $b_i - c_{ij}$ dir.

İspat: b_i, N_i den geçen toplam doğru sayısı olup c_{ij}, N_i den geçip d_j yi kesen doğru sayısı olduğundan N_i den geçip d_j yi kesmeyen toplam doğru sayısı $b_i - c_{ij}$ olur. [3]

Tanım 2.5.2. Bir yaklaşık-lineer uzayın her farklı nokta çiftinden geçen bir doğru varsa bu yaklaşık-lineer uzaya bir lineer uzay denir. [3]

Şekil 2.1.3., Şekil 2.2.3., Şekil 2.2.5. deki uzaylar bir lineer uzaydır.

Bütün nokta ikilileri bir doğru ile birleştiriliyor. Bir lineer uzayda $r_{ij}=0$ ın $c_{ij}=v_j$ gerektirdiği açıktır.

Önerme 2.5.3. $\mathbb{U}=(\mathscr{N},\mathscr{D},o)$, $b\geq 1$ özeliğindeki bir yaklaşık-lineer uzay ve $r_{ij}=0$ olacak şekilde her N_i ve d_j için $c_{ij}=v_j$ ise bu takdirde $\mathbb{U}$ bir lineer uzaydır.

İspat: $b\geq 1$ olduğundan bir d_k doğrusu vardır. N_i ve N_j, $\mathbb{U}$ nun herhangi iki noktası olsun. Eğer $r_{ik}=r_{jk}=1$ ise N_i ve N_j yi birleştiren doğru d_k dır. Eğer $r_{ik}=0$ ve $r_{jk}=1$ ise $c_{ij}=v_j$ bütün durumlarda geçerli olduğundan $c_{ik}=v_k$ dır. Bu durumda d_k üzerindeki her noktayı N_i ile birleştiren bir doğru vardır. Özel olarak N_i yi N_j ile birleştiren doğruda vardır.

$r_{ik}=r_{jk}=0$ ise YL1 gereğince Qod_k olacak şekilde bir Q noktası alınabilir ve $c_{jk}=v_k$ olacağından N_jQ doğrusu mevcuttur.

Bu durumda eğer $N_i o N_j Q$ ise ispat tamamlanır. Eğer N_i ø N_jQ ise biraz önceki hal gereğince N_i noktası N_jQ nun her noktası ile birleştirilir. Dolayısıyla N_i ile N_j yi de birleştiren bir doğru vardır. [3]

Bu teoremde uzayın en az bir doğrusu olma hipotezi esastır. Aksi halde teorem geçerli değildir. Yani her yaklaşık-lineer uzay, lineer uzay olmak zorunda değildir. Mesela en az iki noktası bulunup hiçbir doğrusu bulunmayan bir yaklaşık-lineer uzay, lineer uzay değildir.

Önerme 2.5.4. $\mathbb{U}=(\mathscr{N},\mathscr{D},o)$, v noktalı bir sonlu yaklaşık-lineer uzay olsun. Bu takdirde $\mathbb{U}$ nun bir lineer uzay olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{j=1}^{b} v_j\left(v_j-1\right)\geq v\left(v-1\right)$$

olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\bigcup$ nun bir lineer uzay olduğunu kabul edelim ve $\bigcup$ daki toplam farklı nokta ikilisi sayısını iki değişik yoldan hesaplayalım. $\{N_i, N_j\}$ ile $\{N_j, N_i\}$ yi aynı ikili olarak kabul etmek üzere v noktalı $\bigcup$ uzayındaki toplam nokta ikilisi sayısı $\binom{v}{2} = \frac{v!}{(v-2)!2!} = \frac{v(v-1)}{2}$ olur. Bu değer aynı zamanda v elemanlı bir kümenin 2 elemanlı tüm alt kümelerinin sayısıdır. Bir lineer uzayda herhangi nokta ikilisinin bir doğru belirttiğini biliyoruz. Dolayısıyla her doğru üzerindeki noktalardan nokta ikilileri oluşturarak bütün doğrular üzerinden toplam aldığımızda yine bu uzaydaki nokta ikilileri sayısını buluruz. Böylece uzayın bu şekilde hesaplanacak toplam nokta ikilisi sayısı

$$\sum_{j=1}^{b} \frac{v_j(v_j-1)}{2} = \frac{v(v-1)}{2}$$

olur.

Tersine, $\sum_{j=1}^{b} v_j(v_j-1) \geq v(v-1)$ iken yaklaşık-lineer uzayın lineer uzay olabileceğini gösterelim. Bunun için v üzerinden tümevarım metodunu kullanacağız. $\varnothing$ ve bir tek noktadan oluşan uzay birer aşikar lineer uzaydır. O halde $v \geq 2$ alarak ispatlamalıyız. Eğer $v = 2$ ise iki durum söz konusudur. Ya $b = 0$ ya da $b = 1$ dir.

$b = 0$ halinde

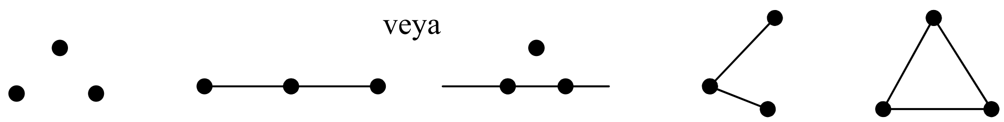
...$0 \geq 2(2-1)$ mümkün olmadığından bu hal hipoteze uygun değildir.

$b = 1$ iken

$\sum_{j=1}^{b} v_j(v_j-1) = 2.(2-1) \geq 2.(2-1)$ eşitlik sağlandığından bu uzay, lineer uzaydır.

$v=3$ iken dört durum söz konusudur: $b=0,1,2,3$

$b=0$ iken $\quad b=1$ iken $\quad b=2$ iken $\quad b=3$ iken



$3.2 \geq 3.2 \quad 2.1 \geq 3.2 \quad (2.1+2.1) \geq 3.2 \quad (2.1+2.1+2.1) \geq 3.2$

$b=0$ iken ilgili eşitsizlik sağlanmıyordu. Yalnızca $b=1$, $v_1=v=3$ ve $b=3$, $v_1=v_2=v_3=2$ halinde yukarıdaki eşitsizlik sağlanır, diğer durumlarda sağlanmaz.

Bu her iki halde de uzayın lineer uzay olduğu görülmektedir.

Bundan sonra eğer $\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}$ dan az sayıda nokta kapsayan bir yaklaşık-lineer uzay olmak üzere $\mathcal{U}$ için ilgili eşitsizlik sağlanıyorsa $\mathcal{U}'$ nün bir lineer uzay olduğunu kabul edelim ve bu takdirde $\mathcal{U}$ nun bir lineer uzay olduğunu gösterelim.

$v \geq 4$ olmak üzere $\mathcal{U}$ da $\sum_{j=1}^{b} v_j\left(v_j-1\right) \geq v(v-1)$ olduğunu farz edelim.

N, $\mathcal{U}$ nun bir noktası olmak üzere $\mathcal{U}$ nun $\mathcal{N} \setminus \{\mathrm{N}\}$ ye kısıtlanmışı olan $R=(\mathcal{N}', \mathcal{D}', o)$ yaklaşık lineer uzayını düşünelim. R nin noktaları $\mathcal{N} \setminus \{\mathrm{N}\}$ kümesinin noktalarıdır ve doğruları, N den geçmeyen doğrular ile N den geçip en az üç nokta kapsayan doğruların $\mathcal{N}'$ ye kısıtlanmışlarıdır.

$|\mathcal{N}'| = v-1 < v$ olduğundan R nin lineer uzay olması için yukarıdaki eşitsizliği gerçeklemesi gerekir. Oradaki eşitsizlik için sağ taraf $(v-1)(v-2)$ olur.

$\mathcal{D}'$ nün $\mathcal{D}$ de d_j ile gösterilen doğrusunu d_j' ile ve onun noktalarının sayılarını da v_j' ile gösterelim. R de çalışarak

$$\sum_{d_j'} v_j'\left(v_j'-1\right)=\sum_{d_j \text{ø} N} v_j\left(v_j-1\right)+\sum_{\substack{d_j O N\\ \left|d_j\right|\geq 3}} v_j'\left(v_j'-1\right) \qquad ; v_j' = v_j - 1$$

$$=\sum_{d_j \text{ø} N} v\left(v_j-1\right)+\sum_{\substack{d_j O N\\ \left|d_j\right|\geq 3}}\left(v_j-1\right)\left(v_j-2\right)$$

$$=\sum_{d_j \text{ø} N} v_j\left(v_j-1\right)+\sum_{\substack{d_j O N\\ \left|d_j\right|\geq 3}} v_j\left(v_j-1\right)-2\sum_{\substack{d_j O N\\ \left|d_j\right|\geq 3}}\left(v_j-1\right)$$

∪ da

$$\sum_{d_j} v\left(v_j-1\right)=\sum_{d_j O N} v_j\left(v_j-1\right)+\sum_{\substack{d_j O N\\ \left|d_j\right|\geq 3}} v_j\left(v_j-1\right)+\sum_{\substack{d_j O N\\ \left|d_j\right|=2}} v_j\left(v_j-1\right)$$

dır. Buradan

$$\sum_{d_j \text{ø} N} v_j\left(v_j-1\right)=\sum_{d_j} v\left(v_j-1\right)-\sum_{\substack{d_j O N\\ \left|d_j\right|\geq 3}} v_j\left(v_j-1\right)-\sum_{\substack{d_j O N\\ \left|d_j\right|=2}} v_j\left(v_j-1\right)$$

dır. Yukarıda verilenleri yerine yazarsak

$$\sum_{d_j'} v_j'\left(v_j'-1\right)=\sum_{d_j} v_j\left(v_j-1\right)-2\sum_{\substack{d_j O N\\ \left|d_j\right|\geq 3}}\left(v_j-1\right)-\sum_{\substack{d_j O N\\ \left|d_j\right|=2}} v_j\left(v_j-1\right)$$

$$=\sum_{d_j} v_j\left(v_j-1\right)-2\sum_{d_j O N}\left(v_j-1\right)$$

bulunur.

$$\sum_{d_j} v_j\left(v_j-1\right)\geq v\left(v-1\right)$$

olduğu hipotezden bilinmektedir. Üstelik N den geçen doğrular üzerindeki noktaları sayarak açıkça,

$$\sum_{d_j o N} \left(v_j - 1\right) \leq \left(v - 1\right)$$

olur. Bu yüzden de $-2\left(\sum_{d_j o N} \left(v_j - 1\right)\right) \geq -2\left(v-1\right)$ dir. Dolayısıyla göstermek istediğimiz gibi

$$\sum_{d_j} v_j' \left(v_j' - 1\right) \geq v\left(v-1\right) - 2\left(v-1\right) = \left(v-1\right)\left(v-2\right)$$

elde edilir. Tümevarım hipotezi gereği R bir lineer uzaydır. Geriye N nin R nin her noktası ile birleştirilebildiğini göstermek kalır. Bunun için R de sabit bir Q noktası ve $\bigcup$ da keyfi bir üçüncü K noktası seçilir. $N \setminus \left\{K\right\}$, N nin $v-1$ noktalı bir kısıtlanmışı olduğundan yukarıdaki düşünce ile bir lineer uzaydır. Bu yüzden de N ve Q yu birleştiren bir doğru vardır. [3]

Sonuç: $\bigcup$ nun bir lineer uzay olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{j=1}^{b} v_j \left(v_j - 1\right) = v\left(v-1\right)$$

olmasıdır.

İspat: Önerme 2.5.4. ün ispatında $\bigcup$ bir lineer uzayken $\sum_{j=1}^{b} v_j \left(v_j - 1\right) = v\left(v-1\right)$ olduğu görülmüştü. Bu eşitlik kesinlikle eşitsizliği $\left(\geq\right)$ gerektirdiğinden yine aynı önerme gereği $\bigcup$ bir lineer uzaydır. [3]

2.6. Lineer Fonksiyonlar

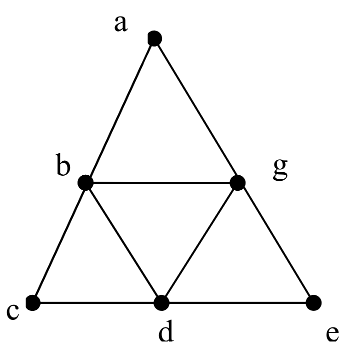
Tanım 2.6.1. $\cup = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ ve $R = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', o')$ iki yaklaşık lineer uzay olsun. f, $\mathcal{N}$ kümesinden $\mathcal{N}'$ kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $d \in \mathcal{D}$ için $f(d) \in \mathcal{D}'$ ise f ye $\cup$ dan R ye bir lineer fonksiyon denir. [3]

Eğer $\mathcal{N}$ den $\mathcal{N}'$ ye bir lineer fonksiyon olarak 1–1 (birebir) ve/veya örten ise bu lineer fonksiyon 1–1 ve/veya örtendir.

Eğer $d \in \mathcal{D}$ doğrusu sonlu ve eğer $f(d) \in \mathcal{D}'$ ise bu takdirde $v(d) \geq v(f(d))$ olduğuna dikkat edilir. Bu yüzden doğrular ‘‘daha kısa’’ doğrulara dönüştürülebilir fakat ‘‘daha uzun’’ doğrulara dönüştürülemez.

$\cup$ Şekil 2.1.3. deki yaklaşık-lineer uzay, R de Şekil 2.6.1. deki yaklaşık-lineer uzay olsun ve f aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$
\begin{array}{lll}
f: \; 0 \to \mathrm{d} & \text{böylece} \;\; f: & \{1,2,4\} \to \{\mathrm{b,d}\} \\
\quad\;\; 1 \to \mathrm{b} & & \{0,4,5\} \to \{\mathrm{d,g}\} \\
\quad\;\; 2 \to \mathrm{b} & & \{1,5,6\} \to \{\mathrm{b,g}\} \\
\quad\;\; 3 \to \mathrm{b} & & \{0,1,3\} \to \{\mathrm{b,d}\} \\
\quad\;\; 4 \to \mathrm{d} & & \{2,3,5\} \to \{\mathrm{b,g}\} \\
\quad\;\; 5 \to \mathrm{g} & & \{3,4,6\} \to \{\mathrm{b,d}\} \\
\quad\;\; 6 \to \mathrm{b} & & \{0,2,6\} \to \{\mathrm{b,d}\}
\end{array}
$$

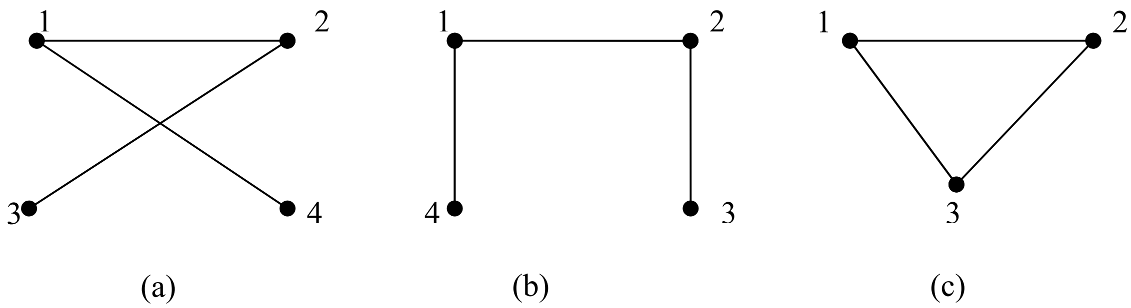


Şekil 2.6.1. Yaklaşık-lineer uzay örneği

Böylece f bir lineer fonksiyondur. Ne bire-bir ne de örten olmadığı aşikârdır.

Tanım 2.6.2. $\mathcal{U}$ ve R iki yaklaşık-lineer uzay olsunlar. Eğer $\mathcal{U}$ dan R üzerine 1:1 ve lineer bir f fonksiyonu var ve f^{-1} de lineer bir fonksiyon ise $\mathcal{U}$ ve R uzaylarına izomorf uzaylar denir. [3]

İki uzayın aynı olması izomorf olma olarak anlaşılmaktadır.



Şekil 2.6.2. İzomorf uzaylar için örnek bir şekil

Şekil 2.6.2. (a) ve (b) deki uzaylar izomorf veya aynıdır. Çünkü aralarında bir izomorfizm tanımlayabiliriz. Mesela $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=4$ olsun. Bunlar arasındaki özdeşlik dönüşümü bir izomorfizmdir. f nin lineer olduğunu bire-bir ve örten olduğunu kontrol edelim. Sonlu iki uzay izomorf ise ikisi aynı sayıda elemana sahiptir. Bu yüzden (c) nin (a) ya izomorf olmadığı görülebilir.

Önerme 2.6.1. $\mathcal{U}=(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ den $R=(\mathcal{N}', \mathcal{D}', o')$ ye f lineer fonksiyonu bire-bir ise bu durumda bütün d ler için $v(d)=v(f(d))$ dir.

İspat: Eğer f fonksiyonu bire-bir ise $\forall X, Y \in d$, $X \neq Y$ için $f(X) \neq f(Y)$ olacaktır. Dolayısıyla $v(f(d)) \geq v(d)$ d nin $\forall X$ elemanı $f(d)$ nin farklı bir elemanına dönüştüğü için $\forall f$ lineer fonksiyonu için $v(d) \geq v(f(d))$ olduğundan $v(d)=v(f(d))$ olur. [3]

Önerme 2.6.2. Eğer f $\cup=(\mathscr{N},\mathscr{D},o)$ dan $R=(\mathscr{N}',\mathscr{D}',o')$ ye bir izomorfizm ise bütün d ve N ler için $v(d)=v(f(d))$ ve $b(N)=b(f(N))$ dir.

İspat: $v(d)=v(f(d))$ olduğu Önerme 2.6.1. den bilinmektedir. Çünkü izomorfizm olduğundan bire-bir dir. $N\in d$ olsun. Lineer fonksiyon tanımından $f(N)\in f(d)$ dir. Dolayısıyla $b(f(N))\geq b(N)$ olur. f^{-1} R den $\cup$ ya f ile benzer özeliği taşıyan bir fonksiyon olduğundan $b(f^{-1}(f(N)))\geq b(f(N))$ dir ve dolayısıyla $b(N)\geq b(f(N))$ olur. Sonuç olarak da $b(N)=b(f(N))$ dir. Yani bir izomorfizm varsa bir doğru üzerindeki nokta sayısı ve bir nokta üzerinden geçen doğru sayısı sabit kalır. [3]

Tanım 2.6.3. $\cup=(\mathscr{N},\mathscr{D},o)$ uzayının kendi üzerine bir izomorfizmine otomorfizm denir. Geometri de bunun için kolinasyon terimi kullanılır. [10]

Şekil 2.1.3. deki yaklaşık-lineer uzayın 168 adet kolinasyonu vardır. Bunlardan bir kısmı $f_1:(1,2,4,0,5,6,3)\rightarrow(1,2,4,0,5,6,3)$ (i inci nokta i inci noktaya dönüşür.)

$f_2:(1,2,4,0,5,6,3)\rightarrow(1,6,5,0,4,2,3);f_3:(1,2,4,0,5,6,3)\rightarrow(4,0,5,6,1,2,3)$ tür.

Şekil 2.6.1. deki yaklaşık-lineer uzayın bütün kolinasyonlarını bulmak için aşağıdaki yol takip edilsin. Önerme 2.6.2. nin bakış açısından herhangi bir kolinasyon $\{a,c,e\}$ kümesini kendisine ve $\{b,d,g\}$ kümesini de kendisine dönüştürmek zorundadır. Eğer $f:a\rightarrow a$ ise iki ihtimal vardır. $c\rightarrow e$ ve $e\rightarrow c$ veya $c\rightarrow c$ ve $e\rightarrow e$ f lineer olduğu sonucundan $b,d,g,...$ sabit kalır. Şekil 2.6.3. daki f_1 elde edilir.

$f_1 : a \to a$	$f_2 : a \to a$	$f_3 : a \to c$	$f_4 : a \to c$	$f_5 : a \to e$	$f_6 : a \to e$
b $\to$ b	b $\to$ g	b $\to$ b	b $\to$ d	b $\to$ g	b $\to$ b
c $\to$ c	c $\to$ e	c $\to$ a	c $\to$ e	c $\to$ a	c $\to$ c
d $\to$ d	d $\to$ d	d $\to$ g	d $\to$ g	d $\to$ b	d $\to$ d
e $\to$ e	e $\to$ c	e $\to$ e	e $\to$ a	e $\to$ c	e $\to$ a
g $\to$ g	g $\to$ b	g $\to$ d	g $\to$ b	g $\to$ d	g $\to$ g

Şekil 2.6.3. Şekil 2.6.1. deki yaklaşık-lineer uzayın kolinasyonları

Eğer $c \to e$ ve $e \to c$ denirse f nin Şekil 2.6.3. deki $f = f_2$ nin lineer kuvveti olduğu görülür. f nin a yı hareket ettirdiği farz edilsin. İki seçim vardır. $f : a \to c$ olsun. Eğer $c \to a$ ise bu takdirde $e \to e$ ve f nin lineerliği f nin Şekil 2.6.3. deki $f = f_3$ olmasının gerektirir. Eğer $c \to e$ ise bu takdirde $e \to a$ ve f, $f = f_4$ ün lineer kuvveti olur. Son olarak $f : a \to e$ olsun. $c \to a$ durumunda $e \to c$ ve f de f_5 olmak zorundadır. Eğer $f : c \to c$ ise bu durumda $e \to a$ ve f, f_6 olur. Bunlar U nun kolinasyonlarının mümkün bütün ihtimalleridir.

Bütün $X \in \mathcal{N}$ ler için $f(X) = X$ özdeşlik dönüşümünün U=$(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ nın her zaman bir kolinasyon olduğuna dikkat edilmelidir.

Önerme 2.6.3. f ve g U=$(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ nin kolinasyonları ise bu takdirde f^{-1} ve fog de onun kolinasyonlarıdır.

İspat: f^{-1} ve fog nin $\mathcal{N}$ den $\mathcal{N}$ ye bire-bir ve örten olduğu ve f^{-1} in lineer olduğu bilinmektedir. fog nin lineer olduğunu görmek yeterlidir. Eğer $d \in \mathcal{D}$ ise $g(d) \in \mathcal{D}$ olduğu (g lineer) ve dolayısıyla $f(g(d)) \in \mathcal{D}$ olduğu (f lineer) görülür. Dolayısıyla fog lineerdir. [3]

Önerme 2.6.4. Bir yaklaşık-lineer uzayın bütün kolinasyonları kümesi fonksiyon bileşimi altında bir gruptur.

İspat: $\cup=(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ uzayının bütün kolinasyonlarının kümesi G ile gösterilsin. $f, g \in G$ iken Önerme 2.6.3. gereğince $f^{-1}, fog \in G$ dir. Yani G kümesi fonksiyon bileşimi işlemine göre kapalıdır. [3]

Fonksiyonlar genel olarak fonksiyon bileşim işlemine göre asosyatif özeliğe sahiptir.

I özdeşlik dönüşümü bu fonksiyonun etkisiz elemanıdır. $\forall f \in G$ için $f^{-1} \in G$ dir ve $fof^{-1} = I$ dır. Yani grup fonksiyonları sağlar. [10]

BÖLÜM 3. LİNEER UZAYLAR

3.1. Örnekler ve Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $\cup=(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ uzayına lineer uzay denir.

L1: Her doğrunun en az iki noktası vardır.

L2: İki nokta tam olarak bir doğru üzerindedir. [3]

Yaklaşık-lineer uzaydaki P ve Q gibi farklı iki noktadan geçen doğruyu PQ ile gösterilsin. $r_{ij} = 0$ olması, aşikar olarak, $c_{ij} = v_j$ ve $b_i \geq v_j$ olmasını gerektirir.

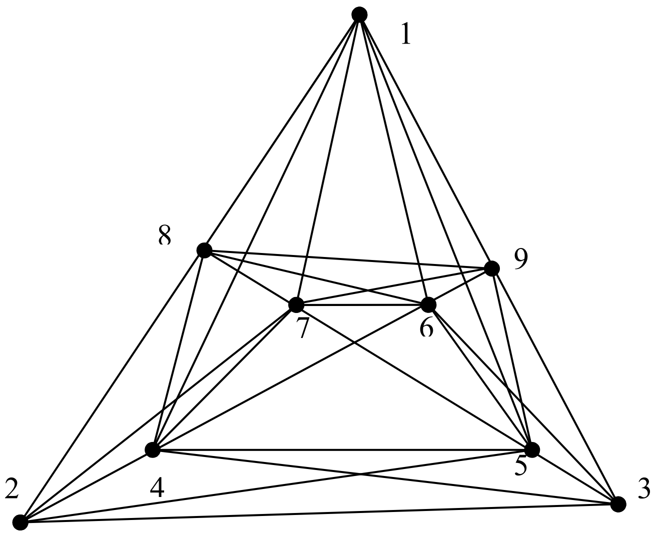
$r_{ij} = 0$ olması $N_i \cap d_j = \varnothing$ olması demektir. (v_j, d_j doğrusu üzerindeki nokta sayısını belirtiyor.)

b_i, N_i noktasından geçen doğru sayısı olup N_i den geçip d_j yi kesmeyen doğruların mevcut olabilmesi söz konusu olduğu için de $b_i \geq v_j$ ifadesi geçerlidir.

Bir lineer uzay aynı zamanda bir yaklaşık-lineer uzay olduğundan yaklaşık-lineer uzay ile ilgili bütün önermeler ve sonuçlar lineer uzay için de geçerlidir.

Herhangi bir yaklaşık-lineer uzayı lineer uzaya dönüştürmek için yaklaşık-lineer uzayda bir doğru üzerinde bulunmayan bütün nokta çiftlerini yeni bir doğru kabul edip uzaya eklemek yeterlidir.

Özel olarak Şekil 2.3.1. deki yaklaşık-lineer uzay Şekil 3.1.1. deki lineer uzaya dönüşür.



Şekil 3.1.1. Şekil 2.3.1. deki yaklaşık lineer uzayın lineer uzaya dönüştürülüşü

Örnek 3.1.1. $\mathbb{R}^2$ Öklid düzlemi olsun. Noktalar kümesini

$\mathscr{N} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ olarak, doğrular kümesini de

$\mathscr{D} = \{[m,b] | m,b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a] | a \in \mathbb{R}\}$ olarak tanımlayalım.

Üzerinde bulunma bağıntısı;

$o:$ $\qquad (x, y) o [m,b] \Leftrightarrow y = mx + b$

$(x, y) o [a] \Leftrightarrow x = a$ olarak tanımlansın.

Bu bir lineer uzaydır. Lineer uzayın bütün aksiyomlarını sağlar. [10]

$\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminde $\mathscr{N}' = \{(x,y) | x^2 + y^2 \langle 1\}$ olsun. Burada $\mathscr{N}'$, birim çemberin içinde kalan bütün noktaların oluşturduğu kümedir. $\mathscr{D}'$ nün elemanları ise $\mathbb{R}^2$ deki doğruların $\mathscr{N}'$ ye kısıtlanmışlarıdır. Bu durumda $x^2 + y^2 = 1$ çemberine teğet olan doğrular $\mathscr{N}'$ nün hiçbir noktasını kapsamadığından $\mathscr{N}'$ nün her doğrusu üzerinde en az iki nokta (gerçekte sonsuz sayıda nokta) vardır. Dolayısıyla L1 sağlanır. L2 aksiyomunun sağlandığı aşikârdır. Böylece $R = (\mathscr{N}', \mathscr{D}', o')$ geometrik yapısı bir lineer uzaydır.

Tanım 3.1.2. v >0 bir doğal sayı ve $S = \{1, 2, ..., v\}$ olsun. B, S nin bazı üç elemanlı alt kümelerinden oluşan bir küme olsun. Eğer S nin herhangi iki farklı sayısı B nin elemanlarında sadece bir kez görülüyorsa, yani her $1 \le x \ne y \le v$ için;

$$\{x, y\} \subseteq A$$

özeliğini sağlayan bir ve tek $A \in B$ varsa, o zaman (S, B) sıralı ikilisine v lik Steiner üçlü sistemi denir. [11]

Örnek 3.1.2. Bir Steiner sistemi $S(t,k,v)$, v elementlerinin S kümesidir. v elementleri noktalardan oluşur. Bu bloklar belirli alt kümleler (bloklar) içindedir.

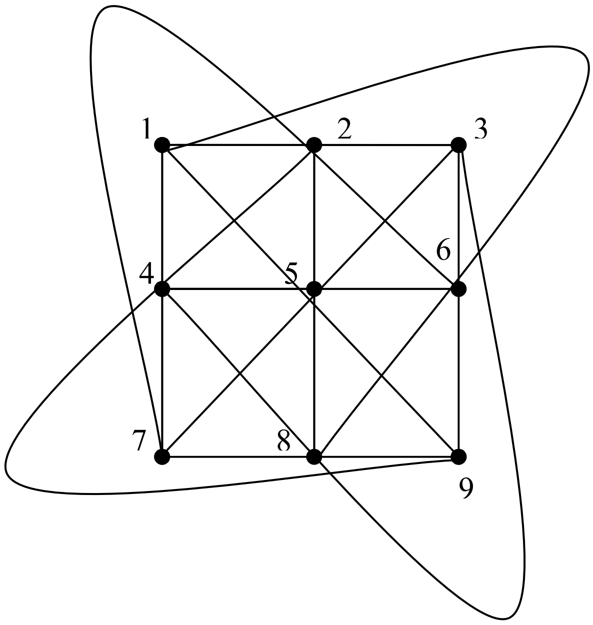
Bu bloklar şu şekilde belirlenir;

I. t tane farklı nokta kümesi $(t \ge 2)$ sadece ve sadece bir blok tarafından kapsanır. Bir blok içindedir.

II. Her bir blok k tane noktadan oluşur.

Biz sadece blokları doğru olarak düşündüğümüz durumlarla ve $t = 2$ yani Steiner Sisteminin lineer uzay olduğu durumlarla ilgileneceğiz. Eğer hiçbir blok yoksa (I) ve (II) sağlanır. Eğer bir tek blok varsa $k = v$ sağlanır. Buda aşikâr Steiner sistem olarak adlandırılır.

Örneğin $S(2,2,3)$ bir üçgen (Üç tane 2-nokta, üç tane 2-doğru) belirtir. $S(2,2,3)$ bir tane olduğu aşikardır. Genellerse sadece $S(2,2,v)$ v nokta üzerinde tam graftır. Fano düzlemi $S(2,3,7)$ dir (Bkz. Şekil 2.1.3.). Şekil 3.1.2. deki $S(2,3,9)$ lineer uzayını inceleyelim.



Şekil 3.1.2. Steiner $S(2,3,9)$ sistemine bir örnek çizim

Düz doğrular dışında dört küme $\{1,6,8\},\{3,4,8\},\{2,6,7\},\{2,4,9\}$ doğrulardır. Bu lineer uzayda noktasal regülerlik sayısı 4, doğrusal regülerlik sayısı 3 dür.

Lineer uzayın duali lineer uzay olmak zorunda değildir. Mesela $\mathcal{N} = \{1,2\}$ ve $\mathcal{D} = \{\{1,2\}\}$ olmak üzere $U = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ bir lineer uzaydır. Ancak bu uzayın duali $\mathcal{N}' = \{d\}$ ve $\mathcal{D}' = \{\ \}$ olmak üzere $R = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', o')$ olup bir lineer uzay değildir. (Bkz. Şekil 3.1.3.(a))

(a) (b)

Şekil 3.1.3. Lineer uzayın dualiyle ilgili çizimler

Yine Şekil 2.1.3. (b) yi ele alırsak $\mathscr{N} = \{1,2,3,4\}$

$\mathscr{D} = \{d_1 = \{1,2\}, d_2 = \{1,3\}, d_3 = \{1,4\}, d_4 = \{2,3\}, d_5 = \{2,4\}, d_6 = \{3,4\}\}$

olmak üzere $\mathsf{U}=(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ bir lineer uzaydır. Ancak $R = (\mathscr{N}', \mathscr{D}', o')$, $\mathscr{N}' = \mathscr{D} = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\}$ ve

$\mathscr{D}' = \{\{d_1, d_2, d_3\}, \{d_1, d_4, d_5\}, \{d_2, d_4, d_6\}, \{d_3, d_5, d_6\}\}$ olur. $d_1, d_6 \in \mathscr{N}'$ olup bu iki noktadan geçen bir doğru yoktur.

Önerme 3.1.1. Bir lineer uzayın kısıtlanmışı da daima bir lineer uzaydır.

İspat: $\mathsf{U}=(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ bir lineer uzay olsun. $\mathscr{N}' \subset \mathscr{N}$ alınsın. U nun $\mathscr{N}'$ ye kısıtlanmışı olan uzay U' ile gösterilsin. U' nün $\mathscr{D}'$ doğruları kümesi, kısıtlanmış uzayın tanımı gereği aşağıdaki gibidir.

$$\mathscr{D}' = \{d \cap \mathscr{N}' \mid d \in \mathscr{D}, i \neq j, \exists N_i, N_j \in \mathscr{N}', N_i \in d, N_j \in d\}.$$

$\mathsf{U}'=(\mathscr{N}', \mathscr{D}', o')$ nün lineer uzay olduğu gösterilecektir. Kısaca $N_m, N_k \in \mathscr{N}'$ için N_m ve N_k dan geçen d' doğrusunun var olduğu gösterilecektir.

$$N_m, N_k \in \mathscr{N}' \Rightarrow N_m, N_k \in \mathscr{N}$$

$$\Rightarrow d = N_m N_k \in \mathscr{D}$$

$$\Rightarrow d' = d \cap \mathscr{N}' \text{ olup } d \in \mathscr{D}$$

$\exists N_m, N_k \in \mathscr{N}'$ dir ve $N_m \in d, N_k \in d$ olduğundan $d' \in \mathscr{D}'$ olup bu da $\cup'$ bir lineer uzay olduğunu gösterir. [3]

Bir lineer uzayın boyutu sonlu olmak zorunda değildir. Buna bir örnek verelim.

Örnek 3.1.3. $\mathscr{N} = \{(x, y) | (x, y)$ çember üzerindeki noktalar $\}$

$\mathscr{D} = \{d | d, \mathbb{R}^2$ de çemberi farklı iki noktada kesen doğru $\}$

$\cup = (\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ uzayı sonsuz boyutlu bir lineer uzaydır. Çünkü uzayın hiçbir noktası diğerlerinden elde edilmez. [3]

İnşa: Öklid düzleminin $(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ halini yeniden göz önüne alalım. Herhangi bir d doğrusu için d nin kendisi de dâhil d ye paralel bütün doğruların kümesi $[d]$ olsun.

Bu durumda aşağıdaki özelikler gerçeklenir.

Önerme 3.1.2.

a) $d' \in [d]$ ise $[d'] = [d]$ dir.

b) Eğer $d' \notin [d]$ ise $[d'] \cap [d] = \varnothing$ dir.

İspat: (a) $\forall x \in [d']$ için ya $x = d'$ veya $x // d'$ dır. $d' \in [d]$ gereğince de ya $d' = d$ veya $d' // d$ dir. Bu durumlar göz önüne alınacak olursa ya $x = d$ veya $x // d$ olur.

Bu yüzden de $x \in [d]$ olur. Yani $[d'] \subseteq [d]$ olur. Benzer şekilde $[d] \subseteq [d']$ olur. Bu nedenle $[d'] = [d]$ dir.

(b) $\forall y \in [d]$ için ya $y = d$ ya da $y // d$ dir. $d' \in [d]$ için $d' = d$ yada $d' // d$ dir.

$y = d'$ veya $y // d' \Rightarrow y \in [d'] \Rightarrow [d] \subseteq [d']$

$[d'] \cap [d] \neq \varnothing$ olsaydı $x \in [d'] \cap [d]$

$x \in [d']$ ise (a) dan $[x] = [d']$ ve $x \in [d] \Rightarrow [x] = [d]$ elde edilir. $[d'] = [d]$ ve $d' \in [d']$ olduğundan $d' \in [d]$ çelişkisine varılır. O halde $[d'] \cap [d] = \varnothing$ dır.

Yeni bir $\cup' = (\mathscr{N}', \mathscr{D}', o')$ sistemini aşağıdaki gibi inşa edilsin.

$$\mathscr{N}' = \mathscr{N}' \cup \{[d] \| d \in \mathscr{D}\}$$

$$\mathscr{D}' = \{\{d \cup [d] \| d \in \mathscr{D}\}, \{[d] \| d \in \mathscr{D}\}\}$$

$\mathscr{N}'$, $\mathscr{N}$ nin noktaları ile $[d]$ paralel denklik sınıfından oluşmuştur. Bu paralel denklik sınıfına sonsuzdaki nokta (ideal nokta) denir. $\mathscr{D}$ nin her doğrusu da kendisine içinde bulunduğu denklik sınıfı ilave edilerek genişletilmiştir. Yani $\mathscr{D}$ nin her d doğrusuna sonsuzdaki $[d]$ noktası eklenmiştir. Böylece $\mathscr{D}'$ nün doğrusu haline dönüştürülmüştür. Ayrıca sonsuzdaki bütün noktaları kapsayan ve sonsuz doğrusu (ideal doğru) denilen bir doğruda doğrular kümesine eklenmiştir. Aşikâr olarak $\mathscr{D}'$ nün her doğrusu üzerinde en az iki nokta vardır. (En az iki farklı denklik sınıfı vardır.) L2 nin sağlandığını görelim. $X, Y \in \mathscr{N}$ iken X, Y den geçen tek doğru XY nin genişletilmişidir.

Eğer noktalardan biri $\mathscr{N}'$ nün $\mathscr{N}$ noktası sonsuzdaki bir $[d]$ noktası ise bu durumda $\mathscr{N}$ ve $[d]$ yi birleştiren tek doğru N nin $[d]$ den geçen tek elemanıdır. Eğer noktaların her ikisi de sonsuzdaki $[d]$ ve $[c]$ gibi iki nokta ise bu noktalardan geçen bir tek doğru sonsuz doğrudur. Dolayısıyla L2 aksiyomu sağlanır. Bu yüzden de $\cup' = (\mathscr{N}', \mathscr{D}', o')$ bir lineer uzaydır. [3]

Buna genişletilmiş reel düzlem veya projektif düzlem denir.

3.2. De Bruijn-Erdös Teoremi

Bir lineer uzayın toplam nokta sayısı olan v ile toplam doğru sayısı olan b arasında bazı bağıntılar kurulacaktır. Lineer uzayda hiçbir doğru bulunmaması ya da bir tek doğrunun var olması hali dışında şimdiye kadar görülen yaklaşık-lineer uzay örneklerinde $b \geq v$ olmaktadır.

Aşağıdaki Teorem 3.2.1. de bunun lineer uzaylar içinde her zaman doğru olduğunu ispatlayacaktır. Öncelikle Önerme 3.2.1. e ihtiyacımız vardır.

Önerme 3.2.1. Bir yaklaşık-lineer uzayda $\sum_{i=1}^{v} b_i(b_i-1) \leq b(b-1)$ dir.

İspat: Bir yaklaşık lineer uzayın sonlu b doğrulu olduğu kabul edilsin. Bu uzayın sabit bir N_i noktasından geçen doğrularla oluşturulacak sıralı ikili sayısı $b_i(b_i-1)$ dir. Bütün noktalar için bunlarla kesişen doğrularla oluşturulan sıralı ikililer üzerinden toplam alınırsa $\sum_{i=1}^{v} b_i(b_i-1)$ olur. Bunlar kesişen doğrulardan oluşturulan sıralı ikili sayısıdır. YL2 den dolayı bir sıralı ikilinin burada birden fazla geçmesi söz konusu değildir. Bu uzayda kurulabilecek sıralı doğru ikilisi sayısı tam olarak $b(b-1)$ dir. (Kesişen doğrulardan oluşan sıralı ikili sayısı $\leq$ bütün uzaydaki sıralı ikili sayısı) $\sum_{i=1}^{v} b_i(b_i-1) \leq b(b-1)$ dır. [3]

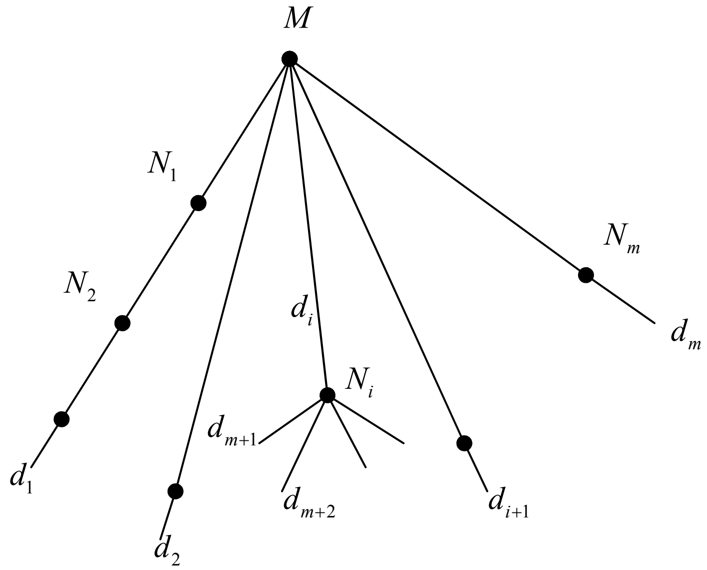
Sonuç: Bir yaklaşık-lineer uzayda tüm doğruların kesişmesi için gerek ve yeter şart $\sum_{i=1}^{v} b_i\left(b_i-1\right)=b\left(b-1\right)$ olmasıdır. [3]

Teorem 3.2.2. (De Bruijn-Erdös) $\cup$, $b>1$ özeliğinde herhangi sonlu lineer uzay olsun. Bu takdirde

$i)$ $b \geq v$ dir.
$ii)$ Eğer $b=v$ ise herhangi iki doğru bir noktada kesişir.

(ii) durumunda ya bir doğru üzerinde $v-1$ nokta, diğerleri üzerinde ikişer nokta vardır. Ya da her doğru $k+1$ noktalıdır ve her noktadan $k+1$ doğru geçer. $k \geq 2$.

İspat: $i)$ Lineer uzayda bir noktadan geçen minimum doğru sayısı $m=\left\{b_i \middle| 1 \leq i \leq v\right\}$ olsun. $m>1$ dir. Aksi takdirde bütün noktalar doğrudaş olur. M kendisinden m tane doğru geçen noktalardan biri olup, bu doğrular $d_1, d_2, ..., d_m$ ile gösterilsin. $1 \leq i \leq m$ ve $N_i \neq M$ olmak üzere $N_i \in d_i$ olsun. (Lineer uzay olduğundan bütün noktalarınız M ile doğru oluşturur. Dolayısıyla bütün noktalar M den geçen doğrular üzerindedir.) (Bkz. Şekil 3.2.1.)



Şekil 3.2.1. De Bruijn-Erdös Teoremi için örnek lineer uzay çizimi

L2 aksiyomu gereğince N_1 noktası ile d_2 doğrusu üzerindeki her nokta birer doğru oluşturur. Dolayısıyla N_1 den geçen doğru sayısı d_2 doğrusu üzerindeki nokta sayısından büyüktür. Yani $b_1 \geq v_2$ dir. Benzer düşünceyle $1 \leq i \leq m-1$ iken $b_i \geq v_{i+1}$ ve $b_m \geq v_1$ olduğu görülür. Buradan

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i$$

elde edilir.

M den geçen her d doğrusu için $b(M) \geq v(d)$ olduğu gibi her N_i noktası için $b(N_i) \geq b(M) \geq v(d)$ dir. Dolayısıyla her N_i noktası için $m+1 \leq j \leq b$ olmak üzere $b_i \geq v_j$ olur. Eğer $b \leq v$ ise

$$\begin{aligned} v_1 &\leq b_m \\ v_2 &\leq b_1 \\ &. \\ &. \\ v_m &\leq b_{m-1} \\ v_{m+1} &\leq b_{m+1} \\ &. \\ &. \\ v_b &\leq b_b \end{aligned}$$

demektir. Toplam alınarak $\sum_{i=1}^{b} v_i \leq \sum_{i=1}^{b} b_i$ elde edilir. $b \leq v$ ise $\sum_{i=1}^{b} b_i \leq \sum_{j=1}^{v} b_j$ olacağı açıktır. Hâlbuki yaklaşık-lineer uzaylarda $\sum_{i=1}^{v} b_i = \sum_{j=1}^{b} v_j$ olduğunu görmüştük. Böylece $\sum_{i=1}^{v} b_i = \sum_{j=1}^{b} v_j \leq \sum_{i=1}^{b} b_i$ elde edilir. $b < v$ ise $\sum_{i=1}^{v} b_i = \sum_{i=1}^{b} b_i + \sum_{i=b+1}^{v} b_i$ yazılabileceğinden yukarıdaki eşitsizlik mümkün değildir.

Ayrıca $m > 1$ dir. Aksi halde $b = 1$ olur ki bu $b > 1$ hipotezi ile çelişir. Bu yüzden bir noktadan en az iki doğru geçer.

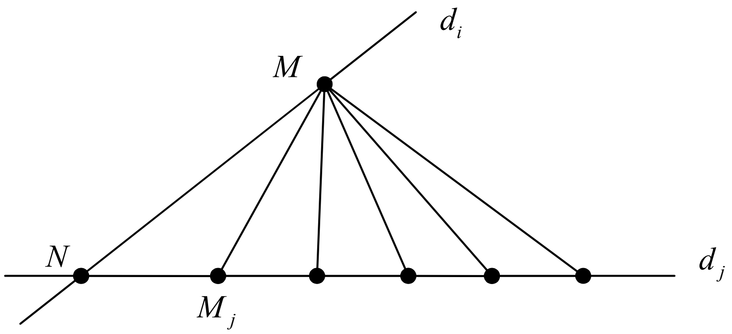
Yukarıdaki $\sum_{i=1}^{v} b_i \leq \sum_{i=1}^{v} b_i$ çelişkisinden kurtulabilmek için $b \geq v$ olmalıdır.

ii) $b = v$ olsun.

$1 \leq i \leq m-1$ için $v_{i+1} = b_i$, $b_m = v_1$

$m+1 \leq j \leq b$ için $v_j = b_j$ dir. Önerme 2.5.4 sonucu gereği $\sum_{j=1}^{b} v_j \left(v_j - 1\right) = v\left(v-1\right)$ yazılmıştı. Bu eşitliğin sol tarafı $\sum_{j=1}^{b} b_j \left(b_j - 1\right) = b\left(b-1\right)$ dir. Böylece Önerme 3.2.1 gereğince bütün doğrular kesişir. Tüm doğruların kesişmesinde iki durum söz konusudur. [3]

I. Durum: Uzayın bütün noktaları d_i ve d_j gibi iki doğru üzerinde olsun. N bu iki doğrunun kesişim noktası olsun. d_i üzerinde N den farklı bir M_i noktası, d_j üzerinde de M_j noktası alınsın. $\left(M_i \in d_i \setminus \{N\}, M_j \in d_j \setminus \{N\}\right)$ olsun. Bu durumda M_iM_j doğrusu bu iki nokta dışında başka nokta kapsayamaz. Yani iki noktalıdır. d_i üzerinde üçüncü bir nokta P_i ve d_j üzerinde üçüncü nokta P_j noktalarının var olduğu kabul edilsin. P_iP_j doğrusu iki noktalı bir doğrudur ve M_iM_j ile P_iP_j doğrularının ortak noktaları yoktur. Bu ikinci durumdaki bütün doğruların kesişmesi gerçeğiyle çelişir. O halde doğruların her ikisi üzerinde üçüncü noktaları almaya hakkımız yoktur. Bu yüzden de d_i doğrusu 2 noktalı d_j doğrusu da $v-1$ noktalı olmak zorundadır.

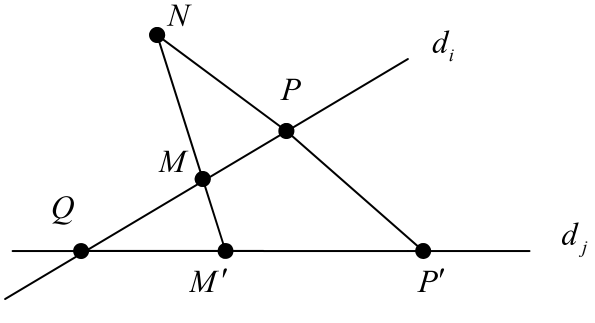


ŞEKİL 3.2.2. I. Durum için örnek çizim

Bu burumdaki lineer uzaya bir yaklaşık demet denir. Burada bir doğru $v-1$ noktalı diğer bütün doğrular 2 noktalıdır. [3]

II. Durum: d_i ve d_j doğruları dışında bir N noktasının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\forall M \in d_i$ için $f\left(M\right) = NM \cap d_j = M'$ dönüşümü $f : d_i \rightarrow d_j$ olup bire-bir ve örten dönüşümdür. $f\left(d_i \cap d_j\right) = d_i \cap d_j = Q$ dir. $\forall Q \in d_j$ için $g\left(QN \wedge d_i\right) = Q$ olup f d_j yi örter. Yani örten dönüşümdür.

$M, P \in d_i, M \neq P$ için $NM' \neq NP'$ dür. $NM \wedge d_j \neq NP \wedge d_j$ L2 aksiyomu gereğince $f\left(M\right) \neq g\left(P\right)$ olduğundan f bire-birdir.



Şekil 3.2.3. II. Durum için örnek çizim

Bu durumda d_i ve d_j doğrularının nokta sayıları eşittir. d_i doğrusu üzerindeki nokta sayısı $k+1$ ise bütün doğruların üzerindeki nokta sayısı da $k+1$ olacaktır.

İkinci durumda bütün doğrular kesişeceği için N den geçen doğru sayısı d üzerindeki nokta sayısına eşit olur. Dolayısıyla bir N noktasından $k+1$ doğru geçer. $k=2$ için bu uzay üçgen olur. Ve bütün noktalar iki doğrunun üzerinde olduğu için bu gerçekte I. durumdur. Dolayısıyla $k \geq 2$ diyebiliriz. [3]

3.3. Sayısal Özelikler

L2 aksiyomu bize lineer uzaylarda nokta ve doğru sayısı ile ilgili bazı sonuçlara ulaşmamızı izin veriyor. Bu bölümde v (dolayısıyla b sonlu) sonlu bir sayı olarak kabul edilmektedir.

Önerme 3.3.1. Bir lineer uzayda herhangi bir N_i noktası için

$$\sum_{j=1}^{b} \left(v_j - 1\right) r_{ij} = v - 1$$

dir.

İspat: Bir lineer uzayda herhangi bir N_i noktası seçildiğinde diğer bütün noktaların L2 gereğince bu N_i noktasından geçen doğrular üzerinde olduğu açıktır. N_i den geçen herhangi d_j doğrusu üzerinde N_i noktası hariç $v_j - 1$ nokta olduğundan N_i den geçen doğrular kümesi N_i hariç $\sum_{d_j o N_i} \left(v_j - 1\right)$ nokta kapsar. O halde toplam olarak

$$\sum_{d_j o N_i} \left(v_j - 1\right) = v - 1$$

dir.

$$v - 1 = \sum_{d_j o N_i} \left(v_j - 1\right) 1 + \sum_{d_j \text{ø} N_i} \left(v_j - 1\right) 0$$

$$=\sum_{j=1}^{b}\left(v_j-1\right)r_{ij}=v-1$$

bulunur. [3]

Önerme 3.3.2. Bir lineer uzayda $\sum_{j=1}^{b} v_j\left(v_j-1\right)=v\left(v-1\right)$ dir.

İspat: $\forall N_i$ noktası için $\sum_{j=1}^{b}\left(v_j-1\right)r_{ij}=v-1$ yazılabilir.

N_1 için, $\quad v-1=\sum_{j=1}^{b}\left(v_j-1\right)r_{1j}$

N_2 için, $\quad v-1=\sum_{j=1}^{b}\left(v_j-1\right)r_{2j}$

. .

. .

. .

N_v için, $\quad v-1=\sum_{j=1}^{b}\left(v_j-1\right)r_{vj}$

olduğundan

$$\sum_{j=1}^{v}\left(v-1\right)=\sum_{j=1}^{v}\sum_{j=1}^{b}\left(v_j-1\right)r_{ij}$$

$$v\left(v-1\right)=\sum_{j=1}^{b}\left(v_j-1\right)\sum_{j=1}^{v}r_{ij}$$

$$=\sum_{j=1}^{b}\left(v_j-1\right)v_j$$

elde edilir. [3]

Yaklaşık-lineer uzaylardan da hatırlayacağımız gibi $1 \leq i,\ j \leq v$ için $b_i = b_j,\ b_1 = b_v$ olması noktasal regülerliğini gerektirir.

$1 \leq i,\ j \leq b$ için $v_i = v_j,\ v_1 = v_b$ ise doğrusal regülerliğini gerektirir.

Önerme 3.3.3. Eğer bir lineer uzay doğrusal regüler ise bu takdirde noktasal regülerdir.

İspat: $\cup$ doğrusal regüler bir lineer uzay olup doğrusal regülerlik sayısı $k+1$ olsun. Herhangi bir N_i noktası için Önerme 3.3.1. gereğince

$$v-1 = \sum_{j=1}^{b} \left(v_j - 1\right) r_{ij}$$

$$= kb_i$$

olduğunu biliyoruz. N_i den geçen her bir doğru üzerinde N_i noktası hariç k adet nokta olduğundan,

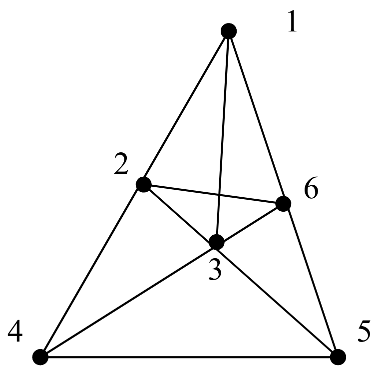
$$v-1 = kb_i \Rightarrow b_i = \frac{v-1}{k}$$

Bu eşitlik N_i nin seçiminden bağımsız olduğundan, her N noktası için

$$b_{(N)} = \frac{v-1}{k}$$

dır. [3]

Lineer uzay doğrusal regüler iken noktasal regüler olduğu görüldü. Bunun tersini düşünelim. Yani noktasal regüler iken doğrusal regüler olması gerekir mi? Bu doğru değildir. Şekil 2.1.3. deki lineer uzayı ele alalım. Bu uzaydan bir tek nokta çıkarılsın ve uzayın doğruları da ona göre uyarlanarak kısıtlansın.



Şekil 3.3.1 Noktasal regülerliğin doğrusal regülerliği gerektirmediğini gösteren bir lineer uzay

Önerme 3.3.4. $k \geq 1$ olmak üzere bir lineer uzayın noktasal ve doğrusal regülerlik sayısı $k+1$ ise bu takdirde bütün doğrular kesişir ve

$$b = v = k^2 + k + 1$$

dir.

İspat. U lineer uzayının iki doğrusu b ve c olsun. N, b üzerinde bir nokta iken aynı zamanda Noc ise b ve c kesişir. Eğer N ø c ise c üzerinde $k+1$ nokta mevcut olup N noktasından da $k+1$ doğru geçtiğinden N den geçen doğrular ile c üzerindeki noktalar arasında bire bir eşleme söz konusudur. Yani N den geçen bütün doğrular c yi keser. Özel halde b doğrusuda c yi kesmek zorundadır. Bu bütün doğruların kesiştiği iddiasını ispatlar. Herhangi bir N noktası için Önerme 3.3.3. gereğince

$$b_{(N)} = \frac{v-1}{k} = k+1$$

dır.

Böylece $v - 1 = k^2 + k$ ya da $v = k^2 + k + 1$ bulunur.

Uzayda toplam v nokta mevcut olup her birinden de $k+1$ doğru geçtiğinden toplam $v(k+1)$ doğru söz konusudur. Ancak her doğru üzerinde $k+1$ nokta olduğundan bu doğruların bazıları çakışıktır. Şu halde uzaydaki toplam doğru sayısı $b = \dfrac{v(k+1)}{k+1} = v$ olur. Bu ise ispatı tamamlar. [3]

Önerme 3.3.5. Eğer $b \geq 1$ özeliğinde bir $\cup$ lineer uzayı $k \geq 1$ olmak üzere $k+1$ doğrusal regülerlik sayısına sahip ise ve eğer $b_1 \leq k+1$ ise bu takdirde $\cup$ ya 1 veya $k+1$ noktasal regülerlik sayısına sahiptir.

İspat: $\cup$ bir lineer uzay ve $k \geq 1$ olmak üzere $\cup$ uzayı $k+1$ doğrusal regülerliğine sahip ve $b_1 \leq k+1$ ise Önerme 3.3.3. gereğince $\cup$ noktasal regülerdir ve noktasal regülerlik sayısı $\dfrac{v-1}{k} \leq k+1$ olurdu.

Eğer $\cup$ uzayında bir d doğrusu dışında bir N noktası varsa $b(N) \geq k+1$ olur. Bu durumda $b(N) = k+1$ olur. Bu durum d doğrusu üzerinde olmayan her N noktası için doğrudur. Üstelik d doğrusu üzerindeki her M doğrusu için de bu düşünce doğrudur. Çünkü M den geçmeyen bir d_i doğrusu bulunur. Böylece $\cup$ uzayının en az iki doğrusu varsa $\cup$ noktasal regülerdir ve noktasal regülerlik sayısı $k+1$ olur. Eğer $\cup$ uzayında yalnızca bir doğru varsa uzay yine regülerdir. Noktasal regülerliği aşikâr olarak 1 dir. [3]

Tanım 3.3.1. Nokta ve doğru sayıları eşit ve $v \geq 3$ olan bir lineer uzayda doğrulardan biri $v-1$ noktalı, kalan $v-1$ doğruda ikişer noktalı ise bu lineer uzaya bir yaklaşık demet denir. [10]

Önerme 3.3.6. Eğer bir $\cup$ lineer uzayında bütün doğrular kesişiyorsa $\cup$ için aşağıdaki durumlardan biri geçerlidir.

$i)$ $\cup$ aşikâr lineer uzaydır,

$ii)$ $\cup$ bir yaklaşık demettir,

$iii)\ \bigcup$ noktasal ve doğrusal regülerdir ve $k \geq 2$ olmak üzere bu regülerlik sayısı $k+1$ ile gösterilebilir. Bu durumda,

$$b = v = k^2 + k + 1$$

dir.

İspat: Teorem 3.2.2. ve Önerme 3.3.4. bütün doğruların kesişeceği şartları belirlemektedir. Bir lineer uzayda bütün doğrular kesişiyorsa, $b > 1$ olduğunda, Teorem 3.2.2. nin (ii) kısmında bahsedilen mümkün iki tip uzaydan birinin elde edileceği görülebilir. Bunlarda önermemizin $ii)$ ve $iii)$ şıklarında belirtilenlerdir. [3]

Bir aşikâr uzayda birden fazla doğru bulunmadığından iki doğrunun kesişmemesi zaten söz konusu değildir.

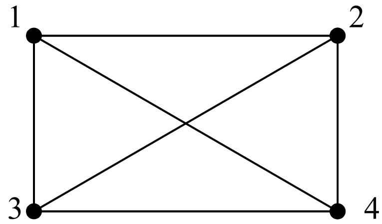
3.4. Değişme Özeliği

Bağımsız bir yaklaşık-lineer uzayda baz ve boyut kavramları incelenmiş ve aynı uzayın iki bazının eleman sayılarının farklı olabileceği görülmüştü. Şimdi bu kavramlar lineer uzaylarla incelenecektir.

Tanım 3.4.1. Eğer bir lineer uzayda her X, Y noktaları ve bütün $\mathcal{X}$ kümeleri için $X \notin \langle \mathcal{X} \rangle$ ve $X \in \langle \mathcal{X} \cup \{Y\} \rangle$ ise $Y \in \langle \mathcal{X} \cup \{X\} \rangle$ özelliği geçerliyse lineer uzaya değişme özelliğine sahiptir denir. [3]

Başka bir deyişle X ve Y değiştirilebilir. Bunun bütün mümkün $X, Y, \mathcal{X}$ seçimleri için doğru olması gerektiği belirtilmelidir.

Bir örnek olarak Şekil 3.4.1. deki lineer uzay ele alınsın.



Şekil 3.4.1. Değişme özeliğine sahip bir lineer uzay çizimi

$X = 1$, $Y = 2$ seçilip bütün $\mathcal{X}$ seçimleri düşüldüğünde $X \in \langle \mathcal{X} \cup \{Y\} \rangle$ iken $X \notin \mathcal{X}$ olduğunu sağlamanın imkânsız olduğu görülür. Burada ispatlanacak bir şey yoktur. Eğer $X = Y = 1$ ve $\mathcal{X} = \{3,4\}$ ise her şey sağlanır. Şekil 2.1.3. deki uzay değişme özeliğine sahiptir. Mesela $X = 1$, $Y = 2$ ve $\mathcal{X} = \{4\}$ ise $X \notin \langle \mathcal{X} \rangle = \{4\}$, $X \in \langle \mathcal{X} \cup \{Y\} \rangle = \{1,2,4\}$ ve $Y \in \langle \mathcal{X} \cup \{X\} \rangle = \{1,2,4\}$ olduğu görülür.

Bütün lineer uzaylar değişme özeliğine sahip olmak zorunda değillerdir.

Şekil 3.1.1. deki uzay düşünülsün.

$6 \notin \langle \{2,7\} \rangle, 6 \in \langle \{2,7\} \cup \{3\} \rangle$ iken

$3 \notin \langle \{2,7\} \cup 6 \rangle$ dır.

Önerme 3.4.1. U değişme özellikli bir lineer uzay olsun. Eğer $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ bir bağımsız küme ve $X_{n+1} \notin \langle \mathcal{X} \rangle$ ise bu takdirde $\{X_1, X_2, ..., X_n, X_{n+1}\}$ bağımsızdır.

İspat: $\{X_1, X_2, ..., X_n, X_{n+1}\}$ kümesinin bağımsız olduğunun göstermek için hiçbir $X_i \in \langle \{X_1, X_2, ..., X_{n+1}\} \setminus \{X_i\} \rangle$ bulunmadığını ispatlamak gerekir. Eğer $X_i = X_{n+1}$ ise bu hipotezden çıkar. Yani $X_i = X_{n+1}$ in $\{X_1, X_2, ..., X_n, X_{n+1}\}$ den çıkarılması ile geriye $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ kalır. Buda hipotezden dolayı bağımsızdır. $X_i \neq X_{n+1}$ ve $X_i \in \langle\{X_1, X_2, ..., X_{n+1}\} \setminus \{X_i\}\rangle = \langle\{X_1, X_2, ..., X_n\} \setminus \{X_i\} \cup \{X_{n+1}\}\rangle$ olduğu kabul edilsin. Fakat $X_i \notin \langle\{X_1, X_2, ..., X_{n+1}\} \setminus \{X_i\}\rangle$ dir. Çünkü $\mathcal{X}$ bağımsızdır. Dolayısıyla değişme özeliğinden $X_{n+1} \in \langle\{X_1, X_2, ..., X_n\} \setminus \{X_i\} \cup \{X_i\}\rangle = \langle\mathcal{X}\rangle$ bulunur. Bu çelişki olduğundan mümkün değildir. O halde $\{X_1, X_2, ..., X_n, X_{n+1}\}$ bağımsız bir kümedir. [3]

Önerme 3.4.2. $\mathcal{U}$ değişme özelikli bir lineer uzay olsun. Eğer $Q \in \langle\mathcal{X} \cup \{P\}\rangle$ fakat $Q \notin \langle\mathcal{X}\rangle$ ise bu takdirde $\langle\mathcal{X} \cup \{P\}\rangle = \langle\mathcal{X} \cup \{Q\}\rangle$ dır.

İspat: Örtme özeliği $\langle\mathcal{X} \cup \{Q\}\rangle \subseteq \langle\mathcal{X} \cup \{P\}\rangle$ olmasını gerektirir. Ancak $\mathcal{U}$ değişme özelliğine sahip olduğundan $P \in \langle\mathcal{X} \cup \{Q\}\rangle$ ve bu yüzden aynı zamanda $\langle\mathcal{X} \cup \{P\}\rangle \subseteq \langle\mathcal{X} \cup \{Q\}\rangle$ dır.

Tanım 3.4.2. Eğer $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ ve herhangi bir $\mathcal{H}$ alt uzayı için $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{V}$ olması $\mathcal{H} = \mathcal{V}$ yi gerektiriyorsa; yani eğer $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{W}$ farklı olup aralarında hiçbir alt uzay yoksa $\mathcal{V}$ alt uzayı $\mathcal{W}$ alt uzayını örter (örtüyor) denir. Aynı zamanda $\mathcal{W}, \mathcal{V}$ ile örtülüyor denir. Gösterim olarak $\mathcal{W} < \mathcal{V}$ veya $\mathcal{V} > \mathcal{W}$ yazılır. [3]

Önerme 3.4.3. $\mathcal{U}$ bir lineer uzay olsun. $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{W}$, $\mathcal{W} < \mathcal{V}$ şeklinde iki alt uzay ise bir P noktası için $\mathcal{V} = \langle\mathcal{W} \cup \{P\}\rangle$ dir.

İspat: Herhangi bir $P \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{W}$ seçilsin. Bu takdirde $\mathcal{W} \subseteq \langle\mathcal{W} \cup \{P\}\rangle \subseteq \mathcal{V}$ olduğundan $\mathcal{V} = \langle\mathcal{W} \cup \{P\}\rangle$ dır. [3]

Önerme 3.4.4. $\mathcal{U}$ değişme özellikli lineer uzay olsun. $P \notin \langle\mathcal{X}\rangle$ ise $\langle\mathcal{X}\rangle < \langle\mathcal{X} \cup \{P\}\rangle$ dir.

İspat. $\mathcal{V}$ bir alt uzay olmak üzere $\langle \mathcal{X} \rangle \subseteq \mathcal{V} \subseteq \langle \mathcal{X} \cup \{P\} \rangle$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde $Q \in \mathcal{V} \setminus \langle \mathcal{X} \rangle$ seçildiğinde $\langle \mathcal{X} \cup \{Q\} \rangle \subseteq \mathcal{V} \subseteq \langle \mathcal{X} \cup \{P\} \rangle$ olduğu çıkar. Önerme 3.4.2. den $\langle \mathcal{X} \cup \{Q\} \rangle = \langle \mathcal{X} \cup \{P\} \rangle$ olur. Bu yüzden $\mathcal{V} = \langle \mathcal{X} \cup \{P\} \rangle$ dır. [3]

Önerme 3.4.5. U değişme özelikli herhangi sonlu lineer uzay olsun. Bu takdirde U nun iki bazı aynı sayıda elemana sahiptir.

İspat: İspat tümevarım metoduyla yapılacaktır. $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ ve $\{Y_1, Y_2, ..., Y_m\}$, $n \le m$ olmak üzere U nun herhangi iki bazı olsun. Her bir $Y_i \in \langle X_2, X_3, ..., X_n \rangle$ ifadesi doğru değildir. Aksi halde

$\mathsf{U} = \langle \{Y_1, Y_2, ..., Y_m\} \rangle \subseteq \langle \{X_2, X_3, ..., X_n\} \rangle \subseteq \mathsf{U}$ olur.

$Y_1 \notin \{X_2, X_3, ..., X_n\}$ farz edilsin. $Y_1 \in \langle \{X_1, X_2, ..., X_n\} \rangle$ olduğundan değişme özeliği $X_1 \in \langle \{Y_1, X_2, ..., X_n\} \rangle$ olmasını gerektirir. Üstelik $Y_1 \notin \langle \{X_2, X_3, ..., X_n\} \rangle$ ve $X_2 \notin \langle \{X_3, X_4, ..., X_n\} \rangle$ tür. Değişme özeliği kullanılırsa $X_2 \notin \langle \{Y_1, X_3, ..., X_n\} \rangle$ gerektirir. Böylece $\langle \{Y_1, X_3, ..., X_n\} \rangle \subseteq \langle \{Y_1, X_2, ..., X_n\} \rangle = \mathsf{U}$ olur.

Eğer her Y_i, $\langle \{Y_1, X_3, ..., X_n\} \rangle$ içinde ise aşikâr çelişki olan $\mathsf{U} \subseteq \langle \{Y_1, X_3, ..., X_n\} \rangle \subseteq \mathsf{U}$ elde edilir.

$Y_2 \notin \langle \{Y_1, X_3, ..., X_n\} \rangle$ kabul edilsin. Bu takdirde $Y_2 \in \langle \{Y_1, X_2, ..., X_n\} \rangle = \mathsf{U}$ öyle ki değişme özelliğinden $X_2 \in \langle \{Y_1, Y_2, X_3, ..., X_n\} \rangle = \mathsf{U}$ olup bu şekilde devam edilebilir.

Sonuç olarak $\mathsf{U} = \langle \{X_1, X_2, ..., X_n\} \rangle \subseteq \langle \{Y_1, Y_2, ..., Y_n\} \rangle \subseteq \langle \{Y_1, Y_2, ..., Y_m\} \rangle = \mathsf{U}$ elde edilir. Öyle ki $n = m$ olur.

Bir yaklaşık-lineer uzayın herhangi bir $\mathcal{V}$ alt uzayının kendisi de bir yaklaşık lineer uzay olarak davranılabilir. Dolayısıyla $boy\,\mathcal{V}$ ile gösterilen bir boyuta sahiptir.[3]

Önerme 3.4.6. U değişime özelikli bir lineer uzay olsun. Eğer $P \notin \langle \mathcal{X} \rangle$ ve $boy\langle \mathcal{X} \rangle = n$ ise $boy\langle \mathcal{X} \cup \{P\} \rangle = n+1$ dir.

İspat: Önerme 3.4.5. gereğince $\langle \mathcal{X} \rangle$ in herhangi bir bazı $(n+1)$ elemanlıdır. $\{X_1, X_2, ..., X_{n+1}\}$ böyle bir baz olsun. Önerme 3.4.1. gereğince $\{X_1, X_2, ..., X_{n+1}, P\}$ bağımsızdır. Ve aşikâr olarak kendi kapanışı olan $\langle \mathcal{X} \cup \{P\} \rangle$ yi gerer. $\langle \mathcal{X} \cup \{P\} \rangle$ nin herhangi iki bazı aynı sayıda elemanlı olduğundan bu sayı $n+2$ dir. Dolayısıyla $boy\langle \mathcal{X} \cup \{P\} \rangle = n+1$ dir. [3]

3.5. Hiper Düzlemler

Tanım 3.5.1. Bir U lineer uzayınca örtülen bir alt uzaya U nun bir hiper düzlemi denir. Eşdeğer olarak hiper düzlem maksimal has alt uzaydır. [3]

Biri diğerini örten lineer uzaylar için örtülen örtenin bir hiper düzlemidir.

Örnek 3.5.1.

Reel 5-uzayda hiper düzlemler reel 4-uzaylardır.

Reel 4-uzayda hiper düzlemler reel 3-uzaylardır.

Reel 3-uzayda hiper düzlemler reel 2-uzaylardır.

Reel 2-uzayda hiper düzlemler reel 1-uzaylardır.

Reel 1-uzayda hiper düzlemler her bir noktadır.

$\varnothing$ nin hiper düzlemi yoktur.

Örnek 3.5.2. Şekil 2.1.3. deki Fano düzleminin her bir doğrusu hiper düzlemdir. Mertebesi 3 olan afin düzlemlerde de her bir doğru bir hiper düzlem olarak ifade edilebilir.

Örnek 3.5.3. Bir doğrunun hiper düzlemleri noktalar, bir noktanın hiper düzlemleri boş kümedir. Boş kümenin hiper düzlemi yoktur.

Bir hiper düzlemin boyutunun uzayın boyutundan bir eksik gibi görünmesine aldanılmaması gerekir. Bu ifade genelde doğru değildir. Şekil 3.1.1. deki lineer uzayda $\{2,4,6,9,5\}$ veya $\{2,4,6,9,7\}$ kümelerinin her biri uzayın bir hiper düzlemini oluşturur. Uzayın kendisinin boyutu 2 olduğu gibi bunların boyutu da 2 dir.

Önerme 3.5.1. U değişme özelikli sonlu bir lineer uzay olsun. Eğer $\mathcal{H}$, U nun bir hiper düzlemi ise $boy\mathcal{H} = boy\mathsf{U} - 1$

İspat: U, $\mathcal{H}$ yi örttüğünden $\mathsf{U} = \langle \mathcal{H} \cup \{P\} \rangle$ olacak şekilde $P \in \mathsf{U} \setminus \mathcal{H}$ noktaları vardır. Önerme 3.4.6. gereğince $boy\langle \mathcal{H} \cup \{P\} \rangle = boy\mathcal{H} + 1$ dır. $boy\mathsf{U} = boy\mathcal{H} + 1$ ya da $boy\mathcal{H} = boy\mathsf{U} - 1$ olduğu görülür**.** [3]

Tanım 3.5.2.

1) Herhangi iki doğru kesişir.

2) Üçü aynı doğru üzerinde olmayan dört nokta vardır, şartlarını sağlayan bir lineer uzaya bir projektif düzlem denir. [3]

İkinci şart en az iki doğrunun var olmasını gerektirir. Yaklaşık doğru demetleri birinci aksiyomu sağladıkları halde bu tanımın dışında tutulur. Şimdiye kadar iki tane projektif düzlem örneği verildi. Fano düzlem ve genişletilmiş reel düzlem.

Önerme 3.5.2. Bir projektif düzlemin hiper düzlemleri ancak doğrulardır.

İspat: d herhangi bir doğru olsun. $X \notin d$ ise bu takdirde $\langle d \cup \{X\} \rangle = \bigcup$ olduğu gösterilmelidir.

Bunu ispatlamak için $\bigcup \subseteq \langle d \cup \{X\} \rangle$ veya $\bigcup$ nun herhangi bir P noktası için $P \in \langle d \cup \{X\} \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $P = X$ veya $P \in d$ ise ispat tamamdır. Aksi halde PX bir doğrudur ve d doğrusunu bir Q noktasında keser. Ancak Q ve X in her ikisi $\langle d \cup \{X\} \rangle$ dedir ve $\langle d \cup \{X\} \rangle$ bir alt uzay olduğundan $P \in QX \subseteq \langle d \cup \{X\} \rangle$ dir. [3]

Eğer bir projektif düzlem değişme özeliğine sahip olsaydı Önerme 3.5.1. den direkt olarak 2 boyutuna sahip olduğu söylenebilirdi.

Önerme 3.5.3. Bir projektif düzlemde değişme özeliği geçerlidir.

İspat: Herhangi X, Y noktaları ve herhangi bir $\mathcal{X}$ kümesi için $X \notin \langle \mathcal{X} \rangle$ ve $X \in \langle \mathcal{X} \cup \{Y\} \rangle$ nin $Y \in \langle \mathcal{X} \cup \{X\} \rangle$ gerektirdiğini ispat etmek gerekir. $\langle \mathcal{X} \rangle$ için tam olarak 3 ihtimal vardır. Boş küme, bir nokta veya bir doğrudur.

Eğer $\langle \mathcal{X} \rangle = \varnothing$ ve $X \in \langle \mathcal{X} \cup \{Y\} \rangle$ ise $X = Y$ dır.

Eğer $\langle \mathcal{X} \rangle = P$ bir nokta ise bu takdirde $X \in \langle \mathcal{X} \cup \{Y\} \rangle$ olması $X \in PY$ olduğunu ifade eder. Dolayısıyla $Y \in PX = \langle \mathcal{X} \cup \{X\} \rangle$ dir.

Eğer $\langle \mathcal{X} \rangle = d$ bir doğru ise bu takdirde $X \notin d$ Önerme 3.5.2. gereğince $\langle d \cup \{X\} \rangle = \bigcup$ yı gerektirir. Bu yüzden $Y \in \langle \mathcal{X} \cup \{X\} \rangle$ olduğu aşikârdır. [3]

Önerme 3.5.4. Hiper düzlemleri sadece doğrulardan oluşan bir lineer uzayda değişme özeliği sağlanır.

İspat: Önerme 3.5.3. de eğer $\langle \mathcal{X} \rangle = d$ bir doğru ise bu takdirde $X \notin d$ Önerme 3.5.2. gereğince $\langle d \cup \{X\} \rangle = \cup$ yı gerektirir. Bu yüzden $Y \in \langle \mathcal{X} \cup \{X\} \rangle$ olduğu aşikârdır. [3]

Önerme 3.5.5. Herhangi bir projektif düzlemin boyutu 2 dir.

İspat: Önerme 3.5.3. gereği bir projektif düzlemde değişme özeliği geçerlidir. Bu durumda Önerme 3.5.1. gereği boyutu 2 dir. [3]

Tanım 3.5.3. Bir $\cup$ lineer uzayında $\cup$ nun herhangi bir doğrusu $\mathcal{H}$ da bir noktaya sahipse $\cup$ nın $\mathcal{H}$ has alt uzayına bir projektif hiper düzlem denir. [3]

Şekil 2.6.1. deki uzay, kendisindeki tek projektif hiper düzlemin {b, d, g} olduğu bir lineer uzaya dönüştürülebilir.

Şekil 2.1.3. ve Şekil 3.3.1. deki Lineer uzaylarda 3-noktalı her doğru bir projektif hiper düzlemdir.

Önerme 3.5.6. Herhangi bir projektif hiper düzlem bir hiper düzlemdir.

İspat: $\mathcal{H}$, $\cup$ nun bir projektif hiper düzlemi ve $P \in \cup \backslash \mathcal{H}$ olsun. Eğer Q, $\mathcal{H}$ da olmayan P den farklı herhangi bir nokta ise kabul gereği PQ doğrusu $\mathcal{H}$ yi bir R noktasından keser. Fakat R ve P nun $\langle \mathcal{H} \cup \{P\} \rangle$ de olması $Q \in RP \subseteq \langle \mathcal{H} \cup \{P\} \rangle$ olmasını gerektirir. Böylece $\cup \subseteq \langle \mathcal{H} \cup \{P\} \rangle$ olur ve $\langle \mathcal{H} \cup \{P\} \rangle \subseteq \cup$ aşikâr olduğundan ispat tamamlanmış olur. [3]

3.6. Lineer Fonksiyonlar

Bir yaklaşık-lineer uzayın doğrularını başka bir yaklaşık-lineer uzayın doğrularına dönüştürmeyen lineer fonksiyon örnekleri bulmak zor değildir.

Eğer f nin tanım bölgesi bir lineer uzaysa bu takdirde f nin görüntüsünün de aynı zamanda bir lineer uzay olmak zorunda olduğu gösterilecektir.

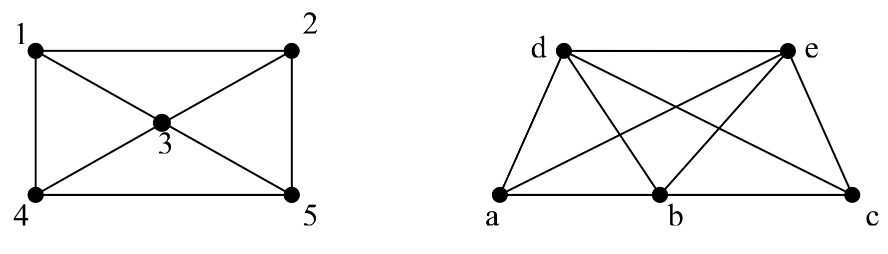
Önerme 3.6.1. $\mathcal{U}$ bir lineer uzay, $\mathcal{U}'$ bir yaklaşık-lineer uzay ve f, $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}'$ ye örten bir lineer fonksiyon olsun. Bu takdirde $\mathcal{U}'$ lineerdir.

İspat. P ve Q, $\mathcal{U}'$ nün farklı noktaları olsun. f örten olduğundan $\mathcal{U}$ nun $f(X)=P$ ve $f(Y)=Q$ olacak şekilde farklı X,Y noktalan vardır. f lineer olduğundan $f(XY)$ P ve Q dan geçen bir doğru olmak zorundadır. [3]

Önerme 3.6.2. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}'$ lineer uzaylar ve f, $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}'$ üzerine birebir ve örten bir lineer fonksiyon olsun. Bu takdirde f^{-1} lineerdir.

İspat: P ve Q, $\mathcal{U}'$ nün farklı noktaları olsun. f bire-bir ve örten olduğundan $f(X)=P$ ve $f(Y)=Q$ olacak şekilde $\mathcal{U}$ nun farklı birer tek X ve Y noktaları vardır. f lineer olduğundan $f(XY)=PQ$ bu yüzden $f^{-1}(PQ)=XY$ dir. [3]

Bu kısmın geri kalanında f ve f^{-1} in alt uzaylar üzerinde nasıl işlem göreceği incelenecektir. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}'$ Şekil 3.6.1. deki lineer uzay olsun.



Şekil 3.6.1. Alt lineer uzay

f: $1 \to d$, $2 \to c$, $3 \to b$, $4 \to a$, $5 \to d$ şeklinde $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}'$ ye bir lineer fonksiyondur.

$\mathcal{U}$ nun alt uzayları $\varnothing$, herhangi bir nokta, herhangi bir doğru ve de $\mathcal{U}$ nun kendisidir.

f bu alt uzaylara ne yapar? $f(\varnothing) = \varnothing$, $\mathcal{U}$ nun herhangi bir X noktası için $f(X)$ $\mathcal{U}'$ nün bir noktasıdır. f lineer olduğundan her d doğrusu için $f(d)$ $\mathcal{U}'$ nün bir doğrusudur. $f(\mathcal{U}) = \{a, b, c, d\}$ gerçekten $\mathcal{U}'$ nün bir alt uzayıdır.

Önerme 3.6.3. $\mathcal{V}$**,** $\mathcal{U}$ nun bir alt uzayı ve f, $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}'$ ye bir lineer fonksiyon olsun. Bu takdirde $f(\mathcal{V})$, $\mathcal{U}'$ nün bir alt uzayıdır.

İspat: Eğer P ve Q, $f(\mathcal{V})$ nin farklı noktaları ise PQ doğrusunun $f(\mathcal{V})$ nin bir alt kümesi olduğu gösterilmelidir. $P, Q \in f(\mathcal{V})$ olduğundan $\mathcal{V}$ de $P = f(X)$, $Q = f(Y)$ olacak şekilde X, Y noktaları vardır. Aynı zamanda f bir fonksiyon olduğundan $X \neq Y$ dir. Bu takdirde f lineer olduğu için f, XY doğrusunu $f(XY)$ doğrusuna dönüştürür.

Fakat $f(XY)$ doğrusu P ve Q noktalarını kapsar. Dolayısıyla $f(XY) = PQ$ dır. Bu yüzden $PQ \subseteq f(\mathcal{V})$ olur. [3]

Önerme 3.6.4. Eğer $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}'$ ye lineer fonksiyon ve $X \neq Y$, $\mathcal{U}$ nun $f(X) \neq f(Y)$ şeklindeki noktaları ise bu takdirde $f(XY) = f(X).f(Y)$ dir.

İspat: İspat açıktır ve gerçekte yukarıdaki yardımcı teoremde kullanılmıştır.

Yine Önerme 3.6.3. e bakıldığında $\mathcal{U}'$ nün her alt uzayının $\mathcal{U}$ nun bir alt uzayının görüntüsü olup olmadığı sorulabilir. Yani $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}'$ nün bir alt uzayı ise $f^{-1}(\mathcal{V})$ $\mathcal{U}$

nun bir alt uzayı mıdır? (f yi bire-bir kabul etmiyoruz. $f^{-1}(\mathcal{V})$ basitçe $\mathcal{U}$ nun $\mathcal{V}$ nin noktalarına dönüşen noktalarının kümesidir.) Sorunun cevabı hayırdır. Bunu görmek için Şekil 2.6.1. deki lineer uzay burada verilen f fonksiyon ile düşünülsün. $\mathcal{V}=\{a,b\}$ bir doğru olsun. Bu takdirde $f^{-1}(\mathcal{V})=\{1,4,5\}$ olur. $\mathcal{U}$ nun bir alt uzayı değildir. Eğer f bire-bir ise bu takdirde geriye dönüş mümkün olacaktır.

Önerme 3.6.5. $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}'$ nün bir alt uzayı ve f, $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}'$ ye bire-bir lineer fonksiyon olsun. Bu takdirde $f^{-1}(\mathcal{V})$ $\mathcal{U}$ nun bir alt uzayıdır.

İspat: X ve Y $f^{-1}(\mathcal{V})$ nin farklı noktaları olsun. $XY \subseteq f^{-1}(\mathcal{V})$ olduğunu göstermek gerekir. P ve Q $\mathcal{V}$ nin $f(X)=P$ ve $f(Y)=Q$ olacak şekildeki iki noktası olsun. f bire-bir olduğundan $P \neq Q$ dur ve dolayısıyla PQ doğrusu için $PQ \subseteq \mathcal{V}$ dir. Ancak f lineerdir ve $f(XY)$ bir doğrudur. Gerçekte Önerme 3.6.4. gereğince $f(X).f(Y)=PQ$ doğrusudur. Dolayısıyla $XY \subseteq f^{-1}(PQ) \subseteq f^{-1}(\mathcal{V})$ dir.[3]

Önerme 3.6.6. f, $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}'$ ye bire-bir lineer bir fonksiyon olsun. Eğer $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ nun bir alt uzayı ise $f^{-1}(f(v))=\mathcal{V}$ dir. Eğer $\mathcal{V}'$, $\mathcal{U}'$ nün bir alt uzayı ise bu takdirde $f^{-1}(f(v')) \subseteq \mathcal{V}'$ dir. Eğer aynı zamanda örten fonksiyon ise $f^{-1}(f(v'))=\mathcal{V}'$ dir.

İspat: f^{-1}, $\mathcal{U}'$ nün tamamı üzerinde tanımlanmak zorunda olmadığından genel olarak yalnızca $f^{-1}(f(v)) \subseteq \mathcal{V}$ sonucu çıkartılabilir. Ancak f örten ise f^{-1}, $\mathcal{U}'$ den $\mathcal{U}$ ya bir fonksiyondur. [3]

Önerme 3.6.7. $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ nun bir alt kümesi ve f, $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}'$ ye bire-bir lineer bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\mathcal{X}$ üzerindeki herhangi bir $\mathcal{V}$ alt uzayı için $f(\mathcal{V})$, $\mathcal{U}'$ nün $f(\mathcal{X})$ üzerinde bir alt uzayıdır. $f(\mathcal{X})$ üzerindeki herhangi bir $\mathcal{V}'$ alt uzayı için $f^{-1}(\mathcal{V}')$, U nun $\mathcal{X}$ üzerinde bir alt uzayıdır. Üstelik f örten ise U nun $\mathcal{X}$ üzerindeki alt uzayları ile U' nün $f(\mathcal{X})$ üzerindeki alt uzayları arasında bire-bir bir eşleme vardır.

İspat: Bu önermenin ispatı Önerme 3.6.3., 3.6.5. ve 3.6.6. dan çıkar.

Önerme 3.6.8. U ve U' iki lineer uzay, $\mathcal{X}$ de U da bir alt küme ve f, U dan U' ye bire-bir lineer fonksiyon olsun. Bu takdirde $\langle f(\mathcal{X})\rangle = f(\langle \mathcal{X}\rangle)$ dir.

İspat: Yaklaşık-lineer uzaylardan
$\langle f(\mathcal{X})\rangle = \bigcap\{\mathcal{V}' | \mathcal{V}',\ \mathsf{U}'$ nün $f(\mathcal{X})$ üzerinde alt uzayı $\}$ olduğu biliniyor. Yine Önerme 3.6.7. gereği U nun $\mathcal{X}$ üzerindeki herhangi bir $\mathcal{V}$ alt uzayı $f(\mathcal{X})$ üzerinde U nün $f(\mathcal{V})$ alt uzayının oluşmasına neden olur. Tersine U' nün $f(\mathcal{X})$ üzerindeki herhangi bir $\mathcal{V}'$ alt uzayı da U nun $\mathcal{X}$ üzerinde bir $\mathcal{V}$ alt uzayının oluşmasına neden olur. Böylece
$f\left(\bigcap\{\mathcal{V} | \mathcal{V}, \mathsf{U} \text{ nun } \mathcal{X} \text{ üzerinde alt uzayı}\}\right) = \bigcap\{\mathcal{V}' | \mathcal{V}', \mathsf{U}' \text{ nün } f(\mathcal{X}) \text{ üzerinde alt uzayı}\}$
veya denk olarak $\langle f(\mathcal{X})\rangle = f(\langle \mathcal{X}\rangle)$ elde edilir. [3]

Önerme 3.6.9. U ve U' iki lineer uzay f, U dan U' ye bire-bir lineer fonksiyon olsun. $\mathcal{V}$, U nun alt uzayı ise $boy\mathcal{V} \geq boyf(\mathcal{V})$ dir.

İspat: $\mathcal{V}$ de $\mathcal{B}$ tabanı seçilir. Önerme 3.6.8. gereği $\mathcal{V} = \langle \mathcal{B}\rangle$ iken $f(\mathcal{V}) = \langle f(\mathcal{B})\rangle$ olur ki bu da $f(\mathcal{B})$ nin $f(\mathcal{V})$ yi ürettiğini belirtir.

Bir $N \in \mathcal{B}$ için $f(N) \in \langle f(\mathcal{B}) \backslash f(N)\rangle$ farz edilsin.

Önerme 3.6.8. den $f(N) \in f(\langle \mathcal{B} \setminus \{N\}\rangle)$ olur. f bire-bir olduğundan $N \in \langle \mathcal{B} \setminus \{N\}\rangle$ elde edilir ki bu da $\mathcal{B}$ nin bağımsız oluşu ile çelişir.

Böylece $\mathcal{W}$ nin herhangi bir bazı $f_{(\mathcal{W})}$ nin bazını üretir. Ve *boy* tanımından $f(\mathcal{W}) = \langle f(\mathcal{B}) \rangle$ olur. [3]

Tanım 3.6.1. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}'$ iki lineer uzay f, $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}'$ ye bire-bir lineer örten fonksiyon olsun. f^{-1} mevcut ve f^{-1} de lineer fonksiyonsa f ye $\mathcal{U}$ ile $\mathcal{U}'$ arasında bir izomorfizm denir. [10]

Önerme 3.6.10. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}'$ iki lineer uzay $f: \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$ örten bir izomorfizm olsun. $\mathcal{W}'$, $\mathcal{U}'$ nün alt uzayı ise $boy\mathcal{W}' \geq boyf^{-1}(\mathcal{W}')$ dir.

İspat. f fonksiyonu $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}'$ lineer uzayları arasında izomorfizm iken Önerme 3.6.2. den f^{-1} inde lineer olduğu biliniyor. Şu halde Önerme 3.6.9. u f^{-1} için düşünerek $boy\mathcal{W}' \geq boyf^{-1}(\mathcal{W}')$ yazılabilir. [3]

Önerme 3.6.11. $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}'$ iki lineer uzay f, $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}'$ ye bire-bir lineer fonksiyon olsun. $\mathcal{U}$ nun herhangi bir $\mathcal{W}$ alt uzayı için $boy\mathcal{W} = boyf(\mathcal{W})$ dir.

İspat: f nin $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}'$ ne örten ve izomorfizm olduğu kullanılabilir. Çünkü burada $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}'$ dır. Böylece $f(\mathcal{W})$, $f(\mathcal{U})$ nun bir alt uzayıdır. Önerme 3.6.9. dan $boy\mathcal{W} \geq boyf(\mathcal{W})$ ve Önerme 3.6.10. dan $f^{-1}: f(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ örten ve izomorfizm olduğundan $boyf(\mathcal{W}) \geq boyf^{-1}(f(\mathcal{W}))$ olur. Buradan $boy\mathcal{W} \geq boyf(\mathcal{W}) \geq boy\mathcal{W}$ yani $boy\mathcal{W} = boyf(\mathcal{W})$ elde edilir. [3]

Sonuç: $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}'$ iki lineer uzay f, $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{U}'$ örten ve izomorfizm ve $\mathcal{W}'$, $\mathcal{U}'$ nün alt uzayı ise $boy\mathcal{W}' = boyf^{-1}(\mathcal{W}')$ dür. [3]

BÖLÜM 4. ÖZEL LİNEER UZAYLAR

Lineer uzayların en iyi bilinen örnekleri projektif düzlemler ile afin düzlemlerdir. Bunlarla ilgili geniş bilgi için Kaya [9], Stevenson [12] gibi kaynaklara bakılabilir.

Burada tanım ve önermelerde Batten [3] esas alınmıştır.

4.1. Projektif Düzlemler

Tanım 4.1.1. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir lineer uzaya bir projektif düzlem denir.

P1 : Herhangi iki doğrunun bir ortak noktası vardır.

P2 : Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır. [3]

Bu çalışmada lineer uzaylarda yapıldığı için ''İki nokta tam olarak bir doğru üzerindedir.'' aksiyomunu belirtilmemiştir.

Önerme 4.1.1. Eğer bir lineer uzay P2 aksiyomunu sağlıyorsa ve her P_i noktası ile d_j doğrusu için $r_{ij} = 0$ iken $c_{ij} = b_i$ özelliğine sahipse bu uzay bir projektif düzlemdir.

İspat: $r_{ij} = 0$ iken $c_{ij} = b_i$ olmasının bütün doğruların kesişmesini sağlayacağı açıktır. [3]

Bir $\prod$ projektif düzleminde toplam nokta sayısı v ve toplam doğru sayısını b ile gösterip bu kısımda alacağımız projektif düzlemler için v,b sayılarının sonlu olduğunu kabul edeceğiz.

Tanım 4.1.2. Her $\prod$ projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir k pozitif tamsayısı vardır ve bu tamsayıya ilgili projektif düzlemin mertebesi denir :

1. $\prod$ nin her doğrusu üzerinde $k+1$ nokta vardır.

2. $\prod$ nin her noktasından $k+1$ doğru geçer.

3 $\prod$ nin tüm noktalarının sayısı k^2+k+1 dir.

4. $\prod$ deki tüm doğruların sayısı k^2+k+1 dır. [9]

Önerme 4.1.2. Bir $\prod$ projektif düzlemi noktasal ve doğrusal regüler olup $k \geq 2$ olmak üzere $v=b=k^2+k+1$ dır.

İspat: $\prod$ projektif düzleminde herhangi bir N noktası düşünelim. Noktasal ve doğrusal regülerliği gereğince N den geçen $k+1$ doğru vardır ve her doğru üzerinde N den başka k tane nokta bulunur. $\prod$ projektif düzleminin her noktası bu doğrulardan yalnız ve tam bir tanesinin üzerinde bulunur. Dolayısıyla $\prod$ projektif düzleminde N hariç $k(k+1)$ tane nokta bulunur. N noktasıyla birlikte $v=k^2+k+1$ elde edilmiş olur.

$\prod$ projektif düzleminin herhangi bir d doğrusunu düşünelim. Yine noktasal ve doğrusal regülerliği gereğince d üzerinde $k+1$ nokta vardır ve her noktadan d den başka k tane doğru geçer. Projektif düzlemin d den farklı her c doğrusu bu noktalardan yalnız birinden, açıkçası cd den geçer. Dolayısıyla $\prod$ projektif düzlemi d hariç $k(k+1)$ doğru kapsar. Böylece d doğrusunu da eklersek $b=k^2+k+1$ elde edilmiş olur. [3]

Önerme 4.1.3. Mertebesi 2 olan bir tek projektif düzlem vardır. [12]

Örnek 4.1.1. En küçük projektif düzlem 7 nokta ve 7 doğrudan oluşur. Örnek 2.1.6. da gösterilen Fano düzlemi en küçük projektif uzaya örnektir.

Tanım 4.1.3. $\mathscr{N}$ den $\mathscr{N}'$ ye ve $\mathscr{D}$ den $\mathscr{D}'$ ye 1:1 olan ve " $N \in d$ olması için gerek ve yeter şart $f(N) \in f(d)$ olmasıdır" şartını sağlayan bir f fonksiyonuna gömme fonksiyonu denir. $\mathsf{U}=(\mathscr{N}, \mathscr{D}, o)$ yaklaşık-lineer uzayı $\mathsf{U}'=(\mathscr{N}', \mathscr{D}', o')$ yaklaşık-lineer uzayına gömülen uzay denir. [3]

Teorem 4.1.1. Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört-nokta kapsayan bir U yaklaşık-lineer uzayı bir projektif düzlem içine gömülebilir.

İspat. Bu projektif düzlem, yaklaşık-lineer uzaya gerekli olan nokta ve doğruları ekleyerek inşa edilir. P2 hipotez gereği geçerlidir. Herhangi iki noktanın bir tek doğru üzerinde olduğu, iki doğrunun bir tek noktada kesiştiği ve doğruların en az ikişer noktaya sahip olduğuna mutlak surette emin olunmalıdır.

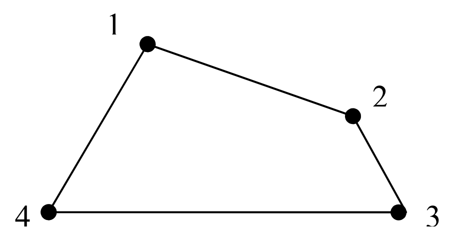
U nun bir doğru üzerinde olmayan bütün nokta çiftleri düşünülsün. Bu durumda U yu bir lineer uzaya götürmek için gerekli olan bütün 2-noktalı doğrular eklensin ve kesişmeyen doğrular düşünülsün. Böyle her doğru çiftine bir yeni nokta eklenir. Bir doğruyla birleştirilmeyen noktalar tekrar edilsin. Dolayısıyla 2-noktalı doğrular tekrar eklensin.

Bu metotla devam edilerek ve her adımda bulunan yaklaşık lineer uzayların birleşimini alarak bir projektif düzlem elde edilir. Gömme fonksiyonu aşağıdaki yolla tanımlanabilir.

U nun her noktası kendisine dönüşür. U nun her d doğrusu muhtemelen bazı yeni noktaları ve d yi kapsayan bir doğruya dönüşür. [3]

Örnek 4.1.2. $\mathscr{N} = \{1,2,3,4\}$ ve $\mathscr{D} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\}\}$ yaklaşık-lineer uzayı projektif düzlem içine gömülmek isteniyor.

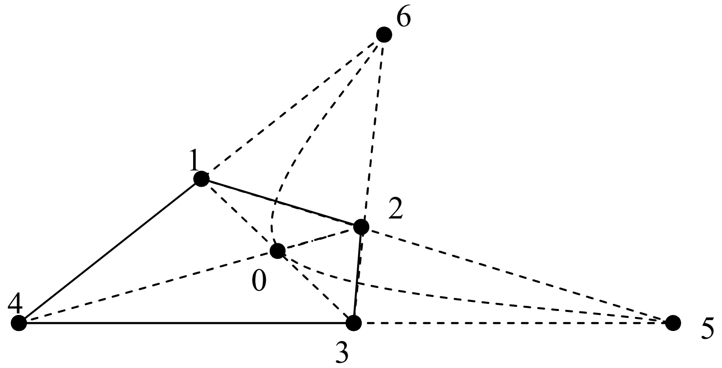
Doğrularımız $d_1 = \{1,2\}, d_2 = \{2,3\}, d_3 = \{3,4\}, d_4 = \{1,4\}$ olsun. Bu uzayın yaklaşık-lineer uzay olacağı aşikârdır. Şekil 4.1.1. de bu uzayı belirtelim.



Şekil 4.1.1. Dört noktalı dört doğrulu yaklaşık lineer uzayı

Teorem 4.1.1. gereğince bir doğru üzerinde olmayan bütün nokta çiftleri düşünülsün. Bu durumda $\cup$ yu bir lineer uzaya götürmek için gerekli olan bütün 2-noktalı doğrular eklensin ve kesişmeyen doğrular düşünülsün. Böyle her doğru çiftine bir yeni nokta eklenir. Bir doğruyla birleştirilmeyen noktalar tekrar edilsin.

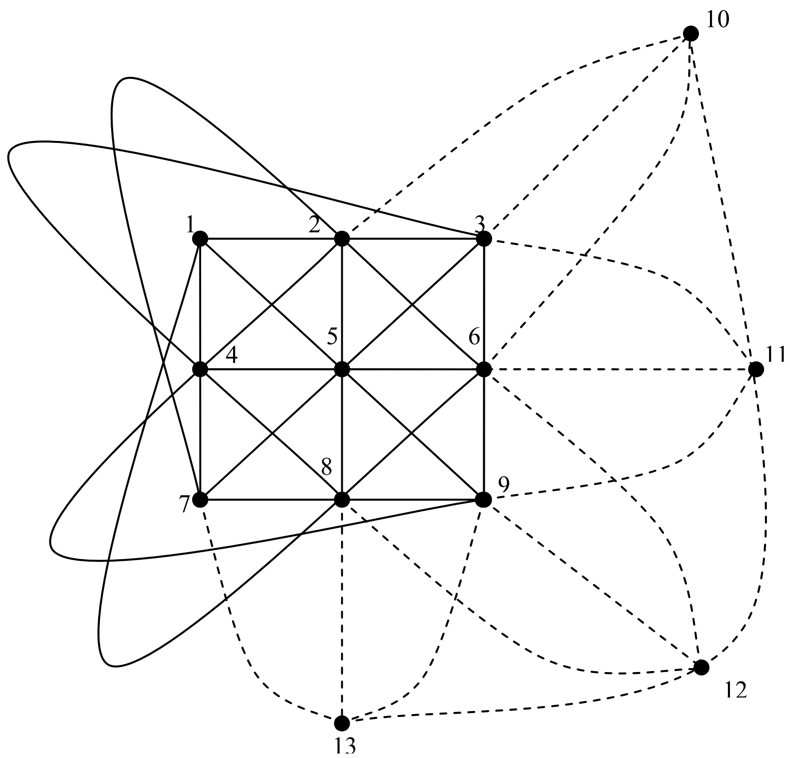
Üzerinde doğru olmayan nokta çiftlerini birleştirerek $d_5 = \{1,3,0\}$ ve $d_6 = \{2,4,0\}$ doğrularını elde edelsin. Önerme 4.1.2. gereğince d_1 ve d_3 doğrularına sonsuzda bir 5 noktası ekleyerek kesiştirilsin. Aynı yöntemle d_2 ve d_4 doğruları sonsuzdaki 6 noktasında kesiştirilsin. Elde edilen bu yeni noktaları birleştirilerek uzaya yeni bir $d_7 = \{6,0,5\}$ doğrusu eklenmesiyle yaklaşık lineer uzayı projektif düzleme gömülür.



Şekil 4.1.2. Dört noktalı yaklaşık-lineer uzayın projektif düzleme gömülmesi

Örnek 4.1.3. Şekil 3.1.2. deki uzayı projektif düzleme gömülmek isteniyor.

Aynı düşünceyle hareket edilirse Şekil 4.1.3. deki projektif düzlemi elde edilir.



Şekil 4.1.3. Dokuz noktalı lineer uzayın projektif düzleme gömülmesi

Genel olarak Önerme 4.1.1 de elde edilen projektif düzlem sonsuz mertebelidir. Fakat bu her zaman doğru değildir.

Tanım 4.1.4. Bir $\prod$ projektif düzlem $\prod'$ de noktalarının kümesi $\prod$ nin noktaları kümesinin bir alt kümesi olan ve her doğrusu $\prod$ nin bir doğrusunun bir alt kümesi olan bir projektif düzlem olsun. Bu durumda $\prod'$ ye $\prod$ projektif düzleminin bir alt düzlemi denir.[3]

Teorem 4.1.2. (Bruck, 1963) Eğer $\prod'$ sonlu bir $\prod$ projektif düzleminin bir alt düzlemi ise, eğer $\prod$ ile $\prod'$ nin mertebeleri n ve m ise bu takdirde $\prod \neq \prod'$ olur ki $n = m^2$ veya $m^2 + m \leq n$ dir.

İspat: Eğer $\prod'$ mertebesi $n = m^2$ olan bir sonlu $\prod$ projektif düzleminin mertebesi m olan bir alt düzlemi ise bu takdirde $\prod$ nin her doğrusunun $\prod'$ nün en az bir noktasını kapsadığı kolayca görülür.

Teorem 4.1.2. bazı projektif düzlemlerin başka projektif düzlemleri içinde var olması üzere önemli bazı kısıtlamalar verir. Mesela mertebesi 3 olan projektif düzlem Fano düzlemini kapsamaz. Çünkü $3 \neq 2^2$ ve $3 \geq 2^2 + 2$ dir.

Mertebesi 9 olan bir projektif düzlem yalnızca mertebesi 2 veya 3 olan projektif düzlemler kapsayabilir. Mertebesi 9 olan bir projektif düzlemin bu mertebeden projektif düzlemleri kapsamak zorunda olduğunu gösterilmediğine dikkat edilmelidir.[4]

Tanım 4.1.5. Bir $\prod$projektif düzleminin her noktası bir $\prod'$ alt düzleminin bir doğrusu üzerinde ise ve $\prod$ nin her doğrusu $\prod'$ ile en az bir noktada kesişiyorsa $\prod'$ ye $\prod$ nin bir Baer alt düzlemi denir. [2]

Önerme 4.1.4. Eğer $\prod'$, $\prod$ nin mertebesi m olan bir alt düzlemi ve eğer $\prod$ nin mertebesi $n = m^2$ ise bu takdirde $\prod'$, $\prod$ nin bir Baer alt düzlemidir. [2]

Önerme 4.1.5. Eğer $\prod'$, $\prod$ nin mertebesi m olan bir Bear alt düzlemi ise ve $\prod$ nin mertebesi n ise bu takdirde $n = m$ veya $n = m^2$ dir.

4.2. Projektif Uzaylar

Tanım 4.2.1. Herhangi bir iki-boyutlu alt uzayı bir projektif düzlem olan bir $\bigcup$ lineer uzayına bir projektif uzay denir. [3]

Önerme 4.2.1. Bir projektif uzayın herhangi bir alt uzayı bir projektif uzaydır.[3]

Ø, bir nokta, bir doğru aşikâr projektif uzay örnekleridir.

Önerme 4.2.2. Bir projektif uzayının her iki doğrusu aynı sayıda nokta kapsar.

İspat: d ve d' farklı doğrular olsunlar. Eğer onlar aynı düzlemdeyse sonuç hazırdır. Eğer değillerse $P \in d$, $P' \in d'$ olsun, $h = PP'$ olsun. Bu takdirde d ve h düzlemdeş olur. Dolayısıyla aynı sayıda nokta kapsar.

Eğer doğruların nokta sayısı sonlu ise bu sayı $k+1$ olsun. Bu durumda $\bigcup$ nun mertebesi k dir denir. k nın $\bigcup$ daki herhangi bir projektif düzleminde mertebesi olduğu açıktır. [3]

Önerme 4.2.3. $\bigcup$ projektif uzayının herhangi bir alt uzayı $\mathcal{V}$ ve $P \notin \mathcal{V}$ olsun. Bu takdirde $< \mathcal{V} \cup \{P\} >$ alt uzayı $Q \in \mathcal{V}$ olmak üzere bütün PQ doğruları üzerindeki noktaların kümesidir.

İspat: $\mathcal{X}$, P den geçen ve $\mathcal{V}$ yi kesen doğruların kapsadığı noktaların kümesi olsun. $\mathcal{X}$ in bir alt uzayı olduğu gösterilsin. Onun $\mathcal{V}$ ve P üzerindeki en küçük alt uzay olduğu açık olacağından sonuç çıkacaktır. $\mathcal{V} \neq \varnothing$ kabul edilsin. Q ve R, $\mathcal{X}$ in noktaları olsunlar. $QR \subseteq \mathcal{X}$ olduğunu göstermek zorunluluğu vardır. Eğer P, Q ve R doğrudaş ise $\mathcal{X}$ tanımından $QR = PQ \subseteq \mathcal{X}$ dir. P, Q ve R nin doğrudaş olmadığı farz edilsin. $PQ \cap \mathcal{V} = Q'$ ve $PR \cap \mathcal{V} = R'$ olsun ($P = Q'$ veya $R = R'$ hallerinin mümkün olduğuna dikkat edilsin). Şimdi $\prod =< \{P\} \cup \{Q\} \cup \{R\} >$ farklı olan Q' ve R' noktalarım kapsayan bir düzlemdir. Dolayısıyla $Q'R'$ doğrusu $\prod$ dedir. Aynı zamanda $\mathcal{V}$ dedir. Son olarak S, QR nin herhangi bir noktası olsun, PS doğrusu $\prod$ dadır. $\prod$ bir projektif düzlem $S \in QR$ olup PS doğrusu $Q'R'$ doğrusunu bir S' noktasında keser. Dolayısıyla $S' \in \mathcal{V}$ olur ve böylece $S \in \mathcal{X}$ olur. [3]

Önerme 4.2.4. Bir $\bigcup$ projektif uzayı değişme özelliğini sağlar.

İspat: X ile Y nin $\bigcup$ nun noktaları olduğunu ve $\mathcal{X}$ in $\bigcup$ nun noktalarının bir $X \notin < \mathcal{X} >$, $X \in < \mathcal{X} \cup \{Y\} >$ olduğu kabul edilsin. Genellikten bir şey kaybetmeden $<\mathcal{X}>=\mathcal{X}$ bir alt uzaydır kabulünde bulunulabilir. Önerme 4.2.3. gereğince $X \in <\mathcal{X} \cup \{Y\}>$ X in $P \in \mathcal{X}$ olmak üzere bir YP doğrusu üzerinde olmasını gerektirir ve aşikâr olarak $X \neq P$ kabul edilmelidir. Böylece Y, XP doğrusu üzerindedir. Böylece $Y \in <\mathcal{X} \cup \{X\}>$. [3]

Sonuç 1: Eğer $\mathcal{U}$ projektif uzayının boyutu sonlu n ise bu takdirde $\mathcal{U}$ nun hepsi aynı bir $(n-1)$-boyutlu alt uzayda olmayan $(n+1)$ tane noktasının kümesi $\mathcal{U}$ nun bir bazını oluşturur.

İspat: Önerme 4.2.4. ve 3.4.5. ten görülebilir.

Sonuç 2: n-boyutlu bir projektif uzayın hiper düzlemleri tam olarak $(n-1)$-boyutlu alt uzaylardır.

İspat: Önerme 4.2.4. ve 3.4.5. den çıkar.

$\mathcal{H}$, $\mathcal{U}$ projektif uzayının bir hiper düzlemi olsun. Önerme 4.2.1. gereğince $\mathcal{H}$ bir projektif uzaydır.

Şimdi n-boyutlu k merteben bir projektif uzayın (projektif n-uzay) noktalarının sayısını belirlemek mümkündür. İki boyutlu bir projektif uzayın (bir projektif düzlemin) mertebesi k iken nokta sayısının k^2+k+1 olduğu hatırlanırsa üç boyutlu bir projektif $\mathcal{U}$ uzayını, yani hepsi aynı düzlemde olmayan dört nokta ile üretilen projektif uzayı düşünülsün. Bu noktalar P, Q, R ve S olsun. $\mathcal{V}=<\{P\}\cup\{Q\}\cup\{R\}>$ bir düzlem olsun. Önerme 4.2.3. ve 4.2.4. bize $\mathcal{U}=<\mathcal{V}\cup\{S\}>$ nin $T \in \mathcal{V}$ olmak üzere ST doğruları üzerindeki tüm noktaların kümesi olduğunu söyler. $\mathcal{V}$ de k^2+k+1 nokta bulunduğundan $\mathcal{U}$ da toplam $(k^2+k+1)k+1=k^3+k^2+k+1$ nokta vardır.

Tümevarımla n-boyutlu bir $\mathcal{U}$ projektif uzayının mertebesi k iken nokta sayısını $k^n+k^{n-1}+...+k+1$ olduğu gösterilir. $\mathcal{U}=<\{P_1\}\cup\{P_2\}\cup...\cup\{P_{n+1}\}>$ olsun ve

$\mathcal{H} =< \{P_1\} \cup \{P_2\} \cup ... \cup \{P_n\}$ $(n-1)$-boyutlu bir alt uzayı olsun. Önerme 4.2.4. gereği tümevarımı kullanarak $\mathcal{H}$ nın nokta sayısını $k^{n-1} + k^{n-2} + ... + k + 1$ bulunur. Bu takdirde Önerme 4.2.3. gereğince $\mathcal{U}$ nun nokta sayısı $(k^{n-1} + k^{n-2} + ... + k + 1)k + 1 = k^n + k^{n-1} + ... + k + 1$ dir. [11]

Önerme 4.2.5. Mertebesi k olan n-boyutlu bir projektif uzayın noktalarının sayısı $n \geq 0$ olmak üzere $k^n + k^{n-1} + ... + k + 1$ dir.

İspat: $n = 0$ ve $n = 1$ hallerinde ispatın açık olduğu görülür. [3]

Önerme 4.2.6. Bir $\mathcal{U}$ projektif uzayının bir $\mathcal{H}$ has alt uzayının bir hiper düzlem olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{U}$ nun her doğrusunun $\mathcal{H}$ yi en az bir noktada kesmesidir.

İspat: Her doğrunun $\mathcal{H}$ yi kestiği kabul edilsin ve $P \notin \mathcal{H}$ olsun. Bu takdirde $Q \neq P$ ler için hipotez gereği PQ doğrusu $\mathcal{H}$ yi keser. Bu yüzden herhangi bir $P \notin \mathcal{H}$ için $\mathcal{U} \subseteq < \mathcal{H} \cup \{P\} >$ veya $\mathcal{U} = < \mathcal{H} \cup \{Q\} >$ dir. Eğer $\mathcal{H}$ bir hiper düzlem olmasaydı $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ olacak şekilde bir $\mathcal{V}$ alt uzayı bulabilecektik. Bu takdirde $P \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{H}$ seçersek $< \mathcal{H} \cup \{P\} > \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ bulacaktık ki bu söylediklerimizle çelişir. Bu yüzden $\mathcal{H}$ bir hiper düzlemdir.

$\mathcal{H}$ nin bir hiper düzlem olduğu kabul edilsin. Önerme 4.2.3. gereği P, $\mathcal{H}$ de olmayan belli bir nokta ve $Q \in \mathcal{H}$ olmak üzere PQ formundaki doğrular üzerinde olan noktaların kümesi bir alt uzay olmasını gerektirir. $\mathcal{H}$ bir hiper düzlem olduğundan $< \mathcal{H} \cup \{P\} > = \mathcal{U}$ dur. Dolayısıyla bütün doğrular $\mathcal{H}$ yi keser.

Projektif uzaylarda projektifi düzlem gibi birçok güzel özelliğe sahiptir. Bu özellikleri bulmak için projektif 3-uzayları çalışmak ve sonra sadece ifadeleri ve ispatları genelleştirmek genellikle yeterli olmaktadır. [3]

Önerme 4.2.7. Bir $\bigcup$ projektif 3-uzayının herhangi iki düzlemi bir doğru boyunca kesişir.

İspat: $\prod$ ve $\prod'$ $\bigcup$ nun farklı düzlemleri olsunlar. P, $\prod \setminus \prod'$ bir noktası ve d_1 ile d_2 $\prod$ nin P den geçen doğruları olsunlar. $\prod'$ Önerme 4.2.4. ün ikinci sonucu gereğince $\bigcup$ nun bir hiper düzlemidir. Önerme 4.2.6. gereğince d_1 ile d_2 $\prod'$ yi keserler. Arakesitler noktaları farklı olmalıdır. Bu yüzden bir doğru üretir ki bu doğru $\prod$ ile $\prod'$ nün her ikisindedir. [3]

4.3. Afin Düzlemler ve Afin Uzaylar

Aşağıdaki özelliklere sahip olan bir A lineer uzayına bir Afin Düzlem denir.

Al: Bir d doğrusuna, dışındaki bir P noktasından bir tek paralel çizilir.

A2: Doğrudaş olmayan üç nokta vardır. [3]

Eğer d ve d' bir afin düzlemin doğruları ve $d = d'$ veya d ile d' kesişmiyorsa bu doğrular paraleldir denilir ve $d \,//\, d'$ yazılır.

Önerme 4.3.1. Eğer $\bigcup$ birden fazla doğrusu olan bir lineer uzay ve her $P_i \notin d_j$ için $c_{ij} = b_i - 1$ ise bu takdirde $\bigcup$ bir afin düzlemdir. [3]

İspat: Açıktır.

Aşağıdaki önermeler genel bir afin düzleminin özellikleri ile ilgilidir, ispatlar için Batten'e bakılabilir.

Önerme 4.3.2. Her doğrunun en az üç noktalı olduğu bir A afin düzleminin boyutu 2 dir.

Önerme 4.3.3. Her sonlu A düzlemi için aşağıdaki şartlara uyan bir $k \geq 2$ tamsayı vardır. Bu tamsayıya A nın mertebesi denir.

1. A daki noktaların toplam sayısı k^2 dir.

2. A daki doğruların toplam sayısı $k^2 + k$ dir.

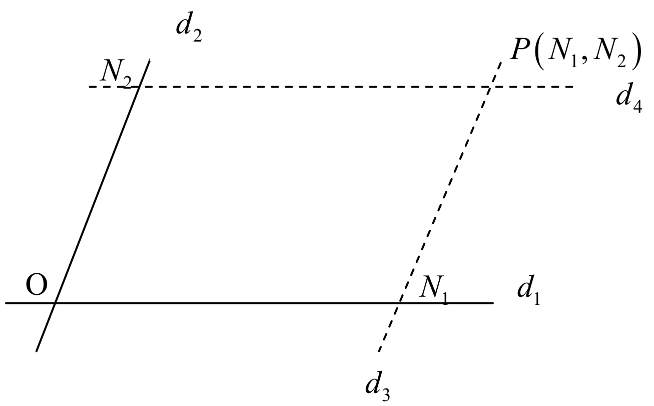
3. A nın her noktası tam olarak $k+1$ tane doğru üzerindedir.

4. A nın her doğru üzerinde tam olarak k tane nokta bulunur.

İspat: Herhangi bir d doğrusu ve d'de olmayan herhangi bir N noktası seçilsin. d'nin üzerindeki nokta sayısına k kabul edilerek N'den geçen doğruları sayılsın. A1'den dolayı bu doğruların sadece biri d ile kesişmez. Lineer uzay olmasından dolayı da N'den geçen diğer tüm doğrular d ile tek bir noktada kesişir ve d'nin üzerindeki her nokta N'den geçen bir doğru belirtir. Dolayısıyla N'den, biri paralel diğerleri d'yi kesen toplam $k+1$ tane doğru çizilir.

Yukarıda kanıttan şu çıkar: N'den geçmeyen her doğruda tam k tane nokta vardır ve d'de bulunmayan her noktadan $k+1$ tane doğru geçer. Şimdi d_1 ve d_2 iki doğruysa, bu iki doğrunun üzerinde olmayan bir nokta alalınsın ki böyle bir noktanın varlığını A2'den biliyoruz. Demek ki d_1 ve d_2'de aynı sayıda nokta var.
(N'den geçen doğru sayısından bir eksik) Bu sayıya k diyelim. Böylece her noktadan $k+1$ tane doğru geçtiği kanıtlanmış olur.

O adı verilen noktada kesişen iki d_1 ve d_2 doğrusu alınsın. $N_1 \in d_1$ ve $N_2 \in d_2$ olsun. N_1'den geçen ve d_2'ye paralel olan doğruya d_3 ve N_2'den geçen d_1'ye paralel olan doğruya d_4 diyelim. d_3, d_4'e paralel olamaz. Bu d_3 ve d_4 doğrularının kesişim noktasına $P(N_1, N_2)$ diyelim. Böylece $N_1 \in d_1$ ve $N_2 \in d_2$ olmak üzere, her (N_1, N_2) nokta çiftinden düzlemimizin bir $P(N_1, N_2)$ noktasını elde ettik. Bu bize $d_1 \times d_2$ kümesinden noktalar kümesine giden bir fonksiyon verir. Bu fonksiyon birebir ve örtendir, yani her $P(N_1, N_2)$ noktası bu yolla tek bir $(N_1, N_2) \in d_1 \times d_2$ nokta çiftinden elde edilirler. Demek ki düzlemin nokta sayısı $|d_1 \times d_2| = |d_1| \times |d_2| = n^2$ 'dir.



Şekil 4.3.1. Afin düzlem için bir çizim

Son olarak doğrular sayılsın: Düzlemin k^2 noktası arasından seçilen her iki değişik bize bir doğru verir. Seçebileceğimiz toplam iki nokta sayısı:

$$\binom{k^2}{2} = \frac{k^2\left(k^2-1\right)}{2}$$

dır. Ama o iki nokta aynı doğru üzerinde seçilmişse o zaman aynı doğru elde edilir. Bir doğru üzerinde seçilebilecek farklı nokta çifti sayısı da,

$$\binom{k}{2} = \frac{k\left(k-1\right)}{2}$$

dir. Dolayısıyla düzlemdeki doğru sayısı,

$$\frac{\binom{k^2}{2}}{\binom{k}{2}} = \frac{\frac{k^2\left(k^2-1\right)}{2}}{\frac{k\left(k-1\right)}{2}} = k\left(k+1\right) = k^2 + k \quad \text{dir.}$$

A da bulunan nokta ve doğru sayısı sonlu olduğunu gösterelim. Buna karşın A daki nokta ve doğru sayısı sonlu olmasa bile teorem anlamsız değildir.

Örneğin, bu halde 4. herhangi iki doğru üzerindeki noktalar kümesini arasında; 3. de herhangi iki noktadan geçen doğrular cümlesi arasında birebir eşlemeler kurulabileceğini gösterir.[9]

Teorem 4.3.1: Bir A afin düzlemi bir $\prod$ projektif düzlemi içine A nın noktaları, d $\prod$ nin bir doğrusu olmak üzere $\prod / d$ nın noktaları olacak şekilde yerleştirilebilir. Eğer A nın mertebesi k ise bu takdirde $\prod$ nin mertebesi de k dır. [3]

Teorem 4.3.2. $\prod$ herhangi bir projektif düzlem ve d de $\prod$ nin doğrusu olsun. Bu takdirde $\prod \setminus d$ bir afin düzlemdir.[3]

Afin düzlemlerde dönüşümler için Batten'e bakılabilir.

Birçok afin uzay tanımı vardır. Biz Batten de verilen aşağıdaki tanımı kullanacağız.

Tanım 4.3.1. Bir hiper düzlemi atılan bir projektif uzaya bir afin uzay denir.[5]

Önerme 4.3.4. Bir afin uzayda bütün doğrular aynı sayıda nokta kapsar.[3]

Önerme 4.3.5. Bir n-boyutlu k mertebeli projektif uzaydan elde edilen A afin uzayının toplam nokta sayısı k^n dir. [3]

Önerme 4.3.6. Eğer A afin uzayı n-boyutlu bir $\bigcup$ projektif uzayından elde edilmişse ve eğer $\bigcup$ nin mertebesi 2 değil ise bu takdirde A nın boyutu n dir. [3]

Aşağıdaki teoremin ispatı Batten'den alınmıştır.

Teorem 4.3.3. Mertebesi 2 olmayan bir A afin uzayının iki-boyutlu her uzayı bir afin düzlemdir.

İspat: A nın doğrudaş olmayan üç nokta alınsın. $A = \bigcup \backslash H$ olsun. Bu üç nokta $\bigcup$ da bir $\prod$ projektif düzlemi üretir. d ve d' bu üç noktadan oluşturulan üçgenin iki kenarını teşkil eden farklı doğrular olsun. $P = [d]$ ve $Q = [d']$ $\prod$ nin noktaları olsun. $\prod$ de $d_\infty = PQ$ olsun. Bu üç noktanın $\prod \backslash d_\infty$ u ürettiği gösterilsin. X bu kümenin üçgenin kenarları üzerinde olmayan bir nokta olsun. A nın mertebesi 2 den büyük olduğundan $\prod$ de X den geçen en az dört doğru vardır. X ve $d \cap d'$ den geçen doğru çıkarıldığında X ve $[d]$ den geçen doğru ile X ve $[d']$ den geçen doğru X den geçen bunlardan farklı herhangi bir doğru d ve d' yü farklı noktalarda keser. Bu yüzden A da $X \in < d \cap d' >$ dır. Dolayısıyla iki boyutlu uzay gerçekte $\prod \backslash d_\infty$ dur. İspatın geri kalanı kolayca çıkarılır. [3]

Buckenhaut (1969) aşağıdaki teoremi ispatlamıştır. Biz sadece ifademizi yazıyoruz.

Teorem 4.3.4. L aşağıdaki özelliklere sahip bir lineer uzay olsun.

1) L nin her düzlemi bir afin düzlemdir.

2) L de en az doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

3) L nin her doğrusunun en az dört noktası vardır. Bu takdirde L bir afin uzaydır.

Böylece mertebesi en az dört olan afin uzaylar yukarıdaki gibi karakterize edilebilir.[5]

BÖLÜM 5. SONUÇLAR

Yaklaşık lineer uzaylar ile lineer uzaylar karşılaştırıldığında lineer uzayların daha homojen olduğu görülür. Her iki uzayda da ‘‘ Herhangi doğrunun en az iki noktası vardır.’’ Aksiyomu geçerlidir. Ancak yaklaşık lineer uzaylarda iki doğrunun bir arakesit noktasının bulunması zorunlu değilken, lineer uzaylarda iki doğrunun bir ortak noktası vardır. Böylece lineer uzaylarda mademki iki noktadan bir doğru geçmektedir, buna benzer dual ifade olarak iki doğrunun niçin bir ortak noktası olmasın. Böylece lineer uzaylar daha da homojen hale gelmektedir. Dual kavramını bile yaklaşık lineer uzaylarda ifade etmek, lineer uzaylarda tanımlamaktan daha güç yapılabilmektedir.

Yaklaşık lineer uzaylarda doğru regülerliği nokta regülerliğini gerektirmezken lineer uzaylara doğru regülerliğini gerektirir. Ancak bunun tersine lineer uzaylarda nokta regülerliği doğru regülerliğini gerektirmez.

Üzerinde bulunma matrisine bakarak uzay hakkında bazı bilgiler edinilebilir. Bir satır eşlenen noktadan geçen doğru sayısı veya bir sütuna eşlenen doğru üzerindeki nokta sayısı üzerinde bulunma matrisinden sayılabilir. Üzerinde bulunma matrisinde üzerinde iki doğrudan az doğru olan noktalar atılarak matrisin tranzpozu alınırsa bu uzayın duali bulunmuş olur.

Yaklaşık lineer uzayların daima lineer uzaylara gömülmesi söz konusudur. Yani bir yaklaşık lineer uzaya uygun noktalar ve doğrular eklenerek yapılan genişletilmelerle lineer uzaylara geçilebilir. Tersine bir lineer uzaydan uygun bir doğruyu üzerindeki noktalarla birlikte çıkarıp almakla yaklaşık lineer uzaylara da geçilebilmektedir. Aynı şekilde yaklaşık lineer uzayları ve lineer uzayları projektif düzleme de gömülmesi söz konusudur.

KAYNAKLAR

[1] AYTAŞKIN, Ç., Sonlu Sirküler Uzayların Kombinetöryel Yapısı Y. Lisans, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001

[2] BAER, R., Polarities in Finite Projective Planes, Bull. Am. Soc., pp.52,77-93, 1946

[3] BATTEN, L. M., Combinatorics of Finite Geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 1986

[4] BRUCK, R. H., Existence Problems for Classes of Finite Projective Planes, Lecture Notes, Canadian Mathematics Congress, Saskatoon, 1963

[5] BUEKENHOUT, F., Une Céractérisation des Espaces Affins Basée Sur la Notion de Droite, Math. pp. 111, 367-371, 1969

[6] BUEKENHOUT, F., DEHERDER, R., Espaces Linéaires Finis a Plans Isomorphes, Bull. Soc. Math. Belg. 4, 345-359, 1971

[7] BÜKE, M., Analitik Geometri II. Temel Kavramlar ve Lineer Şekiller, 3, Fen Fakültesi Döner Sermaye Basımevi, İstanbul, 1970

[8] CURTİS, C. W., Linear Algebra, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1967

[9] KAYA, R., Projektif Geometri, 1, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 1978

[10] Keyif, M.Lineer Uzaylar ve Projektif Düzlemler, Y. Lisans, Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 1994

[11] Matematik Dünyası, Kış, Yıl:13, Sayı:4, 2004

[12] STEVENSON, F. W., Projective Planes, W. H. Freeman an Company, San Francisco, 1972

[13] www.matder.org.tr/bilim/rkggg.asp?ID=71

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Sakarya'da doğdu. İlköğretimini Sakarya Atatürk İlköğretim Okulu'nda tamamladı. Orta öğretimini Sakarya Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 1998 yılında Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı ve lisans eğitimine başladı. 2003 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde yüksek lisans eğitimi hakkı kazandı.

Ankara Vatan Dershaneleri, Ankara Analitik Dershanesinde çalıştı. 2003 yılında Sakarya Dağdibi Berna Yılmaz İlköğretim Okuluna matematik öğretmeni olarak atandı. Dağdibi Berna Yılmaz İlköğretim Okulu, Kurtuluş İlköğretim Okulu'nda matematik dersi okutuyor.