T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

n-KİŞİLİ OYUNLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin SIRTAŞ

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAMAN**

Temmuz 2006

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

n-KİŞİLİ OYUNLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin SIRTAŞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 02 / 08 /2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin Kocaman	Prof. Dr. Abdullah Yıldız	Prof. Dr. Yılmaz Özkan
Jüri Başkanı	Üye	Üye

TEŞEKKÜR

Teknolojinin büyük bir hızla geliştiği çağımızda oyunlar teorisi matematiğin ilginç bir konusu haline gelmiştir. Birçok ekonomik ve iktisadi probleme çözüm sunan bu konu sadece matematikçilerin ilgi alanında değildir. Araştırma boyunca pek çok yabancı iktisat ve ekonomistlerinde bu konuyla ilgili pek çok yayın ortaya koyduklarını gördüm. Ancak, maalesef ülkemizde henüz üzerinde yeteri kadar araştırma yapılmış olduğunun farkına vardım. Ülkemizin aydınlık yarınlarında genç bilim adamı ve akademisyenlerinin bu konuya daha çok ilgi göstereceğini ümit ederim.

Bu çalışmamda benden yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KOCAMAN ‘a teşekkür ederim.

Ayrıca tez çalışma safhalarında bilgilerini ve zamanını harcayan Selahaddin Ertaş ve Sadi Öksüz arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Oyunlar teorisi gibi çaplı bir konuda manevi desteklerini esirgemeyen ve çalışma başından sonuna kadar beni motive eden kıymetli eşim Aysun Sırtaş hanımefendiye ve aileme teşekkür ederim.

Hüseyin SIRTAŞ

Temmuz 2006

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR…………………………………………………………………….ii
İÇİNDEKİLER…………………………………………………………………iii
SİMGELERVE KISALTMALAR LİSTESİ………………………………………v
ŞEKİLLER LİSTESİ…………………………………………………………..vii
TABLOLAR LİSTESİ………………………………………………………..viii
ÖZET…………………………………………………………………………….. ix
SUMMARY……………………………...……………………………….. …x

BÖLÜM 1.
GİRİŞ ………………………………………………………………………...1

BÖLÜM 2.
İKİ KİŞİLİK OYUNLAR VE ÇÖZÜMLERİ ……………………….....……...…..4
2.1. Sıfır Toplamlı İki Kişilik Oyunlar………….....................................4
2.2. Sıfır Toplamlı İki Kişilik Oyunların Çözümü…………..…………..6
2.3. Kesinlikle Saptanmış Oyunların Çözümü…….................................8
2.4. Karma Stratejisi Vektörünün Bulunması…………………...…...12
2.5. İki Stratejili Oyunlarda Karma Strateji Vektörünün Bulunması…..15
2.6. Çok Stratejili İki Kişilik Oyunların Çözümü.……….………………25
2.6.1. Cebirsel çözüm……………………...……….…………….28
2.6.2. Doğrusal programlama ile çözüm ……...…….…………..30

BÖLÜM 3.
n-KİŞİLİ OYUNLAR……………………………………………...…………….38
3.1. Ortaksız Oyunlar ………………………………………….… 38
3.2. Ortaklı Oyunlar ……………………………………….… 38
3.3. Baskınlık, Stratejik Denklik ve Normalleşme……….…………….…...43

3.4. Kararlı Kümeler, Çekirdek ve Çeşitli Oyun Problemleri………..….48
3.5. Dengeli Koleksiyonlar…………………………………………….....57

BÖLÜM 4.
n-KİŞİLİ OYUNLAR İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇÖZÜM TEKNİKLERİ……………..…………………………………………………………71

BÖLÜM 5.
SONUÇLAR VE ÖNERİLER…………….…………………………..…………….92

KAYNAKLAR…………………………………………………………………...94

ÖZGEÇMİŞ…………………………………………………………………………95

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\geq$	: büyük eşit
$\leq$	: küçük eşit
$<$	: küçük
$>$	: büyük
A,B,C	: oyuncular
a_i, b_i	: stratejiler
$\in$	: elemanıdır
$\notin$	: elemanı değil
Σ	: toplam sembolü
$\neq$	: eşit değil
Enb( )	: en büyük
Enk( )	: en küçük
$[x_1, \ldots, x_n]$	: n boyutlu vektör
x*, y*	: karma vektör
$A_{m \times n}$	: m x n boyutlu vektör
N	: tüm oyuncular kümesi
v( )	: karakteristik fonksiyon
$\succ$	: baskınlık
$\leftrightarrow$	: izomorfizm
$\cup$	: birleşim
$\cap$	: kesişim
$\subset$	: altküme
$\supset$	: kapsar
C( )	: çekirdek
maks	: maksimum
min	: minumum
DP	: doğrusal programlama

$\binom{n}{s}$: n nin s li kombinazonu

S_i : i.inci oyuncunun stratejiler kümesi

H_i : i.inci oyuncunun ödeme fonksiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1: Örnek 2.3. için çözüme yardımcı bir şekil …...…………………….. 17

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 2.1. Sıfır toplamlı iki kişilik oyun kazanç matrisi …………………… 5
Tablo 2.2. Örnek 2.1 kazanç matrisi ………………………………………... 7
Tablo 2.3. Örnek 2.1 indirgenmiş kazanç matrisi …………………………… 8
Tablo 2.4. Sıfır toplamlı iki kişilik oyun kazanç matrisi …………………… 8
Tablo 2.5. İki kişilik bir oyuna ait katkı matrisi …………………………… . 10
Tablo 2.6. Örnek 2.3 kazanç matrisi ………………………………………… 13
Tablo 2.7. Örnek 2.3 kazanç matrisi ………………………………………… 15
Tablo 2.8. Ödemeler matrisi …………………………………………………. 19
Tablo 2.9. Örnek 2.4 ödemeler matrisi ……………………………………… 21
Tablo 2.10. Örnek 2.5 kazanç matrisi ………………………………………… 23
Tablo 2.11. Örnek 2.5 indirgenmiş kazanç matrisi …………………………… 24
Tablo 2.12. Örnek 2.6 kazanç matrisi …………………………………………. 29
Tablo 2.13. Örnek 2.7 kazanç matrisi …………………………………………. 34
Tablo 2.14. Örnek 2.7 genişletilmiş ödemeler matrisi ………………………… 34
Tablo 2.15.1. Örnek 2.7 simpleks tablosu ……………………………………….. 35
Tablo 2.15.2. Örnek 2.7 son simpleks tablosu …………………………………… 36
Tablo 4.1. İki kişilik sonlu stratejili oyun ödeme matrisi……………………... 71
Tablo 4.2. Örnek 4.1. kazanç matrisi…………………………………………… 72
Tablo 4.3. Örnek 4.2 kazanç matrisleri……………………………………….... 73
Tablo 4.4. Üç kişili oyun için kazanç matrisleri…………………………...……. 79

ÖZET

Anahtar kelimeler: Oyunlar teorisi; Oyunlar; n-Kişili oyunlar.

Çatışma-rekabet durumlarının analizini yapmak amacıyla "oyunlar teorisi" adı altında özel matematik teknikler geliştirilmiştir.

Teorinin amacı rekabet içinde bulunan kişi ya da gruplar için rasyonel hareket yollarını incelemek gruplardan birinin kazanmasını sağlamaktır.

Bu tezde; ilk olarak, günümüzde daha da önem kazanan oyunlar teorisinde iki kişilik oyunlar ve bu oyunların çözüm yolları verildi. Daha sonra n-kişili oyunlarda ortaklı ve ortaksız durumlar görüldü.

Detayda n-kişili oyunlarda baskınlık, stratejik denklik, normalizasyon, kararlı kümeler ve çekirdek incelendi. Birkaç oyun problemi çözülerek son bölümde dengeli koleksiyonlardan bahsedildi.

Tezin genelinde n-kişili oyun tanıtılmaya çalışıldı ve son bölümde çözüm için iki yaklaşım önerildi.

n-PERSON GAMES

SUMMARY

Keywords: Game theory; n-Person game; Games.

Special mathematics techniques called Game Theory are improved making clash-competition situation's analysis.

The aim of the theory is to examine rational way for the person or group which is in the competition and make one of them win.

In this thesis is given two person games and solution of the games. Situations are examined in n-person games.

In details domination, strategic equivalence, normalization the core and stable sets in n-person games are mentioned.

In the last section, a few game problems are solved and balanced collections are examined.

Generally, n-person game (theory) is showed in this thesis. And two aspects are suggested for solution in final part of this thesis.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

İki veya daha fazla oyuncu arasında karşılıklı rekabet söz konusu olduğu zaman, tarafların stratejileri bilinmediğinde veya hangi strateji hangi olasılıkla uygulayacakları verilmediğinde, belirsizlik ortamında özel bir sorun karşımıza çıkar. Böyle durumlarda, bir oyuncunun uygulanabilir stratejiler içinden en iyisini seçme işlemi, karşılaştığı durumlara göre olmayıp, başka bir oyuncunun kendisine karşı uygulayabileceği stratejilere bağlıdır. Bu nedenle oyuncuların her biri kendisine dönük diğerine ters bir eniyileme eğilimi içinde olduklarından aralarında bir "oyun" vardır denir.

Oyunlar teorisi, geliştirdiği kavram, genelleme ve tekniklerini doğrudan gerçek hayatta karşılaşılan olaylara, uygulamanın yanında, karar vericilerin içinde bulundukları ortam ve koşulları yeterince kavrama, böylece geliştirecekleri stratejileri ona göre yönlendirmelerinde bir bakış, bir yaklaşım, bir temel düşünme biçimi olarak görmekte yarar vardır.

Oyun kuramında esas olan, özel koşullarla karşı karşıya gelmiş bulunan oyuncuların, biri diğerini izleyen dizisel karar verme olanağına sahip olmalarıdır. Böylece oyunun belirli bir bölümünde, oyuncuların davranışlarında (yöntem belirlemeleri açısından) bir durgunluk olur. Böylece taraflar, biri diğerine karşı belirleyip uygulayacakları en iyi yöntemler konusunda belirsizlik ortamından belirli veya risk ortamına geçmiş olurlar.

Oyunlar teorisinin geliştirdiği kavram ve teknikler, oyun ve katılanların uygulayabileceği stratejiler aşağıdaki özelliklerin gerçekleştiği altı durumda uygulanır.

i) Oyuncuların veya grupların uygulayabilecekleri, bilinen farklı stratejileri vardır.

ii) Oyuncular, her evrede zorunlu olarak belirlenen stratejilerden birini seçmelidirler.

iii) Oyuncular, kendi ve diğer oyuncuların stratejilerini çok iyi bilmektedirler bilmemekte, fakat bu durumlarda bazı değerlendirmelerde bulunabilmektedirler.

iv) Oyuncuların kazanç yada kayıpları, yalnız kendilerine bağlı değildir. Diğer oyuncuların stratejilerine de bağlıdır.

v) Oyuncuların kendi stratejilerine bağlı olarak diğer tarafın uygulayabilecekleri stratejilere göre elde edecekleri kazanç veya kayıpları olup, oyunun kazanç-kayıp göstergeleri taraflarca bilinmektedir.

Oyunlar, oyuncuların sayılarına ve kazanç- kayıp durumuna göre aşağıdaki şekilde sınıflandırılabilir:

Oyunlar,

1) Oyuncu sayısına göre;
a) İki kişilik oyunlar,
b) Çok (n-kişili) kişili oyunlar,

2) Kazanç –kayıb’a göre;
a) Sıfır toplamlı oyunlar,
b) Sıfır toplamsız oyunlar,

3) Strateji sayısına göre;
a) Sonlu oyunlar,
b) Sonsuz oyunlar.

Oyun türleri:

- İki kişilik sıfır toplamlı,
- İki kişilik sıfır toplamsız,
- n-Kişili sıfır toplamlı,
- n-Kişili sıfır toplamsız

şeklinde sınıflandırılabilir.

Sıfır toplamsız n-kişili (n>2)oyunlar için matematiksel modelleme ve çözüm teknikleri yeterince geliştirilmemiş olup oyun teorisi hakkında başlangıç bilgiler vermek amacıyla sonlu stratejili sıfır toplamlı iki kişilik oyunlar üzerinde durulacaktır.

BÖLÜM 2. İKİ KİŞİLİK OYUNLAR VE ÇÖZÜMLERİ

2.1. Sıfır Toplamlı İki Kişilik Oyunlar

Bu tür oyunlarda oyuncular kişi birey (grup) olup birinin stratejisine bağlı olarak elde edeceği kazanç, diğerinin kaybına eşittir.

İki kişilik bir oyunda , taraflar A , B ve bunların uygulayabilecekleri stratejiler;

a_i : A' nın stratejileri, $i=1,2,3,\ldots,m$
b_j : B' nin stratejileri, $j=1,2,3,\ldots,n$

iken A, i' inci stratejiyi uyguladığı zaman B, j 'inci stratejisini benimsediğinde;

K_{ij} : A' nın kazancı
$-K_{ij}$: B' nin kazancı

olsun.

Bu durumda, oyunun kazanç matrisi

Tablo 2.1: Sıfır Toplamlı İki Kişilik Oyun Kazanç Matrisi

				B				
		b_1	b_2	b_3	.	.	.	b_n
	a_1	K_{11}	K_{12}	K_{13}	.	.	.	K_{1n}
	a_2	.						.
A	a_3	.						.
	.	.						.
	.	.						.
	.	.						.
	a_m	K_{m1}	.	.	.	.	.	K_{mn}

şeklinde olur.

Oyunun sıfır toplamlı olmaması durumunda, her iki oyuncu için ayrı ayrı kazanç-kayıp değerlerinden oluşan karar matrisi söz konusudur.

Sıfır toplamlı oyunun karar matrisindeki göstergeler, karşı gelen stratejilere bağlı olarak, tarafların kazanç veya kayıplarını göstermektedir.

Eğer;

$K > 0$ ise A’ nın kazancı B’ nin kaybı ,
$K < 0$ ise A’ nın kaybı B’ nin kazancı

söz konusudur.

İki kişilik oyunlara; genel olarak dikdörtgen oyun veya A’ nın uygulanabilir strateji sayısı m, B’ nin uygulanabilir strateji sayısı n iken, (m x n) boyutlu oyunda denmektedir [2].

2.2. Sıfır Toplamlı İki Kişilik Oyunun Çözümü

İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda, her iki tarafın seçeceği en iyi stratejileri ve karşı gelen oyunun değerlerini bulma işlemlerine oyunun çözümü denir.

İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunun çözümü sözü edilen bu iki duruma göre incelenir.

Çözüm işlemlerine geçmeden önce oyunun çözümüne doğrudan yansıyan aşağıdaki özel durum üzerinde durmakta yarar vardır. Konuya geçmeden önce şu tanımlar üzerinde duralım.

Tanım 2.1: Bir oyun matrisinde, bütün j' ler ve $i \neq r$ için $K_{ij} \geq K_{rj}$ ise, birinci oyuncunun i' inci stratejisi r' inci stratejisine baskındır denir. Baskın stratejiye, egemen stratejide denir.

Her iki oyuncu için de baskın stratejiler araştırılır. Eğer tarafların baskın stratejileri bulunursa, çözüme indirgenmiş oyun matrisinden başlanır[2].

Aşağıdaki örneği inceleyelim:

Örnek 2.1: Aynı bölgede mallarını pazarlayan iki firma, sürekli biri diğerinin müşterilerini kazanmak için uğraşmaktadır. Bu amaçla firmalar prim ve reklam gibi özel satış arttırıcı çabalara girmektedirler. Yapılan araştırma sonuçlarına göre, uygulanan özel çabalara bağlı olarak, karşılıklı müşteri kazanç ve kayıpları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

Tablo 2.2: Örnek 2.1. Kazanç Matrisi

		B Firması		
	Stratejiler	**TV. Reklam**	**Radyo Reklam**	**Özel Prim**
A Firması	**TV.Reklam**	16	12	-5
	Radyo Reklam	8	-2	-4
	Özel Prim	4	-2	6

Yukarıdaki olay, A ve B firmaları arasında bir oyun olup, reklam özellikleri ve ortamlarıyla, prim sistemleri, bunların uygulayabilecekleri stratejilerdir. Birinin kazanacağı müşteriyi diğeri kayıp edeceğinden sıfır toplamlı bir oyun söz konusudur. A firması TV reklamı uyguladığında eğer B firması da TV reklamı uygularsa, A 16 müşteri kazanacak, B 16 müşteri kayıp edecektir (-16 kazanç). Eğer A birinci stratejiyi uyguladığında B özel prim sistemine giderse, A 5 müşteri kayıp ederken (-5 kazanç), B -5 kayıp göstergesiyle 5 müşteri kazanacaktır.

A firmasının uygulanabilir stratejileri biri diğerine baskın değildir. B firması için kazançlar oyun matrisindeki göstergelerin ters işaretlileri olduğundan, B' nin birinci stratejisi için,

$$\begin{array}{lcl} -16 < -12 & & 12 < 16 \\ -8 < 2 & \text{veya} & -2 < 8 \\ -4 < 2 & & -2 < 4 \end{array}$$

ilişkilerinin sonucu olarak, A' nın uygulayabileceği stratejilere göre, B' nin radyo ile reklam stratejisi televizyonla reklam stratejisine baskındır. Bir başka anlatımla B firması TV ile reklam stratejisini benimsediğinde A' nın daha fazla müşteri kazanacağını bilmektedir. Bu nedenle B, TV ile reklam yapmayı istemeyecektir. Böylece oyun aşağıdaki indirgenmiş matristen hareketle sürdürülecektir[2].

Tablo 2.3: Örnek 2.1. İndirgenmiş Kazanç Matrisi

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	12	-5
	a_2	-2	-4
	a_3	-2	6

2.3. Kesinlikle Saptanmış Oyunların Çözümü

İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunun kazanç matrisi aşağıdaki gibi olsun.

Tablo 2.4: Sıfır Toplamlı İki Kişilik Oyun Kazanç Matrisi

				B				
		b_1	b_2	b_3	.	.	.	b_n
	a_1	K_{11}	K_{12}	K_{13}	.	.	.	K_{1n}
	a_2	.						
A	a_3	.						
	.	.						
	.	.						
	.	.						
	a_m	K_{m1}	.	.	.	.	.	K_{mn}

B oyuncusu, A’ nın davranışına bağlı olarak en az kayıp vereceği stratejiyi seçecektir. Bu nedenle, A oyuncusu uygulayacağı stratejiyi araştırırken, B’ nin karşı davranışlarını da göz önüne alarak, her strateji karşılığı elde edebileceği en küçük kazançlardan hareketle bunların içinden en büyük kazanca karşı gelen stratejiyi benimser.

Böylece A’ nın strateji seçimindeki davranışı kötümserlik ölçütüne göre olup, benimsenecek strateji, A oyuncusu için K_{ij}‘ ler kazanç göstergesi olduğundan;

$$\underset{i}{\text{Enb}} \{ \underset{j}{\text{Enk}} (K_{ij}) \}$$

ilişkisi ile belirlenir.

Öte yandan, aynı ussal yaklaşımla, B oyuncusu da A’ nın stratejilerine göre en fazla kayıplarını göz önüne alarak, bunların içinden en küçük kayıp vereceği stratejiyi benimser. Yani B oyuncusu da genel karar kuramındaki kötümser yaklaşımla hareket ederek, K_{ij}’ ler kendisi için kayıp göstergeleri olduğundan, benimseyeceği strateji;

$$\underset{j}{\text{Enk}} \{ \underset{i}{\text{Enb}} (K_{ij}) \}$$

ilişkisi ile belirlenir.

Yukarıdaki açıklamaya göre, A’ nın her strateji karşılığı sağlayabileceği en küçük kazanç ve B’ nin her strateji karşılığı uğrayacağı en büyük kayıp, katkı matrisine son sütun ve son satır halinde eklenir. A en küçük kazançların en büyüğünü (kazanç durumunda kötümserlik ölçütü), B ise en büyük kayıpların en küçüğünü (kayıp durumunda kötümserlik ölçütü) veren stratejiyi benimsemek isteyeceklerdir[2].

Örnek 2.2: İki kişilik bir oyuna ait katkı matrisi aşağıdaki gibi verilsin.

Tablo 2.5: İki Kişilik Bir Oyuna Ait Katkı Matrisi

		B	
		b_1	**b_2**
A	**a_1**	-1	3
	a_2	1	2
	a_3	-3	-5

Oyuna A oyuncusu açısından bakıldığında, eğer A a_1' i seçerse en küçük kazancı -1, a_2' yi seçerse 1, ve a_3 için ise en küçük kazanç -5 birim olmaktadır. Böylece A oyuncusu için;

$$\text{Enk}\{K_{1j}\} = -1$$
$$\text{Enk}\{K_{2j}\} = 1$$
$$\text{Enk}\{K_{3j}\} = -5$$

olup, bunlardan A için en fazla katkı sağlayan a_2 olup, elde edilecek kazanç 1 birimdir. Açıklıkla görüldüğü gibi, A' nın benimseyeceği strateji;

$$\underset{i}{\text{Enb}} \{ \underset{j}{\text{Enk}} (K_{ij}) \} = 1 \qquad i = 2 \quad \text{için}$$

özelliğiyle bulunmaktadır.

B oyuncusunun benimseyeceği strateji ise,

$$\underset{j}{\text{Enk}} \{ \underset{i}{\text{Enb}} (K_{ij}) \} = 1$$

ilişkisi uyarınca;

$$\text{Enb}\{ K_{i1} \} = 1$$
$$\text{Enb}\{ K_{i2} \} = 3$$

ve

$$\underset{j}{\text{Enk}} \{1,3\} = 1$$

olup, benimsenecek strateji b_1' dir.

Ele alınan örnekte görüldüğü gibi, A' nın en iyi stratejisi olarak benimseyeceği a_2 ile elde edeceği kazanç 1 birim olup, bu değer, B' nin en iyi strateji olarak benimseyeceği b_2 ile uğrayacağı kayba eşittir. Bu oyunda A ve B' nin nasıl davranmaları gerektiği bulunmuş yani oyun çözülmüştür. Çözümde oyunu değeri 1 birim olarak bulunmuştur [2].

İki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda, yukarıda karşılaşılan husus genelleştirilemez.

Başka bir deyişle, oyuncuların uygulayacakları en iyi stratejiler her zaman kesinlikle bulunamaz. Oyunun çözünülebilirliği konusunu, genel olarak incelemek amacıyla aşağıdaki kavrama gerek vardır.

Tanım 2.2: İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda;

$$\underset{i}{\text{Enb}}\{ \underset{j}{\text{Enk}} (K_{ij}) \} = \underset{j}{\text{Enk}}\{ \underset{i}{\text{Enb}} (K_{ij}) \}$$

ise, oyuna " Kesinlikle Belirlenmiş Oyun " ve bu değere " Tatmin Noktası " veya " Eyer Noktası '' denir [2].

Oyunda eyer noktasının varlığı, her iki oyuncu için de en iyi stratejilerin çatışması anlamındadır. Böylece oyuna taraf olanların uygulayacakları stratejiler kesinlikle belirlenebilmektedir.

2.4. Karma Strateji Vektörünün Bulunması

Bazı oyunlarda eyer noktası yoktur. Başka bir deyişle, tarafların uygulayabilecekleri en iyi stratejilere karşı katkı göstergeleri (oyunun değeri) farklı olabilir. Yani,

$$\underset{i}{\text{Enb}}\{\ \underset{j}{\text{Enk}}\ (\ K_{ij}\ )\ \} \neq \underset{j}{\text{Enk}}\{\ \underset{i}{\text{Enb}}\ (\ K_{ij}\ )\ \}$$

durumu söz konusudur.

Kesinlikle belirlenmemiş bu tür oyunlarda, tarafların nasıl davranacakları ve ne şekilde davranmaları gerektiği sorularına doğrudan cevap bulunamaz. Belirsizlik altında özel bir karar verme işlemi olan bu tür oyunların kesin çözümü yoktur.

Taraflar, hangi stratejiyi uygulamaları gerektiğini kesinlikle bilmediklerinden, oyuna bir strateji ile başlayacak, karşı tarafın uyguladığı stratejiye bağlı olarak, izleyen evrelerde amacına en iyi gelen stratejilere geçecektir. Yani, oyun boyunca taraflar karma strateji uygulayacaklardır.

Kesinlikle belirlenmemiş oyunların çözümü ile oyuncuların karşı karşıya kaldıkları belirsizlik ortamının risk ortamına dönüşümü yapılır. Bu amaçla, oyunun en iyi sürdürülebilmesi için, uygulanacak stratejilerin göreli sıklıkları araştırılır.

Eyer noktası olmayan oyunların genel çözümünü vermeden önce aşağıdaki örneği incelemekte yarar vardır.

Örnek 2.3:

Tablo 2.6 : Örnek 2.3. Kazanç Matrisi

		B		
		B_1	**B_2**	**A'nın en küçük kazançları Enk (K_{ij}) j**
A	**A_1**	7	2	2
	A_2	-3	6	-3
	B'nin en büyük kayıpları Enb (K_{ij}) i	7	6	

Yukarıdaki örnekte,

Enb{ Enk (K_{ij})} = 2 , a_1 için

Enk{ Enb (K_{ij})} = 6 , b_2 için

olup, oyunun eyer noktası yoktur.

A oyuncusu en küçük kazançların en büyüğünden hareketle a_1 stratejisini uyguladığında, B oyuncusu b_2' yi uygulayarak 2 birim kayba uğrayacaktır. Ancak, B' nin ikinci stratejisini uygulayacağını bilen A oyuncusu, a_2 stratejisini uygulayarak kazancını 6 birim yapabilecektir. Böyle bir durumda ise B oyuncusu b_1' i uygulayarak, A’ ya 3 birim kayıp verdirebilecektir. Görüldüğü gibi, tarafların hangi stratejiyi niçin benimsemeleri gerektiği belirsizliktedir. Bu oyunun çözümüyle taraflara, uygulanabilir stratejilerin göreli sıklıkları yani stratejilerin olasılık vektörleri verilerek, belirsizlikten risk ortamına dönüşüm sağlanır [2].

İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda;

$$I = \{i, \quad i=1,2,\ldots, m\}$$

birinci oyuncunun ve,

$$J = \{ j, \quad j=1,2,\ldots, n\}$$

ikinci oyuncunun uygulanabilir stratejilerine karşı gelen dizin kümeleri olsun.

Birinci oyuncunun oyun boyunca i’ inci stratejiyi uygulama sayısının toplam uygulanan strateji sayısına oranı (i’ nin göreli sıklığı) x_i ise, A oyuncusunun karma strateji vektörü

$$X = [\, x_1, x_2,\ldots\ldots,x_n\,]\ , \quad x_i \geq 0\ , \quad \sum x_i = 1$$

şeklinde yazılır. Aynı şekilde B’ nin karma strateji vektörü de

$$Y = [\, y_1, y_2,\ldots\ldots.y_n\,]\ , \quad y_j \geq 0\ , \quad \sum y_j = 1$$

olur [2].

Bu gösterimlerde, oyun kesinlikle saptanmamış ise, oyunun çözümüyle, X ve Y nin bulunması amaçlanır.

Oyuncuların karma strateji vektörlerinin bulunmasıyla her bir oyuncuya karşı tarafın hangi stratejiyi hangi sıklıkla uygulayacağını , başka bir değişle , hangi stratejiyi hangi olasılıkla benimseyeceğini bilir duruma gelinmektedir.

2.5. İkişer Stratejili (İki Kişilik Oyunlarda) Karma Strateji Vektörünün Bulunması

Yukarıdaki örnekte B oyuncusunun b_1 stratejisini göreli uygulama sıklığı y_1 ve b_2‘ nin y_2 olsun. $y_1, y_2 \geq 0$ ve $y_1 + y_2 = 1$ olması gerektiğinden, $y_1 = y$ alınırsa, $y_2 = 1- y_1$ yazılır.

Benzer şekilde A oyuncusunun a_1 stratejisini benimsemesinin göreli sıklığı x iken, bu oyuncunun a_2‘ yi benimsemesinin göreli sıklığı 1 - x olur. Böylece oyunun ödemeler matrisi, her stratejinin göreli uygulama sıklıklarıyla (olasılıklarıyla)birlikte,

Tablo 2.7: Örnek 2.3. Kazanç Matrisi

		y	**(1-y)**
		b_1	**b_2**
x	**a_1**	7	2
(1-x)	**a_2**	-3	6

şeklinde ele alınır.

Eğer, B oyuncusu b_1 stratejisini uygularsa, bu stratejinin A’ ya getireceği beklenen kazanç $B[b_1]$ A’ nın stratejilerini benimseme olasılıkları ve her bir strateji karşılığı elde edeceği kazançlara göre;

$$B[b_1] = 7x-3 (1-x)$$

yazılır.

Benzer düşünceyle, B oyuncusunun b_2 stratejisini benimsemesi halinde A'nın beklenen kazancı ;

$$B[b_2] = 2x + 6 (1 – x)$$

şeklinde bulunur.

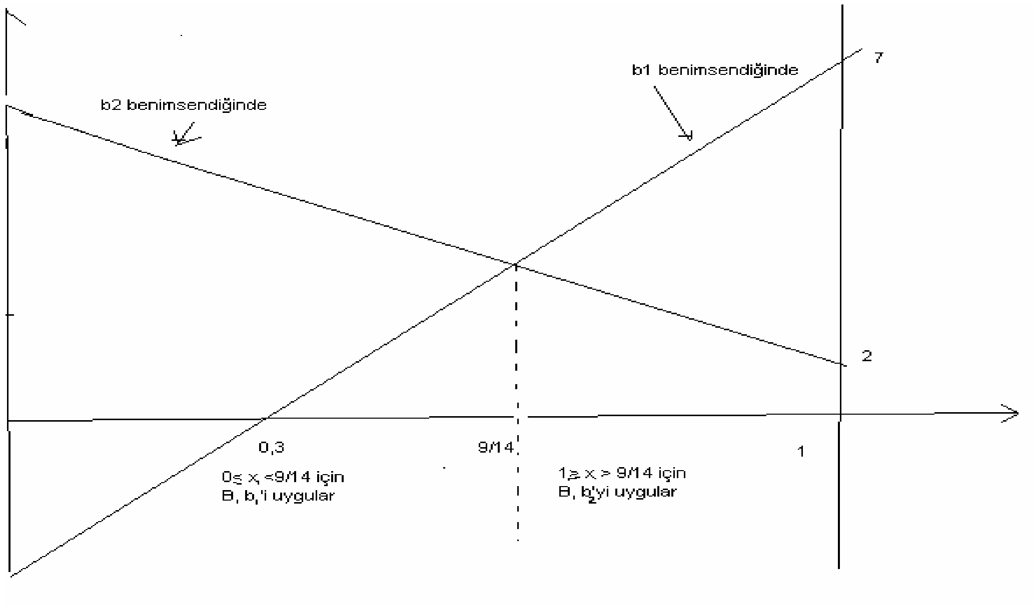
B oyuncusunun uygulayabileceği stratejilere göre, A' nın beklenen kazançları yazılabildiğinden A, stratejilerinin sıklığını (genelde karma strateji vektörünü) yukarıdaki ifadeleri olabildiğince büyütecek şekilde belirleyecektir. Bir başka anlatımla A, x 'e değer atarken,

$$\underset{x}{\text{Enb}} \{ B [b_1] , B [b_2] \}$$

$$\underset{x}{\text{Enb}} \{ 7 x – 3 (1- x) , 2 x + 6 (1- x) \}$$

ilişkisine göre davranmak isteyecektir.

B oyuncusu ise, A' nın kazancını olabildiğince azaltmak isteyeceğinden x' in bilinen değerine göre, A' nın beklenen kazançlarından hangisi daha küçük ise, karşı gelen stratejisini benimseyecektir. x_1' in değerine bağlı olarak sürdürülen bu yargılama aşağıda ki şekilde de kolaylıkla görülebilir[2].



Şekil 2.1: Örnek 2.3. İçin Çözüme Yardımcı Bir Şekil

x' in değerine bağlı olarak B oyuncusunun kendisine daha uygun olan stratejiyi benimseyeceğini bilen A oyuncusu, kendi açısından olaya bakarak, B hangi stratejiyi uygularsa uygulasın beklenen kazancın değişmediği noktada x' in değer almasını isteyecektir.

Bu duruma göre, A için x' in alabileceği en iyi değer B' nin uygulanabileceği her iki strateji için de, beklenen kazançları eşit olduğu, x = 9 / 14 değeridir. Böylece A' nın karma strateji vektörü x = (9 / 14, 5 / 14) olarak bulunur.x' in belirlenen bileşenlere karşı gelen oyunun değeri ise,

$$D = 7.\frac{9}{14} - 3.\frac{5}{14}$$

$$D = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}$$

olur.

Oyunun çözümünde ikinci işlem B' nin karma strateji vektörünün belirlenmesidir.
Eğer A, a_1' i uygularsa, B' nin beklenen kaybı,

$$B[a_1] = 7y + 2(1-y)$$

Oyunun çözümünde, A’ nın beklenen kazancı B’ nin beklenen kaybına eşit olacağından,

$$7y + 2(1 - y) = D = \frac{24}{7}$$

eşitliğinden $y = \frac{2}{7}$, olarak bulunup B ’ nin karma strateji vektörü

$$Y = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right) \text{ olur.}$$

B’ nin karma strateji vektörü, A’ nın karma strateji vektörü araştırılırken yapılan açıklamalar ve izlenen yolla da bulunabilir. Böyle bir yaklaşımla, B’ nin uygulayabileceği her strateji için, A’ nın beklenen kazançlarının eşit olduğu y değeri,

$$7y + 2(1- y) = -3y + 6(1 - y)$$

eşitliğinin çözümüyle $y = \frac{2}{7}$ olarak bulunacaktır ki, bir önceki değere eşittir.

Yukarıdaki örnekte A oyuncusunun karma strateji vektörünü x = (9 / 14, 5 / 14) olarak bulunması, oyunun süregitmesi durumunda, A toplam oyun sayısını 9/14’ ün de birinci stratejisini 5/14 ’ün de ise ikinci stratejisini benimseyecek (uygulayacak) demektir. Şayet oyun bir kez olacaksa, yani A ve B bulundukları ortamda bir defa karar verebilecekler ise her iki oyuncunun stratejilerini benimseme olasılıkları, karma strateji vektörlerinin karşı gelen öğeleri kadar olacaktır.

İki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda eyer noktası olmadığı zaman, karma strateji vektörünün bulunması aşağıdaki şekille genelleştirilebilir.

Oyunun ödemeler matrisi, stratejiler ve bunların uygulama olasılıklarıyla birlikte aşağıdaki gibi verilsin.

Tablo 2.8: Ödemeler Matrisi

A \ **B**		**y**	**(1-y)**
		$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_2}$
x	$\mathbf{a_1}$	K_{11}	K_{12}
(1-x)	$\mathbf{a_2}$	K_{21}	K_{22}

B’ nin benimseyeceği stratejilere göre A’ nın karşı gelen beklenen kazançları B,

$$x\ K_{11} + (1 - x)\ K_{21} \quad , \quad (\text{ B, } b_1\text{' i benimserse })$$

$$x\ K_{12} + (1 - x)\ K_{22} \quad , \quad (\text{ B, } b_2\text{' yi benimserse })$$

şeklindedir.

A oyuncusu, uygulayacağı stratejileri seçerken, B’ nin tutumunu da göz önüne alacaktır. Yani A, stratejilerinin sıklığını öyle belirleyecektir ki, B hangi stratejiyi benimserse benimsesin beklenen kazancı aynı olsun. Böylece, A oyuncusunun davranışlarına göre değer alan x için yukarıdaki beklenen değerler aynı olacağından,

$$x\ K_{11} + (1 - x)\ K_{21} = x\ K_{12} + (1 - x)\ K_{22}$$

eşitliği gerçekleşecektir. Bu denklemi çözen x ve 1 - x değerleri A’ nın karma strateji vektörünü verir.

Aynı yaklaşımla, A’ nın benimseyeceği stratejiye göre beklenen kazançların B’ nin karşı gelen kayıpları olup, bu değerler:

$$y\,K_{11} + (1 - y)\,K_{12} \qquad (\text{A, } a_1\text{' i benimserse})$$

$$y\,K_{21} + (1 - y)\,K_{22} \qquad (\text{A, } a_2\text{' yi benimserse})$$

ifadelerine eşdeğerdir.

y ve 1-y değerleri, B’ nin stratejilerini uygulama sıklığı olduğuna göre, bunların alacakları değerler doğrudan B’ nin davranışlarına bağlıdır. B oyuncusu kendi kaybını en aza indirgemek için uğraşırken, A’ nın kazancını da en aza indirgemeye çalışmaktadır. Öyleyse, stratejilerini uygulama sıklığında, A hangi stratejisini benimserse benimsesin beklenen kaybının aynı olacak şekilde kendi stratejilerinin sıklığını, yani y’ yi belirleyecektir. Böylece B’ nin birinci stratejilerini uygulama sıklığı;

$$y\,K_{11} + (1 - y)\,K_{12} = y\,K_{21} + (1 - y)\,K_{22}$$

eşitliğini sağlayan y kadar olacaktır.

Örnek 2.4: İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunun ödemeler matrisi şöyledir:

Tablo 2.9: Örnek 2.4. Ödemeler Matrisi

			B		
		b_1	**b_2**	**A ’nın en küçük kazançları**	
A	**a_1**	10	-5	-5	
	a_2	-2	4	-2	**Enb (Enk K_{ij})**
	B’nin bütün kayıpları	10	4		
			Enk (Enb K_{ij})		

Oyununda

$$\underset{i}{\text{Enb}} \{ \underset{j}{\text{Enk}} (K_{ij}) \} \neq \underset{j}{\text{Enk}} \{ \underset{i}{\text{Enb}} (K_{ij}) \}$$

olduğundan eyer noktası, yani kesinlikle saptanması mümkün stratejiler yoktur. O halde, taraflar her seferinde benimseyecekleri stratejilerini, karşı tarafın davranışına göre belirleyecektir.

A, B hangi stratejiyi uygularsa uygulasın beklenen kazancını değişmeyecek şekilde a_1 ve a_2’ yi tekrarlayacağından, bunların sıklığı x ve 1-x iken; B’ nin beklenen kayıplarını aynı tutan,

$$10\,x - 2\,(1 - x) = -5\,x + (1 - x)\,4$$

eşitliğine göre,

$$x = \frac{3}{13} \quad \text{ve} \quad 1\text{-}x = \frac{10}{13}$$

olup, A’ nın karma strateji vektörü;

$$x = \left(\frac{3}{13}\ ,\ \frac{10}{13} \right)$$

olur.

Bu sonuca göre, A ikinci stratejisini daha sık uygulamaktadır.

Benzer şekilde B ’nin davranışına esas olan y ve 1-y ‘ ler de, B oyuncusu, A hangi stratejiyi benimserse benimsesin, A’ nın beklenen kazancının aynı olmasını isteyeceğinden,

$$10\ y - 5\ (\ 1 - y\ ) = -\ 2\ y + 4\ (\ 1 - y\ )$$

eşitliğine göre, B ’nin birinci stratejisini uygulama sıklığı $y = \frac{3}{7}$ ve ikinci stratejisini uygulama sıklığı $1\text{-}y = \frac{4}{7}$ olarak bulunur [2].

Örnek 2.5: Benzer malı üreten 4 şirketin 3’ü kendi aralarında anlaşarak bir birlik kurmuşlardır. Sonuçta kalan şirket pazarda birliğe karşı rekabet etmek durumunda kalmıştır. Firma’nın mal için üç farklı fiyat uygulayabileceği, birliğin de üç farklı dağıtım stratejisi geliştirdiği pazarda alıcı sayısının kısa dönemde değişmediği, müşterilerin ya birliğin ya da yalnız kalan firmanın malını aldığı bilinmektedir. Her iki taraf da mümkün olduğunca fazla sayıda müşteri kazanmak istemektedir.

Yapılan araştırmalara göre, birliğin izleyebileceği her bir dağıtım politikalarına bağlı olarak fiyatlama kararında firmanın kazanacağı müşteri sayıları şöyle bulunmuştur.

Tablo 2.10: Örnek 2.5. Kazanç Matrisi

		Birliğin	**Dağıtım**	**Politikaları**
		D_1	**D_2**	**D_3**
Firma	**F_1**	-2	3	-1
Fiyatları	**F_2**	-1	1	3
	F_3	4	2	4

Bu örnekte, her iki tarafında 3'er stratejisi olan sıfır toplamlı iki kişilik oyun söz konusudur. Çözüm işlemlerine önce baskın stratejilerin araştırmasıyla başlanacaktır.

Ödemeler matrisine firma açısından bakıldığında, firmanın 3.fiyat stratejilerini uygulaması halinde, birlik hangi dağıtım politikasını uygulasın? 2.fiyat stratejisine göre daha avantajlı olduğu görülmektedir. Bir başka deyişle,

$$K_{31} = 4 > K_{21} = -1$$
$$K_{32} = 2 > K_{22} = 1$$
$$K_{33} = 4 > K_{23} = 3$$

olduğundan, bütün j' ler için $K_{3j} > K_{2j}$ 'dir .Böylece firmanın 3.fiyat stratejisi 2.fiyat stratejisine egemen olup, firma F_3 her zaman F_2' ye tercih edileceğinden, F_2' yi işlem dışı bırakacaktır.

Ödemeler matrisine birlik açısından bakıldığında, birlik dağıtım politikalarını karşılaştırdığında, firma hangi fiyat stratejisini uygularsa uygulasın; D_1' in D_3' e göre her zaman daha avantajlı olduğunu görecektir. Yani, birlik için D_1, D_3' e egemen (baskın) olup, D_3 işlem dışı tutulacaktır.

Oyunda baskın stratejiler olduğuna göre, oyun matrisi, işlem dışı tutulacak stratejiler ve karşı gelen ödemeler itibariyle indirgenerek, aşağıdaki oyun elde edilir.

Tablo 2.1.1: Örnek 2.5. İndirgenmiş Kazanç Matrisi

		BİRLİK			
		D_1	**D_2**	**$\underset{j}{\text{Enk}}\ K_{ij}$**	
	F_1	-2	3	-2	**$\underset{i}{\text{Enb}}\ \{\underset{j}{\text{Enk}}\ (K_{ij})\}$**
FİRMA	**F_2**	4	2	2	
	$\underset{i}{\text{Enb}}\ K_{ij}$	4	3		
		$\underset{j}{\text{Enk}}\ \{\underset{i}{\text{Enb}}\ (K_{ij})\}$			

İndirgenmiş ödemeler matrisinde,

$$\underset{i}{\text{Enb}}\ \{\underset{j}{\text{Enk}}\ (K_{ij})\} \neq \underset{j}{\text{Enk}}\ \{\underset{i}{\text{Enb}}\ (K_{ij})\}$$

olduğundan oyunun kesin çözümü yoktur. Yani oyun kesinlikle saptanmamış olup, taraflar karma strateji uygulayacaklardır.

Tarafların stratejilerini uygulama olasılıkları birlik için y, 1-y ve firma için x, 1-x olsun. Firmanın, birlik hangi stratejisini uygularsa uygulasın, beklenen kazançlarını eşitleyen x değeri,

$$-2x + 4(1 - x) = 3x + 2(1 - x)$$

denkleminin çözümüyle, x = 2 / 7 olarak bulunur. Böylece firmanın karma strateji vektörü;

$$X = \left(\frac{2}{7} , \frac{5}{7} \right)$$

olup, A ’ nın beklenen kazancı, yani oyunun değeri,

$$D = -2 \, . \, \frac{2}{7} + 4 \left(1 - \frac{2}{7} \right) = \frac{16}{7}$$

dir.

Birliğin, firma hangi stratejisini uygularsa uygulasın beklenen kayıplarını eşitleyen y değeri,

$$-2y + 3(1-y) = 4y + 2(1-y)$$

denkleminden, y = 1 / 7 olarak bulunur ki, birliğin karma strateji vektörünün,

$$Y = (1/7, 6/7)$$

olduğu sonucuna varılır. Birlik için de oyunun beklenen kaybı hesaplanırsa;

$$-2 \, . \, \frac{1}{7} + 3 \left(1 - \frac{1}{7} \right) = \frac{16}{7}$$

olduğu görülür ki, bu değer firmanın kazancına eşit olup, aynı zamanda oyunun değeridir [2].

2.6. Çok Stratejili İki Kişilik Oyunların Çözümü

m x n ’ lik iki kişilik sıfır toplamlı bir oyunun kesin çözümü olmasın. Bu durumda, her iki tarafın da karma strateji vektörleri oyunun çözümü olacaktır.

Oyuncular A ve B ile gösterilsin. A' nın karma strateji vektörü;

$$X = [x_1, x_2, \ldots x_m]$$

iken, B' nin karma strateji vektörü;

$$Y = [\, y_1, y_2, \ldots, y_n \,]$$

olsun ve A' nın kazanç matrisi (ödemeler matrisi)

$$K = (\, K_{ij} \,)_{mxn}$$

şeklinde verilsin.

Oyuncuların kazanç (ya da kayıpları) karşı tarafın stratejilerini uygulama olasılıklarına bağlı olduğundan, oyunun her hangi bir anında yapılacak ödemeler rassal niteliktedir. O halde oyunun beklenen değeri söz konusu olacaktır ki, bu da,

$$B[\, x , y \,] = \sum_{i} \sum_{j} x_i K_{ij} y_j$$

şeklin de gösterilebilir.

A oyuncusu, en küçük gelirlerin (kazançlarının) en büyüğü elde edilecek şekilde davranacağından, A için oyunun beklenen değeri;

$$D_A = \underset{x}{\text{Enb}} \{ \underset{y}{\text{Enk}} \; B(\, X,Y \,)\}$$

iken, benzer şekilde B için oyunun beklenen değeri;

$$D_B = \underset{x}{\text{Enk}} \{ \underset{y}{\text{Enb}} \; B(\, X,Y \,)\}$$

olacaktır.

Sıfır toplamlı iki kişilik oyunlarda her iki oyuncu için de en iyi stratejiler olup, bunlar X^* ve Y^* ise,

$$B[X^*, Y^*] = D_A = D_B = D$$

eşitliğini sağlarlar.

Bu özelliğe göre oyuncuların karma stratejilerini, yani oyunun çözümünü elde etmek, yukarıdaki eşitliği gerçekleyen X^* ve Y^* vektörlerini bulmaktır.

A ’ nın en iyi stratejisi X (karma) ve oyunun değeri D ise, X^*,

$$X\,K \geq D \,\ldots\ldots\ldots.. \qquad (2.6.1)$$

$$X \geq 0 \,\ldots\ldots\ldots... \qquad (2.6.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \,\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.6.3)$$

sisteminin çözümü olacaktır. Burada (2.6.1) nolu eşitlik takımı, B’nin hangi stratejisini uygularsa uygulasın, A ’nın beklenen değerinin oyunun değerinden büyük veya eşit olmasını sağlar.

Aynı şekilde, Y^*, B ’nin karma strateji vektörü ise, Y^*,

$$K \quad Y \leq D \,\ldots\ldots\ldots... \qquad (2.6.4)$$

$$Y \geq 0 \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.6.5)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_j = 1 \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.6.6)$$

sisteminin çözümü olacaktır.

Görüldüğü gibi X^* ve Y^* ‘nin değerleri araştırılırken, (2.6.1) ve (2.6.4) nolu eşitsizliklerde aynı değişken (oyunun değeri olan D)yer almaktadır. O halde çözüm işlemlerinde (2.6.1), (2.6.2), (2.6.3), (2.6.4), (2.6.5) ve (2.6.6) nolu bağıntılar birlikte düşünülecektir.

Yukarıda açıklanan özellikler ışığında, m x n’ lik sıfır toplamlı oyunlar farklı tekniklerle çözülebilmektedir. İzleyen paragraflarda cebirsel çözüm ve doğrusal programlama ile çözüm üzerinde durulacaktır.

2.6.1. Cebirsel Çözüm

Oyuncuların eşit stratejilerinin olduğu durumda başvurulabilen bir çözüm şeklidir. Her iki oyuncunun da aynı sayıda stratejileri varsa, ödemeler matrisi bir kare matris olur.

Bu yöntemle, A’ nın beklenen değerlerinden hareketle

$$X\ K = D$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

denklem sistemi çözülür. Burada (m+1) değişken, (m+1) denklem söz konusudur. Eğer çözümde $X \geq 0$ koşulu da sağlanmış ise, bulunan değer X^* olup Y^* ‘ nin değerinin araştırılmasına geçilir. Bu amaçla,

$$K\ Y = D$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_j = 1$$

sisteminin çözümü araştırılır. D’ nin önceki değeri göz önüne alınmaz ise, bu sistemde de (m+1) değişken, (m+1) denklem vardır.

Eğer sistemin çözümü bulunur ve $Y \geq 0$ koşulu da sağlanırsa, bulunan değer B’ nin karma strateji vektörü olan Y^* ’ dir.

Yapılan açıklamalardan anlaşılacağı üzere, cebirsel yolla, strateji sayıları eşit olsa bile (2.6.1) ve (2.6.4) nolu eşitsizlikleri eşitlik haline dönüştürerek her zaman, karma strateji vektörleri doğrudan bulunamayabilir [2].

Örnek 2.6: A ve B oyuncularından oluşan sıfır toplamlı bir oyunda A' nın kazanç matrisi aşağıda verilmiştir. Sorunun çözümünü ve değerini bulunuz.

Tablo 2.12: Örnek 2.6. Kazanç Matrisi

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

A ' nın karma strateji vektörü, $X = [\ x_1, x_2, x_3\ ]$ satır vektörüyle, B ' nin karma strateji vektörü $Y = [\ y_1, y_2, y_3\ ]$ sütun vektörü ile gösterilsin.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq D \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &\geq D \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &\geq D \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -y_1 + 2y_2 + y_3 &\leq D \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 &\leq D \\ 3y_1 + 4y_2 - 3y_3 &\leq D \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

bağıntıları yazılır. İlk üç eşitsizlik eşitlik olarak ele alınıp, dördüncü denklemle birlikte çözümü araştırılırsa;

$$x_1 = \frac{17}{46}, \quad x_2 = \frac{20}{46}, \quad x_3 = \frac{9}{46}, \quad D = \frac{30}{46}$$

olarak bulunur.

Aynı şekilde B’ nin beklenen değerleri oyunun değerine eşitlenir, elde edilen sistemin çözümü araştırılırsa,

$$y_1 = \frac{14}{46}, \quad y_2 = \frac{12}{46}, \quad y_3 = \frac{20}{46}$$

olarak bulunur ki, $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ ve tüm $y_j \geq 0$ olduğundan oyunun çözümü bulunmuş olup, A ’ nın karma strateji vektörü;

$$X = [\ 17 / 46,\ 20 / 46,\ 9 / 46\ ]$$

B’ nin karma strateji vektörü;

$$Y = [\ 14 / 46,\ 12 / 46,\ 20 / 46\ ]$$

ve oyunun değeri;

$$D = \frac{30}{46}$$ ‘dır [2].

2.6.2. Doğrusal programlama ile çözüm

Önceki kesimde açıklandığı gibi, oyunun çözümü için bir dizi bağıntıyı aynı anda sağlayan değişkenlerin değerleri araştırılmaktadır.

A oyuncusu için öngörülen (2.6.1), (2.6.2) ve (2.6.3) nolu bağıntılar ele alındığında A sonuçta kazancını en büyük yapmak isteyeceğinden, A için problem;

$$X \quad K \geq D$$
$$X \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

kısıtları altında,

$$\text{Enb } x_0 = D$$

şeklinde ifade edilebilir ki, böylece bir doğrusal programlama modeli söz konusu olur.

İkinci oyuncu, kayıplarını en küçüklemek istediğinden, kendi karma strateji vektörünü belirlerken, oyunun değerini en küçüklemek isteyecektir. Böylece B için problem,

$$K \, Y \leq D$$
$$Y \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_j = 1$$

kısıtları altında,

$$\text{Enk } y_0 = D$$

şeklinde alınır ki yine bir doğrusal karar modeli söz konusudur.

Doğrusal karar modellerinin çözüm tekniklerinin çok gelişmiş olduğu göz önüne alındığında, sıfır toplamlı iki kişilik oyunların çözümü için doğrusal programlamanın ne denli etkin bir teknik olduğu görülür. Kaldı ki, oyunun çözümünün doğrusal programlama ile bulunmak istenmesi halinde iki modeli de çözmeye gerek yoktur. Açıklıkla görüleceği gibi, A ve B oyuncuları için yazılan modellerin biri diğerinin ikilidir. Bu nedenle bir modelin en iyi çözümünden hareketle diğerinin en iyi çözümü kolaylıkla yazılır.

Oyunun çözümünün doğrusal programlama ile bulunmak istenmesi halinde, eşitsizliklerin sağ taraflarında yer alan D ’nin de bir değişken olduğuna dikkat edilmelidir. Oyunun değeri olan D aynı zamanda amaç fonksiyonudur ve D pozitif, sıfır veya negatif değer alabilir. O halde çözüm işlemlerine başlamadan önce, ya D serbest ya da model özel dönüşümlere tabi tutulur. Aslında, doğrusal karar modelin sağ taraf sabitlerinin büyük bir çoğunluğunun sıfır olması simpleks algoritması için istenen bir durum olmadığından, özel dönüşümlerle sağ taraf sabitlerinin sıfır olmaktan kurtarılmaları yerinde bir işlem olur.Bu amaçla, A oyuncusu için geliştirilen model açık olarak yazılırsa;

$$K_{11}\, x_1 + K_{21}\, x_2 + K_{31}\, x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots K_{ml}\, x_m \geq D$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_{nl}\, x_1 + K_{n2}\, x_2 + K_{n3}\, x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots K_{mn}\, x_m \geq D$$

$$x_1 + x + x_2 + x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + x_m = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots x_m \geq 0$$

kısıtları altında,

$$\text{Enb } x_0 = D$$

elde edilir.

Bu modelde tüm K_{ij} ’ ler pozitif ise D ’ de pozitif olmak zorundadır. Böyle bir özellik geçerli değilse bile, karar matrisinin tüm öğelerine aynı sayının eklenmesi ile K_{ij} ’ ler pozitif hale getirilir. O halde, $D > 0$ kabul edilip uygun dönüşümler yapılabilir.

$D > 0$ olmak üzere, yukarıdaki modelde $x_i = p_i$ D dönüşümü yapılırsa, ilk grup eşitsizliklerin sağ tarafları 1 olur.

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

Eşitliğinden

$$\sum_{i} P_i D = 1$$

$$D = 1 / \Sigma P_i$$

elde edilir. Böylece model,

$$K_{11}\, p_1 + K_{21}\, p_2 + \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; K_{ml}\, p_m \geq 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_{nl}\; p_1 + K_{n2}\, p_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\; K_{mp}\, p_m \geq 1$$

$$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\; p_m \geq 0$$

kısıtları altında,

$$\text{Enb } x_0 = 1 / \Sigma P_i$$

veya aynı kısıtlar altında,

$$\text{Enb } x_0' = 1 / \Sigma P_i$$

şeklinde yazılır ki, modelin bu haliyle çözümü daha kolaydır [2].

Örnek 2.7: İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunun birinciye göre kazanç matrisi aşağıdaki gibi olsun. Oyunun çözümü ve değerini bulunuz.

Tablo 2.13: Örnek 2.7. Kazanç Matrisi

$$\begin{array}{cc} & \text{2.oyuncu} \\ \text{1.oyuncu} & \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bu oyunun çözümü doğrusal programlama ile bulunmak istenirse, önceki paragraflarda açıklandığı üzere, öncelikle ödemeler matrisinin tüm elemanlarını negatif olmaktan kurtarmak gerekir. Bu amaçla, ödemeler matrisindeki her bir öğeye 3 eklenirse, genişletilmiş ödemeler matrisi

Tablo 2.14: Örnek 2.7. Genişletilmiş Ödemeler Matrisi

$$\begin{array}{cc} & \text{2.oyuncu} \\ \text{1.oyuncu} & \begin{bmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklini alır. Bu durumda da oyuncuların davranışlarından değişme olmayacağı ama oyunun gerçek değerinin 3 fazlasının elde edileceği açıktır.

1.Oyuncunun karma strateji vektörü $x = (x_1, x_2, x_3)$ satır vektörüyle gösterildiğinde, bu oyuncunun karma stratejisi için çözülecek karar modeli;

$$\begin{aligned} 6P_1 + 2P_2 &\geq 1 \\ 3P_2 &\geq 1 \\ 8P_1 + P_2 &\geq 1 \\ P_1, P_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

k.a.

$$\text{Enk } x_0' = p_1 + p_2$$

olarak yazılır.

Bu modelin iki modeli ise, q_1, q_2, q_3 ikil değişkenler olmak üzere,

$$6q_1 + 8q_3 \leq 1$$
$$2q_1 + 3q_2 + q_3 \leq 1$$
$$q_1, q_2, q_3 \geq 0$$

kısıtları altnda

$$\text{Enb } y_0^{\prime} = q_1 + q_2 + q_3$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi 2.oyuncunun karma strateji vektörü için çözülecek model, 1.oyuncu için yazılan modelden hareketle yazılabilmektedir. Ele alınan örnekte her iki oyuncunun da karma strateji vektörü araştırıldığında, yukarıdaki modellerin ikisinin de çözümüne ihtiyaç vardır.

2.oyuncu için çözümü gerekli olan modelin başlangıç simpleks tablosu, q_4 ve q_5 aylak değişkenler olmak üzere;

Tablo 2.15.1: Örnek 2.7. Simpleks Tablosu

	$y_0^{\prime}$	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	**Sağ taraf**
$y_0^{\prime}$	<u>1</u>	-1	-1	-1	0	0	**0**
q_4	0	6	0	8	<u>1</u>	0	**1**
q_5	0	2	3	1	0	<u>1</u>	**1**

şeklindedir. Bu tablodan hareketle simpleks algoritması ile bulunan en iyi çözüm aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.15.2: Son Simpleks Tablosu

	y_0'	**q_1**	**q_2**	**q_3**	**q_4**	**q_5**	**Sağ taraf**
y_0'	<u>**1**</u>	1/6	0	0	1/12	1/3	**5/12**
q_2	0	3/4	0	<u>**1**</u>	1/8	0	**1/8**
q_3	0	5/12	<u>**1**</u>	0	-11/72	1	**7/24**

Son simpleks tablosuna göre, $q_2 = 1/8$, $q_3 = 7/24$, $q_2 + q_3 = 5/12$ olup çözüme esas modelin ikilinin çözümü yani 1.oyuncu için p değerleri $p_1 = 1/12$, $p_2 = 1/3$ olmaktadır. Genişletilmiş ödemeler matrisine göre oyunun değeri $D' = 12/5$ 'tir.

Böylece 1.oyuncu için karma strateji vektörü,

$$x_1 = p_1 \,.\, D' = 1/12 \,.\, 12/5 = 1/5$$
$$x_2 = p_2 \,.\, D' = 1/3 \,.\, 12/5 = 4/5$$

eşitliklerine göre

$$X = (1/5,\ 4/5)$$

olmaktadır.

2.oyuncunun karma strateji vektörü ise,

$$y_1 = q_1 \,.\, D' = 0.12/5 = 0$$
$$y_2 = q_2 \,.\, D' = 1/8.12/5 = 3/10$$
$$y_3 = q_3 \,.\, D' = 7/24.12/5 = 7/10$$

eşitliklerinden

$$Y = (0,\ 3/10,\ 7/10\ )$$

olarak bulunmaktadır. Başlangıç ödemeler matrisine göre oyunun değeri ise, matrisin tüm öğelerine 3 eklendiği hatırlanırsa,

$$D + 3 = D' = 12 / 5$$

eşitliği uyarınca,

$$D = -3 / 5$$

dir.

Çözüme dikkat edildiğinde, 2.oyuncunun 1. stratejisini benimseme olasılığının sıfır olduğu görülür. Bu sonuca göre, 2.oyuncu 1. stratejisini hiç benimsemeyecektir.
Aslında, kesinlikle saptanmış bir oyun, benimsenen stratejilere karşı gelen öğe bir diğerleri sıfır olan strateji vektörleriyle de gösterilebilir [2].

BÖLÜM 3. n-KİŞİLİ OYUNLAR

3.1. Ortaksız Oyunlar

n-kişili oyunlar ($n \geq 3$ olduğunda) düşünüldüğünde, iki kişilik sıfır toplamsız oyunlar ile aynı tanımlama akla gelir. Burada bazıları ortaklı, tüm oyuncular ortaksız veya sonradan ortaklığa izin verilebilir durumları söz konusudur.

İlk olarak ortaksız oyunları ele alalım.

Ortaksız oyunlarda ana soru bir denge durumunun teoremle varlığıdır. Bu soru aşağıdaki ile açıklanabilir.

Teorem 3.1.1: n-kişili ortaksız oyun en az bir eşitlikli karışık strateji içerir. Bu teorem ne kadar önemli bir sonuç olsa da tüm kısıtlayıcılar belirtilmelidir. Ve bu kısıtlayıcılar ise değişkenler arasındaki ilişkiyi gösteren eşitlik durumlarıdır. Dahası eşitlik hesaplamalarında ($n \geq 3$ için) eşitliği taraflarını hesaplamak kıyaslanmayacak kadar zordur. Ortaksız n-kişili oyunlarla, ortaksız iki kişilik genel toplamlı oyunlar arasında genelde çok büyük bir fark yoktur [1], [6].

3.2. Ortaklı Oyunlar

Ortaksız durumlarda iki kişilik ve n-kişili oyunlar arasında çok az fark olduğunu biliyoruz. Gerçekten n-kişili oyuna, sade bir genelleme ile iki kişili oyunda diyebiliriz. Hâlbuki ortaklı oyunlarda yeni bir fikir bulabiliriz. O da koalisyondur.

İki kişilik oyunlarda sadece bir mümkün koalisyon gözükür. n-kişili oyunlarda ise çok fazla koalisyon bulunabilir. Bunun anlamı eğer bir ortaklık oluşturulacaksa farklı üyelerin koalisyonu bir çeşit denge ya da kararlılığa erişmek zorundadır. Bu kararlılık fikri anlamlı teorilerle analiz edilmek zorundadır.

Bu kararlılığı aşağıdaki örnekte görebiliriz.

3-kişilik bir oyun düşünelim. Oyuncular 1, 2 ve 3 basit koalisyon formuyla bir araya getirilir. Eğer herhangi ikisi bu koalisyon formunu oluşturmada başarı sağlarsa, son kalan oyuncu iki oyuncudan her birine bir şey ödemelidir. Eğer herhangi iki oyuncu koalisyon oluşturamazsa hiçbirine ödeme yapılmaz. Bu basit örnekle ilgili söylenebilecek gerçekten çok az şey var. Farzedelim ki bu üç kişi arasında herhangi kişisel bir ilişki olmasın. Böylece herhangi iki kişilik (üç ihtimal) koalisyon formu olabilir. Ve onları birbirinden ayırma olanağı yoktur. Bundan dolayı ödemeleri (-2,1,1), (1,-2,1), (1,1,-2) şeklinde olan koalisyon doğal sonuç olarak görülebilir. Ve buna oyunun bir çözümü olarak da bakılabilir. Alternatif olarak; ortalama ödeme (0,0,0) bu oyun için diğer bir çözüm yoludur.

Oyunu biraz değiştirelim. Böylelikle eğer koalisyon (2,3) oluşursa 1.oyuncu 2. ye 1.1 birim ve 3. ye 0.9 birim ödemelidir. Bu durumda 2. aynı hareketten daha çok kazanç elde ederken 2. nin genel görünüşünün iyileştiği görülür. Bununla birlikte daha yoğun incelemeler gösterecektir ki durum hiçte öyle değildir.

Gerçekten koalisyon (2,3) nerdeyse mümkün olmayan bir duruma döner.(Dışarıdan 1. ve 3. arasında ilişkiyi zorlaştıracak bir durum yoksa) 1. ve 3.oyuncu {1,3} koalisyonundan daha çok kar eder. Bundan dolayı 2. daha önceki durumundan daha zor bir duruma düşer. Gerçektende iki olası koalisyondan birine 2. nin katılması çok kararlı değildir. Çare olarak 3. ye 0.1 birim ücret verirse (böyle bir ihtimal söz konusu) bu durum bir önceki durumu engelleyecektir.

Önceki örnek, iki durumu göz önünde tutmamızı sağlar. İlk olarak oyundaki ödeme kısmını ve ikinci olarak bir çözümdeki farklı ücretlerin bazı kalıcı ihtiyaçların şekillendirmesi kısmını sayabiliriz. İlk olarak ödeme kısmı ile ilgileneceğiz. Son durum sonra konu edilecek.

Bir kez daha hatırlayalım. Bir mal ve eşyanın doğrusal modelle taşınmasını düşünelim.

Farzedelim bu mal veya eşya mevcut olsun. Bu kabullenme üzerinde gelişen teorinin yeni ismi ödüller teorisi olacaktır. Bu teoride çeşitli oyuncular için fayda fonksiyonları seçilebilir. Böylece onların herhangi ikisi arasındaki fayda transfer oranı 1:1 olur.

İki kişilik durumu açıkladığımızda ki bunun anlamı eğer oyuncular (koalisyon) bir alt kümesi S olmak üzere toplam fayda v‘ yi elde edebilirlerse S’ nin üyeleri arasında herhangi bir olasılıkla bu fayda bölünebilir. Böylece biz koalisyonlardan herhangi biri tarafından elde edilebilir bir toplam faydayla ilgileneceğiz.

Tanım 3.1: Bir n-kişili oyunda $N = \{1,2,3,\ldots,n\}$ tüm oyuncuların kümesi olsun. N’ nin boş olmayan herhangi bir alt kümesine (N’ nin kendisi ve tüm tek elemanlı alt kümeleri dahil) bir “koalisyon” denir [6].

Tanım 3.2: N’ nin alt kümeleri üzerinde tanımlanan bir reel değerli fonksiyona bir n-kişili oyunun karakteristik fonksiyonu denir. Bu fonksiyon her bir $S \subset N$ için S ve N-S iki koalisyon formu olmak üzere bunlar arasında oynanan iki kişili oyunların maximin değerini verir. Böylece v(S) geriye kalan oyuncular ne yaparlarsa yapsınlar S’ nin üyelerinin oyundan elde edecekleri faydanın miktarıdır. Bu tanımlamadan açık nedenlerle

$$v(\emptyset)=0 \qquad (3.2.1)$$

sonucu ortaya çıkar.

Şimdi eğer S ve T ayrık koalisyon iseler, oldukça açıktır ki onlar en az ayrık olmayan kuvvetler kadar başarılı olabilirler. Böylece süpertoplanabilirlik özelliğini bulmuş oluruz.

Eğer $S \cap T=Ø$ ise

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \tag{3.2.2}$$

olur.

İki kişilik oyunlarda genellikle geniş formda değil sadece normal formda uğraşıldığını görürüz. Bunun nedeni ise normal form bize karma strateji yapmamıza izin verirken böyle oyunların özü oldukça kolaydır. n-kişili oyunların özü rastgele değildir. Dahası bir çeşit koalisyon formudur. Bu nedenle normal form üzerinde değil de karakteristik fonksiyonları çalışacağız. Gerçekten karakteristik fonksiyonlar bize farklı koalisyonların kapasitelerini gösterir [6].

Optimal rastgelelik en uygun çalışma koalisyonudur. Genelde oyunu karakteristik fonksiyonlarıyla tanımlayacağız.

Tanım 3.3: (3.2.1) ve (3.2.2) durumları ile N' nin alt kümeleri üzerinde tanımlanan bir gerçek değer fonksiyonu v, karakteristik fonksiyon formunda bir n-kişili oyun olarak tanımlanır [6].

Bazı yazarlar (3.2.2) yi ayırır ve üzerinde çalışılmış yararlı durumun sadece v(Ø) = 0 olduğunu belirtirler. Çok sıklıkla bu tür fonksiyonlar yararsız oyunlar olarak adlandırılır. Halbuki bu tür oyunlar (3.2.2) de uygun olarak tanımlanmıştır.

Yukarıda belirttiğimiz gibi v(S), S ve N-S arasında oynanan oyunun maximin değeridir.

Farzedelim ki oyunun normal formu sabit bir toplam olsun.(bütün oyuncular için ödenen kazancın toplamı daima aynıdır)

S ve N-S arasındaki oyun kesinlikle bir yarışma ve sonlu ise minimax teoremi uygulanır. Bu da bizim

$$v(S) + v(N\text{-}S) = v(N)$$

tanımlamasını yapmamızı gerektirir.

Tanım 3.4: Bir oyun (karakteristik fonksiyon yapısında ise) sabit değer olarak söylenebilirse her $S \subset N$ için,

$$v(S) + v(N\text{-}S) = v(N)$$

dir.

Şu vurgulanmalı, bir oyun sabit toplamlı normal form olmaksızın sabit değerli ve karakteristik fonksiyonlu form olabilir(Hatta sabit değerli oyunun bilinen normal formda olması, sabit değerli karakteristik fonksiyon formunda olmaması da mümkündür). Bu sonlu oyunlarda meydana gelmez.

Farzedelim n-kişili oyun oynansın. Araştırmaksızın özel elde edilmiş bir koalisyonda ödeme vektörlerini bilmek isteriz. Oyuncuların sahip olacakları toplam fayda v(N) herhangi bir yolla bölünür (Sabit toplamlı bir oyunda böyle bir anlayış gerekli değildir). Fakat açıkça hiçbir oyuncu kendi başına alabileceğinden daha azını kabul etmeyecektir [6].

Tanım 3.5: n-kişili v oyununun $X=(x_1,\dots,x_n)$ fayda vektörü olmak üzere,

i) $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

ii) Tüm $i \in N$ için, $x_i \geq v(\{i\})$

şeklinde tanımlanır.

Bu oyunun bütün imputasyonları kümesi için E(v) gösterimini kullanacağız. Sabit toplamlı durum hariç, (i) şartı güçlü bir tanımlamadır. Oyuncular başarısız olurlarsa v(N) toplam miktardan daha az bitiş elde edilecektir. Bu şartları gerçeklemeyen bütün vektörleri eleyerek çözüm kavramlarımızı ve sonuçlarını daha sonra göreceğiz.

Şimdi soru şudur: Hangi imputasyonu dikkate alacağız? Bu tabiî ki zor bir sorudur. Bu problemi önemsiz kılan durum şudur: E(v) kümesinin bir elemana sahip olması durumudur. Bu durumda birim imputasyon açık bir sonuç verecektir. Oyunun koalisyon formunda olması önemli değildir. Bu bize temel ve temel olmayan oyunlar arasındaki farkı verir.

Açıktır ki

$$v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\}) \tag{3.5.1}$$

olur.

Şimdi E(v) eğer, (3.5.1) eşitlik olursa sadece bir noktaya sahip olacak [6].

Tanım 3.6: Bir v oyunu eğer $v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$ ise temel oyundur denir [6].

Diğer durumlarda temel oyun değildir. Bizi ilgilendiren kısmı ise temel oyunlardır.

3.3. Baskınlık, Stratejik Denklik Ve Normalleşme

Bir oyun v verilsin. x ve y de iki imputasyon olsun. Farzedelim oyunun oyuncuları x ve y' yi seçmede birbiriyle fikir ayrılığına düşsün. Oyuncular bunlardan birini seçeceği zaman bir karar kriteri bulabilirmiyiz ?

Tabiî ki bellidir. x = y olmadıkça bazı oyuncular x' i y' ye tercih edeceklerdir((i) $x_i > y_i$). Çünkü iki vektörde imputasyondur. Bununla birlikte bazı oyuncularda y' yi x' e tercih edeceklerdir. (Çünkü x veya y' nin bileşenlerinin toplamı v(N)' dir.) x' i seçen oyuncuları bu seçime iten şey nedir?

Tanım 3.7: x ve y iki imputasyon ve S bir koalisyon olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa S içinde x, y' ye baskındır denir($x \succ_s y$).

(i) Tüm $i \in S$ için, $x_i > y_i$

(ii) $\sum_{i \in S} x_i \le v(S)$

$x \succ_s y$ olacak şekilde herhangi bir S koalisyonu varsa x, y' ye baskındır denir ($x \succ y$) [1], [6].

Bu durum S' nin tüm elemanlarının x' i y' ye tercih edildiği durumdur.

Şu ilişkiyi görmek kolaydır. $\succ_s$ (herhangi bir S elemanı için) kısmi sıralama bağıntısıdır.

Diğer yandan $\succ$ ilişkisi yansıyan değilken, ne geçişli ne de antisimetrik değildir (Çünkü S koalisyonu farklı durumlarda farklı olabilir).

Oyunları analizini yapmayı planlarken uğraşılan konu baskınlık ilişkisidir. Doğal olarak oyunlarda benzer yapıya sahip imputasyon kümelerle ilgileneceğiz.

Tanım 3.8: İki n-kişili oyunda eğer f haritası E(u) üzerine E(v) olacak şekilde 1-1 fonksiyon varsa, u ve v izomorfiktir.

$x, y \in E(u)$ ve $S \subset N$ için $x \succ_s y \leftrightarrow f(x) \succ_s f(y)$

olur [1], [6].

Genelde iki oyunun izomorfik olup olmadığına karar vermek zordur.

Tanım 3.9: İki n-kişili oyunda eğer pozitif bir sayı r ve bir gerçek sabit sayı varsa $S \subset N$ de; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ olmak üzere,

$$v(S) = r\, u(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i$$

şartı sağlanıyorsa u ve v, S denkliği olarak söylenebilir [6].

Esasen eğer iki oyun S denkliği ise birkaç oyuncunun fayda uzayına doğrusal dönüştürme ile birinden diğerine daha kolay gidilebilir. Kolayca S denkliğini izomorfizm olarak tanımlayabiliriz.

Tanım 3.10: Eğer u ve v , S denkliği ise izomorfiktir [6].

Farzedelim u ve v, S denkliği olsun. E(u) üzerinde tanımlanan fonksiyonu düşünelim. r ve $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, (3.9)' daki gibi ise f(x)= r x + α olur. Eğer x $\in$ E(u), f(x) $\in$ E(v) ise kolayca kontrol edebiliriz. Dahası x $\succ_S$ y ise f(x) $\succ_S$ f(y) olduğu açıktır. Bu nedenle f, istenen izomorfizmdir.

Böylece S denkliği izomorfizm için uygundur(Bu teoremin tersi de kısıtlanmış sabit toplamlı oyunlar kümesinde doğrudur. Bu konunun ispatı daha da uzundur).

Şu açıktır ki S denkliği kesinlikle bir eşitlik ilişkisidir. Aynı denklik sınıfından bir özel oyun seçmek gerçekten ilginçtir.

Tanım 3.11: Bir v oyununun tüm i $\in$ N için,

i) $v(\{i\}) = 0$

ii) $v(\{N\}) = 1$

varsa (0,1) normalizasyonu içinde olduğu söylenebilir [1], [6].

Tanım 3.12: Eğer u bir temel oyunsa, S denkliği (0,1) normalizasyonun da gerçek bir oyundur. Bu bize oyunlarda her denklik sınıflarını gösteren (0,1) normalizasyonu içinde bir oyun seçebileceğimizi söyler. Bu tür oyunu seçmenin avantajı şudur: Bir v(S) koalisyonun değeri, bize direkt olarak onun sağlamlığını (onun üyelerinin bu form içindeki bütün imputasyonlarının kazanç ve kayıplarının ekstra miktarını) gösterir ve bu oyunun vektörleridir.

Diğer tip normalizasyon n-kişili oyunlarda kullanılır. Ortak normalleşme $v(\{i\}) = -1$ ve $v(N) = 0$ olmak üzere (-1,0) normalleşmesidir. Biz (0,1) normalizasyon oyunlarıyla ilgileneceğiz.

Bizim ilgimiz temel oyunlar olduğu halde genel düşünceyi kaybetmeyeceğiz.

(0,1) normalizasyonu içinde n-kişili oyunlar kümesi N' nin alt kümesi olarak tanımlanmış tüm reel değerli fonksiyonlar kümesi v olmak üzere,

$$v(\emptyset) = 0 \tag{3.10.1}$$

Tüm $i \in N$ için, $$v(\{i\}) = 0 \tag{3.10.2}$$

$$v(N) = 1 \tag{3.10.3}$$

Eğer $S \cap T \neq \emptyset$, $$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \tag{3.10.4}$$

dir.

Bu dört durum $(2^n - n - 1)$ boyutta konveks bir küme oluşturur.

Tüm $S \subset N$ için,

$$v(N-S) = v(N) - v(S) \tag{3.10.5}$$

dir.

Bu $2^{n-1} -1$ şeklinde yeni bir denklem verir. Böylece sabit toplamlı oyunlar kümesi $2^{n-1} - n -1$ boyutuna sahip olur. Ve buradan da n-kişili sabit toplamlı oyunlar kümesinin (n-1) kişili oyunlar kümesi ile aynı boyuta sahip olduğu açıkça görülür.

Gerçekten de iki küme de benzerdir.

Muhakkak eğer u, (0,1) normalizasyonda (n-1) kişili oyun ise n-kişili sabit toplamlı v oyunu yeni bir oyuncu eklenerek genişletilebilir.

$$v(S) = \left\{ \begin{array}{ll} u(S) & n \notin S \text{ için} \\ 1 - u(N - S) & n \in S \text{ için} \end{array} \right\}$$

olur.

Bu oyunun sabit toplamlı bir oyun olduğu kolaylıkla kontrol edilir. Oyunların bizi ilgilendiren iki önemli özel tipleri vardır [1], [6].

Tanım 3.11: Bir v oyununa, eğer v(S) yalnız S nin elemanlarının sayısına bağlı ise simetrik denir. Eğer her bir $S \subset N$ için v(S) = 0 ya da v(S) =1 oluyorsa bu oyuna basit deriz. Eğer onun (0,1) normalizasyonu basit ise oyunda basittir.

Esasen basit oyunlarda her koalisyon için kazanma (değer 1) ya da kaybetme (değer 0) den başka bir şey yoktur. Bu tür basit oyunlar politik bilim için uygulanabilir. Genel seçim ve meclis içi seçimleri bu türden oy verme oyunları olarak sayılabilir [6].

Basit oyunlar arasında özel bir sınıfı ayrı tuttuğumuzda ağırlıklı çoğunluk oyunlar şöyledir:

Tanım 3.12: $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ bir negatif olmayan vektör olsun. Ve q yeterlilik olmak üzere,

$$0 < q \leq \sum_{i=1}^{n} p_i$$

dir.

Sonra ağırlıklı çoğunluk oyunlar $[\, q \,;\, p_1,p_2,\ldots,p_n \,]$ basit oyundur.

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \sum_{i \in S} p_i < q \quad \text{ise} \\ 1 & \sum_{i \in S} p_i \geq q \quad \text{ise} \end{cases}$$ ile tanımlanmış v basit oyundur [1], [6].

3.4. Kararlı Kümeler Ve Çekirdek

Oyunların üstünlük ilişkilerini analiz edelim. Açıkça ilk fikir, baskın olmayan imputasyonlar üzerinde çalışmaktır.

Tanım 3.13: Bir v oyununda tüm birbirine baskın olmayan imputasyonlar kümesine çekirdek denir. Ve C(v) ile gösterilir [1].

Tanım 3.14: Bir oyunun çekirdeği,

(a) $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \text{tüm } S \subset N \text{ için}$,

(b) $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$

olmak üzere bütün n-vektörleri kümesidir.

Eğer biz S = {i} yaparsak (a) durumu $x_i \geq v(\{i\})$ haline gelir. (b) ile beraber tüm vektörler imputasyon olur.

Varsayalım ki x, a ve b yi desteklesin. Ve tüm $i \in S$ için $y_i > x_i$ olsun. Buradan da $\sum_{i \in S} y_i > v(S)$ olur. Ve böylelikle $y \succ_S x$ mümkün olmaz.

Bu nedenle $x \in C(v)$ dir.

Tam tersine y, a ve b yi desteklemiyor. Eğer y, b yi karşılamazsa bir imputasyon bile olmaz. Ve böylece C(v) nin içinden değildir. Farzedelim ki bazı boş olmayan
$S \subset N$ için $\varepsilon > 0$ olduğunda

$$\sum_{i \in S} y_i = v(S) - \varepsilon$$

olur. Ve

$$\alpha = v(N) - v(S) - \sum_{i \in N-S} v(\{i\})$$

dir.

Bu durumu süpertoplanabilirlik ile görmek daha kolaydır. Böylece $\alpha \geq 0$ olur. Sonuçta S kümesindeki elemanların bir s sayısı olur.

Şimdi z' yi tanımlayalım. Şöyle ki;

$$Z_i = \begin{cases} y_i + \dfrac{\varepsilon}{s} & i \in S \quad \text{ise} \\ v(\{i\}) + \dfrac{\alpha}{n-s} & i \notin S \quad \text{ise} \end{cases}$$

dir.

Z nin bir imputasyon ve x $\succ_S$ y olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle

$$y \notin C(v)$$

dir. Bu tanım C(v) nin kapalı konveks serbest lineer eşitsizlik kümesi tarafından tanımlanmış bir alt küme olduğunu gösterir. Bu çok ilginçtir. Çünkü çekirdeği çoğu oyun teorik problemlerin de bir çözüm gibi sunar. Çekirdekteki herhangi bir imputasyon kararlıdır. Hem istekli hem de oyunun ortaya çıkmadığı durumu değiştirme gücünü elinde bulunduran bir koalisyon yoktur. Genellikle, tabiî ki çekirdek bir noktadan fazlasına sahip olabilir. Bu büyük bir sorun değildir. Basitçe manası, birden fazla sonuç kararlı olur. Çekirdeğin boş olması daha büyük bir zorluk olarak karşımıza çıkabilir [1], [6].

Tanım 3.15: Eğer v bir temel sabit toplamlı oyunsa,

$$C(v)=\emptyset$$

dir.

Farzedelim $x \in C(v)$ olsun. Herhangi $i \in N$ için,

$$\sum_{j \in \{i\}} x_j \geq v(N-\{i\})$$

olur. Fakat sabit toplam özelliğinden,

$$v(N-\{i\}) = v(N) - v(\{i\})$$

dir. Çünkü x bir imputasyondur. Ve
$X_i \leq v(\{i\})$ olacaktır. Çünkü v temel oyundur. Ve

$$\sum x_i \leq \sum v(\{i\}) < v(N)$$

olur. Fakat bu $x \notin E(v)$ demektir. Bu zıt durum C(v) nin boş olduğunu ispatlar [1].

3.4. Çeşitli Ortaklı Oyun Problemleri

Problem 1: 1 oyuncusunun (satıcı) satmadıkça değeri olmayan bir atı vardır. 2 ve 3 oyuncuları (alıcılar) sırasıyla 90 ve 100 p.b. ile ata değer biçmektedir. Eğer 1 oyuncusu atı x fiyatıyla 2 oyuncusuna satarsa karı x olacaktır. Oysa 2 oyuncusunun karı 90 - x olacaktır. Bu durumda, {1,2} koalisyonun toplam karı 90 p.b. ‘dir.

Böylece,

$$v\,(1,2) = 90$$

dır. Benzer şekilde,

$$v\,(1,3) = 100$$

dür. Diğer taraftan tek bir oyuncu ya da iki alıcı hiç kar edemez. Yani,

$$v\,(1) = v\,(2) = v\,(3) = v\,(2,3) = 0$$

dır. Üç oyuncunun tümünün koalisyonu, atı 3 oyuncusuna satmaktan daha iyi değildir.Böylece

$$v\,(1,2,3) = 100$$

dür.Buradan oyunun çekirdeği,

$$x_1 + x_2 \geq 90$$
$$x_1 + x_3 \geq 100$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$
$$x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sağlayan bütün (x_1 , x_2 , x_3) vektörlerinden oluşur.

Buna göre,

$$x_1 \geq 90,\ x_2 = 0,\ x_1 + x_3 = 100,\ x_i \geq 0$$

olmak zorundadır.

Böylece $x_1 = t$ alındığında oyunun çekirdeği,

$$C\,(v) = \{(t,0,100-t) \mid 90 \leq t \leq 100\}$$

yapısındadır. Bu ifadenin sonucuna göre sezgisel olarak 3 oyuncusu en azından 90 p.b. fiyatla atı alacak. 2 oyuncusu pazarın dışında kalacaktır. Ancak atın fiyatı en az 90 p.b.'ne çıkmadan 2 oyuncusu elenmez [1], [6].

Problem 2(**Atama oyunu**): Bir pazarda m tane satıcı m tane alıcıya evlerini satacaklardır.Satıcılar kümesi M = {1,2,..,m} ve alıcılar kümesi M´ = { m+1, m+2,…..,2m} olmak üzere, ayrık olan bu iki küme için pazardaki tüm oyuncular kümesi N = M U M´ dür.

$$v(i,m+j) = c_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - a_i & , \quad b_{ij} \geq a_{ij} \\ 0 & , \quad b_{ij} \leq a_{ij} \end{cases}$$

karını elde edebilir.

Herhangi bir $S \subset M$ ya da $S \subset M'$ için v(S)=0 dır.Yani aynı kümenin elemanları arasında alışveriş olmayacağından bir kazanca ulaşamazlar. Hem satıcıları hem de alıcıları içeren diğer S ler için v (S), S nin elemanları arasında evlerin satışları ile elde edilmiş maksimum toplam kara eşit olacaktır. Tek şart, hiçbir satıcı birden fazla alıcıya satış yapamaz ve hiçbir alıcı birden fazla satıcıdan alım yapamaz. Böylece S'de satıcı sayısı alıcı sayısından fazla değilse, i satıcısına m + j(i) alıcısını atarız ve toplam kar,

$$\sum_{i \in S \cap M} c_{i,j(i)}$$

olur. O halde

$$v(S) = \max \sum_{i \in S \cap M} c_{i,j(i)}$$

dir. Burada maksimum, böyle bütün atamaların üzerinden alınır. Eğer S deki alıcı sayısı satıcı sayısından fazla değilse,

$$v(S)=\max \sum_{m+j\in S\cap M'} c_{i(j),j}$$

dir.

Özellikle N kümesi için,

$$v(I)=\max \sum_{i=1} c_{i,j(i)}$$

elde edilir. Burada maksimum, M kümesinin bütün [j(1), j(2),…., j(m)] permütasyonları üzerinden alınmıştır. Buna göre

$$v(N)=\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}c_{ij}$$

olarak yazılabilir. Burada p = ($p_ü$) bir permütasyon matrisidir. Yeni her satır ve sütundan sadece bir tane 1 olan, 0 ve 1'lerden oluşmuş bir matristir. Esas olarak, j. alıcı i. satıcıdan alım yaparsa $p_ü$ = 1, aksi halde $p_ü$ = 0 'dır.

Amaç: $$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} q_{ij}c_{ij} \qquad (2.4.1)$$

Kısıtlar: $$\sum_{i=1}^{m} q_{ij} = 1 \quad , \quad j=1,\dots,m \qquad (2.4.2)$$

$$\sum_{j=1}^{m} q_{ij} = 1 \quad , \quad i=1,\dots,m \qquad (2.4.3)$$

$$q_{ij} \geq 0 \quad , \quad i,j=1,\dots,m \qquad (2.4.4)$$

DP problemini göz önüne alalım.

Her P = ($p_ü$) permutasyon matrisinin (2.4.1) – (2.4.2) kısıtlarını sağladığı açıktır. Problemin özel yapısı gereği herhangi bir 0-1 tamsayılı çözüm algoritması ile çözülebileceği gibi atama algoritması ile de çözüm elde edilebilir.

Ayrıca, (3.4.1) – (3.4.4) problemin uç noktalarının permutasyon matrislerinden oluştuğu gösterilebilir. Problem maksimumuna bir uç noktada ulaşacağından v(N) değeri, söz konusu problemin maksimum değeri olacaktır.

Problemin duali;

Amaç: $\min \sum_{i=1}^{m} y_i + \sum_{j=1}^{m} z_j$

Kısıtlar: $y_i + z_j \geq c_{ij}$ $\quad$ $i,j = 1,\ldots,m$

yapısındadır. y_i, z_j dual değişkenlerinde nonnegatiflik şartı yoktur. Ancak minimum vektörün tek olmadığını görmek güç değildir. Gerçekten,

$$(y^* ; z^*) = (y_1^*,\ldots,y_m^* ; z_1^*,\ldots,z_m^*)$$

dual problemi minimum yapan vektör ise herhangi bir t reel sayısı ve $\forall$ i, j için

$$y_i' = y_i^* - t, \quad z_j' = z_j^* + t$$

ile tanımlanan $(y'; z')$ vektörü de problemi minimum yapar. Özellikle

$$t = \min_i y_i^*$$

seçtiğimizde,

$$\min_i y_i' = 0$$

olur.O halde, $\forall\, y_i' \geq 0$ ve bazı k ‘ lar için $y_k' = 0$ ‘dır.Şu halde $\forall$ j için,

$$z_j' = y_k' + z_j' \geq c_{kj} \geq 0$$

dır. Böylece (y′; z′), bütün bileşenleri nonnegatif olan ve dual problemi minimum yapan bir çözümdür. O halde,

$$\sum_{i=1}^{m} y_i{}' + \sum_{j=1}^{m} z_j{}' = v(N)$$

olur. Böylece (y′; z′) vektörünün ve oyunu için bir imputasyon olduğu gösterilmiş olur. Bu inputasyonun C(v) çekirdeğine ait olacağını gösterelim.

Herhangi bir S için,

$v(S) = c_{i_1 j_1} + \ldots + c_{i_q j_q}$

dur. Burada $i_1,\ldots,i_q$, $j_1,\ldots,j_q$ 'lar S'in ayrık elemanlarıdır. O halde;

$$\sum_{i \in S} y_i{}' + \sum_{m+j \in S}^{m} z_j{}' \geq y_{i_1}{}' + \ldots + y_{i_q}{}' + z_{i_1}{}' + \ldots + z_{i_q}{}' \geq c_{i_1 j_1} + \ldots + c_{i_q j_q} = v(S)$$

dir. Bu da

$$(y'; z') \in C(v)$$

sonucunu verir.

Bazı durumlarda (y′; z′) çekirdekte yegane imputasyondur. Ancak genellikle çekirdekte imputasyon tek değildir. Gerçekten, nonnegatif bileşenleri olan ve dual problemi minimum yapan (y^*, z^*) vektörü çekirdekte bulunur. Genel kural, satıcıların alıcılara optimal atanmasının tek olmadığıdır; Bununla beraber, pazar fiyatı da tek değildir. Üstelik, problemin yapısı gereği bir çok özel durumu da vardır [1], [6].

Problem 3 (basit oyunlar): 0-1 indirgenmiş oyunlar formunda bir oyun v olsun. N oyuncular kümesi olmak üzere,

$$v(N - \{i\}) = 0$$

eşitliğini sağlayan i oyuncusuna veto oyuncusu denir. Yani, bu oyuncu veto yetkisine sahip bir oyuncudur.

İlk olarak, v oyununda hiçbir veto oyuncusunun olmadığını kabul edelim. O halde, $\forall\, i \in N$ için,

$$v(N-\{i\}) = 1$$

dir. x imputasyonunun çekirdekte bulunması için,

$$\sum_{j \in N} x_j = v(N) = 1 \quad ,$$

$$\sum_{j \neq i} x_j \geq v(N-\{i\}) = 1$$

ifadeleri sağlanmalıdır. Böylece $\forall\, i$ için $x_i = 0$ olduğu görülür ki bu x' in herhangi bir imputasyon olması gereği ile çelişir. Bu çelişki $C(v) = \emptyset$ olduğunu ispatlar. Yani, veto oyuncusu bulunmayan bir oyunun çekirdeği boş kümedir.

Tersine olarak, v ' nin bir ya da daha fazla veto oyuncusunun olduğunu kabul edelim. S veto oyuncuları kümesi olsun.. x imputasyonunun bileşenleri,

$$\forall\, i \in S \text{ için } x_i \geq 0$$

ve

$$\forall\, i \in N \setminus S \text{ için } x_i = 0$$

olacak şekilde

$$\sum_{i \in S} x_i = 1$$

şartını sağlasın.

T bir kazanma koalisyonu ise, S $\subset$ T olmalıdır. Böylece,

$$\sum_{i \in T} x_i \geq \sum_{i \in S} x_i = 1 = v(T)$$

dir. Bu da

$$x \in C(v)$$

olduğunu gösterir. Böylece

$$C(v) \neq \emptyset$$

dir. O halde, "basit bir v oyununda çekirdeğin boş olmaması için g.v.y.ş. en azından bir veto oyuncusunun olmasıdır" iddiası ispatlanmış olur [1], [6].

3.5. Dengeli Koleksiyonlar

Herhangi bir n için boş olmayan çekirdeklere sahip n-kişili oyunlar kümesi 2^n-1 boyutlu öklidyen uzayın bir alt kümesi olan bir konveks konidir. v ve w'nin boş olmayan çekirdeklere sahip olduğunu kabul edelim. $x \in C(v)$, $y \in C(w)$ ve r,s nonnegatif skalerleri için,

$$rx + sy \in C(rv + sw)$$

dir. Bu konveks koniyi karakterize etmede, C(v) ≠ Ø olması için g.v.y.ş. in

Amaç: $$\min z = \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3.5.1}$$

Kısıtlar : $$\sum_{i \in S}^{n} x_i \geq v(S) \quad , \quad \forall S \subset I \text{ için} \tag{3.5.2}$$

DP probleminin $z^* \leq v(N)$ minimumuna sahip olması gerektiğini kaydedelim. Karşıt olarak $x \in C(v)$ ise x, (2.5.2) ifadesini sağlar. Üstelik,

$$\sum_{i \in I}^{n} x_i = v(N)$$

dır.

Böylece $z^* \leq v(1)$ olmalıdır. (3.5.1)-(3.5.2) nin duali

Amaç: $$\max q = \sum_{S \subset I} y_s v(S) \qquad (3.5.3)$$

Kısıtlar : $$\sum_{\substack{S \\ i \in S \subset I}} y_S = 1 \ , \qquad \forall\, i \in N \ \text{ için} \qquad (3.5.4)$$

$$y_S \geq 0 \ , \qquad \forall\, S \subset N \ \text{ için} \qquad (3.5.5)$$

yı göz önüne alalım.

Yukarıdaki problemlerin her ikisi de uygundur ve böylece $z^* = q^*$ ‘dır. Dolayısıyla, $C(v) \neq Ø$ olması için g.v.y.ş. $q^* \leq v(1)$ olmasıdır. Bu, şöyle de ifade edilebilir.

Teorem 3.5.1: v oyunun boş olmayan bir çekirdeğe sahip olması için g.v.y.ş. (3.5.4) ‘ü sağlayan $\forall\, (y_S)_{S \subset N}$ nonnegatif vektörü için,

$$\sum_{S \subset I} y_S v(S) \ \leq \ v(I) \qquad (3.5.6)$$

olmasıdır.

İspat: Görüldüğü gibi, bu teorem bize çok etkin bir araç vermemektedir. Çünkü, dual problem (3.5.4) – (3.5.5) ‘ten daha basit olmayan bir DP çözmeyi gerektirmektedir. Bununla beraber, (3.5.3)–(3.5.4) probleminin uç noktaları dengeli koleksiyon kavramını karakterize etmektedir [1].

Tanım 3.16: E ={ $S_1,S_2,\ldots,S_m$}, N = {1,2, …, n}'in boş olmayan alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Eğer her bir i $\in$N için,

$$\sum_{\substack{j \\ i\in s_j}} y_j$$

olacak şekilde pozitif y_1, $y_2,\ldots y_m$ sayıları mevcutsa E 'ye N-dengeli ya da basitçe dengeli koleksiyon denir. Burada y = (y_1, $y_2,\ldots y_m$), E' nin dengeleyici vektörü, y_j 'ler de dengeleyici katsayılarıdır [1], [6].

Bu tanımı açıklamak üzere aşağıdaki örnekleri verelim.

(a) {N} koleksiyonun dengeli bir koleksiyon olduğu açıktır. N' nin herhangi bir parçalanışı (birleşimi N olan, ayrık, boş olmayan kümelerin herhangi bir koleksiyonu) dengelidir ve dengeleyici katsayıların tümü N 'dir.

(b) N = {1,2,3} olsun. E = [{1,2}, {1,3}, {2,3}] koleksiyonu (½, ½, ½) dengeleyici vektörü ile dengelenmiştir. Genel olarak, herhangi bir N için, bu kümenin s elemanlı bütün $\binom{n}{s}$ tane alt kümesinin koleksiyonu da dengelidir ve her bir dengeleyici katsayı $\binom{n-1}{s-1}^{-1}$ dir.

(c) N= {1, 2, 3, 4} olsun. E = [{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3,4}] koleksiyonu y = (⅓,⅓,⅓,⅔) dengeleyici vektörü ile dengelenmiştir.

(d) Bu vektörün nasıl bulunduğunu gösterelim. Koleksiyondaki her bir koalisyona karşılık dengeleyici katsayılar sırasıyla $y_1,\ldots,y_4$ olmak üzere koleksiyonun dengeleyici vektörü (y_1,y_2,y_3,y_4) olsun. Her bir oyuncu için dengeleyici vektör bileşenlerinin sağlaması gereken denklemler :

$$\begin{array}{ll} \text{1 oyuncusu için} & y_1+y_2+y_3 \qquad = 1 \\ \text{2 oyuncusu için} & y_1 \qquad\quad +y_4 = 1 \\ \text{3 oyuncusu için} & \quad y_2 \quad +y_4 = 1 \\ \text{4 oyuncusu için} & \qquad\quad y_3+y_4 = 1 \end{array}$$

dir.

Sistemin çözümünden verilen koalisyona ait dengeleyici vektör

$$(y_1,y_2,y_3,y_4) = (⅓,⅓,⅓,⅔)$$

olarak bulunur.

Esas olarak, bir dengeleyici koleksiyon örnek (a)'da görüldüğü gibi genelleştirilmiş bir parçalanış ile elde edilebilir. N 'nin parçalanışından çok daha fazla sayıda N – dengeli koleksiyonların olduğu da şüphesizdir.

Teorem 3.5.2: Dengeli koleksiyonların birleşimi de dengelidir.

İspat : $E = \{S_1, S_2,\ldots, S_m\}$ ve $D = \{ T_1, \ldots, T_k \}$ sırasıyla dengeleyici vektörleri $(y_1, y_2,\ldots y_m)$ ve $(z_1, z_2,\ldots z_k)$ olan dengeli iki koleksiyon olsun. $q \leq m + k$ olmak üzere $E \cup D = \{ R_1, \ldots R_q \}$ 'dur. Herhangi bir t $(0 < t < 1)$ için,

$$w_j = \begin{cases} t - y_l & , \quad R_j = S_l \in E/D \text{ ise} \\ (1-t).z_p & , \quad R_j = T_p \in D/E \text{ ise} \\ t.y_l + (1-t).z_p & , \quad R_j = S_l = T_p \in E \cap D \text{ ise} \end{cases}$$ tanımlayalım.

$(w_1,\ldots,w_q)$ 'nun $E \cup D$ için bir dengeleyici vektör olduğu görülebilir .

Gerçekten,

$$\sum_{j} w_j = t\sum_{E/D} y_l + (1\text{-}t)\sum_{D/E} z_p + \sum_{E\cap D} y_l + (1\text{-}t)\sum_{D\cap E} z_p$$

$$= t\,[\sum_{E/D} y_l + \sum_{E\cap D} y_l\,] + (1\text{-}t)[\sum_{D/E} z_p + \sum_{D\cap E} z_p\,]$$

$$= t\sum_{E} y_l + (1\text{-}t)\sum_{D} z_p = t + (1\text{-}t) = 1$$

ve $\forall j$ için $w_j > 0$' dır. Böylece iki dengeli koleksiyonun birleşimi dengelidir ve tümevarımla herhangi sayıda dengeli koleksiyonun birleşiminin de dengeli olduğu gösterilebilir [1], [6].

Teorem 3.5.3: $E \subset D$ ve $E \neq D$ olmak üzere E ve D dengeli koleksiyonlar olsun. $B \cup E = D$ ve $B \neq D$ olacak şekilde bir B dengeli koleksiyonu vardır. Üstelik D nin dengeleyici vektörü tek değildir.

İspat :

$$E = \{S_1, S_2, \ldots S_k\}$$

$$D = \{S_1, S_2, \ldots S_k, \ldots S_m\}, \quad m > k$$

nin dengeleyici vektörleri $\{y_1,\ldots,y_k\}$ ve $\{z_1,\ldots,z_m\}$ olsun. $t > 0$ için,

$$w_j = (1\text{-}t)z_j - t \,.\, y_j\,,\ j = 1,\ldots,k$$
$$w_j = (1+t)z_j\,,\ j = k+1,\ldots,m$$

tanımlayalım. Küçük bir $t > 0$ için, $\forall w_j > 0$' dır.Ayrıca, $i \in I$ için,

$$\sum_{\substack{j \\ i\in S_j\in D}} w_j = (1+t)\sum_{\substack{j \\ i\in S_j\in D}} z_j - \sum_{\substack{j \\ i\in S_j\in E}} y_j = 1$$

olduğundan w, D' nin bir dengeleyici vektörüdür. $k+1 \le j \le m$ için $w_j > z_j$ olduğundan, z 'nin tek olmadığı görülür.

$y_j > z_j$ eşitsizliğini sağlayan bir j ($1 \leq j \leq k$) vardır. Aksi halde, herhangi bir $i \in S_{k+1}$ için,

$$\sum_{\substack{j \\ i \in S_j \in E}} y_j \leq \sum_{\substack{j \\ i \in S_j \in E}} z_j < \sum_{\substack{j \\ i \in S_j \in D}} z_j = 1$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

$T = \min \left\{ \frac{z_j}{y_j - z_j} \quad | \quad y_j > z_j \right\}$ alalım.

$$E' = \{S_j \mid S_j \in E, (1 + t)\, z_j = t \,.\, y_j \} \text{ ve } B = D \setminus E'$$

olsun. E′ nün, E' nin boş olmayan bir alt koleksiyonu olduğu açıktır. Böylece

$$B \neq D, \qquad B \cup E = D$$

elde edilir. Üstelik $\forall S_j \in B$ için $w_j > 0$' dır ve (t' nin bu değeri için) w nin B koleksiyonu için bir dengeleyici vektör olduğu görülebilir. [1]

Tanım 3.16: Hiçbir öz alt koleksiyonu dengeli olmayan dengeli bir koleksiyona minimal dengeli koleksiyon denir [1].

Teorem 3.5.4: Herhangi bir dengeli koleksiyon minimal dengeli koleksiyonların birleşimidir.

İspat : m (koleksiyondaki kümelerin sayısı) üzerinden indüksiyon ile ispat edilir.M=1 olduğunda teorem aşikar olarak doğrudur. Çünkü, bir kümesi olan yegane dengeli koleksiyon {N} dir ki bunun minimal olduğu aşikardır. m-1 ya da daha az elemanlı bütün koleksiyonlar için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. D, m elemanlı dengeli bir koleksiyon olsun.

D nin kendisi minimal ise, minimal dengeli koleksiyonların birleşimi olduğu açıktır. D minimal değilse, bir dengeli E öz alt koleksiyona sahiptir ve teorem(3.5.3)'den $B \cup E = D$ olacak şekilde bir başka dengeli öz alt koleksiyon mevcuttur. B ve E öz alt koleksiyonlar olduklarından her birinin m-1 veya daha az elemanı vardır. Dolayısıyla her biri minimal koleksiyonların birleşimi olarak ifade edilebilir. Böylece D de minimal dengeli koleksiyonların birleşimi olarak ifade edilmiş olur [1], [6].

Teorem 3.5.5: Dengeli koleksiyonun tek bir dengeleyici vektöre sahip olması için g.v.y.ş. minimal koleksiyon olmasıdır.

İspat : Dengeleyici vektör sadece minimal dengeli koleksiyonlar için yeganedir. Bu, Teorem 2.5.3 vasıtasıyla anlaşılır. Karşıt olarak, $E = \{ S_1, S_2,\ldots,S_m \}$ minimal koleksiyonunun y ve z gibi iki farklı dengeleyici vektörünün olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmaksızın, en az bir j için $y_j < z_j$ kabulü yapılabilir. Daha önce tanımlandığı gibi $t= \min\{ z_j / (y_j-z_j) \mid y_j > z_j \}$ olmak üzere $w = (1+t)z-ty$ seçebiliriz. w 'nin $B = \{S_j \mid (1+ t)z_j > ty_j \}$ için bir dengeleyici vektör olduğu görülür. B, E 'nin bir öz alt koleksiyonu olduğundan E minimal değildir. Bu çelişkiye, farklı iki dengeleyici vektörün olması kabulünden düştük.

Böylece, dengeli koleksiyonlar kesinlikle minimal dengeli koleksiyonların birleşimidir ve bu minimal dengeli koleksiyonlar için dengeleyici vektörler de tektir [1].

Teorem 3.5.6: (3.5.3) - (3.5.5) problemin uç noktaları minimal dengeli koleksiyonların dengeleyici vektörleridir.

İspat : $y = (y_S)_{S \subset N}$, (2.5.4) - (2.5.4) kısıtlarını sağlasın. O halde, $E = \{S \mid y_S > 0 \}$ koleksiyonu için y bir dengeleyici vektördür.

E koleksiyonu minimal değilse, dengeleyici vektörü $z = (z_s)_{S \subset N}$ olan bir B dengeli bir öz alt koleksiyonu vardır.Ancak $y_s > 0$ olduğunu biliyoruz.Böylece küçük bir $t > 0$ için

$$w = (1-t)y + tz$$
$$w' = (1+t)y - tz$$

nin her ikisi de (3.5.4) - (3.5.5) kısıtlarını sağlar. $w \neq w'$ dür. Çünkü herhangi S $\in$ E \ B için $w_s < w'_s$ dür. Ayrıca, $y = \frac{1}{2}(w + w')$olduğundan y, (3.5.3) - (3.5.5) probleminin uç noktası değildir.

Diğer taraftan E ‘nin minimal dengeli koleksiyon olduğunu kabul edelim. y uç nokta değilse $y = \frac{1}{2}(w + w')$ yazabiliriz. Burada $w \neq w'$ dür ve hem w, hem de w' (2.5.4) - (3.5.5) kısıtlarını sağlamaktadır.(3.5.5) nonnegatiflik kısıtından $y_s = 0$ ‘a karşılık gelen $w_s = w_s' = 0$ elde edilir.Böylece w ve w' , sırasıyla B ve B′ için dengeleyici vektörlerdir.Burada $B = \{ S \mid w_s > 0 \}$, $B' = \{ S \mid w'_s > 0 \}$ ‘ ların her ikisi de E’nin alt koleksiyonlarıdır. E minimal olduğundan B ve B′ nün her ikisi de E ile çakışır. Teorem (3.5.4)’den $w_s = w'_s = y$ olduğu sonucu çıkar ki bu çelişki y’ nin uç nokta olduğunun ispatıdır [6].

Teorem 3.5.7: Bir minimal I-dengeli koleksiyonun en fazla n tane kümesi vardır.

İspat : E, bir minimal dengeli koleksiyon olsun. E nin dengeleyici vektörü y, (3.5.3) - (3.5.5) probleminin bir uygun taban çözümüdür. y’ nin sadece taban değişkenleri (bileşenleri) pozitif olabilir. Fakat (3.5.3) - (3.5.5) probleminin n tane taban değişkeni vardır (bu, nonnegatiflik kısıtlarının haricindeki esas kısıtların sayısıdır). Böylece y ‘ nin, E deki n tane (ya da daha az) kümeye karşılık gelen, en fazla n tane pozitif bileşeni vardır. [1]

Şimdi, boş olmayan çekirdeklere sahip oyunları etkin bir şekilde karakterize edebiliriz.

Örnek 3.5.1: I = {1,2,3 } olsun. Parçalanışlar (yani, kesişimleri boş ve birleşimi N olan) haricinde sadece minimal dengeli koleksiyon vardır. Bu, dengeleyici vektörü

(1/2, 1/2 , 1/2) olan E = {(1,2),(1,3),(2,3)} koleksiyonudur. Böylece, üç-kişili v oyununun boş olmayan bir çekirdeğe sahip olması için g.v.y.ş.

$$v(1,2) + v(1,3) + v(2,3) \leq 2\, v(I)$$

olmasıdır.

Örnek 3.5.2: I = {1,2,3,4} olsun. Parçalanışlardan başka minimal N-dengeli koleksiyonlar,

a) E = {(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4) (2,3,4)}, y = (1/3,1/3,1/3,1/3)
b) E = {(1,2),(1,3),(1,4) (2,3,4)}, y = (1/3,1/3,1/3,2/3)
c) E = {(1,2),(1,3),(2,3) (4)}, y = (1/2,1/2,1/2,1)
d) E = {(1,2),(1,3,4),(2,3,4)}, y = (1/2,1/2,1/2)

dir. Bu koleksiyonun haricindekiler permütasyonla elde edilebilir. Toplam $2^4 - 1 =$ 15 tane olan koleksiyonların bir tanesi (a) tipinde, dört tanesi (b), dört tanesi(c) ve altı tanesi de (d) tipindedir. Oyunun 0-1 indirgenmiş formunda (ve süpertoplanabilir) olduğunu kabul ederek bu, on beş tane eşitsizlik,

a) $v(1,2,3) + v(1,2,4) + v(1,3,4) + v(2,3,4) \leq 3$
b) $v(1,2) + v(1,3) + v(1,4) + v(2,3,4) \leq 3$
c) $v(1,2) + v(1,3) + v(2,3) \leq 3$
d) $v(1,2) + v(1,3,4) + v(2,3,4) \leq 3$

sistemini verir.

Süpertoplanabilirlikten (d) kısıtlarının (c)‘ yi de sağladığı açıktır. Böylece (a) tipinden bir, (b) tipinden dört ve (d) tipinden altı tane olmak üzere v’ nin boş olmayan çekirdeğe sahip olması için sağlaması gerekli kısıt sayısının 11 tane olduğu görülür.

v' nin dört kişili simetrik bir oyun olduğu kabulü yapıldığında, süpertoplanabilirlik de göz önüne alınarak (a) tipindeki kısıtın (b) ve (d) tipindeki kısıtları da sağladığı görülür. Şu halde S' nin eleman sayısı s olmak üzere $v(S) = v_s$ ile gösterirsek bu eşitsizliklerin tamamı (a) dan elde edilen tek bir $v_3 \leq ¾$ eşitsizliğine indirgenir.

Örnek 3.5.3: Oyuncular kümesi N = {1,2,….,n} olan bir üretim oyunu ya da ekonomiyi göz önüne alalım. Her bir oyuncunun elinde q çeşit maldan bir takım olsun. Daha da özel olarak, i oyuncusunun elinde C_1 malından b_{i1} adet, C_2 malından b_{i2} adet, …, ve C_q malından b_{iq} adet bulunsun. Bir oyuncu için kendi elinde bulunan malın değerinin olmadığını kabul edelim. Ancak bu mallar G_1, G_2, …, G_m mallarının üretimin de kullanılan kaynaklar konumundadır. Üretilen bu malların birim pazar fiyatları sabittir. Lineer bir üretim prosesi olduğunu kabul edelim. Bir birim G_L ürününü üretmek için C_1 den a_{1L} birim, C_2 den a_{2L} birim, …, ve C_q dan a_{qL} birim kullanılmaktadır. Ayrıca G_L nin birim pazar fiyatı P_L p.b 'dir.

Belli bir S koalisyonu oluştuğunda, ürünlerin pazar fiyatını maksimize etmek için koalisyona katılan oyuncular muhtemelen kaynaklarını birleştireceklerdir. Böylece koalisyonun karakteristik fonksiyonu,

Amaç: $$v(S) = \max \sum_{l=1}^{m} p_l x_l \tag{3.5.7}$$

Kısıtlar: $$\sum_{l=1}^{m} a_{kl} x_l \leq b_k(S) \quad , \quad k=1,2,\ldots,q \tag{3.5.8}$$

$$x_l \geq 0 \quad , \quad l=1,2,\ldots,m \tag{3.5.9}$$

DP problemi ile verilir. Burada

$$B_k(S) = \sum_{l \in S} b_{lk}$$

S koalisyonunun sahip olduğu C_k kaynağının toplam miktarıdır. v nin boş olmayan bir çekirdeğe sahip olduğunu göstereceğiz. E = {S_1, S_2, …,S_r} dengeleyici vektörü

$(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ olan bir dengeli koleksiyon olsun. Her bir $S_j \in E$ için, (3.5.7) – (3.5.8) probleminin optimum çözümü $x^j = (x_1^j, \ldots, x_m^j)$ olsun.

$$x^* = \sum_{j=1}^{r} y_j x^j \geq 0$$

alalım. Her bir k için,

$$\sum_{l=1}^{m} a_{kl} x_l^* = \sum_{j=1}^{r} y_j \sum_{l=1}^{m} a_{kl} x_l^j$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r} y_j \sum_{i \in S_j} b_{ik} = \sum_{i \in I}^{r} b_{ik} \sum_{\substack{j \\ i \in S_j}} y_j$$

$$= \sum_{i \in I} b_{ik} = b_k(N)$$

elde edilir. Böylece x^*, v(N) yı tanımlayan DP problemi için (3.5.8) – (3.5.9) kısıtlarını sağlar.Dolayısıyla,

$$\sum_{l=1}^{m} P_l x_l^* \leq v(N)$$

dır. Ayrıca,

$$\sum_{j=1}^{r} y_j v(S_j) = \sum_{j=1}^{r} y_j \sum_{l=1}^{m} P_l x_l^j = \sum_{l=1}^{m} P_l x_l^* \leq v(N)$$

olur. Bu, bütün dengeli E koleksiyonları için doğru olduğundan, oyunun bir çekirdeğe sahip olduğu sonucunu verir [1], [6].

Problem 5: Beş hissedarlı (oyuncular kümesi N={1,…,5}) bir şirkette 1 hissedarın 80 hissesi diğerlerinin her birinin 30 ar hissesi olduğunu varsayalım. Yatırım projesinin kazancı R=100 ve yatırım projesinin kabulü içinde oy barajı %50 olsun. Buna göre oyunun karakteristik fonksiyonu

$$v(S)=\begin{cases} 0.5\sum_{i\in S} w_i & , \quad \sum_{i\in S} w_i \geq 100 \text{ için} \\ 0 & , \quad \sum_{i\in S} w_i \langle \ 100 \end{cases}$$

yapısındadır.

İlk olarak 1 hissedarı hariç bütün oyuncuların kendilerinin bulunmadığı her bir koalisyona aynı şekilde katkı sağlayacağını kaydedelim. Böylece bu oyuncular simetriktirler. Ve eşit ödemeler elde ederler. Bu oyunculardan her birinin ödemesini α ile gösterirsek,

$$\Phi_2(v) = \Phi_3(v) = \Phi_4(v) = \Phi_5(v) = \alpha$$

dır.

$$\sum_{i\in 1}^{5} \Phi_i(v) = R = v(N)$$

dan

$$\alpha = [v(N) - \Phi_1(v)]/4$$

olacaktır. İkinci olarak, $\Phi_1(v)$ yi hesaplamak için, 1 oyuncusunu bulunduran bütün S koalisyonlarına 1 oyuncusunun yaptığı katkı miktarı

$$v(S) - v(S \backslash N) = \begin{cases} 0 & , \quad |S| = 1 \\ 40 + 15(|S| - 1) & , \quad 2 \leq |S| < 5 \\ 40 & , \quad |S| = 5 \end{cases}$$

kadardır. Çünkü 1 oyuncusu çoğunluğu elde edebilmek için en az bir diğer oyuncuya ihtiyaç duymaktadır. |S|=5 hariç 1 oyuncusunu içermeyen hiçbir koalisyon projeyi kabul ettiremez. n oyuncudan i içeren |S| elemanlı koalisyonların sayısı

$$\binom{n-1}{|S|-1} = (n-1)! \,/\, \{ (|S|-1)!\ (n-|S|)! \}$$

dır.

$$\gamma_i\ (S) = \frac{(n-|S|)!\ (|S|-1)!}{n!}$$

ifadesi i oyuncusunun S koalisyonuna yaptığı katkının katsayısı olduğundan (simetride göz önüne alındığında) i oyuncusunu içeren tüm |S| elemanlı koalisyonlara bu oyuncunun yaptığı katkının katsayısı

$$\gamma_i\ (S).\ \binom{n-1}{|S|-1} = \frac{1}{n}$$

Olacaktır. Buna göre, 1 oyuncusuna ait Shapley değeri,

$$\Phi_1(v) = \sum_{S \subset N} \binom{n-1}{|S|-1} \frac{(n-|S|)!\ (|S|-1)!}{n!}\ [v(S)\text{- } v(S \backslash N\ )]$$

den

$$\Phi_1(v) = \ \frac{1}{5}\,[(40+15.1)+(40+15.2)+(40+15.3)+40]=50$$

olarak bulunur. Diğer bütün hissedarlar için

$$\Phi_i\ (v) = \ \alpha = (100\text{-}50)/4 = 12.5$$

dir.

1 hissedarının hisse oranına göre daha büyük bir oranda pay aldığına dikkat edilmelidir. Bu durum, onun daha büyük nüfuza sahip olduğunu yansıtmaktadır. Küçük hissedarların %60 hisseyi elerinde bulundurmalarına rağmen, bunların tümünün birlikte oluşturacakları koalisyon un haricindeki tüm durumlarda 1 oyuncusu anahtar rolü oynamaktadır. Bu da bir oyuncusuna %40 hisseyle %50 pay kazandırmaktadır.

Problemimizde şu değişikliği yapalım.1 oyuncusundan başka her biri 60 hisseye sahip sadece iki hissedar olsun problemin diğer verilerinde hiçbir değişiklik olmasın.

Bu durumda oyuncu kümesi N={1, 2, 3} dür. Daha önce yapılan benzer işlemlerle

$$\Phi(v) = (\Phi_1(v), \Phi_2(v), \Phi_3(v)) = (110/3, 95/3, 95/3) = (36.6, 31.6, 31.6)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi 1oyuncusunun şirketteki %40 lık payında değişiklik olmamasına rağmen bu oyundan elde ettiği ödemede hayli küçülme olmuştur. Bu durum öncekine göre 1 oyuncusunun baskınlığının (nüfuzunun) ortadan kalkmasından kaynaklanmaktadır. Bunun sonucu olarak %40 lık hisseye karşılık kazançta %36.6 lık bir pay elde edebilmiştir. Bu da, geri kalan hisselerin diğer oyuncular arasında dağılımının 1 oyuncusu açısında önemini vurgulamaktadır.

BÖLÜM 4. n-KİŞİLİ OYUN İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇÖZÜM TEKNİKLERİ

Tanım 4.1: N oyuncular kümesi, $\forall i \in N$ için S_i stratejiler kümesi ve H_i ödeme fonksiyonu olmak üzere,

$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N} \rangle$ oyununda N={1,2} , $S_1=\{s_1^1, s_1^2, \ldots, s_1^m\}$, $S_2=\{s_2^1, s_2^2, \ldots, s_2^n\}$ olsun.

1 oyuncusunun stratejilerini matrisin satırlarına, 2 oyuncusunun stratejilerini matrisin sütunlarına karşılık getirelim. (s_1^i, s_2^j) durumunda oyuncuların ödemeleri sırasıyla $H_1(s_1^i, s_2^j)$, $H_2(s_1^i, s_2^j)$ olmak üzere

Tablo 4.1: İki Kişilik Sonlu Stratejili Oyun Ödeme Matrisi

	s_2^1	s_2^2	.	s_2^n
s_1^1	$H_1(s_1^1, s_2^1), H_2(s_1^1, s_2^1)$	$H_1(s_1^1, s_2^2), H_2(s_1^1, s_2^2)$	.	$H_1(s_1^1, s_2^n), H_2(s_1^1, s_2^n)$
s_1^2	$H_1(s_1^2, s_2^1), H_2(s_1^2, s_2^1)$	$H_1(s_1^2, s_2^2), H_2(s_1^2, s_2^2)$	.	$H_1(s_1^2, s_2^n), H_2(s_1^2, s_2^n)$
...	.	.	.	.
s_1^m	$H_1(s_1^m, s_2^1), H_2(s_1^m, s_2^1)$	$H_1(s_1^m, s_2^2), H_2(s_1^m, s_2^2)$	.	$H_1(s_1^m, s_2^n), H_2(s_1^m, s_2^n)$

matrisi iki kişili bir oyun belirler.

Benzer şekilde $N=\{1,2,3\}$, $S_1=\{s_1^1, s_1^2,\ldots, s_1^m\}$, $S_2=\{s_2^1, s_2^2,\ldots, s_2^n\}$ ve $S_3=\{s_3^1, s_3^2,\ldots, s_3^p\}$ olsun. (s_1^i, s_2^j, s_3^k) durumunda oyunculara ait ödemeler sırasıyla $H_1(s_1^i, s_2^j, s_3^k)$, $H_2(s_1^i, s_2^j, s_3^k)$ ve $H_3(s_1^i, s_2^j, s_3^k)$ dır. Bu ödemeler üçlüsü matrisyel formda bir oyun belirler. Şöyle ki; 1 oyuncusunun stratejilerine karşılık matris satırları, 2 oyuncusunun stratejilerine karşılık matris sütunları ve 3 oyuncusunun her bir stratejisine karşılık bir matris olmak üzere p tane matrisle üç-kişili oyun belirlenir[1].

Örnek 4.1:

Tablo 4.2: Örnek 4.1. Kazanç Matrisi

Oyuncu 2 …(1)

Oyuncu 1		s_2^1	s_2^2	s_2^3	s_2^4
	s_1^1	4,2	3,3	1,2	7,2
	s_1^2	3,8	2,4	0,2	5,5
	s_1^3	4,1	4,2	0,1	5,0

matrisi iki kişili bir oyun belirlemektedir. Burada sayı çiftlerindeki ilk eleman 1 oyuncusuna, ikinci eleman 2 oyuncusuna ait ödemeyi(kazancı) göstermektedir.

1. Çözüm Tekniği:

Örnek 4.2: Birisi başkan olmak üzere üç kişi, {a,b,c} proje kümesinden bir proje seçecektir. Belli bir proje için oylamada çoğunluk sağlanırsa o proje uygulamaya konulacaktır. Fakat çoğunluk sağlanamazsa, 1 oyuncusunun, yani başkanın, önerdiği proje uygulanacaktır. Projeler uygulandığında oyuncuların beklediği faydaların

$$u_1(a)=3 \;,\; u_2(a)=2 \;,\; u_3(a)=1$$
$$u_1(b)=2 \;,\; u_2(b)=1 \;,\; u_3(b)=3$$
$$u_1(c)=1 \;,\; u_2(c)=3 \;,\; u_1(c)=2$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Oyunda N={1,2,3} dür ve her bir oyuncunun a,b,c projelerini seçme stratejileri sırasıyla A, B, C dir. Bununla ilgili oyun matrisleri aşağıda verilmiştir.

Tablo 4.3: Örnek 4.2. Kazanç Matrisleri

Oyuncu 3

Oyuncu 2		**A**	**B**	**C**
	A	3,2,1	3,2,1	3,2,1
	B	3,2,1	2,1,3	3,2,1
	C	3,2,1	3,2,1	1,3,2

oyuncu 1:**A**

Oyuncu 3

Oyuncu 2		**A**	**B**	**C**
	A	3,2,1	2,1,3	2,1,3
	B	2,1,3	2,1,3	2,1,3
	C	2,1,3	2,1,3	1,3,2

oyuncu 1:**B**

Oyuncu 3

Oyuncu 2		**A**	**B**	**C**
	A	3,2,1	1,3,2	1,3,2
	B	1,3,2	2,1,3	1,3,2
	C	1,3,2	1,3,2	1,3,2

oyuncu 1:**C** ….(2)

Oyuncuların değişik kombinezonlarda sıralanışları oyunun karakterini değiştirmeyecektir. Bu nedenle matrisler 1. oyuncunun stratejilerine göre oluşturulmuştur. 2. oyuncunu stratejilerine karşılık matrislerin satırları, 3. oyuncunun stratejilerine karşılık da matrislerin sütunları belirlenmiştir.

Örnek 1 deki matris için stratejiler arası baskınlığı inceleyelim.

$\forall s_2^j \in S_2$ için $\qquad H_1(s_1^1, s_2^j) \geq H_1(s_1^2, s_2^j)$

yani matrisin birinci satırındaki ilk bileşenler ikinci satırındaki ilk bileşenlerden büyük-eşit olacağından, 1 oyuncusunun s_1^1 stratejisi s_1^2 stratejisini basar ($s_1^1 \succ s_1^2$). 1 oyuncusu hiçbir zaman s_1^1 olduğu yerde s_1^2 yi oynamayacağından basılan s_1^2 stratejisini oyundan eler. s_1^1 ve s_1^3 stratejileri arasında böyle bir baskınlık tanımlamak mümkün değildir. Buna göre, 1 oyuncusu için oyun matrisi

Oyuncu 2 …(3)

		s_2^1	s_2^2	s_2^3	s_2^4
Oyuncu1	s_1^1	4,2	3,3	1,2	7,2
	s_1^3	4,1	4,2	0,1	5,0

yapısında olacaktır.

Benzer şekilde $\forall s_1^i \in S_1$ için, $H_2(s_1^i, s_2^1) \geq H_2(s_1^i, s_2^3)$ yani matrisin birinci sütunundaki ikinci bileşenler, üçüncü sütunundaki ikinci bileşenlerden büyük-eşittir. Buna göre, 2 oyuncusunun s_2^1 stratejisi s_2^3 stratejisini basar ($s_2^1 \succ s_2^3$). Aynı şekilde $H_2(s_1^i, s_2^1) \geq H_2(s_1^i, s_2^4)$ dür, yani $s_2^1 \succ s_2^4$ dür ve yine $H_2(s_1^i, s_2^2) \geq H_2(s_1^i, s_2^3)$ olduğundan $s_2^2 \succ s_2^3$ dür. Böylece, 2 oyuncusu basılan s_2^3 ve s_2^4 stratejilerini oyundan eler, yani bu stratejilere karşılık gelen matrisin üçüncü ve dördüncü sütunlarını göz önüne almaz. Şu halde, 2 oyuncusu için oyun matrisi

Oyuncu 2 …(4)

Oyuncu 1

	s_2^1	s_2^2
s_1^1	4,2	3,3
s_1^2	3,8	2,4
s_1^3	4,1	4,2

yapısındadır.

Oyun 1 ve 2 oyuncuları arasında geçtiğinden basılan stratejiler elendikten sonra (1) matrisi ne (3) ne de (4) matrisi yapısına indirgenir. Fakat (3) ile (4) ün arakesiti olan

Oyuncu 2

Oyuncu 1

	s_2^1	s_2^2
s_1^1	4,2	3,3
s_1^3	4,1	4,2

matrisine indirgenir.

Stratejileri arsındaki baskınlık, oyuncular tarafından ayrı ayrı ele alınırsa, aynı oyun matrisi oyuncuların her birisi için sanki farklı matrislermiş gibi algılanabilir (örneğin (1) matrisi 1 oyuncusu için (3) , 2 oyuncusu için (4) yapısında algılandığı gibi). Oysa, bir oyuncu rakibinin de en az kendisi kadar akıllı olduğunu göz önüne alarak onunda basılan stratejilerini eleyeceğini bilir. Kendi stratejileri arasındaki baskınlığı incelerken bu iteratif baskınlığı kullanır.

Örnek 1 deki oyun matrisinde ilk baskınlık elemesini 1 oyuncusu yaptığında (3) matrisi elde edilir. 1 oyuncusunun bu elemeyi yapacağını bilen 2 oyuncusu (1) matrisi yerine sadece (3) matrisini göz önüne alacaktır. Yani, baskınlığı (3) matrisi üzerinde düşünecektir. (3) matrisinin ikinci sütunundaki ikinci elemanlar diğer sütunlardaki ikinci elemanlardan büyük olduğundan $s_2^2 \succ s_2^1$, $s_2^2 \succ s_2^3$ ve $s_2^2 \succ s_2^4$ dür. Yani, 2 oyuncusunun s_2^2 stratejisi diğer bütün stratejilerini basar ve oyuncu, daha az kazandıran bu stratejilerini oyundan eler. Bu durumda oyun matrisi

Oyuncu 2 …(5)

Oyuncu 1		s_2^2
	s_1^1	3,3
	s_1^3	4,2

matrisine indirgenir. 2 oyuncusunun bu akıllıca seçimi yapacağını bilen 1 oyuncusu artık oyun matrisi olarak (3) yerine (5) i göz önüne alacaktır. $H_1(s_1^3, s_2^2) > H_1(s_1^1, s_2^2)$ olduğunda s_1^3 stratejisi s_1^1 stratejisini basar ($s_1^3 \succ s_1^1$). Bu durumda 1 oyuncusu s_1^1 stratejisini oyundan eler, çünkü s_1^3 stratejisi daha fazla kazandırmaktadır. Böylece son olarak oyun matrisi

Oyuncu 2 … (6)

Oyuncu 1		s_2^2
	s_1^3	4,2

yapısına indirgenir.

İlk elemeyi 2 oyuncusu yapsaydı (1) matrisi (4) matrisine indirgenirdi. (4) matrisinde, 1 oyuncusu stratejilerin baskınlığını araştırdığında, s_1^3 stratejisinin diğer bütün stratejilerini bastığını görecektir (çünkü (4) matrisinin üçüncü satırındaki ilk bileşenler diğer satırlardaki ilk bileşenlerden büyük-eşittir). Buna göre oyun matrisi

Oyuncu 2 …(7)

Oyuncu 1

	s_2^1	s_2^2
s_1^3	4,1	4,2

Yapısına indirgenir. Bunu bilen 2 oyuncusu da kendisi için daha iyi olan s_2^2 stratejisini s_2^1 tercih eder ve s_2^1 i eleyerek oyunu (6) formuna indirgemiş olur.

Demek oluyor ki (1) ile verilen oyun matrisi için, iteratif baskınlıkta oyuncuların oynama sırasının önemi yoktur. Sonuçta basılamaz pür stratejiler cinsinden oyun aynı matris formuna indirgenmiştir.

(6) ile elde edilmiş $s = (s_1^3, s_2^2)$ durumu (1) oyununun bir denge durumudur. Yani, 2 oyuncusu s_2^2 yi oynarken 1 oyuncusu ikinci sütundaki en büyük ödemeyi veren s_1^3 ü oynayacaktır. Şayet stratejisini değiştirirse 4 birim kazanç yerine 2 ya da 3 birim kazançla yetinmek durumunda kalacaktır. Bunun için 1 oyuncusu s_1^3 stratejisini değiştirmez. Bunu bilen 2 oyuncusu da s_1^3 e karşılık gelen üçüncü satırda ki kendisine en büyük kazancı veren s_2^2 stratejisini oynayacaktır. Eğer s_2^2 yerine diğer stratejileri oynarsa 0 yada 1 birim ödeme elde edecektir ki bu s_2^2 nin verdiği 2 birimden daha azdır. Böylece 2 oyuncusu da s_2^2 stratejisini değiştirmez.

Sonuç olarak, hiçbir oyuncunun stratejilerini değiştirmeyeceği bu $s=(s_1^3, s_2^2)$ durumu gerçekten bir denge durumudur. Bu durumda oyuncuların elde edeceği ödemeler $H_1(s) = 4$, $H_2(s) = 2$ dir.

Şimdi de Örnek 4.2. deki iteratif baskınlığı inceleyelim.

Birinci aşamada aşağıdaki stratejiler basılır ve elenir.

1 oyuncusu için: $\left.\begin{matrix} A \succ B \\ A \succ C \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ B ve C elenir.

2 oyuncusu için: $C \succ B \Rightarrow$ B elenir.

3 oyuncusu için. $B \succ C \Rightarrow$ C elenir.

Bu elemelerden sonra oyuncular ikinci aşamaya

Oyuncu 3

Oyuncu 2		**B**	**C**
	A	3,2,1	3,2,1
	C	3,2,1	1,3,2

Oyuncu 1:**A**

oyun matrisiyle girerler.

1 oyuncusunun stratejisi tek olduğundan (A stratejisi), oyun diğer iki oyuncu arasında geçecektir.

İkinci aşamadaki stratejiler arası baskınlığı inceleyelim:

2 oyuncusu için: $C \succ A \Rightarrow$ A elenir.

3 oyuncusu için: $C \succ B \Rightarrow$ B elenir.

Bu elemelerden sonra oyun matrisi

Oyuncu 3

Oyuncu 2		**C**
	C	1,3,2

Oyuncu 1:A

yapısındadır. Görüldüğü gibi A,C,C durumu bir denge durumudur. Bu durumda oyuncuların kazançları sırasıyla 1,3,2 olmuştur. Hiçbir oyuncu rakipleri değiştirmedikçe stratejisi değiştirmekle kazancını arttıramaz.

Görüldüğü gibi, son sözü söyleme yetkisine sahip olan 1 oyuncusuna (başkana) , bu özel statüsü beklendiği gibi bir avantaj sağlamamıştır. Üstelik, oyundan en az fayda ile ayrılmak zorunda kalmıştır[1].

2.Çözüm Tekniği:

n = 3 kişilik bu oyunun basılamaz pür stratejilerden oluştuğunu düşünürsek durum şu hale gelir:

3 oyuncumuz A,B,C ve her birinin stratejileri A_i (i=1,2,…,m), B_j (j=1,…,n), C_k (k=1,…,p) olsun.

A oyuncusunun A_i inci stratejiyi oynama olasılığı x_i ,
B oyuncusunun B_i inci stratejiyi oynama olasılığı y_j ,
C oyuncusunun C_i inci stratejiyi oynama olasılığı z_k

olmak üzere 3-kişili oyunu matrisyel formda şöyle gösterebiliriz.

Tablo 4.4: Üç Kişili Oyun İçin Kazanç Matrisleri

			C		
		C_1	**C_2**	**.**	**C_p**
	B_1	a_{111},b_{111},c_{111}	.	.	.
B	**B_2**	.	.	.	.
	.	.	.	.	.
	B_n	.	.		a_{1np},b_{1np},c_{1np}
			A_1		

olacaktır.

			C		
		C_1	**C_2**	**....**	**C_p**
	B_1	a_{211},b_{211},c_{211}			
B	**B_2**				
	.				
	B_n				a_{2np},b_{2np},c_{2np}
			A_2		

			C		
		C_1	**C_2**	**...**	**C_p**
	B_1	a_{311},b_{311},c_{311}			
B	**B_2**				
	.				
	B_n				a_{3np},b_{3np},c_{3np}
			A_3		

.

.

.

.

.

			C		
		C_1	**C_2**	**...**	**C_p**
	B_1	a_{m11},b_{m11},c_{m11}			
B	**B_2**				
	.				
	B_n				a_{mnp},b_{mnp},c_{mnp}
			A_m		

olacaktır.

x, y, z ye bağlı ödeme fonksiyonu H(x,y,z) olmak üzere

1. oyuncuya ait ödeme;

$$H_1(x,y,z) = \sum_i \sum_j \sum_k a_{ijk} x_i y_j z_k = a_{111} x_1 y_1 z_1 + a_{112} x_1 y_1 z_2 + a_{113} x_1 y_1 z_3 + \ldots + a_{mnp} x_m y_n z_p ,$$

2. oyuncuya ait ödeme;

$$H_2(x,y,z) = \sum_i \sum_j \sum_k b_{ijk} x_i y_j z_k = b_{111} x_1 y_1 z_1 + b_{112} x_1 y_1 z_2 + b_{113} x_1 y_1 z_3 + \ldots + b_{mnp} x_m y_n z_p ,$$

3. oyuncuya ait ödeme;

$$H_3(x,y,z) = \sum_i \sum_j \sum_k c_{ijk} x_i y_j z_k = c_{111} x_1 y_1 z_1 + c_{112} x_1 y_1 z_2 + c_{113} x_1 y_1 z_3 + \ldots + c_{mnp} x_m y_n z_p$$

olur.

Devamında kişi sayısı n = 4 olduğunda da her bir oyuncu için oyunda uyguladıkları stratejilerin ve diğer oyuncuların stratejileri göz önüne alınarak ödeme fonksiyonlarını

$$H_1(x,y,z,t) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l a_{ijkl} x_i y_j z_k t_l ,$$

$$H_2(x,y,z,t) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l b_{ijkl} x_i y_j z_k t_l ,$$

$$H_3(x,y,z,t) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l c_{ijkl} x_i y_j z_k t_l ,$$

$$H_4(x,y,z,t)=\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l d_{ijkl}x_iy_jz_kt_l\,,$$

olarak gösterebiliriz.

Burada,

$\sum x_i=1 \qquad x_i \geq 0$

$\sum y_j=1 \qquad y_j \geq 0$

$\sum z_k=1 \qquad z_k \geq 0$

$\sum t_l=1 \qquad t_l \geq 0$

olduğu açıktır.

Tabiî ki oyun

$H_1(x,y,z,t) \geq H_1(x_1=1,y,z,t),$

.

.

.

$H_1x,y,z,t) \geq H_m(x_m=1,y,z,t)$;

$H_2(x,y,z,t) \geq H_2(x,y_1=1,z,t),$

.

.

.

$H_2x,y,z,t) \geq H_n(x,y_n=1,z,t)$;

$H_3(x,y,z,t) \geq H_3(x,y,z_1=1,t),$

.

.

.

$H_3(x,y,z,t) \geq H_3(x,y,z_p=1,t)$,;

$H_4(x,y,z,t) \geq H_4(x,y,z,t_r=1)$,

.

.

.

$H_4(x,y,z,t) \geq H_4(x,y,z,t_r=1)$

kısıtları altında bir denge durumuna ulaştığında; oyunculardan hiç biri stratejilerini değiştirerek, bu denklemlerin nonlineer çözümü ile elde edilen kazançlardan daha fazlasını kazanamaz yada kayıplarından daha fazla kaybedemezler.

n kişinin bulunduğu bir oyunda genel çözüm için aşağıdaki yol tavsiye edilen bir çözüm olabilir.

$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i \in N}, , \{H_i\}_{i \in N} \rangle$ bir ortaksız oyun olsun. Oyunun sonlu olduğunu, yani $\forall i \in N$ oyuncusunun pür stratejiler kümesi S_i nin sonlu olduğunu kabul edelim.

σ_i , i oyuncusunun keyfi bir karma stratejisi olsun. S_i kümesi üzerinde tanımlanmış σ_i olasılık dağılımı , $\forall s_i \in S_i$ pür stratejine $\sigma_i(s_i)$ olasılığını eşler.

Burada $\sigma_i(s_i)$, i oyuncusunun s_i stratejisini oynama olasılığıdır. i oyuncusunun bütün karma stratejileri kümesi $\sum$ i ile gösterilir.

$\forall i \in N$ oyuncusu kendi karma stratejisini uygulasın. i oyuncusunun s_i pür stratejini oynaması, diğer oyuncuların kendi, pür stratejilerini oynamalarından bağımsızdır.

Yani $\sigma_i(s_i)$ i=1,..,n olasılıkları aralarında bağımsızdır. Şu halde $s = (s_1,\ldots,s_n)$ durumuna ulaşma olasılığı, bileşenlerin seçilme olasılıkları çarpımı, yani

$\sigma_1(s_1).\sigma_2(s_2)\ldots\sigma_n(s_n)$

dir.

Böylece, Γ oyununda bütün durumlar için

$$\sigma(s)=\sigma(s_1,\ldots,s_n)=\sigma_1(s_1).\sigma_2(s_2)\ldots\sigma_n(s_n)$$

şeklinde olasılık dağılımı tanımlanabilir. Bu tipteki bir σ olasılık dağılımı, Γ oyununun karma stratejilerdeki durumlarını gösterir. Buna göre, oyuncuların her birinin ödeme fonksiyon değeri bir rassal değişken olacaktır. Karma stratejilerde i oyuncusunun ödeme fonksiyonunun değeri, bu rassal değişkenin matematik ümidi olarak belirlenir. Yani,

$$H_i(\sigma)=\sum_{s\in S} H_i(s)\sigma(s)=\sum_{s_1\in S_1}\ldots\sum_{s_n\in S_n} H_i(s_1,\ldots,s_n)\prod_{i=1}^{n}\sigma_i(s_i)$$

dir.

Problem 4.1:

Savaş, Aysun ve Yağmur' un bulunduğu bir oyunda her birinin A ve B gibi ikişer stratejisi olsun. Aşağıda matrisyel formda verilen oyun için bir çözüm bulalım.

		Savaş A	
		Yağmur	
		A	**B**
Aysun	**A**	1,1,-2	-4,3,1
	B	2,-4,2	-5,-5,10

		Savaş B	
		Yağmur	
		A	**B**
Aysun	**A**	3,-2,-1	-6,-6,12
	B	2,2,-4	-2,3,-1

Aysun a göre oyunun kazanç matrisi,

			Yağmur	ve Savaş	
		AA	BA	AB	BB
Aysun	**A**	1	-4	3	-6
	B	2	-5	2	-2

Yağmur a göre oyunun kazanç matrisi,

			Aysun	ve Savaş	
		AA	BA	AB	BB
Yağmur	**A**	1	-4	-2	2
	B	3	-5	-6	3

Savaş a göre oyunun kazanç matrisi,

			Aysun	ve Yağmur	
		AA	BA	AB	BB
Savaş	**A**	-2	2	1	10
	B	-1	-4	12	-1

Aysun un kazanç matrisinde en düşük kayıplarını alarak yeni bir kazanç matrisi oluşturabiliriz.

		Yağmur	ve Savaş
		BA	BB
Aysun	**A**	-4	-6
	B	-5	-2

Aysun un karma stratejisi (x_1,x_2) ve Yağmur-Savaş karma stratejisi (y_1,y_2) olmak üzere;

$$-4x_1 - 5x_2 = D$$
$$-6x_1 - 2x_2 = D$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

denklemlerini çözersek;

$$2x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3/2\ x_2$$
$$3/2\ x_2 + x_2 = 1 \text{ den}$$
$$5/2\ x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 2/5 \text{ ve } x_1 = 3/5$$

bulunur.

$$-4y_1 - 6y_2 = D$$
$$-5y_1 - 2y_2 = D$$
$$y_1 + y_2 = 1$$

denklemlerini çözersek

$$y_1 - 4y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = 4y_2$$
$$4y_2 + y_2 = 1 \text{ den } y_2 = 1/5 \text{ ve } y_1 = 4/5$$

bulunur. Ve oyunun değeri de

$$-4.(3/5) - 5.(2/5) = -22/5$$

olarak hesaplanır.

Yani Aysun bu oyunda en fazla 22/5 p.b kaybedecektir.

Ve bu hesaplamalar ile

		Yağmur	**ve Savaş**	
		BA	**BB**	**Aysun un stratejileri kullanma olasılıkları**
	A	-4	-6	3/5
Aysun	**B**	-5	-2	2/5
	Yağmur ve Savaş ın stratejileri kullanma olasılıkları	4/5	1/5	**Oyunun değeri=** -22/5

oluşturulur.

Aysun un kazanç matrisini göz önüne alırsak; Aysun un Yağmur ve Savaş a göre ödeme vektörünü şöyle bulabiliriz.

H_A = (-4,3,1).(3/5).(4/5) + (-6,-6,12).(3/5).(1/5) + (-5,-5,10).(2/5)(4/5) + (-2,3,1).(2/5)(1/5) = (1/25)(-48,36,12) + (1/25)(-18,-18,36) + (1/25)(-40,-40,80) + (1/25)(-4,6,-2) = (1/25)(-110,-16,126) =
(-110/25, -16/25, 126/25)

bulunur.

Yağmur un kazanç matrisinde en düşük kayıplarını alarak yeni bir kazanç matrisi oluşturabiliriz.

		Aysun	**ve Savaş**
		BA	**AB**
Yağmur	**A**	-4	-2
	B	-5	-6

Yağmur un karma stratejisi (x_1,x_2) ve Aysun-Savaş karma stratejisi (y_1,y_2) olsun.

$$-4x_1 -5x_2 = D$$
$$-2x_1 -6x_2 = D$$
$$x_1+x_2 = 1$$

denklemlerini çözersek;

$$-2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -3x_1=-1 \Rightarrow x_1=1/3$$
$$1/3 + x_2=1 \text{ den}$$
$$x_2=2/3$$

dir.

$$-4y_1 -2y_2=D$$
$$-5y_1 -6y_2=D$$
$$y_1+y_2=1$$

denklemlerini çözersek

$$y_1 + 4y_2=0 \Rightarrow 3y_2=-1 \Rightarrow y_2=-1/3$$
$$y_1+-1/3=1 \text{ den}$$
$$y_1=4/3$$

bulunur ve oyunun değeri de

$$D=-4.(1/3) -5.(2/3) = -14/3$$

olarak hesaplanır.

Yani Yağmur bu oyunda en fazla 14/3 p.b kaybedecektir.

Ve bu hesaplamalar ile

		Aysun	**Ve Savaş**	
		BA	**AB**	**Yağmur un stratejileri kullanma olasılıkları**
	A	-4	-2	1/3
Yağmur	**B**	-5	-6	2/3
	Aysun ve Savaş ın stratejileri kullanma olasılıkları	4/3	-1/3	**Oyunun değeri=** -14/3

olacaktır.

Aysun un kazanç matrisini göz önüne alırsak Aysun un Yağmur ve Savaş a göre ödeme vektörünü şöyle bulabiliriz.

H_Y = (-4,3,1).(1/3).(4/3) + (3,-2,-1).(1/3).(-1/3) + (-5,-5,10).(2/3)(4/3) + (-6,-6,12).(2/3)(-1/3)=(1/9)[(-16,12,4) + (-3,2,1) + (-40,-40,80) + (12,12,-24) =
(1/9)(-47,-14,61) =
(-47/9, -14/9, 61/9)

bulunur.

Savaş ın kazanç matrisinde en düşük kayıplarını alarak yeni bir kazanç matrisi oluşturabiliriz.

		Aysun	**ve Yağmur**
		BA	**AB**
Savaş	**A**	-4	-2
	B	-5	-6

Savaş ın karma stratejisi (x_1,x_2) ve Aysun-Yağmur karma stratejisi (y_1,y_2) olsun.

$$-2x_1 - x_2 = D$$
$$2x_1 -4x_2 = D$$
$$x_1+x_2 = 1$$

denklemlerini çözersek;

$$-4x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow 7x_2=4 \Rightarrow x_2=4/7$$
$$x_1 + 4/7 =1 \text{ den}$$
$$x_1=3/7$$

bulunur.

$$-2y_1 +2y_2=D$$
$$-y_1 -4y_2=D$$
$$y_1+y_2=1$$

denklemlerini çözersek

$$-y_1 + 6y_2=0 \Rightarrow 7y_2= 1 \Rightarrow y_2= 1/7$$
$$y_1+1/7=1 \text{ den}$$
$$y_1=6/7$$

bulunur ve oyunun değeri de

D =-2.(3/7) – 4/7 = -10/7

olarak hesaplanır.

Yani Savaş bu oyunda en fazla 10/7 p.b kaybedecektir.

Ve bu hesaplamalar ile

		Aysun	**Ve Yağmur**	
		BA	**BB**	**Savaş nin stratejileri kullanma olsılıkları**
	A	-2	2	3/7
Savaş	**B**	-1	-4	4/7
	Aysun ve Yağmur un stratejileri kullanma olasılıkları	6/7	1/7	**Oyunun değeri=** -10/7

Savaş ın kazanç matrisini göz önüne alırsak Savaş ın Aysun ve Yağmur a göre ödeme vektörünü şöyle bulabiliriz.

H_S = (1,1,-2).(3/7).(6/7) + (2,-4,2).(3/7).(1/7) + (3,-2,-1).(4/7)(6/7) + (2,2,-4).(4/7)(1/7)=(1/49)[(18, 18, -36) + (6, -12, 6) + (72, -48, -24) + (8, 8, -16) = (1/9)(104, -34, -70)

bulunur.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Literatürde genelde n-kişili oyunlar üzerine çalışmalar olsa da; bu çalışmalar kendi aralarında koalisyonlar(ortaklıklar) kurularak iki kişilik oyunlara çevrilmiştir. Yani n-kişili oyunlar başlığı altında yine iki kişilik oyunların incelendiğini görüyoruz.

Bu çalışmada n-kişili oyunları sıfır toplamlı ve sıfır toplamsız olarak incelendi ve çözüm önerileri sunuldu.

İlk bölümde oyunlar sınıflandırıldı.

İkinci bölümde iki kişilik oyunlar üzerinden sıfır toplamlı, sıfır toplamsız, kesinlikle saptanmış oyunların çözümleri anlatıldı. Karma strateji vektörünün bulunması gösterildi. Ve çok stratejili iki kişilik bir oyunda çözümün ya cebirsel çözümle ya da doğrusal programlama kullanılarak çözülebileceği gösterildi.

Sonraki bölüm de M. Ahlatçıoğlu ve G. Owen' ın kitaplarında da bahsedilen n-kişili oyunlar ortaksız ve ortaklı olarak iki sınıfa ayrıldı. n-kişili ortaklı oyunlarda baskınlık, stratejik denklik, normalleşme, kararlı kümeler, çekirdek ve dengeli koleksiyonlar gösterildi.

Son bölümde ise n-kişili ortaksız bir oyunun çok stratejili bir durumu için iki çözüm tekniği önerildi. İlk teknik üç kişili matrisyel formdaki bir oyunun çözümünün stratejiler arsası baskınlık olduğu zaman uygulanabilir olduğu üzerinedir. Bu tekniği n-kişi içinde uygulayabiliriz. İkinci teknikte üç kişili çok stratejili bir oyunun matrisyel formda yazılışı gösterildi. Fakat stratejiler arası baskınlık olmadığı kabul edilerek çözüm nonlineer olarak yapılmaya çalışıldı. Teknik her bir oyuncunun oyunun tamamındaki ödemelerinin bulunması üzerinedir. Oyuncu sayısını 4 e arttırdığımızda da benzer bir ödeme yapısı karşımıza çıkar. Bu ödeme fonksiyonlarıyla beraber kısıtlarımızı da yazabiliriz. Böylece oyundaki her bir oyuncunun pür stratejilerini oynamaları karşılığında elde edecekleri en fazla kazanç yada en fazla kayıp hesaplanabilir.Yukarıda teoriği verilen n-kişili çok stratejili oyunun çözümü için bir örnek yapılarak pratik olarak teknik gösterildi.

KAYNAKLAR

[1] AHLATÇIOĞLU, M., TİRYAKİ,F., Oyunlar Teorisi, Ytü Basım Yayın Merkezi, İst., 1998

[2] İMDAT, K., Karar Verme ve Oyun Kuramıyla İlgili Başlangıç Bilgiler, Anadolu Ün. Mim. Müh. Fak. Yayınları, Eskişehir, 1985

[3] BAĞIRKAN, S., Kara Verme, Der Yayınları, İst., 1983

[4] KARAKOYUNLU, Y.,Doğrusal Programlama ve Oyunlar Teorisi, Ege Matbaası, Ankara, 1973

[5] ESİN, A., Yöneylem Araştırmasında Yararlanılan Karar Yöntemleri

[6] OWEN, G., “Game Theory”, Academic Pres, NewYork, London, 2.Baskı, 1982

[7] VOROB’EN, N.N., “Game Theory; Lectures For Economists and Systems Scientists”, S.Kontz’un Çevirisi, Springer Verlag, NewYork, 1982

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin SIRTAŞ 1978 yılında İstanbul'da doğdu. 1983 yılında başladığı eğitim ve öğretim hayatına ilk, orta ve liseyi İstanbul'da bitirerek devam etti. 1994 ve 1999 yılları arasında Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü bitirdi. 1999 yılından bu yana M.E.B. e bağlı bir lise de matematik öğretmenliği yapmaktadır.