T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU DUAL LORENTZ UZAYINDA İVME EKSENLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe Zeynep PİRDAL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Murat TOSUN

Haziran 2006

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU DUAL LORENTZ UZAYINDA İVME EKSENLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe Zeynep PİRDAL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 09 / 06 /2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Metin Başarır	**Doç. Dr. Murat Tosun**	**Doç. Dr. İbrahim Okur**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında, bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendiren ve yardım eden çok değerli hocam Doç. Dr. Murat TOSUN'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmam esnasında bana vakit ayıran ve her konuda yardımını esirgemeyen Arş. Gör. Mehmet Ali GÜNGÖR'e, Arş. Gör. Soley ERSOY'a, Arş. Gör. Murat SARDUVAN'a, Arş. Gör. Bahar DEMİRTÜRK'e, Arş. Gör. Betül KARAÇOBAN'a ve Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma teşekkür ederim. Ayrıca anlayış ve desteklerini daima hissettiğim, annem Şükran SAĞLAMTAŞ'a, anneannem Mürşide SAĞLAMTAŞ'a ve dedem Şükrü SAĞLAMTAŞ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayşe Zeynep PİRDAL

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\tilde{A}$	: Hareketli sistem için dual Lorentz anlamda ortogonal matris
$\tilde{A}'$	: Sabit sistem için dual Lorentz anlamda ortogonal matris
$\tilde{M}$	: Dual Lorentz küresinin merkezi
O'	: $\mathbb{L}^3$ de sabit sistemin merkezi
O	: $\mathbb{L}^3$ de hareketli sistemin merkezi
Q	: $\mathbb{L}^3$ de izafi sisteminin merkezi
$\overrightarrow{e_i}$	: $\mathbb{L}^3$ de hareketli sistemin baz vektörleri
$\overrightarrow{e_i'}$	: $\mathbb{L}^3$ de sabit sistemin baz vektörleri
$\vec{\tilde{e}}_i$	: $\mathbb{D}_1^3$ de hareketli sistemin baz vektörleri
$\overrightarrow{\tilde{e}_i'}$	: $\mathbb{D}_1^3$ de sabit sistemin baz vektörleri
$\vec{\tilde{r}}_i$	: $\mathbb{D}_1^3$ de izafi sisteminin baz vektörleri
S^2	: Dual birim küre
$\tilde{S}_1^2$	: Dual Lorentz birim küre
$\tilde{H}_0^2$	: Dual hiperbolik birim küre
$\mathbb{L}^3$	: Üç boyutlu Lorentz uzayı
$\mathbb{D}^3$	: Üç boyutlu dual uzay
$\mathbb{D}_1^3$	: Üç boyutlu dual Lorentz uzayı
$\tilde{K}$	: Hareketli dual birim küre
$\tilde{K}'$	: Sabit dual birim küre
$\tilde{K}_1$	: İzafi dual birim küre
$\tilde{\Omega}$ ve $\tilde{\Omega}'$	: Dual Lorentz anti-simetrik matrisler
$\tilde{\Omega}_{ij}$ ve $\tilde{\Omega}'_{ij}$	: Dual Pfaff formları

$d_f \vec{\tilde{X}}$	: Sürüklenme hız değişimi
$\vec{\tilde{\Psi}}$	: Ani dual Lorentz Pfaff vektörü
$\vec{\psi}$	: Ani dönme Pfaff vektörü
$\vec{\psi^*}$	: Ani kayma Pfaff vektörü
$\vec{\tilde{J}}$	: Sürüklenme ivme vektörü
$\tilde{\nabla}$	: $\vec{\tilde{\Psi}}$ ve $\vec{\dot{\tilde{\Psi}}}$ vektörleri arasındaki dual Lorentz açı
$\ell(u,v)$	: Time-like yüzey
$\tilde{\Lambda}$	: Dual skaler
$\tilde{l}_i$	: Dual Lorentz ivme eksenleri
Φ	: Dual açı
$\tilde{\Phi}$	: Dual Lorentz açı
ε	: İşaret matrisi
Γ	: Null konisi
$O_1(3)$	: Lorentz anlamda ortogonal 3×3 tipindeki matrislerin cümlesi
$\mathbb{L}/\mathbb{L}'$	: Hareketli Lorentz sisteminin sabite göre hareketi
$\mathbb{L}_1/\mathbb{L}$	: İzafi Lorentz sisteminin hareketliye göre hareketi
$\mathbb{L}_1/\mathbb{L}'$	: İzafi Lorentz sisteminin sabite göre hareketi
$\tilde{K}/\tilde{K}'$	: Hareketli dual Lorentz küresinin sabite göre hareketi
$\tilde{K}_1/\tilde{K}$	: İzafi dual Lorentz küresinin hareketliye göre hareketi
$\tilde{K}_1/\tilde{K}'$	: İzafi dual Lorentz küresinin sabite göre hareketi
$\vec{\tilde{V}}_a$	: Mutlak hız vektörü
$\vec{\tilde{V}}_r$	: Relatif hız vektörü
$\vec{\tilde{V}}_f$	: Sürüklenme hız vektörü

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Dual sayı, dual uzay, Lorentz metriği, dual Lorentz (hiperbolik) birim küre, sürüklenme hızı, sürüklenme ivmesi, dual Lorentz uzay, ivme eksenleri.

Bu tez dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayı ile ilgili genel tanım, teorem ve bağıntılar verilmiştir. Üçüncü bölümde $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir parametreli Lorentz küresel hareketler tanıtılmış ve bu hareketlerin hızları ve pol noktaları ile ilgili teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde ilk olarak $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında bir parametreli dual Lorentzian küresel hareketler tanıtıldı. Bu hareketin hızları ve ivmeleri ile ilgili bağıntı verildi. Bu bölümün üçüncü ve dördüncü kısmı tezimizin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Burada, bir parametreli dual Lorentzian hareketin ivmeleri ve ivme eksenleri ile ilgili bağıntılar elde edildi.

ACCELERATION AXES IN THREE DIMENSIONAL DUAL LORENTZ SPACE

SUMMARY

Keywords: Dual number, dual space, Lorentzian metric, dual Lorentzian (hyperbolic) unit sphere, velocity, acceleration, dual Lorentzian space, acceleration axis

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, we have given basic concepts, theorems and relations in three dimensional Lorentz Space, $\mathbb{L}^3$. In the second chapter, general definitions, theorems and relations were given concerned with three dimensional dual Lorentzian Space, $\mathbb{D}_1^3$. In the third chapter, one parameter Lorentzian spherical motions were explained in three dimensional Lorentz space, $\mathbb{L}^3$, and theorems were given which were concerned with velocities and pole points of these motions. In the fourth chapter, initially one parameter dual spherical motions in three dimensional dual Lorentz space, $\mathbb{D}_1^3$ were explained and relation was given which was concerned with velocities and accelerations of this motion. The third and the fourth parts of this chapter are the original contribution to the science of mathematics. Here, relations were obtained concerned with acceleration and acceleration axes of one parameter dual Lorentzian motion.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Lorentz Anlamda Temel Kavramlar

Tanım 1.1.
V , sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere,

$$\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

bilineer fonksiyonu $\forall v, w \in V$ için $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ özelliğini sağlıyor ise $\langle \ , \ \rangle$'ye V üzerinde bir simetrik bilineer form denir[13].

Tanım 1.2.
V , vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle \ , \ \rangle$ olsun. Bu takdirde,

i-) $\forall v \in V$, $(v \neq 0)$ için $\langle v, v\rangle > 0$ ise $\langle \ , \ \rangle$ bilineer formu pozitif definit,

ii-) $\forall v \in V$, $(v \neq 0)$ için $\langle v, v\rangle < 0$ ise $\langle \ , \ \rangle$ bilineer formu negatif definit,

iii-) $\forall v \in V$, $(v \neq 0)$ için $\langle v, v\rangle \geq 0$ ise $\langle \ , \ \rangle$ bilineer formu pozitif semi-definit,

iv-) $\forall v \in V$, $(v \neq 0)$ için $\langle v, v\rangle \leq 0$ ise $\langle \ , \ \rangle$ bilineer formu negatif semi-definit,

v-) $\forall w \in V$ için $\langle v, w\rangle = 0$ için $v = 0$ oluyorsa $\langle \ , \ \rangle$ bilineer formuna non-dejenere, $v \neq 0$ ise dejenere adı verilir[13].

Tanım 1.3.

$\langle \ , \ \rangle$, V üzerinde simetrik bilineer form ve W'da V'nin bir altuzayı olsun.

$\langle \ , \ \rangle : W \times W \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\langle \ , \ \rangle$ nin W üzerinde kısıtlanmışı denir ve $\langle \ , \ \rangle|_W$ ile gösterilir. Böylece

$$\langle\ ,\ \rangle\big|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif definit olacak şekilde en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna; $\langle\ ,\ \rangle$ simetrik bilineer formun indeksi denir[13]. v, $\langle\ ,\ \rangle$'nin indeksi olmak üzere $0 \leq v \leq \text{boy}V$ dir.

Tanım 1.4.

$\mathbb{R}^3$ üzerinde $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{L}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(\vec{X}, \vec{Y}) \to \left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle_{\mathbb{L}} = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

şeklinde tanımlanan simetrik, bilineer, non-dejenere metrik tensörüne $\mathbb{R}^3$ üzerinde Lorentz metriği denir.

Bundan sonraki gösterimlerde aksi belirtilmedikçe $\langle\ ,\ \rangle$ sembolü $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{L}}$ anlamında kullanılacaktır.

Tanım 1.5.

$\mathbb{R}^3$ üzerinde Lorentz metriğinin tanımlanmasıyla meydana gelen $\left\{\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle\right\}$ ikilisine 3-boyutlu Lorentz uzayı veya kısaca Lorentz uzayı denir ve $\mathbb{L}^3$ ile gösterilir.

Tanım 1.6.

$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^3$ olsun. Eğer

i-) $\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle < 0$ ise $\vec{X}$'e time-like vektör,

ii-) $\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle > 0$ veya $\vec{X} = 0$ ise $\vec{X}$'e space-like vektör,

iii-) $\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle = 0$ ve $\vec{X} \neq 0$ ise $\vec{X}$'e null vektör adı verilir.

Teorem 1.1.

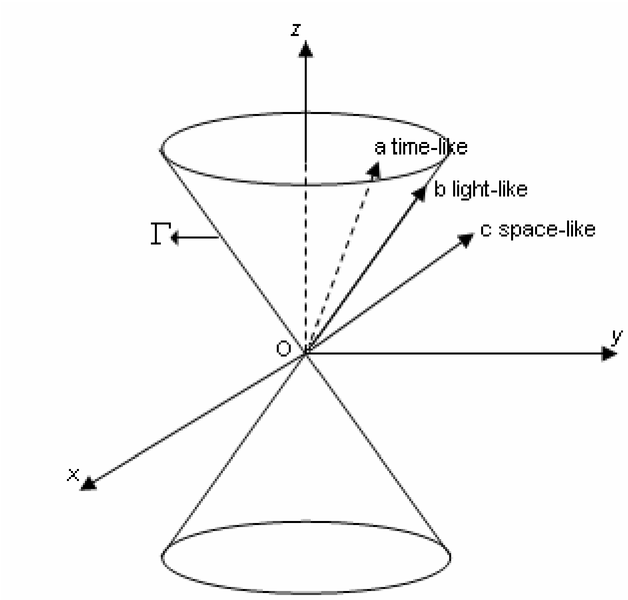
W, V Lorentz vektör uzayının bir alt uzayı olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler denktir.

i-) W light-like dır.

ii-) W light-like vektör içerir fakat time-like vektör içermez.

iii-) $W \cap \Gamma = F - \{0\}$ dır. Burada F bir boyutlu alt uzaydır (Γ, V nin null konisidir)[13].

Tanım 1.4. ile verilen Lorentz iç çarpımı da, $\mathbb{L}^3$ uzayındaki vektörleri üç sınıfa ayırır. Time-like vektörler null koninin içinde, light-like(veya null) vektörler null koninin üzerinde ve space-like vektörlerde null koninin dışında bulunurlar(Şekil 1.1.).



(Şekil 1.1.) $\mathbb{L}^3$ Uzayında Vektörler

Tanım 1.7.

$\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayı ve $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{L}^3$ olsun.

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = 0$$

ise $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörleri Lorentz anlamında diktirler denir.

Tanım 1.8.

$\vec{X} \in \mathbb{L}^3$ için $\vec{X}$ 'in normu

$$\left\|\vec{X}\right\|_{\mathbb{L}} = \sqrt{\left|\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle\right|}$$

olarak tanımlanır.

Yine aksi belirtilmedikçe $\| \; \|$ sembolü $\| \; \|_{\mathbb{L}}$ yerine kullanılacaktır.

Teorem 1.2.

$\vec{X} \in \mathbb{L}^3$ olmak üzere,

i-) $\left\|\vec{X}\right\| > 0$ dır,

ii-) $\left\|\vec{X}\right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{X}$ bir null vektördür,

iii-) $\vec{X}$ bir time-like vektör ise $\left\|\vec{X}\right\|^2 = -\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle$,

iv-) $\vec{X}$ bir space-like vektör ise $\left\|\vec{X}\right\|^2 = \left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle$ dir[2].

Tanım 1.9.

$\left(V, \langle \; , \; \rangle\right)$ bir Lorentz uzayı olsun. $W \subset V$ altuzayını göz önüne alalım.

i-) $\langle \; , \; \rangle|_W : W \times W \to \mathbb{R}$ pozitif ise W 'ya space-like altuzay,

ii-) $\langle \; , \; \rangle|_W : W \times W \to \mathbb{R}$ indeksi 1 olan non-dejenere ise W 'ya time-like altuzay,

iii-) $\langle \; , \; \rangle|_W : W \times W \to \mathbb{R}$ dejenere ise W 'ya light-like altuzay denir.

Tanım 1.10.

V Lorentz vektör uzayında bütün time-like vektörlerin cümlesi λ olsun. $U \in \lambda$, için $\left\{X \in \lambda : \langle U, X \rangle < 0\right\}$ cümlesine V 'nin U 'yu ihtiva eden time-konisi denir.

Tanım 1.11.

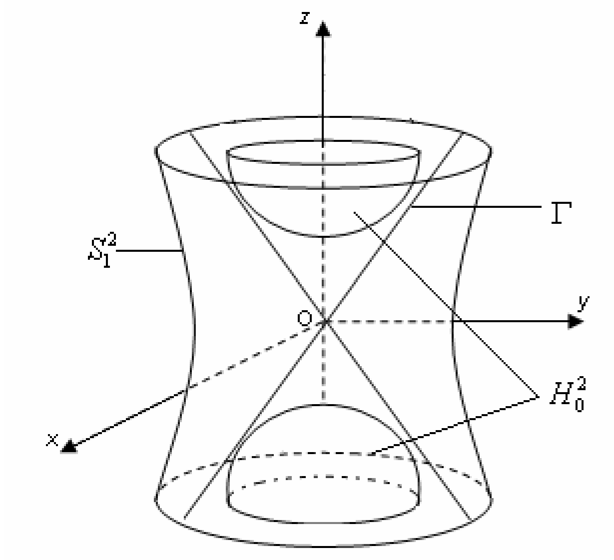
$\mathbb{L}^3$ uzayındaki Lorentz ve Hiperbolik birim küreler, sırasıyla,

$$S_1^2 = \left\{ \vec{P} \in \mathbb{L}^3 \middle| \ \left\langle \vec{P}, \vec{P} \right\rangle = 1 \right\}$$

ve

$$H_0^2(r) = \left\{ \vec{P} \in \mathbb{L}^3 \middle| \ \left\langle \vec{P}, \vec{P} \right\rangle = -1 \right\}$$

biçiminde ifade edilir(Şekil 1.2.).



(Şekil 1.2.) $\mathbb{L}^3$ Uzayında Birim Küreler

Tanım 1.12.

$\ell = \ell(u,v)$, $\mathbb{L}^3$ uzayında bir yüzey olsun. Eğer $P \in \ell(u,v)$ için, $\langle\ ,\ \rangle : \ell(u,v)\big|_P \times \ell(u,v)\big|_P \to \mathbb{R}$, bir Lorentz iç çarpımı ise $\ell(u,v)$'ye time-like yüzey denir.

Tanım 1.13.

$\alpha \in \mathbb{L}^3$ Lorentz uzayında bir eğri olsun. α eğrisinin hız vektörü $\dot{\alpha}$ olmak üzere;

i-) $\left\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \right\rangle < 0$ ise α , time-like eğri,

ii-) $\left\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \right\rangle > 0$ ise α , space-like eğri,

iii-) $\left\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \right\rangle = 0$ ise α , null eğri

olarak adlandırılır[13].

Tanım 1.14.

$\mathbb{L}^3$ Lorentz uzayında $A^{-1} = \varepsilon A^T \varepsilon$ eşitliğini sağlayan A matrisine Lorentz anlamda ortogonal matris denir. Burada ε işaret matrisidir, yani

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 1.3.

Lorentz anlamda ortogonal 3×3 tipindeki matrislerin cümlesi $O_1(3)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

1) $A \in O_1(3)$

2) $A^T = \varepsilon A^{-1} \varepsilon$

3) A 'nin sütunları $\mathbb{L}^3$ ün bir ortonormal bazını oluşturur

4) A , $\mathbb{L}^3$ ün herhangi bir ortonormal bazını ortonormal bir baza taşır[13].

Tanım 1.15.

$S^T = -\varepsilon S \varepsilon$ eşitliğini sağlayan S matrisine Lorentz anlamında anti-simetrik matris denir.

Tanım 1.16.

$\mathbb{L}^3$ Lorentz uzayında iki vektör $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere

$$(v_3 w_2 - v_2 w_3, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

vektörüne v ve w nin vektörel çarpımı denir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{e_i} = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

olmak üzere

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \det \begin{bmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanır[20].

BÖLÜM 2. DUAL LORENTZ UZAYDA TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzaydaki temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1.
$\forall a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $A = \left(a, a^*\right)$ ikilisine bir sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin.

$$\mathbb{D} = \left\{\left(a, a^*\right) : \ a, a^* \in \mathbb{R}\right\}$$

üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şu şekilde tanımlanır.

Tanım 2.2.
$\oplus : \ \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ iç işlemi $A = \left(a, a^*\right)$ ve $B = \left(b, b^*\right)$ olmak üzere

$$A \oplus B = \left(a, a^*\right) \oplus \left(b, b^*\right) = \left(a + b, a^* + b^*\right)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki **toplama** olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.
$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ iç işlemi $A = \left(a, a^*\right)$ ve $B = \left(b, b^*\right) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$A \odot B = \left(a, a^*\right) \odot \left(b, b^*\right) = \left(ab, ab^* + a^* b\right)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki **çarpma** olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.

$A=\left(a,a^{*}\right)$ ve $B=\left(b,b^{*}\right)\in\mathbb{D}$ için

$$a=b \qquad , \qquad a^{*}=b^{*}$$

ise A ile B eşittir denir ve $A=B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.5.

$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$\mathbb{D}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri Tanım 2.2. , Tanım 2.3. ve Tanım 2.4. deki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ cümlesine dual sayılar sistemi ve $\forall\left(a,a^{*}\right)\in\mathbb{D}$ elemanına da bir dual sayı denir.

Tanım 2.6.

Dual sayı üçlülerinin cümlesi $\mathbb{D}^{3}=\left\{\vec{A}=\left(A_1,A_2,A_3\right)\middle| A_1,A_2,A_3\in\mathbb{D}\right\}$, $\mathbb{D}$ halkası üzerinde bir modüldür ve $\mathbb{D}$-Modül veya dual uzay olarak adlandırılır. $\mathbb{D}^{3}$ ün elemanlarına da dual vektörler denir.

Tanım 2.7.

$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^{*}}$, $\vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^{*}}\in\mathbb{D}$-Modül dual vektörlerinin iç çarpımı

$$f:\mathbb{D}^{3}\times\mathbb{D}^{3}\to\mathbb{D}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$f\left(\vec{A},\vec{B}\right)=\left\langle \vec{A},\vec{B}\right\rangle =\left\langle \vec{a}+\mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*},\vec{b}+\mathcal{E}\,\overrightarrow{b^*}\right\rangle$$

olarak tanımlanır[10].

Tanım 2.8.

$\vec{\tilde{A}}=\vec{a}+\mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*}$, $\vec{\tilde{B}}=\vec{b}+\mathcal{E}\,\overrightarrow{b^*}\in\mathbb{D}$ -Modül olsun. $\mathbb{D}$ -Modül üzerinde

$$\left\langle \vec{\tilde{A}},\vec{\tilde{B}}\right\rangle =\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle\Big|_{\mathbb{L}^3}+\mathcal{E}\left(\left\langle \vec{a},\overrightarrow{b^*}\right\rangle\Big|_{\mathbb{L}^3}+\left\langle \overrightarrow{a^*},\vec{b}\right\rangle\Big|_{\mathbb{L}^3}\right)$$

biçiminde tanımlanan dual Lorentz iç çarpımı tanımlanırsa $\left(\mathbb{D}^3,\langle\ ,\ \rangle\right)$ ikilisine dual Lorentz uzay denir ve bu uzay $\mathbb{D}_1^3$ ile gösterilir.

Burada eşitliğin sağındaki iç çarpımlar, $\mathbb{L}^3$ uzayındaki Lorentz iç çarpımıdır.

Böylece

$$\mathbb{D}_1^3=\left\{\vec{\tilde{A}}=\vec{a}+\mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*}\ \middle|\ \vec{a},\overrightarrow{a^*}\in\mathbb{L}^3\right\}$$

dir.

Tanım 2.9.

$\vec{\tilde{A}}=\vec{a}+\mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*}\in\mathbb{D}_1^3$ olmak üzere

i-) $\vec{a}$ space-like vektör ise $\vec{\tilde{A}}$ ’ya bir dual space-like vektör,

ii-) $\vec{a}$ time-like vektör ise $\vec{\tilde{A}}$ ’ya bir dual time-like vektör,

iii-) $\vec{a}$ light-like (null) vektör ise $\tilde{\vec{A}}$ ’ya bir dual light-like (null) vektör denir.

Tanım 2.10.

$\tilde{\vec{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*} \in \mathbb{D}_1^3$ vektörünün dual normu

$$\left\|\tilde{\vec{A}}\right\| = \sqrt{\left|\left\langle \tilde{\vec{A}}, \tilde{\vec{A}} \right\rangle\right|} = \left(\left\|\vec{a}\right\|, \frac{\left\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\left\|\vec{a}\right\|} \right)$$

olarak adlandırılır.

Tanım 2.11.

$\tilde{\vec{A}}, \tilde{\vec{B}} \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere $\tilde{\vec{A}}$ ve $\tilde{\vec{B}}$ ’nin Lorentz vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 &\to \mathbb{D}^3 \\ \left(\tilde{\vec{A}}, \tilde{\vec{B}}\right) &\to \tilde{\vec{A}} \Lambda \tilde{\vec{B}} = \vec{a} \Lambda \vec{b} + \mathcal{E}\left(\overrightarrow{a^*} \Lambda \vec{b} + \vec{a} \Lambda \overrightarrow{b^*}\right) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Burada eşitliğin sağındaki vektörel çarpımlar, $\mathbb{L}^3$ uzayındaki vektörel çarpımlardır.

Tanım 2.12.

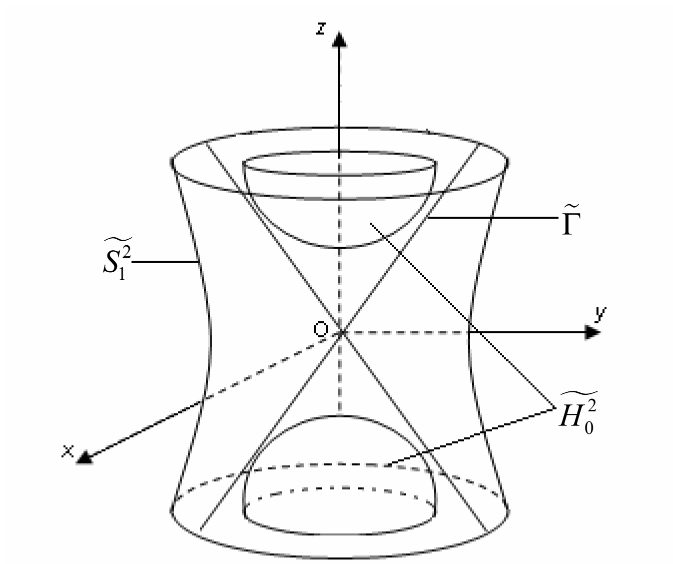
$\tilde{\vec{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*} \in \mathbb{D}_1^3$ olmak üzere

$$\widetilde{S_1^2} = \left\{ \overrightarrow{\widetilde{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*} \;\middle|\; \left\| \overrightarrow{\widetilde{A}} \right\| = (1,0);\ \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \in \mathbb{L}^3 \text{ ve } \vec{a} \text{ space-like vektör} \right\}$$

cümlesine dual Lorentz birim küre denir.

$$\widetilde{H_0^2} = \left\{ \overrightarrow{\widetilde{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*} \;\middle|\; \left\| \overrightarrow{\widetilde{A}} \right\| = (1,0);\ \vec{a}, \overrightarrow{a^*} \in \mathbb{L}^3 \text{ ve } \vec{a} \text{ time-like vektör} \right\}$$

cümlesine dual hiperbolik birim küre denir(Şekil 2.1.).



(Şekil 2.1.) $\widetilde{S_1^2}$ Lorentz Birim Küresi, $\widetilde{H_0^2}$ Hiperbolik Birim Küresi ve $\widetilde{\Gamma^2}$ Işık Konisi

Teorem 2.1.

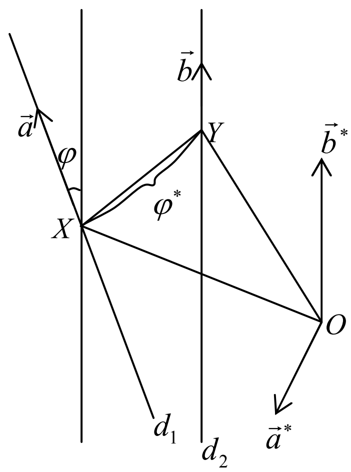
$\mathbb{D}_1^3$ uzayındaki $\widetilde{H_0^2}$ dual hiperbolik ve $\widetilde{S_1^2}$ dual Lorentz birim kürelerinin noktaları, sırasıyla, $\mathbb{L}^3$ Lorentz çizgiler uzayındaki yönlü time-like ve space-like doğrulara bire-bir karşılık gelir[15].

Tanım 2.13.

$\vec{\tilde{A}}$ ve $\vec{\tilde{B}}$ dual time-like birim vektörlerine karşılık gelen yönlü time-like doğrular arasındaki hiperbolik açı φ ve en kısa uzaklık φ^* olmak üzere

$$\tilde{\Phi} = \varphi + \varepsilon \varphi^*$$

dual sayısına $\vec{\tilde{A}}$ ve $\vec{\tilde{B}}$ vektörleri arasındaki dual hiperbolik açı denir(Şekil 2.2.).



(Şekil 2.2.) Yönlü Time-like Doğrular Arasındaki Dual Hiperbolik Açı

Teorem 2.2.

$\vec{\tilde{A}} = \vec{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$, $\vec{\tilde{B}} = \vec{b} + \varepsilon \overrightarrow{b^*} \in \mathbb{D}_1^3$ iki dual time-like birim vektör olsun. $\vec{\tilde{A}}$ ve $\vec{\tilde{B}}$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\left\langle \vec{\tilde{A}}, \vec{\tilde{B}} \right\rangle = -\cosh \tilde{\Phi}$$

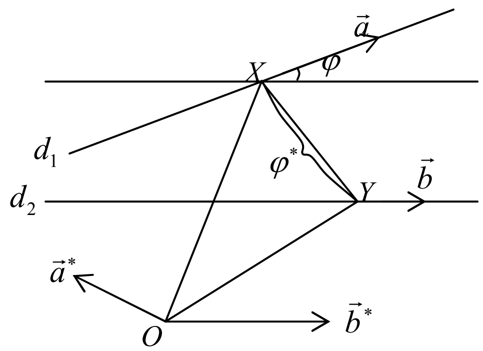
dır[15].

Tanım 2.14.

$\widetilde{\vec{A}}$ ve $\widetilde{\vec{B}}$ dual space-like birim vektörlerine karşılık gelen yönlü space-like doğrular arasındaki merkez açı φ ve en kısa uzaklık φ^* olmak üzere

$$\widetilde{\Phi} = \varphi + \varepsilon\,\varphi^*$$

dual sayısına $\widetilde{\vec{A}}$ ve $\widetilde{\vec{B}}$ vektörleri arasındaki dual merkez açı denir(Şekil 2.3.).



(Şekil 2.3.) Space-like Doğrular Arasındaki Dual Merkez Açı

Teorem 2.3.

$\widetilde{\vec{A}} = \vec{a} + \varepsilon\,\overrightarrow{a^*}$, $\widetilde{\vec{B}} = \vec{b} + \varepsilon\,\overrightarrow{b^*} \in \mathbb{D}_1^3$ iki dual space-like birim vektör ve $Sp\left\{\widetilde{\vec{A}}, \widetilde{\vec{B}}\right\}$ time-like olsun. $\widetilde{\vec{A}}$ ve $\widetilde{\vec{B}}$ vektörlerinin Lorentz iç çarpımı

$$\left\langle \widetilde{\vec{A}}, \widetilde{\vec{B}} \right\rangle = \cosh \widetilde{\Phi}$$

dır[16].

Tanım 2.15.

$\vec{\widetilde{A}}$ ve $\vec{\widetilde{B}}$ dual space-like birim vektörlerine karşılık gelen yönlü space-like doğrular arasındaki merkez açı φ ve en kısa uzaklık φ^* olmak üzere

$$\widetilde{\Phi} = \varphi + \mathcal{E}\,\varphi^*$$

dual sayısına $\vec{\widetilde{A}}$ ve $\vec{\widetilde{B}}$ vektörleri arasındaki dual space-like açı denir.

Teorem 2.4.

$\vec{\widetilde{A}} = \vec{a} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{a^*}$, $\vec{\widetilde{B}} = \vec{b} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{b^*} \in \mathbb{D}_1^3$ iki dual space-like birim vektör ve $Sp\left\{\vec{\widetilde{A}}, \vec{\widetilde{B}}\right\}$ space-like olsun $\vec{\widetilde{A}}$ ve $\vec{\widetilde{B}}$ vektörlerinin Lorentz iç çarpımı

$$\left\langle \vec{\widetilde{A}}, \vec{\widetilde{B}} \right\rangle = \cos\widetilde{\Phi}$$

dır[16].

.

BÖLÜM 3. $\mathbb{L}^3$, 3-BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA BİR PARAMETRELİ LORENTZİAN KÜRESEL HAREKETLER

3. 1. Lorentz Küre Üzerinde Bir Hareketin Gösterilmesi

$\mathbb{L}$ Lorentz küresinde, $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ Lorentz anlamda ortonormal koordinat sistemi olsun. Bu koordinat sistemine kısaca hareketli koordinat sistemi denir. Aynı şekilde $\{O; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$ sistemi de $\mathbb{L}'$ sabit Lorentz küresinde Lorentz anlamda bir ortonormal koordinat sistemi olsun. Bu koordinat sistemleri, sırasıyla, $\mathbb{L}$ ve $\mathbb{L}'$ Lorentz kürelerinin temsilcileri olarak kabul edilecektir. Böylece

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{e}_i{}', \vec{e}_j{}' \rangle = \varepsilon_i \,\delta_{ij} \quad , \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \vec{e}_i \text{ veya } \vec{e}_i{}' \text{ space-like} \\ -1, & \vec{e}_i \text{ veya } \vec{e}_i{}' \text{ time-like} \end{cases} \quad , \quad 1 \le i, j \le 3$$

dir.

Bu iki sistemden herhangi birini imtiyazlı saymayıp bir diğer üçüncü $\{O; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\}$ izafi ortonormal sistemini ele alalım. Bütün hareketlerimizi bu izafi sistemine göre vereceğiz. Böylece

$$\langle \vec{r}_i, \vec{r}_j \rangle = \varepsilon_i \,\delta_{ij} \quad , \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \vec{r}_i \text{ space-like} \\ -1, & \vec{r}_i \text{ time-like} \end{cases} \quad , \quad 1 \le i, j \le 3$$

dir.

Eğer kısalık için

$$E=\begin{bmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{bmatrix} \quad , \quad R=\begin{bmatrix}\vec{r}_1\\ \vec{r}_2\\ \vec{r}_3\end{bmatrix} \quad , \quad E'=\begin{bmatrix}\vec{e}_1'\\ \vec{e}_2'\\ \vec{e}_3'\end{bmatrix}$$

notasyonlarını kullanırsak, bu sistemlerin her biri aynı şekilde yönlendiğinden O noktası etrafındaki dönmeler ile sistemlerin birinden ötekine geçilebilir. Böylece

$$R = A\,E \quad , \quad R = A'\,E' \tag{3.1.1}$$

yazabiliriz. Burada $A',\ A\ \in\ O_1(3)$ dir.

A ve A' Lorentz anlamda ortogonal matrislerinin bileşenleri t reel parametresinin C^{∞}-sınıfından türevlenebilen fonksiyonları oldukları kabul edilecektir. Böylece "O" noktası etrafındaki harekete bir parametreli $\mathcal{D}_1$ Lorentz dönme hareketi adını vereceğiz.

Eğer (3.1.1) denklemi göz önüne alınırsa, $\vec{r_j}$, $(1 \le j \le 3)$ vektörlerinin, sırasıyla, $\mathbb{L}$ ve $\mathbb{L}'$ Lorentz kürelerine göre diferensiyelleri

$$\begin{aligned} dR &= S\,R \\ d'R &= S'\,R \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

dir, burada, sırasıyla, $S = dAA^{-1}$ ve $S' = dA'\left(A'\right)^{-1}$ dir[8].

Kolayca gösterilebilir ki S ve S' Lorentz anlamda anti-simetrik matrislerdir. S ve S' nün bileşenleri, sırasıyla ω_{ij} ve ω_{ij}' olmak üzere $i,\ j,\ k$ indislerinin $i,\ j,\ \mathrm{k} = 1,2,3;2,3,1;3,1,2$ sıralanışları $\omega_{ij} = \omega_k$ ve $\omega_{ij}' = \omega_k'$ ile gösterilirse,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$S' = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3' & -\omega_2' \\ \omega_3' & 0 & -\omega_1' \\ -\omega_2' & \omega_1' & 0 \end{bmatrix}$$

dır[14].

İzafi sisteme göre koordinatları x_1, x_2, x_3 olan herhangi bir nokta X olsun. $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ olduğundan dolayı

$$\overrightarrow{OX} = \vec{x} = X^T \, \mathrm{R} \tag{3.1.3}$$

vektörünü ele alalım. X noktası birim Lorentz küresi üzerinde bir nokta ise

$$\|\vec{x}\|^2 = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

dir. Şimdi X noktasının, $\mathbb{L}$ ve $\mathbb{L}'$, sırasıyla, hareketli ve sabit Lorentz kürelerine göre değişimini hesaplayalım.

Eğer (3.1.2) ve (3.1.3) denklemleri göz önüne alınırsa,

$$d\vec{x} = \left(dX^T + X^T S\right) R \tag{3.1.4}$$

elde ederiz. Böylece X noktasının relatif hız vektörü (X in $\mathbb{L}$ ye göre hızı)

$$\vec{V}_r = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

dir. Eğer $\vec{V}_r = 0$ yani $d\vec{x} = 0$ ise X noktası $\mathbb{L}$ hareketli Lorentz küresinde sabittir. O halde X in $\mathbb{L}$ da sabit olma şartı

$$dX^t = -X^T S \tag{3.1.5}$$

dir.

Benzer olarak X noktasının $\mathbb{L}'$ Lorentz küresine göre değişimi, (3.1.3) denklemi göz önüne alınırsa,

$$d'\vec{x} = \left(dX^T + X^T S'\right) R \tag{3.1.6}$$

dir. Böylece mutlak hız vektörü (X in $\mathbb{L}'$ ye göre hızı)

$$\vec{V}_a = \frac{d'\vec{x}}{dt}$$

dir. Eğer $\vec{V}_a = 0$ yani $d'\vec{x} = 0$ ise X noktası $\mathbb{L}'$ de sabittir. O halde X in $\mathbb{L}'$ de sabit olma şartı aşağıdaki denklemle verilir:

$$dX^T = -X^T S' \tag{3.1.7}$$

Eğer X noktası $\mathbb{L}$ da sabit ise X in $\mathbb{L}'$ ye göre hızına X in sürüklenme hızı adı verilir ve

$$\vec{V}_f = \frac{d_f\vec{x}}{dt}$$

ile gösterilir. Eğer (3.1.5) ve (3.1.6) denklemleri göz önüne alınırsa

$$d_f\vec{x} = X^T\, \Psi\, R \tag{3.1.8}$$

elde edilir, burada $\Psi = S' - S$ dır. Eğer $\vec{\psi}$ Pfaff vektörü

$$\vec{\psi} = -\psi_1\vec{r}_1 + \psi_2\vec{r}_2 + \psi_3\vec{r}_3 \tag{3.1.9}$$

olarak seçilirse (3.1.8) denklemi

$$d_f\vec{x} = \vec{\psi} \wedge \vec{x} \tag{3.1.10}$$

şeklini alır. Böylece (3.1.4) ve (3.1.6) denklemlerinden

$$d_f\vec{x} = d'\vec{x} - d\vec{x}$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu son denklem ifade eder ki

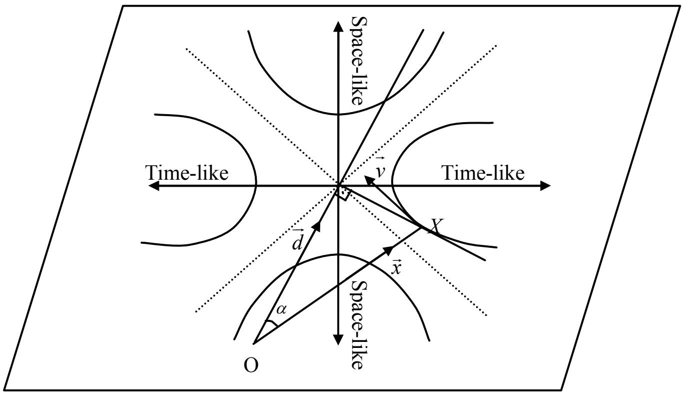
$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_f$$

dir.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.1.
$\mathbb{L}^3$ bir parametreli Lorentz küresel hareketinde, bir X noktasının mutlak hız vektörü, relatif hız vektörü ile sürüklenme hız vektörünün toplamına eşittir[14].

Şimdi $\vec{\psi}$ Pfaff vektörü ve (3.1.10) denkleminin anlamını daha iyi anlamak için Darboux dönme vektörünün önemini belirtelim. Bir eksen etrafında dönme hareketini göz önüne alalım. Kabul edelim ki bu eksen başlangıç noktasından geçsin ve doğrultusu $\vec{d}$ olsun. Dönme hareketi $\omega = \mp\left\|\vec{d}\right\|$ açısal hızı ile meydana gelsin. Yer vektörü $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ olan bir X noktası bu dönme hareketinin etkisine tabi tutalım ve bu noktanın hız vektörü de $\vec{v}$ olsun.



(3.1.1.) Lorentz Anlamda Darboux Vektörü

O halde

$$\vec{v} = \vec{d} \wedge \vec{x}$$

eşitliği doğrudur. Bu son denklem ifade eder ki $\vec{v}$ vektörü hem $\vec{x}$ hem de $\vec{d}$ ye diktir. Ayrıca;

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{d}\| \, \|\vec{x}\| \sinh \alpha = \mp \omega r$$

dir, burada $\|\vec{x}\| \sinh \alpha = r$ dir. Böylece $\vec{v}$ gerçekten $\vec{d}$ ekseni etrafında $\mp\|\vec{d}\|$ açısal hızı ile o noktanın dönme polünden uzaklığı ile çarpımına eşittir. Bu ise $\vec{v}$ nin X noktasının hız vektörü olduğunu ifade eder. Böylece $\vec{\psi}$ Pfaff vektörüne, bir parametreli $\mathcal{D}_1$ dönme hareketinin t anındaki dönme vektörü diyebiliriz. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2.

$\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir parametreli $\mathcal{D}_1$ dönme hareketinde, t anında, hareketli sistemin her X noktası için bir sonsuz küçük dönme hareketi meydana gelir. Bu dönme hareketinde $\vec{\psi}$ Pfaff vektörü, Darboux dönme vektörünün rolünü oynar. Burada X noktasının $d_f\vec{x}$ ilerleme vektörü (3.1.10) ile verilmiştir [14].

Şimdi $\vec{\psi}$ dönme vektörü doğrultusundaki $\vec{p}$ birim vektörünü hesaplarımıza dahil edelim.

$$\|\vec{p}\| = 1$$

olduğundan dolayı

$$\vec{\psi} = \vec{p}\sqrt{-\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}$$

dir. Burada $\psi = \mp\|\vec{\psi}\| = \sqrt{-\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}$, dt zaman aralığında dönmeyi meydana getiren sonsuz küçük dönme açısını gösterir (Burada ψ nin işareti $\vec{p}$ yönüne bağlıdır). $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ ile birim Lorentz küresi üzerinde gösterilen P noktası ani dönme polüdür. P noktası sürüklenme hızının sıfır olması ile karakterize edildiğinden dolayı (3.1.10) denkleminden

$$\vec{\psi} \wedge \vec{x} = 0 \quad , \quad \|\vec{x}\|^2 = 1$$

ise

$$\vec{x} = \mp\vec{p}$$

dir. P dönme polü ile onun $\overline{P}$ karşı noktası (ona karşı gelen nokta) bir t anında sabit kalırlar. $\vec{\psi}$ ve $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ vektörleri, birim Lorentz küresinin $P, \overline{P}$ ve X noktalarından geçerek onu bir büyük dairesi boyunca kesen, bir Lorentz düzlem meydana getirirler. X noktası $\mathbb{L}$ küresinde sabit ise (3.1.10) den dolayı X in $d_f\vec{x}$ sürüklenme hızı (ilerleme doğrultusu) bu büyük daireye dik olur. Böylece aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.1.3.
Bir parametreli bir harekette Lorentz küresi üzerinde, her anda, sürüklenme hızları sıfır olan bir çift P, $\overline{P}$ noktaları (P dönme polü ve onun $\overline{P}$ karşı noktası) vardır. Yani bu noktalar, t anında her iki küre yüzeyi üzerinde sabit kalır[14].

Teorem 3.1.4.
Hareketli $\mathbb{L}$ küresinin her noktası t anında P polü (ve onun $\overline{P}$ karşı noktası) etrafında ${\psi}/{dt}$ açısal hızı ile bir dönme hareketi (ani dönme hareketi) yapar. O halde küre üzerindeki bir parametreli hareket t anında $\mathbb{L}$ küre yüzeyinin tamamının $\mathbb{L}'$ sabit küresine göre böyle bir dönmesinden ibaret olur[14].

Teorem 3.1.5.
Bir parametreli bir küre hareketinde $\mathbb{L}$ hareketli küresinin bir X noktası $\mathbb{L}'$ sabit küresi üzerinde, küresel yörünge normali her defasında P dönme polünden (ve onun $\overline{P}$ karşı noktasından) geçen, bir yörünge çizer[14].

BÖLÜM 4. $\mathbb{D}_1^3$, 3-BOYUTLU DUAL LORENTZ UZAYINDA BİR PARAMETRELİ DUAL LORENTZİAN HAREKETLER

Bu bölümde $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayda, bir parametreli dual Lorentzian hareketler tanıtılarak, bu harekette hızlar ve ivmelerle ilgili teoremlere yer verildi. Ayrıca bir parametreli hareketin ivme ve ivme eksenleri ile ilgili bağıntılar elde edildi.

4. 1. Dual Lorentzian Küresel Hareketlerin Gösterilmesi

$\mathbb{L}^3$ de sabit ve hareketli sistemler, sırasıyla, $\mathbb{L}'$ ve $\mathbb{L}$ olmak üzere $\mathbb{L}'$ ve $\mathbb{L}$ sistemlerinin ortonormal koordinat sistemleri, de sırasıyla,

$$\{O';\ \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\} \qquad \text{ve} \qquad \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{e}_i', \vec{e}_j' \rangle = \varepsilon_i\, \delta_{ij} \quad , \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \vec{e}_i \text{ veya } \vec{e}_i' \text{ space-like} \\ -1, & \vec{e}_i \text{ veya } \vec{e}_i' \text{ time-like} \end{cases} \quad , \quad 1 \le i, j \le 3$$

dir. $\mathbb{L}'$ ve $\mathbb{L}$ aynı şekilde yönlendirilmiş olsun, yani; Lorentz ortogonal dönüşüm ile birinden diğerine geçilebilsin. Bu iki sistemden herhangi birini imtiyazlı saymayıp bir diğer üçüncü sistem $\mathbb{L}_1$ olsun. $\mathbb{L}_1$ deki ortonormal koordinat sistemi $\{O; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\}$ olmak üzere

$$\langle \vec{r}_i, \vec{r}_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij} \quad , \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \vec{r}_i \text{ space-like} \\ -1, & \vec{r}_i \text{ time-like} \end{cases} \quad , \quad 1 \le i, j \le 3$$

dır. $\mathbb{L}_1$ de $\mathbb{L}'$ ve $\mathbb{L}$ ile aynı şekilde yönlendirilmiş olsun.

E. Study teoremine göre $\vec{e}_i'$, $\vec{e}_i$, $\vec{r}_i$ $(1 \le i \le 3)$, eksenlerine dual Lorentz uzayda, sırasıyla, aynı $\widetilde{M}$ merkezli $\tilde{K}'$, $\tilde{K}$ ve $\tilde{K}_1$ birim dual Lorentz kürelerinin noktaları karşılık geleceğinden $\mathbb{L}_1/\mathbb{L}$, $\mathbb{L}_1/\mathbb{L}'$ dolayısıyla $\mathbb{L}/\mathbb{L}'$ hareketleri, sırasıyla, $\tilde{K}_1/\tilde{K}$, $\tilde{K}_1/\tilde{K}'$ ve $\tilde{K}/\tilde{K}'$ dual Lorentzian küresel hareketler veya dual dönme hareketleri olarak incelenebilir.

$\tilde{K}'$, $\tilde{K}$ ve $\tilde{K}_1$ birim dual kürelerinin ortak merkezi $\widetilde{M}$ olsun. Bu birim dual kürelere sıkı sıkıya bağlı ortonormal baz sistemleri de, sırasıyla,

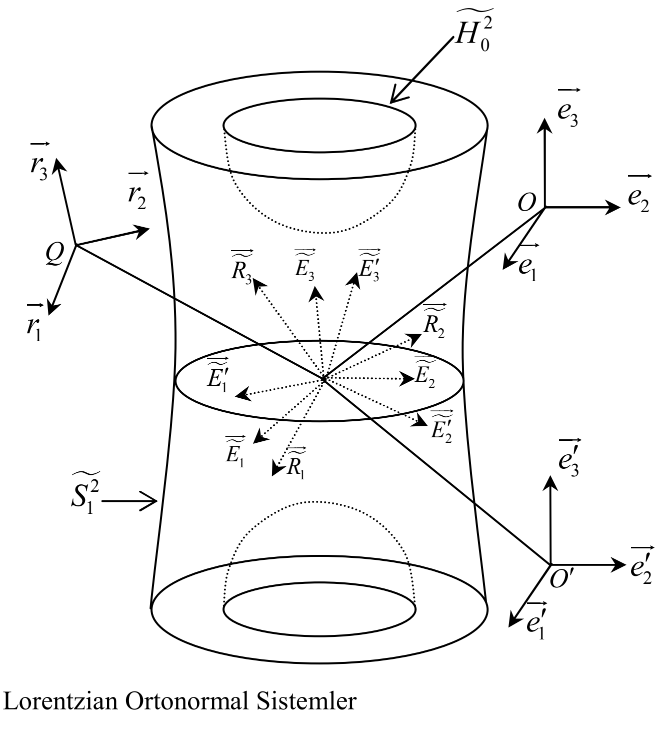
$$\left\{\widetilde{M};\overrightarrow{\widetilde{E}_1'},\overrightarrow{\widetilde{E}_2'},\overrightarrow{\widetilde{E}_3'}\right\} \quad , \quad \left\{\widetilde{M};\overrightarrow{\widetilde{E}_1},\overrightarrow{\widetilde{E}_2},\overrightarrow{\widetilde{E}_3}\right\} \quad \text{ve} \quad \left\{\widetilde{M};\overrightarrow{\widetilde{R}_1},\overrightarrow{\widetilde{R}_2},\overrightarrow{\widetilde{R}_3}\right\}$$

olsunlar. Burada

$$\overrightarrow{\widetilde{E}_i'} = \overrightarrow{e_i'} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{e_i'^*} \quad , \quad \overrightarrow{\widetilde{E}_i} = \overrightarrow{e_i} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{e_i^*} \quad , \quad \overrightarrow{\widetilde{R}_i} = \overrightarrow{r_i} + \mathcal{E}\,\overrightarrow{r_i^*} \quad , \quad 1 \le i \le 3$$

$$\overrightarrow{e_i'^*} = \overrightarrow{\widetilde{M}O'} \wedge \overrightarrow{e_i'} \quad , \quad \overrightarrow{e_i^*} = \overrightarrow{\widetilde{M}O} \wedge \overrightarrow{e_i} \quad , \quad \overrightarrow{r_i^*} = \overrightarrow{\widetilde{M}Q} \wedge \overrightarrow{r_i}$$

dir.



(Şekil 4.1.1.). Dual Lorentzian Ortonormal Sistemler

Bu sistemler aynı yönlü olarak seçilmişlerdir. Yani, bir dual Lorentz ortogonal dönüşüm ile birinden diğerine geçilebilir. Bu dönüşümler, $\widetilde{M}$ etrafındaki dual Lorentz dönmelerdir.

$$\widetilde{A} = \left[\widetilde{A_{ij}}\right] \quad , \quad \widetilde{A_{ij}} = a_{ij} + \mathcal{E}\, a_{ij}^{*} \quad , \quad \widetilde{A'} = \left[\widetilde{A'_{ij}}\right] \quad , \quad \widetilde{A'_{ij}} = a'_{ij} + \mathcal{E}\, a'^{*}_{ij}$$

3×3 tipinde dual Lorentz ortogonal matrisler olmak üzere

$$\widetilde{R} = \widetilde{A}\,\widetilde{E} \qquad \text{ve} \qquad \widetilde{R} = \widetilde{A'}\ \widetilde{E'} \tag{4.1.1}$$

yazılabilir, burada

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{R_1}} \\ \overrightarrow{\widetilde{R_2}} \\ \overrightarrow{\widetilde{R_3}} \end{bmatrix} \quad , \quad \widetilde{E} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{E_1}} \\ \overrightarrow{\widetilde{E_2}} \\ \overrightarrow{\widetilde{E_3}} \end{bmatrix} \quad , \quad \widetilde{E'} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widetilde{E'_1}} \\ \overrightarrow{\widetilde{E'_2}} \\ \overrightarrow{\widetilde{E'_3}} \end{bmatrix}$$

dual sütun matrisleridir.

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{A'}$ dual Lorentz ortogonal matrislerinin elemanları $\tilde{t} = t + \mathcal{E}\, t^{*}$ dual parametresinin yeteri kadar türevlenebilen fonksiyonlarıdır. Bu tez boyunca aksi söylenmedikçe $t^{*} = 0$ alınacaktır. Böylece dual Lorentz uzayda bir parametreli hareketler söz konusu olacaktır.

Şimdi $\overrightarrow{\widetilde{R_i}}$ vektörlerinin, sırasıyla, $\tilde{K}$ ve $\tilde{K}'$ dual Lorentz kürelerine göre diferensiyellerini hesaplayalım.

Eğer (4.1.1) denklemi göz önüne alınırsa, $\widetilde{R}$ nin $\tilde{K}$ hareketli dual Lorentz küresine göre diferensiyeli

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{R} &= d\widetilde{A}\,\widetilde{E} \\
&= d\widetilde{A}\,\widetilde{A}^{-1}\,\widetilde{R} \\
&= \tilde{\Omega}\,\tilde{R}
\end{aligned}
\tag{4.1.2}
$$

dir, burada $\tilde{\Omega}$ Lorentz anlamda anti-simetrik matristir. $\tilde{\Omega}$ nın bileşenleri $\tilde{\Omega}_{ij}$ olmak üzere i, j, k indislerinin $i, j, k = 1,2,3; 2,3,1; 3,1,2$ sıralanışları, $\tilde{\Omega}_{ij} = \tilde{\Omega}_k$ ile gösterilirse,

$$d\overrightarrow{\widetilde{R_1}} = \widetilde{\Omega_3}\overrightarrow{\widetilde{R_2}} - \widetilde{\Omega_2}\overrightarrow{\widetilde{R_3}}$$

$$d\overrightarrow{\widetilde{R_2}} = \widetilde{\Omega_3}\overrightarrow{\widetilde{R_1}} - \widetilde{\Omega_1}\overrightarrow{\widetilde{R_3}}$$

$$d\overrightarrow{\widetilde{R_3}} = -\widetilde{\Omega_2}\overrightarrow{\widetilde{R_1}} + \widetilde{\Omega_1}\overrightarrow{\widetilde{R_2}}$$

elde edilir. Bu son denklem reel ve dual bileşenlerine ayırılırsa

$$
\begin{aligned}
d\overrightarrow{\widetilde{R_1}} &= \omega_3\vec{r}_2 - \omega_2\vec{r}_3 + \mathcal{E}\left(\omega_3\vec{r}_2^{\,*} + \omega_3^*\vec{r}_2 - \omega_2\vec{r}_3^{\,*} - \omega_2^*\vec{r}_3\right) \\
d\overrightarrow{\widetilde{R_2}} &= \omega_3\vec{r}_1 - \omega_1\vec{r}_3 + \mathcal{E}\left(\omega_3\vec{r}_1^{\,*} + \omega_3^*\vec{r}_1 - \omega_1\vec{r}_3^{\,*} - \omega_1^*\vec{r}_3\right) \\
d\overrightarrow{\widetilde{R_3}} &= -\omega_2\vec{r}_1 + \omega_1\vec{r}_2 + \mathcal{E}\left(-\omega_2\vec{r}_1^{\,*} - \omega_2^*\vec{r}_1 + \omega_1\vec{r}_2^{\,*} + \omega_1^*\vec{r}_2\right)
\end{aligned}
\tag{4.1.3}
$$

bulunur[8]. Benzer olarak (4.1.1) denklemi göz önüne alınırsa $\widetilde{R} = \widetilde{A'}\,\widetilde{E'}$ denkleminden

$$d'\overrightarrow{\widetilde{R_1}} = \widetilde{\Omega_3'}\overrightarrow{\widetilde{R_2}} - \widetilde{\Omega_2'}\overrightarrow{\widetilde{R_3}}$$

$$d'\overrightarrow{\widetilde{R_2}} = \widetilde{\Omega_3'}\overrightarrow{\widetilde{R_1}} - \widetilde{\Omega_1'}\overrightarrow{\widetilde{R_3}}$$

$$d'\overrightarrow{\widetilde{R}_3} = -\widetilde{\Omega}_2'\overrightarrow{\widetilde{R}_1} + \widetilde{\Omega}_1'\overrightarrow{\widetilde{R}_2}$$

bulunur. Son denklemde reel ve dual bileşenleri cinsinden

$$d'\overrightarrow{\widetilde{R}_1} = \omega_3'\vec{r}_2 - \omega_2'\vec{r}_3 + \varepsilon\left(\omega_3'\vec{r}_2^{\,*} + \omega_3'^{*}\vec{r}_2 - \omega_2'\vec{r}_3^{\,*} - \omega_2'^{*}\vec{r}_3\right)$$

$$d'\overrightarrow{\widetilde{R}_2} = \omega_3'\vec{r}_1 - \omega_1'\vec{r}_3 + \varepsilon\left(\omega_3'\vec{r}_1^{\,*} + \omega_3'^{*}\vec{r}_1 - \omega_1'\vec{r}_3^{\,*} - \omega_1'^{*}\vec{r}_3\right) \qquad (4.1.4)$$

$$d'\overrightarrow{\widetilde{R}_3} = -\omega_2'\vec{r}_1 + \omega_1'\vec{r}_2 + \varepsilon\left(-\omega_2'\vec{r}_1^{\,*} - \omega_2'^{*}\vec{r}_1 + \omega_1'\vec{r}_2^{\,*} + \omega_1'^{*}\vec{r}_2\right)$$

dir[8].

Burada $\widetilde{\Omega}_i = \omega_i + \mathcal{E}\,\omega_i^*$ ve $\widetilde{\Omega}_i' = \omega_i' + \mathcal{E}\,\omega_i'^*$, $\left(1 \le i \le 3\right)$ dual Pfaff formları (1-formları) olarak isimlendirilirler. (4.1.3) ve (4.1.4) denklemlerinin reel ve dual kısımları, sırasıyla, $\mathbb{L}_1/\mathbb{L}$ ve $\mathbb{L}_1/\mathbb{L}'$ Lorentz uzayında bir parametreli hareketlerin dönme kısmı ile ilgili Pfaff formlarını verir. $\mathbb{L}^3$ de her $\mathbb{L}/\mathbb{L}'$ hareketi bir "D" dönme ve bir "S" öteleme hareketi ile ilgilidir.

4.2. Dual Lorentzian Hareketlerde Hız

$\tilde{K}_1$ birim dual Lorentz küresinin koordinatları $\tilde{X}_i = x_i + \varepsilon x_i^*$ $\left(1 \le i \le 3\right)$ olan $\widetilde{X}^T = \left[\tilde{X}_1 \quad \tilde{X}_2 \quad \tilde{X}_3\right]$ noktasını ele alalım.

$\tilde{K}_1/\tilde{K}$ ve $\tilde{K}_1/\tilde{K}'$ dual Lorentzin dönmelerine göre $\overrightarrow{\widetilde{X}}$ birim dual vektörünün değişimlerini inceleyelim.

$\overrightarrow{\widetilde{X}} = \widetilde{X}^T\,\widetilde{R}$ vektörünün $\tilde{K}$ hareketli dual Lorentz küresine göre değişimi

$$d\vec{\widetilde{X}} = d\widetilde{X}^T \widetilde{R} + \widetilde{X}^T d\widetilde{R}$$

dır. Burada $d\widetilde{R} = \widetilde{\Omega}\widetilde{R}$ değeri yerine yazılırsa

$$d\vec{\widetilde{X}} = \left(d\widetilde{X}^T + \widetilde{X}^T \widetilde{\Omega}\right)\widetilde{R} \tag{4.2.1}$$

bulunur. Böylece $\tilde{X}$ noktasının relatif hız vektörü ($\tilde{X}$ nın $\tilde{K}$ ya göre hızı) $\vec{\tilde{V}}_r = d\vec{\tilde{X}}/dt$ dir. (4.2.1) denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa,

$$\begin{aligned} d\vec{\widetilde{X}} = &\left(dx_1 + x_2\omega_3 - x_3\omega_2\right)\vec{r}_1 + \mathcal{E}\left[\left(dx_1^* + x_2\omega_3^* + x_2^*\omega_3 - x_3\omega_2^* - x_3^*\omega_2\right)\vec{r}_1 + \left(dx_1 + \omega_3 x_2 - x_3\omega_2\right)\vec{r}_1^{\,*}\right] \\ &+\left(dx_2 + x_1\omega_3 + x_3\omega_1\right)\vec{r}_2 + \mathcal{E}\left[\left(dx_2^* + x_1\omega_3^* + x_1^*\omega_3 + x_3\omega_1^* + x_3^*\omega_1\right)\vec{r}_2 + \left(dx_2 + \omega_3 x_1 + x_3\omega_1\right)\vec{r}_2^{\,*}\right] \\ &+\left(dx_3 - x_1\omega_2 - x_2\omega_1\right)\vec{r}_3 + \mathcal{E}\left[\left(dx_3^* - x_1\omega_2^* - x_1^*\omega_2 - x_2\omega_1^* - x_2^*\omega_1\right)\vec{r}_3 + \left(dx_3 - \omega_2 x_1 - x_2\omega_1\right)\vec{r}_3^{\,*}\right] \end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde $\tilde{X}$ noktasının $\tilde{K}'$ sabit dual Lorentz küresine göre değişimi

$$d'\vec{\widetilde{X}} = d\widetilde{X}^T \widetilde{R} + \widetilde{X}^T d'\widetilde{R}$$

dır. Burada $d'\widetilde{R} = \widetilde{\Omega'}\widetilde{R}$ değeri yerine yazılırsa

$$d'\vec{\widetilde{X}} = \left(d\widetilde{X}^{\mathrm{T}} + \widetilde{X}^{\mathrm{T}} \widetilde{\Omega'}\right)\widetilde{R} \tag{4.2.2}$$

bulunur. O halde mutlak hız vektörü ($\tilde{X}$ nın $\tilde{K}'$ ya göre hızı) $\vec{\tilde{V}}_a = d'\vec{\tilde{X}}/dt$ dir. (4.2.2) denklemi reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$
\begin{aligned}
d'\overrightarrow{\widetilde{X}} = & \left(dx_1 + x_2\omega_3' - x_3\omega_2'\right)\vec{r}_1 + \mathcal{E}\left[\left(dx_1^* + x_2\omega_3'^* + x_2^*\omega_3' - x_3\omega_2'^* - x_3^*\omega_2'\right)\vec{r}_1 + \left(dx_1 + \omega_3'x_2 - x_3\omega_2'\right)\vec{r}_1^{\,*}\right] \\
& + \left(dx_2 + x_1\omega_3' + x_3\omega_1'\right)\vec{r}_2 + \mathcal{E}\left[\left(dx_2^* + x_1\omega_3'^* + x_1^*\omega_3' + x_3\omega_1'^* + x_3^*\omega_1'\right)\vec{r}_2 + \left(dx_2 + \omega_3'x_1 + x_3\omega_1'\right)\vec{r}_2^{\,*}\right] \\
& + \left(dx_3 - x_1\omega_2' - x_2\omega_1'\right)\vec{r}_3 + \mathcal{E}\left[\left(dx_3^* - x_1\omega_2'^* - x_1^*\omega_2' - x_2\omega_1'^* - x_2^*\omega_1'\right)\vec{r}_3 + \left(dx_3 - \omega_2'x_1 - x_2\omega_1'\right)\vec{r}_3^{\,*}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\widetilde{X}$ noktasının $\tilde{K}$ hareketli birim dual Lorentz küresi üzerinde sabit kalma koşulu $d\overrightarrow{\widetilde{X}} = 0$ olacağından, (4.2.1) denkleminden

$$d\widetilde{X}^T = -\widetilde{X}^T\widetilde{\Omega} \qquad (4.2.3)$$

yani

$$d\widetilde{X_1} = -\widetilde{X_2}\widetilde{\Omega_3} + \widetilde{X_3}\widetilde{\Omega_2} \quad , \quad d\widetilde{X_2} = -\widetilde{X_1}\widetilde{\Omega_3} - \widetilde{X_3}\widetilde{\Omega_1} \quad , \quad d\widetilde{X_3} = \widetilde{X_1}\widetilde{\Omega_2} + \widetilde{X_2}\widetilde{\Omega_1}$$

bulunur. Bu son denklemler reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa, sırasıyla,

$$dx_1 + \varepsilon dx_1^* = -x_2\omega_3 + x_3\omega_2 + \varepsilon\left(-x_2\omega_3^* - x_2^*\omega_3 + x_3\omega_2^* + x_3^*\omega_2\right),$$

$$dx_2 + \varepsilon dx_2^* = -x_1\omega_3 - x_3\omega_1 + \varepsilon\left(-x_1\omega_3^* - x_1^*\omega_3 - x_3\omega_1^* - x_3^*\omega_1\right),$$

$$dx_3 + \varepsilon dx_3^* = x_1\omega_2 + x_2\omega_1 + \varepsilon\left(x_1\omega_2^* + x_1^*\omega_2 + x_2\omega_1^* + x_2^*\omega_1\right)$$

elde edilir.

$\widetilde{X}$ noktasının $\tilde{K}'$ sabit birim dual Lorentz küresi üzerinde sabit kalma koşulu $d'\overrightarrow{\widetilde{X}} = 0$ olacağından, (4.2.2) denkleminden

$$d\tilde{X}^T = -\tilde{X}^T\tilde{\Omega}' \qquad (4.2.4)$$

yani

$$d\widetilde{X}_1 = -\widetilde{X}_2\widetilde{\Omega}'_3 + \widetilde{X}_3\widetilde{\Omega}'_2 \quad , \quad d\widetilde{X}_2 = -\widetilde{X}_1\widetilde{\Omega}'_3 - \widetilde{X}_3\widetilde{\Omega}'_1 \quad , \quad d\widetilde{X}_3 = \widetilde{X}_1\widetilde{\Omega}'_2 + \widetilde{X}_2\widetilde{\Omega}'_1$$

dir ki, böylece

$$dx_1 + \varepsilon dx_1^* = -x_2\omega'_3 + x_3\omega'_2 + \varepsilon\left(-x_2\omega_3'^* - x_2^*\omega'_3 + x_3\omega_2'^* + x_3^*\omega'_2\right)$$

$$dx_2 + \varepsilon dx_2^* = -x_1\omega'_3 - x_3\omega'_1 + \varepsilon\left(-x_1\omega_3'^* - x_1^*\omega'_3 - x_3\omega_1'^* - x_3^*\omega'_1\right)$$

$$dx_3 + \varepsilon dx_3^* = x_1\omega'_2 + x_2\omega'_1 + \varepsilon\left(x_1\omega_2'^* + x_1^*\omega'_2 + x_2\omega_1'^* + x_2^*\omega'_1\right)$$

elde edilir.

Eğer $\widetilde{X}$ noktası $\tilde{K}$ hareketli birim dual Lorentz küresi üzerinde sabit ise, bu takdirde $\vec{\widetilde{X}}$ dual vektörünün $\tilde{K}'$ sabit birim dual Lorentz küresine göre hızına, $\vec{\widetilde{X}}$ dual vektörünün sürüklenme hızı adı verilir ve $\vec{\tilde{V}}_f = \dfrac{d_f\vec{\widetilde{X}}}{dt}$ ile gösterilir.

Eğer (4.2.4) denklemi (4.2.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d_f\vec{\widetilde{X}} &= \left(-\widetilde{X}^T\widetilde{\Omega} + \widetilde{X}^T\widetilde{\Omega}'\right)\widetilde{R} \\ &= \widetilde{X}^T\left(\widetilde{\Omega}' - \widetilde{\Omega}\right)\widetilde{R} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

elde edilir. Son denklem (4.2.1) ve (4.2.2) denklemleri göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.1.

$\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında bir parametreli dual Lorentzian hareketlerde, bir $\tilde{X}$ dual noktasının mutlak hızı, relatif hızı ile sürüklenme hızının toplamına eşittir[8].

Bileşenleri $\tilde{\Psi}_i = \tilde{\Omega}'_i - \tilde{\Omega}_i$ olan $\overrightarrow{\tilde{\Psi}}$ dual Pfaff vektörü

$$\overrightarrow{\tilde{\Psi}} = -\tilde{\Psi}_1 \overrightarrow{\tilde{R}_1} + \tilde{\Psi}_2 \overrightarrow{\tilde{R}_2} + \tilde{\Psi}_3 \overrightarrow{\tilde{R}_3}$$

olarak seçilirse

$$d_f \overrightarrow{\tilde{X}} = \overrightarrow{\tilde{\Psi}} \wedge \overrightarrow{\tilde{X}} \tag{4.2.6}$$

olduğu görülebilir, burada $\tilde{X}_i = x_i + \varepsilon x_i^*$ ve $\tilde{\Psi}_i = \psi_i + \varepsilon \psi_i^*$ $\left(1 \le i \le 3\right)$ dır.

(4.2.6) denklemi reel ve dual bileşenleri cinsinden

$$\begin{aligned} d_f \overrightarrow{\tilde{X}} = & \left(x_2\psi_3 - x_3\psi_2\right)\vec{r}_1 + \varepsilon\left(\left(x_2\psi_3^* + x_2^*\psi_3 - x_3\psi_2^* - x_3^*\psi_2\right)\vec{r}_1 + \left(x_2\psi_3 - x_3\psi_2\right)\vec{r}_1^{\,*}\right) \\ & + \left(x_1\psi_3 + x_3\psi_1\right)\vec{r}_2 + \varepsilon\left(\left(x_1\psi_3^* + x_1^*\psi_3 + x_3\psi_1^* + x_3^*\psi_1\right)\vec{r}_2 + \left(x_1\psi_3 + x_3\psi_1\right)\vec{r}_2^{\,*}\right) \\ & + \left(-x_1\psi_2 - x_2\psi_1\right)\vec{r}_3 + \varepsilon\left(\left(-x_1\psi_2^* - x_1^*\psi_2 - x_2\psi_1^* - x_2^*\psi_1\right)\vec{r}_3 + \left(-x_1\psi_2 - x_2\psi_1\right)\vec{r}_3^{\,*}\right) \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

olur.

$\overrightarrow{\tilde{\Psi}}$ dual vektörüne $\tilde{K}/\tilde{K}'$ hareketinin ani dual Lorentz Pfaff vektörü de denir. $\overrightarrow{\tilde{\Psi}}$ nin $\vec{\psi}$ reel ve $\vec{\psi}^*$ dual kısımları $\tilde{K}/\tilde{K}'$ dual Lorentzian dönme hareketine karşılık gelen $\mathbb{L}/\mathbb{L}'$ Lorentz küresel hareketinin, sırasıyla, ani dönme ve ani öteleme Pfaff vektörlerine karşılık gelirler. Sadece dönme ve sadece öteleme hareketlerini hariç tutmak için aksi söylenmedikçe $\vec{\psi} \ne \vec{0}$ ve $\vec{\psi}^* \ne \vec{0}$ alınacaktır.

4.3. Dual Lorentzian Hareketlerde İvme ve İvme Eksenleri

$\overrightarrow{\tilde{X}}$ dual vektörünün ivmesini hesaplayalım. (4.2.6) denklemini göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}\vec{\tilde{J}} &= d\left(d_f \vec{\tilde{X}}\right) = d_f^2 \vec{\tilde{X}} = d\left(\vec{\tilde{\Psi}} \wedge \vec{\tilde{X}}\right) \\ &= d\vec{\tilde{\Psi}} \wedge \vec{\tilde{X}} + \vec{\tilde{\Psi}} \wedge d_f \vec{\tilde{X}} \\ &= d\vec{\tilde{\Psi}} \wedge \vec{\tilde{X}} + \vec{\tilde{\Psi}} \wedge \left(\vec{\tilde{\Psi}} \wedge \vec{\tilde{X}}\right) \\ &= d\vec{\tilde{\Psi}} \wedge \vec{\tilde{X}} + \left\langle \vec{\tilde{\Psi}}, \vec{\tilde{\Psi}} \right\rangle \vec{\tilde{X}} - \left\langle \vec{\tilde{\Psi}}, \vec{\tilde{X}} \right\rangle \vec{\tilde{\Psi}}\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

elde edilir, burada $d\vec{\tilde{\Psi}}$ ani dual açısal ivme vektörüdür. (4.2.5) denkleminde

$$\tilde{M} = \left(\tilde{\Omega}' - \tilde{\Omega}\right)^T$$

olmak üzere matris formunda

$$d_f \tilde{X} = \tilde{M}\,\tilde{X} \tag{4.3.2}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\tilde{J} &= d\left(\tilde{M}\tilde{X}\right) = d\tilde{M}\tilde{X} + \tilde{M} d_f \tilde{X} \\ &= \dot{\tilde{M}}\,\tilde{X} + \tilde{M}\tilde{M}\tilde{X} \\ &= \left(\dot{\tilde{M}} + \tilde{M}^2\right)\tilde{X}\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

olduğu görülür, burada

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\Psi}_3 & -\tilde{\Psi}_2 \\ \tilde{\Psi}_3 & 0 & \tilde{\Psi}_1 \\ -\tilde{\Psi}_2 & -\tilde{\Psi}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad d\tilde{M} = \dot{\tilde{M}} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\tilde{\Psi}}_3 & -\dot{\tilde{\Psi}}_2 \\ \dot{\tilde{\Psi}}_3 & 0 & \dot{\tilde{\Psi}}_1 \\ -\dot{\tilde{\Psi}}_2 & -\dot{\tilde{\Psi}}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3.4}$$

$$\tilde{M}^2 = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}^2 + \tilde{\Psi}_1^2 & \tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2 & \tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3 \\ -\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2 & \tilde{\Psi}^2 - \tilde{\Psi}_2^2 & -\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3 \\ -\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3 & -\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3 & \tilde{\Psi}^2 - \tilde{\Psi}_3^2 \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{M}^3 = \tilde{\Psi}^2\tilde{M} \tag{4.3.5}$$

dır. Daha yüksek mertebeden ivmeler için, $\tilde{M}$ matrisinin mertebesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{2n+1} &= \tilde{\Psi}^{2n}\tilde{M} \\ \tilde{M}^{2n+2} &= \tilde{\Psi}^{2n}\tilde{M}^2 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Eğer $\tilde{\Psi}$, $\dot{\tilde{\Psi}}$ alınırsa (4.3.6) denklemleri $\dot{\tilde{M}}$ için de aynen geçerlidir yani

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{M}}^{2n+1} &= \dot{\tilde{\Psi}}^{2n}\,\dot{\tilde{M}} \\ \dot{\tilde{M}}^{2n+2} &= \dot{\tilde{\Psi}}^{2n}\,\dot{\tilde{M}}^2 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

dir.

$\tilde{J} = \left(\dot{\tilde{M}} + \tilde{M}^2 \right)\tilde{X}$ denkleminde ifade edilen $\vec{\tilde{X}}$ 'nin $\tilde{J}$ dual Lorentz ivmesinin bileşenleri $\vec{\tilde{X}}$ 'nin $\tilde{X}_i$, $(1 \le i \le 3)$ koordinatları olan homojen lineer fonksiyonlarıdır. Bu denklemin katsayılar determinantını $\tilde{D}$ ile gösterirsek,

$$\begin{aligned} \tilde{D} = \det\left(\tilde{M}^2 + \dot{\tilde{M}} \right) = \left\| \vec{\tilde{\Psi}} \wedge \dot{\vec{\tilde{\Psi}}} \right\|^2 &= \left\| \vec{\tilde{\Psi}} \right\|^2 \left\| \dot{\vec{\tilde{\Psi}}} \right\|^2 \sinh^2 \tilde{\nabla} \\ &= \tilde{\Psi}^2 \; \dot{\tilde{\Psi}}^2 \sinh^2 \tilde{\nabla} \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

dır. Burada

$$\tilde{\nabla} = \tilde{\alpha} + \varepsilon\tilde{\alpha}^* \tag{4.3.9}$$

$\vec{\tilde{\Psi}}$ ile $\dot{\vec{\tilde{\Psi}}}$ dual space-like vektörleri arasındaki dual Lorentz açıdır. Eğer $\vec{\tilde{\Psi}}$ ve $\dot{\vec{\tilde{\Psi}}}$ vektörlerinin her ikisi de Lorentz uzayın aynı doğrusuna karşılık gelirse, bu doğru ivmeye sahip olmaz. Bu özel durum $\tilde{D} = 0$ olması anlamına gelir.

Tanım4.3.1.

Birim dual Lorentz küresinin birim dual $\vec{\tilde{X}}$ vektörü ve $\vec{\tilde{X}}$'nın dual ivme vektörü lineer bağımlı iseler $\tilde{X}$ noktasına dual ivme polü ve $\vec{\tilde{X}}$ doğrusuna da dual Lorentz hareketinin ivme ekseni adı verilir.

$\vec{\tilde{X}}$ dual Lorentz ivme vektörünü $\vec{\tilde{V}}$ ile gösterelim. Bu takdirde Tanım 4.3.1. ve (4.3.1) denklemi göz önüne alınırsa $\vec{\tilde{V}}$ dual vektörünün

$$\left\langle \vec{\tilde{\Psi}}, \vec{\tilde{V}} \right\rangle \vec{\tilde{\Psi}} - \dot{\vec{\tilde{\Psi}}} \wedge \vec{\tilde{V}} = \tilde{\Lambda} \tilde{\Psi}^2 \vec{\tilde{V}} \tag{4.3.10}$$

olduğu görülebilir. Burada

$$\tilde{\Lambda} = \lambda + \varepsilon \lambda^* \tag{4.3.11}$$

bir dual skalardir. Bu denklemde $\vec{\tilde{V}}$'nin $\tilde{X}_1,\ \tilde{X}_2,\ \tilde{X}_3$ koordinatlarının üç homojen lineer denklemine karşılık gelir.

Böylece sıfırdan farklı çözümler olması için katsayılar determinantı sıfır olmalıdır.

Şimdi (4.3.10) ile verilen denklemin bileşenlerini ayrı ayrı hesaplayalım. $\vec{\tilde{\Psi}} = -\tilde{\Psi}_1 \vec{\tilde{R}}_1 + \tilde{\Psi}_2 \vec{\tilde{R}}_2 + \tilde{\Psi}_3 \vec{\tilde{R}}_3$ olduğundan

$$\left\langle \vec{\tilde{\Psi}}, \vec{\tilde{V}} \right\rangle = \left\langle \left(-\tilde{\Psi}_1 \vec{\tilde{R}}_1 + \tilde{\Psi}_2 \vec{\tilde{R}}_2 + \tilde{\Psi}_3 \vec{\tilde{R}}_3 \right), \left(\tilde{X}_1 \vec{\tilde{R}}_1 + \tilde{X}_2 \vec{\tilde{R}}_2 + \tilde{X}_3 \vec{\tilde{R}}_3 \right) \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{\tilde{\Psi}}, \vec{\tilde{V}} \right\rangle = \tilde{\Psi}_1 \tilde{X}_1 + \tilde{\Psi}_2 \tilde{X}_2 + \tilde{\Psi}_3 \tilde{X}_3$$

bulunur. Bu son denklem dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\tilde{\Psi}}, \vec{\tilde{V}} \right\rangle \vec{\tilde{\Psi}} &= \left(\tilde{\Psi}_1 \tilde{X}_1 + \tilde{\Psi}_2 \tilde{X}_2 + \tilde{\Psi}_3 \tilde{X}_3 \right) \left(-\tilde{\Psi}_1 \vec{\tilde{R}}_1 + \tilde{\Psi}_2 \vec{\tilde{R}}_2 + \tilde{\Psi}_3 \vec{\tilde{R}}_3 \right) \\ &= \left(-\tilde{\Psi}_1^2 \tilde{X}_1 - \tilde{\Psi}_1 \tilde{\Psi}_2 \tilde{X}_2 - \tilde{\Psi}_1 \tilde{\Psi}_3 \tilde{X}_3 \right) \vec{\tilde{R}}_1 \\ &+ \left(\tilde{\Psi}_1 \tilde{\Psi}_2 \tilde{X}_1 + \tilde{\Psi}_2^2 \tilde{X}_2 + \tilde{\Psi}_2 \tilde{\Psi}_3 \tilde{X}_3 \right) \vec{\tilde{R}}_2 \\ &+ \left(\tilde{\Psi}_1 \tilde{\Psi}_3 \tilde{X}_1 + \tilde{\Psi}_2 \tilde{\Psi}_3 \tilde{X}_2 + \tilde{\Psi}_3^2 \tilde{X}_3 \right) \vec{\tilde{R}}_3 \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\dot{\vec{\tilde{\Psi}}} \wedge \vec{\tilde{V}} = \left(\dot{\tilde{\Psi}}_3 \tilde{X}_2 - \dot{\tilde{\Psi}}_2 \tilde{X}_3 \right) \vec{\tilde{R}}_1 - \left(-\dot{\tilde{\Psi}}_1 \tilde{X}_3 - \dot{\tilde{\Psi}}_3 \tilde{X}_1 \right) \vec{\tilde{R}}_2 + \left(-\dot{\tilde{\Psi}}_1 \tilde{X}_2 - \dot{\tilde{\Psi}}_2 \tilde{X}_1 \right) \vec{\tilde{R}}_3 \tag{4.3.13}$$

olduğu görülebilir. O halde

$$\tilde{\Lambda} \tilde{\Psi}^2 \vec{\tilde{V}} = \tilde{\Lambda} \tilde{\Psi}^2 \tilde{X}_1 \vec{\tilde{R}}_1 + \tilde{\Lambda} \tilde{\Psi}^2 \tilde{X}_2 \vec{\tilde{R}}_2 + \tilde{\Lambda} \tilde{\Psi}^2 \tilde{X}_3 \vec{\tilde{R}}_3 \tag{4.3.14}$$

dir. (4.3.12), (4.3.13), (4.3.14) denklemleri (4.3.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\left(-\tilde{\Psi}_1^2 \tilde{X}_1 - \tilde{\Psi}_1 \tilde{\Psi}_2 \tilde{X}_2 - \tilde{\Psi}_1 \tilde{\Psi}_3 \tilde{X}_3 - \dot{\tilde{\Psi}}_3 \tilde{X}_2 + \dot{\tilde{\Psi}}_2 \tilde{X}_3 - \tilde{\Lambda} \tilde{\Psi}^2 \tilde{X}_1 \right) \vec{\tilde{R}}_1 \\ &+ \left(\tilde{\Psi}_1 \tilde{\Psi}_2 \tilde{X}_1 + \tilde{\Psi}_2^2 \tilde{X}_2 + \tilde{\Psi}_2 \tilde{\Psi}_3 \tilde{X}_3 - \dot{\tilde{\Psi}}_1 \tilde{X}_3 - \dot{\tilde{\Psi}}_3 \tilde{X}_1 - \tilde{\Lambda} \tilde{\Psi}^2 \tilde{X}_2 \right) \vec{\tilde{R}}_2 \\ &+ \left(\tilde{\Psi}_1 \tilde{\Psi}_3 \tilde{X}_1 + \tilde{\Psi}_2 \tilde{\Psi}_3 \tilde{X}_2 + \tilde{\Psi}_3^2 \tilde{X}_3 + \dot{\tilde{\Psi}}_1 \tilde{X}_2 + \dot{\tilde{\Psi}}_2 \tilde{X}_1 - \tilde{\Lambda} \tilde{\Psi}^2 \tilde{X}_3 \right) \vec{\tilde{R}}_3 = 0 \end{aligned}$$

olur. Bu son denklem matris formunda

$$\begin{bmatrix} -\tilde{\Psi}_1^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2 & -\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2-\dot{\tilde{\Psi}}_3 & -\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3+\dot{\tilde{\Psi}}_2 \\ \tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2-\dot{\tilde{\Psi}}_3 & \tilde{\Psi}_2^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2 & \tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3-\dot{\tilde{\Psi}}_1 \\ \tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3+\dot{\tilde{\Psi}}_2 & \tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3+\dot{\tilde{\Psi}}_1 & \tilde{\Psi}_3^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{X}_1\\ \tilde{X}_2\\ \tilde{X}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\tilde{R}}_1\\ \vec{\tilde{R}}_2\\ \vec{\tilde{R}}_3\end{bmatrix}=0$$

şeklinde yazılabilir. Katsayılar determinantını sıfıra eşitleyerek, Sarrus yöntemiyle açarsak

$$\begin{aligned}
&\left(-\tilde{\Psi}_1^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\right)\left(\tilde{\Psi}_2^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\right)\left(\tilde{\Psi}_3^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\right)+\left(\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2-\dot{\tilde{\Psi}}_3\right)\left(\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3-\dot{\tilde{\Psi}}_1\right)\left(-\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3-\dot{\tilde{\Psi}}_2\right)\\
&+\left(\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3+\dot{\tilde{\Psi}}_2\right)\left(-\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2-\dot{\tilde{\Psi}}_3\right)\left(\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3-\dot{\tilde{\Psi}}_1\right)\\
&-\Bigg[\left(-\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3+\dot{\tilde{\Psi}}_2\right)\left(\tilde{\Psi}_2^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\right)\left(\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3+\dot{\tilde{\Psi}}_2\right)+\left(\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3-\dot{\tilde{\Psi}}_1\right)\left(\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3+\dot{\tilde{\Psi}}_1\right)\left(-\tilde{\Psi}_1^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\right)\\
&+\left(\tilde{\Psi}_3^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\right)\left(-\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2-\dot{\tilde{\Psi}}_3\right)\left(\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2-\dot{\tilde{\Psi}}_3\right)\Bigg]=0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemde işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&-\tilde{\Psi}_1^2\tilde{\Psi}_2^2\tilde{\Psi}_3^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_2^2\tilde{\Psi}_3^2+\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_1^2\tilde{\Psi}_3^2+\tilde{\Lambda}^2\tilde{\Psi}^4\tilde{\Psi}_3^2+\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_1^2\tilde{\Psi}_2^2+\tilde{\Lambda}^2\tilde{\Psi}^4\tilde{\Psi}_2^2-\tilde{\Lambda}^2\tilde{\Psi}^4\tilde{\Psi}_1^2\\
&-\tilde{\Lambda}^3\tilde{\Psi}^6-\tilde{\Psi}_1^2\tilde{\Psi}_2^2\tilde{\Psi}_3^2+\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3^2\dot{\tilde{\Psi}}_3-\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3\tilde{\Psi}_1^2\dot{\tilde{\Psi}}_1+\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3\tilde{\Psi}_2^2\dot{\tilde{\Psi}}_2-\tilde{\Psi}_2\dot{\tilde{\Psi}}_2\tilde{\Psi}_3\dot{\tilde{\Psi}}_3\\
&+\tilde{\Psi}_1\dot{\tilde{\Psi}}_1\tilde{\Psi}_2\dot{\tilde{\Psi}}_2-\tilde{\Psi}_1^2\tilde{\Psi}_2^2\tilde{\Psi}_3^2-\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3\tilde{\Psi}_2^2\dot{\tilde{\Psi}}^2-\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3^2\dot{\tilde{\Psi}}_3-\tilde{\Psi}_2\dot{\tilde{\Psi}}_2\tilde{\Psi}_3\dot{\tilde{\Psi}}_3+\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3\tilde{\Psi}_1^2\dot{\tilde{\Psi}}_1\\
&+\tilde{\Psi}_1\dot{\tilde{\Psi}}_1\tilde{\Psi}_2\dot{\tilde{\Psi}}_2+\tilde{\Psi}_1\dot{\tilde{\Psi}}_1\tilde{\Psi}_3\dot{\tilde{\Psi}}_3+\dot{\tilde{\Psi}}_1\dot{\tilde{\Psi}}_2\dot{\tilde{\Psi}}_3+\tilde{\Psi}_1\dot{\tilde{\Psi}}_1\tilde{\Psi}_3\dot{\tilde{\Psi}}_3-\dot{\tilde{\Psi}}_1\dot{\tilde{\Psi}}_2\dot{\tilde{\Psi}}_3+\tilde{\Psi}_1^2\tilde{\Psi}_2^2\tilde{\Psi}_3^2\\
&-\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3\tilde{\Psi}_2^2\dot{\tilde{\Psi}}_2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_1^2\tilde{\Psi}_3^2+\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3\dot{\tilde{\Psi}}_2+\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3\tilde{\Psi}_2^2\dot{\tilde{\Psi}}_2-\tilde{\Psi}_2^2\dot{\tilde{\Psi}}_2^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3\dot{\tilde{\Psi}}_2\\
&+\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3\dot{\tilde{\Psi}}_2+\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3\tilde{\Psi}_2^2\dot{\tilde{\Psi}}_2-\tilde{\Psi}_2^2\dot{\tilde{\Psi}}_2^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_3\dot{\tilde{\Psi}}_2+\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\dot{\tilde{\Psi}}_2^2+\tilde{\Psi}_1^2\tilde{\Psi}_2^2\tilde{\Psi}_3^2\\
&-\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3\tilde{\Psi}_1^2\dot{\tilde{\Psi}}_1+\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3\tilde{\Psi}_1^2\dot{\tilde{\Psi}}_1-\tilde{\Psi}_1^2\dot{\tilde{\Psi}}_1^2+\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_2^2\tilde{\Psi}_3^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3\dot{\tilde{\Psi}}_1+\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3\dot{\tilde{\Psi}}_1\\
&-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\dot{\tilde{\Psi}}_1^2+\tilde{\Psi}_1^2\tilde{\Psi}_2^2\tilde{\Psi}_3^2-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_1^2\tilde{\Psi}_2^2+\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3^2\dot{\tilde{\Psi}}_3-\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2\dot{\tilde{\Psi}}_3-\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_3^2\dot{\tilde{\Psi}}_3
\end{aligned}$$

$$+\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_2\dot{\tilde{\Psi}}_3-\tilde{\Psi}_3^2\dot{\tilde{\Psi}}_3^2+\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\dot{\tilde{\Psi}}_3^2=0$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik düzenlenir ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$-\tilde{\Lambda}^3\tilde{\Psi}^6+\tilde{\Lambda}^2\tilde{\Psi}^6-\left(\tilde{\Psi}_1^2\dot{\tilde{\Psi}}_1^2+\tilde{\Psi}_2^2\dot{\tilde{\Psi}}_2^2+\tilde{\Psi}_3^2\dot{\tilde{\Psi}}_3^2-2\tilde{\Psi}_1\dot{\tilde{\Psi}}_1\tilde{\Psi}_2\dot{\tilde{\Psi}}_2-2\tilde{\Psi}_1\dot{\tilde{\Psi}}_1\tilde{\Psi}_3\dot{\tilde{\Psi}}_3+2\tilde{\Psi}_2\dot{\tilde{\Psi}}_2\tilde{\Psi}_3\dot{\tilde{\Psi}}_3\right)$$

$$+\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\dot{\tilde{\Psi}}^2=0$$

elde edilir. Bu eşitliğin aşağıdaki ifadeye eşit olduğu kolayca görülebilir.

$$-\tilde{\Lambda}^3\tilde{\Psi}^6+\tilde{\Lambda}^2\tilde{\Psi}^6-\left\langle\vec{\tilde{\Psi}},\dot{\vec{\tilde{\Psi}}}\right\rangle^2+\tilde{\Lambda}\tilde{\Psi}^2\dot{\tilde{\Psi}}^2=0 \tag{4.3.15}$$

Bu son denklem $-\dfrac{1}{\tilde{\Psi}^6}$ ile çarpılırsa

$$\tilde{\Lambda}^3-\tilde{\Lambda}^2+\frac{\left\langle\vec{\tilde{\Psi}},\dot{\vec{\tilde{\Psi}}}\right\rangle^2}{\tilde{\Psi}^6}-\tilde{\Lambda}\frac{\dot{\tilde{\Psi}}^2}{\tilde{\Psi}^4}=0$$

bulunur. Bu son eşitlikle birlikte Teorem 2.3. göz önüne alınırsa,

$$\tilde{\Lambda}^3-\tilde{\Lambda}^2+\frac{\left\|\vec{\tilde{\Psi}}\right\|^2\left\|\dot{\vec{\tilde{\Psi}}}\right\|^2 cosh^2\tilde{\nabla}}{\tilde{\Psi}^6}-\tilde{\Lambda}\frac{\dot{\tilde{\Psi}}^2}{\tilde{\Psi}^4}=0$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\tilde{\Lambda}^3-\tilde{\Lambda}^2+\frac{\dot{\tilde{\Psi}}^2}{\tilde{\Psi}^4}\cosh^2\tilde{\nabla}-\tilde{\Lambda}\frac{\dot{\tilde{\Psi}}^2}{\tilde{\Psi}^4}=0 \tag{4.3.16}$$

bulunur. Eğer

$$\tilde{K} = k + \varepsilon k^* = \frac{\dot{\tilde{\Psi}}^2}{\tilde{\Psi}^4} = \frac{\left(\dot{\psi} + \varepsilon \dot{\psi}\, \dot{\psi}^*\right)^2}{\left(\psi + \varepsilon\psi^*\right)^4} = \frac{\dot{\psi}^2}{\psi^4} - \frac{2\varepsilon \dot{\psi}\left(2\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi\right)}{\psi^5} \tag{4.3.17}$$

olarak alınırsa, (4.3.16) denklemi

$$\tilde{\Lambda}^3 - \tilde{\Lambda}^2 + K cosh^2 \tilde{\nabla} - K\tilde{\Lambda} = 0 \tag{4.3.18}$$

olarak yazılır. Burada

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Lambda} = \lambda + \varepsilon\lambda^*, \quad \tilde{\Lambda}^2 = \lambda^2 + 2\varepsilon\lambda\lambda^*, \quad \tilde{\Lambda}^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2\lambda^* \\
&\tilde{\Psi} = \psi + \varepsilon\psi^*, \quad \tilde{\Psi}^2 = \psi^2 + 2\varepsilon\psi\psi^*, \quad \tilde{\Psi}^4 = \psi^4 + 4\varepsilon\psi^3\psi^* \\
&\dot{\tilde{\Psi}} = \dot{\psi} + \varepsilon\dot{\psi}^*, \quad \dot{\tilde{\Psi}}^2 = \dot{\psi} + 2\varepsilon\dot{\psi}\,\dot{\psi}^*, \quad \dot{\tilde{\Psi}}^4 = \dot{\psi}^4 + 4\varepsilon\dot{\psi}^3\,\dot{\psi}^* \\
&cosh\tilde{\nabla} = cosh\alpha + \varepsilon\alpha^* \, sinh\alpha\,, \quad cosh^2\tilde{\nabla} = cosh^2\alpha + 2\varepsilon cosh\alpha \; sinh\alpha \; \alpha^* \\
&cosh^2\tilde{\nabla} = cosh^2\alpha + \varepsilon\alpha^* sinh2\alpha
\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

eşitlikleri (4.3.18) de yerine konursa

$$\lambda^3 + 3\varepsilon\lambda^2\lambda^* - \lambda^2 - 2\varepsilon\lambda\lambda^* - \left(k + \varepsilon k^*\right)\left(\lambda + \varepsilon\lambda^*\right) + \left(k + \varepsilon k^*\right)\left(cosh^2\alpha + \varepsilon\alpha^* sinh2\alpha\right) = 0$$

$$\lambda^3 + 3\varepsilon\lambda^2\lambda^* - \lambda^2 - 2\varepsilon\lambda\lambda^* - \left[k\lambda + \varepsilon\left(k\lambda^* + k^*\lambda\right)\right] + \left[k cosh^2\alpha + \varepsilon\left(k\alpha^* sinh2\alpha + k^* cosh^2\alpha\right)\right] = 0$$

elde edilir. Bu denklem reel ve dual bileşenlerine ayrılırsa

$$\lambda^3 - \lambda^2 - k\lambda + k cosh^2\alpha + \varepsilon\left(3\lambda^2\lambda^* - 2\lambda\lambda^* - k\lambda^* - k^*\lambda + k\alpha^* sinh2\alpha + k^* cosh^2\alpha\right) = 0$$

bulunur. Böylece (4.3.18) ile verilen denklem aşağıdaki iki denkleme indirgenebilir.

$$\lambda^3 - \lambda^2 - k\lambda + k\cosh^2\alpha = 0 \qquad \text{(Reel Kısım)}$$
$$\lambda^* = \frac{-k^*\cosh^2\alpha + k^*\lambda - k\alpha^*\sinh 2\alpha}{3\lambda^2 - 2\lambda - k} \qquad \text{(Dual Kısım)} \tag{4.3.20}$$

(4.3.18) veya (4.3.19) denklemleri genel olarak $\tilde{\Lambda}_1$, $\tilde{\Lambda}_2$, $\tilde{\Lambda}_3$ üç dual köke sahiptirler. Böylece genel olarak $\tilde{l}_1$, $\tilde{l}_2$, $\tilde{l}_3$ gibi üç tane doğru vardır ve bu doğrular ani dual Lorentz ivme eksenleri olarak isimlendirilirler. Genel olarak bu üç eksen uzayda aykırı doğrulardır. Burada $k^* = 0$ özel durumu çok önemlidir. (4.3.17) denklemi göz önüne alınırsa $k^* = 0$ olduğunda aşağıdaki gibi üç durum söz konusudur.

i-) $\dot{\psi} = 0$

ii-) $2\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi = 0$

iii-) $\psi^* = 0$

Şimdi bu üç özel durumu ayrı ayrı inceleyelim:

i-) $\dot{\psi} = d\psi = 0$ ise bu ifade eder ki $\psi = sabit$ ve $k = 0$ dır. Böylece (4.3.18) denkleminin

$$\tilde{\Lambda}^3 - \tilde{\Lambda}^2 = 0$$

haline dönüşür. O halde bu denklemin kökleri

$$\tilde{\Lambda}_1 = \tilde{\Lambda}_2 = 0$$

$$\tilde{\Lambda}_3 = 1$$

dir. (4.3.10) denklemi göz önüne alınırsa bir parametreli dual Lorentzian hareketinin ivme eksenleri

$$\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = \left\langle \vec{\tilde{\Psi}}, \vec{\tilde{V}}_{1,2} \right\rangle - \dot{\vec{\tilde{\Psi}}} \times \vec{\tilde{V}}_{1,2} = 0$$

$$\tilde{l}_3 = \left\langle \vec{\tilde{\Psi}}, \vec{\tilde{V}}_3 \right\rangle - \dot{\vec{\tilde{\Psi}}} \times \vec{\tilde{V}}_3 - \tilde{\Psi}^2 \vec{\tilde{V}}_3 = 0$$

dır.

ii-) $2\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi = 0$ ise integrasyonla $\psi^* = c_1\psi^2$ olduğu açıktır. O halde ani helikoidal hareketin eğimi $\frac{\psi^*}{\psi} = c_1\psi$ dir, burada c_1 bir sabittir. Böylece ani hareket boyunca bir noktanın yörüngesi bir dairesel helistir.

iii-) $\psi^* = 0$ ise, o zaman $d\psi^* = \dot{\psi}^* = 0$ dır. Bu ise, $k^* = 0$ olduğunu ifade eder. Bu takdirde $\vec{\tilde{\Psi}}$ ani dual ekseni üzerinde bir sabit nokta vardır. ψ^*, dual Lorentz hareketinin öteleme kısmı olduğundan bu özel durum Lorentz küresel harekettir. Böylece üç tane $\tilde{l}_1$, $\tilde{l}_2$, $\tilde{l}_3$ ekseni bir doğru demeti oluştururlar ki bunların uçları Lorentz kürenin merkezidir.

4.4. İvme Eksenlerinin Gerçelliği

$\lambda^3 - \lambda^2 - k\lambda + k\cosh^2\alpha = 0$ ve $\lambda^* = \dfrac{-k^* cosh^2\alpha + k^*\lambda - k\alpha^* sinh2\alpha}{3\lambda^2 - 2\lambda - k}$ denklemlerini ele alalım. Bu denklemlerin, sırasıyla, kökleri olan λ_i $(1 \le i \le 3)$ ve λ_i^* $(1 \le i \le 3)$ lerin ya üçüde reel ya da iki tanesi imajinerdir. Bu takdirde $\tilde{l}_i$ $(1 \le i \le 3)$ eksenlerinin ya hepsi reeldir ya da eksenlerin en az bir tanesi reeldir. (4.3.18) denklemi ile verilen $\tilde{\Lambda}^3 - \tilde{\Lambda}^2 + Kcosh^2\tilde{\nabla} - K\tilde{\Lambda} = 0$ denkleminin köklerini tartışmak amacıyla, yeni bir L bilinmeyenini tanımlayalım, öyle ki

$$\tilde{\Lambda} = L + \frac{1}{3} \tag{4.4.1}$$

olsun. Böylece (4.3.18) ile verilen denklemde (4.4.1) denklemi yerine yazılırsa,

$$L^3 - \frac{L}{3} - KL - \frac{K}{3} + K\cosh^2\tilde{\nabla} - \frac{2}{27} = 0$$

bulunur. Buradan

$$L^3 - L\left(K + \frac{1}{3}\right) - K\left(\frac{1}{3} - \cosh^2\tilde{\nabla}\right) - \frac{2}{27} = 0$$

elde edilir ve son olarak

$$L^3 - BL - C = 0 \tag{4.4.2}$$

denklemi bulunur, burada

$$L = \mu + \varepsilon\mu^*; \quad B = b + \varepsilon b^* = K + \frac{1}{3}; \quad C = c + \varepsilon c^* = K\left(\frac{1}{3} - \cosh^2\tilde{\nabla}\right) + \frac{2}{27}$$

$$b = k + \frac{1}{3} \quad , \quad b^* = k^*$$

$$c = \frac{1}{3}k - \cosh^2\alpha k + \frac{2}{27}, \tag{4.4.3}$$

$$c^* = \left(\frac{1}{3} - \cosh^2\alpha\right)k^* - k\alpha^*\sinh 2\alpha$$

dır. (4.4.2) denklemi reel ve dual kısımlarına ayrılırsa, sırasıyla,

$$\mu^3 - b\mu - c = 0$$

$$\mu^* = \frac{b^*\mu + c^*}{3\mu^2 - b} \tag{4.4.4}$$

bulunur. (4.4.4) ile verilen kübik denklemin bütün μ köklerinin reel (aynı zamanda μ^* nün değerlerinin reel) olması için gerek ve yeter şart diskriminant $4b^3+27c^2 \leq 0$ veya (4.4.3) denkleminden

$$k\left(4k^2+7k+\frac{8}{3}-18k\cosh^2\alpha-4\cosh^2\alpha+27k\cosh^4\alpha\right)+\frac{8}{27}\leq 0$$

olmasıdır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.4.1.

$\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında bir parametreli dual Lorentzian hareketinin üç ivme ekseninin reel olması için gerek ve yeter şart $k\left(4k^2+7k+\frac{8}{3}-18k\cosh^2\alpha-4\cosh^2\alpha+27k\cosh^4\alpha\right)+\frac{8}{27}\leq 0$ olmasıdır.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

E^3, 3-boyutlu Öklid uzayında bir parametreli küresel hareketler, bu hareketlerin hızları, ivmeleri ve pol noktaları ile ilgili bağıntılar H.R. Müller tarafından [11] de verilmiştir. Dual sayılar ilk olarak W.K. Clifford tarafından geometrik araştırmalarda bir araç olarak kullanıldı[6]. Dual birim vektörler, dual birim küre ve dual küresel hareketler Veldkamp tarafından vermiştir[17]. Ayrıca $\mathbb{D}^3$, 3-boyutlu dual uzayda, dual küresel hareketlerin hızları, ivmeleri ve ivme polleri ile ilgili bağıntılar H.H. Hacısalihoğlu tarafından verildi[10].

E^3, 3-boyutlu Öklid uzayı yerine $\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayı alarak, E. Study dönüşümü H.H. Uğurlu tarafından tanıtıldı[15].

$\mathbb{L}^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayında bir parametreli Lorentzian küresel hareketler ve bu hareketlerin hızları, ivmeleri, ivme merkezleri ve ivme eksenleri ile ilgili bağıntılar M. Tosun, M.A. Güngör, H.H. Hacısalihoğlu, İ. Okur tarafından çalışıldı[14].

Yine $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında bir parametreli dual Lorentzian küresel hareketler ve bu hareketlerin hızları, ivmeleri, pol noktaları, ivme polleri ile ilgili teoremler M.A. Güngör tarafından verildi[8].

Bu çalışmada $\mathbb{D}_1^3$, 3-boyutlu dual Lorentz uzayında bir parametreli dual Lorentzian küresel hareketlerin ivme, ivme eksenleri ve ivme eksenlerinin gerçelliği ile ilgili teoremlere yer verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] AKUTAGAWA, K., NISHIKAWA, S., The Gauss Map and Spacelike Surface with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-Space, Tohoku Math. J. 42, 68-69, 1990.

[2] BEEM, J. K., EHRLICH, P E., Global Lorentzian Geometry, Marcel Decker Inc. , New York, 1981.

[3] BIRMAN, G. S., NOMIZU, K., Trigonometry in Lorentzian Geometry Am. Math Mont. 91(9), 543-549, 1984-A.

[4] BIRMAN, G. S., NOMIZU, K., The Gauss-Bonnet Theorem for 2-Dimensional Space-Times, Michigan Math. J. 31, 77-81, 1984-B

[5] BOTTEMA, O., ROTH, B., Theoretical Kinematics, North Holland Publ Company New York, 1979.

[6] CLIFFORD, W. K., Preliminary Sketch of Bi-quaternions, Proceedings of London Mathematical Society, 4, nos. 64, 65, 361-395, 1873.

[7] ERGiN, A. A, Lorentz Düzlemde Kinematik Geometri, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 1989.

[8] GÜNGÖR, M. A, Lorentz Uzayında Bir Parametreli Dual Hareketler, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2006.

[9] HACISALİHOĞLU, H. H., İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Ocak, 1998.

[10] HACISALİHOĞLU, H. H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Math. No. 2, 1983.

[11] MÜLLER, H. R., Kinematik Dersleri, (çeviri), Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 27, 1963.

[12] NOMIZU, K., Fundamentals of Linear Algebra, New York McGraw-Hill Book Company, 1979.

[13] O'NEILL, B., Semi Riemannian Geometry, Academic Press, New York, London, 1983.

[14] TOSUN, M., GUNGOR, M. A., HACISALIHOĞLU, H. H., OKUR, I., A Study On The One Parameter Lorentzian Spherical Motions, Acta Math. Univ. Comenianae Vol. LXXV, pp. 85-93, 2006.

[15] UĞURLU, H. H., ÇALIŞKAN, A., The Study Mapping for Directed Spacelike and Timelike Lines in Minkowski 3-Space $\mathbb{R}_1^3$, Mathematical & Computational Applications, Vol.1,No:2 pp. 142-148, 1996.

[16] UĞURLU, H. H., ÇALIŞKAN, A., KILIÇ, O., On The Geometry of Spacelike Congruences, Communication, Faculty of Science, Ankara University, All Series, Vol. 50, 2001.

[17] VELDKAMP, G. R., On The Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous, Spatial Kinematics. Mech. Mach. Theory. Vol. 11, No.2.E, 141-156, 1976.

[18] YAGLOM, I. M., A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis, Springer-Verlag, New York, 1979.

[19] YAYLI, Y., ÇALIŞKAN, A., UĞURLU, H. H., The E. Study Maps of Circles On Dual Hyperbolic and Lorentzian Unit Spheres H_0^2 and S_1^2, Math. Proc. R. Ir. Acad. 102 A, No.1, 37-47, 2000.

[20] TURGUT, A., Üç Boyutlu Lorentz Uzayında Regle Yüzeyler, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 8-9, Doktora Tezi, 1995.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adapazarı'nda tamamladı. 2000 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2004 yılında tamamladı. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Programına başladı. Aralık 2005 de halen görev yapmakta olduğu Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı.