

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MANYETİK DİPOL GEÇİŞLERİNDE TOPLAM KURALI
METODU**

Y.Lisans TEZİ
Zafer KAHRİMAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Tez Danışmanı: Mehmet GÜNER

Haziran 2006

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MANYETİK DİPOL GEÇİŞLERİNDE TOPLAM KURALI
METODU**

Y.Lisans TEZİ
Zafer KAHRİMAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 08 / 06 / 2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyesi
Prof.Dr. Ali Ekber KULIEV

Jüri Üyesi
Yrd.Doç.Dr. Mehmet GÜNER

Jüri Üyesi
Yrd.Doç.Dr. Sevket GÜR

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, her zaman destek ve yardımını gördüğüm Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi saygıdeğer hocam Yrd.Doç. Dr. Mehmet GÜNER'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmam süresince yakın ilgi ve desteklerini her zaman yanımda hissettiğim, maddi ve manevi yardımlarını asla esirgemeyen Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerinden değerli hocam Doç.Dr. Murat TOSUN'a, Arş.Gör. M. Ali GÜNGÖR'e ve Arş.Gör. Murat SARDUVAN'a göstermiş oldukları anlayış ve nezaketten dolayı teşekkür borçlu olduğumu belirtmek isterim.

Zafer KAHRİMAN

Mayıs 2006

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	v
ÖZET.....	vii
SUMMARY	viii

BÖLÜM 1.

GİRİŞ.....	1
1.1. Kompleks Fonksiyonlar	1
1.2. Singüler (Ayrık) Noktalar ve Rezidü (Kalıntı) Teoremi	9
1.3. Sonsuzlukta Rezidü	19

BÖLÜM 2.

TOPLAM KURALLARI	28
2.1 Toplam Kuralları.....	28
2.2. Toplam Kuralları İçin Temel Bağlıntılar.....	31
2.3. Mikroskopik Çekirdek Modeli (RPA Yöntemi)	34
2.4. Elektrik Multipol Geçişleri	38
2.5. Manyetik Dipol Geçişleri	43
2.6. Deforme Çekirdeklerde Spin-Titreşim Karakterli 1^+ Seviyeleri	45

BÖLÜM 3.

ENERJİ AĞIRLIKLIL TOPLAM KURALININ DEFORMASYON

BAĞIMLILIĞI.....	49
3.1. Sayısal Sonuçlar	53

EKLER.....	56
KAYNAKLAR.....	75
ÖZGEÇMİŞ.....	77

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

M1	: Manyetik Dipol Geçişleri
EWSR	: Enerji Ağırlıklı Toplam Kuralı
GSC	: Taban Hal Korelasyonları
NEWSR	: Enerji Ağırlıksız Toplam Kuralı
RPA	: Rasgele Faz Yaklaşımı
TDA	: Tamm Dankof Yaklaşımı
QBA	: Kuazibozon Yaklaşımı
QRPA	: Kuaziparçacık Rasgele Faz Yaklaşımı
B(M1)	: İndirgenmiş manyetik dipol uyarılma ihtimali
β	: Kuadropol deformasyon parametresi
Ce	: Seryum
δ	: Nilsson deformasyon parametresi
(e, e')	: Elektron-elektron saçılma reaksiyonları
M	: Manyetik dipol operatörü
N	: Nötron sayısı
(p, p')	: Proton-proton saçılma reaksiyonları
Q_i^+, Q_i	: Fonon doğurma, yoketme operatörü
sp	: Tek parçacık
sqp	: Tek-kuaziparçacık
X, Y	: RPA genlikleri
ω	: 1^+ hallerinin enerjileri
Z	: Atom Numarası
α^+, α	: Kuaziparçacık doğurma, yoketme operatörü

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Cauhy ve rezidü teoremi, kontur integraller, Rasgele Faz Yaklaşımı(RPA), toplam kuralları, enerji ağırlıklı toplam kuralı(EWSR), M1 geçişleri.

Manyetik dipol geçişlerinin bilinen enerji ağırlıklı toplam kuralı (EWSR), taban halin biçiminden farklı biçime sahip seviyelere geçişler için genelleştirildi ve daha sonra kontur integraller ve rezidü teorisi yardımıyla, bu toplam kuralları için analitik ifadeler elde edildi. Elde edilen analitik ifadeler için fortran dilinde program yazılarak nümerik hesaplamalar yapıldı. Sayısal hesaplamalar, manyetik dipol geçiş operatörü örneğinde, enerji ağırlıklı toplam kuralının sayısal değerinin çekirdek biçiminin değişmesiyle keskin olarak azaldığını gösterdi. Bu çekirdeklerde M1 geçişlerinin neden zayıf olduğunu elde ettiğimiz sonuçlar açıklığa kavuşturmuştur.

SUM RULES METHOD IN MAGNETIC DIPOLE TRANSITIONS

SUMMARY

Keywords: Cauchy and residue's theorem, Contour Integrals, Random Phase Approximation (RPA), sum rules, Energy Weighted Sum rules (EWSR), Transitions M1.

The Energy Weighted Sum Rule (EWSR) of M1 transitions has been generalized for magnetic dipole transitions between states with different shapes. and by means of contour integrals and residue theorem, we obtain an analytic formula containing the dependence of deformation of the energy-weighted sum rule (EWSR) for the magnetic dipole transformations. For the obtained analytic formula has been made numerical calculations in fortran program. Numeric calculations show that the transition probability between levels, which have different forms decreases sharply compatible with experimental data. The results of numeric calculations explain the quenching effects of M1 transitions.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Kompleks fonksiyonlar

Kompleks fonksiyonlar teorisi, 19. asırda özellikle A. Cauchy (1789 – 1857) tarafından geliştirildi. Daha sonra onun teorisi daha canlı bir şekilde Peter Dirichlet (1805 – 1859), Karl Wierstrass (1815 – 1897) ve G.F.B. Riemann (1826 – 1866) gibi matematikçiler tarafından çalışıldı. Başlangıçta kompleks analizi ilgilendirmiyor gibi görünen birçok problemler, kompleks sayılar yardımıyla çözümler hale geldi. Mesela alışılmış analiz tekniklerini kullanarak çözümler zor, hatta imkansız olabilen

$$\int_0^{\infty} (\sin^2 x)/(x^2) dx = \pi/2 ; \int_0^{\infty} (x^{\alpha-1})/(1+x) dx = \pi/\sin(\pi\alpha), 0 < \alpha < 1;$$

$$\int_0^{\infty} d\theta / (a + \sin \theta) = 2\pi / (\sqrt{a^2 - 1})$$

gibi bazı problemler kompleks analiz teknikleri ile kolay bir şekilde çözülebildi. Böylece kompleks analiz; matematikçiler, hatta fizikçiler ve mühendisler için vazgeçilmez bir araç haline geldi.

Bu teori matematiğin dışında da kullanılır. Isı iletiminde elektrik ve akışkanlar dinamiğinde fizikçi ve mühendisler oldukça kullanırlar. Ayrıca, matematik problemlerini de çözer. Örneğin,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx \quad (0 < a < 1) \quad \text{ve} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{a + \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

integralleri bulmamıza yarar. Aksi halde bu integralleri ilkel hesaplarla bulmak oldukça güç ve bazen de mümkün değildir.

16. yüzyılın başlarında Cardano , $ax^2 + bx + c = 0$ ve $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ denklemlerini çözmüş ve bu denklemleri gerçekleyen fakat gerçel olmayan sayılar saptamıştır. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözümünün $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ olduğunu yine eski bilgilerimizden biliyoruz.

Bu formülde, köklü ifade negatif olunca, yani $b^2 - 4ac < 0$ ise, çözümde bulunan $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ sayıları gerçel değildir. Örneğin $x^2 + 2x + 2 = 0$ denklemini çözersek $-1 \pm \sqrt{-1}$ sayısını buluruz. Dikkat edilirse, bu sayılar $x^2 + 2x + 2 = 0$ denklemini kökleri olduğu halde, gerçel sayı değildirler. Böylece, $x^2 + 2x + 2 = 0$ denkleminin gerçel sayılar kümesinde çözümü yoktur. Cardano, bu problemi çözmek için şöyle bir düşünüş getirmiştir. Gerçel sayılar kümesine $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ kuralını da ekliyor ve bu şekilde elde edilen sayılara karmaşık sayı diyor. Böylece karşımıza $\sqrt{-1}$ ifadesi çıkıyor. Bunuda $\sqrt{-1} = i$ işareti ile gösterelim ve bu kümeye \mathbb{h} diyelim.

Elektrik problemlerinde i elektrik akımını gösterdiğinden, mühendislikte $\sqrt{-1} = j$ harfi ile gösterilir ve bu şekilde bir karışıklık önlenmiş olur. Buraya kadar yapılanlarla

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{h}$$

kapsamalarını yazabiliriz.

Burada daha çok analitik fonksiyonlar ailesi ile ilgileneceğiz. Kısaca, analitik fonksiyon deyince, bir kümede türetilen (türevi olan) fonksiyonları anlayacağız.

Kompleks sayıların temel tanımını, kompleks sayıları temsil etmek için düzlemin noktalarının kullanılmasını tavsiye eden Robert Argand verdi. Düzlemin noktalarının, reel sayıların sıralı (x,y) çiftlerinden oluştuğunu ve \mathbb{R}^2 ile gösterildiğini biliyoruz.

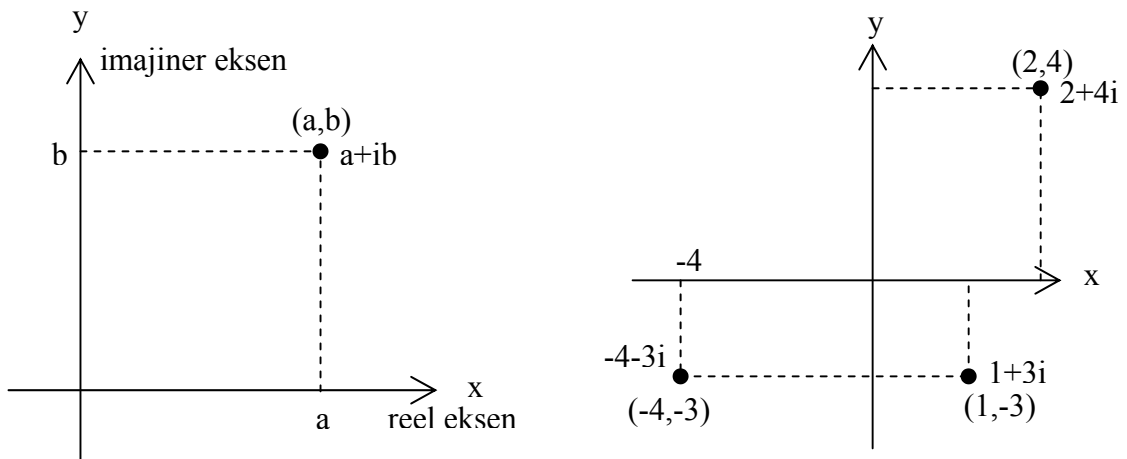
Tanım: \mathbb{h} ile gösterilen karmaşık sayılar sistemi \mathbb{R}^2 düzleminde aşağıdaki koşulları gerçekleyen kümedir.

- a. Vektörel toplama $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
- b. Gerçek bir a sayısı ile skalar çarpımı $a(x, y) = (ax, ay)$ ve
- c. Karmaşık çarpma işlemi de $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ ile tanımlıdır.

Böylece bir $z \in C$ kompleks sayısını $z = a + ib (a, b \in IR)$ şeklinde ifade etmiş oluruz. Yani

$$C = \{a + ib : a, b \in IR\}$$

dir. $a + ib$ sayısındaki a ya kompleks sayının reel kısmı, b ye ise kompleks yada imajiner (sanal) kısmı denir. $Re(a + ib) = a$ ve $Im(a + ib) = b$ şeklinde ya da $z = a + ib$ için $Rez = a$, $Imz = b$ şeklinde yazılır.



Kompleks Sayı Serileri :

$\{z_n\}$ bir kompleks dizi olsun. Dizinin terimlerinin toplamından oluşan $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ sembolünü anlamlandırmak istiyoruz. Kompleks sayılar kümesinin bir lineer uzay (vektör uzayı) olduğunu hatırlayalım. Sonlu tane kompleks sayının toplamı yine bir kompleks sayıdır. Reel terimli serilerde olduğu gibi $\{z_n\}$ dizisinin ilk n tane teriminin toplamından meydana gelen $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ toplamını alalım.

$\{S_n\}$ bir kompleks dizidir ve *kısmi toplamlar dizisi* denir. Eğer kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ sonsuz serisine *yakınsaktır* denir ve toplamı $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ dir.

$\{S_n\}$ ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ sonsuz serisi *ıraksaktır*.

Dizilerde olduğu gibi, kompleks serilerin yakınsaklığı problemi, reel serilerin yakınsaklığı problemine indirgenebilir.

Teorem: $z_n = x_n + iy_n$ olsun. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ yakınsaktır. $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ serilerinin her ikisi de yakınsaktır. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = b$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + ib$ dir.

Reel terimli olan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ serilerinin her ikisine de yakınsaklık testleri uygulanarak teorem ispatlanabilir ve $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisinin yakınsaklığını kontrol edebiliriz.

Teorem: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ yakınsak ise $z_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ dır.

Bu teorem daha çok verilen serinin ıraksaklığını görmekte kullanılır. Eğer $\{z_n\}$ dizisinin limiti yok veya sıfırdan farklı ise $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ıraksaktır. Fakat $z_n \rightarrow 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ yakınsak veya ıraksak olabilir.

Süreklilik: Şimdi de iki reel değişkenli ve reel değerli $u=u(x,y)$ fonksiyonunun bir (x_0, y_0) noktasında sürekli olması tanımını hatırlayalım. $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $u=u(x,y)$ fonksiyonu, (x_0, y_0) noktasında aşağıdaki üç şartı sağlarsa (x_0, y_0) noktasında sürekli dir denir;

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y)$ mevcuttur.

(b) $u(x_0,y_0)$ vardır.

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)$

(c) şartı, (a) ve (b) şartlarını da içinde bulundurur.

Diferansiyellenebilme: Bir kompleks f fonksiyonu bir açık D kümesi üzerinde tanımlı ve $z_0 \in D$ bir iç nokta olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = L$$

var ve L sonlu ise f ye z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir.

Denk bir ifadeyle $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z_0)}{h}$ mevcut ve sonlu ise f ye z_0 da diferansiyellenebilirdir (dif.bilirdir) denir. Bu limit değerine z_0 noktasında f nin türevi adı verilir ve $f'(z_0)$ veya $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$ olarak gösterilir. Bu limitte, h değeri kompleks sıfır sayısına, kompleks değerlerle yaklaşmaktadır. Yani, orijin merkezli bir yuvarda h orijine herhangi bir yol boyunca yaklaşacaktır. Bazen Δ gösterimi kullanılarak h yerine Δz alınarak

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

yazılır. Kompleks fonksiyonların diferansiyellenebilme kuralları, reel fonksiyonlarınkı ile benzerdir.

Teorem : Eğer f ve g fonksiyonları, z_0 noktasında diferansiyellenebilirse $(f+g)$, (αf) , $(f \cdot g)$ ve (f/g) fonksiyonları da z_0 noktasında diferansiyellenebilir.

Analitiklik ve Analitik Fonksiyonların Kuvvet Serileri :

Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasının herhangi bir komşuluğundaki her z noktasında diferansiyellenebilirse f' ye z_0 da *analitiktir* denir. Yani $|z - z_0| < r$ yuvarı içindeki her z noktasında $f'(z)$ mevcut olacak şekilde bir r sayısı mevcut ise f , z_0 da analitiktir demektir. Bir f fonksiyonu bir A kümesinin bütün noktalarında analitik ise f ye A da *analitiktir* denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyona *tam (entire) fonksiyon* denir.

Analitik bir fonksiyonu tanımlamak için önemli bir yol daha vardır. O da f fonksiyonun analitik olması için gerekli ve yeterli koşulun yerel olarak bir noktanın komşuluğunda yakınsak bir kuvvet serisine açılabilmesidir. Bu seriye, f fonksiyonun Taylor serisi veya Taylor açılımı adı verilir. Aynı zamanda, delinmiş bir komşulukta analitik olan bir fonksiyonun serilerle gösterimlerini de bulmak isteyeceğiz. Yani, f fonksiyonu ayrık tekil noktası olacaktır. Bu haldeki seriye de Laurent serisi veya açılımı adı verilecektir. Bu seri fonksiyonun ayrık tekil noktası yöresinde önemli bilgiler verir. Ayrıca göreceğimiz rezidüleri ve uygulamalarına da bir başlangıç olacaktır.

Şimdi Taylor ve Laurent teoremlerini ispatlarına girmeden tanımlayalım.

Teorem (Taylor Teoremi) :

f , A bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun $z_0 \in A$ alalım. $A_r = \{z : |z - z_0| < r\}$ kümesi A bölgesinde kapsanan bir bölge olsun. (burada, mümkün olan en büyük daire alınır. Eğer $r = \infty$ ise , $A_r = A = C$ olacaktır.

Bu halde , her $z \in A_r$ noktası için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

serisi , A_r kümesinde yakınsar. Yani, bu serinin yakınsaklık yarıçapı $\geq r$ olur. Buna göre,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

yazılır . $0! = 1$, tanım olarak alınacaktır. $f(z)$ serisine tanım olarak f fonksiyonun z_0 noktası etrafındaki Taylor açılımı veya serisi adını vereceğiz.

Özel olarak $z_0 = 0$ için bu Taylor açılımına f fonksiyonun $z_0 = 0$ noktası yöresindeki Maclaurin serisi veya açılımı denir.

Laurent açılımı, reel fonksiyonların analizindeki herhangi bir seriden farklıdır ve serilerin toplamının bulunmasında, reel ve kompleks integrallerin hesaplanmasında önemli uygulamaları vardır.

Laurent Serileri ve Tekil Noktaların Sınıflandırılması :

z_0 noktası yöresindeki bir dairenin tümünde analitik olan f fonksiyonunun z_0 yöresinde $f(z)$ fonksiyonuna yakınsak olan bir kuvvet serisine açılımını bulmak için, Taylor teoremini kullandık. Fakat

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad \text{veya} \quad f(z) = \frac{e^z}{z^2}$$

gibi fonksiyonlar $z_0 = 0$ noktasında analitik olmadıklarından , bu fonksiyonlara $z_0 = 0$ noktası yöresinde Taylor açılımı uygulanamaz. Bu tür fonksiyonların başka bir açılım şekli daha vardır. Yaklaşık olarak 1840 yılları civarında Laurent tarafından formülleştirilmiştir. Bu tür açılımlara da , Laurent açılımı veya serisi adı verilir. Bu Laurent açılımı, daha çok tekil noktaları olan fonksiyonlarla çalışılmak istenildiğinde önemlidir. Bu da bizi karmaşık analizin diğer temel sonuçlarından biri olan ve daha sonra göreceğimiz Cauchy ve Rezidü Teoremine götürür.

Şimdi , Laurent teoremini ifade edelim.

Teorem (Laurent Teoremi) :

$0 \leq r_1 < r_2$ ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. $A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ bölgesini gözönüne alalım $r_1 = 0$ veya $r_2 = \infty$ alabildiğimiz gibi her ikisi birlikte olabilir. f fonksiyonu A bölgesinde analitik olsun. Bu halde , Laurent açılımını,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (1.1.1)$$

olarak yazabiliriz. Bu eşitliğin sağ tarafındaki serilerin her ikisinde , $r_1 < p_1 < p_2 < r_2$ olduğunda ,

$$B_{p_1 p_2} = \{z : p_1 \leq |z - z_0| \leq p_2\}$$

biçimindeki herhangi bir kümede , mutlak değerce ve düzgün olarak yakınsar. Eğer C eğrisi , r , $r_1 < r < r_2$ olmak üzere z_0 merkezli ve r yarıçaplı çember ise , $f(z)$ fonksiyonunun bu halka bölgesindeki Laurent açılımının katsayıları , $n = 0,1,2,3,\dots$ sayıları için ,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad (1.1.2)$$

ve $n = 1,2,3,\dots$ sayıları için,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(w)(w - z_0)^{n-1} dw \quad (1.1.3)$$

biçiminde olacaktır. Eğer $b_n = a_{-n}$ denirse (1.1.1) formülü tek bir gösterim olarak,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

şeklinde yazılır. Bu seriye A halka bölgesinde f fonksiyonunun z_0 noktası yöresindeki Laurent açılımı denir.

1.2. Singüler (ayrık) noktalar ve rezidü (kalıntı) teoremi

Eğer f fonksiyonun z_0 noktasında ayrık bir tekil noktası varsa, bu fonksiyonun z_0 noktasının delik komşulugunun bir tek Laurent açılımı vardır. Bu da,

$$f(z) = \dots + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

biçimindedir. Burada, b_1 sayısına f fonksiyonunun z_0 noktasındaki rezidüsü adı verilir. Bu söylediğimizi bundan böyle,

$$b_1 = \text{Re } z(f, z_0)$$

işaretiyle yazıp göstereceğiz.

Laurent açılımını yaparken, bu b_1 rezidüsünü bulmak pratik uygulamalarda pek kolay değildir. Böylece Laurent açılımını bulmadan rezidüyü hesaplamak için bazı teknik yolları teoremler şeklinde verelim.

Teorem: f fonksiyonunun z_0 noktasında m. mertebeden bir kutbu varolsun. Bu taktirde

$$\text{Re }_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \quad (1.2.1)$$

dır. $m = 1$ durumunda $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}$ sıfıncı mertebeden türevidir ki bu 1 olarak gösterilir.

$0! = 1$ dir. Yani eğer f nin z_0 da basit kutbu varsa, bu formülden

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)]$$

bulunur.

Rezidüyü bulmak için , en kolay ve kısa bir işlemle sonuca gidecek bir formülümüz yoktur. Kutup noktasının durumuna göre, en kolay formülün seçilmesi yine bizim sezgi ve becerimize kalıyor. Bu yöntemlerin bazıları Tablo. 1' de özetlenmiştir.

1.2.1. Kaldırılabilir tekil nokta

f fonksiyonunun z_0 noktasında kaldırılabilir bir tekil noktası olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

olmasıdır.

Teorem : $g(z)$ ve $h(z)$, analitik iki fonksiyon olsun. bu iki fonksiyonun z_0 noktasında aynı dereceden bir sıfır yeri varsa,

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

fonksiyonunun z_0 noktasında kaldırılabilir bir tekil noktası vardır.

1.2.2. Basit kutuplar

Eğer, $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)]$ limiti mevcut ve sıfırdan farklı ise f fonksiyonu z_0 da bir kutba sahiptir ve bu limit değeri fonksiyonun rezidüsüdür. Yani ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)] = b_1$$

dir. Şimdi bununla ilgili daha genel bir teorem verelim. Bu teorem tüm rezidü hesapları için çok kullanışlıdır.

Teorem : $g(z)$ fonksiyonu z_0 da k . yıncı mertebeden, $h(z)$ fonksiyonu z_0 da $(k+1)$. mertebeden bir sifira sahip ise bu takdirde $\frac{g(z)}{h(z)}$ fonksiyonu z_0 da bir basit kutba sahiptir ve

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{g}{h} = (k+1) \frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)} \quad (1.2.2)$$

dır.

Aşağıdaki sonuç bu teoremin bir özel durumudur.

Sonuç : $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, g ve h , z_0 da analitik, $g(z_0) \neq 0$ ve h nin z_0 da bir basit sifırı olsun. bu durumda z_0 da bir basit kutbu vardır ve

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

dır.

1.2.3. İki katlı kutuplar

Kutupların dereceleri arttıkça, bu noktadaki rezidülerin bulunması problemi gittikçe zorlaşır. Eğer bir kutbun derecesi iki ise, bağıl olarak, diğer yöntemlerden daha kolay ve kullanışlı rezidü formülü bulunabilir.

Kutup iki katlı olunca, ilk rezidü formülümüz önceden verdiğimiz

$$b_1 = \operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)]$$

olacaktır. Problemlerin birçoğunda, rezidüyü bulmak için bu formülü kullanabiliriz.

İki katlı kutuplar için rezidüyü bulmada kolaylık sağlayan kullanışlı formüllerden biri de aşağıdaki teoremde verilir.

Teorem : g ve h fonksiyonları bir z_0 noktasında analitik olsun. $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 0$ ve $h''(z_0) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu halde $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ fonksiyonunun bu z_0 noktasında ikinci dereceden bir kutbu vardır ve bu noktadaki rezidü,

$$\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = 2 \frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3[h''(z_0)]^2} \quad (1.2.3.)$$

şeklindeki formülle bulunabilir.

Teorem : g ve h fonksiyonları, z_0 noktasında analitik olsun. $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 0$, $h''(z_0) = 0$ ve $h'''(z_0) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu halde g/h fonksiyonunun z_0 noktasında ikinci dereceden bir kutbu vardır ve bu noktadaki rezidüsü ,

$$\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = 3 \frac{g''(z_0)}{h'''(z_0)} - \frac{3}{2} \cdot \frac{g'(z_0)h^{(iv)}(z_0)}{[h'''(z_0)]^2} \quad (1.2.4.)$$

formülü ile bulunur. Yine daha önce yazdığımız ,

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] = b_1$$

ifadesi, yine aynı noktadaki aynı rezidüyü verir.

1.Sonuç : Eğer $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2}$ biçiminde ve $g(z_0) \neq 0$ ise $\text{Res}(f, z_0) = g'(z_0)$

olur.

2.Sonuç : Eğer , $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^3}$ şeklinde, $g(z_0) = 0$ ve $g'(z_0) \neq 0$ ise,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g''(z_0)}{2} \text{ olur.}$$

1.2.4. Yüksek dereceli kutuplar

Teorem : f fonksiyonunun z_0 noktasında ayrık bir tekil noktası olsun. $k \geq 0$ olan en küçük tamsayısını ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$$

limiti varolacak biçimde seçelim. Bu halde, f fonksiyonunun z_0 noktasında k yıncı dereceden bir kutbu vardır. Eğer,

$$G(z) = (z - z_0)^k f(z)$$

denirse, buna göre, $G(z)$ fonksiyonu bu z_0 noktasında analitik olacak biçimde tek olarak belirlenebilir. Ayrıca, f fonksiyonunun bu noktadaki rezidüsü de,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{G^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

formülü ile bulunur.

Böylece,

$$f(z) = \frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

yazılır. Eğer $b_k = 0$ ise,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k-1} f(z)$$

limiti vardır. bu da, hipotezdeki verilen k sayısının tanımıyla bir çelişkidir. Buradan, z_0 noktası, f fonksiyonunun k yıncı dereceden bir kutbu olmalıdır.

Eğer $G(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında $k-1$ kere türevi alınırsa,

$$G^{(k-1)}(z) = (k-1)!b_1$$

elde edilir. Böylece,

$$b_1 = \frac{G^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

olur. Buradan ,

$$b_1 = \text{Res}(f, z_0) = \frac{G^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \quad (1.2.5)$$

elde edilir.

1.2.5. Esas tekil noktalar

Şimdi, buraya kadar yapılan rezidü formüllerini bir tablo şeklinde düzenleyelim. Gerektiğinde, hemen bu tabloya bakarak verilen problemin hangi formülle çözülebileceğine karar verebiliriz. Verilen bir problemde aslında şu noktadaki rezidüyü bulunuz diye bir soru sorulmaz. Genellikle bize, bir integral verilir. Bu integrali hesaplamak için Cauchy Rezidü Teoremini kullanırken bu rezidülere gereksinme duyarız. Daha ileri, integral alınacak fonksiyonun hangi tekil noktasındaki rezidüsü bulunacağına bile burada karar vermek zorundayız. Özellikle, integrali aldığımız çevre içindeki tekil noktalardan rezidülerin bulunması çok sık kullanılır. Bazı problemlerde de, üzerinde integral aldığımız çevrenin dışındaki noktalarda rezidüler bulunur. Bu nedenle, bir integralde anafikir integralin hesabıdır. Rezidülerin bulunması yan bir problemdir.

Tablo. 1' de, birinci düşey sütunda fonksiyon türü yazılmıştır. İkinci sütunda, bu fonksiyonun tekil noktasının türünü veren ölçü getirilmiş. Bu ikinci sütunun sonucu olarak, tekil noktanın türü bulunarak üçüncü sütuna konulmuştur. Bundan sonra işlemler kolaylaşır. Bu üç sütun bize, rezidü fomülünün hangisini kullanacağımızı verir. Bu son işlemi verecek rezidü formülü de dördüncü sütuna yazılmıştır.

Tablo. 1 Ayrık tekil noktalar ve rezidülerin hesabı

Fonksiyon	Ölçü	Tekil Nokta Türü	Rezidü formülleri
$f(z)$	$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$	kaldırılabilir	rezidü = 0
$\frac{g(z)}{h(z)}$	g ve h fonksiyonlarının sıfırlarının dereceleri aynı	kaldırılabilir	rezidü = 0
$f(z)$	$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$ var ve $\neq 0$	basit kutup	rezidü = $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$
$\frac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ $h'(z_0) \neq 0$	basit kutup	rezidü = $\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$
$\frac{g(z)}{h(z)}$	g(z) ve h(z) fonksiyonlarının sıfırlarının dereceleri sırası ile k ve k + 1 ise	basit kutup	rezidü = $(k + 1) \frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$
$\frac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 0$ ve $h''(z_0) \neq 0$	iki katlı kutup	rezidü $= 2 \frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3[h''(z_0)]^2}$
$\frac{g(z)}{(z - z_0)^2}$	$g(z_0) \neq 0$	iki katlı kutup	rezidü = $g'(z_0)$
$\frac{g(z)}{(z - z_0)^2}$	$g(z_0) = 0$ ve $g'(z_0) \neq 0$	iki katlı kutup	rezidü = $\frac{g''(z_0)}{2}$

Tablo 1. in devamı

$\frac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0 = h'(z_0) = h''(z_0)$, $h'''(z_0) \neq 0$	İki katlı kutup	rezidü = $3 \frac{g''(z_0)}{h'''(z_0)} - \frac{3g'(z_0)h^{(iv)}(z_0)}{2[h'''(z_0)]^2}$
$f(z)$	k , en küçük bir tamsayı olmak üzere, $\lim_{z \rightarrow z_0} G(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z)$ var	k katlı kutup	rezidü = $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{G^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$ veya $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]$
Fonksiyon	Ölçü	Tekil Nokta Türü	Rezidü formülleri
$f(z)$	$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z)$ ifadesinin $z \rightarrow z_0$ için limiti vardır	k katlı kutup	rezidü = $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]$
$\frac{g(z)}{h(z)}$	G ve h fonksiyonlarının sıfırlarının dereceleri , sırasıyla, m ve $k + m$ şeklindedir.	k katlı kutup	$G(z) = (z - z_0)^k \cdot \frac{g}{h}$ olmak üzere rezidü = $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{G^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$ biçimindedir.
$\frac{g(z)}{h(z)}$	$g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0 = \dots = h^{(k-1)}(z_0)$, $h^{(k)}(z_0) \neq 0$	k katlı kutup	Rezidü = Teorem 12 deki (1.12) formülüdür.

Bu tablo, rezidüyü bulma teknikleri formüllerini içermektedir. g ve h fonksiyonları, z_0 noktasında analitiktir. Yine, z_0 noktası $f = g/h$ fonksiyonunun ayırık bir tekil noktası olarak alınmıştır. Bu ayırık ve tekil nokta, esas tekil nokta da değildir.

1.2.6. Cauchy teoremi ve rezidü kavramı

Bir C eğrisinin içi ve dışı Jordan Eğrisi Teoremi ile verilir: Herhangi basit kapalı bir C eğrisinin içi ve dışı vardır ve bu C eğrisi, bu iç ve dış bölgelerin sınırınıdır. Cauchy Teoreminin en basit bir biçimdeki ifadesi şudur:

Cauchy Teoremi, tarihi gelişim içinde matematikçileri bir hayli uğraştırmıştır. Bu nedenle, bu teoremin ispatı için çok değişik fakat temelde aynı olan yöntemler geliştirilmiştir, örneğin, üçgensel çevreler, dikdörtgensel çevreler, dairesel çevreler, basit bağlantılı ve çok bağlantılı bölgelerde çalışmalar yapılmıştır. Daha ileri, n değişkenli karmaşık fonksiyonlar için Cauchy Teoremini ispatlamışlardır.

Cauchy Teoremi: f fonksiyonu basit kapalı bir C eğrisi içinde ve üzerinde analitik ise

$$\oint_C f = 0$$

olur.

Bu teoreme göre, f fonksiyonu C eğrisinin içindeki bölgenin tümünde analitik olmalıdır. Ancak bu teoremin tersinin doğru olması gerekmez. Yani integral sıfır olmasına karşın, fonksiyonun bu bölgede analitik olması gerekmez.

Rezidü Teoremi:

Şimdi basit bağımlı bir B bölgesinin içinde a_1, a_2, \dots, a_p kutuplarına sahip bulunan, bunların ötesinde her yerde regüler olan bir $f(z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım ve bu kutupları çok küçük C_1, C_2, \dots, C_p daireleri ile çevirerek B 'yi çok bağımlı bir bölge haline getirelim. B 'nin çevresi C olsun. C ile C_1, C_2, \dots, C_p arasında kalan bölgede $f(z)$ regüler olduğundan, Cauchy teoremi uyarınca,

$$\int_{C^+} f(z)dz = \sum_{i=1}^p \int_{C_i^+} f(z)dz$$

dir. C_i dairesinin içindeki bölge B_i ile gösterilsin. Eğer $z = a_i$ noktası n_i yinci mertebeden bir kutup ise

$(z - a_i)^{n_i} f(z)$ fonksiyonu B_i 'de regülerdir ve

$$\int_{C_i^+} f(z)dz = \int_{C_i^+} \frac{(z - a_i) f(z)}{(z - a_i)^{n_i}} dz$$

İntegrali $(z - a_i)^{n_i} f(z)$ fonksiyonunun $z = a_i$ noktasındaki $(n_i - 1)$ inci mertebeden türevinin $\frac{2\pi i}{(n_i - 1)!}$ ile çarpımına eşittir. Bu gözönünde bulundurarak

$$\int_{C_i^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^p R_i$$

şeklinde yazarız. Buradaki R_i

$$R_i = \frac{1}{(n_i - 1)!} \left[\frac{d^{n_i-1}}{dz^{n_i-1}} (z - a_i)^{n_i} f(z) \right]_{z=a_i}$$

ile bellidir ve $z = a_i$ kutbundaki rezidü adımı alır.

Kolayca gerçeklemek mümkündür ki; $z = a$ 'nın bir civarında

$$f(z) = \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{A_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{-1}}{(z-a)} + A_0 + A_1(z-z_0) + \dots$$

yazılabiliyorsa, $z = a$ noktası $f(z)$ nin n inci mertebeden bir kutbudur ve bu kutuptaki rezidüsü A_{-1} e eşittir.

Bilindiği gibi Rezidü Teoremi, kapalı bir çevre üzerinde analitik olan bir fonksiyonun bu çevre üzerindeki integrallinin, bu çevre içinde f fonksiyonunun rezidüleri toplamının $2\pi i$ ile çarpımına eşit olduğunu ifade eder. Bu teorem kompleks analizin en temel sonuçlarından birisidir ve belirli integralleri hesaplamada bir ilke olarak kullanılır. C , z_0 noktası etrafında bir çemberse, bu noktadaki rezidü,

$$b_1 = \text{Re } z(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

biçimindedir.

Rezidü Teoremi ve bu teoremin uygulamaları bir hayli fazladır. Bu uygulamaları çok değişik biçimlerde göreceğiz. Ayrıca, analizde bilinen çok zor integralleri yine bu Rezidü Teoremi yardımı ile hesaplayabileceğiz.

Jordan Eğrisi Teoremini kabul edersek, basit kapalı eğriler için Rezidü Teoremi şu biçimde ifade edilebilir: Eğer basit kapalı bir C eğrisi bir A bölgesinde kalıyor ve f fonksiyonu $A \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ bölgesinde analitikse, pozitif yönlü C eğrisi için,

$$\int_C f = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Re } z(f, z_i)$$

olur. Bu, Rezidü Teoreminin klasik olarak ifade edilmiş şeklidir.

1.3. Sonsuzlukta rezidü

Sonsuzluk Tek Nokta Değildir: Bir fonksiyonun dönüşüm özellikleri düşünüldüğünde, bunu bazen “sonsuzlukta tek nokta” olarak kullanmak uygun olur, sonsuzluk bir geometrik noktaymış gibi. O zaman $\omega = \frac{1}{s}$ fonksiyonunun $s = 0$ noktasının ω -düzleminde sonsuzlukta bir noktaya dönüşeceğini söylemek mümkün olur. Buradaki kullanım yani “sonsuzlukta nokta” ifadesi soyut bir

kavramdır. O zaman bu noktaya geometrik bir nokta olarak bakamayız. Çünkü geometrik olarak düşünersek; bir (genişleyen) dairenin üzerindeki bütün noktalar, sonsuzluktaki noktaya yanaşacaklardır. Bu ise geometrik nokta tanımına göre saçmadır. “Sonsuzluktaki nokta” artık geometrik bir nokta değildir. Buna rağmen “sonsuz noktası” veya “sonsuzluktaki nokta” kavramlarının her ikisi de matematikte kullanılır ve aslında her ikisi de tam olarak tanımlanmamış belirsiz kavramlardır.

Sonsuzluğun geometrik olarak tanımının yetersizliği $\frac{\infty}{\infty}$ ve $\infty - \infty$ gibi anlamı olmayan işlemlere yol açar.

Sonsuzluktaki noktanın bir sonlu nokta olarak tanımlanabilmesi akıllıca bir şeydir. Bunu ise; sonsuz düzlemini bir kürenin sonlu alanına dönüştürerek başarabiliriz. Böyle küreye Riemann küresi denir. Bu küre; düzlem ve küre üzerindeki noktalar arasında birebir eşleme yapılarak kurulur. Küre kompleks düzlem üzerine orijinde oturtulur ve bir ışın N noktasından düzlemdeki S noktasına çekilir. Bu ışın küreyi deler, küreden geçer. q noktası S noktasına tekabül eder. S noktası herhangi bir yönde sonsuzluğa gittiği için, q noktası küre üzerinde tek olan N noktasına gider. Bu yüzden N noktası sonsuzluktaki noktanın küre üzerindeki yansımasıdır. Ayrıca reel ve Im eksenler küre üzerindeki büyük dairelere giderler.

O halde, bütün dönüşümler bir küre yüzeyi üzerinde yerleştirilebildiğinden sonsuzluktaki nokta tektir denir. Elbette eğri ailelerinin biçimleri bozulacak ve mevkisi değişecektir.

Bu yüzden Riemann küresi nicel olarak fazla faydalı değildir. Ama kavramsal ve resimli bir değerdir.

Lineer sistemlerin analizindeki temel problem, kapalı yoldaki kontur integrali hesaplamayı içerir. $f(s)$ ayırık singüler noktalara sahip analitik bir fonksiyon olsun. Ayrıca C , n singüler noktası basit kapalı bir eğri olsun. Biz zaten özel durumlar için bunu yapmanın yolunu biliyoruz.

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(s) ds \quad (1.3.1)$$

denklemini genel prosedürdür.

$f(s)$ ayrık singüler noktalara sahip analitik bir fonksiyon olsun. Ayrıca C , eğri içinde n singüler noktaya sahip, basit kapalı bir eğri olsun. C de $f(s)$ nin integrali, n integralin toplamı şeklinde yazılabilir:

$$\int_C f(s) ds = \int_{C_1} f(s) ds + \int_{C_2} f(s) ds + \dots + \int_{C_n} f(s) ds \quad (1.3.2)$$

(1.3.1) denklemini her bir singülerliğe uygulanır. Notasyonu basitleştirmek için k -yüncü singülerlikteki rezidüyü d_k ile gösterelim. O halde (1.3.1) denkleminde

$$\int_{C_k} f(s) ds = 2\pi i d_k$$

ve (1.3.2) denkleminde

$$\int_C f(s) ds = 2\pi i \sum_{k=1}^n d_k \quad (1.3.3)$$

olur.

Basit kutup durumunda, eğer, $f(s)$, $\frac{p(s)}{q(s)}$ şeklinde yazılabilirse, bu denkleminde $q(s)$,

$$q(s) = (s - s_0) \left[q'(s_0) + \frac{q''(s_0)}{2}(s - s_0) + \dots \right] \quad (1.3.4)$$

şeklinde seri olarak yazılabilir.

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[(s-s_0)^n f(s) \right]_{s=s_0}$$

formülünde (1.3.4) yerine yazılırsa

$$a_{-1} = \frac{p(s_0)}{q'(s_0)}$$

elde edilir.

Bu sonuç rezidü teoremi olarak bilinir. Rezidü kutuplarda hesaplanabildiğinden kolaylık sağlar. Esas singülerlikteki rezidü kolay bulunamaz, ama Laurent serisine açılarak elde edilebilir.

Eğer fonksiyon singüler noktaların bir sonlu sayısına sahipse ve eğer fonksiyon sonsuzlukta singülerse, bazen “sonsuzluktaki rezidü”yü tanımlamak uygun olur. Bu nasıl olur? Rezidü teoremi genelleştirilebilir Riemann küresine uygulanarak. Riemann küresi üzerinde kapalı bir C eğrisi dışa sahip değildir. İki içe sahiptir ki bunlardan birisini sonsuzluktaki nokta içerir. Eğer C çevresinde integrasyon, düzlemdeki C eğrisiyle etrafı çevrilebilen(kapatılan) bir veya daha fazla sonlu-düzlem kutuplarına göre pozitif manadaysa, o zaman integrasyon sonsuzluktaki noktayı çevreler.

Eğer sonsuzluktaki nokta sadece singüler noktaysa çevrelenmiş olur, Rezidü teoreminin genişletilmesi

$$\int_C f(s) ds = -2\pi i [\text{sonsuzluktaki rezidü}]$$

Şeklinde olur. Bununla birlikte yukarıdaki integral sonlu düzlem rezidülerinin $2\pi i$ kere toplamıdır. Tanımdan

$$\text{Sonsuzluktaki Rezidü} = -[\text{sonlu-düzlem rezidülerinin toplamı}]$$

yazılır.

Gördük ki, dairesel yolla çevrelenen bir kutbun integrali, yolun yarıçapından bağımsızdır. Eğer yol, bir dairenin kapalı olmayan yayı ise, böyle bir yay boyunca integral genellikle bir fonksiyonun yarıçapıdır. Bununla birlikte, eğer bir kutup basit kutup ise, yarıçap sifira yaklaştığı için, integral de yay ile rezidüyle çarpılmış olan yayın karşısındaki açının çarpımıdır.

Şimdi bu söylenenlerin daha iyi anlaşılması için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek: f fonksiyonu \mathbb{C} düzlemindeki sonlu tane nokta hariç, analitik olsun.

$$\text{Rez}(f, \infty) = -\text{Rez} \left[g(z) = \left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0 \right) \right]$$

olarak tanımlayalım.

a) Γ , yeteri kadar büyük bir çemberse,

$$\text{Rez}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f dz$$

dir.

İspat: f fonksiyonunun yalnız sonlu sayıda kutbu olduğundan, z_0 noktasını, mutlak değeri sıfırdan farklı en küçük ve z_1 noktasını da mutlak değeri en büyük olacak şekilde alabiliriz. Yeteri kadar küçük r sayısı $r < |z_0|$ ve $r < \frac{1}{|z_1|}$ olacak biçimde

seçilsin. Eğer γ ve $\tilde{\Gamma}$, sırasıyla, r ve $\frac{1}{r}$ yarıçaplı iki çemberse, f fonksiyonu, sıfır noktası hariç, γ çemberinin içinde ve $\tilde{\Gamma}$ çemberinin dışında analitiktir.

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(w) dw = -\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = -2\pi i \operatorname{Rez}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right]$$

olur. Burada γ eğrisi pozitif yönlüdür. Eğer $\tilde{\Gamma}$ eğrisi

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(w) dw = -2\pi i \operatorname{Rez}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right]$$

eşitliğini veriyorsa, γ eğrisi negatif yönlüdür. Bu halde aynı $\tilde{\Gamma}$ eğrisinin ters yönü Γ eğrisi olarak alınır,

$$\int_{\Gamma} f(w) dw = -2\pi i \operatorname{Rez}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right] = -2\pi i \operatorname{Rez}(f, \infty)$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece,

$$\operatorname{Rez}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f$$

formülü bulunur. Bu formül, bazı integralleri daha kolay bir biçimde bulmamıza yardım eder.

b) Eğer $\lim_{z \rightarrow \infty} [-zf(z)]$ limiti varsa, bu limit sonsuzluk noktasındaki rezidüye eşittir.

İspat: Eğer

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [-zf(z)]$$

limiti varsa,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [-zf(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right)\right] = -\lim_{z \rightarrow 0} \left[-z \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right] = -\operatorname{Rez}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right] = \operatorname{Rez}(f, \infty)$$

yazılır. Bu da gösterilmek istenen sonuçtur.

c) γ , basit kapalı ve pozitif yönlü bir eğri ise,

$$\int_{\gamma} f = -2\pi i \sum [\gamma \text{ eğrisinin dışındaki sonsuz dahil, } f \text{ fonksiyonunun rezidüleri}]$$

dir.

İspat: Γ , f fonksiyonunun tüm kutuplarını içine alan yeteri kadar büyük yarıçaplı bir çember olsun. Bu kutuplar, γ ile Γ eğrileri arasında kalsın. Buna göre, γ_0 , γ eğrisi ile Γ eğrisini birleştiren bir doğru parçası ise $-\gamma - \gamma_0 + \Gamma + \gamma_0$ eğrisi kapalıdır.

Böylece,

$$\int_{-\gamma} f + \int_{\Gamma} f = \int_{-\gamma - \gamma_0 + \Gamma + \gamma_0} f = 2\pi i \sum_{i=1}^n \left[\begin{array}{l} f \text{ fonksiyonunun } \gamma \text{ ile } \Gamma \text{ eğrileri} \\ \text{arasındaki kutuplarının rezidüleri} \end{array} \right]$$

formülü yazılır. Buradan,

$$\int_{-\gamma} f + \int_{\Gamma} f = - \int_{-\gamma} f - 2\pi i \operatorname{Rez}(f, \infty) = 2\pi i \sum_{i=1}^n \left[\begin{array}{l} \text{sonsuz noktası hariç, } f \text{ fonksiyonunun} \\ \gamma \text{ eğrisi dışındaki rezidüleri} \end{array} \right]$$

formülü bulunur.

d) $\frac{(z-1)^3}{z\left(\frac{z}{2}\right)^3}$ fonksiyonunun, $z = \infty$ noktasındaki rezidüsünü hesaplayınız.

Çözüm:

Örneğin (b) kısmına göre,

$$f(z) = \frac{(z-1)^3}{z\left(\frac{z}{2}\right)^3}$$

denirse,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [-zf(z)] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[-z \frac{(z-1)^3}{z\left(\frac{z}{2}\right)^3} \right] = -8 = \text{Rez}(f, \infty)$$

olarak bulunur.

e) γ , sıfır merkezli ve üç yarıçaplı olmak üzere,

$$\int_{\gamma} \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} dz$$

integralinin hesabı için, iki yöntem bulunuz.

Çözüm:
$$f(z) = \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} dz$$

olsun.

$$\text{Rez}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[z \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} \right] = -\frac{1}{8} \text{ ve}$$

$$\text{Rez}(f, -2) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -2} \frac{d^2}{dx^2} \left[(z+2)^3 \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} \right] = \frac{9}{8}$$

olur. Böylece, rezidü teoremine göre,

$$\int_{\gamma} \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} dz = 2\pi i \left(\frac{9}{8} - \frac{1}{8} \right) = 2\pi i$$

olarak bulunur. Diğer bir yol da,

$$\text{Rez}(f, \infty) = -\lim_{z \rightarrow \infty} [zf(z)] = -\lim_{z \rightarrow \infty} \left[z \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} \right] = -1$$

formülüdür. Buradan,

$$\int_{\gamma} \frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3} dz = -2\pi i(-1) = 2\pi i$$

olarak bulunur.

BÖLÜM 2. TOPLAM KURALLARI

2.1. Giriş

Mikroskobik nükleer modeller, nükleer kolektif uyarılmaların özelliklerini incelemede başarılı bir şekilde kullanılır[1]. Çekirdek yapısının incelenmesinde varsayılan modeller çerçevesinde yaklaşık hesaplama yöntemleri kullanılır. Bu yolla elde edilen sonuçların uygun deneysel verilerle karşılaştırılması, çekirdek modellerinin ve kullanılan yöntemlerin başarısını tespit etmeye imkan sağlar.

Kuantum mekaniğinde mikro sistemlerin bir halden diğer hale geçiş matris elemanlarının toplamı, modelden bağımsız bağıntılarla sınırlandırılır ve bu bağıntılar toplam kuralları olarak adlandırılır [2]. Bu kurallar geçiş operatörlerinin veya fiziksel büyüklüklere karşılık gelen diğer operatörlerin komutasyon bağıntılarının ve seviyelerin dalga fonksiyonlarının tam set oluşturduğu matematiksel özelliklerinin yardımıyla elde edilir. Bu toplam kuralları çoğunlukla modelden bağımsız olduklarından çok büyük öneme sahiptirler.

Toplam kuralları atomik, nükleer ve parçacık fiziğinde oldukça sık kullanılır. Toplam kuralı tanımı ilk kez 1930 yılında H.Bethe tarafından hidrojen atomundan çıkan hızlı elektronların etkili gecikmesini elde etmek için kullanılmıştır. Toplam kuralı metodu nükleer saçılma reaksiyonlarında da yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu kurala göre verilen reaksiyon için nükleer seviyelerin indirgenmiş kalınlıklarının toplamı belirli sabit bir değere sahiptir. Toplam kuralı metodu nükleer kolektif uyarılmaların özelliklerini incelemek için mikroskobik nükleer teoride de yoğun biçimde kullanılır [3-5].

Kuantum Mekaniğinde sistemin bir halden diğer bir hale geçiş ihtimalleri, geçiş matris elemanlarının tabii olduğu modelden bağımsız toplam kuralları ile sınırlıdır. Çekirdek fiziğinde toplam kuralları, kullanılan modellerin güvenilirliğinin ve parametrelerinin tespiti ve tekmilleştirilmesi yolunda çok büyük öneme sahiptirler[5]. Deneysel incelemeler ağır çekirdeklerdeki elektromanyetik geçiş

parametrelerinin matris elemanlarının toplam kurallarının teorik değerlerinin, bunlara karşılık gelen deneysel değerlerden 1,5-2 kat daha büyük olduğunu gösterir [7]. Deneysel ve teori arasındaki bu uyumsuzlukların nedeni teorik olarak tam açıklanamamıştır. Bizim varsayımımıza göre, bu uyumsuzlukların esas nedeni farklı enerji seviyeleri arasında geçiş sonucu çekirdek biçiminin değişmesidir. Bazı çekirdeklerde farklı biçime sahip seviyeler arasındaki geçiş hızlarının yavaşlaması deneysel olarak bilinmektedir [8,9].

Çok parçacıklı bir sistem olan atom çekirdeğini oluşturan nükleonların (nötronlar ve protonlar) arasındaki nükleer kuvvet yasası bilinmediğinden çekirdek yapısının incelenmesinde söz konusu kuvvetler için farklı modeller kullanılır. Bu modellerin temeli çekirdek parçacıkları arasındaki efektif etkileşme kavramına dayanmaktadır. Bu kavrama göre çekirdek içerisinde kolektif uyarılmalardan, çekirdek ortalama alanında birbirinden bağımsız hareket eden nükleonlar arasındaki efektif kuvvetler sorumludur. Belirli problemlerin çözümünde olayın karakterine uygun olarak efektif kuvvetlerin en önemli bileşeni seçilerek bilinen yaklaşımlar kullanılır ve analitik ve sayısal hesaplamalar yapılır. Böylece nükleer çok-parçacık problemi sınırlı serbestlik derecesi daha küçük olan bir probleme indirgenmiş olur. Bu yolla elde edilen sonuçlar uygun deneysel verilerle karşılaştırılarak çekirdek modellerinde kullanılan parametreler tespit edilir. Bu çerçevede teorisinin öngörülerinin kanıtlanması, kullanılan yöntemlerin başarısını teyit etmeye imkan sağlar.

Çekirdek yapısının incelenmesinde kabuk modelini baz alan mikroskobik modeller son zamanlarda başarılı bir şekilde kullanılmaktadır. Ancak problemin çok karmaşık olmasından dolayı çekirdek yapısının incelenmesinde bu modeller çerçevesinde yaklaşık hesaplama yöntemlerinden istifade edilir [1]. Böyle bir problemin hareket denklemleri Green fonksiyonları metodu [10], sonlu Fermi sistem teorileri [11], Tamm-Dancoff Yaklaşımı (TDA) ve Rasgele Faz Yaklaşımı metotları (RPA) yardımıyla elde edilir [12]. Bunların hepsi çok-parçacık sisteminde incelenen kolektif hareketi açıklamada yeterince başarılı olurlar.

Çağdaş çekirdek fiziğinin başarılı metotlardan birisi de, çok parçacık sistemlerin kuantum teorisinde yaygın olarak kullanılan ve çeşitli versiyonları olan yaklaşık

ikinci kuantumlanma formalizmidir [13,14]. Bu formalizmde çok parçacık sistemlerin incelenmesinde en yaygın kullanılan metotlar RPA ve TDA yöntemleridir [1]. RPA son zamanlarda çekirdek fiziğinde en yaygın kullanılan metotlardan birisidir. Bu metot çekirdek fiziğinde değişik nükleer reaksiyonların şiddetlerini, etkin kesitlerini, elektromanyetik bozunum ihtimallerini, beta ve çift beta bozunum geçişlerini hesaplamada ve diğer nükleer oluşumlarda yaygın bir biçimde kullanılır.

Çekirdeğin yapısının incelenmesinde elektromanyetik ve beta geçiş ihtimalleri çekirdekteki nükleonlar arasındaki spin kuvvetlerinin tespitinde çok önemli rol oynarlar. Bu bakımdan taban hali deformasyon parametresinden farklı deformasyona sahip seviyeler arasındaki geçiş matris elemanlarının toplam kurallarının analitik olarak hesaplanması çok önemlidir.

Toplam kurallarını hesaplamanın bir yolu, verilen sistem Hamiltoniyeni için Schrödinger denklemini çözerek elde edilen dalga fonksiyonları yardımıyla bulunan tüm matris elemanlarının toplanmasıdır. Çekirdeğin modern mikroskobik modelinde toplam kurallarının sayısal hesaplamaları az sayıdaki fonon seviyeleri için kolaydır. Bununla birlikte gerçek durumlarda çekirdek spektrumu yüksek yoğunlukla karakterize edilir. Bu durum sistemin tüm özdeğerlerinin tam çözümlerinde ve geçiş matris elemanlarının doğru değerlendirilmesinde büyük zorluklar doğurur. Bu yüzden toplam kurallarının hesaplanmasında analitik olarak hesaplamaya imkan tanıyan matematiksel yöntemleri kullanmak oldukça faydalıdır.

Çift çekirdeklerde manyetik dipol ve Gamov-Teller rezonanslarının oluşumuna nükleonlar arasındaki spin kuvvetlerinin sorumlu olduğu iyi bilinmektedir. Spin kuvvetleri tek çekirdeklerde beta geçiş hızlarının ve M1 geçiş ihtimallerinin yavaşlamasında da etkilidir. Bu kuvvetlerin ürettiği kolektif 1^+ seviyelerinin uyarılma matris elemanlarının toplam kurallarının sayısal olarak hesaplanması bunların yüksek yoğunluklarından dolayı oldukça zordur. Bu toplam kurallarının deformasyon bağımlılığının tasviri ise daha da zordur. Bu bakımdan biçimi taban halin biçiminden farklı seviyelere geçiş matris elemanlarının toplam kurallarının analitik olarak hesaplanması çok önemlidir.

Tezin bu bölümünde, çalışma [15,16] de geliştirilen ve [17] de farklı biçimli seviyeler arasındaki M1 geçişleri için genelleştirilen yöntem ile toplam kurallarının deformasyon bağımlılığı için analitik ifadeler elde edeceğiz. Elde edilmiş formüller ^{150}Ce ve ^{196}Pt çekirdeklerine uygulanarak incelenecektir.

2.2. Toplam kuralları için temel bağıntılar

Çekirdek geçiş matris elemanları için toplam kuralları, geçiş operatörlerinin birbirleri ve sistem Hamiltoniyeniyle komutasyon bağıntıları ve dalga fonksiyonlarının kapalılık koşulları kullanılarak hesaplanır. Toplam kuralları enerji ağırlıklı (EWSR) ve enerji ağırlıksız (NEWSR) olmak üzere iki çeşittir ve çekirdek fiziğinde EWSR yaygın olarak kullanılmaktadır. Burada ilk olarak toplam kurallarının RPA metodunda kullanılmasını ve daha sonra da bu toplam kurallarının TDA ve RPA metotlarında hesaplanmasını göstereceğiz.

Matrisin verilmesi, ona karşılık gelen operatörün verilmesi ve buna bağlı olarak da operatörün özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunması anlamına gelir. Fiziksel bir f büyüklüğünün tüm k ve i lere göre sahip olduğu f_{ki} değerler takımına f büyüklüğünün matris elemanı, bir integral olan f_{ki} ye de k halinden i haline geçiş matris elemanı denir ve

$$f_{ki} = f_i^k = \langle k | f | i \rangle$$

şeklinde gösterilir. Enerji ağırlıksız toplam kuralı aşağıdaki matris çarpımı kuralından elde edilir:

$$(fg)_{mn} = \sum_k f_{mk} g_{kn} \quad (2.2.1)$$

Herhangi bir f operatörü için $|k\rangle$ dalga fonksiyonlarının $\sum_k |k\rangle\langle k| = 1$ kapalılık koşulundan yararlanarak sistemin taban durumundan tüm uyarılmış durumlara toplam geçiş ihtimali

$$\sum_k |\langle k | f | 0 \rangle|^2 = |\langle 0 | f^+ f | 0 \rangle| \quad (2.2.2)$$

toplam kuralı ile verilir. Burada $|0\rangle$ ve $|k\rangle$ sırasıyla çok-parçacık sisteminin taban ve uyarılmış hallerinin dalga fonksiyonlarını göstermektedir ve $\langle 0 | 0 \rangle = \langle k | k \rangle = 1$ ve $\langle 0 | f | 0 \rangle = 0$ eşitliklerini sağlarlar.

Enerji ağırlıksız (2.2.2.) toplam kuralı elektrik yükünün korunduğu proseslerde yaygın biçimde kullanılır. Formülden de görüldüğü gibi, taban halden tüm uyarılmış hallere geçiş ihtimali, taban durumundaki geçiş operatörünün beklenen değerinin modülünün karesine eşittir.

f_μ ve f_μ^+ birer vektör operatör bileşenleri ($\mu = \pm 1$) olmak üzere, (2.2.2.) eşitliği bu operatörlerin

$$f_0 = [f_\mu, f_\mu^+] \quad (2.2.3.)$$

komutasyonuna uygulanırsa, uyarılmış hallerin dalga fonksiyonlarının tam küme oluşturmalarından yararlanarak, F nin taban hal ortalama değeri yapılan hesaplamalar sonucu

$$\sum_k \left(|\langle k | f_\mu | 0 \rangle|^2 - |\langle k | f_\mu^+ | 0 \rangle|^2 \right) = \langle 0 | f_0 | 0 \rangle \quad (2.2.4.)$$

şeklinde elde edilir. Fermi ve Gamov-Teller beta geçiş operatörleri hermitik olmadığından, (2.2.4.) toplam kuralı yaygın olarak izinli beta geçişlerinde kullanılır.

Bazı geçiş operatörleri ve zamana göre türevlerinin matris elemanları arasındaki bağıntı kullanılarak Toplama Teoremi [54] yardımıyla EWSR için aşağıdaki modelden bağımsız genel formül elde edilir:

$$\sum_k (E_k - E_0) |\langle k | f | 0 \rangle|^2 = \frac{1}{2} \langle 0 | [f^+, [H, f]] | 0 \rangle \quad (2.2.5.)$$

Burada E_0 ve E_k sırasıyla taban ve uyarılmış hallerin enerjileridir.

F büyüklüğünün matris elemanları ve H Hamiltoniyeni ile komutasyonu

$$\langle k | f | 0 \rangle = \frac{\langle k | [H, f] | 0 \rangle}{E_k - E_0} \quad (2.2.6.)$$

eşitliği ile ilişkilidir. (2.2.6.) eşitliğini kullanarak (2.2.5.) denkleminin sol tarafı hesaplanırsa gerekli olan (2.2.5.) teoremini elde etmiş oluruz.

Formüllerden de görüldüğü gibi elde ettiğimiz (2.2.2.), (2.2.4.) ve (2.2.5.) toplam kurallarının sağ tarafları, de görüldüğü gibi geçiş operatörleri için ele alınan uyarılmış enerji seviyelerinden ve bunların hesaplama metotlarından bağımsızdır. Bunlar sadece taban hal dalga fonksiyonları yardımıyla hesaplanabilirler. Diğer yandan bu toplam kurallarının sol tarafları uyarılmış hallerin dalga fonksiyonlarını ihtiva ettiğinden, bunların değerleri modele ve kullanılan metotların doğruluğuna bağımlıdır. Toplam kurallarının modelden bağımsız olması, matris elemanlarını sayısal olarak hesaplamaya gerek kalmadan sonuçları elde etmeyi kolaylaştırır ve kullanılan metotların doğruluk derecesini kontrol etmeye imkan sağlar. (2.2.5.) eşitliğinden de görüldüğü gibi elektrik dipol geçişlerinin enerji ağırlıklı toplam kuralı, modelden bağımsız olarak fiziğin ve çekirdeğin universal sabitleriyle ifade edilir.

Toplam kurallarının bir diğer önemi, bir çok özel geçişler için modelden bağımsız olmasıdır. Mesela, elektrik dipol ve elektrik kuadrapol geçişleri için (2.2.5.) toplam

kuralı (EWSR) modelden bağımsız belirli değere sahiptir. Özellikle elektrik dipol geçişleri için, yük alışverişli ve hıza bağlı etkileşmeleri ihmal ederek elde edilen modelden bağımsız sonuç aşağıdaki gibidir [44]:

$$\sum_k (E_k - E_0) |\langle k|r|0 \rangle|^2 = \frac{1}{2} \langle 0 | [r^+, [H, r]] | 0 \rangle = \frac{9}{4\pi} \frac{\hbar}{2m_p} \frac{NZ}{A} e^2 \quad (2.2.7.)$$

Bu ifade ayrıca modellerin çok-parçacık sistemlere uygulanıp uygulanamayacağını ve kullanışlı olup olamayacağını da anlaşılmasına imkan sağlar.

2.3. Mikroskopik çekirdek modeli (RPA yöntemi)

Her hangi bir çok parçacıklı sistemi ele aldığımız zaman bu sistemin Hamiltoniyeni, sistemi oluşturan parçacıkların kinetik enerjisi ile bu parçacıklar arasındaki etkileşme potansiyelinin toplamına eşit olur.

$$H = T + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(r_i, r_j) \quad (2.3.1)$$

Çekirdek çok parçacıklı bir sistem olduğundan bu söylediklerimizi çekirdek sistemine de ait edebiliriz. Ama çekirdek içerisindeki nükleonlar arasındaki güçlü etkileşme kuvvet yasası bilinmediğinden çekirdek yapısının incelenmesinde yaklaşık metotlardan veya modellerden istifade edilir. Çekirdek fiziği, fiziğin yeni gelişmeye başlayan bir dalı olduğundan çekirdek yapısı için teoriler on görüldüğü zaman fiziğin çeşitli dallarında kullanılan yaklaşımlar ve metotlar baz alınmaktadır

Böyle yaklaşımlardan biri atom fiziğinde geniş kullanılan Hartri-Fok yaklaşımıdır. Bu yaklaşıma göre atomda her bir elektron diğerlerinin oluşturduğu ortalama alanda bir birinden bağımsız hareket eder. Kabuk (shell) model olarak ta bilinen bu model göre sistemin hamiltoniyeni sistemin kinetik enerjisi (T_k) ve ortalama alanda

hareket eden parçacıkların potansiyel enerjisinin ($V(r)$) toplamı olarak ele alınır ve genel potansiyeldeki diğer terimler (V_{rez}) gözönüne alınmaz (Soloviev 1976)

$$H_{sp} = T_k + V(r) + V_{rez} = T_k + V(r) ; \quad V(r) = \begin{cases} V_0 & Z = N \\ V_0 + V_1 & Z \neq N \end{cases} \quad (2.3.2.)$$

Bu model çekirdek fiziği proseslerine uygulandığı zaman bazı problemleri açıklığa kavuşturduğu gibi bir çok problemin izahında zorluk çekiyordu Yani; Çift-çift çekirdeklerin spektrumlarında geçiş yasak bölgenin olmasını, bunların eylemsizlik momentumlarının deneyin verdiği değerden büyük çıkmasını ve deneysel spektr yoğunluğunu izah edemiyordu. Bu Modelin eksikliklerinden dolayı yeni modeller düşünölmeye başlandı.

1957 yılında yoğun madde fiziğinde önemli bir gelişme olmuş, bazı katı metallerde görölen süperiletkenlik özelliği Barden, Cooper ve Shrifffer tarafından, bugün BCS teorisi olarak bilinen ve onlara Nobel ödölü kazandıran modelleri ile bir açıklamaya kavuşturulmuştur. Bu teorinin matematiksel temeli de Bogolyubov tarafından yapılmıştır. Bilindiği gibi çift çift çekirdeklerin spektrumlarında süperiletken metallerin spektrumlarında olduğu gibi bir enerji aralığı bulunmaktadır. Spektrumdaki bu benzeyişi fark edip süperiletken metallere çekirdeklerin iç yapıları arasında bir ortak özellik olabileceğine ilk defa Bohr, Mottelson ve Pines (1958) işaret ettiler. Bundan sonra da çekirdeğin süperakışkan modeli, ve ya bağımsız kuasiparçacıklar modeli denen model geliştirildi. Bu model Mikroskobik Teori olarak da bilinir.

Teoriye göre çekirdek içerisinde tek parçacıklı ortalama alan potansiyelinden ilave olarak çiftler şeklinde de etkileşmeler olduğundan V_{rez} teriminden bir etkileşme daha Hamiltoniyene katılır (1. Yaklaşım). Hamiltoniyen:

$$H_{sqp} = H_{sp} + V_{pair} + V_{rez} = H_{sp} - G \sum_{ss'} a_s^+ a_{\bar{s}}^+ a_{\bar{s}'} a_{s'} \quad (2.3.3.)$$

şeklinde yazılır. Burada H_{sp} (2.3.2.) ile belirlenmiş tek parçacık Hamiltoniyenini, H_{pair} indisi de eşleme etkileşmesini vermektedir.

Çekirdek fiziğinde kuantum alan teorisinin ve istatistik fiziğin matematiksel metotlarından ve fiziksel düşüncelerinden yararlanır. Bu metotlardan birisi de çağdaş çekirdek fiziğinde yaygın olarak kullanılan ve alan teorisinden alınan ikinci kuantumlanma formalizmidir. Yaklaşık ikinci kuantumlanma yöntemi ilk defa Bogolyubov (1949) tarafından önerildi. Daha sonra geliştirilerek elektron gaz problemine uygulandı. Bugün artık çok parçacıklı sistemlerin kuantum teorisinde yaygın olarak çeşitli versiyonları kullanılmaktadır (Pienes 1962). Yaklaşık ikinci kuantumlanma yönteminde kullanılan başlıca metot "Random Phase Approximation" (RPA) metodudur (Soloviev, 1976). Bu yöntemde göre çift etkileşme dışında göz önüne almadığımız ve yukarıda V_{rez} olarak belirttiğimiz etkileşmesinin birkaç terimi quasi parçacık etkileşmeleri olarak (geçişlere bağlı olarak) ele alınmaktadır (Soloviev 1976).

$$H_{RPA} = H_{sp} + V_{pair} + V_{rez} \quad (2.3.4.)$$

Giriş kısmında vurgulan SEL-Çekirdek çarpıştırıcıları tasarımında incelenecek olan çekirdek seviyeleri fotonlar vasıtasıyla uyarılmış olacağından ve foton uyarılmasıyla giden reaksiyonlarda spini bir olan seviyelerin uyarılacağına ihtimali daha çok olduğundan teorik olarak da spini bir olan seviyeler üzerinde durulacak. Yani çalışmalarımızda RPA yöntemini baz alarak spini 1 olan geçişlere baktık. Spini bir olan geçişler ikiye ayrılır: $I^\pi = 1^-$ elektrik dipol (E1) ve $I^\pi = 1^+$ magnetik dipol (M1). Elektrik dipol geçişleri bir kayda olarak 10-15MeV civarında büyük elektrik dipol rezonans veriyor. Bu uyarılmaların düşük enerji dalı (0-4 MeV) son zamanlar yüksek hassasiyetli cihazlarla incelenmeye başlanmıştır. Deneysel materyalin az olmasından dolayı biz esas dikkatimizi magnetik dipol rezonanslarının incelenmesine

yöneltmişiz. Bu uyarılmalar çok yönlü olarak hem teorik hem de deneysel incelenmiştir. Bu uyarılmaların iki rezonans dalı bellidir. Bunlardan düşük enerjili (2-4 MeV) literatürde makas mod olarak bilinir ve deforme çekirdeklerde nötron ve proton sistemlerinin simetri eksenlerinin çekirdek simetri merkezi etrafında makas ağızları gibi titreşimlerinden oluşur. M1 uyarılmalarının yüksek enerjili (7-9MeV) dalı nükleonların spin titreşimleri sonucu meydana geldiğinden spin vibrasyon mod adlandırılır.

Çalışmalarımızda esas magnetik dipol uyarılmalarına değineceğiz. Bu durumda katkı quadrupol-quadrubol tipli izoskalar ve izovektor etkileşimlerinden ve spin - spin kuvvetlerinden gelmektedir.

$$H_{RPA} = H_{sp} + h_0 + h_1 + V_{pair} + \chi V(\sigma, \sigma) \quad (2.3.5.)$$

Burada h_0 ve h_1 sırasıyla quadrupo quadrupol tipli izoskalar ve izovektör terimlerdir. V spin ve izospin etkileşmelerini ifade ediyor.

İnvaryantlık Problemi: (2.3.1.) Hamiltoniyeni tüm sistemi ifade ettiğinden rölyativistik invaryantdır. (Translasyon, Rotasyon, Galilei invariantlık) (Pyatov et al. 1977).

Kullandığımız yaklaşımlarda potansiyel olarak (2.3.1.) 'deki ikinci terimi tümüyle ele almadığından dönme (rotasyon) ve öteleme (translasyon) invaryantlıklar bozulmaktadır buda teorik olarak incelenen enerji seviyelerinin deneyle uyuşmamasına neden oluyor ve bu uyumsuzluğu ortadan kaldırmakla daha iyi sonuçlar elde etmek mümkündür.

Yukarıda belirttiğimiz gibi çalışmalarımızı esasen kararlı kuadrupol deformasyona sahip çekirdekler üzerinde yapacağız ve 1^+ seviyelerini inceleyeceğiz. Bu durumda rotasyon invariantlık bozulmaktadır.

$$[H_{RPA}, J] \neq 0$$

Ortalama potansiyelde izoskaler ve izovektör gibi iki terim olduğundan dolayı rotasyon invaryantlık bozulmaktadır. Translasyon invariantlığın bozulması sonuçları etkilemediğinden restore edici dipol etkileşimlerini ihma edeceğiz (Soloviev 1976). Biz (2.3.5)'de verilmiş h_0 ve h_1 terimlerini öyle seçeceğiz ki, bozulan invaryantlık restore edilmiş olsun (Kuliev et al. 2000). Bu metotla ise bu parametreler teorinin kendi içinden çıkıyor ve teori özuyumlu olur.

$$[H_{RPA}, J] = 0 \quad (2.3.6.)$$

Teoride parametrelerin böyle seçilmesinin ne kadar doğru olup olmadığını ortaya çıkarmak için en güzel yol teorik sonuçların deneysel sonuçlarla karşılaştırılmasıdır. Son yıllarda düşük enerjilerde yapılan deneysel gözlemlere göre spini bir olan seviyelerin incelenmesinde birkaç kanuna uygunluk gözlemlendi.

2.4. Elektrik multipol geçişleri

2^λ -elektrik multipol matris elemanlarının taban halden I^π spin ve pariteye sahip tek fonon durumuna geçişinin açık formu

$$M = \left\langle n \left| \sum_{i=1}^z (r^\lambda Y_{\lambda\mu})_i \right| 0 \right\rangle = \frac{F_p(\omega_n)}{\sqrt{Z(\omega_n)}} \quad (2.4.1)$$

şeklindedir. Burada

$$Z(\omega_n) = 4\omega_n \left(\sum_{\text{prot.}} \frac{\varepsilon_{ss'} f_{ss'}^{(\lambda)2} U_{ss'}^2}{(\varepsilon_{ss'}^2 - \omega_n^2)^2} + \sum_{\text{neut.}} \frac{\varepsilon_{ss'} f_{ss'}^{(\lambda)2} U_{ss'}^2}{(\varepsilon_{ss'}^2 - \omega_n^2)^2} \right) \quad (2.4.2)$$

dir. Genelleştirilmiş nükleer modeller için bilinen prosedürler uygulanırsa, aşağıdaki indirgenmiş $E\lambda$ geçiş ihtimalini buluruz:

$$B(E\lambda, 0^+ \rightarrow \lambda^\pi) = |M|^2 = \frac{F_p^2(\omega_n)}{Z(\omega_n)} \quad (2.4.3)$$

Şimdi (2.4.3) denklemini kullanarak EWSR (2.3.5) ve NEWSR (2.3.2) yi klasik formda aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$S_{E\lambda} = \sum_n \omega_n B(E\lambda, 0^+ \rightarrow \lambda_n^\pi) = \frac{1}{2} \langle 0 | [f^+, [H, f]] | 0 \rangle \quad (2.4.4)$$

$$S_{NE\lambda} = \sum_n |\langle 0 | f | 0 \rangle|^2 = \langle 0 | f^+ f | 0 \rangle \quad (2.4.5)$$

EWSR nin fiziksel önemini vurgulamak için, 2^λ -kutuplu fonon emiliminin toplam tesir kesitini örnek gösterebiliriz:

$$\sigma_{E\lambda} = \int \sigma(E) E dE = \frac{32\pi^4}{9hc} S_{E\lambda}$$

Mezon oluşumunda çekirdeğin tüm $I^\pi = \lambda^+$ uyarılmalarını eşige kadar ele alan değiş-tokuş ve hıza bağımlı etkileşmeleri ihmal ederek elde edilen $S_{E\lambda}$ nin modelden bağımsız tahminini yazabiliriz:

$$S_{E\lambda} = \frac{\lambda(2\lambda+1)^2 e^2 h^2}{32\pi^3} \langle r^{2\lambda-2} \rangle Z \quad (2.4.6)$$

Burada Z , çekirdeklerdeki proton sayısını, m proton kütlelerini göstermektedir. Ayrıca $\langle r^{2\lambda-2} \rangle$, Hartree-Fock (HF) taban durumunda $r^{2\lambda-2}$ ifadesinin ortalama değerini ifade eder ve bunun tahmini değerlendirmesi yaklaşık olarak birer sabit olan nükleer yoğunluk ve R_0 yarıçapından elde edilir. Buna göre

$$\langle r^{2\lambda-2} \rangle = \frac{3}{2\lambda+1} R_0^{2\lambda-2}$$

dir. (2.4.6) toplam kuralı hem $\Delta T = 0$ ve hem de $\Delta T = 1$ uyarılmalarını içerir. Eğer izobarik spin korunuyorsa bu durumda

$$S_{E\lambda, T=0} = \frac{\lambda(2\lambda+1)^2}{8\pi} \frac{e^2 \hbar^2}{m} \frac{Z^2}{A} \langle r^{2\lambda-2} \rangle$$

ve

$$S_{E\lambda, T=1} = \frac{\lambda(2\lambda+1)^2}{8\pi} \frac{e^2 \hbar^2}{m} \frac{Z^2}{A} \langle r^{2\lambda-2} \rangle$$

olmak üzere iki kısma ayrılır.

(2.4.4) ve (2.4.5) eşitliklerinin sağ taraflarını kuaziparçacık temsilinde hesaplayalım (burada ortalama Hartree-Fock-Bogolyubov (HFB) taban hali dalga fonksiyonuna göre alınmıştır):

$$\langle 0 | [f^+, [H, f]] | 0 \rangle_{HFB} = 2 \sum_{ss'} \varepsilon_{ss'} f_{ss'}^{(\lambda)^2} U_{ss'}^2 \quad (2.4.7)$$

$$\langle 0 | f^+ f | 0 \rangle_{HFB} = \sum_{ss'} f_{ss'}^{(\lambda)^2} U_{ss'}^2 \quad (2.4.8)$$

Thouless, RPA yaklaşımı ile hesaplanan (2.4.4) eşitliğinin sol tarafı ile HF(HFB) taban hali dalga fonksiyonu(2.4.6) kullanılarak hesaplanan (2.4.4) eşitliğinin sağ tarafının birbirine eşit olduğunu gösterdi. Sayısal hesaplamalar yapılmadan TDA veya RPA yaklaşımlarının ne kadar güvenilir olduğu konusunda yorum yapmak yanlış olur. Ancak bununla birlikte geçiş matris elemanlarının analitik özellikleri kullanılarak, $E\lambda$ geçiş operatörleri için Thouless teoreminin diğer bir ispatını verebiliriz. Buna göre aşağıdaki bağıntının oldukça kullanışlı ve geçerli olduğunu gösterebiliriz:

$$Z_n = \frac{1}{\chi} \frac{dD(\omega_n)}{d\omega} = \frac{D'(\omega_n)}{\chi} \quad (2.4.9)$$

Eğer (2.4.3) ve (2.4.9) bağıntıları kullanılırsa, (2.4.4) ile verilen $S_{E\lambda}$ toplam kuralının genel ifadesini şu formda elde ederiz:

$$S_{E\lambda} = \chi \sum_{n=1,2,\dots} \frac{\omega_n F(\omega_n)^2}{D'(\omega_n)} = \frac{1}{2} \chi \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots} \frac{\omega_n F(\omega_n)^2}{D'(\omega_n)} \quad (2.4.10)$$

Bu toplam ifadesi değerlendirme yapmak için oldukça yorucu işlemler gerektirir. Ancak (2.4.10) eşitliğindeki ω_n ler $D(\omega_n)$ fonksiyonunun sıfır yerleri olduğundan, rezidü teoreminin temel teoremine göre [16], (18) eşitliğindeki $S_{E\lambda}$ ifadesini kontur integrali formunda yazabiliriz:

$$S_{E\lambda} = \frac{\chi}{4\pi} \oint_{L_n} \frac{zF(z)^2}{D(z)} dz \quad (2.4.11)$$

L_n konturu, $D(z)$ fonksiyonunun sıfır yerleri olan $z = \pm\omega_n$ noktalarındaki integrandın birinci dereceden singülerliliklerini ihtiva eder. Analizden bilindiği gibi L_n konturunun dışında, (2.4.11) ifadesindeki integral altı ifade $z = \pm\varepsilon_\mu$ noktalarında singülerliğe sahiptir ve bu noktalara karşılık gelen rezidüler kolaylıkla hesaplanabilir. Rezidü teoreminin temel teoremi kullanılırsa ($f(z)$ analitik fonksiyonunun tüm rezidülerinin toplamı sıfıra eşittir)

$$\sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots} \frac{\omega_n F^2(\omega_n)}{D'(\omega_n)} + \sum_{\mu} \operatorname{Re} z\varphi(+\varepsilon_\mu) + \sum_{\mu} \operatorname{Re} z\varphi(-\varepsilon_\mu) = 0 \quad (2.4.12)$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada

$$\varphi(z) = \frac{zF^2(z)}{D(z)}$$

$$\operatorname{Re} z\varphi(-\varepsilon_\mu) + \operatorname{Re} z\varphi(\varepsilon_\mu) = -\sum_{\mu} \varepsilon_\mu f_\mu^2 u_\mu^2 \quad (2.4.13)$$

(2.4.12) ve (2.4.13) eşitlikleri kullanılarak RPA yaklaşımında EWSR(12) nin sol tarafı için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$S_{E\lambda} = \sum_{n>0} \omega_n B(E\lambda, 0^+ \rightarrow \lambda_n^\pi) = \sum_{ss'} \varepsilon_{ss'} f_{ss'}^{(\lambda)^2} U_{ss'}^2 \quad (2.4.14)$$

Buna göre, (2.4.14) denklemini (2.4.7) HFB taban hali dalga fonksiyonu kullanılarak hesaplanan EWSR yi tam olarak sağlar.

Eğer benzer hesaplamalar TDA metodu kullanılarak yapılırsa EWSR

$$S_{E\lambda}^{\text{TDA}} = \sum_n \omega_n B(E\lambda, 0^+ \rightarrow \lambda_n^\pi) = \sum_{ss'} \varepsilon_{ss'} f_{ss'}^{(\lambda)^2} U_{ss'}^2 + \chi \left| \sum_{ss'} f_{ss'}^{(\lambda)^2} U_{ss'}^2 \right| \quad (2.4.15)$$

şeklinde modele bağımlı bir hale gelir ve EWSR yi sağlamaz. EWSR için bu ifade ilk kez bu makalede elde edilmiştir. Dejenere limitte tüm kuaziparçacık enerjileri ortak enerjiye eşit kabul edilirse yani $\varepsilon_{ss'} = \bar{\varepsilon}$ olursa [7] nin iyi bilinen sonucu elde edilir.

Dejenere limitte (2.4.15) denklemini

$$\omega_{\text{coll}} = \bar{\varepsilon} + \chi \sum_{ss'} f_{ss'}^{(\lambda)^2} U_{ss'}^2$$

şeklinde verilen saf kolektif tek hali belirler ve tam olarak (2.4.5) enerji ağırlıklı toplam kuralını sağlar:

$$B(E\lambda, 0^+ \rightarrow \lambda_{\text{coll}}^\pi) = \sum_{ss'} f_{ss'}^{(\lambda)^2} U_{ss'}^2$$

TDA metodu bu yüzden çekici ($\chi < 0$) etkileşmeler için genelde küçük enerji ağırlıklı toplam kuralını ve itici ($\chi > 0$) etkileşmeler için ise büyük bir değer verir. TDA metodu NEWSR yi sağlar ancak EWSR ihlal eder. Oysaki RPA da bu durumun tam tersi doğrudur. TDA yaklaşımında enerji ağırlıklı toplam kuralının büyüklüğü

efektif etkileşmelerin χ sabitine bağlı olduğundan RPA metodu kadar fiziksek bir değer değildir. Bu sebeple genellikle RPA metodu tercih edilir ve bu metotta EWSR neredeyse modelden bağımsız olduğundan daha güvenilirdir.

2.5. Manyetik dipol geçişleri

Deforme çekirdekler x eksenini etrafında dönmeye sahip kabul edildiğinden bu hareketle ilgili olan kollektif magnetik momentini, aşağıdaki biçimde tanımlanan magnetik moment operatörünün x bileşeninden ayırabiliriz[18]:

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [(g_s^r - g_l^r) \vec{\sigma}_i + g_l^r \vec{j}_i] \quad (2.5.1)$$

Burada σ lar Pauli matrisleri, g_s^r ve g_l^r sırasıyla serbest nükleon spin ve orbital jeromagnetik oranlarıdır ve toplam kuralı tüm nükleonlar üzerinden alınmıştır. 1^+ hallerini araştırmanın temel problemi rotasyonel dalını, iç uyarılma spektrumundan ayırmaktır. 1^+ uyarılmaları için kullanılan RPA'nın ayrıntılı tanımı [18] de verilmiştir. Biz burada açılal momentum korunduğu dikkate alınarak başlıca, $I^\pi K = 1^+1$ iç uyarılmalarının sonuçları ve bu uyarılmaların M1 geçiş ihtimalleri ile ilgileneceğiz.

Bir fononlu 1^+ hallerinin en önemli karakteristiği, taban hali için indirgenmiş M1 geçiş ihtimalidir ve μ_N Bohr magnetonu, $j_{ss'} \equiv \langle s' | j_x | s \rangle$ açılal momentum operatörünün tek parçacık matris elemanları olmak üzere RPA da bu durum şu formda verilmiştir:

$$B(M1, 0^+ \rightarrow 1_n^+) = \frac{3}{4\pi} \frac{\omega_n}{4Z(\omega_n)} \left[J^p(\omega_n) + \sum (g_s^r - g_l^r) X^r(\omega_n) \right] \mu_N^2 \quad (2.5.2)$$

Burada tek bir nükleon için

$$J_{\tau}(\omega_n) = \sum_{ss'} \frac{2E_{ss'} j_{ss'}^2 L_{ss'}^2}{E_{ss'}^2 - \omega^2}$$

$$Z(\omega_n) = \frac{1}{4} \omega_n \frac{dJ(\omega_n)}{d\omega_n}$$

ve genel notasyonda $L_{ss'} = u_s v_{s'} - u_{s'} v_s$ dir. ω_n uyarılmış enerjileri ise

$$\omega_n^2 [J_n(\omega_n) + J_p(\omega_n)] = \omega_n^2 J(\omega_n) = 0 \quad (2.5.3)$$

dispersiyon denkleminin çözümleridirler. HFB yaklaşımında (2.4.4) enerji ağırlıklı toplam kuralının(EWSR) sağ tarafındaki komütatörün direkt hesaplanması sonucu

$$\gamma = 4 \sum_{ss'} E_{ss'} j_{ss'}^2 L_{ss'}^2, \quad \delta_{\sigma} = \sum_{ss'} E_{ss'} \sigma_{ss'}^2 L_{ss'}^2$$

olmak üzere

$$[\mu^+, [H, \mu]]_{HFB} = \frac{3}{4\pi} \left[\gamma_p + \sum_{\tau} (g_s^{\tau} - g_l^{\tau}) \gamma_{\sigma}^{\tau} - \frac{\gamma_p^2}{\gamma_p + \gamma_n} \right] \mu_N^2 \quad (2.5.4)$$

eşitliği elde edilir.

B(M1) indirgenmiş geçiş ihtimalinin analitik özellikleri ve (2.5.3) dispersiyon denklemini kullanılarak, rezidü teoremi ve kontur integralleri yardımıyla RPA yaklaşımında EWSR için aşağıdaki formüller elde edilir:

$$S_{M1}^{RPA} = \frac{3}{8\pi} \left[\gamma_p + \sum_{\tau} (g_s^{\tau} - g_l^{\tau}) \gamma_{\sigma}^{\tau} - \frac{\gamma_p^2}{\gamma_p + \gamma_n} \right] \mu_N^2 \quad (2.5.5)$$

$$\sum_{n=0,1,\dots} \omega_n B(M1, 0^+ \rightarrow 1_n^+) = \frac{1}{2} \langle 0 | [M^+, [H, M]] | 0 \rangle_{HFB} \quad (2.5.6)$$

(2.5.5) denkleminde kareli parantez içinde bulunan son terim, deforme çekirdeğin küresel olmayan yapısının sebep olduğu taban durumu korelasyonlarının ve

Hamiltoniyenin rotasyonel invaryansını restore edici efektif etkileşmelerin katkısını ifade eder. Benzer hesaplamalar yapılarak, TDA yaklaşımının (2.5.6) enerji ağırlıklı toplam kuralını (EWSR) gerçekleştirmediği ve M1 geçişleri için doğru sonuçlar vermediği gösterilebilir.

2.6. Deforme çekirdekte spin-titreşim karakterli 1^+ seviyeleri

Manyetik dipol etkileşmeleri; tek-çekirdeklerin manyetik dipol momentlerine, M1 geçişlerine ve enerji spektrumlarına tesir ederken, çift-çift çekirdekte spin-titreşim 1^+ seviyelerini üretir. Buna göre spin kuvvetlerinin deforme çekirdekte 1^+ seviyelerini ürettiği varsayılarak bu seviyeleri temsil eden Hamiltoniyen aşağıdaki gibi seçilebilir [19]:

$$H = H_{sqp} + V_{\sigma\tau} \quad (2.6.1)$$

Burada

$$V_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} \chi_{\sigma\tau} \sum_{i \neq j} \sigma_i \sigma_j \tau_i^z \tau_j^z \quad (2.6.2)$$

bağıntısı izovektör spin kuvvetlerini, H_{sqp} ise süperakışkan modelde (2.6.1) kuaziparçacık Hamiltoniyenini tasvir etmektedir. s ve t sırasıyla spin ve izospin momentum operatörleri olmak üzere $\sigma = 2s$ ve $\tau = 2t$ ise sırasıyla spin ve izotopik spini temsil eden Pauli matrisleridir. Burada kullanılan ve açıklanmamış olan tüm bağıntılar referans [19] deki gibidir. RPA da 1^+ seviyeleri dalga fonksiyonlarına bir fonon fonksiyonu olarak bakılabilir:

$$|\Psi_k\rangle = Q_k^+ |\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mu, \tau} [X_\mu^k(\tau) C_\mu^+(\tau) - Y_\mu^k(\tau) C_\mu(\tau)] |\Psi_0\rangle \quad (2.6.3)$$

Burada Q_k^+ fonon üretim operatörü, $|0\rangle$ ise çift-çift çekirdeğin taban durumuna karşılık gelen fonon vakumudur. Sistemimiz kesikli spektruma sahiptir ve buna

karşılık gelen $|k\rangle$ dalga fonksiyonları da $\sum_k |k\rangle\langle k| = 1$ şeklinde tam set oluştururlar.

Bundan dolayı C_μ ve C_μ^+ operatörlerine karşılık gelen iki kuaziparçacıklı seviyelerin X_μ ve Y_μ genlikleri şu şekilde normlanmıştır:

$$\sum_{\mu\tau} [X_\mu^{i2}(\tau) - Y_\mu^{i2}(\tau)] = 1 \quad (2.6.4)$$

Hamiltoniyenin özfonksiyon ve özdeğerlerini bulmak için RPA'nın bilinen işlemlerini kullanarak ve

$$[H_{sqp} + V_{\sigma\tau}, Q_k^+] = \omega_k Q_k^+ \quad (2.6.5)$$

hareket denklemini çözerek 1^+ seviyelerinin enerjisi olan ω_k kökleri için aşağıdaki dispersiyon denklemi alınır:

$$D(\omega_k) = 1 + \chi [F_k^n(\omega_k) + F_k^p(\omega_k)] = 0 \quad (2.6.6)$$

Burada

$$F_k^\tau(\omega_k) = 8 \sum_\mu^\tau \frac{E_\mu s_\mu^2 L_\mu^2}{E_\mu^2 - \omega_k^2}, \quad \tau = n, p \quad (2.6.7)$$

olmak üzere, E_μ nükleonların kuaziparçacık enerjisi, ω_k spin-titreşim karakterli 1^+ seviyelerinin fonon enerjileri ve σ_μ ise spin operatörünün tek parçacık matris elemanlarıdır. İki-kuaziparçacıklı seviyelerin X_μ ve Y_μ genlikleri şu şekildedir:

$$X_\mu^i = \frac{1}{\sqrt{4\omega_i Z(\omega_i)}} \cdot \frac{s_\mu L_\mu}{E_\mu - \omega_i} \quad (2.6.8)$$

$$Y_{\mu}^i = \frac{1}{\sqrt{4\omega_i Z(\omega_i)}} \cdot \frac{s_{\mu} L_{\mu}}{E_{\mu} + \omega_i} \quad (2.6.9)$$

Burada

$$Z(\omega_i) = \sum_i \frac{E_{\mu} s_{\mu}^2 L_{\mu}^2}{(E_{\mu}^2 - \omega_i^2)^2} \quad (2.6.10)$$

dir. Ayrıca manyetik dipol 1^+ seviyelerinin enerjileri $D(\omega_i)$ fonksiyonunun çözümleri olduğundan dolayı

$$D' = \frac{dD(z)}{dz}$$

olmak üzere,

$$Y(\omega_i) = \frac{I}{\chi} D'(\omega_i) \quad (2.6.11)$$

eşitliği mevcuttur. Kullanılan spin-spin kuvvetlerinin ve manyetik dipol operatörünün simetrilerinden dolayı 1^+ seviyelerinin en karakteristik büyüklüğü, çekirdek taban halinden uyarılmış hallerde M1 geçiş matris elemanlarıdır:

$$M_k = \langle k | M | 0 \rangle \quad (2.6.12)$$

Burada manyetik dipol operatörü

$$\vec{M} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{m,\tau} \left[(g_s^{\tau} - g_l^{\tau}) \overline{s_m^{\tau}} - g_l^{\tau} \overline{j_m^{\tau}} \right] \quad (2.6.13)$$

şeklindedir. g_s^{τ} ve g_l^{τ} sırasıyla nükleonların spin ve yörüngesel jromanyetik oranlarıdır. Dalga fonksiyonunun (2.6.3) ifadesini kullanarak (2.6.8) ve (2.6.9)

formüllerinin yardımıyla 1^+ seviyelerinin taban halinden uyarılmış hale geçiş matris elemanı

$$M_i = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{\sum_{,\tau} \left[\frac{1}{2} (g_s^\tau - g_l^\tau) \vec{F}_i^\tau - g_e^\tau \vec{J}_i^\tau \right]}{\sqrt{Y(\omega_i)}} \quad (2.6.14)$$

olmak üzere

$$\vec{J}_i^\tau = 2 \sum_i^\tau \frac{E_\mu j_\mu^2}{E_\mu^2 - \omega_i^2} \quad (2.6.15)$$

şeklinde alınır. Burada j_μ toplam açısal momentumun tek-parçacık matris elemanlarıdır.

BÖLÜM 3 ENERJİ AĞIRLIKLIL TOPLAM KURALININ DEFORMASYON BAĞIMLILIĞI

Manyetik dipol geçiş matris elemanlarının enerji ağırlıklı toplam kuralı, (2.2.5) bağıntısının yardımıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\sum_{k>0} (E_k - E_0) |\langle k | M | 0 \rangle|^2 = \frac{1}{2} \langle 0 | [M^+, [H, M]] | 0 \rangle \quad (3.1.1)$$

Burada E_k ve $\langle k |$ sırasıyla H Hamiltoniyen operatörünün özdeğer ve özfonksiyonudur. Ayrıca M geçiş operatörü, E_0 ve $|0\rangle$ ise sırasıyla taban hal enerjisi ve dalga fonksiyonudur. Bu toplam kuralının sağ tarafı ortalama alan potansiyeli parametreleri ile belirlendiğinden çekirdeğin iç hareket parametrelerini içermemekte ve kullanılan modelden bağımsız olarak sabit değerlere sahip olmaktadır. Diğer yandan (3.1.1) toplam kuralının sol tarafı çekirdek seviyelerinin enerjilerini ve dalga fonksiyonlarını ihtiva ettiğinden modele ve kullanılan metotlara bağımlıdır. Buna göre de (3.1.1) toplam kuralı çekirdek yapısının incelenmesinde çok önemli bir yere sahiptir.

Şimdi (3.1.1) toplam kuralını farklı biçime sahip taban hal ve uyarılma seviyeleri arasındaki geçişler için genelleştirelim. Bunun için $|k\rangle$ uyarılma seviye biçimlerinin, taban hal biçiminden farklı deformasyona sahip olduğunu kabul edelim. Bundan sonra yeri geldiğinde uyarılmış seviyelere karşılık gelen büyüklüklerin üstüne tilda (\sim) simgesi ekleyelim. Taban hal bazında uyarılmış seviyelerin $|i\rangle = Q_i^+ |0\rangle$ dalga fonksiyonlarının tam set oluşturdukları da göz önüne alınarak (3.1.1) toplam kuralının farklı biçimler için genelleştirilmiş ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$S(\delta_i, \delta_k) = \sum_{k>0} \omega_k \left| \sum_{i>0} M_i \langle i | k \rangle \right|^2 \quad (3.1.2)$$

$$\langle i | k \rangle = (X_\mu^i X_\mu^k - Y_\mu^i Y_\mu^k) \quad (3.1.3)$$

Burada δ_i ve δ_k sırasıyla taban ve uyarılmış hallerin biçimini karakterize eden kuadropol deformasyon parametreleridir.

Küresel çekirdeklerde toplam kuralları başarılı bir şekilde hesaplanmaktadır. Fakat deforme çekirdeklerde çekirdek seviyelerinin yüksek yoğunluğa sahip olması ω_i özdeğerlerinin (2.6.12) denkleminden sayısal olarak bulunmasını oldukça güçleştirir. Bundan dolayı M_i geçiş matris elemanlarının ve bunlara karşılık gelen toplam kurallarının hesaplanmasında çok büyük hatalar oluşabilir. Bu bakımdan bu problemin çözüm yolları çalışma [20] de verilmiş ve beta geçiş matris elemanlarının matematiksel özelliklerinden yararlanarak çift beta bozunum toplam kuralı analitik olarak hesaplanmıştır. Daha sonra çalışma [20] de geliştirilmiş metot [21] de elektrik ve manyetik dipol geçişlerine başarıyla uygulanmıştır. Biz bu çalışmada [20] de ileri sürülen metodu farklı biçime sahip geçişler için genelleştirdiğimiz (2.6.14) toplam kuralına uygulayarak hesaplayacağız.

Bu bölümdeki (2.6.12)-(2.6.17) formüllerinden yararlanarak (3.1.2) toplam kuralı için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$S = \frac{3}{16\pi} \sum_{\mu\nu} d_\mu d_\nu \cdot \Omega_{\mu\nu} \quad (3.1.4)$$

Burada, i ve k köklerine göre toplamlar (2.6.12) denkleminin tüm pozitif ve negatif kuvvetlerini ihtiva etmek üzere,

$$d_\mu = \sum_i M_i w_\mu^i = 2\chi\sigma_\mu L_\mu \sum_i \frac{\omega_i}{(E_\mu^2 - \omega_i^2)} \frac{F(\omega_i)}{D'(\omega_i)} \quad (3.1.5)$$

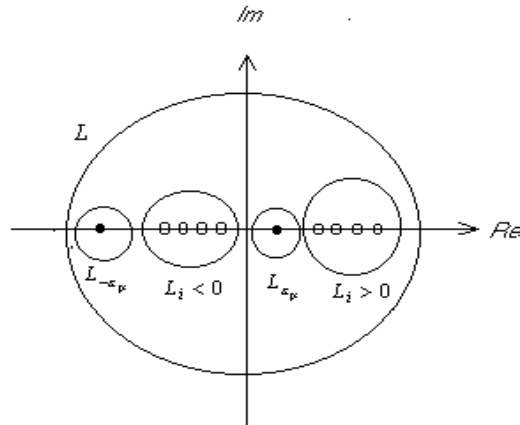
$$\Omega_{\mu\nu} = \sum_k \omega_k g_\mu^k g_\nu^k \quad (3.1.6)$$

$$g_\mu = X_\mu + Y_\mu, \quad w_\mu = X_\mu - Y_\mu$$

dir. Rezidü teorisinin esas teoremine göre [22], (3.1.5) toplamını kontur integral şeklinde aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$d_\mu = 2\chi\sigma_\mu L_\mu \sum_i \oint_{L_i} \frac{zF(z)}{(E_\mu^2 - z^2)D(z)} dz \quad (3.1.7)$$

Kompleks düzlemde integralleme kontürü Şekil 1.'de gösterilmiştir.



Şekil 1. (3.1.7) denklemini için z-Kompleks Düzlemi

İntegral altı fonksiyonun tüm kompleks düzlemde incelenmesi sonucu, $D(\omega_i) = 0$ kutuplarından başka ayrıca $z = \mp \varepsilon_\mu$ noktalarında da basit kutuplara sahip olduğu görülür. Buradan Cauchy teoremine göre

$$d_\mu = -\oint_{L_\mu} \frac{zF(z)}{(E_\mu^2 - z^2)D(z)} dz = 2\sigma_\mu L_\mu \quad (3.1.8)$$

bulunur. Uzun ve yorucu hesaplamalar sonucu, kompleks düzlemdeki incelemeler $\Omega_{\mu \neq \nu} = 0$ olduğunu gösterdiğinden (3.1.7) formülü için

$$\Omega_{\mu\nu} = 2\tilde{E}_\mu \delta_{\mu\nu} \quad (3.1.9)$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç olarak (3.1.4), (3.1.8) ve (3.1.9) formüllerinden yararlanarak (3.1.2) toplam kuralının genelleştirilmiş ifadesi için aşağıdaki çok basit formül elde edilir:

$$S(\delta_i, \delta_k) = \frac{3}{2\pi} \sum_{\mu, \tau} \tilde{E}_\mu^\tau [(g_s^\tau - g_l^\tau) s_\mu^\tau - g_e^\tau j_\mu^\tau]^2 \quad (3.1.10)$$

Burada s_μ^τ , spin operatörünün taban baz halindeki tek parçacık matris elemanları, \tilde{E}_μ ise uyarılmış seviyelerin biçimine karşılık gelen farklı bazda hesaplanmış iki kuaziparçacık enerjileridir. Buna göre (3.1.10) formülü, $\delta_i = \delta_k$ olması durumunda manyetik dipol geçişleri için bilinen toplam kuralı ifadesine dönüşür [19]. Spin geçişleri için uygun toplam kuralı şu şekildedir:

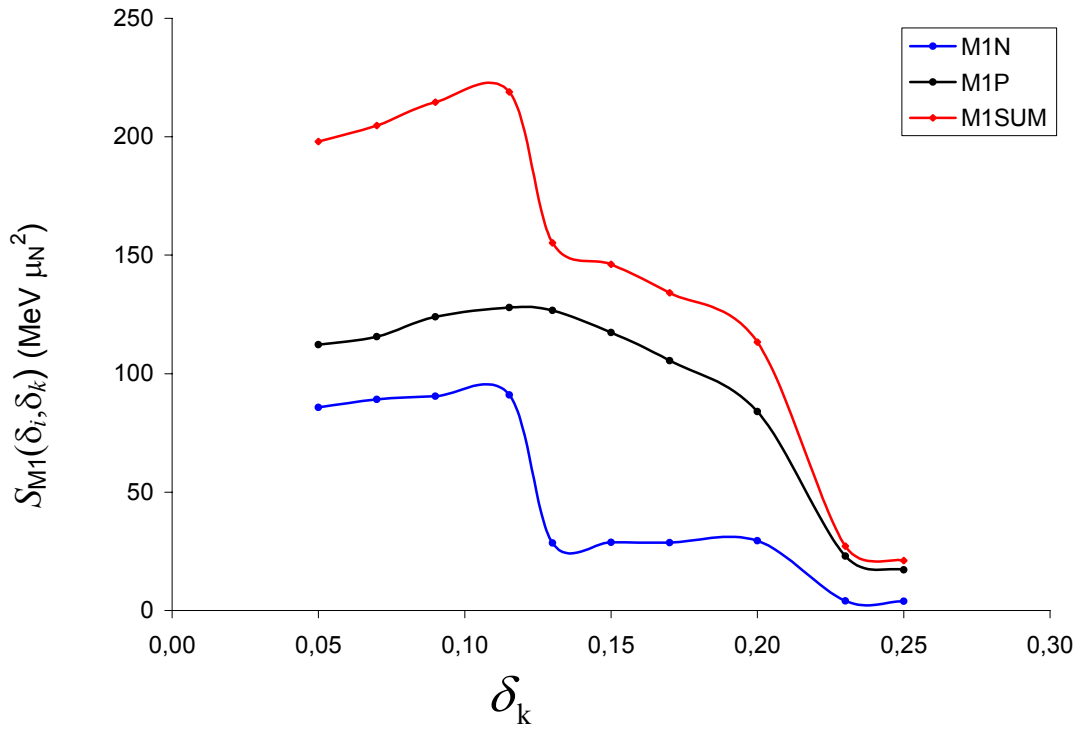
$$S_\sigma(\delta_i, \delta_k) = 2 \sum_{\mu, \tau} \tilde{E}_\mu^\tau \sigma_\mu^{\tau 2} L_\mu^{\tau 2} \quad (3.1.11)$$

3.1. Sayısal sonuçlar

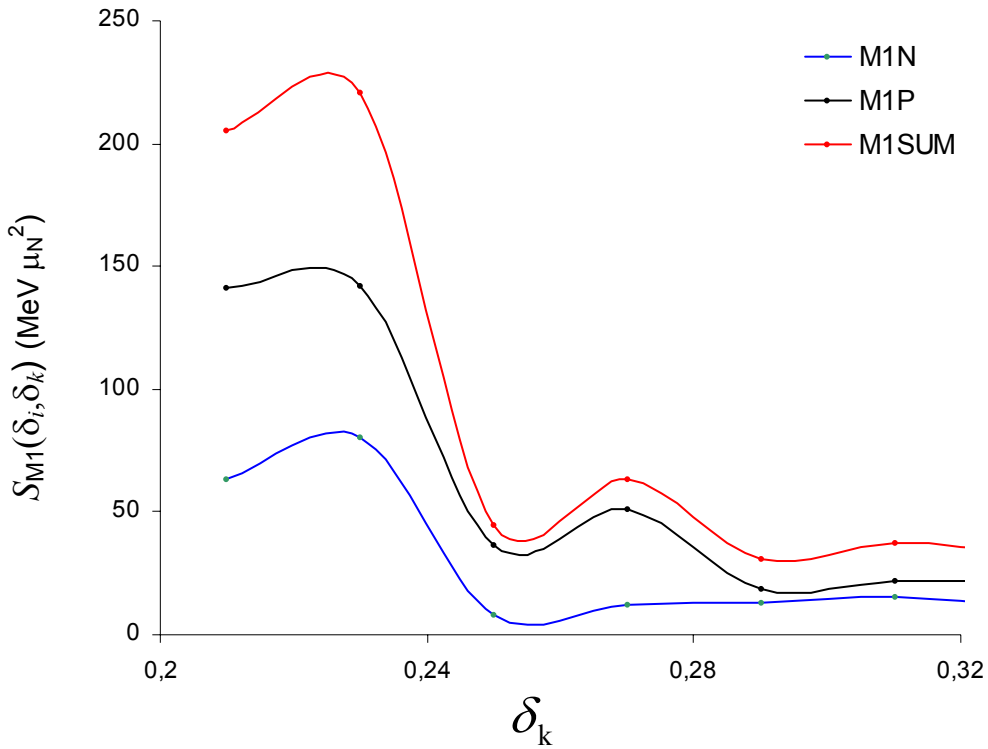
Manyetik dipol geçişlerinin enerji ağırlıklı toplam kuralı (EWSR), taban halden farklı biçime sahip seviyeler için genelleştirilmiştir. Çekirdek geçiş matris elemanlarının analitik özelliklerinden yararlanarak, rezidü teoremi ve kontur integralları yardımıyla manyetik dipol geçişlerinin enerji ağırlıklı toplam kurallarının deformasyon bağımlılığını içeren analitik bağıntılar elde edilmiştir. Manyetik dipol geçiş matris elemanlarının toplam kurallarının sayısal değerlerinin azalmasında çekirdek biçiminin önemini belirlemek amacıyla geçiş ve deforme bölgede yerleşen çekirdekler irdelenmiştir. Bu bölümde elde edilmiş analitik bağıntıların yardımıyla ^{150}Ce ve ^{196}Pt çekirdeklerinde M1 geçiş matris elemanlarının enerji ağırlıklı toplam kurallarının, uyarılmış seviyelerinin deformasyon parametresine bağlı olarak değişimi sayısal (nümerik) olarak incelenmiştir.

Sayısal hesaplamalar deformasyon parametresinin geniş bir aralığında ^{150}Ce ve ^{196}Pt çekirdekleri için deforme Woods-Saxon potansiyelinde yapılmıştır [23]. Bu tez çalışmasında yukarıda bahsedilen deneysel ve teorik sonuçlara ^{150}Ce ve ^{196}Pt izotoplarının taban hal kuadropol deformasyon parametreleri için $\delta_i = 0.236$ ve $\delta_i = 0.1152$ deneysel değerleri [24] kullanılmıştır. Uyarılmış seviyelerin deformasyon parametreleri ^{150}Ce için 0.20 ve 0.32 aralığında ve ^{196}Pt çekirdeği için ise 0.05 ve 0.25 aralığında değiştirilerek incelemeler yapılmıştır. Enerji ağırlıklı toplam kuralının sayısal sonuçları, farklı biçime sahip seviyeler arasındaki M1 geçiş ihtimallerinin deneysel verilere uygun olarak keskin bir biçimde azaldığını göstermiştir.

M1 geçişlerinin (3.1.10) toplam kuralının uyarılmış seviyelerin deformasyon parametresine bağımlılığı ^{150}Ce ve ^{196}Pt çekirdeklerinde sırasıyla Şekil 2. ve Şekil 3.' de gösterilmiştir. Eğrilerdeki maksimum değerler taban hal deformasyonuna karşılık gelmektedir ($\delta_k = \delta_i$).



Şekil 2. ^{196}Pt çekirdeğinde 1^+ seviyelerin taban halden M1 uyarılmaları enerji ağırlıklı toplam kuralının $S_{M1}(\delta_i, \delta_k)$ deformasyon bağımlılıkları.



Şekil 3. ^{150}Ce çekirdeğinde 1^+ seviyelerin taban halden M1 uyarılmaları enerji ağırlıklı toplam kuralının $S_{M1}(\delta_i, \delta_k)$ deformasyon bağımlılıkları.

Şekillerden görüldüğü gibi, uyarılmış seviyelerin deformasyonu arttıkça, $S_{M1}(\delta_i, \delta_k)$ (kırmızı çizgi) yavaşça artarak $\delta_k = \delta_i$ değerinde maksimum olmakta ve taban halin deformasyonundan büyük değerlerde ise $S_{\sigma}(\delta_i, \delta_k)$ ' in değerleri keskin olarak azalmaya başlamaktadır. Toplam kuralının nötron (mavi çizgi) ve proton (siyah çizgi) kısımlarının da benzer davranış sergilediği yine şekilden görülmektedir. Şekil 2.' den görüldüğü gibi toplam kuralının deneysel verilerini [7] açıklayabilmek için uyarılmış seviyelerin deformasyon parametresi $\delta_k \cong 0.16$ civarında olmalıdır.

Sonuç olarak manyetik dipol geçişlerinin bilinen enerji ağırlıklı toplam kuralı, taban halin biçiminden farklı biçime sahip seviyelere geçişler için genelleştirildi ve daha sonra kontur integraller ve rezidü teorisi yardımıyla, bu toplam kuralları için analitik ifadeler elde edildi. Elde edilen analitik ifadeler için fortran dilinde program yazılarak nümerik hesaplamalar yapıldı. Sayısal hesaplamalar, manyetik dipol geçiş operatörü örneğinde, enerji ağırlıklı toplam kuralının sayısal değerinin çekirdek biçiminin değişmesiyle keskin olarak azaldığını gösterdi. Deneysel veriler kararlı biçime sahip olan küresel ve iyi deforme çekirdeklerle kıyaslandığında, geçiş çekirdeklerinde manyetik dipol geçişlerin çok zayıf olduğunu göstermektedir. Geçiş çekirdekleri biçim değişikliğine karşı çok hassaslardır ve bu çekirdekler uyarılma zamanlarında kolaylıkla biçim değiştirebilirler. Bu çekirdeklerde M1 geçişlerinin neden zayıf olduğunu elde ettiğimiz sonuçlar açıklığa kavuşturmuştur.

EKLER

EK A. ENERJİ AĞIRLIKLIL TOPLAM KURALININ (EWSR) RPA ' DA ANALİTİK HESABI

$$\psi_{\mu}^i = \frac{\sigma_{\mu}}{\varepsilon_{\mu} - w_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y(w_i)}}$$

$$\phi_{\mu}^i = \frac{\sigma_{\mu}}{\varepsilon_{\mu} + w_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y(w_i)}}$$

ve RPA'da

$$g_{\mu}^i = \psi_{\mu}^i + \phi_{\mu}^i$$

$$W_{\mu}^i = \psi_{\mu}^i - \phi_{\mu}^i$$

olduğundan,

$$\psi_{\mu}^i = \frac{1}{2} \sum_{\mu} (g_{\mu}^i + w_{\mu}^i)$$

$$\phi_{\mu}^i = \frac{1}{2} \sum_{\mu} (g_{\mu}^i - w_{\mu}^i) \quad (1)$$

Bunları M_k yı bulmak için kullanırsak,

$$M_k = \sum_i M_i \langle 0 | [Q_k, Q_i^+] | 0 \rangle$$

$$= \sum_i M_i \left\{ \sum_{\mu} (\psi_{\mu}^i \psi_{\mu}^k - \phi_{\mu}^i \phi_{\mu}^k) \right\}$$

Olur ve dolayısıyla (1) den ,

$$M_k = \frac{1}{2} \sum_{\mu} b_{\mu} w_{\mu}^k + \frac{1}{2} \sum_{\mu} d_{\mu} g_{\mu}^k \quad (2)$$

olur. Şimdi $b_{\mu} = \sum_i M_i g_{\mu}^i$ toplamını inceleyelim.

$$\begin{aligned} b_{\mu} &= \sum_i M_i g_{\mu}^i \\ &= \sum_i \frac{F(w_i)}{\sqrt{Y(w_i)}} \cdot \frac{2\varepsilon_{\mu} \sigma_{\mu}}{(\varepsilon_{\mu}^2 - w_i)^2 \sqrt{Y(w_i)}} \\ b_{\mu} &= \sum_i \frac{2\varepsilon_{\mu} \sigma_{\mu} F(w_i)}{(\varepsilon_{\mu}^2 - w_i^2) Y(w_i)} \end{aligned} \quad (3)$$

RPA ' da

$$F(w_i) = \sum_i \sigma_{\mu}^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{\mu} - w_i} + \frac{1}{\varepsilon_{\mu} + w_i} \right) = \sum_i \frac{2\varepsilon_{\mu} \sigma_{\mu}^2}{\varepsilon_{\mu}^2 - w_i^2} \quad (4)$$

ve

$$Y(w_i) = \sum_i \sigma_{\mu}^2 \left(\frac{1}{(\varepsilon_{\mu} - w_i)^2} + \frac{1}{(\varepsilon_{\mu} + w_i)^2} \right) = \sum_i w_i \cdot \frac{4\varepsilon_{\mu} \sigma_{\mu}^2}{(\varepsilon_{\mu}^2 - w_i^2)^2} \quad (5)$$

dir ve buna göre $D(w_i) = 1 + \wp F(w_i)$ olduğundan , (6)

$$Y(w_i) = \frac{D'(w_i)}{\wp} \quad (7)$$

eşitliği mevcuttur. Buradan (3) ifadesinde (7) kullanılırsa,

$$b_{\mu} = \sum_i \frac{\wp 2\varepsilon_{\mu} \sigma_{\mu} F(w_i)}{(\varepsilon_{\mu}^2 - w_i^2) D'(w_i)} \quad (8)$$

olur. (6) ya bakıldığında, w_i lerin $D(w_i)$ fonksiyonunun birinci dereceden ayrık singüler noktaları ve basit kutupları olduğu görülür. Madem ki w_i ler $D(w_i)$ nin kapalı bir ℓ_i bölgesindeki basit kutuplarıdır ve ayrıca (8) ifadesi de basit kutuplar için rezidü teoreminin uygulanmış halidir, o halde (8) ifadesi kontur integral biçiminde yazılabilir.

Buna göre (8) ifadesi,

$$b_\mu = 2\wp \varepsilon_\mu \sigma_\mu = \sum_i \oint_{\ell_i} \frac{F(z)dz}{(\varepsilon_\mu^2 - z^2)D(z)} \quad (9)$$

şekilinde kontur integral biçiminde yazılabilir. (9) a baktığımızda ℓ_i kontur bölgesinde

$$f(z) = \frac{F(z)}{(\varepsilon_\mu^2 - z^2)D(z)}$$

fonksiyonunun başka kutuplara da sahip olduğu görülür. Buna göre $z = \mp \varepsilon_\mu$ noktaları $D(z)$ fonksiyonunu sonsuzluğa götürdüğünden,

$$D(z) = 1 + \wp.F(z)$$

fonksiyonundaki 1 değeri sonsuzluğun yanında çok küçük kalacağından ihmal edilebilir ve buradan (9) ifadesi

$$b_\mu^{\mp \varepsilon_\mu} = 2\wp \varepsilon_\mu \sigma_\mu \sum_i \oint_{\ell^{\mp \varepsilon_\mu}} \frac{2\varepsilon_\mu \sigma_\mu^2}{\varepsilon_\mu^2 - z^2} \cdot \frac{1}{(\varepsilon_\mu^2 - z^2) \left[\sum_i \frac{2\varepsilon_\mu \sigma_\mu^2}{\varepsilon_\mu^2 - z^2} \right]}$$

$$b_\mu^{\mp \varepsilon_\mu} = 2\wp \varepsilon_\mu \sigma_\mu \sum_i \oint_{\ell^{\mp \varepsilon_\mu}} \frac{dz}{(\varepsilon_\mu - z)(\varepsilon_\mu + z)} \quad (10)$$

halini alacağından $z = \mp \varepsilon_\mu$ noktaları $f(z)$ nin basit kutuplarıdır. z nin büyük değerleri için $f(z)$,

$$|f(z)| \leq \frac{1}{z^4}$$

şeklinde olacağından ℓ_i bölgesinde düzgün yakınsak ve düzgün yakınsak bir fonksiyon aynı bölgede analitik olur burdan Cauchy teoremine göre , rezidülerin toplamı sıfır olacağından

$$\sum_{i=\bar{1},\bar{2},\dots} \frac{2\wp \varepsilon_\mu \sigma_\mu F(w_i)}{(\varepsilon_\mu^2 - w_i^2)D'(w_i)} + \sum_\mu \operatorname{Re} z(f, -\varepsilon_\mu) = 0 \quad (11)$$

eşitliği yazılabilir. O halde $z = \bar{\varepsilon}_\mu$ basit kutuplarındaki rezidüleri hesaplanır ve (11) de yerine yazılırsa b_μ değerini analitik olarak hesaplamış oluruz.

Buna göre (10) dan ,

$$\begin{aligned} b_\mu^{\bar{\varepsilon}_\mu} &= 2\wp \varepsilon_\mu \sigma_\mu \sum_i [\operatorname{Re} z(f, \varepsilon_\mu) + \operatorname{Re} z(f, -\varepsilon_\mu)] \\ &= 2\wp \varepsilon_\mu \sigma_\mu \sum_i \left[\lim_{z \rightarrow \varepsilon_\mu} \frac{(z + \varepsilon_\mu)}{(\varepsilon_\mu - z)(\varepsilon_\mu + z)} + \lim_{z \rightarrow -\varepsilon_\mu} \frac{(z + \varepsilon_\mu)}{(\varepsilon_\mu - z)(\varepsilon_\mu + z)} \right] \\ &= 2\wp \varepsilon_\mu \sigma_\mu \sum_i \left[\frac{-1}{2\varepsilon_\mu} + \frac{1}{2\varepsilon_\mu} \right] \end{aligned}$$

$$b_\mu^{\bar{\varepsilon}_\mu} = 0$$

olacağından (11) den ,

$$b_\mu = 0 \quad (12)$$

bulunur.

Şimdi de,

$$d_\mu = \sum_i M_i w_\mu^i$$

toplamını inceleyelim;

$$d_\mu = \sum_i \frac{F(w_i)}{\sqrt{Y(w_i)}} \cdot \frac{2\sigma_\mu w_i}{(\varepsilon_\mu^2 - w_i^2)\sqrt{Y(w_i)}}$$

$$d_\mu = 2\wp \sigma_\mu \sum_i \frac{w_i \cdot F(w_i)}{(\varepsilon_\mu^2 - w_i^2)Y(w_i)} \quad (13)$$

(13) ve (7) kullanılırsa,

$$d_\mu = 2\wp \sigma_\mu \sum_i \frac{w_i \cdot F(w_i)}{(\varepsilon_\mu^2 - w_i^2)D'(w_i)} \quad (14)$$

olur. w_i ler $D(w_i)$ nin birinci derecen ayrık singüler noktaları ve basit kutupları olduğundan (14) ü kontür integral biçiminde yazabiliriz.

$$d_\mu = 2\wp \sigma_\mu \sum_i \oint_{\ell'_i} \frac{z \cdot F(z)}{(\varepsilon_\mu^2 - z^2)D(z)} dz \quad (15)$$

(15) ifadesine bakıldığında,

$$y(z) = \frac{z \cdot F(z)}{(\varepsilon_\mu^2 - z^2)D(z)}$$

fonksiyonunun başka kutuplara da sahip olduğu görülür. Bunu göre $z = \mp \varepsilon_\mu$ noktaları için (15) ifadesi

$$d_\mu^{\mp \varepsilon_\mu} = 2\wp \sigma_\mu \oint_{\ell'_i} \frac{z \cdot 2\varepsilon_\mu \sigma_\mu^2}{(\varepsilon_\mu^2 - z^2)^2} \cdot \frac{\varepsilon_\mu^2 - z^2}{2\varepsilon_\mu \sigma_\mu^2} dz$$

$$d_\mu^{\mp \varepsilon_\mu} = 2\sigma_\mu \sum_i \oint_{\ell'_i} \frac{z}{(\varepsilon_\mu - z)(\varepsilon_\mu + z)} dz \quad (16)$$

şeklinde olacağından $z = \mp \varepsilon_\mu$ noktaları ℓ'_i kapalı bölgesinin diğer kutuplarıdır. z nin büyük değerleri için $y(z)$ fonksiyonu

$$|y(z)| < \frac{1}{z^3}$$

şeklinde olacağından ℓ'_i bölgesinde yakınsak ve dolayısıyla analitik olduğundan Cauchy teoremin e göre ,

$$\sum_i \frac{2\sigma_\mu w_i F(w_i)}{(\varepsilon_\mu^2 - w_i^2) D'(w_i)} + \sum_\mu \operatorname{Re} z(y, \varepsilon_\mu) + \sum_\mu \operatorname{Re} z(y, -\varepsilon_\mu) = 0 \quad (17)$$

yazılabilir. Buna göre $z = \mp \varepsilon_\mu$ noktalarındaki rezidüleri (16) dan hesaplanır ve bu değerleri (17) de yerine yazarsak d_μ değerini analitik olarak hesaplamış oluruz.

O halde (16) dan

$$\begin{aligned} d_\mu^{\mp \varepsilon_\mu} &= 2\sigma_\mu \left[\operatorname{Re} z(f, \varepsilon_\mu) + \operatorname{Re} z(f, -\varepsilon_\mu) \right] \\ &= 2\sigma_\mu \left[\frac{z}{-2z} \Big|_{\varepsilon_\mu} + \frac{z}{-2z} \Big|_{-\varepsilon_\mu} \right] \\ &= 2\sigma_\mu \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

$$d_\mu^{\mp \varepsilon_\mu} = 2\sigma_\mu \quad (18)$$

olur ve (18) yi (17) de yerine yazarsak,

$$d_\mu = 2\sigma_\mu \quad (19)$$

bulunur.

O halde (12) ve (19) u (2) de yerine yazarsak,

$$M_k = \frac{1}{2} \sum_\mu b_\mu w_\mu^k + \frac{1}{2} \sum_\mu d_\mu g_\mu^k$$

$$M_k = 0 + \frac{1}{2} \sum_{\mu} 2\sigma_{\mu} g_{\mu}^k$$

$$M_k = \sum_{\mu} \sigma_{\mu} g_{\mu}^k$$

bulunur.

EK B. ENERJİ AĞIRLIKLİ TOPLAM KURALININ TDA ANALİTİK HESABI

$|0\rangle$, çok parçacıklı sistemin taban durumu fonksiyonu ve $|i\rangle$ ve $\langle\kappa|$ ise uyarılmış durumun dalga fonksiyonunu göstermek üzere, Tamm Dankof metotta

$$\begin{aligned} |i\rangle &= Q_i^+ |0\rangle \\ \langle i| &= \langle 0| Q_i \end{aligned} \quad (1)$$

ve doğurma ve yok etme operatörleri de sırasıyla

$$\begin{aligned} Q_i^+ &= \sum_{\mu} \Psi_{\mu}^i c_{\mu}^+ \\ Q_i &= \sum_{\mu} c_{\mu} \Psi_{\mu}^i \end{aligned}$$

şeklindedir. M_{κ} , sistemin taban durumundan uyarılmış duruma geçiş matrisi olmak üzere, enerji ağırlıklı

$$S = \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} |M_{\kappa}|^2$$

indirgenmiş geçiş ihtimalini bulalım:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} |\langle 0| M | \kappa \rangle|^2 \\ S &= \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \left| \langle 0| M \sum_i |i\rangle \langle i| \kappa \rangle \right|^2 \quad (\text{sistemimiz tamset}) \\ S &= \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \left| \sum_i M_i \langle i| \kappa \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

(1) den faydalanırsak,

$$S = \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \left| \sum_i M_i \langle 0 | Q_i Q_{\kappa}^+ | 0 \rangle \right|^2$$

olur. $Q_i |0\rangle = 0$ olduğundan ifademizi şu şekilde yazabiliriz.

$$S = \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \left| \sum_i M_i \langle 0 | Q_i Q_{\kappa}^+ - Q_i Q_{\kappa}^+ | 0 \rangle \right|^2$$

$$S = \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \left| \sum_i M_i \langle 0 | [Q_i, Q_{\kappa}^+] | 0 \rangle \right|^2 \quad (2)$$

Şimdi $[Q_i, Q_{\kappa}^+]$ komütatörünü hesaplayıp tekrar (2) de yerine yazalım:

$$\begin{aligned} [Q_i, Q_{\kappa}^+] &= Q_i Q_{\kappa}^+ - Q_{\kappa}^+ Q_i \\ &= \sum_{\mu} c_{\mu} \Psi_{\mu}^i c_{\mu}^+ - \sum_{\mu} \Psi_{\mu}^{\kappa} c_{\mu}^+ c_{\mu} \Psi_{\mu}^i \\ &= \sum_{\mu} \Psi_{\mu}^i \Psi_{\mu}^{\kappa} (c_{\mu} c_{\mu}^+ - c_{\mu}^+ c_{\mu}) \\ &= \sum_{\mu} \Psi_{\mu}^i \Psi_{\mu}^{\kappa} [c_{\mu}, c_{\mu}^+] \end{aligned}$$

olur. $[c_{\mu}, c_{\mu}^+] = \delta_{\mu\mu} = 1$ olduğundan

$$[Q_i, Q_{\kappa}^+] = \sum_{\mu} \Psi_{\mu}^i \Psi_{\mu}^{\kappa}$$

Bunu (2) de yerine yazarsak:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \left| \sum_i \mu_i \sum_{\mu} \Psi_{\mu}^i \Psi_{\mu}^{\kappa} \right|^2 \\
S &= \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \left| \sum_i \mu_i \Psi_{\mu}^{\kappa} \sum_{\mu} \Psi_{\mu}^{\kappa} \right|^2, \left\{ b_{\mu} = \sum_i \mu_i \Psi_{\mu}^i \right\} \text{ denirse} \\
S &= \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \left| b_{\mu} \sum_{\mu} \Psi_{\mu}^{\kappa} \right| \left| b_{\nu} \sum_{\nu} \Psi_{\nu}^{\kappa} \right| \\
S &= \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \left| \sum_{\mu\nu} b_{\mu} b_{\nu} \Psi_{\mu}^{\kappa} \Psi_{\nu}^{\kappa} \right| \\
S &= \sum_{\mu\nu} b_{\mu} b_{\nu} \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \Psi_{\mu}^{\kappa} \Psi_{\nu}^{\kappa}
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi bu S değerini hesaplayalım: TDA metotta,

$$\begin{aligned}
D &= 1 + \chi F(\omega_i) \\
F(\omega_i) &= \sum_i \frac{\sigma \mu^2}{\varepsilon_{\mu} - \omega_i} \\
Y(\omega_i) &= \sum_i \frac{\sigma_{\mu}^2}{(\varepsilon_{\mu} - \omega_i)^2} \\
\mu_i &= \frac{F(\omega_i)}{\sqrt{Y(\omega_i)}} \\
\Psi_{\mu}^i &= \frac{\sigma_{\mu}}{(\varepsilon_{\mu} - \omega_i)} \cdot \frac{1}{\sqrt{Y(\omega_i)}}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$b_{\mu} \sum_i \mu_i \Psi_{\mu}^i$$

değerini hesaplayalım:

$$b_{\mu} = \sum_{i>0} \frac{\sigma_{\mu} F(\omega_i)}{(\varepsilon_{\mu} - \omega_i) Y(\omega_i)}$$

Bunu rezidü teoremi ve toplam kurallarından yararlanarak hesaplayalım.

$$\mathfrak{D}(\omega_i) = 1 + \chi F(\omega_i) = 1 + \chi \sum_i \frac{\sigma_\mu^2}{\varepsilon_\mu - \omega_i}$$

$$\mathfrak{D}'(\omega_i) = \sum \chi \frac{\sigma_\mu^2}{(\varepsilon_\mu - \omega_i)^2}$$

olduğundan

$$\mathfrak{D}'(\omega_i) = \chi Y(\omega_i) \quad (3)$$

eşitliğini elde ederiz. Buna göre

$$b_\mu = \chi \sigma_\mu \sum_{i>0} \frac{F(\omega_i)}{(\varepsilon_\mu - \omega_i) \mathfrak{D}'(\omega_i)} \quad (4)$$

olur. ω_i ler $\mathfrak{D}(\omega_i)$ nin birinci mertebeden sıfır yerleridir. Kompleks fonksiyonlar teorisinden bilindiği gibi, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ şeklinde bir fonksiyon için, $g(z)$ ve $h(z)$, z_0 noktasında analitik iki fonksiyon ve $g(z_0) \neq 0$, $h'(z_0) \neq 0$ ve $h(z_0) = 0$ olduğunda $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında birinci mertebeden kutba sahiptir ve bu noktadaki rezidüsü,

$$\text{Rez}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

şeklinindedir. Buna göre (6) da, ω_i ler $\mathfrak{D}(\omega_i)$ nin birinci dereceden sıfır yerleri olduğundan basit kutuplardır ve rezidü teoremine göre (6) yı kontur integral şeklinde yazabiliriz. O halde

$$b_\mu \approx \chi \sigma_\mu \sum_i \oint_{L_i} \frac{F(z)}{(\varepsilon_\mu - z) \mathfrak{D}(z)} dz$$

olur. $T = \oint_{L_i} \frac{F(z)}{(\varepsilon_\mu - z)\mathcal{D}(z)} dz$ kontur integralinin kutuplarını inceleyelim. $z = \varepsilon_\mu$

noktaları basit kutuplardır. $z = \infty$ noktası

$$T = \oint_{L_i} \frac{\sum \frac{\sigma_\mu^2}{\varepsilon_\mu - z}}{(\varepsilon_\mu - z) \left[1 + \chi \sum \frac{\sigma_\mu^2}{\varepsilon_\mu - z} \right]}$$

$$T \cong \oint_{L_i} \frac{dz}{z^2}$$

şeklinde olacağından, kutup noktası değildir. Ayrıca z nin çok büyük değerleri için

$$G = \sum \frac{F(z)}{(\varepsilon_\mu - z)\mathcal{D}(z)}$$

fonksiyonu

$$G \cong \sum \frac{1}{z^2}$$

şeklinde olur ve G serisi Weierstrass-M kriterine göre mutlak yakınsak ve düzgün yakınsak bir seri de L_i bölgesinde analitik olacağından. Cauchy Teoremine göre

$$T = \oint \frac{F(z)}{(\varepsilon_\mu - z)\mathcal{D}(z)} = 0$$

olacaktır. O halde

$$\sum \frac{F(\omega_i)}{(\varepsilon_\mu^2 - \omega_i^2)\mathcal{D}'(\omega_i)} + \text{Rez}(f, +\varepsilon_\mu) = 0 \quad (5)$$

yazabiliriz. Buna göre $z = \varepsilon_\mu$ basit kutup için rezidüyü hesaplırsak b_μ değerini hesaplamış oluruz.

$$\begin{aligned} & \square \chi \sigma_\mu^3 \oint_{L_i} \frac{dz}{(\varepsilon_\mu - z)^2 \left[1 + \chi \sum \frac{\sigma_\mu^2}{\varepsilon_\mu - z} \right]} \\ & \approx \chi \sigma_\mu^3 \frac{1}{\chi \sigma_\mu^2} \oint_{L_i} \frac{dz}{\varepsilon_\mu - z} \end{aligned}$$

$z = \varepsilon_\mu$ için rezidü alınırsa,

$$\text{Rez}(f, +\varepsilon_\mu) = \lim_{z \rightarrow \varepsilon_\mu} (z - \varepsilon_\mu) \frac{1}{(\varepsilon_\mu - z)} = -1$$

olur. O halde

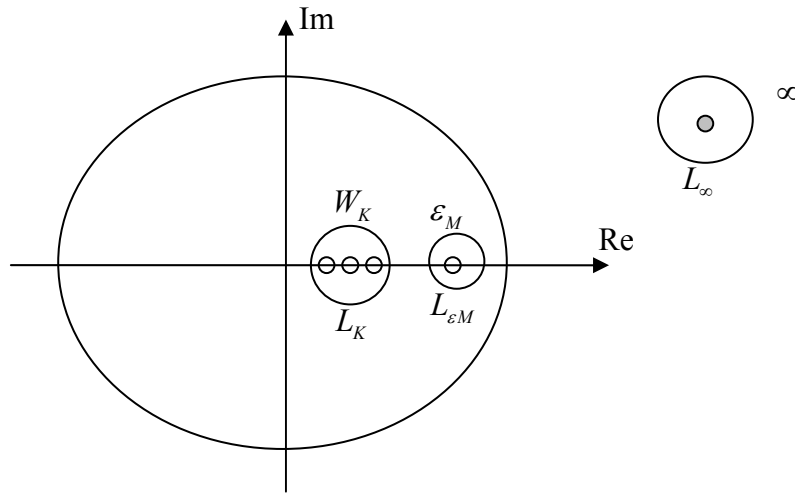
$$\Rightarrow \sigma_\mu(-1) = -\sigma_\mu$$

bulunur ve bu değeri (5) de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} b_\mu &= \sum_{i>0} \frac{\varepsilon_\mu F(\omega_i)}{(\varepsilon_\mu - \omega_i) Y(\omega_i)} = \sigma_\mu \\ b_\nu &= \sum_{i>0} \frac{\sigma_\nu F(\omega_i)}{(\varepsilon_\nu - \omega_i) Y(\omega_i)} = \sigma_\nu \end{aligned} \tag{6}$$

sonucunu bulmuş oluruz.

$$\oint_L = \oint_{L_i} + \int_{L_{\varepsilon_\mu}} = 0$$



Şimdi $\Omega_{\mu\nu} = \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \Psi_{\mu}^{\kappa} \Psi_{\nu}^{\kappa} \delta_{\mu=\nu}$ toplamını inceleyelim . İlk olarak $\mu = \nu$ durumunu ele alalım.

$$\Omega_{\mu\nu} = \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \frac{\tilde{\sigma}_{\mu}^2}{(\tilde{\epsilon}_{\mu} - \omega_{\kappa})} \delta_{\mu=\nu}$$

(3) ü burada yerine yazarsak,

$$\Omega_{\mu\nu} = \sum_{\kappa} \chi \omega_{\kappa} \frac{\tilde{\sigma}_{\mu}^2}{(\tilde{\epsilon}_{\mu} - \omega_{\kappa})^2 \mathbf{D}'(\omega_{\kappa})} \delta_{\mu=\nu}$$

olur. ω_{κ} ler $\mathbf{D}(\omega_{\kappa})$ nin basit kutupları olduğundan rezidü teoreminden bu toplamı kontur integral şeklinde yazabiliriz. Buna göre

$$\Omega_{\mu\nu} \cong \chi \tilde{\sigma}_{\mu}^2 \oint_{L_{\kappa}} \frac{z dz}{(\tilde{\epsilon}_{\mu} - z)^2 \mathbf{D}(z)} \delta_{\mu=\nu}$$

olur.

$$R = \oint_{L_\kappa} \frac{zdz}{(\tilde{\varepsilon}_\mu - z)^2 D(z)} \delta_{\mu=\nu}$$

fonksiyonunun kutup noktalarını araştıralım. $z = \varepsilon_\mu$ noktası basit kutuptur. Ayrıca z nin büyük değerleri için R ,

$$R = \int_{L_\kappa} \frac{dz}{z}$$

şeklinde olacağından $z = \infty$ noktası kutup noktasıdır. Rezidü teoremine göre, rezidülerin toplamı sıfır olacağından,

$$\sum_\kappa \frac{\omega_\kappa \tilde{\sigma}_\mu^2}{(\tilde{\varepsilon}_\mu - \omega_\kappa)^2 D'(\omega_\kappa)} + \text{Rez}(f, \tilde{\varepsilon}_\mu) + \text{Rez}(f, \infty) = 0 \quad (7)$$

eşitliği vardır. O halde $z = \varepsilon_\mu$ ve $z = \infty$ noktalarındaki rezidüleri hesaplar ve (7) de yerine koyarsak, $\mu = \nu$ için $\Omega_{\mu\nu}$ fonksiyonunu hesaplamış oluruz.

$z = \varepsilon_\mu$ noktası için

$$\square \chi \tilde{\sigma}_\mu^2 \int_{L_\kappa} \frac{zdz}{(\tilde{\varepsilon}_\mu - z)^2 \left[1 + \chi \sum \frac{\tilde{\sigma}_\mu^2}{\tilde{\varepsilon}_\mu - z} \right]} \delta_{\mu=\nu}$$

$$\square \chi \tilde{\sigma}_\mu^2 \frac{1}{\chi \tilde{\sigma}_\mu^2} \int_{L_\kappa} \frac{zdz}{(\tilde{\varepsilon}_\mu - z)} \delta_{\mu=\nu}$$

$$\square \text{Rez}(f, \varepsilon_\mu)$$

$$\square \lim_{z \rightarrow \tilde{\varepsilon}_\mu} (z - \varepsilon_\mu) \frac{z}{(\varepsilon_\mu - z)}$$

$$\square -\tilde{\varepsilon}_\mu \delta_{\mu=\nu} \quad (8)$$

olur. Şimdi $z = \infty$ için,

$$\begin{aligned}
& \square \chi \tilde{\sigma}_\mu^2 \oint_{L_\kappa} \frac{z dz}{(\tilde{\varepsilon}_\mu - z)^2 \left[1 + \chi \sum \frac{\tilde{\sigma}_\mu^2}{\varepsilon_\mu - z} \right]} \delta_{\mu=\nu} \\
& \square \chi \tilde{\sigma}_\mu^2 \text{Rez}(g, \infty) \\
& \square \chi \tilde{\sigma}_\mu^2 \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-z^2}{(\varepsilon_\mu - z)^2 \left[1 + \chi \sum \frac{\tilde{\sigma}_\mu^2}{\varepsilon_\mu - z} \right]} \\
& \square -\chi \tilde{\sigma}_\mu^2 \tag{9}
\end{aligned}$$

bulunur. Bulduğumuz (8) ve (9) sonuçlarını (7) de yerine yazarsak,

$$\sum_\kappa \omega_\kappa \Psi_\mu^\kappa \Psi_\nu^\kappa \delta_{\mu=\nu} = (\varepsilon_\mu + \chi \tilde{\sigma}_\mu^2) \delta_{\mu=\nu} \tag{10}$$

sonucunu buluruz.

Şimdi de $\mu = \nu$ olması halini ele alalım. Bu durumda,

$$\Omega_{\mu\nu} = \chi \tilde{\sigma}_\mu \tilde{\sigma}_\nu \sum_\kappa \frac{\omega_\kappa}{(\varepsilon_\mu - \omega_\kappa)(\varepsilon_\nu - \omega_\kappa) \mathbf{D}'(\omega_\kappa)} \delta_{\mu \neq \nu}$$

olur. ω_i ler $\mathbf{D}(\omega_i)$ nin birinci dereceden sıfır yerleri yani basit kutuplarıdır. Rezidü teoremine göre bu ifadeyi kontur integral şeklinde yazarsak,

$$\Omega_{\mu\nu} = \chi \tilde{\sigma}_\mu \tilde{\sigma}_\nu \oint_{L_{\kappa'}} \frac{zdz}{(\varepsilon_\mu - z)(\varepsilon_\nu - z) \mathbf{D}(z)} \delta_{\mu \neq \nu} \quad (11)$$

olur.

$$C = \int_{L_{\kappa'}} \frac{zdz}{(\varepsilon_\mu - z)(\varepsilon_\nu - z) \mathbf{D}(z)} \delta_{\mu=\nu}$$

fonksiyonunun kutup noktalarını araştıralım. C fonksiyonunda $z = \varepsilon_\mu$ ve $z = \varepsilon_\nu$ noktaları kutup olabilir. Önce, $z = \infty$ noktasının kutup olup olmadığını araştıralım. $z \rightarrow \infty$ için

$$\mathbf{D}(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[1 + \chi \sum \frac{\tilde{\sigma}_\mu}{\varepsilon_\mu - z} \right] = 1 + 0 = 1$$

olur.

$$C \cong \int_{L_{\kappa'}} \frac{dz}{z}$$

şeklinde olacağından C fonksiyonumuz. $z \rightarrow \infty$ noktasında kutup olacaktır. ∞ noktası kutup noktası olduğundan, rezidü teoreminin genişletilmesi teoremine göre,

Sonsuzluktaki Rezidü = - [sonlu düzlem rezidülerinin toplamı]

eşitliği mevcuttur. Buna göre, rezidülerin toplamı sıfır olacaktır. şimdi, $z = \varepsilon_\mu$ ve $z = \varepsilon_\nu$ noktalarının kutup noktaları olup olmadıklarını araştıralım. $z = \varepsilon_\mu$ için,

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow \tilde{\varepsilon}_\mu} \left[\frac{(-z + \tilde{\varepsilon}_\mu) - z \delta_{\mu \neq \nu}}{(\tilde{\varepsilon}_\mu - z)(\tilde{\varepsilon}_\nu - z) \left[1 + \chi \frac{\tilde{\sigma}_\mu^2}{\tilde{\varepsilon}_\mu - z} + \chi \frac{\tilde{\sigma}_\nu^2}{\tilde{\varepsilon}_\nu - z} + \chi \sum_{\kappa' \neq \mu, \nu} \frac{\tilde{\sigma}_{\kappa'}^2}{\tilde{\varepsilon}_{\kappa'} - z} \right]} \right] \\
&= \frac{-\varepsilon_\mu \delta_{\mu \neq \nu}}{(\tilde{\varepsilon}_\nu - \tilde{\varepsilon}_\mu) + \chi \underbrace{\frac{\tilde{\sigma}_\mu^2 (\tilde{\varepsilon}_\nu - \tilde{\varepsilon}_\mu)}{(\tilde{\varepsilon}_\mu - \tilde{\varepsilon}_\mu)}}_{\infty} + \chi \tilde{\sigma}_\mu^2 + \chi \sum_{\kappa' \neq \mu, \nu} \frac{\tilde{\sigma}_{\kappa'}^2 (\tilde{\varepsilon}_\nu - \tilde{\varepsilon}_\mu)}{(\tilde{\varepsilon}_{\kappa'} - \varepsilon_\mu)}} = 0
\end{aligned}$$

olur. $z \rightarrow \tilde{\varepsilon}_\mu$ iken C nin limiti var ve sonlu olduğundan $z = \tilde{\varepsilon}_\mu$ noktası kaldırılabilir singüler noktadır ve kaldırılabilir singüler noktanın rezidüsü sıfırdır. Çünkü yine kompleks analizden bilindiği gibi, teoreme göre; $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında kaldırılabilir singüler nokta olabilmesi için

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

şartını sağlamalıdır. Yine biliyoruz ki, kaldırılabilir singüler noktanın Laurent serisinin açılımında esas kısım olmadığından kaldırılabilir singüler noktanın rezidüsü sıfırdır. Aynı şekilde $z = \tilde{\varepsilon}_\nu$ noktasının da kaldırılabilir singüler nokta olduğu görülür ve bu noktadaki rezidü de sıfır olur. O halde, rezidüler toplamı sıfır olacağından,

$$\sum_{\kappa} \frac{\chi \tilde{\sigma}_\mu \tilde{\sigma}_\nu \omega_\kappa \delta_{\mu \neq \nu}}{(\tilde{\varepsilon}_\mu - \omega_\kappa)(\tilde{\varepsilon}_\nu - \omega_\kappa) \mathbf{D}(\omega_\kappa)} + \text{Rez}(c, \tilde{\varepsilon}_\mu) + \text{Re } z(c, \tilde{\varepsilon}_\nu) + \text{Rez}(c, \infty) = 0 \quad (12)$$

eşitliğini yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\text{Rez}(c, \tilde{\varepsilon}_\mu) &= 0 \\
\text{Rez}(c, \tilde{\varepsilon}_\nu) &= 0
\end{aligned} \quad (13)$$

olduğunu biliyoruz. $z = \infty$ daki rezidüyü de hesaplayıp (12) de yerine yazarsak sonucu bulmuş oluruz. Sonsuzluktaki rezidü,

$$\text{Rez}(c, \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} (-zc)$$

şeklindedir. Buna göre

$$\text{Rez}(c, \infty) = \chi \tilde{\sigma}_\mu \tilde{\sigma}_\nu \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-zz}{z^2} = -\chi \tilde{\sigma}_\mu \tilde{\sigma}_\nu \quad (14)$$

olur. (13) ve (14) değerlerini (12) de yerine yazarsak,

$$\sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \Psi_{\mu}^{\kappa} \Psi_{\nu}^{\kappa} \delta_{\mu \neq \nu} = \chi \tilde{\sigma}_\mu \tilde{\sigma}_\nu \delta_{\mu \neq \nu} \quad (15)$$

elde ederiz. O halde, (6), (10), (15) den,

$$\begin{aligned} S &= \omega_{\kappa} |M_{\kappa}|^2 = \sum_{\mu\nu} b_{\mu} b_{\nu} \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \Psi_{\mu}^{\kappa} \Psi_{\nu}^{\kappa} \\ S &= \sum_{\mu} b_{\mu}^2 \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \Psi_{\mu}^{\kappa} \Psi_{\mu}^{\kappa} \delta_{\mu=\nu} + \sum_{\mu\nu} b_{\mu} b_{\nu} \sum_{\kappa} \omega_{\kappa} \Psi_{\mu}^{\kappa} \Psi_{\nu}^{\kappa} \delta_{\mu \neq \nu} \\ S &= \sum_{\mu} \sigma_{\mu}^2 (\varepsilon_{\mu} + \chi \tilde{\sigma}_{\mu}^2) + \sum_{\mu} \sigma_{\mu} \sigma_{\nu} \chi \tilde{\sigma}_{\mu} \tilde{\sigma}_{\nu} \\ S &= \sum_{\mu} \varepsilon_{\mu} \sigma_{\mu}^2 + \chi \sum_{\mu\nu} \sigma_{\mu}^2 \tilde{\sigma}_{\mu}^2 + \chi \sum_{\mu\nu} \sigma_{\mu} \sigma_{\nu} \tilde{\sigma}_{\mu} \tilde{\sigma}_{\nu} \\ S &= \sum_{\mu} \tilde{\varepsilon}_{\mu} \sigma_{\mu}^2 + \chi \left| \sum_{\mu\nu} \sigma_{\mu} \tilde{\sigma}_{\mu} \right|^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] SOLOVIEV, V.G., "Theory of Complex Nuclei", Pergamon Press New York, 1976.
- [2] BLATT, J., WEISSKOPF, V., "Theoretical Nuclear Physics", J. Wiley, New York, London, Sydney, 1966.
- [3] STRINGARI, S., LIPPARINI, E., ORLANDINI, G., TRAINI, M. and LEPNARDI, R., "Sum Rule Approach to Nuclear Collective Motion", Nucl.Phys. A, Vol 309, pp177-189, 1978.
- [4] BOHIGAS, O., LANE, A.M. and MORTORELI, J., Phys. Rep., Vol 51, p 267, 1979.
- [5] ROWE, D.J., "Nuclear Collective Motion", Methuen, London, 1970.
- [6] STRINGARI, A., Winter College on Fundamental Nuclear Physics, Vol 12, edited by K. Dietrich
- [7] LASZEWSKI, R.M., RULLHUSEN, P., HOBUT, S.D., LeBRUN, S.F., "Giant M1 Resonance in ^{140}Ce ", Phys.Rev.C., Vol 34, p 2013, 1986;
RICHTER, A., "Probing The Nuclear Magnetic Dipole Response With Electrons, Photons and Hadrons", Progr. Part. Nucl. Phys., Vol 34, pp 261-284, 1995.
- [8] PETROVICH, A., SCHMID, K.W. and FAESSLER, A., Nucl. Phys. A, Vol 605, p 290, 1996.
- [9] BERLOVICH, E.Ye., NOVIKOV, Yu., N., Phys.Letts., Vol 19, pp 668, 1965.
- [10] BROWN, G.E., "Unified Theory of Nuclear Model and Forces, Secon Edition, North-Holland, Amsterdam, 1967.
- [11] MIGDAL, A.B., "Theory of Finitte Fermi Systems and Properties of Atomic Nuclei", Interscience, New York, 1967.
- [12] THOULESS, D.J., "Vibrational States of Nuclei in Random Phase Approximation", Nucl. Phys., Vol 22(1), pp 78- 95, 1961.
- [13] BOGOLYUBOV, N.N., "The Compensation Principle and The Self-Consistent Field Method", Sov. Phys. Usp., Vol 67(2), pp 236-254, 1959.
- [14] PIENES, D., "Many-Body Problem", Benjamin, New York, 459, 1962.
- [15] GÜNER, M., GULİYEV, E., "Manyetik Dipol Geçişlerinin Deformasyon Bağımlılığı", XIV Ulusal Matematik Sempozyumu, Anadolu Üniversitesi 19-21 Eylül, Eskişehir, 2001.

- [16] GÜNER, M., GULİYEV, E and KULİEV, A.A., “Magnetik Dipol Geçişlerinin enerji Ağırlıklı Toplam Kurallarının Deformasyon Bağımlılığı”, I.Ulusal Parçacık Hızlandırıcıları ve Uygulamaları Kongresi (UPHUK-I) 25-26 Ekim 2001, TAEK, Ankara.
- [17] GUNER, M., GULİYEV, E., “Effect of Deformation in M1 Transitions Between States with Different Shapes”, International Workshop “Quantum Particles, Fields and Strings-2”, 10-19 September, 2003, Zagulba Settlement, Baku, Azerbaijan.
- [18] TOIVANEN, J. and SUHONEN, J., “Renormalized Proton-Neutron Quasiparticle Random Phase Approximation and Its Application to Double Beta Decay”, Phys. Rev. C, Vol 55, p 410, 1995.
- [19] GABRAKOV, S.I., KULIEV, A.A., PYATOV, N.I., SALAMOV, D.I and SCHULZ, H., “Collective 1^+ States in Doubly Even Deformed Nuclei”, Nucl.Phys.A., Vol 182, 1972.
- [20] ALIYEV, T.M., BALAEV, S.K., KULIEV, A.A. and SALAMOV, D.I, “Bulletin of Academy of Sciences of The USSR, Physical Series, Vol 53(11), p 2140, 1989.
- [21] ERBİL, H., GERÇEKLIOĞLU, M., ILHAN, M. and KULIEV, A.A., “Sum Rule Approach to Nuclear Collective Vibration”, Mathematical & Computational Applications, Vol , No.1, pp 1-17, 1997.
- [22] PYATOV, N.I. and SALAMOV, D.I., Nucleonica, Vol 22, p 127, 1977.
- [23] CERKASSKI, M., DUDEK, J., SZYMANSKI, Z., ANDERSSON, C.G., LEANDER, G., ABERG, S., NILSSON, S.G., RAGNARSSON, I., “Search for The Yrast Traps In Neutron Deficient Rare Earth Nuclei. Phys. Lett. B, Vol 70(1), pp 9-13, 1977; J.Phys.G. Vol 4, p 1543, 1978.
- [24] RAMAN, S., MALARKEY, C.H., MİLNER, W.T., NESTROB, C.W., STELSON, P.H., “Transition Probability, B(E2) From Ground To The First Excited 2^+ State In Even-Even Nuclides”, Nucl. Data Tables, Vol 36, p 1, 1987.
- [25] LASZEWSKI, R.M., RULLHUSEN, P., HOBUT, S.D., LeBRUN, S.F., “Giant M1 Resonance in ^{140}Ce ”, Phys.Rev.C., Vol 34, p 2013, 1986; RICHTER, A., “Probing The Nuclear Magnetic Dipole Response With Electrons, Photons and Hadrons”, Progr. Part. Nucl. Phys., Vol 34, pp 261-284, 1995.

ÖZGEÇMİŞ

01/07/1980 yılında Sinop'un Türkeli ilçesinde doğdu. İlköğretimini Türkeli Cumhuriyet ilköğretim okulunda bitirdi. Lise tahsilini Samsun 19 Mayıs lisesinde tamamladı. 1997 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2001 ocak döneminde bölümünü başarıyla tamamladı.2001 yılından itibaren özel öğretim kurumlarında Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.