T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ KESİRLER VE PELL DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat PEKASİL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Refik KESKİN

Haziran 2006

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ KESİRLER VE PELL DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat PEKASİL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 26/06/2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Refik KESKİN	**Doç. Dr. İbrahim OKUR**	**Yrd. Doç. Dr. Serpil Halıcı**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, yardımlarını ve yakın ilgisini esirgemeyen danışmanım Sayın Doç. Dr. Refik KESKİN'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, sürekli yardımlarını gördüğüm Matematik bölümünün değerli öğretim üyelerine ve tez yazımında emeği geçen öğretmen arkadaşım Ahmet KUNDURACIOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2006
Murat PEKASİL

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\in$	: Elemanıdır
$<=>$	: Ancak ve ancak
[ ]	: Sürekli kesir
$\equiv$	: Denktir
$[\![\ ]\!]$	: Tam değer
$a \mid b$	: a , b’yi böler.
$\lvert\ \rvert$	: Mutlak değer

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Sürekli Kesirler, Sürekli Kesirlerin Yaklaşımları, Sonsuz Sürekli Kesirler, Pell Denklemleri

Bu çalışmada, sürekli kesirlerin önemli özellikleri incelenerek bazı Pell denklemlerinin çözümleri araştırıldı.

Birinci bölümde sonlu sürekli kesirler tanıtılmıştır. Her sonlu sürekli kesrin bir rasyonel sayı gösterdiği ve daha sonra her rasyonel sayının sonlu bir sürekli kesir olarak ifade edilebileceği gösterilmiştir.

İkinci bölümde sonsuz sürekli kesirler incelenmiştir ve herhangi bir sonsuz sürekli kesrin değerinin bir irrasyonel sayı olduğu gösterilmiştir. Diğer yandan her sonsuz sürekli kesrin bir irrasyonel sayıyı gösterdiği ispatlanmıştır. Ayrıca, bu bölümde periyodik sonsuz sürekli kesirler ve bunlarla ilgili özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Pell denklemleri ele alındı ve $x^2 - dy^2 = n$ Pell denklemlerinin çözümlerinin $|n| < \sqrt{d}$ için $\sqrt{d}$ nin basit sürekli kesre açılımının yaklaşımları vasıtasıyla verilebileceği gösterilmiştir.

CONTINUED FRACTIONS AND PELL EQUATIONS

SUMMARY

Keywords: Continued Fractions, The Convergents of The Continued Fractions, Infinite Continued Fractions, Pell's Equations

In this thesis studying some properties of the continued fractions and solutions of some Pell's equations are investigated.

In the first chapter, finite continued fractions are introduced. It is shown that every finite simple continued fraction is represented as a rational number and that a rational number is expressed as a finite simple continued fraction.

In the second chapter, infinite continued fractions are studied. The value of any infinite simple continued fraction is shown to be an irrational number. On the other hand, any infinite continued fraction is shown to be an irrational number. Moreover, in this chapter, periodic infinite continued fractions and their properties are given. It is shown that periodic infinite continued fractions represent quadratic irrational numbers.

Lastly, in the third chapter , by using the convergents of the simple infinite continued fraction expansion of $\sqrt{d}$, we find solutions of Pell's equations.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Sürekli kesirler, sayılar teorisinde önemli bir rol oynarlar. Sonsuz sürekli kesirler yaklaşık hesaplamalarda ve matematiğin diğer dallarında sıkça kullanılmaktadır. Bunlardan birisi de Pell denklemlerinin sayılar teorisinde çok önemli uygulamaları ve yeridir. Pell denklemlerinin tamsayı çözümlerini, sonsuz sürekli kesirleri kullanarak bulabiliriz.

Bu çalışmanın amacı, sürekli kesirler ve Pell denklemleri hakkında genel bilgiler vermektir.

Bu bölümde, sürekli kesirlerin açıklanmasında yardımcı olacak bazı önemli tanım ve teoremler verilecektir.

Tamsayıların önemli bir özelliği de kalanlı bölme yapılabilmesidir.

Tanım 1.1.1. a, b tamsayılar olsun. $a = b.c$ olacak şekilde bir c tamsayısı varsa a, b'yi böler denir ve bu durum $a \mid b$ ile gösterilir.

Önerme 1.1.1.

(i) $a \mid b$ ise $a \mid bc$,

(ii) $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için, $a \mid bx + cy$,

(iii) $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$,

(iv) $a \mid b$ ise $|a| \leq |b|$,

(v) $a \mid b$ ve $b \mid a$ ise $a = \pm b$

dir.

Tamsayıların önemli bir özelliği de kalanlı bölme yapılabilmesidir.

Önerme 1.1.2. Her a, b $\in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ için, $a = bq + r$ ve $0 \leq r <|b|$ olacak şekilde, tek türlü olarak belirli q, $r \in \mathbb{Z}$ vardır.

Tanım 1.1.2. a, $b \in \mathbb{Z}$ olsun.

(i) $d|a$ ve $d|b$ ise d'ye a ile b'nin bir ortak böleni denir.

(ii) d, a ile b'nin bir pozitif ortak böleni olsun. Eğer a ile b'nin her c ortak böleni için $c|d$ ise d ortak bölenine, a ile b'nin bir en büyük ortak böleni denir ve $d = (a, b)$ ile gösterilir.

Şimdi ard arda aşağıdaki kalanlı bölmeleri yapalım:

$$\begin{array}{llll}
a & = q_1 b + r_1 & \text{ve} & 0 < r_1 < b \\
b & = q_2 r_1 + r_2 & \text{ve} & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 & = q_3 r_2 + r_3 & \text{ve} & 0 < r_3 < r_2 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_{k-1} & = q_{k+1} r_k + r_{k+1} & \text{ve} & 0 < r_{k+1} < r_k \\
r_k & = q_{k+2} r_{k+1} + 0 & &
\end{array}$$

İşlem bu şekilde kalan 0 oluncaya kadar devam ettirilir. Kalanların gittikçe küçüldüğüne, $b > r_1 > r_2 > \ldots$ olduğuna dikkat edilirse, sonlu adımdan sonra 0 kalanının bulunacağı aşikardır.

Teorem 1.1.1.(Euclid Algoritması) Yukarıda ard arda yapılan kalanlı bölmeler arasında sıfırdan farklı en son kalan a ile b'nin en büyük ortak bölenidir; yani $r_{k+1} = (a, b)$'dir.

Önerme 1.1.3. a ve b tamsayılar, $b \neq 0$ ve bölme algoritması

$$\begin{aligned} a &= q_1 b + r_1 \\ b &= q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\ \ldots & \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ise $\dfrac{a}{b}$ ifadesi,

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \ddots}}}$$

şeklinde yazılabilir.

BÖLÜM 2. SÜREKLİ KESİRLER

2.1. Sonlu Sürekli Kesirler

Tanım 2.1.1. $a_0,\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ ,\ a_n$ reel sayılar ve a_0 hariç hepsi pozitif olsun.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

şeklindeki bir ifadeye, sonlu sürekli kesir denir. $a_0,\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ ,\ a_n$ reel sayılarına sürekli kesirlerin kısmi bölümleri denir. $a_0,\ a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ ,\ a_n$ reel sayılarının hepsi tamsayı ise, sürekli kesre basit sürekli kesir denir. Sürekli kesirleri bütünüyle yazmak uzun olduğundan, $\left[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n\right]$ gösterimi kullanılır. Bu bölümde sadece basit sürekli kesirlere yer verileceğinden; "sürekli kesir" denince pozitif ve basit olanlar kastedilecektir.

Sonlu sürekli kesir tanımı aşağıdaki biçimde de ifade edilebilir:

$$\left[a_0\right] = a_0$$

$$\left[a_0;a_1\right] = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_n\right] = \left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_{n-2},a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right] \quad (\ n \geq 2\ )$$

Euclid Algoritmasını kullanarak, rasyonel sayılar sürekli kesirler olarak ifade edilebilir. Örneğin Euclid Algoritması kullanılarak;

$$187 = 3.57 + 16$$
$$57 = 3.16 + 9$$
$$16 = 1.9 + 7$$
$$9 = 1.7 + 2$$
$$7 = 3.2 + 1$$
$$2 = 2.1$$

elde edilir. Bu denklemlerin her iki yanı kendi bölenine bölünürse,

$$\frac{187}{57} = 3 + \frac{16}{57} = 3 + \cfrac{1}{\frac{57}{16}}$$
$$\frac{57}{16} = 3 + \frac{9}{16} = 3 + \cfrac{1}{\frac{16}{9}}$$
$$\frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9} = 1 + \cfrac{1}{\frac{9}{7}}$$
$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7} = 1 + \cfrac{1}{\frac{7}{2}}$$
$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu denklemler birleştirilirse, aşağıdaki ifade bulunur:

$$\begin{aligned}\frac{187}{57} &= 3 + \frac{1}{57/16} \\ &= 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{16/9}} \\ &= 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9/7}}}\end{aligned}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7/2}}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Bu denklemler sonucunda elde edilen ifade $\frac{187}{57}$'nin sürekli kesir açılımıdır.

Şimdi her sonlu sürekli kesrin bir rasyonel sayı ifade edeceği, daha sonra her rasyonel sayının sonlu bir sürekli kesir olarak ifade edilebileceği gösterilecektir.

Teorem 2.1.1. Her sonlu basit sürekli kesir bir rasyonel sayı gösterir$[1]$.

İspat: Matematiksel tümevarımı kullanarak teoremi ispatlayacağız.

$n = 1$ için, $[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ rasyonel sayıdır.

Şimdi, a_0 hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, \ldots, a_k$ tamsayıları ve k pozitif tamsayısı için $[a_0, a_1, a_2, ..., a_k]$ sürekli kesrinin bir rasyonel sayı olduğu kabul edilsin.

$a_1,\ a_2,\ ...\ ,\ a_{k+1}$ pozitif olmak üzere $a_0,\ a_1,\ ...\ ,\ a_{k+1}$ sayıları tamsayı olsun. $[a_1; a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}]$ basit sürekli kesri tümevarım hipotezine göre rasyonel sayıdır.

O halde, $s \neq 0$ olmak üzere, $[a_1; a_2, \ldots, a_{k+1}] = \frac{r}{s}$ olacak şekilde r ve s tamsayıları vardır. O zaman,

$$[a_0; a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots, a_{k+1}]} = a_0 + \frac{1}{r/s} = \frac{a_0 r + s}{r}$$

yine bir rasyonel sayıdır.

Şimdi Euclid Algoritmasını kullanarak her rasyonel sayının bir sonlu sürekli kesir olarak yazılabileceği gösterilecektir.

Teorem 2.1.2. Her rasyonel sayı, bir sonlu basit sürekli kesir olarak ifade edilebilir.

İspat: $b > 0$ olmak üzere a ve b tamsayılar, $x = \frac{a}{b}$ olsun. $r_0 = a$ ve $r_1 = b$ alalım. Euclid Algoritması ile x'in sürekli kesirlere açılımı kolayca bulunabilir.

$$\begin{array}{ll}
r_0 = r_1 q_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1, \\
r_1 = r_2 q_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2, \\
r_2 = r_3 q_3 + r_4 & 0 < r_4 < r_3, \\
\vdots & \\
r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-2} + r_{n-1} & 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n & 0 < r_n < r_{n-1}, \\
r_{n-1} = r_n q_n . &
\end{array}$$

Bu denklemlerde $q_2, q_3, \ldots, q_n$ sayıları pozitif tamsayılardır. Bu denklemler kesir formunda yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} = \frac{r_0}{r_1} &= q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{r_1/r_2} \\
\frac{r_1}{r_2} &= q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{r_2/r_3} \\
\frac{r_2}{r_3} &= q_3 + \frac{r_4}{r_3} = q_3 + \frac{1}{r_3/r_4} \\
&\vdots \\
\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= q_{n-2} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = q_{n-2} + \frac{1}{r_{n-2}/r_{n-1}} \\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{1}{r_{n-1}/r_n} \\
\frac{r_{n-1}}{r_n} &= q_n
\end{aligned}$$

elde edilir. İkinci denklemdeki r_1/r_2 'nin değeri birinci denklemde yerine yazılırsa,

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{r_2/r_3}} \tag{2.1}$$

elde edilir. Benzer şekilde üçüncü denklemdeki r_2/r_3 'ün değeri (2.1) 'de yerine yazılırsa,

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{r_3/r_4}}}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse,

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}$$

elde edilir.

Böylece $\frac{a}{b}$ sayısının $[q_1; q_2, \ldots, q_n]$ biçiminde bir sürekli kesre açılımı elde edilmiş olur. Bu da her rasyonel sayının bir sonlu sürekli kesir olarak yazılabileceğini gösterir. Gerçekten q_i 'ler Euclid Algoritmasındaki peş peşe bölmelerdeki birer bölümdürler. Burada q_0 bir tamsayı ve $q_1, \ldots, q_n$ 'ler pozitif tamsayılardır.

Bir rasyonel sayının sürekli kesirlere açılımı tek türlü değildir. Eğer $a_n > 1$ ise,

$$a_n = (a_n - 1) + 1 = (a_n - 1) + \frac{1}{1}$$

eşitliğinden

$$[a_0; a_1, \ . \ . \ . \ , a_n] = [a_0; a_1, \ . \ . \ . \ , a_n - 1, 1]$$

elde edilir. Ayrıca, $a_n = 1$ ise o zaman

$$a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = a_{n-1} + \frac{1}{1} = a_{n-1} + 1$$

dir ve böylece

$$[a_0; a_1, \ . \ . \ . \ , a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, \ . \ . \ . \ , a_{n-2}, a_{n-1} + 1]$$

elde edilir.

Önerme 2.1.1. Sonlu bir sürekli kesir rasyonel sayıdır. Tersine her rasyonel sayının tam iki türlü sürekli kesirlere açılımı vardır. Bu açılımlardan birinin uzunluğu çift, diğerinin uzunluğu tektir $[2]$.

Önerme 2.1.2. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere,

(i) $[a_0; a_1, \ . \ . \ . \ , a_n] = [a_0; a_1, \ . \ . \ . \ , a_{k-1}, [a_k; a_{k+1}, \ . \ . \ . \ , a_n]]$

(ii) $[a_0; a_1, \ . \ . \ . \ , a_n] = a_0 + \dfrac{1}{[a_1; \ . \ . \ . \ , a_n]}$

dir.

İspat: Formüller, sürekli kesirlerin tanımından kolayca görülebilir. (i)'nin ispatı için en içteki $[a_k; a_{k+1}, \ . \ . \ . \ , a_n]$ sürekli kesrinde, terim sayısı üzerine tümevarım uygulansın. Eğer $m=1$ ise, yani $k=n$, o zaman $\left[a_n\right]=a_n$'dir. Eşitlik aşikardır, ispata gerek yoktur. Eğer $m=2$ ise, o zaman

$\left[a_{n-1};a_n\right]=a_{n-1}+\dfrac{1}{a_n}$ ve (i) özelliği $\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_n\right]$ sürekli kesrinin yinelenen tanımı ile uygunluk gösterir.

Şimdi (i) özelliğinin, en içteki sürekli kesrin m terime sahip olduğunu ve tümevarımla özdeşliğin doğru olduğu kabul edilsin. Şimdi de $\left[a_k;a_{k+1},\ ...\ ,a_n\right]$ $m+1$ terime sahip olsun. İki kez tümevarım hipotezi ve $m=2$ halinde de bir kez tümevarım uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_n\right]&=\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_{k-1},a_k,\left[a_{k+1};\ .\ .\ .\ ,a_n\right]\right]\\&=\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_{k-1},\left[a_k;\left[a_{k+1};\ .\ .\ .\ ,a_n\right]\right]\right]\\&=\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_{k-1},\left[a_k;a_{k+1},\ .\ .\ .\ ,a_n\right]\right].\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

(ii) hali, (i)'nin özel bir durumudur. $k=1$ alınarak elde edilebilir.

$$\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_n\right]=\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_{k-1},\left[a_k;a_{k+1},\ .\ .\ .\ ,a_n\right]\right]$$

$k=1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\left[a_0;\left[a_1;a_2,\ .\ .\ .\ ,a_n\right]\right]&=\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_n\right]\\&=a_0+\frac{1}{\left[a_1;\ .\ .\ .\ ,a_n\right]}\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 2.1.1.

$\frac{32}{17}$'nin sürekli kesir açılımını Euclid Algoritması yardımıyla,

$$\begin{aligned} 32 &= 1.17 + 15 \\ 17 &= 1.15 + 2 \\ 15 &= 7.2 + 1 \\ 2 &= \quad 2.1 \end{aligned}$$

olduğundan kısmi bölümler 1, 1, 7, 2'dir. Şu halde $32/17 = [1;1,7,2] = [1;1,7,1,1]$ olarak bulunur.

Örnek 2.1.2. $\frac{-124}{35}$ sayısının sürekli kesir açılımı,

$$\begin{aligned} \frac{-124}{35} &= -4 + \frac{16}{35} = -4 + \frac{1}{\frac{35}{16}} = -4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{16}} \\ &= -4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{16}{3}}} = -4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}} \\ &= [-4; 2, 5, 2, 1] \end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.1.3. $\frac{7}{11} = [0;1,1,1,3] = [0;1,1,1,2,1]$'dir.

Teorem 2.1.3. a_0 hariç hepsi pozitif olan, $(a_n)_{n=o}^{N}$ bir sonlu $(N \in \mathbb{N})$ veya sonsuz $(N = \infty)$ reel sayılar dizisi olsun. $k = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0 \qquad & ; q_0 &= 1 \\ p_1 &= a_0 a_1 + 1 \qquad & ; q_1 &= a_1 \end{aligned}$$

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \qquad ; q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \tag{2.2}$$

olarak tanımlansın.

$$C_k = [a_0; a_1, \ . \ . \ . \ , a_k]$$

ise bu takdirde $C_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ ’dir.

İspat: Matematiksel tümevarımı kullanarak ispatlayalım:

$$k = 0 \quad \text{için,}\ C_0 = [a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$$

$$k = 1 \quad \text{için,}\ C_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

olur; yani $k = 0$ ve $k = 1$ için teorem doğrudur. Şimdi $2 \le k < N$ olan pozitif k tamsayısı için teoremin doğru olduğu kabul edilsin. Yani,

$$C_k = [a_0; a_1, \ . \ . \ . \ , a_k] = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} \tag{2.3}$$

olsun. p_j ve q_j ’lerin tanımından dolayı $p_{k-1}, \ p_{k-2}, \ q_{k-2}$ reel sayılarının, $a_0, \ a_1, \ ... \ , a_{k-1}$ kısmi bölümlerine bağlı olduğu görülür. Yani C_{k+1} ’i elde etmek için (2.3) ’ teki a_k reel sayısının yerine $a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}$ yazılabilir.

$$C_{k+1} = [a_0; a_1, \ . \ . \ . \ , a_{k-1}, a_k, a_{k+1}] = [a_0; a_1, \ . \ . \ . \ , [a_k; a_{k+1}]]$$

$$= \left[a_0; a_1, \ . \ . \ . \ , a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right]$$

$$= \frac{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}\right)q_{k-1} + q_{k-2}}$$

$$= \frac{a_{k+1}\left(a_k p_{k-1} + p_{k-2}\right) + p_{k-1}}{a_{k+1}\left(a_k q_{k-1} + q_{k-2}\right) + q_{k-1}}$$

$$= \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}}$$

$$= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

elde edilir ki, böylece k+1 için de (2.3) 'ün doğru olduğu görülür.

Tanım 2.1.2. k, n'ye eşit ya da n'den küçük negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $\left[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_k\right]$ sürekli kesrine $\left[a_0;a_1,\ldots,a_n\right]$ sürekli kesrinin k'ninci yaklaşımı denir. k'ninci yaklaşım C_k ile gösterilir$[3]$.

Teorem 2.1.3'ü nasıl kullanılabileceği aşağıdaki örnekle açıklanabilir:

Örnek 2.1.4. $\frac{187}{57} = [3;3,1,1,3,2]$ sürekli kesrinde, $j = 0,1,2,3,4,5$ için, p_j ve q_j dizileri,

$$\begin{array}{ll}
p_0 = 3 & q_0 = 1 \\
p_1 = a_0a_1 + 1 = 3.3 + 1 = 10 & q_1 = a_1 = 3 \\
p_2 = a_2p_1 + p_0 = 1.10 + 3 = 13 & q_2 = a_2q_1 + q_0 = 1.3 + 1 = 4 \\
p_3 = a_3p_2 + p_1 = 1.13 + 10 = 23 & q_3 = a_3q_2 + q_1 = 1.4 + 3 = 7 \\
p_4 = a_4p_3 + p_2 = 3.23 + 14 = 82 & q_4 = a_4q_3 + q_2 = 3.7 + 4 = 25 \\
p_5 = a_5p_4 + p_3 = 2.82 + 23 = 187 & q_5 = a_5q_4 + q_3 = 2.25 + 7 = 57
\end{array}$$

biçiminde olup, sürekli kesrin yaklaşımları;

$$
\begin{aligned}
C_0 &= p_0/q_0 = 3/1 \\
C_1 &= p_1/q_1 = 10/3 \\
C_2 &= p_2/q_2 = 13/4 \\
C_3 &= p_3/q_3 = 23/7 \\
C_4 &= p_4/q_4 = 82/25 \\
C_5 &= p_5/q_5 = 187/57
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Bir sürekli kesir yaklaşımının bir başka önemli özeliği aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 2.1.4. $(a_n)_{n=o}^{N}$ ($N \in \mathbb{N}$) bir dizi, a_0 hariç a_k 'ler (2.2) denklemlerindeki gibi olsun. Bu takdirde,

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$$

dir.

İspat: Teoremin ispatı için matematiksel tümevarımı kullanacağız.

$$k = 1 \text{ için, } p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1).1 - a_0 a_1 = 1$$

olduğundan eşitliğin doğruluğu görülür. Teoremin k tamsayısı için doğru olduğu kabul edilsin; yani $1 \le k < N$ olmak üzere,

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$$

olsun.

$$
\begin{aligned}
p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} &= (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_k - p_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) \\
&= p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} = -(-1)^{k-1} = (-1)^k
\end{aligned}
$$

elde edilir ki, böylece $k+1$ için de teoremin doğruluğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla ispat tümevarımla tamamlanmış olur.

Örnek 2.1.5. $[1;3,6,11]$ sürekli kesri için,

$$p_0q_1 - p_1q_0 = 1.3 - 4.1 = -1$$
$$p_1q_2 - p_2q_1 = 4.19 - 25.3 = 1$$
$$p_2q_3 - p_3q_2 = 25.212 - 279.19 = -1$$

olur.

Sonuç 2.1.1. Teorem 2.1.3'te tanımlanan p_k ve q_k tamsayıları aralarında asaldır.

İspat: $d=(p_k, q_k)$ olsun. Teorem 2.1.4 yardımıyla $p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k = (-1)^{k-1}$ yazılabilir. $d=(p_k, q_k)$ ise $d \mid p_k$, $d \mid q_k$ olur. Dolayısıyla, $d \mid p_kq_{k-1}$ ve $d \mid q_kp_{k-1}$ olup $d \mid p_kq_{k-1} - q_kp_{k-1}$ ve böylece $d \mid (-1)^{k-1}$ elde edilir. Bu ise $d=1$ olmasını gerektirir.

Sonuç 2.1.2. $C_k = p_k/q_k$ ise $k \geq 1$ için,

$$C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_kq_{k-1}}$$

dir. Ayrıca her $2 \leq k$ tamsayısı için,

$$C_k - C_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_kq_{k-2}}$$

dir.

İspat: Teorem 2.1.4 yardımıyla $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$ yazılabilir. Her iki taraf $q_k q_{k-1}$ ile bölünürse, birinci eşitlik elde edilir. Yani,

$$C_k - C_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$$

dir. İkinci eşitliği elde etmek için,

$$C_k - C_{k-2} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k}{q_k q_{k-2}}$$

yazılırsa,

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$
$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k &= (a_k p_{k-1} + p_{k-2})\, q_{k-2} - p_{k-2}\,(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) \\ &= a_k\,(p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1}) \\ &= a_k\,(-1)^{k-2} = a_k\,(-1)^k \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 2.1.4 yardımıyla $p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1} = (-1)^{k-2}$ yazılabilir. Öyleyse,

$$C_k - C_{k-2} = \frac{a_k (-1)^k}{q_k q_{k-2}}$$

bulunur ki böylece önermenin ikinci eşitliği elde edilmiş olur.

Önerme 2.1.3. p_k ve q_k değerleri Teorem 2.1.3'te tanımlandığı gibi ise, $k \geq 2$ olmak üzere $q_{k-1} < q_k$'dir $[2]$.

İspat: Tümevarım yardımıyla, $k = 2$ için, $q_1 = 1 = a_1$ ve $q_2 = a_2 q_1 + q_0 = a_2.1 + 1 > 1 = q_1$'dir. $k = m$ için ifadenin ($2 \leq m < N$) doğru olduğunu kabul edip, $k + 1$ için de ifadenin doğru olacağı,

$$q_{m+1} = a_{m+1} q_m + q_{m-1} > a_{m+1} q_m \geq 1.q_m = q_m$$

eşitsizliklerinden görülür (a_0 hariç a_i lerin hepsi pozitif olduğundan $a_{m+1} \geq 1$ dir).

Teorem 2.1.5. $(a_n)_{n=0}^{N}$ $(N \in \mathbb{N} \text{ veya } N = \infty)$ dizisi verilsin. p_k ve q_k (2.2) denklemlerindeki gibi tanımlansın. Bu durumda, $k \geq 0$ için $q_k \geq k$'dir $[1]$.

İspat: $k = 0$ ise $q_k = q_0 = 1 \geq 0 = k$ olduğundan, iddia $k = 0$ için doğrudur. $k = 1$ ise $q_1 = a_1 \geq 1$'dir. k için iddia doğru, yani $q_k \geq k$ olsun. $q_{k+1} > q_k \geq k$ olduğundan,

$$q_{k+1} \geq k + 1$$

elde edilir. Şu halde iddia k+1 için de doğrudur. Tümevarım ilkesine göre her $k \geq 0$ için $q_k \geq k$ elde edilir.

Teorem 2.1.6. a_0 hariç hepsi pozitif $(a_n)_{n=0}^{N}$ dizisi verilsin (N sonlu veya sonsuz).

$C_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k] = \dfrac{p_k}{q_k}$ olsun. Bu durumda;

a) $C_0 < C_2 < C_4 < \ldots < C_{2m} < \ldots$

b) $C_1 > C_3 > C_5 > \ldots > C_{2m+1} > \ldots$

c) $C_{2r-1} > C_{2s}$

dir.

İspat: a) Teorem 2.1.4'ün yardımıyla,

$$\begin{aligned} C_{k+2}-C_k &= \left(C_{k+2}-C_{k+1}\right)+\left(C_{k+1}-C_k\right) \\ &= \left(\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}-\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right)+\left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}-\frac{p_k}{q_k}\right) \\ &= \frac{\left(-1\right)^{k+1}}{q_{k+2}q_{k+1}}+\frac{\left(-1\right)^k}{q_{k+1}q_k} \\ &= \frac{\left(-1\right)^k\left(q_{k+2}-q_k\right)}{q_k q_{k+1} q_{k+2}} \end{aligned}$$

bulunur. q_i ’ler her $i \geq 0$ için pozitif ve Teorem 2.1.4 yardımıyla $q_{k+2}-q_k > 0$ olup $C_{k+2}-C_k$ nın işareti $\left(-1\right)^k$ ’nin işareti ile aynı olur. Bu durumda, eğer $k=2j$ gibi bir çift sayı ise, $C_{2j+2} > C_{2j}$ bulunur. Böylece,

$$C_0 < C_2 < C_4 < \ldots$$

yazılabilir.

Benzer şekilde, $k=2j-1$ gibi bir tek sayı ise, bu durumda $C_{2j+1} < C_{2j-1}$ bulunur. Böylece,

$$C_1 > C_3 > C_5 > \ldots$$

yazılabilir.

Her C_{2r-1} ’in her C_{2s} ’den daha büyük olduğu $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = \left(-1\right)^{k-1}$ denkleminde, eşitliğin her iki tarafı $q_k q_{k-1}$ ile bölünerek,

$$C_k - C_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{\left(-1\right)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$$

bulunur.

$k = 2j$ alınırsa, $(-1)^{2j-1} < 0$ olacağından $C_k < C_{k-1}$ elde edilir. Yani bu $C_{2j} < C_{2j-1}$ demektir. Buradan,

$$C_{2s} < C_{2s+2r} < C_{2s+2r-1} < C_{2r-1}$$

olup istenen eşitsizlikler elde edilir.

Örnek 2.1.6. $[2;3,1,1,2,4]$ sonlu sürekli kesrinde,

$$\begin{aligned} C_0 &= \quad 2/1 = 2 \\ C_1 &= \quad 7/3 = 2.3333... \\ C_2 &= \quad 9/4 = 2.25 \\ C_3 &= \quad 16/7 = 2.2857... \\ C_4 &= \quad 41/18 = 2.2777... \\ C_5 &= 180/79 = 2.2784... \end{aligned}$$

yaklaşımlarından

$$C_0 = 2 < C_2 = 2.25 < C_4 = 2.2777...$$
$$< C_5 = 2.2784... < C_3 = 2.2857... < C_1 = 2.3333....$$

olduğu görülür.

Önerme 2.1.4. Eğer $C_k = p_k/q_k$, $[a_0;a_1, \ldots ,a_n]$ sürekli kesrinin k'ninci yaklaşımı ve $a_0 > 0$ ise,

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = [a_k;a_{k-1}, \ldots ,a_1,a_0]$$

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k;a_{k-1}, \ldots ,a_2,a_1]$$

dir$\left[4\right]$.

İspat: $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ ve $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ denklemlerinden

$$
\begin{array}{ll}
p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} & ;\ \dfrac{p_k}{p_{k-1}} = a_k + \dfrac{p_{k-2}}{p_{k-1}} \\[2ex]
p_{k-1} = a_{k-1} p_{k-2} + p_{k-3} & ;\ \dfrac{p_{k-1}}{p_{k-2}} = a_{k-1} + \dfrac{p_{k-3}}{p_{k-2}} \\[2ex]
p_{k-2} = a_{k-2} p_{k-3} + p_{k-4} & ;\ \dfrac{p_{k-2}}{p_{k-3}} = a_{k-2} + \dfrac{p_{k-4}}{p_{k-3}} \\
\vdots & \vdots \\
p_1 = a_0 a_1 + 1 & ;\ \dfrac{p_2}{p_1} = a_2 + \dfrac{p_0}{p_1} \\[2ex]
p_0 = a_0 & \phantom{;\ \dfrac{p_2}{p_1}} = a_2 + \dfrac{a_0}{a_0 a_1 + 1} \\[2ex]
 & \phantom{;\ \dfrac{p_2}{p_1}} = a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}
\end{array}
$$

ise bu denklemlerden

$$
\frac{p_k}{p_{k-1}} = a_k + \frac{p_{k-2}}{p_{k-1}} = a_k + \cfrac{1}{\cfrac{p_{k-1}}{p_{k-2}}} = a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{\cfrac{p_{k-2}}{p_{k-3}} + \ddots + \cfrac{p_2}{p_1}}},
$$

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{}{a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}}}}$$

ve böylece

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \; . \; . \; . \; , a_1, a_0]$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2} & &; \quad \frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} \\
q_{k-1} &= a_{k-1} q_{k-2} + q_{k-3} & &; \quad \frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = a_{k-1} + \frac{q_{k-3}}{q_{k-2}} \\
q_{k-2} &= a_{k-2} q_{k-3} + q_{k-4} & &; \quad \frac{q_{k-2}}{q_{k-3}} = a_{k-2} + \frac{q_{k-4}}{q_{k-3}} \\
&\vdots & & \qquad \vdots \\
q_1 &= a_1 & &; \quad \frac{q_2}{q_1} = \frac{a_2 a_1 + 1}{a_1} = a_2 + \frac{1}{a_1} \\
q_0 &= 1 & &; \quad \frac{q_1}{q_0} = \frac{a_1}{1} = a_1
\end{aligned}$$

ise bu denklemlerden,

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = a_k + \cfrac{1}{\cfrac{q_{k-1}}{q_{k-2}} + \ddots + \cfrac{q_2}{q_1}},$$

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = a_k + \cfrac{1}{\cfrac{q_{k-1}}{q_{k-2}} + \ddots + a_2 + \cfrac{1}{a_1}},$$

ve böylece

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ . \ . \ . \ , a_2, a_1]$$

bulunur.

2.2. Sonsuz Sürekli Kesirler

Pozitif $a_0,\ a_1,\ ...$ tamsayılarının sonsuz bir dizi oluşturduğu kabul edilsin. "$[a_0; a_1, \ . \ . \ .]$ sonsuz sürekli kesrini nasıl tanımlayabiliriz?" sorusunun yanıtı için analiz bilgilerini hatırlayalım.

Aşağıdaki teorem, sonsuz bir dizinin iki özel durumda aynı limite gittiğini gösterir.

Teorem 2.2.1.

a) (x_n) monoton artan ve üstten sınırlı ise $\lim x_n$ vardır.

b) (x_n) monoton azalan ve alttan sınırlı ise $\lim x_n$ vardır.

c) (x_n) bir dizi ve $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = \alpha$ ise $\lim x_n$ vardır ve $\lim x_n = \alpha$ 'dır.

Ayrıca eğer (x_n)'ler monoton artan, yani $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ ve $\lim x_n = x$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x$ 'tir. Yine (x_n) monoton azalan, yani $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$ ve $\lim x_n = x$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $x < x_n$ 'dir.

Tanım 2.2.1. $(a_n)_{n=0}^{N}$ dizisi a_0 hariç diğer bütün terimleri pozitif olan reel sayıların bir dizisi olsun. $([a_0;a_1, \ldots, a_n])_{n=0}^{\infty}$ dizisine sonsuz sürekli kesir denir ve bu $[a_0;a_1,a_2, \ldots]$ biçiminde gösterilir. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}[a_0;a_1, \ldots, a_n]$ değeri varsa, o zaman sonsuz sürekli kesre yakınsaktır denir ve bu durumda limit $[a_0;a_1,a_2, \ldots]$ ile de gösterilir.

Bir sonsuz sürekli kesrin yakınsaklığını tanımlamak için, n nin artan değerleri için $[a_0;a_1, \ldots, a_n]$ sonlu sürekli kesirleri göz önüne alınır. $[a_0;a_1, \ldots, a_n]$ sonlu sürekli kesrinin değerinin hesaplanmış olduğunu ve $[a_0;a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}]$ sonlu sürekli kesrinin değerini tekrar hesaplamadan bulmak isteyelim. Önerme 2.1.2 'deki (ii) formülü $[a_0;a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}]$ ifadesini a_0 ve $[a_1; \ldots, a_n, a_{n+1}]$ sürekli kesrine bağlı olarak tanımladığından ve $[a_0;a_1, \ldots, a_n]$ ve a_{n+1} cinsinden yazılamadığından daha sonra kullanılmayacaktır. $[a_0;a_1, \ldots, a_n]$ sürekli kesrini hesaplamak için aşağıdaki gibi kolay bir yol vardır:

Tanım 2.2.2. a_0 hariç hepsi pozitif olan $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ reel sayılar dizisi ele alınsın.

$$p_0 = a_0 \qquad\qquad q_0 = 1$$
$$p_1 = a_0 a_1 + 1 \qquad\qquad q_1 = a_1$$

olsun ve $(p_n)_{n=2}^{N}$ ve $(q_n)_{n=2}^{N}$ dizileri daha önceden tanımlandığı gibi, $n \geq 2$ için

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \ , \ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

biçiminde tanımlansın. $\forall\ n \geq 0$ için, (p_n, q_n) ikilisi p_n/q_n biçiminde yazılırsa, p_n/q_n bölümüne $(a_n)_{n=o}^{N}$ dizisinin n'ninci yaklaşımı denir ve $\dfrac{p_n}{q_n}$ değeri C_n ile gösterilir.

Aşağıdaki teoremde ifade edildiği gibi sonsuz sürekli kesirler, sonlu sürekli kesirlerin limitleri olarak tanımlanabilir.

Teorem 2.2.2. Her $k \geq 1$ için, $a_k > 0$ olmak üzere, $a_0,\ a_1,\ ...$ tamsayılar dizisi verildiğinde, $C_k = [a_0; a_1, \ .\ .\ .\ , a_k]$ ise bu durumda C_k yaklaşımları bir α limitine gider yani,

$$\lim_{k \to \infty} C_k = \alpha$$

dır.

Teorem 2.2.2'nin ispatı için, çift indisli yaklaşımlara sahip sonsuz dizinin artan ve üst sınıra sahip olduğunu ve tek indisli yaklaşımlara sahip sonsuz dizinin azalan ve alt sınıra sahip olduğu gösterilecektir. Daha sonra Teorem 2.2.1 ile var olduğu garanti edilen iki dizinin limitlerinin aslında eşit olduğu gösterilecektir.

İspat: m bir çift pozitif tamsayı olsun. Teorem 2.1.6 gereği,

$$C_1 > C_3 > C_5 > ... > C_{2n-1} > C_{2n+1} > ...$$
$$C_0 < C_2 < C_4 < ... < C_{2n-2} < C_{2n} < ...$$

ve her pozitif k tamsayısı için, $C_{2j} < C_{2k+1}$ olduğu görülür. Her iki $C_1 > C_3 > C_5 > ...$ ve $C_0 < C_2 < C_4 < ...$ dizileri için Teorem 2.2.1'in hipotezinin sağlandığı görülür.

Böylece $C_1 > C_3 > C_5 > ...$ dizisi bir α_1 limitine gider ve $C_0 < C_2 < C_4 < ...$ dizisi bir α_2 limitine gider, yani $\lim\limits_{n\to\infty} C_{2n+1} = \alpha_1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} C_{2n} = \alpha_2$ 'dir.

Bizim amacımız α_1 ve α_2 limitlerinin eşit olduğunu göstermektir. Teorem 2.1.1 gereği,

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{q_{2n+1}q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$$

elde edilir.

Her k pozitif tamsayısı için, $q_k \geq k$ olduğu için

$$\frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}} < \frac{1}{(2n+1)(2n)}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$$

dizisinin limiti sıfırdır; yani,

$$\lim_{n\to\infty} (C_{2n+1} - C_{2n}) = 0$$

dır. Böylece $C_1 > C_3 > C_5 > ...$ ve $C_0 < C_2 < C_4 < ...$ dizileri aynı limite sahiptir; çünkü

$$\lim_{n\to\infty} (C_{2n+1} - C_{2n}) = \lim_{n\to\infty} C_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} C_{2n} = 0$$

dır. Bu nedenle $\alpha_1 = \alpha_2$'dir. Teorem 2.2.1'den dolayı $\lim C_n$ vardır ve $\lim C_n = \alpha = \alpha_1 = \alpha_2$'dir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Tanım 2.2.3. a_0 hariç hepsi pozitif tamsayı olmak üzere (a_0, sıfır veya negatif tamsayı olabilir) $a_0, a_1, a_2, ...$ sonsuz tamsayı dizisi verildiğinde, yine (2.2) denklemleri ile $\{p_k\}$ ve $\{q_k\}$ dizileri tanımlansın. $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ diyelim. C_k'ye k'ninci yaklaşım denir. C_k, $k+1$ terimli bir sonlu sürekli kesir, şu halde bir rasyonel sayı ve $C_k = p_k/q_k$'dir. $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sürekli kesrine sonsuz basit sürekli kesir denir. $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ kesrinin değeri $\lim\limits_{k\to\infty}[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ olarak tanımlanır. Bu limit $\lim\limits_{k\to\infty} C_k$ şeklinde de ifade edilebilir.

Tanım 2.2.4. a_0 hariç hepsi pozitif tamsayılar olan bir $a_0, a_1, a_2, ...$ tamsayılar dizisi, $C_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$ olmak üzere, değeri

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots] = \lim_{k\to\infty} C_k$$

olan bir sonsuz sürekli kesir tanımlar. C_k'lere sonsuz sürekli kesrin k'ninci yaklaşımı ve a_k'lere de kısmi bölümler denir[1].

Teorem 2.2.3. a_0 tamsayısı hariç, $a_0, a_1, a_2, ...$ pozitif tamsayılar olsun. Bu durumda $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sonsuz sürekli kesri irrasyoneldir.

İspat: $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ ve $C_k = p_k/q_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ α'nın k'ninci yaklaşımı olsun. n bir pozitif tamsayı olduğu zaman Teorem 2.2.2, $C_{2n} < \alpha < C_{2n+1}$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla,

$$0 < \alpha - C_{2n} < C_{2n+1} - C_{2n}$$

dir. Bununla beraber Sonuç 2.1.2'den $C_{2n+1} - C_{2n} = \dfrac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$ olduğu biliniyor.

Dolayısıyla,

$$0 < \alpha - C_{2n} = \alpha - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$$

olduğundan,

$$0 < \frac{\alpha q_{2n} - p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$$

ve böylece

$$0 < \alpha q_{2n} - p_{2n} < \frac{1}{q_{2n+1}}$$

bulunur.

α'nın rasyonel olduğunu varsayalım. Öyleyse $\alpha = \dfrac{a}{b}$ $(a \text{ ve } b \text{ tamsayılar}, b \neq 0)$ dir.

Buradan,

$$0 < \frac{aq_{2n}}{b} - p_{2n} < \frac{1}{q_{2n+1}}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik b ile çarpılırsa,

$$0 < aq_{2n} - bp_{2n} < \frac{b}{q_{2n+1}}$$

olduğu görülür.

Dikkat edilirse, her pozitif n tamsayısı için $aq_{2n} - bp_{2n}$ bir tamsayıdır. Bununla beraber $q_{2n+1} > 2n+1$ olduğundan, $2n_0 + 1 > b$ olan n_0 tamsayısı için $q_{2n_0+1} > 2n_0 + 1 > b$ 'dir. Dolayısıyla,

$$0 < aq_{2n_0} - bp_{2n_0} < \frac{b}{q_{2n_0+1}} < 1$$

dir. Bu ise $aq_{2n} - bp_{2n}$ 'nin bir tamsayı olmasıyla çelişir.

Böylece, her sonsuz sürekli kesrin bir irrasyonel sayı ifade ettiği gösterilmiş oldu. Şimdi, her irrasyonel sayının bir sonsuz sürekli kesirle tek türlü olarak gösterilebileceği görülecektir.

Teorem 2.2.4. $\alpha = \alpha_0$ bir irrasyonel sayı ve $a_0, a_1, a_2, ...$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$a_k = [\![\alpha_k]\!], \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$$

Bu durumda,

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ . \ . \ .]$$

dir[1].

İspat: a_k tamsayılarının tekrarlamalı tanımından, her k için a_k 'nin bir tamsayı olduğu görülür. Ayrıca matematiksel tümevarımı kullanarak her negatif olmayan k tamsayısı için α_k 'nin irrasyonel olduğu ve bir sonuç olarak α_{k+1} 'in var olduğu gösterilebilir.

$k \geq 0$ için α_k bir irrasyonel sayıdır. Gerçekten $k = 0$ için $\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha_0 - a_0}$ bir irrasyonel sayıdır. Çünkü $\alpha_0 - a_0$ bir irrasyonel sayıdır.

α_k'nin bir irrasyonel sayı olduğu varsayılsın. α_{k+1}'in irrasyonel olduğu gösterilecektir; çünkü

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$$

ilişkisi vardır.

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} \tag{2.4}$$

ve α_{k+1} rasyonelse, α_k rasyonel olacaktır. Dolayısıyla bir çelişki olur.
Şimdi α_k irrasyonel ve a_k bir tamsayı olacağından $\alpha_k \neq a_k$ ve

$$a_k < \alpha_k < a_k + 1$$

dir. Böylece,

$$0 < \alpha_k - a_k < 1$$

dir. Dolayısıyla,

$$\alpha_{k+1} = 1/(\alpha_k - a_k) > 1$$

ve sonuç olarak, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ için

$$a_{k+1} = [\![\alpha_{k+1}]\!] \geq 1$$

elde edilir; yani tüm $a_1,\ a_2,\ ...$ pozitif tamsayılardır.

(2.4)'ü kullanarak, tümevarımla $\alpha=[a_0;a_1,a_2,\ .\ .\ .\ ,a_k,\alpha_{k+1}]$ olduğu gösterilebilir.

$k=0$ ise $\alpha=[0;\alpha_1]$'dir.

$k-1$ için ifade doğru yani; $\alpha=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},\alpha_k]$ olsun. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\alpha&=[a_0;a_1,a_2,\ .\ .\ .\ ,a_{k-1},\alpha_k]\\&=\left[a_0;a_1,a_2,\ .\ .\ .\ ,a_{k-1},a_k+\frac{1}{\alpha_{k+1}}\right]\\&=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},[a_k;\alpha_{k+1}]]\\&=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},a_k,\alpha_{k+1}]\end{aligned}$$

dir.

$\lim\limits_{k\to\infty}[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_k,\alpha_{k+1}]=\alpha$ olduğu gösterilmelidir. Teorem 2.1.3 yardımıyla $[a_0;a_1,\ .\ .\ .]$'nin j'ninci yaklaşımı $C_j=p_j/q_j$ olmak üzere,

$$\alpha=[a_0;a_1,a_2,\ .\ .\ .\ ,a_k,\alpha_{k+1}]=\frac{\alpha_{k+1}p_k+p_{k-1}}{\alpha_{k+1}q_k+q_{k-1}}$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\begin{aligned}\alpha\text{ - }C_k&=\frac{\alpha_{k+1}p_k+p_{k-1}}{\alpha_{k+1}q_k+q_{k-1}}-\frac{p_k}{q_k}\\&=\frac{-(p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k)}{(\alpha_{k+1}q_k+q_{k-1})q_k}\\&=\frac{-(-1)^{k-1}}{(\alpha_{k+1}q_k+q_{k-1})q_k}\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^k}{(\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1})q_k} \quad \text{(Teorem 2.1.4'ten)}$$

elde edilir.

$$\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1} > a_{k+1}q_k + q_{k-1} = q_{k+1}$$

olduğundan,

$$|\alpha - C_k| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

bulunur.

$q_k \geq k$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} |\alpha - C_k| = 0$ 'dır; yani $\lim_{k\to\infty} C_k = \alpha$ ya da başka bir ifadeyle $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sonsuz sürekli kesrinin değeri α 'dır.

Teorem 2.2.5. a_0 hariç, a_k 'ler pozitif olmak üzere, $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ bir sonsuz sürekli kesir olsun. k, bir pozitif tamsayı ve

$$\alpha_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]$$

olsun. O zaman,

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, \alpha_k]$$

dir.

İspat: $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ olsun.

$$\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_n\right]=a_0+\frac{1}{\left[a_1;a_2,\ .\ .\ .\ ,a_n\right]}$$

eşitliğinden,

$$\alpha=a_0+1/\alpha_1=\left[a_0;\alpha_1\right]\ \left(\alpha_1=\left[a_1;a_2,\ .\ .\ .\right]\right)$$

elde edilir$\left(\alpha_1>a_1>0\right)$. Böylece $k=1$ için teorem doğru olur. Özel olarak, her k için $\alpha_k=\left[a_k;\alpha_{k+1}\right]$ eşitliği vardır. Şimdi, $k\geq 1$ için teoremin sağlandığı kabul edilsin. O zaman,

$$\begin{aligned}\alpha=\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_{k-1},\alpha_k\right]&=\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_{k\text{-}1},\left[a_k;\alpha_{k+1}\right]\right]\\&=\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_{k-1},a_k,\alpha_{k+1}\right]\ \text{(Önerme 2.1.2'den)}\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $k+1$ için de teoremin doğruluğu gösterilmiş olur.

Önerme 2.2.1. a_0, b_0 tamsayılar, a_1, a_2, ..., a_n pozitif tamsayılar ve $x\geq 1$, $y\geq 1$ olan iki reel sayı olsun. O zaman,

(i) $b_0=\left[a_0;x\right]$ ise $x=1$ ve $a_0=b_0$ -1'dir.

(ii) $a_0\neq b_0$ ise $\left[a_0;x\right]\neq\left[b_0;y\right]$'dir.

(iii) $\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_n,x\right]=\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_n,y\right]$ ise $x=y$'dir.

İspat: (i) Kabul edelim ki $b_0=\left[a_0;x\right]$ ve $x>1$ olsun. O halde,

$$a_0<\left[a_0;x\right]=b_0=a_0+1/x<a_0+1$$

çelişkisi elde edilir; çünkü b_0 bir tamsayıdır. Böylece $x=1$ ve $b_0=a_0+1$ elde edilir.

(ii) Kabul edelim ki $a_0 < b_0$ olsun. O halde,

$$[a_0; x] = a_0 + 1/x \le a_0 + 1 \le b_0 < [b_0; y]$$

elde edilir.

(iii) Eğer $[a_0; x] = [a_0; y]$ ise kesinlikle $x = y$'dir. Böylece $n = 0$ durumunda iddianın doğruluğu görülür. Şimdi iddianın $n-1$ için doğru olduğu ve $[a_0; a_1, \ldots, a_n, x] = [a_0; a_1, \ldots, a_n, y]$ olduğu kabul edilsin.
$[a_0; a_1, \ldots, a_n, x] = \left[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, [a_n; x]\right]$ ve diğer sürekli kesir benzer şekilde kısaltılabildiğinden $[a_n; x] = [a_n; y]$ sonucu ortaya çıkar ve böylece $x = y$ elde edilir.

Aşağıdaki teoremle, sonsuz sürekli kesri temsil eden irrasyonel sayının tek olduğu kanıtlanacaktır.

Teorem 2.2.6. Eğer $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ ve $[b_0; b_1, b_2, \ldots]$ sonsuz sürekli kesirleri aynı irrasyonel sayıyı gösterirse, her $k \ge 0$ tamsayısı için $a_k = b_k$'dir[1].

İspat: $[a_0; a_1, a_2, \ldots] = [b_0; b_1, b_2, \ldots]$ olsun. Önerme 2.2.1 den,

$$a_0 = b_0$$

elde edilir.

$a_k \ne b_k$ olan bir $k \ge 1$ tamsayısı mevcut olsun. k'yi bu şartı sağlayan sayıların en küçüğü olarak alalım. Dolayısıyla $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$'dir.

$$\alpha_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots]$$
$$\beta_k = [b_k; b_{k+1}, \ldots]$$

$$\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_k,a_{k+1},\ .\ .\ .\right]=\left[b_0;b_1,\ .\ .\ .\ ,b_k,b_{k+1},\ .\ .\ .\right]$$

ve

$$\left[a_0;a_1,\ .\ .\ .\ ,a_{k-1},\alpha_k\right]=\left[b_0;b_1,\ .\ .\ .\ ,b_{k-1},\beta_k\right]$$

olduğundan önceki önermeye göre

$$\alpha_k=\left[a_k;a_{k+1},\ .\ .\ .\right]=\left[b_k;b_{k+1},\ .\ .\ .\right]=\beta_k$$

ve böylece

$$\left[a_k;\alpha_{k+1}\right]=\left[b_k;\beta_{k+1}\right]$$

yani,

$$a_k=b_k$$

bulunur. Bu ise $a_k \neq b_k$ olmasıyla çelişir.

Bir reel sayının basit sürekli kesir açılımını bulmak için Teorem 2.2.4‘te verilen algoritma kullanılır. Bu işlem aşağıdaki örnekle gösterilsin:

Örnek 2.2.1. $\sqrt{2}$ nin sürekli kesir açılımını bulalım. $\alpha=\alpha_0=\sqrt{2}$ olsun.

$$a_0=\left[\!\left[\sqrt{2}\right]\!\right]=1, \qquad \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1,$$

$$a_1=\left[\!\left[\sqrt{2}+1\right]\!\right]=2, \qquad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}+1-2}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1,$$

$$a_2=\left[\!\left[\sqrt{2}+1\right]\!\right]=2, \qquad \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{2}+1-2}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1,$$

$$a_n = 2, \qquad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1.$$

Böylece,

$$\sqrt{2} = [1;2,2,2,\ ...]$$

dir.

$\sqrt{2}$ nin basit sürekli kesri periyodiktir. Periyodik sürekli kesirler bir sonraki bölümde gösterilecektir.

Örnek 2.2.2. $\sqrt{3}$ ün sürekli kesir açılımını bulalım.

$\alpha = \alpha_0 = \sqrt{3}$ olsun.

$$a_0 = [\![\sqrt{3}]\!] = 1, \qquad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$a_1 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]\!\!\right] = 1, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1,$$

$$a_2 = [\![\sqrt{3}+1]\!] = 2, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \alpha_1,$$

$$a_3 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]\!\!\right] = a_1, \qquad \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - a_3} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \alpha_2,$$

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \text{eğer n tekse} \\ \sqrt{3}+1 & \text{eğer n çiftse} \end{cases} \qquad a_n = \begin{cases} 1 & \text{eğer n tekse} \\ 2 & \text{eğer n çiftse} \end{cases}$$

Böylece,

$$\sqrt{3} = [1;1,2,1,2,\ ...]$$

dir.

Bu sonsuz sürekli kesrin birkaç yaklaşımı ise,

$$1,\ 2,\ \frac{5}{3},\frac{7}{4},\frac{19}{11},\frac{26}{15},\frac{71}{41},\frac{97}{56}$$

dır.

Bir irrasyonel sayının sonlu sürekli kesrinin α ’ya yaklaşımları iyi yaklaşımlardır. Gerçekten eğer p_k/q_k bu sürekli kesrin k’ninci yaklaşımı ise, Teorem 2.2.4’ün ispatından,

$$|\alpha - p_k/q_k| < 1/q_k q_{k+1}$$

olduğu biliniyor. $q_k < q_{k+1}$ olduğundan,

$$|\alpha - p_k/q_k| < 1/q_k^2$$

elde edilir.

Teorem 2.2.7. α bir irrasyonel sayı ve $j = 1, 2, \ldots\ldots$ için p_j/q_j α ’nın sonsuz sürekli kesrinin yaklaşımı olsun; r ve s tamsayılar ve $s > 0$ olsun. Eğer $k > 0$ bir tamsayı ve

$$|s\alpha - r| < |q_k\alpha - p_k| \quad \text{ise} \quad s \geq q_{k+1}$$

dir.

İspat: $|s\alpha - r| < |q_k\alpha - p_k|$ olduğu kabul edilsin; fakat $1 \leq s < q_{k+1}$ olsun.

$$\begin{aligned} p_k x + p_{k+1} y &= r \\ q_k x + q_{k+1} y &= s \end{aligned} \tag{2.5}$$

denklemi $\begin{vmatrix} p_k & p_{k+1} \\ q_k & q_{k+1} \end{vmatrix} = p_k q_{k+1} - q_k p_{k+1} = \pm 1$ olduğundan, tamsayı çözümüne sahiptir.

İlk denklemi q_k ile, ikinci denklemi p_k ile çarpıp birinciden ikinci çıkarılırsa,

$$\left(p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1}\right) y = rq_k - sp_k$$

bulunur.Teorem 2.1.4'ten $p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1} = \left(-1\right)^k$ olduğu biliniyor. Buradan,

$$\left(-1\right)^k y = rq_k - sp_k$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanı $\left(-1\right)^k$ ile çarpılırsa,

$$\left(-1\right)^{2k} y = \left(-1\right)^k \left(rq_k - sp_k\right)$$

ve böylece

$$y = \left(-1\right)^k \left(rq_k - sp_k\right)$$

bulunur. Benzer şekilde birinci eşitlik q_{k+1} ile ve ikinci eşitlik p_{k+1} ile çarpılırsa ve ikinciden birinci çıkarılırsa,

$$\left(p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1}\right) x = sp_{k+1} - rq_{k+1}$$

bulunur ve buradan,

$$x = \left(-1\right)^k \left(sp_{k+1} - rq_{k+1}\right)$$

elde edilir. $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer $x = 0$ ise $sp_{k+1} = rq_{k+1}$ olur ki bu durum $q_{k+1} \mid sp_{k+1}$ olmasını gerektirir. $(q_{k+1}, p_{k+1}) = 1$ olduğundan $q_{k+1} \mid s$ bulunur. Bu ise $q_{k+1} \leq s$ demektir. Bu durum kabulümüzle çelişir. Eğer $y = 0$ ise $r = p_k x$ ve $s = q_k x$ olduğunu görmek kolaydır. Çünkü, $p_k x + p_{k+1} y = r$ $q_k x + q_{k+1} y = s$ denklemlerinde $y = 0$ alınırsa $r = p_k x$ ve $s = q_k x$ olur. Buradan $| s\alpha - r | = | x || q_k \alpha - p_k | \geq | q_k \alpha - p_k |$ olur. Bu ise hipotez ile çelişir.

Şimdi x ve y'nin zıt işaretli olduğu gösterilecektir. İlk olarak $y<0$ olduğu varsayılsın ($y \neq 0$ idi). $q_k x = s q_{k+1} y$ ve $y<0$ olduğundan $s - q_{k+1} y > 0$'dır; yani $q_k x > 0$'dır. $q_k > 0$ olduğundan $x>0$ olur. $y>0$ ise $q_{k+1} y \geq q_{k+1} > s$ olduğundan $q_k x = s - q_{k+1} y < 0$ olur. Dolayısıyla $x<0$'dır; yani x ve y zıt işaretlidir.

Teorem 2.1.5'ten dolayı ya $p_k/q_k < \alpha < p_{k+1}/q_{k+1}$ ya da $p_{k+1}/q_{k+1} < \alpha < p_k/q_k$'dir.

$C_{2k} < \alpha < C_{2k+1}$ olduğundan $\alpha - \dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}} < 0$ eşitsizliği yazılabilir; buradan $\dfrac{q_{k+1}\alpha - p_{k+1}}{q_{k+1}} < 0$ bulunur. $q_{k+1} > 0$ olduğundan $q_{k+1}\alpha - p_{k+1} < 0$ elde edilir. Aynı şekilde $\alpha - \dfrac{p_k}{q_k} > 0$ ve $q_k > 0$ olduğundan $q_k\alpha - p_k > 0$ olduğu görülür. Bu durumda $q_k\alpha - p_k$ ve $q_{k+1}\alpha - p_{k+1}$ zıt işaretli olur. Dolayısıyla (2.5) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} |s\alpha - r| &= |(q_k x + q_{k+1} y)\alpha - (p_k x + p_{k+1} y)| \\ &= |x(q_k\alpha - p_k) + y(q_{k+1}\alpha - p_{k+1})| \end{aligned}$$

elde edilir.

x ile y ve $q_k\alpha - p_k$ ile $q_{k+1}\alpha - p_{k+1}$ zıt işaretli olduğundan, $x(q_k\alpha - p_k)$ ve $y(q_{k+1}\alpha - p_{k+1})$'in aynı işarete sahip olduğu görülür.

$|x| \geq 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} |s\alpha - r| &= |x||q_k\alpha - p_k| + |y|\ |q_{k+1}\alpha - p_{k+1}| \\ &\geq |x||q_k\alpha - p_k| \ \geq |q_k\alpha - p_k| \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise varsayımla çelişir.

Varsayımın yanlış olduğu görüldü ve sonuç olarak teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 2.2.1. α bir irrasyonel sayı ve p_j/q_j, $j=1, 2, \ldots$ için α'nın sonsuz sürekli kesrinin yaklaşımı olsun. r ve s $(s>0)$ tamsayılar olmak üzere r/s rasyonel sayı ve k bir pozitif tamsayı olsun. Eğer

$$|\alpha - r/s| < |\alpha - p_k/q_k|$$

ise $s > q_k$'dir.

İspat: $s \le q_k$ ve $|\alpha - r/s| < |\alpha - p_k/q_k|$ olduğu varsayılsın. Bu iki eşitsizlik çarpılırsa,

$$s|\alpha - r/s| < q_k|\alpha - p_k/q_k|$$

bulunur. Böylece,

$$|s\alpha - r| < |q_k\alpha - p_k|$$

olur. Teorem 2.2.7'ye göre $s \ge q_{k+1}$ elde edilir. Bu olamaz.

Örnek 2.2.1. π reel sayısının sürekli kesir açılımı
$\pi = [3;7,15,1,29,1,1,1,2,1,3,\ .\ .\ .]$'dir. Bu sürekli kesrin yaklaşımları π ye en uygun rasyonel yaklaşımlardır. Bunların ilk beşi, $3, 22/7, 333/106, 355/113$ ve $103\,993/33\,102$'dir.
Sonuç 2.2.1'den $22/7$ π'nin en uygun rasyonel yaklaşımıdır.

Örnek 2.2.2. e reel sayısının sürekli kesir açılımı

$$e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,\ .\ .\ .]$$

dir. Bu sürekli kesrin yaklaşımları e'ye en uygun rasyonel yaklaşımlardır. Bunların ilk beşi, $2/1$, $3/1$, $8/3$, $11/4$ ve $14/5$'tir.

Teorem 2.2.8. α bir irrasyonel sayı, r, s tamsayılar ve $s > 0$ olsun. Eğer,

$$|\alpha - r/s| < 1/\left(2s^2\right)$$

ise r/s, α 'nın sürekli kesirlere açılımındaki k'ninci yaklaşımından biridir.

İspat: Aksi kabul edilsin. $\alpha \neq p_k/q_k$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ olsun. Dolayısıyla $q_k \leq s < q_{k+1}$ olacak biçimde $k \geq 0$ vardır. Teorem 2.2.7 'ye göre,

$$|q_k\alpha - p_k| \leq |s\alpha - r| = s\,|\alpha - r/s| < 1/\left(2s\right)$$

elde edilir. q_k ile bölme yapılırsa,

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{2sq_k}$$

olur. $|sp_k - rq_k| \geq 1$ dir. ($sp_k - rq_k \neq 0$ bir tamsayıdır; çünkü $r/s \neq p_k/q_k$ 'dir. $sp_k - rq_k = 0$ ise $s\,|\,q_k$ ve buradan $s \leq q_k$ olur.)

$$\begin{aligned}\frac{1}{sq_k} &\leq \frac{|sp_k - rq_k|}{sq_k} \\ &= \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{r}{s}\right| = \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{r}{s} + \alpha - s\right| \\ &\leq \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| + \left|\alpha - \frac{r}{s}\right| \\ &< \frac{1}{2sq_k} + \frac{1}{2s^2}\end{aligned}$$

bulunur.

$\dfrac{1}{sq_k} < \dfrac{1}{2sq_k} + \dfrac{1}{2s^2}$ eşitsizliği $2sq_k$ ile çarpılırsa $2s < s + q_k$ eşitsizliği elde edilir ve bu ise $q_k > s$ olmasını gerektirir. Bu ise hipotezle çelişir.

2.3. Periyodik Sonsuz Sürekli Kesirler

$n \geq N$ şartını sağlayan yeterince büyük her pozitif n tamsayıları için $a_n = a_{n+k}$ olacak biçimde pozitif N ve k tamsayıları varsa $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sonsuz sürekli kesrine periyodiktir denir.

$n \geq N$

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+k-1}, a_N, a_{N+1}, \ldots]$$

periyodik sonsuz sürekli kesrini ifade etmek için,

$$\left[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, \overline{a_N, a_{N+1}, \ldots, a_{N+k-1}}\right]$$

gösterimi kullanılacaktır. Örneğin, $[1; 2, 3, 4, 5, 4, 5, 4, 5, \ldots]$ sonsuz sürekli kesri $\left[1; 2, 3, \overline{4, 5}\right]$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.1. α irrasyonel sayı ve α sayısı katsayıları tamsayılar olan kuadratik bir polinomun kökü ise, α reel sayısına bir kuadratik irrasyoneldir denir; yani A, B ve C tamsayılar ve $A \neq 0$ olmak üzere $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ ise α'ya kuadratik irrasyonel sayı denir[1].

Örnek 2.3.1. $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ olsun. Öyleyse α irrasyoneldir. Çünkü α rasyonel olsaydı, $\alpha - 2 = \sqrt{3}$ rasyonel olurdu. Bu ise çelişkidir. $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ ise $\alpha^2 = 7 + 4\sqrt{3}$ bulunur ve buradan $\alpha^2 - 4\alpha + 1 = \left(7 + 4\sqrt{3}\right) - 4\left(2 + \sqrt{3}\right) + 1 = 0$ elde edilir. Böylece α bir kuadratik irrasyonel olur.

Bir irrasyonel sayının sonsuz sürekli kesrinin periyodik olması için gerekli ve yeterli şartın bu sayının bir kuadratik irrasyonel sayı olması gerektiği gösterilecektir. Önce kuadratik irrasyoneller hakkında bazı kullanışlı sonuçlar verilecektir.

Önerme 2.3.1. α reel sayısı kuadratik irrasyoneldir $\Leftrightarrow$ a,b,c tamsayılar, $c \neq 0$, $b > 0$ tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere,

$$\alpha = (a + \sqrt{b})/c$$

dir.

İspat: Eğer α kuadratik irrasyonel ise, α irrasyoneldir ve $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ olacak şekilde A, B, C tamsayıları vardır. $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ olduğundan

$$\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

olduğu biliniyor. α bir reel sayı olduğundan $B^2 - 4AC > 0$'dır ve α irrasyonel olduğundan $B^2 - 4AC$ tam kare değildir ve $A \neq 0$'dır. α, ya, $a = -B$, $b = B^2 - 4AC$ ve $c = 2A$ ya da $a = B$, $b = B^2 - 4AC$ ve $c = -2A$ alınarak $\alpha = \dfrac{a + \sqrt{b}}{c}$ biçiminde yazılabilir.

Tersine, eğer a, b, c tamsayıları için $b > 0$, $c \neq 0$, b tam kare olmamak üzere $\alpha = (a + \sqrt{b})/c$ ise, α irrasyoneldir. Ayrıca $c^2\alpha^2 - 2ac\alpha + \left(a^2 - b\right) = 0$ olduğuna dikkat edilirse, α kuadratik irrasyoneldir.

Aşağıdaki önerme, periyodik sürekli kesirlerin kuadratik irrasyoneller olarak ifade edileceğini gösterir.

Önerme 2.3.2. Eğer α kuadratik irrasyonel ve r, s, t, u tamsayılar ise, $(r\alpha+s)/(t\alpha+u)$ ya rasyoneldir ya da bir kuadratik irrasyoneldir.

İspat: Önerme 2.3.1 gereği, a, b, c, tamsayılar, $b>0$, $c\neq 0$, $b>0$ tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere, α kuadratik irrasyonel sayısı $\alpha=(a+\sqrt{b})/c$ biçimindedir. Buradan,

$$\begin{aligned}\frac{r\alpha+s}{t\alpha+u} &= \left[\frac{r\left(a+\sqrt{b}\right)}{s}+s\right] / \left[\frac{t\left(a+\sqrt{b}\right)}{c}+u\right] \\ &= \frac{(ar+cs)+r\sqrt{b}}{(at+cu)+t\sqrt{b}} \\ &= \frac{\left[(ar+cs)+r\sqrt{b}\right]\left[(at+cu)-t\sqrt{b}\right]}{\left[(at+cu)+t\sqrt{b}\right]\left[(at+cu)-t\sqrt{b}\right]} \\ &= \frac{\left[(ar+cs)(at+cu)-rtb\right]+\left[r(at+cu)-t(ar+cs)\right]\sqrt{b}}{(at+cu)^2-t^2b}\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece Önerme 2.3.1'den $\sqrt{b}$ ' nin katsayısı 0 ise $(r\alpha+s)/(t\alpha+u)$ bir rasyonel sayıdır, değilse bir kuadratik irrasyoneldir.

Tanım 2.3.2. $\alpha=(a+\sqrt{b})/c$ bir kuadratik irrasyonel olsun. Bu durumda α 'nın eşleniği α' ile ifade edilir ve $\alpha'=\left(a-\sqrt{b}\right)/c$ olarak tanımlanır.

Önerme 2.3.3. α kuadratik irrasyoneli $A\alpha^2+B\alpha+C=0$ polinomunun bir kökü ise α'nın eşleniği α' de bu polinomun diğer köküdür.

İspat: Kuadratik formülden, $A\alpha^2+B\alpha+C=0$ 'ın iki kökünün

$$\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

olduğu görülür. Eğer α bu köklerden biri ise α' diğer kök olur; çünkü $\sqrt{B^2-4AC}$ nin işareti değişeceğinden α 'dan diğer kök α' elde edilir.

Aşağıdaki önerme, kuadratik irrasyonelleri içeren aritmetik ifadelerin eşleniğinin nasıl bulunacağını gösterir.

Önerme 2.3.4. $\alpha_1=\left(a_1+b_1\sqrt{d}\right)/c_1$ ve $\alpha_2=\left(a_2+b_2\sqrt{d}\right)/c_2$ rasyonel ya da kuadratik irrasyonel ise,

(i) $(\alpha_1+\alpha_2)'=\alpha_1'+\alpha_2'$

(ii) $(\alpha_1-\alpha_2)'=\alpha_1'-\alpha_2'$

(iii) $(\alpha_1\alpha_2)'=\alpha_1'\alpha_2'$

(iv) $(\alpha_1/\alpha_2)'=\alpha_1'/\alpha_2'$

dir.

İspat:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\left(a_1+b_1\sqrt{d}\right)/c_1}{\left(a_2+b_2\sqrt{d}\right)/c_2}=\frac{c_2\left(a_1+b_1\sqrt{d}\right)\left(a_2-b_2\sqrt{d}\right)}{c_1\left(a_2+b_2\sqrt{d}\right)\left(a_2-b_2\sqrt{d}\right)}$$

$$=\frac{\left(c_2a_1a_2-c_2b_1b_2d\right)+\left(c_2a_2b_1-c_2a_1b_2\right)\sqrt{d}}{c_1\left(a_2^2-b_2^2d\right)}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\alpha_1'/\alpha_2'=\frac{\left(a_1-b_1\sqrt{d}\right)/c_2}{\left(a_2-b_2\sqrt{d}\right)/c_2}=\frac{c_2\left(a_1-b_1\sqrt{d}\right)\left(a_2+b_2\sqrt{d}\right)}{c_1\left(a_2-b_2\sqrt{d}\right)\left(a_2+b_2\sqrt{d}\right)}$$

$$=\frac{\left(c_2a_2a_1-c_2b_1b_2d\right)-\left(c_2a_2b_1-c_2a_1b_2\right)\sqrt{d}}{c_1\left(a_2^2-b_2^2d\right)}$$

bulunur. Böylece, $(\alpha_1/\alpha_2)'=\alpha_1'/\alpha_2'$ elde edilir. Diğer şıkların ispatı benzer yolla yapılır.

Bir kuadratik irrasyonelin sürekli kesrini bulmak için aşağıdaki önermeye ihtiyaç vardır.

Önerme 2.3.5. Her α kuadratik irrasyonel sayısı, $d > 0$ tam kare olmayan bir tamsayı ve P ve Q tamsayılar, $Q \neq 0$, $Q \mid \left(d - P^2\right)$ olmak üzere,

$$\alpha = \left(P + \sqrt{d}\right)/Q$$

biçimindedir.

İspat: α kuadratik irrasyonel olduğundan, Önerme 2.3.1'den dolayı a, b, c tamsayılar $b > 0,\ c \neq 0$ olmak üzere

$$\alpha = \left(a + \sqrt{b}\right)/c$$

olarak yazılabilir. Bu ifadenin pay ve paydası $|c|$ ile çarpılırsa,

$$\alpha = \frac{a|c| + \sqrt{bc^2}}{c|c|}$$

elde edilir. Şimdi, $P = a|c|$, $Q = c|c|$ ve $d = bc^2$ alalım. O zaman P, Q ve d tamsayılardır. $c \neq 0$ olduğundan $Q \neq 0$'dır; ayrıca $b > 0$ olduğundan $d > 0$ dır. b bir tam kare olmadığından d bir tam kare değildir. Sonuç olarak,

$d - P^2 = bc^2 - a^2c^2 = c^2\left(b - a^2\right) = \pm Q\left(b - a^2\right)$ olduğundan $Q \mid \left(d - P^2\right)$ bulunur.

Teorem 2.3.1. α bir kuadratik irrasyonel olsun. Önerme 2.3.5'e göre, $Q_0 \neq 0$ $d > 0$ tam kare olmayan bir sayı ve $Q_0 \mid \left(d - P_0^2\right)$ olmak üzere,

$$\alpha = \left(P_0 + \sqrt{d}\right)/Q_0$$

olan P_0, Q_0 ve d tamsayıları vardır. $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ için,

$$\alpha_k = \left(P_k + \sqrt{d}\right)/Q_k$$
$$a_k = [\![\alpha_k]\!]$$
$$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k$$
$$Q_{k+1} = \left(d - P_{k+1}^2\right)/Q_k$$

ardışık olarak tanımlanırsa,

$$\alpha = \left[a_0; a_1, a_2, \ . \ . \ .\right]$$

dır.

İspat: Matematiksel tümevarımla P_k, Q_k nın tamsayılar ve $Q_k \neq 0$, $Q_k \mid \left(d - P_k^2\right)$ olduğu gösterilecektir. $k = 0$ için iddia doğrudur. P_k, Q_k 'ların tamsayı ve $Q_k \neq 0$, $Q_k \mid \left(d - P_k^2\right)$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde,

$$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k$$

bir tamsayıdır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= \left(d - P_{k+1}^2\right)/Q_k \\ &= \left[d - \left(a_k Q_k - P_k\right)^2\right]/Q_k \\ &= \left(d - P_k^2\right)/Q_k + \left(2a_k P_k - a_k^2 Q_k\right) \end{aligned}$$

dir. Tümevarım hipotezine göre $Q_k \mid \left(d-P_k^2\right)$ olduğundan, Q_{k+1} bir tamsayıdır. d tam kare olmadığından $d \neq P_k^2$ 'dir; dolayısıyla $Q_{k+1}=\left(d-P_{k+1}^2\right)/Q_k \neq 0$ 'dır. $Q_k=\left(d-P_{k+1}^2\right)/Q_{k+1}$ ise $Q_kQ_{k+1}=\left(d-P_{k+1}^2\right)$ olduğundan $Q_{k+1} \mid \left(d-P_{k+1}^2\right)$ bulunur. Böylece iddia $k+1$ için de doğrudur. Eğer $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ için,

$$\alpha_{k+1}=1/\left(\alpha_k-a_k\right)$$

olduğu gösterebilirse, Teorem 2.2.4'e göre $\alpha=\left[a_0;a_1,a_2,\ldots\right]$ olduğu gösterilmiş olur.

$$\begin{aligned}
\alpha_k-a_k &= \frac{P_k+\sqrt{d}}{Q_k}-a_k \\
&= \left[\sqrt{d}-\left(a_kQ_k-P_k\right)\right]/Q_k \\
&= \left(\sqrt{d}-P_{k+1}\right)/Q_k \\
&= \left(\sqrt{d}-P_{k+1}\right)\left(\sqrt{d}+P_{k+1}\right)/Q_k\left(\sqrt{d}+P_{k+1}\right) \\
&= \left(d-P_{k+1}^2\right)/\left(Q_k\left(\sqrt{d}+P_{k+1}\right)\right) \\
&= Q_kQ_{k+1}/\left(Q_k\left(\sqrt{d}+P_{k+1}\right)\right) \\
&= Q_{k+1}/\left(\sqrt{d}+P_{k+1}\right) \\
&= 1/\alpha_{k+1}
\end{aligned}$$

dir. Öyleyse, $\alpha=\left[a_0;a_1,a_2,\ \ldots\right]$ sonucu elde edilir.

Teorem 2.3.1'de verilen algoritmanın kullanımı örneklerle gösterilecektir.

Örnek 2.3.2. $\alpha=\dfrac{11+\sqrt{30}}{13}$ irrasyonel sayısı sonsuz sürekli kesir olarak yazılabilir. Önerme 2.3.5'i kullanarak

$$\alpha=\left(143+\sqrt{5070}\right)/169$$

yazılabilir. $P_0=143$, $Q_0=169$ ve $d=5070$'dir. Buradan $a_0=[\![\alpha]\!]=1$ ve

$$P_1=1.169-143=26 \qquad \alpha_1=\left(26+\sqrt{5070}\right)/26$$

$$Q_1=\left(5070-26^2\right)/169=26 \qquad a_1=\left[\!\!\left[\left(26+\sqrt{5070}\right)/26\right]\!\!\right]=3,$$

$$P_2=3.26-26=52 \qquad \alpha_2=\left(52+\sqrt{5070}\right)/91$$

$$Q_2=\left(5070-52^2\right)/26=91 \qquad a_2=\left[\!\!\left[\left(52+\sqrt{5070}\right)/91\right]\!\!\right]=1,$$

$$P_3=1.91-52=39 \qquad \alpha_3=\left(39+\sqrt{5070}\right)/39$$

$$Q_3=\left(5070-39^2\right)/91=39 \qquad a_3=\left[\!\!\left[\left(39+\sqrt{5070}\right)/39\right]\!\!\right]=2,$$

$$P_4=2.39-39=39 \qquad \alpha_4=\left(39+\sqrt{5070}\right)/91$$

$$Q_4=\left(5070-39^2\right)/39=91 \qquad a_4=\left[\!\!\left[\left(39+\sqrt{5070}\right)/91\right]\!\!\right]=1,$$

$$P_5=1.91-39=52 \qquad \alpha_5=\left(52+\sqrt{5070}\right)/26$$

$$Q_5=\left(5070-52^2\right)/91=26 \qquad a_5=\left[\!\!\left[\left(52+\sqrt{5070}\right)/26\right]\!\!\right]=4,$$

$$P_6=4.26-52=52 \qquad \alpha_6=\left(52+\sqrt{5070}\right)/91$$

$$Q_6=\left(5070-52^2\right)/26=91 \qquad a_6=\left[\!\!\left[\left(52+\sqrt{5070}\right)/91\right]\!\!\right]=1,$$

ve böyle devam edersek $P_2=P_6$ ve $Q_2=Q_6$ yinelemesi elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\left(11+\sqrt{30}\right)/13&=[1;3,1,2,1,4,1,2,1,4,\ .\ .\ .]\\&=\left[1;3,\ \overline{1,2,1,4}\right]\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 2.3.3. $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ irrasyonel sayısı sonsuz sürekli kesir olarak yazılabilir. Önerme 2.3.5'ten

$$\alpha = \frac{2+\sqrt{52}}{4}$$

$P_0 = 2$, $Q_0 = 4$ ve $d = 52$ 'dir. Buradan $a_0 = [\![\alpha]\!] = 2$ ve

$$\begin{array}{ll} P_1 = 2.4-2=6 & \alpha_1 = \left(6+\sqrt{52}\right)/4 \\ Q_1 = \left(52-6^2\right)/4 = 4 & a_1 = \left[\!\!\left[\left(6+\sqrt{52}\right)/4\right]\!\!\right] = 3 \\ P_2 = 3.4-6=6 & \alpha_2 = \left(6+\sqrt{52}\right)/4 \\ Q_2 = \left(52-6^2\right)/4 = 4 & a_2 = \left[\!\!\left[\left(6+\sqrt{52}\right)/4\right]\!\!\right] = 3 \\ P_3 = 3.4-6=6 & \alpha_3 = \left(6+\sqrt{52}\right)/4 \\ Q_3 = \left(52-6^2\right)/4 = 4 & a_3 = \left[\!\!\left[\left(6+\sqrt{52}\right)/4\right]\!\!\right] = 3 \end{array}$$

ve böyle devam edilirse $P_1 = P_2$ ve $Q_1 = Q_2$ yinelemesi elde edilir.

$$\left(1+\sqrt{13}\right)/2 = \left[2;3,\ 3,\ 3,\ .\ .\ .\right] = \left[2;\overline{3}\right]$$

bulunur.

Periyodik sürekli kesirler hakkındaki asıl sonuç Lagrange Teoremi'dir.

Teorem 2.3.2. Lagrange Teoremi: Bir α irrasyonel sayısının sonsuz sürekli kesre açılımının periyodik olması için gerekli ve yeterli şart α'nın kuadratik irrasyonel sayı olmasıdır$\left[3\right]$.

İspat: α'nın sürekli kesri periyodik, yani

$$\alpha = \left[a_0;a_1,a_2,\ .\ .\ .\ ,a_{N-1},\overline{a_N,a_{N+1},\ .\ .\ .\ ,a_{N+k}}\right]$$

olsun. Şimdi $\beta = \left[\overline{a_N;a_{N+1},\ .\ .\ .\ ,a_{N+k}}\right]$ olsun. Buradan $\beta = \left[a_N;a_{N+1},\ .\ .\ .\ ,a_{N+k},\beta\right]$ ve

Teorem 2.1.3 kullanılarak $\left[a_N;a_{N+1}, \ . \ . \ . \ , a_{N+k}\right]$'nin yaklaşımları p_k/q_k ve p_{k-1}/q_{k-1} olmak üzere,

$$\beta = \frac{\beta p_k + p_{k-1}}{\beta q_k + q_{k-1}} \tag{2.6}$$

olduğu görülebilir.

β nın sürekli kesri sonsuz olduğundan, β irrasyoneldir ve (2.6)'ya göre β sayısı

$$q_k\beta^2 + \left(q_{k-1} - p_k\right)\beta - p_{k-1} = 0$$

denklemini sağlar; yani β, kuadratik irrasyoneldir.

$$\alpha = \left[a_0;a_1,a_2, \ . \ . \ . \ , a_{N-1},\beta\right]$$

olduğu dikkate alınırsa, Teorem 2.1.6'dan dolayı, $\left[a_0;a_1,a_2, \ . \ . \ . \ , a_{N-1}\right]$'in yaklaşımları p_{N-1}/q_{N-1} ve p_{N-2}/q_{N-2} olmak üzere,

$$\alpha = \frac{\beta p_{N-1} + p_{N-2}}{\beta q_{N-1} + q_{N-2}}$$

elde edilir. β kuadratik irrasyonel olduğundan, Önerme 2.3.2 bize α'nın kuadratik irrasyonel olduğunu gösterir(α'nın irrasyonel olduğu biliniyor; çünkü α bir sonsuz sürekli kesir açılımıdır) .

Kuadratik irrasyonelin sürekli kesir açılımının periyodik olduğu gösterilirse Lagrange Teoremi'nin ispatı tamamlanır.

Şimdi de α bir kuadratik irrasyonel olsun. Öyleyse Önerme 2.3.5'e göre,

$$\alpha = \left(P_0 + \sqrt{d}\right)/Q_0$$

yazılabilir. Ayrıca Teorem 2.3.1'e göre, $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ için,

$$\alpha_k = \left(P_k + \sqrt{d}\right)/Q_k$$
$$a_k = [\![\alpha_k]\!]$$
$$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k$$
$$Q_{k+1} = \left(d - P_{k+1}^2\right)/Q_k$$

olmak üzere $\alpha = \left[a_0; a_1, a_2,\ ...\right]$ 'dır. Teorem 2.1.3 'e göre,

$$\alpha = \left(p_{k-1}\alpha_k + p_{k-2}\right)/\left(q_{k-1}\alpha_k + q_{k-2}\right)$$

dir. Bu eşitliğin her iki yanının eşleniği alınıp Önerme 2.3.4 kullanılırsa,

$$\alpha' = \left(p_{k-1}\alpha'_k + p_{k-2}\right)/\left(q_{k-1}\alpha'_k + q_{k-2}\right) \qquad (2.7)$$

olduğu görülür. Bu denklemde α'_k çekilirse,

$$q_{k-1}\alpha'_k\alpha' + \alpha' q_{k-2} = p_{k-1}\alpha'_k + p_{k-2}$$

yani

$$\alpha'_k(q_{k-1}\alpha' - p_{k-1}) = p_{k-2} - \alpha' q_{k-2}$$

ve buradan da

$$\alpha'_k = \frac{p_{k-2} - \alpha' q_{k-2}}{q_{k-1}\alpha' - p_{k-1}}$$

$$= \frac{-q_{k-2}}{q_{k-1}} \left(\frac{\alpha' - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}}{\alpha' - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}} \right)$$

bulunur. k'nin sonsuza gitmesi durumunda limit alınırsa p_{k-2}/q_{k-2} ve p_{k-1}/q_{k-1} değerlerinin ikisi de α'ya yaklaşır ve böylece parantez içi 1 olur. Bu yüzden N sabit bir tamsayı olmak üzere $k > N$ olacak şekilde her k pozitif tam sayısı için parantez içi pozitif ve dolayısıyla $\alpha_k^{'} < 0$'dır; fakat α_k, her $k \geq 1$ için pozitif ve hatta $\alpha_k > 1$ olduğundan, $k > N$ için $\alpha_k - \alpha_k^{'} > 0$'dır.

$$\alpha_k - \alpha_k^{'} = \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k} - \frac{P_k - \sqrt{d}}{Q_k} = \frac{2\sqrt{d}}{Q_k} > 0$$

olduğundan $k \geq N$ ise $Q_k > 0$'dır. $Q_k Q_{k+1} = d - P_{k+1}^2$ olduğundan, $k \geq N$ için,

$$Q_k \leq Q_k Q_{k+1} = d - P_{k+1}^2 \leq d$$

dir. Diğer yandan, $k \geq N$ için,

$$P_{k+1}^2 \leq d = P_{k+1}^2 + Q_k Q_{k+1}$$

ve böylece,

$$-\sqrt{d} < P_{k+1} < \sqrt{d}$$

dir.

$0 \leq Q_k \leq d$ ve $-\sqrt{d} < P_{k+1} < \sqrt{d}$, $k \geq N$ için sağlandığından $k > N$ ise P_k ve Q_k nın sonlu tane değeri vardır. Dolayısıyla i ve j tamsayıları $P_i = P_j$ ve $Q_i = Q_j$, $i < j$

olacak biçimde vardır. Böylece α_k 'nın tanımından $\alpha_i = \alpha_j$ olduğu görülür. Sonuç olarak $a_i = a_j$, $a_{i+1} = a_{j+1}$, $a_{i+2} = a_{j+2}$,... elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\alpha &= \left[a_0; a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_{j-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_{j-1}, ...\right] \\ &= \left[a_0; a_1, a_2, ..., a_{i-1}, \overline{a_i, a_{i+1}, ..., a_{j-1}}\right].\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise, α 'nın bir periyodik sürekli kesre sahip olduğunu gösterir.

Aşağıdaki örnek kuadratik irrasyonelin bir periyodik sürekli kesir gösterimini bulmak için, Teorem 2.3.2 'nin ispatını nasıl kullanılacağını gösterir.

Örnek 2.3.4. $x = \left[3; \overline{1, 2}\right]$ olsun. Teorem 2.3.2'den x'in bir kuadratik irrasyonel olduğu biliniyor. x'in değerini bulmak için, Teorem 2.3.2'deki gibi $y = \left[\overline{1; 2}\right]$ olmak üzere $x = [3; y]$ olsun.

$$y = [1; 2, 1, 2, 1, 2\ , \ . \ . \ .]$$
$$y = \left[1; 2, [1; 2, 1, 2, 1, 2, \ . \ . \ .]\right] = [1; 2, y]$$

dir. Böylece,

$$y = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}} = \frac{3y+1}{2y+1}$$

eşitliğinden,

$$2y^2 - 2y - 1 = 0$$

kuadratik denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden y nin pozitif değeri olan,

$$y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

bulunur.

$x=3+\dfrac{1}{y}$ olduğundan, $x=3+\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}=3+\dfrac{2\text{-}2\sqrt{3}}{\text{-}2}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}$

elde edilir.

Örnek 2.3.5. $x=[1;1,1,1,\ .\ .\ .]$

$$x=[1;1,1,1,\ .\ .\ .]=\big[1;[1;1,1,1,\ .\ .\ .]\big]=[1;x]=1+1/x$$

$x=1+\dfrac{1}{x}$ ise $x^2-x-1=0$ kuadratik denklemi elde edilir. x pozitif olduğundan denklemin çözümünden,

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

bulunur.

Örnek 2.3.6.

$x=[-1;1,1,2,3,1,2,3,\ .\ .\ .]=\left[-1;1,\overline{1,2,3}\right]=[\text{-}1;1,y]$ 'dir. Burada $y=\left[\overline{1;2,3}\right]$ 'dir. Bu durumda $x=-1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{y}}$ olur. $y=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{y}}}$ eşitliğinden $7y^2-8y-3=0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden $y=\dfrac{4+\sqrt{37}}{7}$ bulunur. y değeri ilk eşitlikte yerine yazılırsa,

$$x=\frac{\sqrt{37}-11}{12}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.3. $\alpha > 1$ bir irrasyonel sayı olsun. Eğer p_k/q_k ve $p_k^{'}/q_k^{'}$ sırasıyla α ve $1/\alpha$ nın Teorem 2.1.3 denklemleriyle verilen yaklaşımları ise, o zaman $k \geq 1$ için $p_k^{'} = q_{k-1}$ ve $q_k^{'} = p_{k-1}$'dir. Ayrıca, eğer $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ . \ . \ .]$ ise o zaman $1/\alpha = [0; a_0, a_1, a_2, \ . \ . \ .]$'dır[11].

İspat: Önerme 2.1.2(ii)'den

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ . \ . \ .]$$

ve

$$[0; a_0, a_1, a_2, \ldots] = 0 + 1/[a_0; a_1, a_2, \ldots] = 1/\alpha$$

dır. Böylece $1/\alpha$ 'nın k'ninci yaklaşımı Teorem 2.1.1'den,

$$[0; a_0, a_1, a_2, \ . \ . \ . \ , a_{k-1}] = 1/[a_0; a_1, a_2, \ . \ . \ , a_{k-1}] = q_{k-1}/p_{k-1}$$

elde edilir.

2.4.Tamamıyla Periyodik Sonsuz Sürekli Kesirler

Tanım 2.4.1. $k = 0, 1, 2, \ldots$ için $a_k = a_{n+k}$ olacak şekilde bir n tamsayısı varsa $[a_0; a_1, a_2, ...]$ sürekli kesrine tamamıyla periyodiktir denir. Dolayısıyla,

$$[a_0; a_1, a_2, ...] = [\overline{a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}}].$$

dir. Buradaki n'ye sürekli kesrin periyodu denir[1].

Örnek2.4.1. $\left[\overline{1;2}\right]=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ sürekli kesri tamamıyla periyodiktir; oysa $\sqrt{23}=\left[4;\overline{1,3,1,8}\right]$ tamamıyla periyodik değildir.

Tanım 2.4.2. α bir kuadratik irrasyonel olsun. $\alpha>1$ ve $-1<\alpha^{'}<0$ ise α'ya indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı denir ($\alpha^{'}$, α nın eşleniğidir)$\left[5\right]$.

Teorem 2.4.1. α kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesirlere açılımının tamamıyla periyodik olması için gerekli ve yeterli şart α'nın indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı olmasıdır.

İspat: İlk olarak α'nın indirgenmiş kuadratik irrasyonel olduğu kabul edilsin. Teorem 2.2.7'ye göre α'nın sürekli kesrinin kısmi kesirleri, $\alpha_0=\alpha$ olmak üzere $k=0,\ 1,\ 2,\ ...$ için,

$$a_k=[\![\alpha_k]\!]\quad,\qquad \alpha_{k+1}=1/\left(\alpha_k-a_k\right)$$

ile ifade edildiği biliniyor.

$$1/\alpha_{k+1}=\alpha_k-a_k$$

olduğu dikkate alınır ve eşlenik alınarak Önerme 2.3.4 kullanılırsa,

$$1/\alpha^{'}_{k+1}=\alpha^{'}_k-a_k \tag{2.8}$$

elde edilir. $k=0,\ 1,\ 2,\ ...$ için $-1<\alpha^{'}_k<0$ olduğu matematiksel tümevarım yöntemiyle ispatlanabilir. Önce, $\alpha_0=\alpha$ indirgenmiş olduğundan $-1<\alpha^{'}_0<0$'dır.

Şimdi $-1<\alpha^{'}_k<0$ olduğunu kabul edelim. $a_k\geq 1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ ...)$ olduğundan ($a_0\geq 1$ dir , çünkü $\alpha>1$ dir) (2.8)'den

$$1/\alpha'_{k+1} < -1$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $-1 < \alpha'_{k+1} < 0$ ’dır; yani, $k = 0, 1, 2, \ldots$ için $-1 < \alpha'_k < 0$ ’dır. Ayrıca (2.8) ’den $\alpha'_k = a_k + 1/\alpha'_{k+1}$ ’dir. Diğer yandan $-1 < \alpha'_k < 0$ olduğundan

$$-1 < a_k + 1/\alpha'_{k+1} < 0$$

dır. Sonuç olarak

$$-1 - 1/\alpha'_{k+1} < a_k < -1/\alpha'_{k+1},$$

ve böylece

$$a_k = \llbracket -1/\alpha'_{k+1} \rrbracket$$

bulunur. α bir kuadratik irrasyonel olduğundan Lagrange Teoremi’ne göre i ve j pozitif tamsayıları $i < j$ olmak üzere, $\alpha_i = \alpha_j$ olacak biçimde vardır. Böylece, $-1/\alpha'_i = -1/\alpha'_j$ ’dir. $a_{i-1} = \llbracket -1/\alpha'_i \rrbracket$ ve $a_{j-1} = \llbracket -1/\alpha'_j \rrbracket$ olduğundan $a_{i-1} = a_{j-1}$ olduğu görülür. Ayrıca $\alpha_{i-1} = a_{i-1} + 1/\alpha_i$ ve $\alpha_{j-1} = a_{j-1} + 1/\alpha_j$ olduğundan $\alpha_{i-1} = \alpha_{j-1}$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse $\alpha_{i-2} = \alpha_{j-2}$, $\alpha_{i-3} = \alpha_{j-3}$,..., ve son olarak $\alpha_0 = \alpha_{j-1}$ elde edilir.

$$\begin{aligned}\alpha_0 = \alpha &= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \alpha] \\ &= [a_0; a_1, \ldots, a_{j-i-1}, \alpha_0] \\ &= [\overline{a_0; a_1, \ldots, a_{j-i-1}}]\end{aligned}$$

olduğundan, α ’nın sürekli kesri tamamıyla periyodiktir.

$\alpha = \left[\overline{a_0; a_1, a_2, ..., a_k}\right]$ tamamıyla periyodik sürekli kesrinin kuadratik irrasyonel olduğu kabul edilsin. $\alpha = \left[a_0; a_1, a_2, ..., a_k, \alpha\right]$ olduğundan, p_{k-1}/q_{k-1} ve p_k/q_k α'nın sürekli kesir açılımının $(k-1)$'inci ve k'ninci yaklaşımları olmak üzere, Teorem 2.1.6'nın yardımıyla,

$$\alpha = \frac{\alpha p_k + p_{k-1}}{\alpha q_k + q_{k-1}} \tag{2.9}$$

yazılabilir. (2.9)'dan,

$$q_k \alpha^2 + (q_{k-1} - p_k)\alpha - p_{k-1} = 0 \tag{2.10}$$

olduğu görülür. $\beta = \left[\overline{a_k; a_{k-1}, \, ... \, , a_1, a_0}\right]$ bir kuadratik irrasyoneldir. Bu durumda $\beta = \left[a_k; a_{k-1}, ..., a_1, a_0, \beta\right]$'dır. Ayrıca Teorem 2.1.6'ya göre p'_{k-1}/q'_{k-1} ve p'_k/q'_k, β'nın sürekli kesir açılımının $(k-1)$'inci ve k'ninci yaklaşımları olmak üzere,

$$\beta = \frac{\beta p'_k + p'_{k-1}}{\beta q'_k + q'_{k-1}} \tag{2.11}$$

dır. Önerme 2.1.4'e göre,

$$p_k/p_{k-1} = \left[a_k; a_{k-1}, ..., a_1, a_0\right] = p'_k/q'_k$$

$$q_k/q_{k-1} = \left[a_k; a_{k-1}, ..., a_2, a_1\right] = p'_{k-1}/q'_{k-1}$$

olur. p'_{k-1}/q'_{k-1} ve p'_k/q'_k yaklaşımlar olduğundan bu sayılar aralarında asaldır. p'_{k-1}/q'_{k-1} ve p'_k/q'_k'nin indirgenmiş olduğu biliniyor. Ayrıca p_k/p_{k-1} ve q_k/q_{k-1} de indirgenmiştir; çünkü Teorem 2.2.1'e göre $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$'dir. Böylece,

$$p_k' = p_k, \qquad q_k' = p_{k-1}$$

ve

$$p_{k-1}' = q_k, \qquad q_{k-1}' = q_{k-1}$$

dir. Bu değerler (2.11) ’de yerine yazılırsa,

$$\beta = \frac{\beta p_k + p_{k-1}}{\beta q_k + q_{k-1}}$$

bulunur. Buradan,

$$p_{k-1}\beta^2 + (q_{k-1} - p_k)\beta - q_k = 0$$

elde edilir. Bu denklemde eşitliğin her iki tarafı $-1/\beta^2$ ’ye bölünürse,

$$q_k(-1/\beta)^2 + (q_{k-1} - p_k)(-1/\beta) - p_{k-1} = 0 \tag{2.12}$$

bulunur. (2.10) ve (2.12) ’ye göre,

$$q_k x^2 + (q_{k-1} - p_k)x - p_{k-1} = 0$$

kuadratik dekleminin iki kökünün α ve $-1/\beta$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\alpha' = -1/\beta$$

dır. $\beta = \left[\overline{a_k; a_{k-1}, ..., a_1, a_0}\right]$ olduğundan $\beta > 1$ ’dir ve böylece $-1 < \alpha' = -1/\beta < 0$, yani $-1 < \alpha' < 0$ ’dır. Böylece α, bir indirgemiş kuadratik irrasyoneldir.Ayrıca, $\beta = -1/\alpha'$ olduğundan,

$$-1/\alpha' = \left[\overline{a_k; a_{k-1}, ..., a_1, a_0}\right]$$

dir.

2.5. $\sqrt{D}$ ’nin Periyodik Açılımı

D tam kare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\sqrt{D}$ formundaki bir kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesre açılımı bulunacaktır.

Teorem 2.5.1. D tam kare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımı,

$$\sqrt{D} = \left[a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 2a_0}\right], \qquad a_0 = \left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right] \tag{2.13}$$

formundadır. $\alpha = \alpha_0 = \sqrt{D}$, $P_0 = 0, Q_0 = 1$ seçilerek $Q_i = 1$ olması için gerek ve yeter şart $n \mid i$ olmasıdır. Burada n, $\sqrt{D}$ ’nin periyot uzunluğudur.
Ayrıca $1 \le i \le n-1$ için $a_i = a_{n-i}$ ’dir$[10]$.

İspat: $\alpha = \alpha_0 = \sqrt{D} > 1$ kuadratik irrasyonel sayısı için $\alpha' = -\sqrt{D} < -1$ olduğundan α, indirgenmiş değildir. Şimdi $\sqrt{D} + \left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right]$ irrasyonel sayısı ele alınsın. Bu sayı indirgenmiş olduğundan tamamıyla periyodik açılıma sahiptir. Böylece $\sqrt{D} + \left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right]$ sayısı, periyot uzunluğu n olmak üzere

$$\sqrt{D} + \left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right] = \left[\overline{a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}}\right] = \left[a_0; \overline{a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_0}\right] \tag{2.14}$$

formunda yazılabilir. β_i ile i’nin tüm değerleri için $\beta_i = [a_i; a_{i+1}, ...]$ tamamıyla periyodik sürekli kesirler gösterilirse $\beta_0 = \beta_n = \beta_{2n} = ...$ olacağı açıktır. Üstelik periyot uzunluğu n olduğu için $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}$ değerlerinin her biri β_0 dan farklı olacaktır. Böylece $\beta_i = \beta_0$ olması için gerek ve yeter şart $i = mn,\ m \in \mathbb{N}$ yani $n \mid i$ olmasıdır.

$\beta_0 = \sqrt{D} + [\![\sqrt{D}]\!]$, $Q_0 = 1, P_0 = [\![\sqrt{D}]\!]$ alınabilir; çünkü $Q_0 \mid d - P_0^2$ şartı sağlanmaktadır. O zaman her $j \geq 0$ için,

$$\frac{P_{jn} + \sqrt{D}}{Q_{jn}} = \beta_{jn} = \beta_0 = \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} = [\![\sqrt{D}]\!] + \sqrt{D}\ ,$$

$$P_{jn} - Q_{jn} [\![\sqrt{D}]\!] = \left(Q_{jn} - 1\right)\sqrt{D}$$

ve böylece, eşitliğin sol tarafı rasyonel ve $\sqrt{D}$ irrasyonel olduğu için $Q_{jn} = 1$ olmalıdır. Üstelik, diğer tüm i alt indisler için $Q_i = 1$ olamaz. $Q_i = 1$ olsa $\beta_i = \dfrac{P_i + \sqrt{D}}{Q_i} = P_i + \sqrt{D}$ ve fakat β_i tamamıyla periyodik bir açılıma sahip olduğu için $P_i + \sqrt{D} > 1$ ve $-1 < P_i - \sqrt{D} < 0$ olması gerekmektedir. Buradan $\sqrt{D} - 1 < P_i < \sqrt{D}$ ve böylece $P_i = [\![\sqrt{D}]\!]$ olur. O halde $\beta_i = \beta_0$ ve i, n'nin bir katı olmalıdır. Yani $i = mn,\ m \in \mathbb{N}$ 'dir.

Şimdi hiçbir i indisi için $Q_i = -1$ olamayacağı gösterilsin. $Q_i = -1$ olsaydı, $\beta_i = -P_i - \sqrt{D}$ ve $-P_i - \sqrt{D} > 1$ ve $-1 < -P_i + \sqrt{D} < 0$ ve buradan da $\sqrt{D} < P_i < -\sqrt{D} - 1$ olurdu. Bu ise mümkün değildir.

$$a_0 = [\![\sqrt{D} + [\![\sqrt{D}]\!]]\!] = 2[\![\sqrt{D}]\!]$$

alınırsa, $\alpha = \sqrt{D}$ açılımı (2.14) yardımı ile,

$$\sqrt{D} = -[\![\sqrt{D}]\!] + \left(\sqrt{D} + [\![\sqrt{D}]\!]\right)$$

$$= -\left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right] + \left[2\left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right]; \overline{a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_0}\right]$$

$$= \left[\left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right]; \overline{a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_0}\right]$$

$$= \left[\left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right]; \overline{a_1, a_2, ..., a_{n-1}, 2\left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right]}\right]$$

şeklindedir. Gösterimde değişiklik yapmamak için, bu defa a_0 ile $\left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right]$ tamsayısı gösterilirse,

$$\sqrt{D} = \left[a_0; \overline{a_1, a_2, ..., 2a_0}\right], \qquad a_0 = \left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right]$$

olur.

Son olarak, $1 \le i \le n-1$ için $a_i = a_{n-i}$ olduğu gösterilecektir.

$\alpha = \alpha_0 = \sqrt{D} = a_0 + \dfrac{1}{\alpha_1}$ ise $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{D} - a_0}$, $\alpha_1' = \dfrac{1}{-\sqrt{D} - a_0}$ ve $\alpha_1 > 0$ ve $-1 < \alpha_1' < 0$ olduğundan α_1 tamamıyla periyodik ve (2.13)'ten

$$\alpha_1 = \left[\overline{a_1; a_2, ..., a_{n-1}, 2a_0}\right] \qquad \text{ve} \qquad -\frac{1}{\alpha'} = \left[\overline{2a_0; a_{n-1}, ..., a_1}\right]$$

dir. Diğer taraftan,

$$-\frac{1}{\alpha_1'} = a_0 - \alpha_0' = a_0 - \left(-\sqrt{D}\right) = a_0 + \sqrt{D}$$

$$= a_0 + \left[a_0; \overline{a_1, ..., a_{n-1}, 2a_0}\right]$$

$$= \left[2a_0; \overline{a_1, ..., a_{n-1}, 2a_0}\right]$$

$$= \left[\overline{2a_0; a_1, ..., a_{n-1}}\right]$$

bulunur. $-\frac{1}{\alpha_1'}$ 'nün bu iki açılımı ve sürekli kesre açılımın tekliği dikkate alınırsa,

$$1 \le i \le n-1 \text{ için } a_i = a_{n-i}$$

olduğu ortaya çıkar.

Örnek 2.5.1.

$$\sqrt{2} = \left[1; \overline{2}\right]$$
$$\sqrt{3} = \left[1; \overline{1,2}\right]$$
$$\sqrt{5} = \left[2; \overline{4}\right]$$
$$\sqrt{7} = \left[2; \overline{1,1,1,4}\right]$$
$$\sqrt{13} = \left[3; \overline{1,1,1,1,6}\right]$$
$$\sqrt{19} = \left[4; \overline{2,1,3,1,2,8}\right]$$
$$\sqrt{23} = \left[4; \overline{1,3,1,8}\right]$$
$$\sqrt{29} = \left[5; \overline{2,1,1,2,10}\right]$$
$$\sqrt{31} = \left[5; \overline{1,1,3,5,3,1,1,10}\right]$$
$$\sqrt{37} = \left[6; \overline{12}\right]$$
$$\sqrt{71} = \left[8; \overline{2,2,1,7,1,2,2,16}\right]$$
$$\sqrt{73} = \left[8; \overline{1,1,5,5,1,1,16}\right]$$
$$\sqrt{89} = \left[9; \overline{2,3,3,2,18}\right]$$
$$\sqrt{97} = \left[9; \overline{1,5,1,1,1,1,1,1,5,1,18}\right]$$

Her sürekli kesir 1 uzunluğunda bir tam periyoda ve birinci terimden son terime kadar simetrik olan, ilk kısmi bölümün iki katıyla biten bir periyoda sahiptir.

Önerme 2.5.1. r, s, t ve u rasyonel sayılar, n tam kare olmayan pozitif bir tamsayı ve $r + s\sqrt{n} = t + u\sqrt{n}$ olsun. O zaman $r = t$ ve $s = u$ 'dur.

İspat: $r+s\sqrt{n}=t+u\sqrt{n}$ ve $s\neq u$ olsun. O zaman

$$\sqrt{n}=\frac{r-t}{u-s}$$

olup bu durum $\sqrt{n}$ ’nin irrasyonel olmasıyla aykırıdır. Şu halde $s=u$ ve böylece $r=t$ ’dir.

Önerme 2.5.1 aşağıdaki teoremin ispatında kullanılacaktır.

Teorem 2.5.1. n, tam kare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. $\alpha_k=\left(P_k+\sqrt{n}\right)/Q_k$, $a_k=[\![\alpha_k]\!]$, $Q_{k+1}=\left(n-P_{k+1}^2\right)/Q_k$, $k=0,1,2,\ ...$ olarak tanımlansın(Burada $\alpha_0=\sqrt{n}$ ’dir). Ayrıca, p_k/q_k, $\sqrt{n}$ ’nin sürekli kesirlere açılımında k’ninci yaklaşımı göstersin. O zaman

$$p_k^2-nq_k^2=\left(-1\right)^{k-1}Q_{k+1}$$

dir[1].

İspat: $\sqrt{n}=\alpha_0=\left[a_0;a_1,a_2,\ ...\ ,a_k,\alpha_{k+1}\right]$ olduğu için Teorem 2.1.3’ten

$$\sqrt{n}=\frac{\alpha_{k+1}p_k+p_{k-1}}{\alpha_{k+1}q_k+q_{k-1}}$$

yazılabilir; çünkü

$$\alpha_{k+1}=\left(P_{k+1}+\sqrt{n}\right)/Q_{k+1}$$

ve

$$\sqrt{n} = \frac{\left(P_{k+1} + \sqrt{n}\right)p_k + Q_{k+1}p_{k-1}}{\left(P_{k+1} + \sqrt{n}\right)q_k + Q_{k+1}q_{k-1}}$$

eşitliğinden,

$$nq_k + \left(P_{k+1}q_k + Q_{k+1}q_{k-1}\right)\sqrt{n} = \left(P_{k+1}p_k + Q_{k+1}p_{k-1}\right) + p_k\sqrt{n}$$

elde edilir. Önerme 2.5.1'den

$$nq_k = P_{k+1}p_k + Q_{k+1}p_{k-1} \text{ ve } P_{k+1}q_k + Q_{k+1}q_{k-1} = p_k$$

olduğu görülür. Bu iki denklemden birincisi q_k ile ikincisi p_k ile çarpılıp, ikinciden birincisi çıkarılır ve sadeleştirirse,

$$\begin{aligned} -1/\ p_k^2 &= P_{k+1}q_k p_k + Q_{k+1}q_{k-1}p_k \\ p_k^2 &= P_{k+1}q_k p_k + Q_{k+1}q_{k-1}p_k \\ p_k^2 - nq_k^2 &= \left(p_k q_{k-1} - p_{k-1}q_k\right)Q_{k+1} = \left(-1\right)^{k-1}Q_{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada ispatı tamamlamak için Teorem 2.1.4 kullanılmıştır.

BÖLÜM 3. PELL DENKLEMLERİ

3.1. Pell Denklemleri

Bu bölümde, d ve n sabit tamsayılar olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = n \tag{3.1}$$

şeklindeki Diophantine denklemleri çalışılacaktır. $d < 0$ ve $n < 0$ ise (3.1) denkleminin çözümleri yoktur. $d < 0$ ve $n > 0$ ise sonlu sayıda çözümler olabilir; çünkü $x^2 - dy^2 = n$ denklemi $|x| \leq \sqrt{n}$ ve $|y| < \sqrt{n/|d|}$ olmasını gerektirir. d bir tam kare ise $d = D^2$ yazılabilir. O zaman

$$x^2 - dy^2 = x^2 - D^2y^2 = (x + Dy)(x - Dy) = n$$

elde edilir. Böylece, d bir tam kare olduğunda (3.1)'in herhangi bir çözümü,

$$x + Dy = a$$
$$x - Dy = b$$

denklemlerinin bir ardışık çözümüne karşılık gelir (Burada a ve b tamsayılar öyleki $n = a.b$ dir.). Bu durumda sonlu sayıda çözüm vardır; çünkü her bir $n = a.b$ çarpımı için bu iki denklemin tamsayılarda en fazla bir çözümü vardır.

Bu bölümün diğer kısmında $x^2 - dy^2 = n$ Diophantine denklemi ile ilgilenilecektir. Aşağıdaki teorem $\sqrt{d}$'nin sürekli kesirlere açılımını açıklamada çok faydalı bir teoremdir.

Teorem 3.1.1. $d > 0$ tam kare olmayan bir tamsayı, n bir tamsayı ve $|n| < \sqrt{d}$ olsun. Eğer $x^2 - dy^2 = n$ ise, o zaman x/y, $\sqrt{d}$ 'nin sürekli kesrinin bir yaklaşımıdır$[1]$.

İspat: İlk olarak $n > 0$ durumu hesaplansın; çünkü $x^2 - dy^2 = n$ denkleminden

$$\left(x + y\sqrt{d}\right)\left(x - y\sqrt{d}\right) = n \tag{3.2}$$

yazılabilir. (3.2) 'den $x - y\sqrt{d} > 0$ olduğu görülür, bundan dolayı $x > y\sqrt{d}$ 'dir. Sonuç olarak,

$$\frac{x}{y} - \sqrt{d} > 0$$

dir. $0 < n < \sqrt{d}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y} - \sqrt{d} &= \frac{\left(x - \sqrt{d}y\right)}{y} \\
&= \frac{x^2 - dy^2}{y\left(x + y\sqrt{d}\right)} \\
&< \frac{n}{y\left(2y\sqrt{d}\right)} \\
&< \frac{\sqrt{d}}{2y^2\sqrt{d}} \\
&= \frac{1}{2y^2}
\end{aligned}$$

elde edilir; çünkü $0 < \frac{x}{y} - \sqrt{d} < \frac{1}{2y^2}$ olduğundan Teorem 2.2.8'e göre $\frac{x}{y}$, $\sqrt{d}$ 'nin sürekli kesrinin bir yaklaşımıdır. $n < 0$ olduğu zaman,

$$y^2 - \left(1/d\right)x^2 = -n/d$$

elde etmek için $x^2 - dy^2 = n$ denkleminin her iki tarafı $-d$ ile bölünür. $n > 0$ durumunda benzer yöntemle y/x 'in $1/\sqrt{d}$ 'nin sürekli kesre açılımının bir yaklaşımı olduğu görülür. Böylece Teorem 2.3.3'ten, $x/y = 1/\left(y/x\right)$'in, $\sqrt{d} = 1/\left(1/\sqrt{d}\right)$ sürekli kesrinin bir yaklaşımı olması gerektiği biliniyor.

$x^2 - dy^2 = n$ Diophantine denkleminin çözümlerinin $\sqrt{d}$ 'nin sürekli kesre açılımının yaklaşımları vasıtasıyla verilmekte olduğu gösterildi. d yerine n yazılarak burada Teorem 3.1.2 yeniden ifade edilecektir; çünkü Teorem 3.1.3 Diophantine denkleminin çözümlerini bulmak için bu yaklaşımların bulunmasına yardımcı olacaktır.

Teorem 3.1.2. $\sqrt{d}$ 'nin sürekli kesir açılımının periyot uzunluğu n ve p_k/q_k, $\sqrt{d}$ 'nin k'ninci yaklaşımı olsun ve P_k ve Q_k Teorem 2.3.1'deki gibi tanımlansın. O zaman

(i) Her $k \geq 0$ için, $p_{k-1}^2 - dq_{k-1}^2 = (-1)^k Q_k$,
(ii) Her $k \geq 0$ için, $Q_k > 0$,
(iii) $Q_k = 1 \Leftrightarrow n \mid k$

dir[11].

Teorem 3.1.3. d, 4 ile veya $p \equiv 3 \pmod 4$ şartını sağlayan bir p asal sayısı ile bölünebilir ise $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin hiçbir çözümü yoktur[9].

İspat: $x = x_0$, $y = y_0$ bir çözüm olsun. $p \equiv 3 \pmod 4$ ve $p \mid d$ kabul edilsin. Bu taktirde;

$$x_0^2 \equiv x_0^2 - dy_0^2 \equiv -1 \pmod p$$

olur; fakat $p \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan bu mümkün değildir.

Benzer şekilde eğer $4 \mid d$ ise

$$x_0^2 \equiv x_0^2 - dy_0^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

yazılabilir. $x_0^2 \equiv 0$, 1 (mod 4) olduğundan bu da bir çelişkidir.

Yukarıdaki metod, bir Diophantine denkleminin hiçbir çözümünün olmadığını göstermek için güzel bir yoldur.

Teorem 3.1.4. d bir pozitif tamsayı olsun. Eğer

$$x^2 - dy^2 = 1, \qquad x > 0,\ y > 0 \tag{3.3}$$

Pell denkleminin bir çözümü varsa, o zaman sonsuz sayıda çözüm vardır. Eğer

$$x^2 - dy^2 = -1, \qquad x > 0,\ y > 0 \tag{3.4}$$

Pell denkleminin bir çözümü varsa, o zaman hem (3.3) hem de (3.4) denklemlerinin sonsuz sayıda çözümü vardır[9].

İspat: a, b tamsayılar ve $c = \pm 1$ olmak üzere,

$$a^2 - db^2 = c, \qquad a > 0, \quad b > 0 \tag{3.5}$$

olsun.

$$x_n^2 - dy_n^2 = c^n, \qquad x_n > 0, \quad y_n > 0 \tag{3.6}$$

olacak şekilde herhangi bir $n \geq 1$ için x_n ve y_n tamsayılarının var olduğu kabul edilsin. $n = 1$ ise, $x_1 = a$ ve $y_1 = b$ 'dir.

$$x_{n+1} = ax_n + dby_n, \qquad y_{n+1} = ay_n + bx_n$$

olsun. Bu değerler, denklemde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}^2 - dy_{n+1}^2 &= \left(a^2x_n^2 + 2dabx_ny_n + d^2b^2y_n^2\right) - d\left(a^2y_n^2 + 2abx_ny_n + b^2x_n^2\right) \\
&= a^2x_n^2 + d^2b^2y_n^2 - da^2y_n^2 - db^2x_n^2 \\
&= \left(a^2 - db^2\right)\left(x_n^2 - dy_n^2\right) \\
&= c.c^n \\
&= c^{n+1}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= ax_n + dby_n > 1.x_n + d.0.y_n = x_n\,(>0), \\
y_{n+1} &= ay_n + bx_n > 1.y_n + 0.x_n = y_n\,(>0)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

dir.

Böylece, eğer (3.5) mümkünse, her $n \geq 1$ için (3.7) ile verilen artan x_n ve y_n değerleri için (3.6)'nın mümkün olduğu tümevarımla gösterilir.

$c = 1$ olduğu zaman, pozitif tamsayılarda (3.3)'ün bir çözümü varsa, o zaman (3.3) denkleminin sonsuz sayıda çözümlerinin var olduğu gösterilmiş olur. $c = -1$ olduğu zaman, pozitif tamsayılarda (3.4)'ün bir çözümü varsa, o zaman hem (3.3) hem de (3.4) denklemlerinin sonsuz sayıda çözümleri vardır. [n çiftken (3.3)'ün çözümleri ve n tekken (3.4)'ün çözümleri vardır.]

Teorem 3.1.5. d tam kare olmayan, pozitif bir tamsayı olsun. $k = 0, 1, 2, \ldots$ için p_k/q_k, $\sqrt{d}$'nin sürekli kesrinin k'ninci yaklaşımını göstersin ve n, bu sürekli kesrin periyot uzunluğu olsun. O zaman n çift ise $x^2 - dy^2 = 1$ Diophantine denkleminin pozitif çözümleri $x = p_{jn-1}$, $y = q_{jn-1}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ dir ve $x^2 - dy^2 = -1$ Diophantine denkleminin çözümleri yoktur. n tek ise $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin pozitif çözümleri $x = p_{2jn-1}$, $y = q_{2jn-1}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ ve $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin çözümleri $x = p_{(2j-1)n-1}$, $y = q_{(2j-1)n-1}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$' dir.

İspat: Teorem 3.1.1'den $x^2 - dy^2 = \pm 1$'in bir pozitif çözümü x_0, y_0 ise o zaman $x_0 = p_k$ $y_0 = q_k$'dir. (p_k/q_k, $\sqrt{d}$'nin sürekli kesrinin bir yaklaşımıdır.) Diğer taraftan Teoem 3.1.2'den,

$$p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k-1} Q_{k+1}$$

olduğu biliniyor. Burada, Q_{k+1}, Teorem 3.1.2'de tanımlandığı gibidir. $\sqrt{d}$ 'nin sürekli kesirlere açılımının periyodu n olduğundan ve $\sqrt{d} = \dfrac{P_0 + \sqrt{d}}{Q_0}$ olarak tanımlandığından, $j = 1, 2, 3, \ldots$ için Teorem 2.5.1'e göre $Q_{jn} = Q_0 = 1$'dir. Böylece,

$$p_{jn-1}^2 - dq_{jn-1}^2 = (-1)^{jn} Q_{jn} = (-1)^{jn}$$

elde edilir.

Bu denklem, n çiftse $j = 1, 2, 3, \ldots$ için $x^2 - dy^2 = 1$'in bir çözümünün $x = p_{jn-1}$, $y = q_{jn-1}$ ve n tekse $x^2 - dy^2 = 1$'in bir çözümünün $x = p_{2jn-1}$, $y = q_{2jn-1}$ ve $x^2 - dy^2 = -1$'in bir çözümünün $x = p_{(2j-1)n-1}$, $y = q_{(2j-1)n-1}$ olduğunu gösterir. $x^2 - dy^2 = 1$ ve $x^2 - dy^2 = -1$ Diophantine denklemlerinin evvelce bulunan diğer çözümlerinden başka çözümlerinin olmadığını göstermek için, $Q_{k+1} = 1$ ise $n \mid k$ ve $Q_j \neq -1$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ olduğu gösterilecektir. İlk olarak eğer $Q_{k+1} = 1$ ise o zaman,

$$\alpha_{k+1} = P_{k+1} + \sqrt{d}$$

dir; çünkü $\alpha_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, \ldots]$ olduğundan α_{k+1} sürekli kesir açılımı tamamıyla periyodiktir. Böylece, Teorem 2.4.1'den $-1 < \alpha_{k+1}' = P_{k+1} - \sqrt{d} < 0$ yazılır. Bu $P_{k+1} = \sqrt{d}$ olmasını gerektirir; böylece $\alpha_k = \alpha_0$ ve $n \mid k$ elde edilir. $j = 1, 2, 3, \ldots$ için $Q_j \neq -1$ olduğunu görmek için $Q_j = -1$'in $\alpha_j = -P_j - \sqrt{d}$ gerektirdiğine dikkat edilmelidir; çünkü α_j tamamıyla periyodik sürekli kesir açılımına sahiptir.

$$-1 < \alpha_j' = -P_j + \sqrt{d} < 0$$

ve

$$\alpha_j = -P_j - \sqrt{d} > 1$$

olduğu biliniyor. Bu eşitsizliklerden birincisinden, $P_j > -\sqrt{d}$ olduğu ve ikincisinden $P_j < -1-\sqrt{d}$ olduğu görülür; çünkü bu iki eşitsizlik P_j için çelişkidir, buradan $Q_j \neq -1$ elde edilir.

$x^2 - dy^2 = 1$ ve $x^2 - dy^2 = -1$ (x ve y pozitif tamsayılar) denklemlerinin tüm çözümleri bulundu ve ispat tamamlandı.

Teorem 3.1.5'in uygulaması ile ilgili aşağıdaki örnekler verilmektedir.

Örnek 3.1.1. $x^2 - 29y^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümünü bulalım.
$\sqrt{29}$'un sürekli kesir açılımı $\sqrt{29} = \left[5;\overline{2,1,1,2,10}\right]$'dir ve periyot uzunluğu $n = 5$ tir. $x^2 - 29y^2 = 1$ Diophantine denkleminin pozitif çözümleri p_{10j-1}, q_{10j-1}, $j = 1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .$ dir.

p_{10j-1}/q_{10j-1} $\sqrt{29}$'un sürekli kesir açılımının $(10j-1)$'inci yaklaşımıdır. En küçük pozitif çözüm $x = p_9 = 9801$, $y = q_9 = 1820$'dir. $x^2 - 29y^2 = -1$ Diophantine denkleminin pozitif çözümleri p_{10j-6}, q_{10j-6}, $j = 1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .$dir ve en küçük pozitif çözüm $x = p_4 = 70$, $y = q_4 = 13$'tür.

Örnek 3.1.2. $x^2 - 23y^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümünü bulalım.
$\sqrt{23}$'ün sürekli kesir açılımı $\sqrt{23} = \left[4;\overline{1,3,1,8}\right]$'dir ve periyot uzunluğu $n = 4$'tür. $x^2 - 23y^2 = 1$ denkleminin pozitif çözümleri p_{4j-1}, q_{4j-1}, $j = 1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .$ dir. p_{4j-1}/q_{4j-1} $\sqrt{23}$'ün sürekli kesir açılımının $(4j-1)$'inci yaklaşımıdır. En küçük pozitif çözüm $x = p_3 = 24$, $y = q_3 = 5$'tir. $x^2 - 23y^2 = -1$ Diophantine denkleminin

hiçbir çözümü yoktur; çünkü $\sqrt{23}$'ün sürekli kesir açılımının periyot uzunluğu çifttir.

Aşağıdaki teoremden, $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımının alt yaklaşımlarını bulmaksızın en küçük pozitif çözümden $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif çözümlerinin nasıl bulunacağının sonucu çıkarılacaktır.

Teorem 3.1.6. d tam kare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere x_1, y_1, $x^2 - dy^2 = 1$ Diophantine denkleminin en küçük pozitif çözümü olsun. O zaman tüm x_k, y_k pozitif çözümleri, $k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$x_k + y_k\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^k$$

ile verilir.

İspat: $k = 1,2,3, \ldots$ için x_k, y_k'nin bir çözüm ve her çözümün bu formda olduğu gösterilmelidir.

x_k, y_k'nin bir çözüm olduğunun gösterilmesi için ilk olarak $x_k + y_k\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^k$ ifadesinin eşleniği alınırsa $x_k - y_k\sqrt{d} = \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^k$ olur; çünkü Önerme 2.3.4'e göre kuvvetin eşleniği, eşleniğin kuvvetidir. Buradan,

$$\begin{aligned} x_k^2 - dy_k^2 &= \left(x_k + y_k\sqrt{d}\right)\left(x_k - y_k\sqrt{d}\right) \\ &= \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^k \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^k \\ &= \left(x_1^2 - dy_1^2\right)^k \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece x_k, y_k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) bir çözümdür.

Herhangi bir $k = 1,\ 2,\ 3,\ ...$ pozitif tamsayıları için her pozitif çözümün $x_k\ ,\ y_k$ ’ ye eşit olduğunu göstermek için ($x_k\ ,\ y_k$)’den farklı X, Y pozitif çözümünün olduğu kabul edilsin. O zaman bir n tam sayısı vardır öyle ki

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n < X + Y\sqrt{d} < \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^{n+1}$$

dir. Bu eşitsizlik $\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^{-n}$ ile çarpılırsa,

$$1 < \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n \left(X + Y\sqrt{d}\right) < x_1 + y_1\sqrt{d}$$

elde edilir; çünkü $x_1^2 - dy_1^2 = 1$ olduğundan $x_1 - y_1\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^{-1}$ ’dir.

Şimdi,

$$s + t\sqrt{d} = \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n \left(X + Y\sqrt{d}\right)$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} s^2 - dt^2 &= \left(s - t\sqrt{d}\right)\left(s + t\sqrt{d}\right) \\ &= \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n \left(X - Y\sqrt{d}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n \left(X + Y\sqrt{d}\right) \\ &= \left(x_1^2 - dy_1^2\right)^n \left(X - dY^2\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

s, t, $x^2 - dy^2 = 1$ ’in bir çözümüdür ve daha fazlası $1 < s + t\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$ olduğu (3.3)’ten biliniyor. $s + t\sqrt{d} > 1$ olduğundan $0 < \left(s + t\sqrt{d}\right)^{-1}$ olduğu görülür. Böylece,

$$s = \frac{1}{2}\left[\left(s + t\sqrt{d}\right) + \left(s - t\sqrt{d}\right)\right] > 0$$

ve

$$t = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left[\left(s + t\sqrt{d}\right) - \left(s - t\sqrt{d}\right)\right] > 0$$

dır. Bu, s, t nin bir pozitif çözüm olması anlamına gelir; fakat x_1, y_1'in en küçük pozitif çözüm olması nedeni ile $s \geq x_1$ ve $t \geq y_1$ olmalıdır. Bu ise $s + t\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$ eşitsizliği ile çelişir. Böylece k'nin uygun değeri için (X,Y)=(x_k, y_k) elde edilir.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonsuz sürekli kesirler, incelemenin ana konusu olmuştur. Her irrasyonel sayının bir sonsuz sürekli kesir olarak yazılabileceği gösterilmiştir. Daha sonra periyodik sonsuz sürekli kesirler incelenmiştir. Özellikle $\sqrt{d}$ 'nin sonsuz sürekli kesirlere açılımının periyodik olduğu gösterilmiştir ve periyodiklik kullanılarak $x^2 - dy^2 = \pm 1$ denklemlerinin çözümleri verilmiştir.

Sonsuz sürekli kesirler yaklaşık hesaplamalarda ve matematiğin diğer dallarında sıkça kullanılmaktadır. Burada amaç, konuyu temel kavramlarıyla ele almak olmuştur. $\left[a_0; a_1, a_2, \ldots\right]$ sonsuz sürekli kesrinde $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sayılarının tamsayı olması gerekmez. Bunlar kompleks sayılar veya fonksiyonlar da olabilirler. Bunlarla ilgili incelemeye girilmemiştir. Özellikle Pell denklemlerinin çözümleriyle ilgilenmek isteyenler, $\sqrt{d}$ 'nin sonsuz sürekli kesirlere açılımını ve ilgili sonuçları öğrenmek durumundadır. Bu nedenle Pell denklemlerinin çözümlerinin daha ileri seviyede araştırılması için sonsuz sürekli kesirler önemlidir. Konuyla ve sürekli kesirlerin uygulamaları ile ilgili daha ayrıntılı bilgiler için $[4]$, $[8]$ ve $[11]$ nolu kaynaklara bakılabilir.

KAYNAKLAR

[1] ROSEN, H.., K., Elementary Number Theory And Its Application, 3d Edition, Addison –Wesley, 1993.

[2] BURTON, D., M., Elementary Number Theory, Fourth Editon, The McGraw-Hill Companies, Inc., 1998.

[3] IVAN, N., HERBERT, S., ZUCKERMAN, H., L., M., An Introduction To Number Theory, John Wiley And Sons, Inc., 1991.

[4] OLDS, C., D., Continued Fractions, Random House, The L.W. Singer Company, Third Printing, 1963.

[5] ANDERSON, J., BELL, J., Number Theory With Applications, Prentice Hall, 3d Edition, 1997.

[6] SHANKS, D., Solved And Unsolved Problems In Number Theory, Chelsea Publishing Company, New York, Fourth Edition, 1993.

[7] BURN, R., P., A Pathway Into Number Theory, Second Edition, Cambridge University Press, 1997.

[8] LANG, S., Introduction To Diophantine Approximation, New Expanded Edition, Springer-Verlag, 1995.

[9] STARK, H., M., An Introduction To Number Theory, Markham Pub. Co., Chicago, 1997.

[10] DEVELİ, M., H., R-D Tipinden Kuadratik Sayı Cisimlerinde Sınıf Sayısının 1 Olması İçin Bazı Kriterler, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 1990.

[11] ADLER, A., COURY, J., E., The Theory Of Numbers, Jones and Bartlett Publishers, 1995.

ÖZGEÇMİŞ

Murat PEKASİL, 22.09.1971 tarihinde Ankara'nın Altındağ ilçesinde doğdu. İlkokulu Ali Ersoy ilkokulunda, ortaokulu Ankara İnönü Lisesi orta kısmında ve lise öğrenimini Yenimahalle Teknik Lisesi Elektronik Bölümünde 1990 yılında tamamladı. Aynı yıl Hacettepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladı. Buradan 1994 yılında mezun oldu. Ocak 1999 tarihinde Milli Eğitim Bakanlığında matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Ekim 2005 tarihinden itibaren Sakarya Fen Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.