T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nevin DEMİRCİOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Yalçın YILMAZ

Haziran 2007

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nevin DEMİRCİOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 06/06/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr.	**Prof. Dr.**	**Yrd. Doç. Dr.**
Yalçın YILMAZ	**Abdullah YILDIZ**	**Mehmet BEKTAŞOĞLU**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

ÖNSÖZ

Gelecekte insan nüfusunun ne olacağı, enerji kaynaklarının kaç yıl daha yeteceği gibi konular, her geçen gün daha fazla önem kazanmaktadır. Bu konularla ilgili tahminlerin yapılmasında, daha önce elde edilen bilgilerden ve fark denklemlerinden yararlanılır.

Bu çalışmada, elde edilen bilgiler yardımıyla önceki ya da sonraki bilgilerin tahmin edilmesinde kullanılan ve birçok uygulama alanı olan Lineer Fark Denklemleri üzerinde durulmuştur.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Yalçın Yılmaz’a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Fark denklemi, çözüm fonksiyonu, dizi, üretici fonksiyon

Bu çalışmada Samuel Goldberg'in "Introduction to Difference Equations" adlı kitabı temel alınmıştır. Burada lineer fark denklemlerinin ve çözümlerinin bazı özellikleri incelenerek çeşitli alanlardaki uygulamaları vurgulanmıştır.

Birinci bölümde, kesikli bazı muhtemel değerler alabilen problemlerin fark denklemlerini içeren matematiksel metotlar ortaya koyduğu anlatılmaktadır.

İkinci bölümde, fark fonksiyonu, Δ operatörünün bazı özellikleri, fark ve diferansiyel arasındaki benzerlikler gösterilmiştir.

Üçüncü bölüm, birinci mertebeden fark denklemlerinin çözümlerini, bunların varlık ve tekliğini, bu çözümlerin diziler yardımıyla gösterimini ve davranışlarını içermektedir. Ayrıca diferansiyel denklemlere fark denklemleri yardımıyla yaklaşımlar yapılmıştır.

Dördüncü bölümün konusu homojen ve homojen olmayan sabit katsayılı fark denklemleridir. Burada çözümlerin limit durumunda davranışları da ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca n. mertebeden genel durumun yanı sıra sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerle ilişkileri ortaya koyulmuştur.

Beşinci bölümde ise bir fark denkleminin denge ve kararlılığı tanımlanmış, başlangıç koşullarına ne şekilde bağlı olduğu örneklenmiştir. Birinci mertebeden denklemler ile örümcek ağı döngüleri arasındaki ilişkiler tanımlanmış ve ikinci mertebeden bir sınır-değer problemi tanımlanarak bunun aşikâr olmayan çözümleri aranmıştır. Son olarak bu bölümde, üretici fonksiyon kavramı verilerek çeşitli problemler üzerine ne şekilde uygulandığı gösterilmiştir.

DIFFERENCE EQUATIONS

SUMMARY

Key Words: Difference Equation, Solution Function, Sequence, Generating Function

This research is based on the book named “Introduction to Difference Equations” by Samuel Goldberg.

In this study, properties of the linear difference equations and their solutions are investigated. Various applications in different diciplines are emphasized.

In the first section it is illustrated that, problems that can take a discrete set of possible values often lead to mathematical models involving difference equations.

In the second, difference function, some properties of the Δ operator and similarities between difference and differential are presented.

The third section includes solutions of the first-order difference equations, their existence and uniqueness, presentation of these solutions by series and also their limiting behaviour. Additionally, some approximations have been made to the differential equations by difference equations.

The topic of the fourth section is homogeneous and non-homogeneous difference equations with constant coefficient. In this part, behaviours of the solutions in the limiting case are detailed. In addition to the general case of order n, the relationships with the linear differential equations with constant coefficients are displayed.

In the fifth section, equilibrium and stability of a difference equation is defined and the way they depend on the initial conditions is sampled. Relationships between the first-order equations and the cobweb cycles are introduced, a second-order boundary-value problem is defined and its non-trivial solutions are searched. Finally, I this section the generating function is defined and is application on different problems is pointed out.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Sadece kesikli değerler kümesinde değişen bazı değişkenlere sahip problemler genellikle fark denklemlerini içeren matematik modellerle ifade edilir. Örneğin ekonomide böyle bir değişken zamandır. Gelir, tasarruf, tüketim gibi önemli ekonomik nicelik değerleri genellikle, belli, düzgün zaman aralıklarında bulunur. Veriler, aylık, yıllık veya nüfus sayımında olduğu gibi 10 yıllık periyotlarla toplanarak elde edilir. Tüm niceliklerin her biri, uygulandığı zaman periyodu itibariyle tarihlidir. Böylece $t = 0$ ile gösterilebilecek bir başlangıç zamanında ve daha sonraki periyodun sonu $t = 1$ zamanında ulusal gelirden bahsedilebilir. Ekonomistler, bu kesikli zaman aralıkları üzerinde periyot analizi denen ulusal gelir davranışını ve diğer ekonomik değişkenleri inceler. Bu çalışmanın ileriki kısımlarında, içeriğin önemli bir kısmını fark denklemleri oluşturacaktır [1].

İkinci bir örnek olarak, sözlü kelime öğrenme modeli göz önüne alınabilir. Bu modele göre, bir kelime listesi yüksek sesle bir kişiye okunur; daha sonra kişi, hatırladığı kelimeleri bir kâğıda yazar. Bu işlem, kelimelerin sırası değiştirilerek tekrarlanır ve her seferinde, hatırlanan kelimelerin oranı hesaplanır. Bu oran, yeterince büyük, kararlı bir değere ulaşana kadar bu işleme devam edilir. Psikoloji, bu ardışık değerlerin özellikleriyle ilgilenir. Bu durumda kesikli değişken deneme sayısıdır ve yine fark denklemi yararlı bir matematiksel araçtır.

Sosyolojik araştırmalarda belirli bir gruba, bir seçimden önceki 6 ayda bir aylık periyotlarla aynı sorular sorulur. Böylece 1. oylama ve daha sonra sırasıyla 2., 3., … oylama sonuçları elde edilir ve oylama sayısının bir fonksiyonu olarak bir kişinin verdiği cevaplar incelenir. Örnekte ifade edildiği gibi 1'den 6'ya kadar tam sayı değerleri alan bu kesikli değişkenin varlığı, böyle bir verinin incelenmesi için bir fark denklemleri modelinin kullanılmasına olanak verir.

Fark denklemlerini içeren matematiksel analizlere gerek duyan bu tür açıklayıcı örnekler çoğaltılabilir. Sosyal ve davranış bilimleri literatüründe fark denklemleri yer almaktadır. Bu tip denklemlerin matematiksel teorisini geliştirmeden önce daha ayrıntılı bir iki örnek vermek yerinde olur. Burada vurgulanmak istenen nokta, matematiksel ayrıntılara girmeksizin, bir fark denkleminin sosyal bilimlerdeki problemlerle ilgili olarak nasıl ortaya çıkacağıdır.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … şeklinde devam eden; papatyaların çiçeklerindeki yaprak sayılarında, ayçiçeklerindeki ve çam kozalaklarındaki spirallerin sayılarında, bir saptaki yaprakların sıralanışında ve daha birçok yerde karşılaşılan Fibonacci sayıları başka bir örnek olarak alınabilir. İlk olarak, Leonardo Fibonacci'nin "Liber Abaci" adlı kitabındaki "tavşan problemi"nin çözümü olarak ortaya çıkan; ilk ikisi 1'e, bundan sonraki sayıların her biri de kendinden önceki iki sayının toplamına eşit olan bu sayılar da fark denklemi yardımıyla bulunabilir. Bu sayılar F_k ile gösterilirse,

$$F_k = \begin{cases} k = 1 & \text{ise} \quad 1 \\ k = 2 & \text{ise} \quad 1 \\ k > 2 & \text{ise} \quad F_{k-1} + F_{k-2} \end{cases}$$

şeklinde bir fark denklemiyle ifade edilebilirler [2].

Herhangi bir canlı türünün gelecekteki durumuyla (bir süre sonra sayılarının ne olacağı, neslinin tükenip tükenmeyeceği gibi) ilgili tahminler yapılırken; bu türün önceki mevcudu ve bunun değişimine neden olan beslenme, üreme, ölüm gibi faktörler göz önüne alındığından yine fark denklemlerinden yararlanılır.

BÖLÜM 2. TEMEL BİLGİLER

2.1. Fark Fonksiyonu

Tanım 2.1: h, herhangi bir sabit; x, h eşit aralıklı bağımsız bir değişken ve y, x bağımsız değişkeninin bir fonksiyonu olmak üzere,

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x) \tag{2.1}$$

biçiminde ifade edilen $\Delta y(x)$ fonksiyonuna y'nin birinci farkı[1] denir.

Δ sembolü, y fonksiyonu üzerinde işlem yaparak yeni bir Δy fonksiyonunu üreten bir fark operatörüdür. h sayısına, fark aralığı denir; x'deki değişimi ifade eder ve genellikle Δx ile gösterilir. Bu, (2.1)'de $y(x) = x$ alınarak aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} \Delta y(x) = \Delta x &= (x+h) - x \\ \Delta x &= h \end{aligned}$$

Örnekler:

Aşağıda $h = 1$ alınarak çeşitli fonksiyonların $\Delta y(1)$ ve $\Delta y(2)$ farkları bulunmuştur:

1) $y(x) = 3x - 2$

$$\Delta y(1) = y(1+1) - y(1) = y(2) - y(1) = 4 - 1 = 3$$

$$\Delta y(2) = y(2+1) - y(2) = y(3) - y(2) = 7 - 4 = 3$$

$y(x) = 3x - 2$ fonksiyonunun $h = 1$ için $\Delta y(x)$ farkı her zaman 3'e eşittir ve bu

---

[1] Genellikle ileri farka [$y(x+h) - y(x)$] birinci fark denir ve Δy sembolüyle gösterilir. Fakat bu sabit değildir. Örneğin ekonomide geri farka [$y(x) - y(x-h)$] birinci fark denir ve ∇y ile gösterilir.

aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\Delta y(x)=y(x+1)-y(x)=[3(x+1)-2]-[3x-2]=3$$

2) $y(x)=x^2+1$

$\Delta y(1)=y(2)-y(1)=5-2=3$

$\Delta y(2)=y(3)-y(2)=10-5=5$

Bu örnekte de $h=1$ için $\Delta y(x)$ farkının her zaman $2x+1$'e eşit olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\Delta y(x)=y(x+1)-y(x)=[(x+1)^2+1]-[x^2+1]=2x+1$$

3) $y(x)=2^x$

$\Delta y(1)=y(2)-y(1)=4-2=2$

$\Delta y(2)=y(3)-y(2)=8-4=4$

Bu fonksiyon için de $h=1$ alındığında $\Delta y(x)$ her zaman 2^x'e eşit olur.

$$\Delta y(x)=y(x+1)-y(x)=2^{x+1}-2^x=2^x(2-1)=2^x$$

Tanım 2.2: y, bir fonksiyon ve onun birinci farkı Δy olmak üzere; y'nin birinci farkının farkı $\Delta^2 y$ ile gösterilir ve buna y'nin ikinci farkı denir.

$$\Delta^2 y=\Delta(\Delta y) \tag{2.2}$$

Benzer biçimde y'nin ikinci farkının farkına, y'nin üçüncü farkı denir ve $\Delta^3 y$ ile gösterilir ($\Delta^3 y=\Delta(\Delta^2 y)$).

Genel olarak, y'nin $(n-1)$. farkının farkına, y'nin n. farkı denir ve $\Delta^n y$ ile gösterilir.

$$\Delta^n y=\Delta(\Delta^{n-1} y) \quad n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots \tag{2.3}$$

Tanım 2.1 ve Tanım 2.2 yardımıyla $\Delta^2 y(x)$ ve $\Delta^3 y(x)$ farkları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\Delta^2 y(x) = \Delta[\Delta y(x)] = \Delta[y(x+h) - y(x)]$$
$$= [y(x+2h) - y(x+h)] - [y(x+h) - y(x)]$$
$$\Delta^2 y(x) = y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)$$

$$\Delta^3 y(x) = \Delta[\Delta^2 y(x)] = \Delta[y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)]$$
$$= [y(x+3h) - 2y(x+2h) + y(x+h)] - [y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)]$$
$$\Delta^3 y(x) = y(x+3h) - 3y(x+2h) + y(x+h) - y(x)$$

Sonuç 2.1: $y(x)$ fonksiyonunun n. mertebeden farkı $(a-b)^n$'nin binom açılımına benzer biçimde $\Delta^n y(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{n-k} y[x+(n-k)h]$ formülüyle bulunur.

Tanım 2.3: Herhangi bir y fonksiyonuna uygulandığında, y'ye özdeş olan bir fonksiyon üreten operatöre birim operatör denir ve I sembolü ile gösterilir. Bu y'nin tanım kümesindeki herhangi bir x için aşağıdaki gibi gösterilir:

$$Iy(x) = y(x) \tag{2.4}$$

Δ^0, birim operatör gibi tanımlanır, yani

$$\Delta^0 y = Iy \tag{2.5}$$

'dir ve (2.3)'teki ifade $n=1$ için de doğrudur. $[\Delta y = \Delta^1 y = \Delta(\Delta^0 y) = \Delta(Iy) = \Delta y]$.

I birim operatörü de Δ operatörü gibi bir fonksiyona birden çok kez uygulanabilir ve $n = 2, 3, 4, ...$ için $I^n y(x) = Iy(x)$ olur. Matematiksel tümevarımla bu ispatlanabilir.

Örnek:

$y(x) = x^2$ fonksiyonunun birinci, ikinci ve üçüncü farkı aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}\Delta y(x) &= \Delta x^2 = (x+h)^2 - x^2 \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - x^2 \\ &= 2xh + h^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(x) &= \Delta[\Delta y(x)] = \Delta(2xh + h^2) \\ &= [2(x+h)h + h^2] - [2xh + h^2] \\ &= 2h^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 y(x) &= \Delta[\Delta^2 y(x)] = \Delta(2h^2) \\ &= 2h^2 - 2h^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $y(x)$, ikinci dereceden bir fonksiyonken $\Delta y(x)$ birinci dereceden bir fonksiyon ve $\Delta^2 y(x)$ sabit bir fonksiyondur. $\Delta^3 y(x)$ ise sabit ve sıfır fonksiyonudur. Burada $y(x)$'in dördüncü ve daha yüksek farklarının da sıfır olacağı açıktır.

Sonuç 2.2: Δ operatörü bir fonksiyona uygulandığında fonksiyonunun derecesi bir azalır. n. dereceden bir fonksiyonun n. farkı bir sabite, $(n+1)$. ve daha yüksek farkları ise özdeş olarak sıfıra eşit olur.

Bu sonuç Tablo 2.1 ile daha iyi özetlenebilir.

Tablo 2.1. Polinomların dereceleriyle farkları arasındaki ilişki

$y(x)$	$\Delta y(x)$	$\Delta^2 y(x)$	$\Delta^3 y(x)$	$\Delta^4 y(x)$
1	0	0	0	0
x	h	0	0	0
x^2	$2xh + h^2$	$2h^2$	0	0
x^3	$3x^2h + 3xh^2 + h^3$	$6xh^2 + 6h^3$	$6h^3$	0

2.2. Δ Operatörünün Bazı Özellikleri

Basit fonksiyonların farkları rahatlıkla bulunabildiği halde, bu fonksiyonların birleşimi olan fonksiyonların farkları bu kadar kolay bulunamayabilir. Bu durumda verilen fonksiyonun farkı, Δ operatörünün özellikleri yardımıyla bulunur. c sabit, y(x) bir fonksiyon olmak üzere; bu özelliklerden bazıları şunlardır [3]:

1) Sabitin farkı: Bir sabitin farkı sıfırdır.

$$\Delta c = c - c$$
$$\Delta c = 0 \tag{2.6}$$

2) Bir sabitle bir fonksiyonun çarpımının farkı:

$$\begin{aligned} \Delta[cy(x)] &= cy(x+h) - cy(x) \\ &= c[y(x+h) - y(x)] \\ \Delta[cy(x)] &= c\Delta[y(x)] \end{aligned} \tag{2.7}$$

3) Dağılma özelliği:

$$\begin{aligned} \Delta[y_1(x) + y_2(x)] &= [y_1(x+h) + y_2(x+h)] - [y_1(x) + y_2(x)] \\ &= [y_1(x+h) - y_1(x)] + [y_2(x+h) - y_2(x)] \\ \Delta[y_1(x) + y_2(x)] &= \Delta[y_1(x)] + \Delta[y_2(x)] \end{aligned} \tag{2.8}$$

Bu kural yardımıyla n. fark aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Delta^n y(x) = \Delta^{n-1}[\Delta y(x)] = \Delta^{n-1}[y(x+h) - y(x)] = \Delta^{n-1} y(x+h) - \Delta^{n-1} y(x)$$

4) Lineerlik özelliği:

$$\begin{aligned} \Delta[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] &= [c_1 y_1(x+h) + c_2 y_2(x+h)] - [c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] \\ &= c_1[y_1(x+h) - y_1(x)] + c_2[y_2(x+h) - y_2(x)] \\ \Delta[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)] &= c_1 \Delta[y_1(x)] + c_2 \Delta[y_2(x)] \end{aligned} \tag{2.9}$$

5) İki fonksiyonun çarpımının farkı:

$$\Delta[y_1(x)y_2(x)] = y_1(x+h)y_2(x+h) - y_1(x)y_2(x)$$
$$= y_1(x+h)y_2(x+h) - y_1(x)y_2(x+h) + y_1(x)y_2(x+h) - y_1(x)y_2(x)$$
$$= [y_1(x+h) - y_1(x)]y_2(x+h) + y_1(x)[y_2(x+h) - y_2(x)]$$
$$\Delta[y_1(x)y_2(x)] = \Delta[y_1(x)]y_2(x+h) + y_1(x)\Delta[y_2(x)] \qquad (2.10)$$

6) İki fonksiyonun bölümünün farkı:

$$\Delta\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right] = \frac{y_1(x+h)}{y_2(x+h)} - \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$
$$= \frac{y_1(x+h)y_2(x) - y_1(x)y_2(x+h)}{y_2(x+h)y_2(x)}$$
$$= \frac{y_1(x+h)y_2(x) - y_1(x)y_2(x) + y_1(x)y_2(x) - y_1(x)y_2(x+h)}{y_2(x+h)y_2(x)}$$
$$= \frac{y_2(x)[y_1(x+h) - y_1(x)] - y_1(x)[y_2(x+h) - y_2(x)]}{y_2(x+h)y_2(x)}$$
$$\Delta\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right] = \frac{\Delta[y_1(x)]y_2(x) - y_1(x)\Delta[y_2(x)]}{y_2(x+h)y_2(x)} \qquad (2.11)$$

7) Kuvvet fonksiyonunun farkı:

$$\Delta c^x = c^{x+h} - c^x$$
$$\Delta c^x = c^x(c^h - 1) \qquad (2.12)$$

8) Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının farkları:

$$\Delta \sin x = \sin(x+h) - \sin x$$
$$= 2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)$$
$$\Delta \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \qquad (2.13)$$

$$\Delta\cos x = \cos(x+h) - \cos x$$
$$= -2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right)$$
$$\Delta\cos x = -2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \tag{2.14}$$

Tanım 2.4: x'teki değeri aşağıdaki gibi verilen fonksiyona, n. mertebeden faktöriyel fonksiyonu denir.

$$x^{(n)} = x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(n-1)h] \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.15}$$

Örnek:

$x^{(1)} = x$ $\qquad$ $(x+h)^{(1)} = x+h$

$x^{(2)} = x(x-h)$ $\qquad$ $(x+h)^{(2)} = (x+h)x$

$x^{(3)} = x(x-h)(x-2h)$ $\qquad$ $(x+h)^{(3)} = (x+h)x(x-h)$

n. mertebeden bir faktöriyel fonksiyonunda n tane çarpan vardır. Buna rağmen farkını bulmak çok kolaydır.

$$\Delta x^{(n)} = (x+h)^{(n)} - x^{(n)}$$
$$= (x+h)x(x-h)...[x-(n-2)h] - x(x-h)(x-2h)...[x-(n-1)h]$$
$$= x^{(n-1)}\{(x+h) - [x-(n-1)h]\}$$
$$= nhx^{(n-1)}$$

Bu fark $x^{(n-1)}$'i içerdiğinden ve $n=1$ için $x^{(0)}$ tanımlanmadığından $n>1$ için doğrudur, fakat $x^{(1)} = x$ ve $\Delta x = h$ olduğu için faktöriyel fonksiyonunun tanımı

$$x^{(0)} = 1 \tag{2.16}$$

alınarak genişletilebilir ve faktöriyel fonksiyonunun farkı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Delta x^{(n)} = nhx^{(n-1)} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.17}$$

Tanım 2.5: İlk n pozitif tam sayının çarpımı n! ile gösterilir ve “n faktöriyel” diye okunur.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \qquad (2.18)$$

Sıfırın faktöriyeli 1’e eşittir.

$$0! = 1 \qquad (2.19)$$

Buna göre faktöriyel fonksiyonunun n. mertebeden farkı

$$\Delta^n x^{(n)} = n!h^n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.20)$$

şeklinde yazılabilir.

2.3. Belirsiz Toplam: Δ^{-1} Operatörü

Tanım 2.6: y, birinci farkı Y olan bir fonksiyonsa, y fonksiyonuna Y fonksiyonunun bir belirsiz toplamı denir ve Δ^{-1}Y ile gösterilir.

$$\Delta y(x) = Y(x) \Rightarrow \Delta^{-1} Y(x) = y(x) \qquad (2.21)$$

Bir fonksiyonun belirsiz toplamını bulmak farkını bulmak kadar kolay değildir. Örneğin, $y(x) = x$ fonksiyonunun birinci farkı $\Delta x = h$’dir ve $y(x) = x + 2$ fonksiyonunun birinci farkı da $\Delta x = h$’dir. Bu durumda h’nin belirsiz toplamı hem x hem de $x + 2$ olur. Genel olarak, herhangi bir c sabiti için, $\Delta(x + c) = h$ olduğundan $\Delta^{-1} h = x + c$’dir. Fakat bu sonuç tam olarak doğru değildir. p, h periyotlu herhangi bir fonksiyon olmak üzere, p’nin tanım kümesindeki bütün x’ler için

$$\Delta p(x) = p(x+h) - p(x) = 0 \qquad (p(x+h) = p(x)) \qquad (2.22)$$

olur. Buradan

$\Delta[x+p(x)] = \Delta x + \Delta p(x) = h + 0 = h$

ve

$$\Delta^{-1} h = x + p(x) \tag{2.23}$$

bulunur. O halde (2.23), h periyotlu herhangi bir p fonksiyonu için doğrudur ve böylece h sabit fonksiyonunun belirsiz toplamı tam olarak ifade edilmiş olur.

Sonuç 2.3: Periyodu fark aralığına eşit olan periyodik bir fonksiyonun birinci farkı sıfırdır.

Örnek:

$h = 2\pi$ için $y(x) = \sin x$ fonksiyonunun birinci farkı sıfırdır ($\Delta \sin x = 0$).

$$\begin{aligned}
\Delta \sin x &= \sin(x+2\pi) - \sin x \\
&= \sin x.\underbrace{\cos 2\pi}_{1} + \cos x.\underbrace{\sin 2\pi}_{0} - \sin x \\
&= \sin x - \sin x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Sonuç 2.4: Periyodu fark aralığına eşit olan periyodik bir fonksiyon p, Y fonksiyonunun herhangi bir belirsiz toplamı y olmak üzere, Y'nin başka bir belirsiz toplamı da $y+p$'dir.

$$\Delta^{-1} Y = y + p \tag{2.24}$$

İspat:

$$\begin{aligned}
\Delta(y+p) &= \Delta y + \Delta p \\
&= Y + 0 \\
&= Y
\end{aligned}$$

Teorem 2.1: Y fonksiyonunun herhangi iki belirsiz toplamı y_1 ve y_2 ise bunların farkı $(y_1 - y_2)$, h periyotlu bir fonksiyondur.

İspat:

$y_1 - y_2$, h periyotlu bir fonksiyonsa birinci farkı sıfıra eşit olmalıdır.

$$\begin{aligned}\Delta(y_1 - y_2) &= \Delta y_1 - \Delta y_2 \\ &= Y - Y \text{ (hipotezden)} \\ &= 0\end{aligned}$$

Teorem 2.2: Y_1 ve Y_2 fonksiyonlarının belirsiz toplamları sırasıyla y_1 ve y_2 ise, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $c_1Y_1 + c_2Y_2$ fonksiyonunun belirsiz toplamı $c_1y_1 + c_2y_2$'dir.

$$\Delta^{-1}(c_1Y_1 + c_2Y_2) = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{2.25}$$

İspat:

$$\begin{aligned}\Delta(c_1y_1 + c_2y_2) &= c_1\Delta y_1 + c_2\Delta y_2 \\ &= c_1Y_1 + c_2Y_2\end{aligned}$$

Buna göre Δ^{-1} operatörü de Δ operatörü gibi lineer bir operatördür:

$$\Delta^{-1}(c_1Y_1 + c_2Y_2) = c_1y_1 + c_2y_2$$
$$\Delta^{-1}(c_1Y_1 + c_2Y_2) = c_1\Delta^{-1}Y_1 + c_2\Delta^{-1}Y_2$$

2.4. Fark ve Diferansiyel Arasındaki Benzerlik

Verilen bir y fonksiyonunun x değerinde

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y(x)}{h}$$

limiti varsa buna y'nin türevi denir. Bu türev Dy(x) ile gösterilir:

$$Dy(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y(x)}{h} \qquad (2.26)$$

D'ye diferansiyel operatörü denir ve bir fonksiyona uygulandığında bu fonksiyonun türevini üretir. $[\Delta y(x)]/h$ sayısı, y'nin grafiğinde x ve $x+h$ noktalarını birleştiren doğrunun eğimidir. Dy(x), x'deki teğet doğrusunun eğimidir.

Bir fonksiyonun ard arda diferansiyelinin alınması, D operatörünün ard arda uygulanmasıyla gösterilir. y'nin ikinci türevi (diferansiyeli) y'nin birinci türevinin türevi olarak (D(Dy)) tanımlanır ve D^2y biçiminde gösterilir. Benzer biçimde y'nin üçüncü türevi ikinci türevinin türevi olarak ($D(D^2y)$) tanımlanır ve D^3y ile gösterilir. y'nin n. türevi de D^ny ile gösterilir.

y bir fonksiyon olmak üzere $Dy = Y$ ise y'ye Y'nin ilkel fonksiyonu denir. Fark operatörünün tersinin Δ^{-1} ile gösterilmesi gibi, diferansiyelin tersi de D^{-1} ile gösterilirse $y = D^{-1}Y$ olur. Fakat bu genellikle $y = \int Y$ şeklinde gösterilir ve y'ye Y'nin belirsiz integrali denir.

Bir Y fonksiyonunun belirsiz integrali c herhangi bir sabit olmak üzere $\int Y = y + c$'dir. Buna göre y'nin diferansiyeli Y ise $y + c$'nin diferansiyeli de Y'dir, yani $Dy = Y$ ise $D(y+c) = y$'dir.

Fark hesabıyla diferansiyel hesap arasında güçlü bir benzerlik vardır. Bu benzerliklerden bazıları Tablo 2.2'de verilmiştir.

Tablo 2.2'de verilen diferansiyel hesapla ilgili sonuçlar, bunlara karşılık gelen fark hesapları ve limitin bazı temel özellikleri yardımıyla bulunabilir.

Tablo 2.2. Fark hesabıyla diferansiyel hesap arasındaki ilişki

Fark Hesapları	Diferansiyel Hesaplar
1. $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$	1'. $Dy(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\Delta y(x)}{h}$
2. $\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y) \quad n = 1, 2, 3, \ldots$	2'. $D^n y = D(D^{n-1} y) \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
3. $\Delta(cy) = c\Delta y$	3'. $D(cy) = cDy$
4. $\Delta(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \Delta y_1 + c_2 \Delta y_2$	4'. $D(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 D y_1 + c_2 D y_2$
5. y, n.dereceden bir polinomsa $\Delta^n y$ bir sabit ve daha yüksek mertebeden farkları sıfırdır.	5'. y, n.dereceden bir polinomsa $D^n y$ bir sabit ve daha yüksek mertebeden türevleri sıfırdır.
6. $\Delta x^{(n)} = nhx^{(n-1)}$	6'. $Dx^n = nx^{n-1}$
7. $\Delta[u(x)v(x)] = \Delta u(x)v(x) + u(x+h)\Delta v(x)$	7'. $D[u(x)v(x)] = Du(x)v(x) + u(x)Dv(x)$
8. $\Delta\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{\Delta u(x)v(x) - u(x)\Delta v(x)}{v(x+h)v(x)}$	8'. $D\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{Du(x)v(x) - u(x)Dv(x)}{v(x)^2}$
9. $\Delta y = Y$ ise $\Delta^{-1} Y = y + p$'dir. Burada p, h periyotlu bir fonksiyondur.	9'. $Dy = Y$ ise $\int Y = y + c$'dir. Burada c bir sabittir.

Örnek:

(7') aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$
\begin{aligned}
D[u(x)v(x)] &= \lim_{h\to 0} \frac{\Delta[u(x)v(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\Delta u(x)v(x) + u(x+h)\Delta v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\Delta u(x)}{h} v(x) + u(x+h)\frac{\Delta v(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\Delta u(x)}{h} v(x)\right] + \lim_{h\to 0} \left[u(x+h)\frac{\Delta v(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\Delta u(x)}{h}\right] \lim_{h\to 0} v(x) + \lim_{h\to 0} u(x+h) \lim_{h\to 0} \left[\frac{\Delta v(x)}{h}\right] \\
&= Du(x)v(x) + u(x)Dv(x)
\end{aligned}
$$

BÖLÜM 3. FARK DENKLEMLERİ

3.1. Temel Tanımlar

Tanım 3.1: S kümesindeki her x değeri için tanımlı bir y fonksiyonunu ve onun Δy, $\Delta^2 y, \ldots$ farklarından en az birini içeren denkleme, S kümesi üzerinde bir fark denklemi denir.

Fark denklemi, S kümesi üzerinde bir fonksiyonu ve bu fonksiyonun farklarını içeren bir bağıntıdır. Bu bağıntı alınan fonksiyona göre doğru ya da yanlış olacağından, bağıntıyı doğru yapan fonksiyonu bulmak önemlidir. Cebirde bir denklemin çözümünü bulmak için çeşitli metotlar vardır. Fark denklemleri teorisinde de benzer şekilde fark denklemini doğru yapan fonksiyon bulunmaya çalışılacaktır.

Örnek:

Bütün x değerleri için tanımlı y fonksiyonunu ve bu fonksiyonun farklarını içeren aşağıdaki denklemler S reel sayı kümesi üzerinde fark denklemleridir. (Burada S, bütün reel sayıların oluşturduğu kümeden farklı bir kümedir.)

1) $\Delta y(x) + 3y(x) = 0$

2) $\Delta^2 y(x) + 2\Delta y(x) + y(x) = 0$

3) $\Delta^2 y(x) - xy(x) = 2x + 7$

4) $y(x)\Delta^3 y(x) = \dfrac{1}{2}$

5) $[\Delta y(x)]^2 - [y(x)]^2 = -1$

Bir fark denkleminin hangi sayı kümesi üzerinde tanımlandığı önemlidir. Fark denklemleri genellikle pozitif tam sayılar kümesinde tanımlanır; fakat bu zorunlu değildir. Bu şekilde tanımlanan bir fark denkleminde $\Delta y(x)$, $\Delta^2 y(x)$, $\Delta^3 y(x)$, … farkları h pozitif bir tamsayı olmak üzere, y'nin $x+h,\ x+2h,\ x+3h,\ \ldots$ tamsayılarındaki değerlerini kapsayacağından fark denklemi anlamlı olur. Bu nedenle $1-5$ denklemleri pozitif tamsayılar kümesi üzerindeki fark denklemleri olarak düşünülebilir. Ancak, fark denklemlerine bakılarak denklemin reel sayılar, pozitif tamsayılar ya da başka bir küme üzerinde tanımlı olduğu söylenemez. Bunun açıkça verilmesi gerekir. Tanım 3.1'de olduğu gibi bir S kümesi üzerinde bir fark denkleminin tanımlanabilmesi için denklemle verilen $y(x)$, $\Delta y(x)$, $\Delta^2 y(x)$, … değerleri arasındaki bağıntının ve S ile gösterilen bu bağıntıların tanımlandığı kümenin verilmesi gerekir.

Pratikte fark denklemleriyle çalışılırken tanım kümesi olarak, x_0'la başlayan eşit aralıklı $x_0+h,\ x_0+2h,\ x_0+3h,\ \ldots$ değerlerinin oluşturduğu sonlu ya da sonsuz küme alınır. Genelliği bozmadan bundan sonraki fark denklemlerinin tanım kümesi olarak; negatif olmayan, daha kullanışlı olduğu için genellikle $x_0 = 0$'la başlayan ve $h = 1$ alınarak elde edilen, ardışık pozitif tamsayılardan oluşan sınırlı ya da sınırsız küme alınacaktır.

Örnek:

1900'den başlanarak 10 yıllık aralıklarla 1900, 1910, 1920, … yıllarında bir ülkenin nüfusunu gösteren bir fonksiyon verilsin. Bu fonksiyonun tanım kümesi 1, 2, 3, … ardışık tamsayılarından oluşabilir mi?

Bu tarihlerden her birinden 1890 çıkarıldığında 10, 20, 30, … sayıları; bu sayıların her biri 10'a bölündüğünde de istenilen 1, 2, 3, … ardışık tamsayıları bulunur.

Fark denklemlerinin tanım kümesinin ardışık tamsayılardan oluştuğunu ispatlamak için verilen fonksiyonun herhangi bir sayıyla başlayan h eşit aralıklı x'lerin kümesinde olduğu farz edilsin, yani x değerleri

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ \ldots \tag{3.1}$$

olsun (x ve h tamsayı olmak zorunda değil). Bu durumda x'e bağlı

$$k = \frac{x-(x_0+ah)}{h} \qquad \text{(a, herhangi bir tamsayı)} \tag{3.2}$$

denklemiyle yeni bir k değişkeni tanımlanırsa $x = x_0$ olduğunda $k = a$, $x = x_0 + h$ olduğunda $k = a + 1$ olur ve böylece tanım kümesini oluşturan (3.1)'deki x değerleri a, $a + 1$, $a + 2$, … ardışık tamsayılarına dönüşür. Burada her bir k değerine karşılık, yalnız ve yalnız bir x değeri vardır ve bu değer (3.2)'den elde edilen

$$x = (x_0 - ah) + kh \tag{3.3}$$

denklemiyle bulunur.

Bundan sonra fark aralığı 1'e eşit, S kümesi de ardışık tamsayılar kümesi olarak alınacak, fark denkleminde x yerine k yazılacak ve y'nin k'daki değeri y(k) yerine y_k ile gösterilecektir. Buna göre $1-5$ denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

1') $\Delta y_k + 3y_k = 0$

2') $\Delta^2 y_k + 2\Delta y_k + y_k = 0$

3') $\Delta^2 y_k - k y_k = 2k + 7$

4') $y_k \Delta^3 y_k = \frac{1}{2}$

5') $(\Delta y_k)^2 - (\ y_k)^2 = -1$

Bir fark denklemi bu şekilde yazıldığında, negatif olmayan herhangi bir tamsayıdan başlayan sınırlı ya da sınırsız bir tamsayılar kümesinde tanımlı olduğu anlaşılacaktır.

Birinci ve yüksek mertebeden farkların açılımı yardımıyla $1' - 5'$ denklemleri yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir.

1'') $y_{k+1} + 2y_k = 0$

2'') $y_{k+2} = 0$

3") $y_{k+2} - 2y_{k+1} + (1-k)y_k = 2k + 7$

4") $y_k y_{k+3} - 3y_k y_{k+2} + 3y_{k+1} y_k - {y_k}^2 = \dfrac{1}{2}$

5") $(y_{k+1} - y_k)^2 + {y_k}^2 = -1$

Tanım 3.2: $f_0(k)$, $f_1(k)$, …, $f_{n-1}(k)$, $f_n(k)$ ve $g(k)$'lerin her biri S kümesi üzerinde k'nin bir fonksiyonu (f_k'nın değil) olmak üzere;

$$f_0(k)y_{k+n} + f_1(k)y_{k+n-1} + \ldots + f_{n-1}(k)y_{k+1} + f_n(k)y_k = g(k) \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabilen fark denklemine S kümesi üzerinde lineer fark denklemi denir.

1", 2" ve 3" denklemleri lineer fark denklemleridir. (3.4)'te $n=1$, $f_0(k)=1$, $f_1(k)=2$, ve $g(k)=0$ alınarak 1" denklemi (3.4) formunda yazılır. Benzer biçimde (3.4) denkleminde $n=2$, $f_0(k)=1$, $f_1(k)=0$, $f_2(k)=0$, $g(k)=0$ yazılarak 2" denklemi elde edilir. Bu denklemlerde f_0, f_1, …, f_{n-1}, f_n katsayıları sabit fonksiyonlardır. Böyle denklemlere sabit katsayılı denklemler denir. 3" denklemi lineer olmasına rağmen $f_2(k)=1-k$ olduğundan sabit katsayılı değildir. 4" ve 5" denklemleri lineer olmayan denklemlerdir.

1", 2" ve 3" denklemlerinin hepsi lineer denklemler olmasına rağmen 1" denklemi y_k ve onun bir komşusuna (y_{k+1}), 2" denklemi sadece y_{k+2}'ye, 3" denklemi y_k ve onun iki komşusuna (y_{k+1} ve y_{k+2}) bağlı olduğundan birbirinden farklıdır.

Tanım 3.3: S kümesi üzerinde (3.4) biçiminde yazılabilen lineer bir fark denkleminde $f_0(k)$ ve $f_n(k)$'nın her ikisi birden sıfırdan farklıysa bu fark denklemine S kümesi üzerinde n. mertebeden fark denklemi denir.

Örnek:

$y_{k+2} + 5y_{k+1} - 7y_k = 2k$ (3.mertebeden)

$y_{k+2} + 5y_{k+1} = 2k$ (2.mertebeden)

$y_{k+2} - 7y_k = 2k$ (3.mertebeden)

$ky_{k+2} + 2y_{k+1} - 6y_k = 0$ (S, 0'ı içermiyorsa 2.mertebeden)

$4^k y_{k+3} - 3^k y_{k+2} + 2^k y_{k+1} - y_k = 1$ (4.mertebeden)

Bu denklemlerden sadece ilk üçü sabit katsayılı lineer fark denklemidir. Dördüncü denklem 0'ın S kümesinin elemanı olması durumunda (3.4) biçiminde yazılırsa $f_0(0) = 0$ olacağından Tanım 3.3'e uymaz.

3.2. Fark Denkleminin Çözümleri

Tanım 3.4: S kümesi üzerinde tanımlı bir fark denklemini, S kümesi üzerindeki bir özdeşliğe indirgeyen y fonksiyonuna, yani S kümesi üzerindeki bir fark denklemini her noktada doğru yapan y fonksiyonuna, bu fark denkleminin çözümü denir.

Örnek:

$y_k = 2^k$ fonksiyonu aşağıdaki fark denkleminin belirtilen sayı kümesi üzerinde bir çözümü müdür?

$$y_{k+1} - 2y_k = 0 \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

$y_k = 2^k$ fonksiyonunun (3.5) denklemini sağladığı yani denklemin bir çözümü olduğu denklemde bu fonksiyon yerine yazılarak gösterilebilir.

$$y_{k+1} - 2y_k = 2^{k+1} - 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} - 2^{k+1} = 0$$

Benzer biçimde $y_k = 3 \cdot 2^k$, $y_k = 4 \cdot 2^k$, $y_k = (1/2) \cdot 2^k$ fonksiyonlarının her birinin (3.5) fark denklemini sağladığı gösterilebilir. Aslında, c herhangi bir sabit olmak üzere;

$$y_k = c2^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.6}$$

fonksiyonu (3.5) denkleminin çözümüdür. Bu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$y_{k+1} - 2y_k = c2^{k+1} - 2c2^k = c(2^{k+1} - 2^{k+1}) = 0$$

(3.6) çözümünde keyfi sabite uygun değerler verilerek, $y_k = 3 \cdot 2^k$, $y_k = 4 \cdot 2^k$, $y_k = (1/2) \cdot 2^k$ çözümleri elde edilebilir. Bu y fonksiyonlarından her birine (3.5) fark denkleminin özel çözümü, c sabitini içeren (3.6) denklemine de (3.5) fark denkleminin genel çözümü denir. Ancak cebirsel fonksiyonlar gibi fark denklemlerinin de çözümü olmayabilir. Örneğin $(y_{k+1} - y_k)^2 + y_k{}^2 = -1$ denklemini sağlayan reel değerli bir çözüm yoktur.

Örnek:

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0 \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.7}$$

fark denkleminin genel çözümü, c_1 ve c_2 herhangi iki keyfi sabit olmak üzere

$$y_k = 2^k(c_1 + c_2 k) \tag{3.8}$$

fonksiyonuyla verilir.

Bu fonksiyonun bütün c_1 ve c_2 sabitleri için (3.7) fark denklemini sağladığı denklemde yerine yazılarak gösterilebilir. Burada her bir c_1 ve c_2 sabitleri için (3.7)'nin farklı çözümleri bulunur. Eğer bu denklemin $y_0 = 1$ ve $y_1 = 6$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümü bulunmak istenirse, öncelikle genel çözümde bu değerler yerine yazılır. Buradan $c_1 = 1$ ve $2(c_1 + c_2) = 6$ elde edilir. Bu iki denklemden oluşan denklem sistemi çözülerek $c_1 = 1$ ve $c_2 = 2$ bulunur. Bunlar genel çözümde yerlerine yazıldığında başlangıç şartlarını sağlayan özel çözüm

$$y_k = 2^k(1 + 2k) \tag{3.9}$$

olarak bulunur. Bu çözüm, başlangıç şartlarını sağlayan tek çözümdür.

3.3. Varlık ve Teklik Teoremi

Bazı fark denklemlerinin birçok çözüm olmasına rağmen, bazılarının hiç çözümü yoktur. Fark denklemleri sınıflandırılırken her zaman en az bir çözümün olabileceğini ve hatta bazı şartlar altında yalnız ve yalnız bir tek çözümün olduğunu bilmek önemlidir. Bu sonuçları ifade eden teoremler varlık ve teklik teoremleri olarak bilinmektedir.

$$f_0(k)y_{k+2} + f_1(k)y_{k+1} + f_2(k)y_k = g(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.11}$$

şeklindeki ikinci mertebeden lineer fark denkleminde y_{k+2} ve y_k'nın katsayılarının kesinlikle sıfır olmayacağı biliniyor.

$$f_0(k) \neq 0, \quad f_2(k) \neq 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.12}$$

$k = 0$ için (3.11),

$$f_0(0)y_2 + f_1(0)y_1 + f_2(0)y_0 = g(0)$$

olur. Burada y_2, y_1 ve y_0 değerlerinden herhangi birinin bilinmesi diğer ikisinin bulunmasına yetmez. Fakat bu değerlerden herhangi ikisi bilinirse üçüncü bulunabilir. Örneğin y_1 ve y_0 ardışık değerleri biliniyorsa y_2 bulunabilir. $k = 0$ için bulunan denklem düzenlenirse

$$f_0(0)y_2 = g(0) - f_1(0)y_1 - f_2(0)y_0$$

elde edilir ve (3.12)'den dolayı her iki taraf $f_0(0)$'a bölünerek y_2 elde edilir. Artık y_1 ve y_2 bilindiğinden $k = 1$ alınarak benzer biçimde y_3 de tek bir biçimde belirlenebilir. Bu şekilde devam edilerek y_1 ve y_0 başlangıç değerleriyle verilen ikinci mertebeden (3.11) denkleminin tek çözümü elde edilir.

y'nin tek çözümünün belirlenebilmesi için y_0 ve y_1 değerlerinin verilmesi gerekmez. y'nin herhangi iki ardışık değerinin bilinmesi, tek çözümün belirlenmesi için yeterlidir. Örneğin y_5 ve y_6 verilmişse fark denkleminde bunlar yazılarak y_7, y_8, …'in elde edildiği gibi y_4, y_3, y_2, y_1, y_0 da elde edilebilir. Fark denklemi

$$a \leq k \text{ ya da } a \leq k \leq b \qquad \text{(a,b negatif olmayan tam sayılar)} \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanan k değerlerinin kümesinde verilse de y'nin ardışık iki değeri bilindiğinde fark denkleminin yine tek bir çözümü bulunur. Buraya kadar olan kısım genelleştirilerek aşağıdaki teoremle ifade edilebilir.

Teorem 3.1: y fonksiyonunun ardışık k tamsayı değerlerinden oluşan S kümesi üzerinde tanımlanmış n. mertebeden lineer

$$f_0(k)y_{k+n} + f_1(k)y_{k+n-1} + \ldots + f_{n-1}(k)y_{k+1} + f_n(k)y_k = g(k) \tag{3.14}$$

fark denkleminin, ardışık n noktasındaki değerleri keyfi belirlenmiş ancak ve ancak bir y çözümü vardır.

İspat:

Hipoteze göre S, (3.13)'teki eşitsizliklerden birinin oluşturduğu kümedir. y'nin tanımlanan ilk n tane değeri y_a, y_{a+1}, …, y_{a+n-1} olsun. Matematiksel tümevarımla S'deki her noktada y'nin değerinin tek türlü belirlendiği dolayısıyla bir tek çözümün olduğu ispatlanabilir.

(3.14) denklemi

$$f_0(k)y_{k+n} = g(k) - f_1(k)y_{k+n-1} - \ldots - f_{n-1}(k)y_{k+1} - f_n(k)y_k \tag{3.15}$$

şeklinde düzenlenip k yerine a yazılırsa

$$f_0(a)y_{a+n} = g(a) - f_1(a)y_{a+n-1} - \ldots - f_{n-1}(a)y_{a+1} - f_n(a)y_a$$

elde edilir ve bu denklemin her iki tarafı $f_0(a)$'ya ($f_0(a) \neq 0$) bölünerek y_{a+n} bulunur. Böylece verilen değerlerle y_{a+n}'nin değeri tek bir şekilde belirlenmiş olur.

y'nin S'deki y_{a+j}'ye ($j \geq n$) kadar olan bütün değerlerinin bilindiği farz edilerek y_{a+j+1} tek türlü belirlenebilirse ispat tamamlanmış olur. (3.14) fark denklemi k yerine k_1

yazılarak ve $k_1 = a + j + 1 - n$ alınarak düzenlenirse

$$f_0(k_1)y_{a+j+1} = g(k_1) - f_1(k_1)y_{a+j} - f_2(k_1)y_{a+j-1} - \ldots - f_n(k_1)y_{a+j-n+1}$$

elde edilir. Varsayımdan dolayı bu denklemin sağ tarafındaki y değerleri bilinir. f_0, S kümesi üzerinde hiçbir yerde sıfır olmadığından her iki taraf $f_0(k_1)$'e bölünerek y_{a+j+1} bulunur. Böylece y_a, y_{a+1}, …, y_{a+n-1} değerleri verildiğinde S'deki bütün k'lar için y'nin tek türlü belirlendiği ispatlanmış olur.

Eğer y'nin verilen n ardışık değeri y_a'dan değil y_m'den başlıyorsa (m>a ve verilen değerler y_m, y_{m+1}, …, y_{m+n-1} ise) bundan önceki y_{m-1}, y_{m-2}, …, y_{a+1}, y_a değerleri ve y'nin diğer bütün değerleri tek türlü belirlenebilir. Bunun ispatı matematiksel tümevarımla yapılabilir.

$k = m - 1$ için fark denklemi

$$f_n(m-1)y_{m-1} = g(m-1) - f_0(m-1)y_{m-1+n} - \ldots - f_{n-1}(m-1)y_m \qquad (3.16)$$

şeklinde yazılır. Burada y_m, y_{m+1}, …, y_{m-1+n}'nin verildiği farz edildiğinden eşitliğin ikinci tarafı bilinir. f_n hiçbir yerde sıfır olmadığından her iki taraf $f_n(m-1)$'e bölünerek y_{m-1} belirlenir.

S kümesi $a \le k \le b$ şeklinde sonlu (sınırlı) ya da $k \ge a$ şeklinde sonsuz (sınırsız) bir küme olsa da, y'nin ardışık n değerinin nasıl verildiğinin önemi olmaksızın S'deki her k değeri için y tek bir şekilde belirlenir. Böylece başlangıç değerlerini ve fark denklemini sağlayan tek bir fonksiyon bulunur.

Bu teorem çözümün nasıl bulunacağını değil, fark denkleminin verilen şartları sağlayan tek bir çözümünün bulunabileceğini garantilediği için önemlidir.

3.4. $y_{k+1} = Ay_k + B$ Denklemi

Doğal sayılar kümesinde tanımlı birinci mertebeden lineer fark denklemi

$$f_0(k)y_{k+1} + f_1(k)y_k = g(k) \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.17}$$

şeklindedir. Burada f_0 ve f_1 asla sıfır olmayan fonksiyonlardır ve eğer sabit fonksiyonlarsa sıfırdan farklı sabitlerdir. (3.17) denkleminin her iki tarafı $f_0(k)$'ya bölünerek denklem düzenlendiğinde

$$y_{k+1} = -\frac{f_1(k)}{f_0(k)} y_k + \frac{g(k)}{f_0(k)}$$

elde edilir. g de f_0 ve f_1 gibi sabit bir fonksiyonsa denklem

$$y_{k+1} = A y_k + B \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.18}$$

biçiminde yazılabilir. Burada A, B sabit ve $A \neq 0$'dır. (Asıl denklemde g özdeş olarak sıfıra eşitse B sıfır olabilir.) Bu kısımda bu basit denklem çözülecektir.

y_0 değeri verilmiş olsun. (3.18) denkleminde $k=0$ yazılarak

$$y_1 = A y_0 + B, \tag{3.19}$$

$k = 1$ yazılarak ve (3.19) fark denklemi kullanılarak

$$y_2 = A y_1 + B = A(A y_0 + B) + B$$
$$y_2 = A^2 y_0 + B(1 + A) \tag{3.20}$$

ve $k = 2$ yazılarak

$$y_3 = A y_2 + B = A[A^2 y_0 + B(1 + A)] + B$$
$$y_3 = A^3 y_0 + B(1 + A + A^2) \tag{3.21}$$

bulunur.

(3.19), (3.20) ve (3.21)'den y değerlerinin aşağıdaki gibi olacağı tahmin edilebilir.

$$y_k = A^k y_0 + B(1 + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) \qquad k = 1, 2, 3, \dots \tag{3.22}$$

(3.22)'de parantezin içindeki ifade ilk terimi 1, ortak çarpanı A olan geometrik dizinin toplamıdır ve

$$1 + A + A^2 + \dots + A^{k-1} = \begin{cases} A \neq 1 \quad \text{ise} & \dfrac{1-A^k}{1-A} \\ A = 1 \quad \text{ise} & k \end{cases} \tag{3.23}$$

olduğundan

$$y_k = \begin{cases} A \neq 1 \quad \text{ise} & A^k y_0 + B\dfrac{1-A^k}{1-A} \\ A = 1 \quad \text{ise} & y_0 + Bk \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.24}$$

yazılabilir.

Teorem 3.2: Bir y_0 değeriyle birlikte verilen (3.18) fark denkleminin tek çözümü (3.24)'te verilen y fonksiyonudur.

İspat:

(3.24)'te $k = 0$ yazıldığında y_k çözümünün y_0 olacağı açıktır. $A \neq 1$ için verilen çözümde $k = k + 1$ yazılırsa

$$y_{k+1} = A^{k+1} y_0 + B\frac{1-A^{k+1}}{1-A}$$

bulunur. Fark denkleminde y_k ve y_{k+1} yerine yazılırsa

$$\underbrace{A^{k+1} y_0 + B\frac{1-A^k}{1-A}}_{y_{k+1}} = A\underbrace{\left(A^k y_0 + B\frac{1-A^k}{1-A}\right)}_{y_k} + B \tag{3.25}$$

denklemi elde edilir. Bunun $k=0,\ 1,\ 2,\ \dots$ için doğru olduğu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{aligned} A^{k+1}y_0+B\frac{1-A^k}{1-A} &= A\left(A^k y_0+B\frac{1-A^k}{1-A}\right)+B \\ &= A^{k+1}y_0+B\left[1+\frac{A(1-A^k)}{1-A}\right] \\ &= A^{k+1}y_0+B\frac{1-A^{k+1}}{1-A} \end{aligned}$$

Böylece $A\neq 1$ için ispat tamamlanmış olur.

$A=1$ için verilen çözümde $k=k+1$ yazılırsa

$$y_{k+1}=y_0+B(k+1)$$

bulunur ve (3.19) fark denklemi $A=1$, y_k ve y_{k+1} eşitlikleriyle yeniden düzenlenirse

$$y_0+B(k+1)=(y_0+Bk)+B=y_0+B(k+1)$$

elde edilir. Böylece $A=1$ için de verilen ifadenin çözüm olduğu ispatlanmış olur.

Sonuç 3.1: y; $k=0,\ 1,\ 2,\ \dots$ kümesinde verilen, (3.18) fark denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda

$$y_k=\begin{cases} A\neq 1 \quad \text{ise} \quad CA^k+B\dfrac{1-A^k}{1-A} \\ A=1 \quad \text{ise} \quad C+Bk \end{cases} \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ ... \tag{3.26}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

İspat:

$k=0$ için y'nin C sabitine eşit olduğu hemen görülür. Teorem 3.2 kullanılarak (3.26) formülünün, her keyfi C sabiti için (3.18) fark denkleminin bir çözümünü, yani bütün çözümlerini verdiği görülür.

Örnekler:

1) $y_0 = 5$ başlangıç değeriyle verilen $y_{k+1} = 2y_k + 1$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ fark denkleminin çözümünü bulun.
(3.18) denklemine göre bu denklemde $A = 2$, $B = 1$'dir ve (3.24)'ten tek çözüm

$$y_k = 2^k \cdot 5 + 1 \cdot \frac{1-2^k}{1-2} = 6 \cdot 2^k - 1$$

olarak bulunur. Bu çözümler $y_0=5$'ten başlanarak yazılırsa 5, 11, 23, 47, 95, 191, … şeklinde, artan bir dizi oluşturur.

2) $y_0 = 3$ başlangıç şartıyla verilen $2y_{k+1} - y_k = 4$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ fark denkleminin çözümünü bulun.

Denklem (3.18)'e uygun olarak düzenlendiğinde $y_{k+1} = (1/2)y_k + 2$ olur. Buradan $A = 1/2,\ B = 2$ olarak bulunur ve çözüm

$$y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 3 + 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

olur. Burada da y_0, y_1, y_2, … değerleri artan bir dizi oluşturur $\left(3,\ 3\frac{1}{2},\ 3\frac{3}{4},\ 3\frac{7}{8},\ \ldots\right)$.

Birinci ve ikinci örnekte bulunan çözümlerin oluşturduğu dizilerin her ikisi de artan diziler olmasına rağmen aralarında önemli bir fark vardır. İkinci dizinin terimleri sürekli artarak devam ettiği hâlde daima 4'ten küçük olur. Birinci dizide ise terimler bir sınırı olmadan artar.

3) $y_0 = 1$ başlangıç şartıyla verilen $y_{k+1} = -y_k + 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ fark denkleminin çözümünü bulun.

Bu denklemde $A = -1$, $B = 1$'dir ve (3.24)'ten çözüm

$$y_k = \left(-1\right)^k \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1 - \left(-1\right)^k}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^k\right]$$

olarak bulunur. k, 0 ya da çift sayıysa $(-1)^k = 1$, tek sayıysa $(-1)^k = -1$ olacağından çözüm 1, 0, 1, 0, 1, 0, … şeklinde sırayla değişen değerler alır. Bu şekildeki dizilere, sabit salınımlı dizi denir.

Bir fark denkleminin tek çözümünü belirlemek için özellikle y_0 değerinin verilmesi gerekmez. Verilen değer sadece (3.26)'daki C sabitinin belirlenmesini sağladığından y'nin herhangi bir değerinin verilmesi de yeterlidir.

Örnek:

$y_3 = 9$ değeriyle verilen $y_{k+1} = 2y_k - 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ fark denkleminin çözümünü bulun.

(3.24)'te $k = 3$, $A = 2$, $B = -1$ yazıldığında

$$y_3 = C \cdot 2^3 - \frac{1 - 2^3}{1 - 2} = 8C - 7$$

elde edilir. Buradan başlangıç şartı kullanılarak $C = 2$ bulunur ve çözüm

$$y_k = 2 \cdot 2^k - \frac{1 - 2^k}{1 - 2} = 2^k + 1$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.3: Sonlu ya da sonsuz tane k değerinin oluşturduğu bir kümede verilen birinci mertebeden

$$y_{k+1} = Ay_k + B \qquad k = a,\ a+1,\ a+2,\ \dots \qquad (3.27)$$

fark denkleminin sonsuz çözümü vardır. Eğer y bir çözümse

$$y_k = \begin{cases} A \neq 1 & \text{ise} \quad CA^{k-a} + B\dfrac{1-A^{k-a}}{1-A} \\ A = 1 & \text{ise} \quad C + B(k-a) \end{cases} \qquad k = a,\ a+1,\ a+2,\ ... \qquad (3.28)$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır. Eğer k'nın a, $a+1$, $a+2$, … değerlerinin herhangi biri için y'nin tek çözümü varsa (3.27)'nın tek çözümü belirlenir. Özel olarak y_a belirliyse, bu durumda $C = y_a$ olmak üzere, (3.27)'in tek çözümü (3.28) ile verilir.

İspat:

$a = 0$ durumunda Sonuç 3.1 elde edilir. Bu durum daha önce ispatlandığından burada $a \neq 0$ için ispat yapılacaktır. Öncelikle k'nın a, $a+1$, $a+2$, … değerlerini 0, 1, 2, … sayılarına dönüştüren $j = k - a$ bağıntısıyla yeni bir j indisi ve $y_k = y_{a+j} = z_j$ şeklinde yeni bir z fonksiyonu tanımlansın. Böylece (3.27) fark denklemi

$$z_{j+1} = Az_j + B \qquad j = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç 3.1'e göre bu fark denkleminin çözümü

$$z_j = \begin{cases} A \neq 1 & \text{ise} \quad CA^{j} + B\dfrac{1-A^{j}}{1-A} \\ A = 1 & \text{ise} \quad C + Bj \end{cases} \qquad j = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır. Bu çözüm $z_j = y_k$ ve $j = k - a$ eşitlikleri kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$y_k = \begin{cases} A \neq 1 \quad \text{ise} \quad CA^{k-a} + B\dfrac{1-A^{k-a}}{1-A} \\ A = 1 \quad \text{ise} \quad C + B(k-a) \end{cases} \qquad k = a,\ a+1,\ a+2,\ ...$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

3.5. Diziler

Önceki bölümde fark denklemini sağlayan fonksiyonların farklı türlerde olabildiği görüldü. Yani bazı y_k değerleri k arttıkça artıyor, bazıları azalıyor, bazıları ise iki değer arasında salınıyor. Fark denklemlerinin sosyal bilimlerdeki problemlere uygulanmasında hangi şartlar altında bu davranışları gösterdiği önemlidir.

y_0 başlangıç değeriyle verilen $y_{k+1} = Ay_k + B$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots)$ fark denkleminin sırasıyla y_0, y_1, y_2, … değerlerini alan y_k çözümü bulunmaya çalışılacak. Tanım kümesi ardışık 0, 1, 2, … tamsayılarının kümesi olan ve bu kümenin her elemanında sayı değeri alan fonksiyonlara dizi denir (Genellikle dizilerin tanım kümesi pozitif tamsayılar kümesi olmasına rağmen, uygulamada kolaylık olması bakımından fark denklemlerinin çözümü olan dizilerin tanım kümesi {0, 1, 2, …} olarak alınır).y_0, y_1, y_2, … sıralaması genellikle $\{y_k\}$ sembolü ile gösterilir ve "genel terimi y_k olan dizi" diye okunur. Bu dizinin terimleri (y_0, y_1, y_2, …) reel sayılardır. Ele alınan tüm fark denklemleri ardışık tam sayılar kümesinde tanımlı olduğundan bunların çözümleri dizilerdir. Reel sayı dizilerinin temel teorisi yardımıyla bu çözüm dizilerinin davranışları hakkında bilgi edinilebilir.

Örnekler:

Aşağıda bazı diziler ve bu dizilerin ilk beş terimleri verilmiştir.

1) $\{1\}$	1, 1, 1, 1, 1, …
2) $\{k-1\}$	-1, 0, 1, 2, 3, …
3) $\{2^k\}$	1, 2, 4, 8, 16, …

4) $\left\{\dfrac{1}{k+1}\right\}$ $\quad 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \ldots$

5) $\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\right\}$ $\quad 0,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{7}{8},\ \dfrac{15}{16},\ \ldots$

6) $\left\{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k\right\}$ $\quad 1,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\ -\dfrac{1}{27},\ \dfrac{1}{81},\ \ldots$

7) $\{(-2)^k\}$ $\quad 1, -2, 4, -8, 16, \ldots$

8) $\{1+(-1)^k\}$ $\quad 2, 0, 2, 0, 2, \ldots$

Reel sayı dizileri incelendiğinde bazı özellikleri ortaya çıkar. Örneğin, k'nın her değeri için $|y_k| \le M$, yani $-M \le y_k \le M$ eşitsizliğini sağlayan pozitif bir M sayısı bulunabilir. Bu durumda $\{y_k\}$ dizisine sınırlı dizi denir. Eğer böyle bir M sayısı yoksa dizi sınırsızdır. Birinci örnekteki dizinin bütün k değerleri için sınırlı olduğu kolaylıkla gösterilebilir:

$$|1| = 1 \le 1$$

Benzer biçimde dördüncü ve sekizinci örnekteki diziler de sınırlıdır.

$$\left|\frac{1}{k+1}\right| = \frac{1}{k+1} \le 1, \qquad \left|1+(-1)^k\right| \le 2 \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

İki, üç ve yedinci örnekteki diziler sınırsızdır. Fakat 1'den büyük veya eşit bir M sayısı 5. ve 6. diziler için bir sınırdır. Genel terimi $1/(k+1)$ olan dördüncü diziye daha yakından bakılırsa, dizinin terimlerinin gittikçe küçüldüğü ve sıfıra yaklaştığı görülür. Terimlerin hiçbirinin gerçekte sıfır olmamasına rağmen, yeterince ilerlendiğinde terimlerin her birinin sıfırdan farkının çok küçük bir sayı olacağı kesindir. Altıncı dizi de, terimleri sırasıyla pozitif ve negatif değerler almasına rağmen bu türden bir dizidir yani yeterince büyük bir k sayısından sonraki terimleri 0'a çok yakındır.

Tanım 3.5: ε, yeterince küçük pozitif bir sayı olmak üzere; herhangi bir ε sayısına karşılık, $k \geq N$ için $|y_k| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir N pozitif tam sayısı bulunabiliyorsa $\{y_k\}$ dizisine sıfır dizisi denir.

Bu tanıma göre ε'a bağlı N pozitif tam sayısına eşit veya bu sayıdan büyük olan bütün k'lar için dizinin terimlerinin mutlak değerleri ε'dan küçük oluyorsa, bu dizi sıfır dizisidir. Buna göre $\varepsilon = 1/3$ alındığında genel terimi $1/(1+k)$ olan dördüncü dizi için $N = 3$ bulunur; yani bu dizinin y_3'ten sonraki bütün terimlerinin mutlak değerleri $(1/3)$'ten küçük olur.

$k \geq 3$ için $\left|\frac{1}{k+1}\right| < \frac{1}{3}$

Tanım 3.5'te belirtildiği gibi N, ε'a bağlı bir sayı olduğundan ε sayısı değiştikçe N sayısı da değişir. Örneğin, bu dizide $\varepsilon = 1/10$ alınırsa buna karşılık $N = 10$ bulunur. Bu dizinin $\varepsilon \geq 1$ için bütün terimlerinin ε'dan küçük olacağı açıktır. $0 < \varepsilon < 1$ olduğunda

$$\left|\frac{1}{k+1}\right| = \frac{1}{k+1} < \varepsilon \quad (k \geq 0 \text{ olduğundan})$$

$$k+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$k > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad \rightarrow \quad N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

eşitsizliğini sağlayacak bütün k'lardan küçük olan N sayısı bulunabileceğinden Tanım 3.5'e göre $\{1/(1+k)\}$ dizisi bir sıfır dizisidir.

Beşinci dizi bir sıfır dizisi değildir. Bütün terimleri 1'den küçüktür ve gittikçe 1'e yaklaşır. Fakat bütün terimlerinden 1 çıkarılırsa elemanları $-1,\ -1/2,\ -1/4,\ -1/8,\ -1/16,\ \ldots$ olan yeni bir dizi elde edilir ve bu bir sıfır dizisidir. Buna göre eğer bir dizinin elemanları 1'e yaklaşıyorsa bütün elemanlarından 1 çıkarılarak elde edilen yeni dizi bir sıfır dizisi olur.

Tanım 3.6: $\{y_k\}$ verilen bir dizi olmak üzere $\{y_k - L\}$ dizisini sıfır dizisi yapacak şekilde bir L sayısı varsa L'ye $\{y_k\}$ dizisinin limiti denir ve dizinin y_k elemanları L limitine yaklaşır ($\{y_k\}$ dizisi L'ye yakınsar) denir.

$\{y_k\}$ dizisi bir L limiti varsa bu sembolik olarak

$\lim\limits_{k\to\infty} y_k = L$ ya da $k \to \infty$ iken $y_k \to L$

şeklinde gösterilir.

Limiti L olan bir $\{y_k\}$ dizisine yakınsak denir. Eğer bir dizinin limiti yoksa bu diziye ıraksak dizi denir. Sıfır dizisinin limiti 0 olan yakınsak bir dizi olduğu açıktır.

Tanım 3.6'ya göre beşinci örnekteki dizi yakınsak ve limiti 1'dir. Dizinin her teriminden 1 çıkarıldığında elde edilen $\{-(1/2)^k)$ dizisi bir sıfır dizisidir. Öyleyse her $\varepsilon > 0$ sayısı için $k \geq N$ olduğunda $|-(1/2)^k| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı bulunabilir.

$$\left|-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

$$2^k > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \to \qquad 2^N > \frac{1}{\varepsilon}$$

Yukarıdaki eşitsizliğe göre herhangi bir ε sayısına karşılık bir N sayısı bulunabilir. Örneğin, $\varepsilon = 1/10$ alındığında $1/\varepsilon = 10$ olur ve $2^4 > 10$ olduğundan $N = 4$; $\varepsilon = 1/100$ alındığında $1/\varepsilon = 100$ ve $2^7 > 100$ olduğundan $N = 7$ bulunur. Seçilen herhangi bir ε sayısına karşılık, son eşitsizliği sağlayan bir N pozitif tam sayısı bulunabildiğinden bu dizinin limiti 1'dir.

Bir, dört, beş ve altıncı dizilere daha yakından bakıldığında bu dizilerin her birinin farklı ama yakınsak diziler olduğu görülür. Birinci dizi değişmeyen terimlere sahiptir, bütün terimleri ve limiti 1'e eşittir. Böyle dizilere sabit diziler denir. Dört, beş ve altıncı diziler bu tür dizilerden değildir. Dördüncü dizi sürekli küçülerek yukarıdan (sağdan) 0 limitine yaklaşır, beşinci dizi sürekli büyüyerek aşağıdan (soldan) 1 limitine yaklaşır ve altıncı dizinin terimleri sırayla değişerek yukarıdan ve aşağıdan (soldan ve sağdan) 0 limitine yaklaşır.

Tanım 3.7: a) Bütün k'lar için $y_{k+1} > y_k$ ise $\{y_k\}$ dizisine monoton (sürekli) artan, $y_{k+1} < y_k$ ise monoton (sürekli) azalan dizi denir. b) Limiti L olan ve elemanlarından biri L'den küçük diğeri L'den büyük (veya tersi) olan $\{y_k\}$ dizisine L civarında daralarak salınan dizi denir.

Tanım 3.7b'ye göre daralarak salınan bir dizi yakınsak olmak zorundadır. Fakat monoton bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir. Önceki örneklerdeki genel terimi $y_k = 2^k$ olan üçüncü dizi, monoton artan bir dizidir fakat yakınsak değildir. Monoton dizi sınırlıysa yakınsaktır; sınırsızsa örneğin $\{2^k\}$ ya da $\{-2^k\}$ şeklindeyse ıraksaktır. Bu dizilerden birincisinde terimler gittikçe daha çok büyüyerek $+\infty$'a, ikincisinde ise terimler daha çok küçülerek $-\infty$'a gider.

Tanım 3.8: P pozitif bir sayı olmak üzere; $k \geq N$ için $\{y_k\} > P$ olacak şekilde P'ye bağlı bir N pozitif tam sayısı varsa $\{y_k\}$ dizisi $+\infty$'a ıraksar denir.

$\{y_k\}$ dizisi $+\infty$'a gidiyorsa bu $k \to \infty$ iken $y_k \to +\infty$ şeklinde gösterilir. Benzer bir tanım $-\infty$'a giden diziler için de yapılabilir. Fakat dizinin $+\infty$ ya da $-\infty$'a gitmesi için (ıraksak olması için) monoton olması gerekmez. Örneğin $\{k + (-1)^k\}$ dizisi $+\infty$'a gider fakat monoton artan değildir ($\{k + (-1)^k\} \to 1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, \ldots$).

$y_k \to +\infty$ olduğunun ispatlanması için dizide yeterince ilerlendiğinde (y_N terimi bulunduğunda) sonraki terimlerin hepsinin ($k \geq N$ için y_k'ların) P'den daha büyük olduğunun gösterilmesi gerekir. Örneğin $\{2^k\}$ dizisi ve $P = 10$ alınsın. Bu P sayısına karşılık bulunan terim 2^4'tür ($N = 4$) ve bundan sonraki bütün terimler $P = 10$'dan büyüktür. $P = 100$ alınırsa buna karşılık $N = 7$ bulunur ve 2^7'den sonraki bütün terimler 100'den daha büyük olur. $\{2^k\}$ dizisinin $+\infty$'a gittiğini söyleyebilmek için herhangi bir pozitif P sayısı ve buna karşılık bulunan N'nin, $k \geq N$ için $2^k > P$

eşitsizliklerini sağlaması gerekir. $N = P$ alındığında (N'nin daha küçük değerlerinin de bu eşitsizlikleri sağlamasına rağmen) bu eşitsizlikler her zaman sağlanır.

Terimleri sırasıyla 1, -2, 4, -8, 16, … ve 2, 0, 2, 0, 2, … olan yedi ve sekizinci dizilerin her ikisi de ıraksak olmasına rağmen ne $+\infty$'a ne de $-\infty$'a gider. Bunlardan ilkinin terimleri sırayla pozitif ve negatif yönde mutlak değeri artarak ilerliyor, ikincisiyse 2 ve 0 değerleri arasında salınım yapıyor.

Tanım 3.9: $\{y_k\}$, ıraksak, fakat $+\infty$ ya da $-\infty$'a ıraksamayan bir dizi olmak üzere; sınırlıysa sabit salınımlı, sınırsızsa genişleyen salınımlıdır.

Şimdiye kadar bulunanlar özetlenirse; diziler yakınsak ya da ıraksaktır. Tablo 3.1'de görüldüğü gibi her iki durumda da diziler dört farklı şekilde hareket edebilir.

Tablo 3.1. Dizilerin davranışları

Yakınsak Diziler	Iraksak Diziler
Y1. Sabit	I1. $+\infty$'a ıraksayan
Y2. Monoton artan sınırlı	I2. $-\infty$'a ıraksayan
Y3. Monoton azalan sınırlı	I3. Sabit salınımlı
Y4. Daralan salınımlı	I4. Genişleyen salınımlı

3.6. Dizi Şeklindeki Çözümler

Bu bölümde birinci mertebeden lineer

$$y_{k+1} = A y_k + B \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.29}$$

fark denkleminin çözümlerinin olası davranışları belirlenecektir. Verilen y_0 değerine karşılık bu fark denkleminin tek çözümünün

$$y_k = \begin{cases} A \neq 1 \quad \text{ise} \quad A^k y_0 + B\dfrac{1-A^k}{1-A} \\ A = 1 \quad \text{ise} \quad y_0 + Bk \end{cases} \qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \tag{3.30}$$

olduğu bulunmuştu (Teorem 3.2).

Verilen y_0 değeriyle belirlenen $\{y_k\}$ dizisi, (3.29) fark denklemine uygun olarak belirlenen (3.30)'da tanımlanan y_k elemanlarından oluşur. A ve B'nin fark denkleminden belirlendiği göz önüne alınırsa, verilen y_0 başlangıç şartına karşılık bulunan bu elemanlar belirli bir reel sayı dizisi oluşturur. Bu bölümde A, B ve y_0 parametrelerinin değerlerine bağlı olarak $\{y_k\}$ çözüm dizisinin davranışları belirlenmeye çalışılacaktır. İlk olarak $A = 1$ durumu incelenecektir.

Teorem 3.4: $\{y_k\}$ dizisi $y_{k+1} = y_k + B$ $(k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots)$ fark denkleminin çözümü ise bu durumda y_0 başlangıç değeriyle birlikte verilen $\{y_k\}$ dizisi; $B = 0$ ise sabit, $B > 0$ ise $+\infty$'a ıraksayan, $B < 0$ ise $-\infty$'a ıraksayan bir dizidir.

İspat:

(3.30)'dan $y_k = y_0 + Bk$ olduğu biliniyor.

1) $B = 0$ ise $k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$ için $y_k = y_0$'dır ve $\{y_k\}$ istenildiği gibi sabit bir dizidir.

2) $B > 0$ ise $\{y_k\}$ dizisinin $+\infty$'a ıraksadığı yani Tanım 3.8'e göre herhangi bir P pozitif sayısı için $k \geq N$ için $y_k > P$ olacak biçimde bir N sayısının bulunabileceği gösterilmelidir. P sayısı $P \leq y_0$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde verilirse 0'dan büyük bütün k'lar için $y_k = y_0 + Bk > P$ eşitsizliği sağlanacağından, $N = 1$ olarak bulunur ve $k \geq N$ için $y_k > P$ olur. Eğer $P > y_0$ ise $y_k = y_0 + Bk > P$ eşitsizliğinden

$$Bk > P - y_0 \quad \rightarrow \quad k > \frac{P - y_0}{B} \quad (B>0)$$

bulunur. N tamsayısı $(P - y_0)/B$'den büyük seçilirse $k \geq N$ için $y_k > P$ olur.

3) $B<0$ ise $k \geq N$ için $y_k < P$ olacak şekilde herhangi bir P negatif sayısı bulunabiliyorsa $\{y_k\}$ dizisi $-\infty$'a ıraksar. Eğer P, $P \geq y_0$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde verilirse 0'dan büyük bütün k'lar için $y_k = y_0 + Bk < P$ ($B<0$ ise $Bk<0$) eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. Buna göre $N=1$ ve $k \geq N$ için $y_k > P$ olur. $P < y_0$ ise

$$y_k = y_0 + Bk < P$$

$$Bk < P - y_0 \quad \rightarrow \quad k > \frac{P-y_0}{B} \quad (B<0)$$

elde edilir. Buna göre $(P-y_0)/B$'den büyük olacak şekilde seçilen her N sayısından büyük veya eşit olan bütün k'lar için $y_k < P$ olur ve ispat tamamlanır.

(3.29) fark denklemine geri dönüldüğünde, bu denklemin (3.30)'da verilen $A \neq 1$ durumundaki çözümü

$$y_k = A^k\left(y_0 - \frac{B}{1-A}\right) + \frac{B}{1-A} \quad \rightarrow \quad y_k - \frac{B}{1-A} = A^k\left(y_0 - \frac{B}{1-A}\right)$$

şeklinde düzenlenebilir.

$$y^* = \frac{B}{1-A} \tag{3.31}$$

alınarak bu denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_k - y^* = A^k(y_0 - y^*) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.32}$$

(3.32)'den y*, verilen y_0 başlangıç değerine eşit olduğunda, A ne olursa olsun bütün k değerleri için $y_k - y^* = 0$ ve $y_k = y^*$ olacağı açıktır. Fakat $y^* \neq y_0$ ise y_k, A^k'ya bağlı olduğundan $\{y_k\}$ dizisinin davranışı da $\{A^k\}$ dizisinin davranışına bağlı olur.

Aşağıdaki teorem bu sonuçları özetler.

Teorem 3.5: $\{A^k\}$ dizisi, $-1 < A \leq 1$ ise yakınsak, diğer durumlarda ıraksaktır. $\{A^k\}$ dizisi a) $A = 0$ ya da $A = 1$ ise sabit (sırasıyla limiti 0 ya da 1), b) $0 < A < 1$ ise monoton azalan (limiti 0), c) $-1 < A < 0$ ise yavaşlayarak salınan (limiti 0), ç) $A = -1$ ise sonlu salınan, d) $A < -1$ ise sonsuz salınan ve e) $A > 1$ ise $+\infty$'a ıraksayan bir dizidir.

Bu teoremin ispatlanmasında aşağıdaki lemmada verilen eşitsizlik yardımcı olacaktır.

Lemma: $x > -1$ ise $(1+x)^k \geq 1 + kx$'dir. $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$

İspat:

Bu lemma matematiksel tümevarımla kolaylıkla ispatlanabilir.

$k = 0$ için verilen eşitsizliğin doğru olduğu

$$(1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x$$
$$1 \geq 1$$

şeklinde gösterilir. $k = m$ için $(1+x)^m \geq 1 + mx$ eşitsizliği doğru olduğu kabul edilsin. Eşitsizliğin her iki tarafı $(1+x)$ ile çarpılıp, düzenlendiğinde

$(1+x)^{m+1} \geq (1+mx)(1+x)$ ($x > -1$ olduğundan $1 + x > 0$'dır.)

$(1+x)^{m+1} \geq 1 + (1+m)x + mx^2$

$(1+x)^{m+1} \geq 1 + (1+m)x$ ($m > 0,\ x^2 > 0$ olduğundan $mx^2 > 0$'dır.)

bulunur. $k = m + 1$ için de eşitsizliğin doğru olduğu gösterildiğinden ispat tamamlanır.

Teoremin ispatı:

a) $A = 0$ ya da $A = 1$ ise sonuç aşikârdır. (Y1) (Bkz. Tablo 3.1)

b) x, pozitif bir sayı olmak üzere; $0 < A < 1$ aralığında $A = 1/(1+x)$ ve $|A| = 1/(1+x)$ yazılabilir. Buradan lemma yardımıyla

$$\frac{1}{|A|^k} = (1+x)^k \geq 1 + kx > kx \text{ ya da } 0 < \left|A^k\right| < |A|^k < \frac{1}{kx}$$

olur. Tanım 3.5'e uygun olarak $\varepsilon > 0$ verildiğinde N, $1/(\varepsilon x)$'ten büyük herhangi bir sayı olmak üzere $k \geq N$ için $|A^k| < \varepsilon$ olur. Bu nedenle $\{A^k\}$ bir sıfır dizisidir. Ayrıca $0 < A < 1$ aralığındaki her A değeri için $A^{k+1} = A \cdot A^k < A^k$ olacağından bu dizinin monoton azalan bir dizi olduğu açıktır. Böylece $\{A^k\}$ dizisinin verilen aralıkta monoton azalan, limiti sıfır olan, yakınsak bir dizi olduğu ispatlanmış olur. (Y3)

c) $-1 < A < 0$ aralığında da önceki maddedekine benzer şekilde x herhangi bir pozitif sayı olmak üzere $|A| = 1/(1+x)$ yazılabilir. Buradan da lemma yardımıyla

$$\frac{1}{|A|^k} = (1+x)^k \geq 1 + kx > kx \text{ ya da } 0 < \left|A^k\right| < |A|^k < \frac{1}{kx}$$

bulunur ve yine $\varepsilon > 0$ için N, $1/(\varepsilon x)$'ten büyük herhangi bir tamsayı olmak üzere $k \geq N$ için $|A^k| < \varepsilon$ olur ve bu aralıkta $\{A^k\}$'nın bir sıfır dizisi olduğu bulunur. $0 < A < 1$ aralığında dizinin terimleri sırayla pozitif ve negatif, limiti de 0'dır. Yani verilen aralıkta $\{A^k\}$ dizisi yavaşlayarak salınan, dolayısıyla yakınsak dizidir. (Y4)

ç) $A = -1$ ise $\{A^k\}$ dizisinin elemanları $-1, 1, -1, 1, \ldots$'dır. Buna göre dizi sabit salınımlı ve ıraksaktır. (I3)

d) $A < -1$ ise $\{A^k\}$ dizisi sırayla pozitif ve negatif elemanlardan oluşur. Pozitif elemanlar sınırsız olarak artarken negatif elemanlarda sınırsız olarak azalır ve dizi $+\infty$ ya da $-\infty$'a ıraksamamasına rağmen elemanları genişleyen salınım yaptığından ıraksaktır. (I4)

e) $A > 1$ durumunda $x > 0$ için $A = 1 + x$ yazılabilir. Bu durumda lemma yardımıyla

$A^k = (1+x)^k \geq 1 + kx > kx$

elde edilir. Buna göre verilen herhangi bir P pozitif sayısına karşılık $k \geq P/x$ için $A^k > P$'dir. N tamsayısı P/x'ten büyük seçilirse $k \geq N$ için $A^k > P$ elde edilir. Böylece $A > 1$ durumunda $\{A^k\}$ dizisinin $+\infty$'a ıraksadığı ispatlanmış olur (I1) ve teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.5, k büyürken A^k'nın nasıl davrandığı hakkında bilgi verir; fakat (3.32)'den elde edilen

$$y_k = A^k\left(y_0 - y^*\right) + y^* \tag{3.33}$$

denklemindeki y_k'nın davranışı hakkında bilgi vermez. A^k, $(y_0 - y^*)$ sabitiyle çarpılıp y^*'la toplanırsa y_k bulunur. Bu nedenle $\{y_k\}$ dizisinin hareketini belirlemek için öncelikle bu diziyi oluşturan terimlerin (çarpım veya toplam halinde bulunan terimlerin) davranışı incelenmelidir. Örneğin, monoton artan $\{k/(k+1)\}$ dizisinin limiti 1'dir. Bu dizinin terimlerinin her biri 2 ile çarpılırsa elde edilen yeni dizi $\{2k/(k+1)\}$ olur. Bu dizi de yine monoton artan sınırlı fakat limiti 2 olan bir dizidir. Eğer ilk dizinin her terimi -2 ile çarpılırsa, bu sefer sınırlı fakat monoton azalan ve limiti -2 olan $\{-2k/(k+1)\}$ dizisi elde edilir. Eğer dizi 0 sabitiyle çarpılırsa, bütün terimleri 0 olan sabit bir dizi elde edilir. Dizinin türü denildiğinde onu sınırlandıran davranış anlaşılacaktır yani Tablo 3.1'de listelenen Y1 (sabit), Y2 (sınırlı, monoton artan), …, I4 (genişleyen salınımlı) türleri anlaşılacaktır.

Teorem 3.6: $\{y_k\}$ herhangi bir dizi ve c herhangi bir sabit olsun. $\{y_k\}$, L limitli yakınsak bir diziyse $\{cy_k\}$ ve $\{y_k + c\}$ dizileri de yakınsaktır ve limitleri sırasıyla cL ve $L + c$'dir. $\{y_k\}$, ıraksak bir diziyse $\{cy_k\}$ $(c \neq 0)$ ve $\{y_k + c\}$ dizileri de ıraksaktır. Ayrıca $\{cy_k\}$ ve $\{y_k + c\}$ dizilerinin her ikisi de a ve b de verilen istisnalar dışında aynı tiptedir. a) Herhangi bir $\{y_k\}$ dizisi için $c = 0$ ise $\{cy_k\}$ sabit bir dizidir. (Bütün terimleri sıfıra eşittir.) b) $c < 0$ ise $\{y_k\}$sınırlı ve monoton azalan bir dizi olduğunda $\{cy_k\}$ sınırlı ve monoton artan; $\{y_k\}$ $+\infty$'a ıraksayan bir dizi olduğunda $\{cy_k\}$ $-\infty$'a ıraksayan bir dizi olur. (Tersi de doğrudur.)

İspat:

Hipoteze göre yeterince küçük pozitif bir ε sayısı $(\varepsilon > 0)$ için

$$k \geq N_1 \text{ için } |y_k - L| < \varepsilon \tag{3.34}$$

olacak şekilde, ε'a bağlı N_1sayısı vardır. Tanım 3.5 ve 3.6'ya göre

$$k \geq N_2 \text{ için } |cy_k - cL| < \varepsilon \tag{3.35}$$

ve

$$k \geq N_3 \text{ için } |(y_k + c) - (L + c)| < \varepsilon \tag{3.36}$$

olacak şekilde N_2 ve N_3 sayıları bulunabilmelidir.

(3.35) aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$k \geq N_2 \text{ için } |cy_k - cL| = |c(y_k - L)| = |c|.|y_k - L| < \varepsilon$$

Burada $c = 0$ ise $0 < \varepsilon$ bulunur ve hipotezden dolayı bütün k'lar için bu doğrudur, yani $N_2 = 1$'dir. $c \neq 0$ ise hipoteze göre $k \geq N_4$ ve $|y_k - L| < \varepsilon/|c|$ olacak şekilde $\varepsilon/|c|$'ye bağlı bir N_4 sayısı bulunabilir. Dolayısıyla $c \neq 0$ ise (3.35)'i sağlayacak $N_2 = N_4$ sayısı vardır. Böylece $\{y_k\}$ dizisi yakınsak ve limiti L ise $\{cy_k\}$ dizisi de yakınsak ve limiti cL olur.

(3.36) da aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$k \geq N_3 \text{ için } |(y_k + c) - (L + c)| = |y_k + c - L + c| = |y_k - L| < \varepsilon$$

Bu eşitsizlik de hipoteze göre $N_3 = N_1$ için doğrudur, dolayısıyla $\{y_k\}$ dizisi yakınsak ve limiti L ise $\{y_k + c\}$ dizisi de yakınsak ve limiti $L + c$'dir.

Teorem 3.5’le beraber bu teorem y_0, A ve B değerlerinin bütün olası birleşimleri için

$$\{y_k\} = \{A^k(y_0 - y^*) + y^*\} \tag{3.38}$$

çözüm dizisinin davranışının belirlenmesini sağlar. Örneğin (3.29)’da $A = B = 1/2$ yazılırsa

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.39}$$

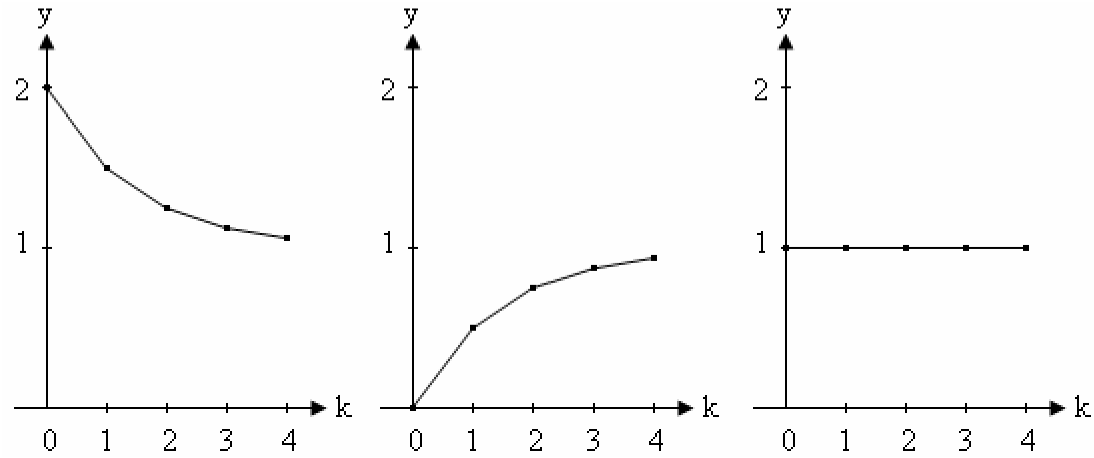
fark denklemi elde edilir. Bu durumda

$$y^* = \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

olur ve (3.33)’ten çözüm

$$y_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k (y_0 - 1) + 1$$

olarak bulunur. Monoton azalan ve sınırlı olan $\{(1/2)^k\}$ dizisi Teorem 3.5’e göre yakınsaktır ve limiti 0’dır. Teorem 3.6’ya göre, $y_0 > 1$ ise $\{(1/2)^k\}$ dizisiyle $(y_0 - 1)$ pozitif sabitinin çarpımı olan $\{(1/2)^k(y_0 - 1)\}$ dizisi de monoton azalan sıfır dizisidir. Bu dizinin 1 ile toplamından elde edilen $\{y_k\} = \{(1/2)^k(y_0 - 1) + 1\}$ dizisi de yine Teorem 3.6’ya göre monoton azalan ve limiti 1 olan yakınsak bir dizidir. Benzer biçimde $y_0 < 1$ olduğunda elde edilen çözümün yakınsak ve limitinin 1, fakat monoton artan olduğu gösterilebilir. $y_0 = 1$ durumunda $\{y_k\}$ her terimi ve limiti 1’e eşit olan yakınsak bir dizidir. Şekil 3.1’de (3.39) fark denkleminin çözümünün bu üç olası davranışı $y_0 = 2$, $y_0 = 0$ ve $y_0 = 1$ başlangıç değerleri için grafikle gösterilmiştir. (k artarken y_k’daki değişimin daha iyi görülebilmesi için grafikte (k, y_k) noktaları düz çizgilerle birleştirilerek gösterilmiştir.)



(a) $y_0 = 2$ (b) $y_0 = 0$ (c) $y_0 = 1$

Şekil 3.1. $y_{k+1} = \frac{1}{2} y_k + \frac{1}{2}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ fark denkleminin $y_0 = 2$, $y_0 = 0$ ve $y_0 = 1$ başlangıç değerleri için çözümlerinin davranışları

Başka bir örnek için $A = -1$ ve $B = 4$ alındığında oluşan yeni fark denklemi

$$y_{k+1} = -y_k + 4 \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{3.40}$$

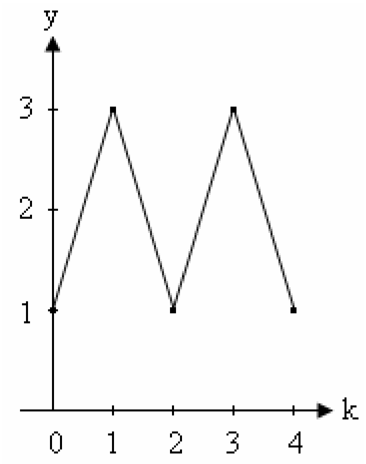
olur ve buradan

$$y^* = \frac{B}{1-A} = \frac{4}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

ve

$$y_k = (-1)^k (y_0 - 2) + 2 \tag{3.41}$$

bulunur. $\{(-1)^k\}$ sabit salınımlı bir dizi olduğundan $(y_0 - 2)$ ile çarpımının 2 fazlası da Teorem 3.6’ya göre $y_0 \neq 2$ olmak şartıyla aynı türde bir dizidir. Buna göre (3.41) fark denkleminin çözümü y_0’ın 2’den farklı değerleri için sabit salınımlı bir dizidir. ($y_0 = 0$ için dizi, bütün terimleri ve limiti 2 olan bir dizidir.) Şekil 3.2’deki grafikte çözüm dizisinin $y_0 = 1$ başlangıç değeri için sabit salınımlı olduğu gösterilmiştir.



Şekil 3.2. $y_{k+1} = -y_k + 4$ (k = 0, 1, 2,…) denkleminin y_0=1 başlangıç değeri için çözümünün davranışı

Tablo 3.2, $y_{k+1} = Ay_k + B$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ biçimindeki birinci mertebeden fark denklemlerinin $\{y_k\} = \{A^k(y_0 - y^*) + y^*\}$ çözüm dizisinin bütün A, B sabitleri ve y_0 başlangıç şartları için muhtemel davranışlarını özetler. Bu tablodaki sonuçlar çözüm dizisine Teorem 3.5 ve 3.6'nın uygulanmasıyla elde edilmiştir. Ayrıca bu teoremler çözüm dizisinin bütün davranışlarını içermediğinden tablonun son üç satırında Teorem 3.4'ün sonuçları da verilmiştir. $A = 0$ olduğunda $y_k = B$ sabit dizisi elde edildiğinden $A = 0$ durumu ihmal edilmiştir.

Şekil 3.3'te de, Tablo 3.2'de listelenen davranışlara ait grafikler tablodakilerle aynı şekilde isimlendirilerek verilmiştir. Her bir durumda grafik, belirtilen A, B ve y_0 değerlerine karşılık elde edilen çözümün türünü açıkça göstermektedir.

Aşağıdaki teorem buraya kadar bulunanları özetler.

Teorem 3.7: Birinci mertebeden lineer

$$y_{k+1} = Ay_k + B \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

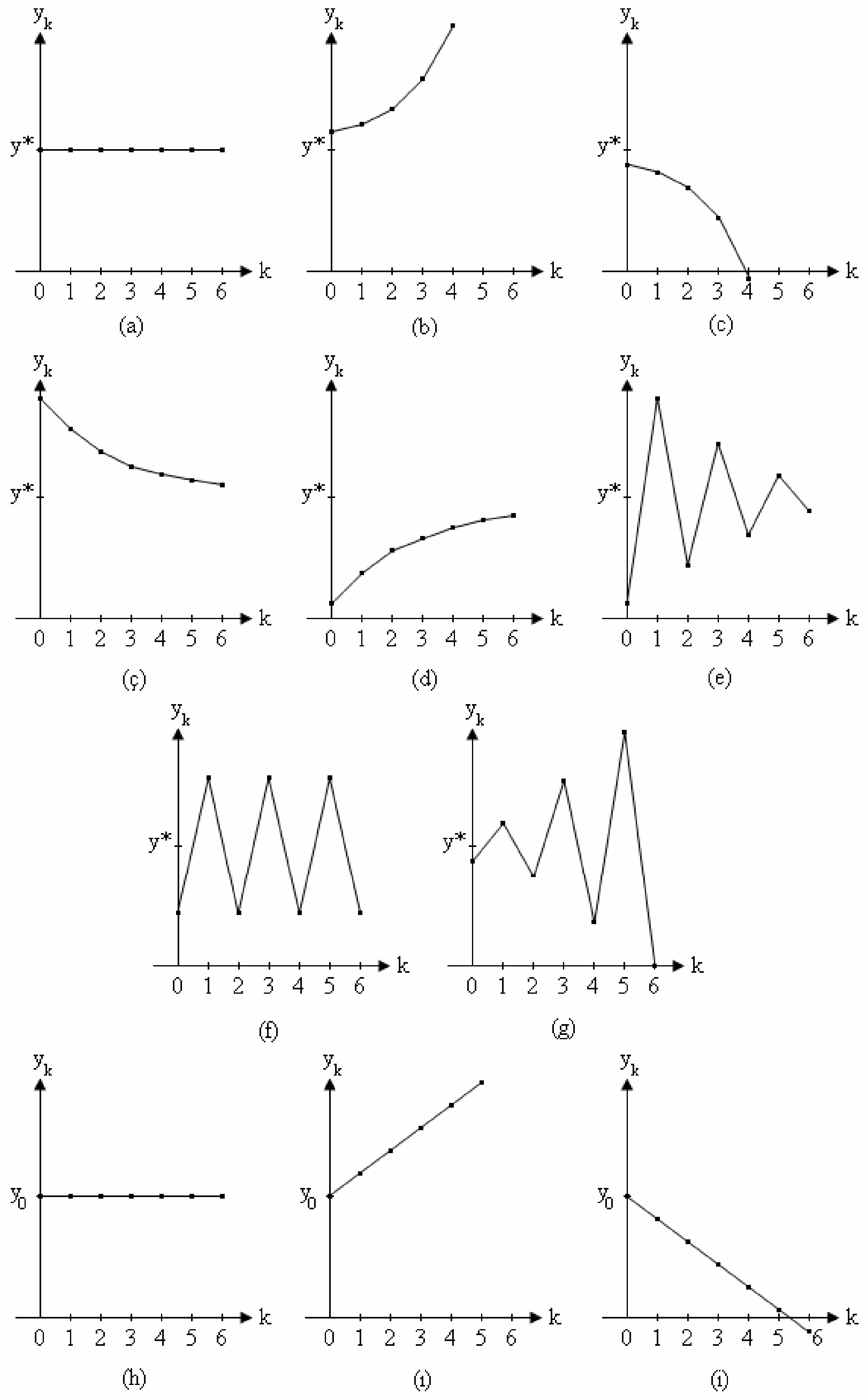
fark denkleminin (y_0 biliniyor; A, B sabit) $y^* = B/(1 - A)$ olmak üzere; tek çözümü

$$y_k = \begin{cases} A \neq 1 & \text{ise} \quad A^k(y_0 - y^*) + y^* \\ A = 1 & \text{ise} \quad y_0 + Bk \end{cases}$$

olur. $\{y_k\}$ çözüm dizisinin davranışı A, B ve y_0'ın bütün uygun değerleri için Tablo 3.2'de (ve Şekil 3.3'teki grafiklerde) verilmiştir. Genel olarak $-1 < A < 1$ ise $\{y_k\}$ yakınsak ve limiti y*; $|A| > 1$ ve $y_0 \neq y^*$ ise $\{y_k\}$ ıraksaktır.

Tablo 3.2. $\{y_k\}$ çözüm dizisinin davranışı

Sıra	$y_{k+1} = Ay_k + B \quad k = 0, 1, 2, \ldots$				
	Hipotezler			Sonuçlar	
	A	B	y_0	$K \neq 0$ için	$\{y_k\}$ dizisi
(a)	$A \neq 1$		$y_0 = y^*$	$y_k = y^*$	Sabit (= y*)
(b)	$A > 1$		$y_0 > y^*$	$y_k > y^*$	Monoton artan, $+\infty$'a ıraksayan
(c)	$A > 1$		$y_0 < y^*$	$y_k < y^*$	Monoton azalan, $-\infty$'a ıraksayan
(ç)	$0 < A < 1$		$y_0 > y^*$	$y_k > y^*$	Monoton azalan, y* limitine yakınsayan
(d)	$0 < A < 1$		$y_0 < y^*$	$y_k < y^*$	Monoton artan, y* limitine yakınsayan
(e)	$-1 < A < 0$		$y_0 \neq y^*$		Yavaşlayarak salınan, y* limitine yakınsayan
(f)	$A = -1$		$y_0 \neq y^*$		Sabit salınımlı, ıraksak
(g)	$A < -1$		$y_0 \neq y^*$		Genişleyen salınımlı, ıraksak
(h)	$A = 1$	$B = 0$		$y_k = y_0$	Sabit (= y_0)
(ı)	$A = 1$	$B > 0$		$y_k > y_0$	Monoton artan, $+\infty$'a ıraksayan
(i)	$A = 1$	$B < 0$		$y_k < y_0$	Monoton azalan, $-\infty$'a ıraksayan



Şekil 3.3. $\{y_k\}$ çözüm dizisinin davranışı

3.7. Basit ve Bileşik Faiz

Bankaya yatırılan bir miktar paranın yılsonunda r faiz oranıyla kazandırdığı paraya basit faiz denir. Basit faizde yılsonundaki para miktarı yatırılan parayla faiz oranından kazanılan paranın toplamına eşittir. Anapara Y_0, faiz oranı r, k yıl sonraki toplam para Y_k olmak üzere; basit faiz kuralı sembolik olarak,

$$Y_{k+1} = Y_k + rY_0 \tag{3.42}$$

şeklinde açıklanabilir. Bu, önceki bölüm göz önüne alındığında birinci mertebeden lineer fark denklemidir. Bunun tek çözümü, Y_0 başlangıç değeri, $A = 1$ ve $B = rY_0$ değerleriyle birlikte Teorem 3.7'ye göre $Y_k = Y_0 + rY_0 k$ veya

$$Y_k = Y_0(1 + kr) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.43}$$

şeklinde bulunur. İyi bilinen bu basit faiz formülü k yıl sonraki paranın, anaparayla k yılda kazanılan basit faizin toplamı olduğunu açıklar. Burada $r > 0$, $Y_0 > 0$ olduğundan $B > 0$'dır ve Tablo 3.2'ye göre $\{Y_k\}$ dizisi $+\infty$'a gider (ıraksar).

Bileşik faizde ise her periyot sonunda anaparayla faizin toplamı anapara olarak alındığından; yani

$$Y_k = (1 + r)Y_{k-1} \tag{3.44}$$

olduğundan, bulunan miktar daha farklıdır. Örneğin bir bankaya yatırılan Y_0 liranın r faiz oranıyla k yılda sağlayacağı toplam gelir

$$Y_k = Y_0(1 + r)^k \tag{3.45}$$

formülü ile bulunur [4].

Eğer faiz bir yıllık dönemlerle değil de yılda m kez olacak şekilde alınıyorsa bu durumda toplam gelir $Y_{mk} = Y_0(1 + r/m)^{mk}$ formülüyle bulunur. Bu formül $n = mk$

olacak şekilde yeniden yazılırsa

$$Y_n = Y_0(1+\frac{r}{m})^n \tag{3.46}$$

olur ve buna karşılık gelen fark denklemi de

$$Y_n = (1+\frac{r}{m})Y_{n-1} \tag{3.47}$$

şeklinde bulunur. (3.46) ve (3.47) denklemlerinde $m=1$ yazıldığında (3.44) ve (3.45) denklemlerinin elde edileceği açıktır.

(3.47) fark denkleminde belirtilen değere her dönem ek bir ödemenin (b_n) de yapıldığı varsayılırsa bu durumda fark denklemi $Y_n = (1+r/m)Y_{n-1} + b_{n-1}$ şeklini alır. Bu fark denklemi daha genel olarak

$$Y_n = aY_{n-1} + b_{n-1} \tag{3.48}$$

biçiminde yazılır.

Burada iki olası durum vardır: 1) Tüm k'lar için $b_k = b$, 2) tüm k'lar için $b_k = b$ ve $a=1$ olması.

1) Tüm k'lar için $b_k = b$ olması durumunda fark denklemi

$$Y_n = aY_{n-1} + b \tag{3.49}$$

olur. Teorem 3.2'den çözüm

$$Y_n = a^nY_0 + b\frac{1-a^n}{1-a} \tag{3.50}$$

şeklinde bulunur ve düzenlendiğinde

$$Y_n = a^n\left(Y_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

elde edilir. Bu sonuca göre, $|a|<1$ ise birikim süreci yakınsaktır. Yakınsama $0<a<1$ ise salınımsız; $-1<a<0$ ise salınımlıdır. $|a|>1$ ise birikim süreci ıraksaktır.

2) Tüm k'lar için $b_k = b$ ve $a=1$ olması durumunda fark denklemi $Y_n = Y_{n-1} + b$, çözümü $Y_n = Y_0 + bn$'dir. (Bkz. Teorem 3.2)

Örnekler:

1) Bir yatırımcı bankaya yıllık %7 faiz üzerinden 15000 YTL yatırmıştır. Ayrıca her yıl 200 YTL de yatırmaktadır. Bu yatırımcının 3 yıl sonraki birikimi ne olur?

(3.50) denkleminden 5 yıl sonraki birikim aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left.\begin{array}{l} Y_0 = 15000 \\ b_k = b = 200 \\ m = 1 \\ t = 3 \\ n = mt = 3 \\ r = 0,07 \\ a = 1 + \dfrac{r}{m} = 1,07 \\ Y_n = Y_3 = ? \end{array}\right\} \begin{array}{ll} Y_n = aY_{n-1} + b & \to Y_n = 1,07Y_{n-1} + 200 \\ Y_n = a^nY_0 + b\dfrac{1-a^n}{1-a} & \to Y_3 = (1,07)^3.15000 + 200\cdot\dfrac{1-(1,07)^3}{1-1,07} \\ & \quad Y_3 = 19018,625 \text{ YTL} \end{array}$$

İstenilen süre sonundaki birikim miktarı basic dilinde yazılmış aşağıdaki bilgisayar programıyla hesaplanabilir:

```
10 input "Anaparayı giriniz:";y0
20 input "Faiz oranını giriniz:";r
30 input "Yıllık ek ödemeyi giriniz:";b
```

```
40 input "Yıllık dönem sayısını giriniz:";m
50 input "Kaç yıl sonraki birikimi hesaplamak istiyorsunuz?:";t
60 n = m* t
70 a = 1+ r / m
80 yn = (a ^ n)* y0 + b* ((1 – a^n) / (1 – a))
90 print t;" yıl sonraki birikiminiz ";yn;" YTL olacaktır."
100 end
```

2) Otomobil almak isteyen bir kişi bankadan aylık taksitlerle 5 yılda geri ödemek üzere, yıllık %12 faiz oranıyla 30000YTL taşıt kredisi alıyor. Bu kişinin aylık geri ödemeleri kaç YTL olur?

$Y_0 = 30000$

m=12

t=5

n=mt=12.5=60

r=0,12

$a = 1 + \frac{r}{m} = 1 + \frac{0,12}{12} = 1,01$

$Y_n = Y_{60} = 0$

b=?

$$b = (Y_n - a^n Y_0)\frac{1-a}{1-a^n}$$

$$b = [0 - (1,01)^{60}.30000]\cdot\frac{1-1,01}{1-(1,01)^{60}}$$

$$= -667,33 \text{ YTL}$$

Bu kişi 30000YTL'ye karşılık aylık 667,33 YTL taksitlerle 3 yıl sonunda toplam 40040,01 YTL geri ödeme yapacaktır.

Bu tür bir ödemede taksit miktarı aşağıdaki bilgisayar programı yardımıyla hesaplanabilir:

```
10 input "Alınan parayı giriniz:";y0
20 input "Faiz oranını giriniz:";r
30 input "Yıllık ödeme sayısını giriniz:";m
40 input "Ödemenin kaç yıl devam edeceğini giriniz:";t
50 n = m* t
60 a = 1 + r / m
```

```
70 b = (0 – (a ^ n)* y0)* ((1 – a) / (1 – a ^ n))
80 tp = b*n
90 print y0;" YTL’ye karşılık ";t;" yıl boyunca ";abs(b);" YTL’lik taksitlerle toplam";
   abs(tp);" YTL geri ödeme yapacaksınız."
100 end
```

3.8. Diferansiyel Denkleme Fark Denklemiyle Yaklaşım

İkinci bölümde, Δ sonlu fark operatörüyle D diferansiyel operatörü arasında yakın bir ilişki olduğu bulunmuştu. Bu kısımda diferansiyel denklemlerle fark denklemi arasında da bir ilişkinin olduğu ve diferansiyel denklemin çözümünü, fark denkleminin çözümünün uygun bir limiti şeklinde bulmanın mümkün olduğu gösterilecektir. Burada sadece birinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler incelenecektir. y, bir diferansiyel denklemi sağlayan, bir $a \le x \le b$ aralığındaki x değerlerinin bir fonksiyonu olsun. Bu durumda, A ve B keyfi sabitler ve $A \neq 0$ olmak üzere;

$$Dy(x) = \frac{dy(x)}{dx} = Ay(x) + B \tag{3.51}$$

yazılabilir. Varsayımdan dolayı y, $x = a$’da tanımlıdır. Bu nedenle (3.51) diferansiyel denklemini ve

$$y(a) = y_0 \quad (y_0 \text{ verilen bir sabit}) \tag{3.52}$$

başlangıç şartını sağlayan y fonksiyonu bulunmaya çalışılacaktır.

Bu diferansiyel denkleme fark denklemiyle yaklaşmak için ilk olarak fark denklemi, x değerlerinin farklı bir kümesinde tanımlanmış olabileceğinden, verilen aralığa yerleştirilir. Bunun için n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere a’dan b’ye kadar olan aralık her biri

$$h = \frac{b-a}{n} \tag{3.53}$$

uzunluğunda ve $x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h,\ \ldots,\ x_n = a + nh = b$ noktalarıyla ayrılan n eşit parçaya bölünür. Bu noktalardaki y değerleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_k = y(x_k) = y(x_0 + kh) \tag{3.54}$$

(3.54) ve ikinci bölümde belirtilen tanıma göre $Dy(x_k) = \lim_{h \to 0}(\Delta y_k / h)$'dir. Bu, (3.51) diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\Delta y_k}{h} = Ay_k + B \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \tag{3.55}$$

elde edilir ve fark denklemi olarak

$$y_{k+1} = (1 + Ah)y_k + Bh \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \tag{3.56}$$

şeklinde yazılabilir. (3.56) birinci mertebeden sabit katsayılı lineer fark denklemidir ve Teorem 3.7 yardımıyla çözülebilir. Burada $y^* = Bh/[1-(1-Ah)] = -B/A$'dır ve çözüm

$$y_k = (1 + Ah)^k \left(y_0 + \frac{B}{A} \right) - \frac{B}{A} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \tag{3.57}$$

olarak bulunur.

$$h \to 0 \text{ ve } x_k = x_0 + kh \to x \tag{3.58}$$

ise (3.55) fark denklemi (3.51) fark denklemine dönüşür. Bu nedenle benzer limit şartları altında bir fark denkleminin çözümü diferansiyel denklemin çözümüne yaklaşır. Bu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \lim y_k \\
&= \lim \left[(1+Ah)^k \left(y_0 + \frac{B}{A} \right) - \frac{B}{A} \right] \\
&= \left(y_0 + \frac{B}{A} \right) \lim (1+Ah)^k - \frac{B}{A}
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

Burada $k = (x - x_0)/h$ olduğundan $\lim(1+Ah)^k = \lim(1+Ah)^{\frac{x-x_0}{h}}$ yazılabilir. Eşitliğin ikinci tarafında Ah yerine ε yazılırsa $\lim[(1+\varepsilon)^{1/\varepsilon}]^{A(x-x_0)}$ olur. Yaklaşık olarak 2,71828'e eşit olan e sayısı, $e = \lim\limits_{\varepsilon \to 0}(1+\varepsilon)^{1/\varepsilon}$ biçiminde bir limit olarak tanımlanır. (3.58)'deki limit şartları altında, A bir sabit olduğundan, $h \to 0$ için $Ah = \varepsilon$, 0'a yaklaşır. Buradan $\lim[(1+\varepsilon)^{1/\varepsilon}]^{A(x-x_0)} = e^{A(x-x_0)}$ olur ve (3.59)'dan

$$
y(x) = \lim y_k = \left(y_0 + \frac{B}{A} \right) e^{A(x-x_0)} - \frac{B}{A} \tag{3.60}
$$

elde edilir. (3.60)'ta verilen y fonksiyonu (3.51) diferansiyel denkleminin bir çözümüdür ve türev alınarak $a \le x \le b$ aralığındaki her x için (3.51)'i sağladığı gösterilebilir:

$$
\frac{dy(x)}{dx} = A\left(y_0 + \frac{B}{A} \right) e^{A(x-x_0)}
$$

$$
\frac{dy(x)}{dx} = A\left(y_0 + \frac{B}{A} \right) e^{A(x-x_0)} - B + B
$$

$$
\frac{dy(x)}{dx} = A \underbrace{\left[\left(y_0 + \frac{B}{A} \right) e^{A(x-x_0)} - \frac{B}{A} \right]}_{y(x)} + B
$$

$$
\frac{dy(x)}{dx} = Ay(x) + B
$$

Bu çözümün (3.52) başlangıç şartını sağladığı

$$y(x) = \left(y_0 + \frac{B}{A} \right) e^{A(x - x_0)} - \frac{B}{A}$$

$$y(a) = \left(y_0 + \frac{B}{A} \right) e^{A(a - x_0)} - \frac{B}{A} \qquad (a = x_0)$$

$$y(a) = y_0$$

şeklinde gösterilebilir. Aslında, (3.60)'ta verilen fonksiyon diferansiyel denklemin bu şartı sağlayan tek çözümüdür.

$B = 0$ durumu uygulamalarda çok kullanıldığından önemlidir. Bu durumda

$$Dy(x) = \frac{dy(x)}{dx} = Ay(x) \tag{3.61}$$

bulunur. Bu da x ile ilgili olarak y fonksiyonundaki anlık değişimin y fonksiyonu ile orantılı olduğunu gösterir. (3.56)'dan buna karşılık gelen fark denklemi

$$y_{k+1} = (1 + Ah) y_k \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n - 1$$

olur ve çözüm de

$$y_k = y_0 (1 + Ah)^k \tag{3.62}$$

olarak bulunur. Tanımlanan limit şartları altında (3.61) diferansiyel denkleminin çözümü (3.60)'tan

$$y(x) = y_0 e^{A(x - x_0)} \tag{3.63}$$

üstel fonksiyonu olarak bulunur. Eğer y'nin pozitif değerli olduğu varsayılırsa (çoğu uygulamalarda olduğu gibi) x, x_0'dan başlayarak artarken y üstel olarak büyür $(A > 0)$ ya da üstel olarak azalır $(A < 0)$.

Üstel çözümlü sürekli diferansiyel denklem yapısındaki kuralların formülasyonuna sık sık rastlanır. Örneğin çok kullanılan (3.46)'daki $Y_n = Y_0(1 + r/m)^n$ bileşik faiz formülü; (3.62)'de h yerine r, A yerine $1/m$ yazılarak elde edilir. (3.63)'te y ve x yerine sırasıyla Y ve n yazılırsa,

$$Y(n) = Y_0 e^{\frac{n}{m}} \tag{3.64}$$

elde edilir. Doğal logaritmik fonksiyon (ln) ve üstel fonksiyon arasındaki bu bağıntı, (3.64) eşitliğiyle ya da daha alışılmış biçimde açıkça $n = m.\ln(Y/Y_0)$ olarak yazılır.

Bu ve buna benzer örnekler sadece diferansiyel denklemlere yaklaşmak için fark denklemlerinin kullanıldığını gösterir. Bu, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde, gerçek çözümün elde edilmesinin zor olduğu durumlarda, bir araç olduğu için önemlidir.

3.9. Dinamik Sistemler

Dinamik sistemlerde geçmiş değerler sistemin gelecekteki değerini belirlemede önemli rol oynar. Değişkenlerin zamanın bir fonksiyonu olarak değiştiği dinamik sistemler çoğunlukla birinci mertebeden diferansiyel denklemlerle ifade edilirler. Bu gösterimde bir veya daha çok x durum değişkeni, mevcut durumu temsil ederken; dx/dt ise her durum değişkenindeki değişme oranını göstermektedir. Bu oran, mevcut durum x(t) ve mevcut giriş u(t)'nin bir fonksiyonu olarak

$$dx/dt = f[x(t), u(t)] \tag{3.65}$$

şeklinde yazılabilir. Sistemin çıkışı y(t), mevcut durum ve giriş değerlerine bağlı olduğundan bir g fonksiyonu cinsinden; $y(t) = g[x(t), u(t)]$ şeklinde yazılabilir. Birinci mertebeden diferansiyel denklemin bilgisayarda nümerik (yaklaşık) çözümünü bulmak için fark denklemi;

$$\Delta x/\Delta t = f[x(t), u(t)] \tag{3.66}$$

şeklinde yazılabilir. Burada Δt küçük zaman değişimlerini, Δx ise bu zaman değişimlerine bağlı x değişimini göstermektedir [5].

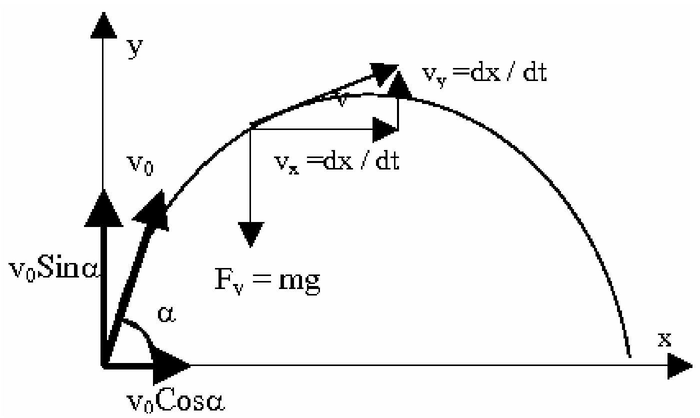
Dinamik modeli, fark denklemleri şeklinde ifade etmenin avantajı, gelecek değerlerin mevcut değerlerden hesaplanabilmesi ve bu değerlerin bilgisayarda algoritmik olarak hesaplanmasının kolay olmasıdır. (3.66) fark denklemi bilgisayara uygun olarak $x(t+\Delta t)=x(t)+f[x(t),u(t)]\Delta t$ şeklinde yazılabilir. Bu denklem bilgisayar programına aktarılarak Δt zaman değişimine bağlı yeni x(t) değerleri hesaplanabilir. Örneğin, eğik atış hareketi yapan bir cisim için, Newton'un 2. hareket kanununa göre; $\sum F_x = ma_x$ ve $\sum F_y = ma_y$'dir. Hava direncinin olmadığı ideal bir ortam için, $\sum F_x = 0$ ve $\sum F_y = mg$ yazılabilir. (Bkz. Şekil 3.4) Bunun nedeni x ekseni boyunca bir kuvvet etkisinin olmaması, y ekseni boyunca ise ağırlığından dolayı mg kuvvetinin etki etmesidir. Böylece

$a_x = 0, \qquad a_y = -g$

veya

$d^2x(t)/dt^2 = 0, \quad d^2y(t)/dt^2 = -g$

olur.



Şekil 3.4. Eğik atış hareketi

Nümerik yöntemlerle bu denklemleri çözmek için, denklemleri 1. mertebeden diferansiyel denklemler olarak yazmak gerekir. Yer değiştirmenin ilk türevi hızı, hızın ilk türevi de ivmeyi verdiğinden;

$$dx/dt = v_x, \quad dv_x/dt = 0$$
$$dy/dt = v_y, \quad dv_y/dt = -g \tag{3.67}$$

yazılabilir. Bu denklemler fark denklemi olarak

$$v_{x,t+1} = v_{x,t}$$
$$v_{y,t+1} = v_{y,t} - g\Delta t$$
$$x_{t+1} = x_t + v_{x,t}\Delta t$$
$$y_{t+1} = y_t + v_{y,t}\Delta t$$

şeklinde yazılabilir. Böylece ilk hız ($v_0{}^2 = v_{x,0}{}^2 + v_{y,0}{}^2$) ve atış açısının ($\alpha$) değerleri kullanılarak hareketin daha sonraki hız ve yer değiştirme değerleri hesaplanabilir.

Bu fark denklemlerinin ilk üçünün çözümü ters dönüşümle (Δ^{-1}, belirsiz toplam operatörü yardımıyla) veya t değerleri 0, 1, 2, … şeklinde ardışık sayılar olduğundan $\Delta t = 1$ alınarak Teorem 3.7 yardımıyla

$$v_{x,t+1} = v_{x,t} \quad \rightarrow \quad v_{x,t} = v_{x,0}$$
$$v_{y,t+1} = v_{y,t} - g\Delta t \quad \rightarrow \quad v_{y,t} = v_{y,0} - gt$$
$$x_{t+1} = x_t + v_{x,t} = x_t + v_{x,0}\Delta t \quad \rightarrow \quad x_t = x_0 + v_{x,0}t$$

şeklinde bulunur. $y_{t+1} = y_t + v_{y,t}\Delta t = y_t + v_{y,0}\Delta t - gt\Delta t$ fark denklemi $-gt\Delta t$ teriminden dolayı Teorem 3.7 ile çözülemez. Bu fark denkleminin çözümü $\Delta t = 1$ alınarak bölüm 4.4 ve 5.2'de anlatılacak yöntemlerle veya aşağıdaki gibi ters dönüşümle

$$y_{t+1} = y_t + v_{y,0}\Delta t - gt\Delta t$$
$$y_{t+1} - y_t = v_{y,0}\Delta t - gt\Delta t$$

$$\Delta y_t = v_{y,0}\Delta t - gt\Delta t - g\frac{\Delta t}{2} + g\frac{\Delta t}{2}$$

$$\Delta y_t = v_{y,0}\Delta t - g\frac{2t+1}{2}\Delta t + g\frac{\Delta t}{2}$$

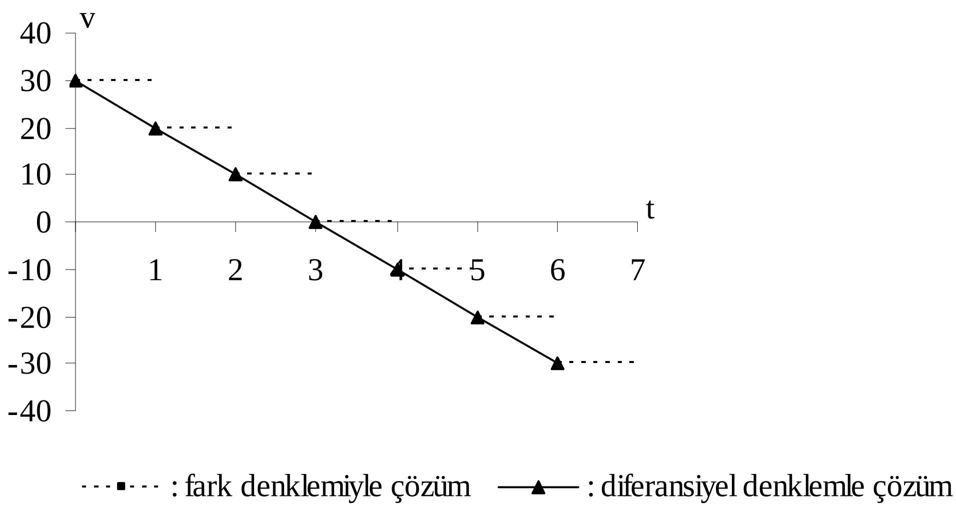
$$\Delta^{-1}\left(\Delta y_t\right) = \Delta^{-1}\left(v_{y,0}\Delta t - g\frac{2t+1}{2}\Delta t + g\frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$y_t = v_{y,0}t - \frac{gt^2}{2} + \frac{gt}{2}$$

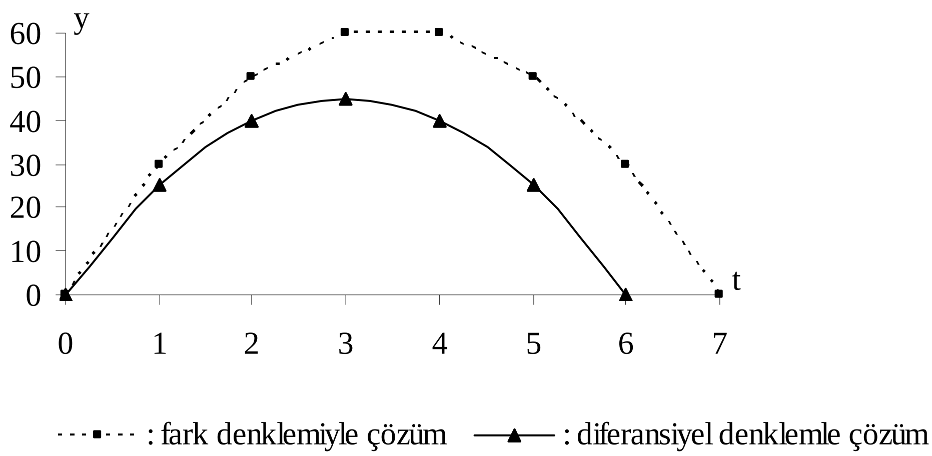
şeklinde bulunur. Ancak diferansiyel denklem yardımıyla bulunan eğik atıştaki düşey hareket formülü $y_t = y_0 + v_{y,0}t - (1/2)gt^2$ şeklindedir. Sürekli bir fonksiyon olan eğik atıştaki düşey hareket kesikli fonksiyon yardımıyla çözüldüğünde $(1/2)gt$ miktarında hata vermektedir.

Örnek:

Bir cisim yatayla 37^o'lik açı yapacak şekilde 50m/s hızla yerden atılıyor. Bu cismin fark denklemi ve diferansiyel denklem yardımıyla bulunan düşey eksendeki hızının ve hareketinin zamana bağlı grafiği Şekil 3.5 ve 3.6'da verilmiştir. ($\sin 37^o = 0,6$; $\cos 37^o = 0,8$)



Şekil 3.5. Eğik atış hareketi yapan cismin fark denklemi ve diferansiyel denkleme göre düşey eksendeki hızı



Şekil 3.6. Eğik atış hareketi yapan cismin fark denklemi ve diferansiyel denkleme göre düşey eksendeki hareketi

Şekil 3.6'da gösterilen düşey harekette diferansiyel denklemle elde edilen çözümle fark denklemi yardımıyla elde edilen çözüm arasındaki fark, Şekil 3.5'te gösterildiği gibi düşey eksendeki hız bileşeninin bir periyot boyunca sabit olarak alınmasından kaynaklanmaktadır. Oysa hız, diferansiyel denklemin çözümü sonucunda yine aynı şekilde görüldüğü gibi sürekli olarak değişmektedir. Aslında hızda oluşan hata Şekil 3.5'te görüldüğü gibi 0, 1, 2, …, 6 zamanlarında sürekli ve kesikli fonksiyon kesiştiği için burada değil, bu hızın meydana getirdiği yer değiştirmede (düşey eksendeki harekette) ortaya çıkmaktadır.

Önceki kısımda ve bu konunun başında belirtildiği gibi diferansiyel denklemlere fark denklemleriyle yaklaşımın amacı gerçek çözümün elde edilmesinin zor olduğu durumlarda yaklaşık çözümün bilgisayar ortamında bulunabilmesidir. Burada diferansiyel denklemlerin çözümünden eğik atış formülleri kolaylıkla elde edilebilir ve aşağıdaki bilgisayar programı yardımıyla eğik atış hareketi yapan bir cismin istenilen zamandaki hız bileşenleri ve koordinatları bulunabilir:

```
10 input "cismin atış hızını girin:";v0
20 input "atış açısını girin:";a
30 input "zamanı girin:";t
40 r = (asn(1) / 90)* a
50 vx = v0* cos(r)
```

```
60 vy = v0* sin(r) – 10* t
70 x = v0* cos(r)* t
80 y = v0* sin(r)* t - (10* (t ^ 2)) / 2
90 print t;" saniye sonra cismin hız bileşenleri (";vx;",";vy;") koordinatları (";x;",";y;
   ") olacaktır."
100 end
```

BÖLÜM 4. SABİT KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEMLERİ

4.1. Bazı Temel Teoremler

Tanım 4.1: f_0, f_1, f_2, …, f_n ve g_k, k'nın 0, 1, 2, … değerlerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere;

$$f_0(k)y_{k+n} + f_1(k)y_{k+n-1} + \ldots + f_{n-1}(k)y_{k+1} + f_n(k)y_k = g_k \tag{4.1}$$

lineer fark denkleminde f_0, f_1, f_2, …, f_n katsayılarının her biri sabit fonksiyonlarsa bu fark denklemine sabit katsayılı lineer fark denklemi denir. (g keyfi bir fonksiyondur, fakat sabit olmak zorunda değildir.) f_0 ve f_n'nin ikisi de sıfırdan farklı sabitlerse bu durumda (4.1) n. mertebeden sabit katsayılı lineer fark denklemidir. Örneğin

$$\begin{aligned} &2y_{k+1} - y_k = 6 \\ &3y_{k+2} + 2y_{k+1} + y_k = 3^k \\ &y_{k+3} - y_k = k \end{aligned} \tag{4.2}$$

lineer fark denklemleri sabit katsayılı ve sırasıyla 1., 2. ve 3. mertebedendir.

(4.2)'deki üçüncü denklemde $f_0 = 1$'dir. f_0, 1'den farklı olduğunda denklem bu katsayıya bölünerek yazılabilir. Birinci ve ikinci denklem de sırasıyla 2 ve 3'e bölünerek bu formda yazılabilir:

$$\begin{aligned} &y_{k+1} - \frac{1}{2}y_k = 3 \\ &y_{k+2} + \frac{2}{3}y_{k+1} + \frac{1}{3}y_k = 3^{k-1} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Genel olarak (4.1) n. mertebedense f_0 sıfırdan farklıdır ve denklem f_0'a bölünebilir.

Bu durumda elde edilen katsayılar $a_1 = f_1/f_0$, $a_2 = f_2/f_0$, …, $a_n = f_n/f_0$, $r_k = g_k/f_0$ şeklinde yeniden adlandırılırsa

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \ldots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = r_k \tag{4.4}$$

denklemi elde edilir. (f_n sıfırdan farklı olduğundan $a_n \neq 0$'dır.) Bu bölüm boyunca aksi açıkça belirtilmedikçe a_1, a_2, …, a_n katsayılarının sabit ($a_n \neq 0$), sağ taraftaki r teriminin $k = 0$, 1, 2, … için tanımlı keyfi bir fonksiyon ve (4.4)'ün bu k değerleri kümesinde tanımlı olduğu kabul edilecektir.

Buna göre 1., 2. ve 3. mertebeden sabit katsayılı lineer fark denklemleri genel olarak

$$y_{k+1} + a_1 y_k = r_k \tag{4.5}$$
$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r_k \tag{4.6}$$
$$y_{k+3} + a_1 y_{k+2} + a_2 y_{k+1} + a_3 y_k = r_k \tag{4.7}$$

biçiminde gösterilir. (4.5)'te $a_1 = -1/2$ ve $r_k = 3$ yazıldığında (4.3)'teki ilk denklem; (4.6)'da $a_1 = 2/3$, $a_2 = 1/3$, $r_k = 3^{k-1}$ yazıldığında ikinci denklem; (4.7)'de $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $r_k = k$ yazıldığında son denklem elde edilir.

Tanım 4.2: Sağ tarafı özdeş olarak sıfıra eşit olan

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \ldots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0 \tag{4.8}$$

fark denklemine, n. mertebeden sabit katsayılı homojen lineer fark denklemi denir. (4.8), (4.4) homojen olmayan fark denklemine karşılık gelen homojen denklemdir.

Teorem 4.1: (4.8) homojen lineer fark denkleminin herhangi iki çözümü $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$ ise C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere $C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)}$ de bir çözümdür.

İspat:

Burada sadece $n=2$ durumu ayrıntılı olarak ispatlanacaktır. $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$'nin 2.

mertebeden homojen lineer

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0 \tag{4.9}$$

fark denklemini sağladığında, $C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)}$’nin de bu denklemi sağladığı yani

$$(C_1 y_{k+2}^{(1)} + C_2 y_{k+2}^{(2)}) + a_1 (C_1 y_{k+1}^{(1)} + C_2 y_{k+1}^{(2)}) + a_2 (C_1 y_k^{(1)} + C_2 y_k^{(2)}) = 0$$

eşitliğinin özdeşlik olduğu gösterilmelidir.

Eşitliğin sol tarafı, $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$’nin değerleri bir arada olacak biçimde düzenlenirse

$$C_1 (y_{k+2}^{(1)} + a_1 y_{k+1}^{(1)} + a_2 y_k^{(1)}) + C_2 (y_{k+2}^{(2)} + a_1 y_{k+1}^{(2)} + a_2 y_k^{(2)}) = 0$$

elde edilir. $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$’nin, (4.9)’un çözümleri olduğu varsayımından dolayı her iki parantezin içindeki toplam, dolayısıyla eşitliğin sol tarafı, sıfıra eşit olur. Böylece $n = 2$ durumu için teorem ispatlanmış olur.

Bu ispat benzer şekilde n. mertebeden (4.8) fark denklemi için de yapılabilir. Aslında bu, sabit katsayılı olsun ya da olmasın lineer denklemlerin bir özelliğidir. Aynı yolla n tane çözümü $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, … ,$y^{(n)}$ olan homojen lineer fark denkleminin başka bir çözümünün $C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} + C_3 y^{(3)} + \ldots + C_n y^{(n)}$ olduğu gösterilebilir. (Burada C_1, C_2, C_3, …,C_n keyfi sabitlerdir.)

Sonuç 4.1: (4.8) homojen lineer fark denkleminin çözümlerinin herhangi bir lineer kombinasyonu da bir çözümdür.

Burada asıl amaç homojen olamayan fark denklemini çözmek yani bütün çözümlerini bulmaktır.

Teorem 4.2: Homojen (4.8) denkleminin çözümü Y, homojen olmayan (4.4) denkleminin bir çözümü y* ise $Y + y^*$ da (4.4)’ün bir çözümüdür.

İspat:

Genel durum aynı yolla ispatlanacağından burada sadece $n=2$ durumunun ispatı yapılacaktır. Teoreme göre $Y_{k+2}+a_1Y_{k+1}+a_2Y_k=0$ ve $y^*_{k+2}+a_1y^*_{k+1}+a_2y^*_k=r_k$ olur. Bu denklemler taraf tarafa toplanıp düzenlenirse istenilen sonuç bulunur.

$$(Y_{k+2}+\ y^*_{k+2})+a_1(Y_{k+1}+\ y^*_{k+1})+a_2(Y_k+\ y^*_k)=r_k$$

Bu teorem, homojen olmayan denklemin genel çözümünün, homojen olmayan denklemin bir özel çözümüyle (y*) homojen denklemin genel çözümünün (Y) toplamına eşit olduğunu gösterir.

Bu metotla birinci mertebeden sabit katsayılı lineer $y_{k+1}+a_1y_k=r_k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ fark denkleminin çözümünün bulunabilmesi için öncelikle bu denkleme karşılık gelen $y_{k+1}+a_1y_k=0$ homojen denkleminin çözümünün bulunması gerekir. Bu, önceki bölümde çözülen fark denkleminin özel bir durumudur. Bu homojen fark denkleminin genel çözümü olan Y fonksiyonunun k'daki değeri Sonuç 3.1'den $(A=-a_1,\ B=0)$ C keyfi bir sabit olmak üzere $Y_k=C(-a_1)^k$ olarak bulunur. Homojen olmayan denklemin y* özel çözümünün bulunmuş olduğu farz edilirse Teorem 4.2'ye göre $C(-a_1)^k\ +y_k^*$ da homojen olmayan denklemin bir çözümdür.

Teorem 4.3: Birinci mertebeden sabit katsayılı lineer $y_{k+1}+a_1y_k=r_k$ fark denklemi göz önüne alınsın. a) C keyfi bir sabit olmak üzere; $Y_k=C(-a_1)^k$ şeklinde verilen Y fonksiyonu $y_{k+1}+a_1y_k=0$ homojen denkleminin genel çözümüdür. b) y* homojen olmayan denklemin herhangi bir özel çözümüyse $Y+y^*$, homojen olmayan denklemin genel çözümüdür ve y homojen olmayan denklemin herhangi bir çözümüyse $y_k=C(-a_1)^k+y_k^*$ olacak şekilde bir C sabiti vardır.

İspat:

(a), Sonuç 3.1'de ispatlanmıştı.

(b)'yi ispatlamak için y'nin homojen olmayan denklemin herhangi bir çözümü olduğu kabul edilsin. Teorem 4.2'ye göre $Y + y^*$ fonksiyonu C sabitinin herhangi bir değeri için homojen olmayan denklemin bir çözümüdür. $Y + y^*$ ile y'nin aynı çözümü verdiği bir C değerinin var olduğu gösterilmelidir. $k = 0$ için birinci mertebeden lineer fark denkleminin iki çözümünün özdeş olduğu bölüm 3.3'te gösterilmişti. Buna göre $y_0 = C(-a_1)^0 + y_0^*$ denkleminden C belirlenebilirse ispat tamamlanmış olacaktır. Burada $(-a_1)^0 = 1$ olduğundan aranan değer $C = y_0 - y_0^*$'dır.

Örnekler:

1) $y_{k+1} - 2y_k = 5$ (4.10)

fark denklemi göz önüne alınsın. Buna karşılık gelen homojen denklem

$$y_{k+1} - 2y_k = 0 \quad (4.11)$$

ve bu homojen denklemin genel çözümü olan Y,

$$Y_k = C2^k \quad (4.12)$$

şeklinde bulunur. (4.10)'un özel çözümü, denklemin ikinci tarafı gibi sabit fonksiyon şeklinde aransın. Denklemde y_k^* yerine A yazılarak homojen olmayan denklemi sağlayan A sabiti (y*) belirlenir. Buna göre $A - 2A = 5$ olur ve buradan $y_k^* = A = -5$ bulunur. Böylece (4.10)'un $Y + y^*$ genel çözümü

$$y_k = C2^k - 5 \quad (4.13)$$

olarak bulunur. (4.10)'un

$$y_0 = 4 \quad (4.14)$$

şartını sağlayan bir özel çözümünü bulmak için, (4.13)'te $k = 0$ ve $y_0 = 4$ yazılarak elde edilen denklem C için çözüldüğünde $C = 9$ bulunur ve (4.10)'un (4.14) şartını sağlayan özel çözümü

$$y_k = 9 \cdot 2^k - 5$$

olur. Aynı sonuç Teorem 3.7 kullanılarak da elde edilebilir.

2) $y_{k+1} - 2y_k = k + 1$ (4.15)

fark denklemi göz önüne alınsın. Buna karşılık gelen homojen denklem yine (4.11) ve bunun genel çözümü de (4.12)'dir. Fakat burada (4.15) denklemini sağlayan sabit bir fonksiyon bulmak imkânsızdır. Çünkü $y_k^* = A$ yazıldığında $A - 2A = k + 1$ olur ve buradan $A = -k - 1$ bulunur. y*, A ve B keyfi sabitler olmak üzere $y_k^* = Ak + B$ biçiminde aransın. (Belirsiz katsayılar metodu olarak bilinen bu özel çözüm bulma yöntemi bölüm 4.4'te ele alınacaktır.) Buna göre $y_{k+1}^* = A(k+1) + B$ olur ve (4.15)'i sağlaması gerektiğinden $A(k+1) + B - 2(Ak + B) = k + 1$ bulunur. Terimlerin hepsi sol tarafa atılıp düzenlendiğinde $(-A - 1)k + (A - B - 1) = 0$ elde edilir. Bunun özdeşlik olması için parantez içlerinin 0 olması gerekir. Buradan $A = -1$, $B = -2$ bulunur ve $y_k^* = -k - 2$ olur ve (4.15) homojen olmayan denkleminin genel çözümü

$$y_k = C2^k - k - 2 \tag{4.16}$$

olur. (Sağ taraftaki terim sabit olmadığından bu sonuç Teorem 3.7'den elde edilemez.)

(4.15)'in (4.14) başlangıç şartını sağlayan özel çözümünü bulmak için (4.16)'da $k = 0$ ve $y_0 = 4$ yazılıp bulunan denklem C için çözülür. Buradan $C = 6$ bulunur ve özel çözüm $y_k = 6 \cdot 2^k - k - 2$ olur.

4.2. Çözümlerin Bazı

Bu kısımda ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan lineer

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r_k \tag{4.17}$$

fark denkleminin çözümü, bu denkleme karşılık gelen

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0 \tag{4.18}$$

homojen fark denklemi yardımıyla araştırılacaktır. Örneğin

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 4 \tag{4.19}$$

fark denklemi göz önüne alınsın. Önceki bölümde olduğu gibi (4.19)'un genel çözümünün, bu denkleme karşılık gelen

$$y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 0 \tag{4.20}$$

homojen denklemin genel çözümüyle (4.19)'un bir özel çözümünün toplamına eşit olup olmadığı bulunacaktır. (4.20) homojen fark denkleminin

$$y_k^{(1)} = 2^k \text{ ve } y_k^{(2)} = 3^k \tag{4.21}$$

şeklinde iki çözümü vardır. (Bu çözümlerin nasıl bulunacağı gelecek kısımda verilecektir.) Teorem 4.1'e göre C_1 ve C_2 herhangi iki sabit olmak üzere; (4.20)'nin genel çözümü olan Y fonksiyonu,

$$Y_k = C_1 2^k + C_2 3^k \tag{4.22}$$

şeklindedir. Bölüm 3.3'teki varlık ve teklik teoremine göre ikinci mertebeden lineer bir denklemin ardışık iki k'daki değeri keyfi belirlenmiş bir tek çözümü vardır. Bu nedenle C_1 ve C_2, $k = 0$ ve $k = 1$ alınarak y_0 ve y_1 herhangi bir sayı olmak üzere $Y_0 = y_0$ ve $Y_1 = y_1$ eşitliklerinden belirlenebilir. (4.22)'den

$$Y_0 = C_1 2^0 + C_2 3^0 = C_1 + C_2, \quad Y_1 = C_1 2^1 + C_2 3^1 = 2C_1 + 3C_2$$

olur. Bu nedenle C_1 ve C_2

$$C_1 + C_2 = y_0, \quad 2C_1 + 3C_2 = y_1 \tag{4.23}$$

denklemlerini sağlamak zorundadır. Bu, bilinmeyenleri C_1 ve C_2 olan iki bilinmeyenli bir denklem sistemidir ve çözüldüğünde $C_1 = 3y_0 - y_1$ ve $C_2 = y_1 - 2y_0$ bulunur. Böylece (4.22)'nin (4.20)'nin genel çözümü olduğu ispatlanmış olur.

Homojen olmayan (4.19) denkleminin çözümü için bir özel çözümün bulunması gerekiyordu. Özel çözüm, eşitliğin sağ tarafındaki fonksiyona uygun olarak, $y_k{*} = A$ (A sabit) şeklinde seçildiğinde (4.19)'u sağlayan özel çözüm $y_k{*} = 2$ olarak bulunur. Önceki bölümde olduğu gibi genel çözüm $y = Y + y{*}$ toplamıyla gösterildiğinde (4.19) homojen olmayan denkleminin genel çözümü, $y_k = Y_k + y_k{*} = C_1 2^k + C_2 3^k + 2$ olarak bulunur. Y'nin homojen denklemin genel çözümü olduğunun ispatı gibi bu denklemin de homojen olmayan denklemin genel çözümü olduğu ispatlanabilir. $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$ fonksiyonları farklı seçilirse, örneğin $y_k^{(1)} = 2^k$ ve $y_k^{(2)} = 5 \cdot 2^k$ olursa buradan bulunan $Y_k = C_1 2^k + C_2 5 \cdot 2^k$ fonksiyonu, (4.20) homojen denkleminin bir çözümdür, fakat bu kez genel çözüm değildir. Verilen değerler genel çözümde yerine yazıldığında ve $Y_0 = y_0$, $Y_1 = y_1$, alındığında

$$C_1 + 5C_2 = y_0, \quad 2C_1 + 10C_2 = y_1 \tag{4.24}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan y_0 ve y_1 başlangıç değerleri için C_1 ve C_2 bulunamaz. Aslında burada $y_1 = 2y_0$ olduğunda bu sistemi sağlayan sonsuz sayıda C_1 ve C_2 çifti vardır. Diğer taraftan, $y_1 \neq 2y_0$ olduğunda (4.24)'ün çözümü yoktur. Öyleyse homojen denklemin genel çözümü bulunurken, C_1 ve C_2'nin bulunup bulunamayacağını belirlediğinden $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$'nin seçimi önemlidir. Bu fonksiyonların nasıl seçileceğine geçmeden önce cebirsel denklem sistemleriyle ilgili bazı bilgilerin hatırlanmasında yarar vardır.

x ve y iki bilinmeyen; a, b, c, d, e ve f sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned} \tag{4.25}$$

denklemlerinin her ikisini sağlayan $x = x_0$ ve $y = y_0$ değerlerinden oluşan (x_0, y_0) ikilisine bu denklem sisteminin çözümü denir.

Teorem 4.4: (4.25) denklem sisteminin, ancak ve ancak $ad-bc \neq 0$ olduğunda tek çözümü vardır.

$ad-bc$ sayısı genellikle aşağıdaki determinantla gösterilir.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Bu, (4.25) sistemindeki x ve y'nin katsayılar determinantıdır. Buna göre (4.23) sisteminin tek çözümünün olduğu, (4.24)'ünse tek çözümünün olmadığı katsayılar determinantıyla da bulunabilir.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 10 - 5 \cdot 2 = 0$$

Teorem 4.5: $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$, (4.18) homojen fark denkleminin iki çözümü; C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere $Y = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)}$ olsun. Eğer

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \end{vmatrix} = y_0^{(1)} y_1^{(2)} - y_0^{(2)} y_1^{(1)} \neq 0 \tag{4.26}$$

ise Y, (4.18)'in genel çözümüdür.

İspat:

İspat (4.20)'nin ispatına benzer şekilde yapılır. Teorem 4.1'e göre Y, (4.18)'in bir çözümüdür. Burada sadece y, (4.18)'in herhangi bir çözümü olduğunda, Y ve y'nin özdeş olmasından yararlanılarak C_1 ve C_2'nin belirlenebileceği gösterilmelidir. Teorem 3.1'e (varlık ve teklik teoremine) göre Y ve y'nin $k=0$ ve $k=1$'de eşit olduklarını göstermek yeterlidir. Herhangi bir y_0 ve y_1 için $Y_0 = y_0$, $Y_1 = y_1$ olduğunda C_1 ve C_2 belirlenmelidir. $Y_0 = C_1 y_0^{(1)} + C_2 y_0^{(2)}$ ve $Y_1 = C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)}$ olduğunda C_1 ve C_2, $y_0^{(1)} C_1 + y_0^{(2)} C_2 = y_0$ ve $y_1^{(1)} C_1 + y_1^{(2)} C_2 = y_1$ denklemlerini sağlamak zorundadır. Bu, C_1 ve C_2 bilinmeyenleri için bir denklem sistemidir. Hipoteze göre C_1 ve C_2'nin katsayılar determinantı sıfırdan farklıdır. Teorem 4.4'e göre y_0 ve y_1'in her seçimi için denklem sistemi C_1 ve C_2 değerleri tek türlü bulunacak şekilde çözülebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.3: $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$, (4.18)'in (4.26) şartını sağlayan iki çözümü ise bunların oluşturduğu kümeye (4.18)'in çözümlerinin bir bazı; $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$'ye de lineer bağımsız çözümler denir.

Buna göre Teorem 4.5 şu şekilde yeniden ifade edilebilir: $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$ lineer bağımsız iki çözüm, C_1 ve C_2 sabitler olmak üzere; $Y = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)}$, (4.18)'in genel çözümüdür.

Teorem 4.6: y*, (4.17)'nin bir özel çözümü; $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$, (4.18)'in lineer bağımsız iki çözümü ise C_1 ve C_2 sabitler olmak üzere; $y = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} + y*$, (4.17)'nin genel çözümüdür.

İspat:

Teorem 4.2'ye göre y, (4.17)'nin bir çözümüdür. Teorem 4.5'te Y için bulunan sonuçlara göre

$$
\begin{aligned}
y_0^{(1)}C_1 + y_0^{(2)}C_2 + y* = y_0 \quad &\rightarrow \quad y_0^{(1)}C_1 + y_0^{(2)}C_2 = y_0 - y* \\
y_1^{(1)}C_1 + y_1^{(2)}C_2 + y* = y_1 \quad &\rightarrow \quad y_1^{(1)}C_1 + y_1^{(2)}C_2 = y_1 - y*
\end{aligned}
$$

olur. Bu denklem sistemini sağlayan C_1 ve C_2 bulunmalıdır.

Hipoteze göre, $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$'nin lineer bağımsız olması, y_0 ve y_1'in herhangi bir seçimi için C_1 ve C_2'nin varlığını garanti eder ve ispatlanmış olur.

Örnek:

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = -1 \tag{4.27}$$

fark denklemi $y_k{*} = k$ şeklinde bir özel çözüme sahip olduğu bu çözüm denklemde yerine yazılarak gösterilebilir. Benzer şekilde $y_k^{(1)} = 1$ ve $y_k^{(2)} = 2^k$ 'nın

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 0 \tag{4.28}$$

homojen denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olduğu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Böylece Teorem 4.5 ve 4.6'ya göre (4.28) homojen denkleminin genel çözümü $Y_k = C_1 + C_2 2^k$, (4.27)'nin genel çözümü de

$$Y_k = C_1 + C_2 2^k + k \tag{4.29}$$

olarak bulunur.

(4.29)'da $k = 0$ ve $k = 1$ yazılarak (4.27)'nin

$$y_0 = 0 \text{ ve } y_1 = 3 \tag{4.30}$$

şartlarını sağlayan bir çözümü için C_1 ve C_2

$$\begin{array}{l} 0 = C_1 + C_2 \\ 3 = C_1 + 2C_2 + 1 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 = 2 \end{array} \quad \to \quad C_1 = -2, \quad C_2 = 2$$

şeklinde bulunur. Böylece (4.27) fark denklemini ve (4.30) başlangıç şartlarını sağlayan çözüm $Y_k = -2 + 2^{k+1} + k$ olur.

Genel olarak, her biri verilen başlangıç şartlarının kümesinde olan ardışık iki y değeriyle (y_0 ve y_1 olmak zorunda değil) (4.29)'un bu başlangıç şartlarını sağlayan çözümü için C_1 ve C_2 belirlenebilir.

4.3. Homojen Denklemin Genel Çözümü

Teorem 4.5'ten dolayı

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0 \tag{4.31}$$

homojen denkleminin genel çözümü lineer bağımsız (4.26'yı sağlayan) iki çözümün bulunmasına indirgenebilir.

m sıfırdan farklı uygun bir sabit seçildiğinde, fark denkleminin çözümlerini

$$y_k = m^k \tag{4.32}$$

biçiminde bulmak kolaydır. ($m = 0$ olduğunda y özdeş olarak sıfıra eşit olur.) Bu deneme çözümü (4.31)'de yazıldıktan sonra oluşan denklem m^k'ya bölünürse

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0 \tag{4.33}$$

elde edilir. Bu ikinci dereceden denkleme (4.31)'in yardımcı denklemi (karakteristik denklemi) denir. Yardımcı denklemin kökü olan m değeri için (4.32), (4.31) fark denkleminin bir çözümüdür.

Yardımcı denklem, ikinci dereceden cebirsel bir denklem olduğu için bu denklemin sıfırdan farklı m_1 ve m_2 gibi iki kökü vardır. ((4.31) ikinci mertebeden olduğu için $a_2 \neq 0$'dır. Bu nedenle de kökler sıfırdan farklıdır.)

(4.33) yardımcı denkleminin kökleri üç durumda bulunabilir:

1. Durum: Köklerin reel ve birbirinden farklı olması (m_1, $m_2 \in R$; $m_1 \neq m_2$)

Bu durumda m_1 ve m_2 köklerine karşılık

$$y_k^{(1)} = m_1^{\ k} \text{ ve } y_k^{(2)} = m_2^{\ k} \tag{4.34}$$

şeklinde iki tane $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$ çözümü vardır. (4.26) determinantı hesaplanırsa

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = m_2 - m_1 \neq 0 \quad (m_1 \neq m_2) \tag{4.35}$$

elde edilir; yani $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$ lineer bağımsız çözümlerdir. Bu nedenle Teorem 4.5'e göre (4.31) homojen fark denkleminin genel çözümü

$$Y_k = C_1 {m_1}^k + C_2 {m_2}^k \tag{4.36}$$

olur.

Örnek:

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 0 \tag{4.37}$$

homojen fark denkleminin yardımcı denklemi $m^2 - 3m + 2 = 0$, bu denklemin kökleri de reel ve birbirinden farklı $m_1 = 1$ ve $m_2 = 2$ sayılarıdır. Buna göre (4.37)'nin genel çözümü $Y_k = C_1 1^k + C_2 2^k = C_1 + C_2 2^k$'dır.

2. Durum: Köklerin reel ve eşit olması (m_1, $m_2 \in R$; $m_1 = m_2$)

Bu durumda (4.35) determinantı 0'a eşit olur ve $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$ baz oluşturmazlar. $y^{(1)}$'i değiştirmeden bir baz oluşturacak yeni $y^{(2)}$ çözümü

$$y_k^{(1)} = k{m_1}^k \tag{4.38}$$

şeklinde alınsın. $m_1 = m_2$ olduğunda (4.38)'in gerçekten bir çözüm olduğu (4.31) denkleminde yerine yazılarak gösterilebilir:

$$y_{k+2}^{(2)} + a_1 y_{k+1}^{(2)} + a_2 y_k^{(2)} = (k+2){m_1}^{k+2} + a_1(k+1){m_1}^{k+1} + a_2 k {m_1}^k$$

$$y_{k+2}^{(2)} + a_1 y_{k+1}^{(2)} + a_2 y_k^{(2)} = k{m_1}^k({m_1}^2 + a_1 m_1 + a_2) + {m_1}^{k+1}(2m_1 + a_1) \tag{4.39}$$

m_1 yardımcı denklemin kökü olduğundan ilk parantezin içi 0'dır. İkinci dereceden cebirsel bir denklem olan yardımcı denklemin köklerinin toplamı $-a_1$'e eşittir. $m_1 = m_2$ olduğundan bu toplam $2m_1$'dir ($2m_1 = -a_1$) ve bu nedenle (4.39)'daki ikinci parantezin içi 0 olur. Böylece (4.39)'un özdeş olarak 0'a eşit, (4.38)'in de gerçekten fark denkleminin çözümü olduğu bulunur. Ayrıca $y_k^{(1)} = m_1{}^k$ ve $y_k^{(2)} = km_1{}^k$ çözümleri için

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m_1 & m_1 \end{vmatrix} = m_1 \neq 0 \quad (a_2 \neq 0 \text{ olduğundan } m_1, m_2 \neq 0)$$

olduğundan bu çözümler bir baz oluşturur. Böylece m_1 ve m_2 kökleri eşit olduğunda (4.31)'in genel çözümü $Y_k = C_1 m_1{}^k + C_2 k m_1{}^k$ ya da

$$Y_k = (C_1 + C_2 k) m_1{}^k \tag{4.40}$$

olarak bulunur.

Örnek:

$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 0$ fark denkleminin yardımcı denklemi $m^2 - 2m + 1 = 0$, bu denklemin kökleri de $m_1 = 1$ ve $m_2 = 1$'dir; yani denklemin kökleri reel ve eşittir. Buna göre bu fark denkleminin genel çözümü $Y_k = C_1 + C_2 k$'dır.

3. Durum: Köklerin karmaşık sayı olması (m_1, $m_2 \notin R$)

İkinci dereceden bir denklemin karmaşık kökleri her zaman eşlenik olduğundan, yardımcı denklemin m_1 ve m_2 kökleri de kompleks ise eşleniktir. Bu durumda $m_1 \neq m_2$'dir ve (4.35)'e göre $y_k^{(1)} = m_1{}^k$ ve $y_k^{(2)} = m_2{}^k$ bir baz oluşturur. m_1 ve m_2 kompleks ise $Y_k = C_1 m_1{}^k + C_2 m_2{}^k$ genel çözümü de komplekstir. Daha önce belirtilen k'ların tümünde reel sayı olan Y_k değerlerini bulmak için C_1 ve C_2'nin kompleks eşlenik olarak alınması gerekir. Bunu ispatlamak için öncelikle yardımcı denklemin eşlenik olan $m_1 = a + ib$ ve $m_2 = a - ib$ kökleri

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{4.41}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ ve } \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad -\pi < \theta \le \pi \tag{4.42}$$

olmak üzere;

$$m_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad m_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta) \tag{4.43}$$

şeklinde kutupsal formda yazılsın. Moivre teoremine göre $m_1^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$, $m_2^k = r^k(\cos k\theta - i\sin k\theta)$ olur. C_1 ve C_2 de $C_1 = c(\cos B + i\sin B)$, $C_2 = c(\cos B - i\sin B)$ şeklinde kutupsal biçimde yazıldığında Y_k,

$$\begin{aligned} Y_k &= C_1 m_1^k + C_2 m_2^k \\ &= cr^k[\cos(k\theta + B) + i\sin(k\theta + B)] + cr^k[\cos(k\theta + B) - i\sin(k\theta + B)] \\ &= 2cr^k\cos(k\theta + B) \end{aligned} \tag{4.44}$$

olarak bulunur. Bu bir reel sayı olduğu için ispat tamamlanmış olur.

C_1 ve C_2 sabitlerinin yerini (4.44)'te c ve B sabitleri almıştır. 2c, A ile gösterilirse yardımcı denklemin kökleri kompleks eşlenik olduğunda; homojen fark denkleminin genel çözümü, A ve B keyfi sabitler olmak üzere;

$$Y_k = Ar^k\cos(k\theta + B) \tag{4.45}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek:

$y_{k+2} + y_k = 0$ fark denkleminin yardımcı denklemi $m^2 + 1 = 0$ $(m^2 = -1)$, bu denklemin kökleri de $m_1 = i$ ve $m_2 = -i$'dir. $(i = 0 + i,\ -i = 0 - i)$ Buradan $r = 1$ bulunur. $\cos\theta = 0$ ve $\sin\theta = 1$ olduğundan $\theta = \pi/2$ olur. Böylece (4.45)'ten genel çözüm $Y_k = A\cos(k\pi/2 + B)$ biçiminde bulunur.

Buraya kadar bulunan sonuçlar aşağıdaki teoremle özetlenebilir:

Teorem 4.7: a_1 ve a_2 sabitler ve $a_2 \neq 0$ olmak üzere $y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0$ fark denkleminin $m^2 + a_1 m + a_2 = 0$ yardımcı denkleminin kökleri m_1 ve m_2 ise fark denkleminin genel çözümü; (1) kökler reel ve farklı ise $Y_k = C_1 m_1{}^k + C_2 m_2{}^k$, (2) kökler reel ve eşit ise $Y_k = (C_1 + C_2 k) m_1{}^k$, (3) kökler kompleks eşlenik, kutupsal formu $r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$ ise $Y_k = A r^k \cos(k\theta + B)$'dir.

4.4. Homojen Olmayan Denklemin Özel Çözümleri

Teorem 4.6'ya göre homojen olmayan

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r_k \tag{4.46}$$

fark denkleminin genel çözümü, homojen denklemin genel çözümüyle (4.46)'nın herhangi bir özel çözümünün toplamıdır. (4.46)'nın özel çözümünü bulmak için bir operatör kullanmak ya da değişken dönüşümü yapmak gibi birkaç yol bulunmasına rağmen burada özel çözümü bulmak için yeterli olduğundan en basit yöntem olan belirsiz katsayılar yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntem birkaç örnekle daha iyi açıklanabilir.

Örnekler:

1) $$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 3^k \tag{4.47}$$

fark denkleminin özel çözümü $y_k{}^* = A3^k$ biçiminde olsun. Buna göre (4.47)'yi sağlayacak şekilde bir A sabiti olmalıdır. y* denklemde yerine konulduğunda, $A3^{k+2} - 3A3^{k+1} + 2A3^k = 3^k$ 'dan $A = 1/2$ bulunur. Böylece istenilen özel çözüm $y_k{}^* = (1/2)3^k$ olur. $m^2 - 3m + 2 = 0$ yardımcı denkleminin kökleri de $m_1 = 1$ ve $m_2 = 2$ olduğundan (4.47)'nin genel çözümü C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere $y_k = C_1 + C_2 2^k + (1/2)3^k$ şeklinde bulunur.

2) $8y_{k+2} - 6y_{k+1} + y_k = 5\sin\frac{k\pi}{2}$ (4.48)

fark denkleminin özel çözümü $y_k^* = A\sin(k\pi/2) + B\cos(k\pi/2)$ biçiminde olsun. Buna göre (4.48)'i sağlayacak şekilde A ve B sabitleri belirlenebilmelidir. y*, denklemde yazıldığında,

$$8\left[A\sin\frac{(k+2)\pi}{2} + B\cos\frac{(k+2)\pi}{2}\right] - 6\left[A\sin\frac{(k+1)\pi}{2} + B\cos\frac{(k+1)\pi}{2}\right]$$
$$+\left[A\sin\frac{k\pi}{2} + B\cos\frac{k\pi}{2}\right] = 5\sin\frac{k\pi}{2}$$

bulunur. Bu eşitlik

$$\sin\frac{(k+1)\pi}{2} = \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{k\pi}{2} \qquad \sin\frac{(k+2)\pi}{2} = \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\frac{k\pi}{2}$$

$$\cos\frac{(k+1)\pi}{2} = \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{k\pi}{2} \qquad \cos\frac{(k+2)\pi}{2} = \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \pi\right) = \cos\frac{k\pi}{2}$$

trigonometrik özdeşlikleri kullanılarak

$$(-7A + 6B)\sin\frac{k\pi}{2} + (-6A - 7B)\cos\frac{k\pi}{2} = 5\sin\frac{k\pi}{2}$$

şeklinde düzenlenebilir. Buradan $-7A + 6B = 5$ ve $-6A - 7B = 0$ denklemleri yardımıyla $A = -7/17$ ve $B = 6/17$ bulunur. Böylece (4.48)'in özel çözümü

$$y_k^* = (1/17)[-7\sin(k\pi/2) + 6\cos(k\pi/2)]$$

olarak bulunur.

Bu örneklere göre, belirsiz katsayılar metodunda homojen olmayan (4.46) denkleminin özel çözümü, denklemdeki r fonksiyonu türünde bir deneme fonksiyonu yardımıyla belirlenir. Bu yöntem, a ve b herhangi bir sabit ve n negatif olmayan herhangi bir tam sayı olmak üzere r'nin; a^k, sinbk, cosbk ve k^n fonksiyonlarından biri ya da bu fonksiyonların lineer bir kombinasyonu olduğunda kullanılır.

Örnek:

$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 3k + 2^k$ denkleminin genel çözümü nedir?

Homojen olmayan bir fark denkleminin genel çözümü, bu denklemin bir özel çözümüyle homojen denklemin genel çözümünün toplamına eşit olduğundan öncelikle bunların bulunması gerekir. Denklemin ikinci tarafındaki fonksiyon 3k (birinci dereceden bir polinom) ve 2^k'nın (üstel fonksiyon) toplamı olduğundan, alınacak deneme çözümü de aynı türdeki iki fonksiyonun yani $A_0 + A_1 k$ (birinci dereceden bir polinom) ve $A_3 k^2 2^k$'nın (üstel fonksiyon) toplamı; yani $y_k{*} = A_0 + A_1 k + A_3 k^2 2^k$ olmalıdır. 2^k homojen denklemin $m_1 = m_2 = 2$ iki katlı köküne karşılık gelen çözümü olduğu için deneme çözümü $A_3 k^2 2^k$ şeklinde alınır. Buradan denklemin özel çözümü $y_k{*} = 6 + 3k + (1/8)k^2 2^k$ şeklinde bulunur. Bu denkleme karşılık gelen homojen denklemin genel çözümü $m^2 - 4m + 4 = 0$ yardımcı denkleminin $m_1 = m_2 = 2$ kökleri yardımıyla $Y_k = (C_1 + C_2 k)2^k$ olarak bulunur ve böylece verilen denkleminin genel çözümü $Y_k = (C_1 + C_2 k)2^k + 6 + 3k + (1/8)k^2 2^k$ olur.

Bazı basit r fonksiyonlarına karşılık kullanılacak deneme çözümleri Tablo 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1. Homojen olmayan fark denkleminin özel çözümü için seçilecek deneme çözümleri

(4.46)'daki r_k fonksiyonu	$y_k{*}$ deneme çözümü
a^k	Aa^k
sin bk ya da cos bk	Asin bk + Bcos bk
k^n	$A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + \ldots + A_n k^n$
$k^n a^k$	$a^k(A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + \ldots + A_n k^n)$
a^ksin bk ya da a^kcos bk	a^k(Asin bk + Bcos bk)

4.5. Çözümlerin Limit Davranışı

İkinci mertebeden homojen olmayan (4.46) denkleminin çözümünün nasıl bulunacağı önceki kısımda verilmişti; ancak fark denkleminin çözümünü bulmak sosyal bilimlerde ya da diğer yerlerde yeterli değildir. Fark denkleminin çözümü, denklemi sağlayan fonksiyon ya da fonksiyonlar hakkında bilgi verdiği için önemlidir. (4.46)'nın genel çözümündeki C_1 ve C_2 sabitlerinin, y fonksiyonunun $k=0$ ve $k=1$ için verilen y_0 ve y_1 başlangıç şartlarıyla tek türlü belirlendiği gösterilmiş ve bölüm 3.6'da birinci mertebeden fark denklemlerinin çözümü olan $\{y_k\}$ dizileri incelenmişti. Bu bölümde de çözüm dizilerinin davranışları incelenecektir. Aşağıda ikinci mertebeden fark denklemlerinden elde edilen dizilerin yakınsak ya da ıraksak olmasıyla ilgili örnekler verilmiştir.

Örnekler:

1) $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 0$ homojen denkleminin genel çözümü $Y_k = C_1 + C_2 2^k$'dır. $y_0 = 0$ ve $y_1 = 1$ başlangıç şartlarıyla bulunan özel çözüm $y_k = 2^k - 1$ olur. Bu çözüm terimleri 0, 1, 3, 7, 15, 31, .. olan $\{2^k - 1\}$ dizisi ile gösterilir. Bu dizinin $+\infty$'a ıraksayan bir dizi olduğu açıktır. Başlangıç şartları $y_0 = -1$ ve $y_1 = -2$ olsaydı çözüm, $y_k = -2^k$; $\{y_k\}$ çözüm dizisi, terimleri $-1,\ -2,\ -4,\ -8,\ -16$, ... olan, $-\infty$'a ıraksayan bir dizi olurdu. Başlangıç şartları $y_0 = y_1$ olarak verilseydi $\{y_k\}$ dizisi, terimleri y_0, y_0, y_0, … olan sabit, yakınsak bir dizi olurdu.

2) $2y_{k+2} + 3y_{k+1} - 2y_k = 0$ fark denkleminin genel çözümü $Y_k = C_1(1/2)^k + C_k(-2)^k$ şeklindedir. $y_0 = 1$ ve $y_1 = 1/2$ başlangıç şartları altında bulunan özel çözüm $y_k = (1/2)^k$ olur. Buradan bulunan $\{y_k\}$ dizisinin terimleri 1, 1/2, 1/4, 1/8, …'dır. Bu dizi, limiti 0 olan sınırlı ve monoton azalan bir dizidir. Başlangıç şartları $y_0 = 1$ ve $y_1 = -2$ olarak verildiğinde çözüm, $y_k = (-2)^k$ olur. (1, –2, 4, –8, 16, –32, …) Bu çözüm genişleyen salınımlı ve ıraksaktır. Son olarak, başlangıç şartları $y_0 = 2$ ve $y_1 = -3/2$ olduğunda çözüm, $y_k = (1/2)^k + (-2)^k$ olur (2, (1/2) – 2, (1/4) – 4, (1/8) – 8, (1/16) – 16, …). Bu çözüm dizisi $\{(1/2)^k\}$ ve $\{(-2)^k\}$ dizilerinin toplamıdır. İkinci dizi, birinciye göre belirleyici olduğu için toplam genişleyen salınımlı olur.

3) $y_{k+2} + y_k = 0$ fark denkleminin genel çözümü $Y_k = A\cos(k\pi/2 + B)$'dir. $y_0 = 1$ ve $y_1 = 0$ başlangıç şartlarıyla bulunan özel çözüm, $y_k = \cos k\pi/2$'dir; fakat

$$\cos\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} k = 0,\ 4,\ 8,\ 12,\ ...\ \text{ise} & 1 \\ k = 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ ...\ \text{ise} & -1 \\ k = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ ...\ \text{ise} & 0 \end{cases}$$

olduğundan $\{y_k\}$ çözüm dizisi; 1, 0, – 1, 0, 1, 0, – 1, 0, … şeklinde sabit salınımlı ve ıraksak bir dizi olur.

4) $4y_{k+2} + y_k = 0$ fark denkleminin genel çözümü $Y_k = A(1/2)^k\cos(k\pi/2 + B)$'dir. başlangıç şartları $y_0 = 1$ ve $y_1 = 0$ olarak verildiğinde bulunan özel çözüm terimleri 1, 0, – 1/4, 0, 1/16, 0, – 1/64, 0, 1/256, … olan $y_k = (1/2)^k\cos k\pi/2$'dir. Bu dizi de önceki örnekte olduğu gibi salınımlıdır; fakat $(1/2)^k$ çarpanı daralan salınım meydana getirdiğinden çözüm dizisi yakınsaktır.

Bu örneklere göre: 1) Çözüm dizisi yakınsaksa sabit, monoton artan sınırlı, monoton azalan sınırlı veya daralan salınımlı; ıraksaksa artan ($+\infty$'a), azalan ($-\infty$'a), sabit salınımlı ya da genişleyen salınımlıdır. 2) Çözüm dizisinin davranışı fark denklemine ve başlangıç şartlarına bağlıdır. 3) Yardımcı denklemin kökleri çözümün limit davranışını belirlemede önemli bir etkendir.

(4.31) homojen fark denklemi ve Teorem 4.7'de verilen üç farklı çözüm göz önünde bulundurularak bu konu ayrıntılı olarak incelenecektir.

1.Durum (Farklı reel kökler, $m_1 \neq m_2$): Yardımcı denklemin m_1 ve m_2 köklerinden mutlak değeri büyük olan m_1 olsun ($|m_1| > |m_2|$). Bu durumda $\{C_1m_1^k + C_2m_2^k\}$ çözüm dizisinin limit davranışı, $C_1 \neq 0$ olmak şartıyla $\{C_1m_1^k\}$ dizisininki gibidir.

$C_1m_1^k + C_2m_2^k = m_1^k[C_1 + C_2(m_2/m_1)^k]$ eşitliğinde köşeli parantezin içi $-1 < m_2/m_1 < 1$ olduğundan $k \to \infty$ iken C_1'e yaklaşır (bkz. Teorem 3.5 ve 3.6) ve

$$k \to \infty \text{ iken } \frac{C_1 m_1^k}{C_1 m_1^k + C_2 m_2^k} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^k} \to \frac{C_1}{C_1} = 1$$

olur. $C_1m_1^k$'nın $(C_1m_1^k + C_2m_2^k)$'ya oranı 1'e yaklaştığı için limit davranışları aynıdır.

Buradan $C_1 \neq 0$ olduğunda, $\{C_1m_1^k\}$ dizisini incelemenin yeterli olduğu görülür. Teorem 3.5 ve 3.6'da detaylı olarak gösterilen durumlara göre dizi; 1) $|m_1| \leq 1$ ise yakınsak, 2) $|m_1| > 1$ ise ıraksak, 3) $-1 < m_1 < 0$ ise daralan salınımlı, 4) $m_1 < -1$ ise genişleyen salınımlıdır.

$C_1 = 0$ olduğunda çözüm dizisi $\{C_2m_2^k\}$ olur. Buna göre homojen denklem $k = 0$'da C_2'ye, $k = 1$'de C_2m_2'ye eşit olur. Meydana gelen bu durum başlangıç şartlarına bağlıdır. (Yukarıdaki 1. örnek)

2.Durum (Eşit reel kökler, $m_1 = m_2$): Bu durumda çözüm dizisi $\{(C_1 + C_2k)m_1^k\}$'dır ve $|m_1| > 1$ olduğunda C_1 ve C_2'nin en az biri sıfırdan farklıysa, $|m_1| = 1$ olduğunda C_2 sıfırdan farklıysa ıraksaktır. $|m_1| < 1$ olduğunda $\{km_1^k\}$ dizisi, dolayısıyla çözüm dizisi, 0'a yakınsar. Önceki durumda olduğu gibi m_1 negatifse dizi salınımlıdır.

3.Durum (Kompleks eşlenik kökler; $m_1 = a + ib$, $m_2 = a - ib$): Bu durumda çözüm dizisi, $A \neq 0$ olmak üzere; $\{Ar^k\cos(k\theta + B)\}$'dir. $\cos(k\theta + B)$ fonksiyonu -1 ile $+1$ arasında değerler alan periyodik bir fonksiyondur. Periyodu $(2\pi/\theta)$, genliği 1'dir. $\{\cos(k\theta + B)\}$ dizisi sabit salınımlı bir dizidir. Bu düzgün salınım çözüm dizisindeki r^k çarpanının 1'e eşit, 1'den küçük ya da 1'den büyük olmasına göre sabit, daralan ya da genişleyen salınım olur.

$$\left\{\cos\frac{k\pi}{2}\right\} = 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ ...$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k \cos\frac{k\pi}{2}\right\} = 1,\ 0,\ -\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{1}{16},\ 0,\ -\frac{1}{64},\ 0,\ ...$$

$$\left\{(2)^k \cos\frac{k\pi}{2}\right\} = 1,\ 0,\ -4,\ 0,\ 16,\ 0,\ -64,\ 0,\ ...$$

Bu örneklerde de görüldüğü gibi çözüm dizisi $0 < r < 1$ ise 0'a yakınsar, $r \geq 1$ ise ıraksar; fakat kosinüs fonksiyonundan dolayı her zaman salınımlıdır.

Yukarıda sözü edilen özellikler, homojen denklemin çözüm dizisini karakterize eden temel özelliklerdir. C_1 ve C_2 sabitlerinin birinin ya da ikisinin 0 olmasına ve başlangıç şartlarına göre kullanışsız çözümler bulunabilir. Ayrıca homojen olmayan fark denkleminin özel çözümü ıraksak, homojen denklemin genel çözümü yakınsak olabileceğinden homojen olmayan fark denklemleriyle çalışmak zordur. Örneğin, $8y_{k+2} - 6y_{k+1} + y_k = 0$ homojen denkleminin genel çözümü $Y_k = C_1(1/2)^k + C_2(1/4)^k$ yakınsaktır. Fakat homojen olmayan $8y_{k+2} - 6y_{k+1} + y_k = 2^k$ denkleminin genel çözümü $y_k = Y_k + 2^k/21$ ıraksaktır. Homojen olmayan denklemlere ve çözüm dizilerine bölüm 5.1'de dönülecektir. Homojen denklemlerin olası davranışlarındaki çokluğa rağmen, her durumda başlangıç değerleri ne olursa olsun 0'a yakınsayacak bir dizi elde edilebilir. Buraya kadar bulunan sonuçlarla ispatı homojen denklemler için dolaylı olarak zaten yapılan aşağıdaki teorem bölüm 5.1'de gerekli olacaktır.

İlk olarak m_1 ve m_2 reel sayı olduğunda $\rho = \max(|m_1|,|m_2|)$; kompleks eşlenik olduğunda modülleri r olmak üzere $\rho = r$ olacak şekilde ρ sayısı tanımlansın. İkinci mertebeden denklemin yardımcı denkleminin kökü 0 olamayacağından $\rho > 0$'dır.

Teorem 4.8: $y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0$ ikinci mertebeden homojen fark denkleminin yardımcı denkleminin kökleri m_1 ve m_2 olmak üzere; $\rho = \max(|m_1|,|m_2|)$ olsun. $\{y_k\}$ çözüm dizisinin, bütün y_0 ve y_1 başlangıç şartları için yakınsak ve limitinin 0 olması için gerek ve yeter şart $\rho < 1$ olmasıdır.

4.6. n. Mertebeden Genel Durum

Sabit katsayılı n. mertebeden lineer

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \ldots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = r_k \tag{4.48}$$

fark denklemi önceden incelenen $n = 2$ durumuna paralellik gösterir. İspatları ikinci mertebeden denklemlerinkine benzer şekilde yapıldığı için burada genel sonuçlar ispatlanmadan verilecektir.

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \ldots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0 \tag{4.49}$$

homojen fark denkleminin yardımcı denklemi n. dereceden

$$m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_{n-1} m + a_n = 0 \tag{4.50}$$

cebirsel denklemidir ve m_1, m_2, …, m_n şeklinde n tane kökü vardır. Bu kökler reel ya da kompleks, farklı ya da katlı (tekrarlı) olabilir.

Çözümlerin bir bazı aşağıdaki determinantı (Casorati determinantını) sıfırdan farklı yapan n tane $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, …, $y^{(n)}$ çözümlerinden oluşan bir kümedir.

$$\begin{vmatrix} y_0^{(1)} & y_0^{(2)} & \cdots & y_0^{(n)} \\ y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n-1}^{(1)} & y_{n-1}^{(2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

A, B, C keyfi sabitler olmak üzere; lineer bağımsız $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, …, $y^{(n)}$ çözümleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

1) Reel ve farklı olan her m kökü için çözüm, bir tane keyfi sabit içeren, $C_1 m^k$'dır.

2) Reel ve p katlı m kökü için çözüm, p tane keyfi sabit içeren, $(C_1 + C_2 k + C_3 k^2 + \ldots + C_p k^{p-1}) m^k$'dır.

3) Modülü r, genliği θ olan her bir farklı kompleks eşlenik kök çifti için çözüm, iki tane keyfi sabit içeren, $Ar^k \cos(k\theta + B)$'dir.

4) p katlı kompleks eşlenik bir kök çifti için çözüm, 2p tane keyfi sabit içeren,

$r^k[A_1\cos(k\theta + B_1) + A_2k\cos(k\theta + B_2) + \ldots + A_pk^{p-1}\cos(k\theta + B_p)]$’dir.

Bu yolla elde edilen çözümlerin toplamıyla n tane keyfi sabit içeren (4.49) homojen denkleminin genel çözümü bulunur. Bu Teorem 4.5 ve 4.7’nin genelleştirilmiş şeklidir.

Bölüm 4.4’tekine paralel olarak, (4.48) denkleminin özel çözümü belirsiz katsayılar metodu kullanılarak bulunabilir. Teorem 4.6, n. mertebeden durum için genişletilirse (4.48) denkleminin genel çözümü, homojen denklemin genel çözümüyle homojen olmayan denklemin bir özel çözümünün toplamına eşit olur. Teorem 3.1’e göre genel çözümdeki n tane keyfi sabit, n tane y_0, y_1, …, y_{n-1} başlangıç şartıyla bulunarak, (4.48)’in bu başlangıç şartlarını sağlayan tek çözümü bulunur.

Bölüm 3.5’teki gibi çözümlerin limit davranışı, başlangıç şartlarına ve yardımcı denklemin köklerine bağlıdır. Çok iyi (genel çözümdeki sabitlerden birini ya da birkaçını yok eden) başlangıç değerleri için yardımcı denklemin köklerinden mutlak değeri en büyük olana göre homojen denklemin genel çözümünün limit davranışı belirlenir. Bu en büyük mutlak değer ρ ile gösterilirse, Teorem 4.8’deki gibi $\rho < 1$ olduğunda tanımlanan başlangıç şartlarından bağımsız olarak homojen denklemin çözümü 0’a yakınsar. $\rho > 1$ ise çözüm dizisi ıraksak olur. Negatif ya da kompleks kökler çözüme daima bir salınım katar, bu durumda çözümün limit davranışı ρ’nun 1’den küçük ya da büyük olmasına göre daralan ya da genişleyen salınımlı olur.

Genellikle (4.50) yardımcı denkleminin kökleri çok zor hesaplanır. Bu durumda gerçek değerleri bilinmeden bu köklerin yapısını ve büyüklüğünü belirleyecek alternatif analiz yöntemleri kullanılır. Bölüm 5.1’de bu metotların bazılarından bahsedilecek.

Örnekler:

1) Üçüncü mertebeden $y_{k+3} - 9y_{k+2} + 26y_{k+1} - 24y_k = 3$ fark denkleminin yardımcı denklemi $m^3 - 9m^2 + 26m - 24 = 0$’dır. Bu denklem $(m-2)(m-3)(m-4) = 0$ şeklinde çarpanlara ayrılarak kökleri 2, 3 ve 4 olarak bulunur. Buradan homojen denklemin

genel çözümü $Y_k = C_1 2^k + C_2 3^k + C_3 4^k$ olur. Homojen olmayan fark denkleminin özel çözümü sabit bir $y^* = C$ deneme çözümü yardımıyla $C - 9C + 26C - 24C = 3$'ten $C = -1/2$ olarak bulunur. Böylece homojen olmayan denklemin genel çözümü $y_k = C_1 2^k + C_2 3^k + C_3 4^k - 1/2$ şeklinde bulunur. Başlangıç şartları $y_0 = y_1 = y_2 = -1/2$ olarak alınırsa C_1, C_2, C_3 sabitlerinin üçü de sıfır olur. Diğer bütün durumlarda çözüm dizisi, belirleyici terimin katsayısının pozitif ya da negatif olmasına göre $+\infty$ ya da $-\infty$'a ıraksar.

2) $Y_{t+1} = 1{,}35Y_t - 0{,}35Y_{t-3}$ fark denklemi $Y_{t+4} - 1{,}35Y_{t+3} + 0{,}35Y_t = 0$ şeklinde yazılabilir. Buradan yardımcı denklem $m^4 - 1{,}35m^3 + 0{,}35 = 0$ olur. Bu denklemin köklerinden birinin 1 olduğu kolayca görülebilir. Yardımcı denklem $m - 1$ çarpanına bölünürse $(m - 1)[m^3 - 0{,}35(m^2 + m + 1)] = 0$ bulunur. Burada köşeli parantezin içinin $m = 1$ için negatif, $m = 2$ için pozitif olduğu, dolayısıyla 1 ve 2 arasında bir kökün var olduğu bulunur. Bir ondalık basamak yürütülerek bu işleme devam edilirse köşeli parantezin içinin 1,1'de de pozitif olduğu, yani kökün 1 ile 1,1 arasında olduğu bulunur. Bu yolla kök, istenen doğruluk derecesinde bulunur. (Kök yaklaşık olarak 1,025'tir.)

Descartes'in işaret kuralına[2] göre yardımcı denklemin sadece iki reel kökü vardır ve bunlar $m_1 = 1$ ve $m_2 = 1{,}025$'tir.

Yardımcı denklem dördüncü dereceden bir denklem olduğundan, denklemin dört tane kökü vardır. Bunlardan sadece ikisi reel sayı olduğuna göre diğer ikisi kompleks eşlenik olmak zorundadır. Köşeli parantezin içi $m - 1{,}025$'e bölünürse $m^2 + 0{,}675m + 0{,}342$ bulunur. Bu denklem yardımıyla eşlenik kökler $m_3 = 0{,}34 + i\sqrt{0{,}23}$ ve $m_3 = 0{,}34 - i\sqrt{0{,}23}$ olur. (m_2'nin değeri yaklaşık olarak 1,025 alındığından, bulunan bu sonuçlar da yaklaşık sonuçlardır.) (4.41) kullanılarak köklerin modülü $r = 0{,}6$ olarak bulunur.

---

[2] Descartes'in işaret kuralına göre c'ler sabit ve $c_0 \neq 0$ olmak üzere $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$ şeklinde n. dereceden bir polinom olan f(x) fonksiyonu, işaretlerinin değişiminden fazla pozitif köke, f(–x)deki işaretlerinin değişiminden fazla da negatif köke sahip olamaz. Örneğin $f(m) = m^4 - 1{,}35m^3 + 0{,}35$'te iki kez işaret değiştiği için f(m)'nin en fazla iki pozitif kökü vardır. $f(-m) = m^4 + 1{,}35m^3 + 0{,}35$'te işaretler hiç değişmediği için f(m)'nin negatif kökü yoktur.

Böylece verilen denklemin genel çözümü $Y_t = C_1 + C_2(1{,}025)^t + A(0{,}6)^t\cos(t\theta + B)$ şeklinde bulunur. $C_2 \neq 0$ ise $C_2(1{,}025)^t$ terimi belirleyici terimdir ve $\{Y_k\}$ ıraksaktır. Kosinüs terimi belirleyici terime bağlı olarak salınım meydana getirir. Fakat seçilen başlangıç değerinde $C_2 = 0$ ise belirleyici terim C_1 olur ve Y daralan salınım yaparak C_1 limitine yakınsar.

4.7. Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklemler

Fark denklemleri teorisinde belirtilenlerin tamamı n. mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemler için de geçerlidir. Bu kısaca $n = 2$ için gösterilecektir.

İkinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2 y = r(x) \tag{4.51}$$

biçiminde gösterilir. Burada y ve r fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığındaki x reel sayıları için tanımlı fonksiyonlar; $a_2 \neq 0$ olmak şartıyla a_1 ve a_2 sabitlerlerdir. Bu aralıktaki bir noktada y ve y'nin birinci türevinin değeri verilmiş olsun. Varlık ve teklik teoremine göre bu iki başlangıç şartını sağlayan (4.51)'in yalnız ve yalnız bir çözümü vardır. (4.51)'in genel çözümü,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2 y = 0 \tag{4.52}$$

homojen denkleminin genel çözümüyle (4.51)'in herhangi bir özel çözümünün toplamıdır. $y^{(1)}$ ve $y^{(2)}$, $a \leq x \leq b$ aralığında lineer bağımsız iki çözüm olmak üzere homojen denklemin genel çözümü $C_1y^{(1)} + C_2y^{(2)}$ şeklindedir. Lineer bağımsız çözümler sıfırdan farklı bir determinant yardımıyla (Wronskian) tanımlanır. Aşağıdaki teoremde bu lineer bağımsız çözümlerin nasıl olacağı Teorem 4.7 yardımıyla ispat yapılmadan verilmiştir.

Teorem 4.9: a_1, a_2 sabit ve $a_2 \neq 0$ olmak üzere (4.52) denkleminin $m^2+a_1m+a_2=0$

yardımcı denkleminin kökleri m_1 ve m_2 olsun. Bu durumda (4.52)’nin genel çözümü; m_1 ve m_2 reel ve farklı ise $C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$; m_1, m_2 reel ve eşit ise $(C_1 + C_2x)e^{m_1x}$; $m_1$ve m_2 $a \pm ib$ şeklinde kompleks eşlenik ise $Ae^{ax}\cos(bx + B)$ ’dir.

Homojen olmayan diferansiyel denklemin genel çözümü, bu şekilde elde edilen homojen denklemin genel çözümüyle homojen olmayan denklemin bir özel çözümünün toplamıdır. Özel çözüm burada da belirsiz katsayılar metoduyla bulunabilir.

n. mertebeden sabit katsayılı lineer fark denklemlerinde de $n = 2$ durumunda bulunan sonuçlar genelleştirilerek benzer şekilde elde edilir.

Diferansiyel denklemlerle fark denklemleri arasındaki bu benzerlik, daha önce de bölüm 2.4 ve 3.8’de diferansiyel operatörüyle fark operatörü arasında ele alınmıştı.

BÖLÜM 5. DENGE VE KARARLILIK

5.1. Denge ve Kararlılık

Bölüm 3.5'te gösterildiği gibi sabit katsayılı lineer fark denkleminin çözümünün tabiatı, yani limitinin davranışı, verilen başlangıç şartlarına ve yardımcı denklemin köklerine bağlıdır. Yine de ikinci mertebeden homojen

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0 \tag{5.1}$$

denkleminin çözümü, Teorem 4.8'deki gerek ve yeter şarta göre y_0 ve y_1 başlangıç şartlarından bağımsız olarak 0'a yakınsayabilir. Bu şart

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0 \tag{5.2}$$

yardımcı denklemin her iki kökünün mutlak değerinin 1'den küçük olmasını gerektirmektedir. Teorem 4.8 fark denkleminin kararlılığı için önemli bir sonuçtur.

Sağ taraftaki terimi sabit olarak kabul edildiğinden r ile gösterilen homojen olmayan

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r \tag{5.3}$$

fark denklemi göz önüne alınsın. Eğer (5.3)'ün çözümü sabit bir fonksiyonsa y'nin bu değerine denge değeri denir. (5.3)'te $y_k = y^*$ konularak, $y^* + a_1 y^* + a_2 y^* = r$ denkleminden bu değer bulunur. Eğer $1 + a_1 + a_2 \neq 0$ ise y'nin denge değeri

$$y^* = \frac{r}{1 + a_1 + a_2} \tag{5.4}$$

olarak bulunur. Böyle bir denge değeri (y*) için (5.3)'ün herhangi bir y çözümünün ardışık iki değeri y*'a eşit olduğunda y'nin bu terimleri izleyen diğer bütün değerleri de y*'a eşit olacaktır. Buna göre (5.3)'te y_k ve y_{k+1}, y*'a eşit olarak alınırsa y_{k+2} de y*'a eşit olur.

(5.3)'ün her çözümü verilen y_0 ve y_1 başlangıç şartlarından bağımsız olarak y*'a yakınsıyorsa, yani

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^* \quad (\text{bütün } y_0 \text{ ve } y_1 \text{'ler için}) \tag{5.5}$$

ise fark denkleminin kararlı olduğu bu değere, denge değeri denir. Denge noktasındaki bir değişim, dikkate alınan farklı başlangıç koşullarına sahip yeni bir çözüm olacaktır. Bu değişimle denge noktasına yakınsayan y değerlerinin bir dizisi olarak, alternatif bir kararlı denge tanımlanabilir.

(5.3)'ün y çözümünün y* denge değerinden sapması yeni bir z fonksiyonuyla tanımlansın, yani

$$z_k = y_k - y^* \tag{5.6}$$

olsun. y, (5.3)'ün bir çözümü olduğundan

$$\begin{aligned} z_{k+2} + a_1 z_{k+1} + a_2 z_k &= (y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k) - (1 + a_1 + a_2) y^* \\ &= y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k - r \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre z, (5.1) homojen denkleminin bir çözümüdür. z, y'nin denge değerinden sapması olarak tanımlandığından, her z_0 ve z_1 başlangıç değeri için 0'a yakınsar. z, (5.1)'in bir çözümü olduğundan Teorem 4.8'e göre aşağıdaki sonuç ispatlanmadan verilebilir.

Teorem 5.1: (5.4)'teki y*'ın denge değeri olması için gerek ve yeter şart $m_1$ve m_2 (5.2) yardımcı denkleminin kökleri ve $\rho = \max(|m_1|,|m_2|)$ olmak üzere $\rho < 1$ olmasıdır.

Teoremden dolayı ρ'nun 1 den küçük olabilmesi için yardımcı denklemdeki a_1 ve a_2 sabitlerinde hangi kısıtlamaların yapılacağını bilmek önem kazanmaktadır. İkinci dereceden denklemin kökleri formülüyle (5.2) nin iki kökü,

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \tag{5.7}$$

olarak bulunur. Karekök içindeki, yardımcı denklemin diskriminantı olan $a_1^2 - 4a_2$ ifadesinin pozitif işaretli, sıfır ve negatif işaretli olmasına göre yardımcı denklemin $m_1$ve m_2 kökleri sırasıyla reel ve farklı, reel ve eşit ya da kompleks eşlenik olur.

$\rho < 1$ kabul edilip, a_1 ve a_2 üzerinde ne tür kısıtlamalar yapılacağı belirlenerek $\rho < 1$ için gerek şartlar elde edilebilir. Reel ve kompleks kökler olma durumları ayrı ayrı incelenecektir.

1.Durum (Reel Kökler): $\rho < 1$ olduğunda her iki kök -1 ile 1 arasındadır. Bu nedenle (5.7)'den $-2 < -a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2$ ve $-2 < -a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2$ bulunur. Eşitsizliklerin her tarafı a_1 ile toplanırsa

$$-2 + a_1 < \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2 + a_1 \tag{5.8}$$

$$-2 + a_1 < -\sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2 + a_1 \tag{5.9}$$

elde edilir.

Köklerin toplamı $-a_1$, her iki kökün -1 ile 1 arasında olduğu varsayımından dolayı $-2 < -a_1 < 2$ buradan da $-2 + a_1 < 0$ ve $2 + a_1 > 0$ eşitsizlikleri bulunur. Buna göre (5.8)'deki ilk, (5.9)'daki ikinci eşitsizlik a_1 ve a_2'ye bağlı olmaksızın her zaman doğru olur. (5.8)'deki ikinci eşitsizliğin karesi alınarak bulunan $a_1^2 - 4a_2 < 4 + 4a_1 + a_1^2$ eşitsizliğinden

$$1 + a_1 + a_2 > 0, \tag{5.10}$$

(5.9)'daki birinci eşitsizliğin karesi alındığında bulunan $(-2 + a_1)^2 > a_1^2 - 4a_2$ eşitsizliğinden de

$$1 - a_1 + a_2 > 0 \tag{5.11}$$

elde edilir.

2.Durum (Kompleks Eşlenik Kökler): İki kök $m_1 = a + bi$ ve $m_2 = a - bi$ ise çarpımları $m_1m_2=a^2 + b^2$'dir ve bu (4.41)'e göre r^2'dir. $r < 1$ olduğu kabul edilirse $r^2 =\ m_1m_2 < 1$ olur. (5.2)'nin köklerinin çarpımı a_2'ye eşit olduğundan $a_2 < 1$ ya da

$$1 - a_2 > 0 \tag{5.12}$$

olmak zorundadır.

(5.10), (5.11) ve (5.12), yardımcı denklemin köklerinin mutlak değerlerinin 1'den küçük olması için gerek şartlardır. Bu eşitsizlikler kullanılarak yukarıdaki hesaplamalardaki işlem basamakları ters çevrilerek her durumda $\rho < 1$ sonucuna varıldığı, yani bu şartların $\rho < 1$ olması için yeter şartlar olduğu gösterilebilir.

Teorem 5.2: $m^2 + a_1m + a_2 = 0$ denkleminin her iki kökünün mutlak değerinin 1 den küçük olması için gerek ve yeter şartlar

$$1 + a_1 + a_2 > 0 \qquad 1 - a_1 + a_2 > 0 \qquad 1 - a_2 > 0 \tag{5.13}$$

olmasıdır.

Teorem 5.1'e göre (5.13)'teki üç eşitsizlik, y* denge değerinin kararlılığı için gerek ve yeter şartlardır.

Örnek:

$$Y_{t+2} - \alpha(1+\beta)Y_{t+1} + \alpha\beta Y_t = 1 \qquad (5.14)$$

fark denklemine Hansen-Samuelson fark denklemi denir. Burada Y_t, t periyodundaki ulusal gelir, α ve β sırasıyla marjinal tüketim ve ilgi eğilimidir.

$\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Bu durumda Y*, (5.14)'ün sabit bir çözümü ise $Y^* - \alpha(1+\beta)Y^* + \alpha\beta Y^* = 1$'dir ve buradan ulusal gelirin denge değeri

$$Y^* = \frac{1}{1-\alpha} \qquad \alpha \neq 1 \qquad (5.15)$$

olarak bulunur. (5.13) kararlılık şartı (5.14) fark denklemine uygulandığında

$$1-\alpha(1+\beta)+\alpha\beta > 0 \qquad 1+\alpha(1+\beta)+\alpha\beta > 0 \qquad 1-\alpha\beta > 0$$

olur. Bunlardan ikincisi α ve β pozitif olduğu için otomatik olarak sağlanır. Birinci ve üçüncü eşitsizlikler düzenlenerek tekrar yazılırsa

$$\alpha < 1 \text{ ve } \alpha\beta < 1 \qquad (5.16)$$

olur. Bu iki şart Y* gelirinin kararlı bir denge değeri olması için gerek ve yeter şarttır. Marjinal tüketim ve onun ilgi eğilimiyle çarpımının sonucunun her ikisinin de 1'den küçük olmak zorundadır. Bu koşullar sağlanırsa gelir dizisinin değerleri tanımlanan başlangıç şartlarından bağımsız olarak Y*'a yakınsar.

Kökler kompleks sayılarsa bu yakınsama salınımlı olur. Bunun için $a_1^2 - 4a_2$ diskriminantı negatif olmalıdır. Bu durumda $\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta < 0$, yani

$$\alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} \qquad (5.17)$$

olur. (5.17) sağlanıyorsa yardımcı denklemin kökleri kompleks, aksi takdirde reeldir. Birinci ve n. mertebeden $(n > 2)$ fark denklemlerinde denge değerinin tanımı ve uygulaması aynıdır. Genel olarak, tüm kökleri mutlak değerce 1'den küçük olan (4.50)'deki n. dereceden polinom şeklindeki yardımcı denklem için koşullar bilinmektedir. Buradaki kararlılık için gerek ve yeter şart $n = 2$ durumundaki gibidir.

(5.3) fark denkleminde sağ taraf sabitten farklı alınırsa homojen olmayan

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = r_k \tag{5.18}$$

fark denkleminin y* özel çözümü, k'ya bağlı bir fonksiyon olacaktır. Y, homojen denklemin genel çözümü olmak üzere; (5.18)'in genel çözümü $y_k = Y_k + y_k{}^*$'dır. Yardımcı denklemin köklerinin tamamının mutlak değerleri 1'den küçükse $\{Y_k\}$ dizisinin 0'a yakınsayacağı bulunmuştu. Bu durumda çözümün kalan parçasına hareketli kararlılık denir. Y'deki azalmanın etkisi olarak, y çözümü k arttıkça y* denge fonksiyonuna yaklaşır.

Örnek:

Ulusal gelir y, tüketim C ve yatırım i olmak üzere aşağıdaki varsayımlar yapılsın.

1) Bütün n dönemleri için ulusal gelir tüketimle yatırımın toplamına eşittir, yani $y_n = C_n + i_n$'dir.

2) Herhangi bir dönemdeki tüketim, kendisinden önceki iki dönemdeki ulusal gelirin lineer fonksiyonudur. c_1, c_2 ve K birer sabit olmak üzere; $C_n = c_1 y_{n-1} + c_2 y_{n-2} + K$'dır.

3) Her dönemde yatırım h sabiti kadar artar; yani $i_{n+1} = i_n + h$ ya da $i_{n+1} = i_0 + nh$'dir.

Bu bağıntılar birleştirilerek $y_n = c_1 y_{n-1} + c_2 y_{n-2} + K + i_0 + nh$ şeklinde ulusal gelir fonksiyonu için bir fark denklemi bulunur. Bu denklem $A = k + i_0 + 2h$ olmak üzere;

$$y_{n+2} - c_1 y_{n+1} - c_2 y_n = nh + A \tag{5.19}$$

şeklinde yazılabilir.

$c_1 = 1/2$ ve $c_2 = 1/4$ özel durumu göz önüne alınırsa denklem

$$y_{n+2} - \frac{1}{2} y_{n+1} - \frac{1}{4} y_n = nh + A \tag{5.20}$$

şeklini alır. Bunun yardımcı denklemi $m^2 - (1/2)m - (1/4) = 0$'dır ve katsayıları (5.13)'ü sağlar. Bu nedenle $m_1 = (1 + \sqrt{5})/4$ ve $m_1 = (1 - \sqrt{5})/4$ olmak üzere; homojen denklemin $Y_n = C_1 m_1^n + C_2 m_2^n$ çözümü 0'a yakınsar.

Homojen olmayan (5.20) denkleminin bir çözümü belirsiz katsayılar metoduyla bulunabilir. $y_n^* = \alpha + \beta n$ şeklinde alınan deneme çözümü (5.20)'de yazıldığında $\beta = 4h$ ve $\alpha = 4(A - 6h)$ bulunur. Buradan (5.20)'nin $y_n = Y_n + y_n^*$ şeklindeki genel çözümü bulunur. n artarken $Y_n \to 0$ olduğundan, ulusal gelir artarak y* fonksiyonuna (denge değerine) yaklaşır. Böylece ulusal gelir (3) varsayımındaki yatırım fonksiyonuna göre zamanla lineer olarak artar.

5.2. Birinci Mertebeden Denklemler ve Örümcek Ağı Devreleri

Sabit katsayılı olmayan, mertebesi birden büyük lineer fark denklemlerinin çözümü için genel bir metot olmamasına rağmen a ve r, verilen k değerleri için tanımlı olan fonksiyonlar olmak üzere birinci mertebeden lineer

$$y_{k+1} - a_k y_k = r_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.21}$$

fark denklemin çözümünün mümkün olduğunu gösterilecektir.

Bunun için bütün k değerlerinde $a_k \neq 0$ olduğunu kabul edilsin. Bölüm 3.3'teki varlık ve teklik teoremine göre (5.21)'in verilen bir y_0 değeri için tek çözümü vardır.

$$y_{k+1} - a_k y_k = 0 \tag{5.22}$$

homojen denkleminden $y_1 = a_0 y_0$, $y_2 = a_1 y_1 = a_0 a_1 y_0$, $y_3 = a_2 y_2 = a_0 a_1 a_2 y_0$ bulunur ve genel olarak, eğer y (5.22)'nin bir çözümü ise

$$y_0 = C, \qquad y_k = C(a_0 a_1 a_2 \ldots a_{k-1}) \qquad k = 0,1,2,... \tag{5.23}$$

olur. y_0 keyfi olduğu için yerine C sabiti yazılabilir. Bu sabitin her bir seçiminde homojen denklemin özel bir çözümü bulunur.

Terimlerin toplamının kısaca Σ sembolüyle gösterildiği gibi çarpımı da $\prod$ sembolüyle gösterilir.

Örnekler:

1) $1.2.3 = \prod_{j=1}^{3} j$ 2) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \prod_{j=1}^{4} \frac{j}{j+1}$ 3) $a_0 a_1 a_2 \ldots a_9 = \prod_{j=0}^{9} a_j$

Bu sembolle (5.23),

$$y_0 = C, \qquad y_k = C\prod_{j=0}^{k-1} a_j \qquad k = 1,2,3,... \tag{5.24}$$

şeklinde yazılabilir.

Homojen olmayan denklemin bir çözümü y ile gösterilsin ve y,

$$y_k = u_k v_k \tag{5.25}$$

şeklinde belirlenebilen u ve v fonksiyonlarının çarpımı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} y_{k+1} - a_k y_k &= u_{k+1} v_{k+1} - a_k u_k v_k \\ &= u_{k+1}(v_k + \Delta v_k) - a_k u_k v_k \\ &= v_k (u_{k+1} - a_k u_k) + u_{k+1} \Delta v_k \end{aligned}$$

olur. Bu hesaplamalarda u ve v fonksiyonları,

$$u_{k+1} - a_k u_k = 0 \tag{5.26}$$

ve

$$u_{k+1} \Delta v_k = r_k \tag{5.27}$$

olacak şekilde seçilirse y gerçekten homojen olmayan (5.21) denkleminin çözümü olur. u fonksiyonu (5.26) homojen denkleminin bir çözümü olduğundan C'nin herhangi bir değeri için

$$u_0 = C, \qquad u_k = C\prod_{j=0}^{k-1} a_j \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.28}$$

bir çözüm olur. Bütün j değerleri için $a_j \neq 0$ olduğundan $C \neq 0$ seçildiğinde bütün k'lar için $u_k \neq 0$ olacak şekilde bir u çözümü elde edilir. Bu durumda (5.27) u_{k+1}'e bölünerek $\Delta v_k = r_k / u_{k+1}$ elde edilir. Burada r_k ve u_{k+1} bilindiği için, v'nin birinci farkı bilinen bir fonksiyon ve v, bu fonksiyonun belirsiz toplamıdır. Bölüm 2.3'teki gösterimle, c bir sabit olmak üzere; v_k fonksiyonu

$$v_k = \Delta^{-1} \frac{r_k}{u_{k+1}} + c \tag{5.29}$$

şeklinde bulunur.

Özet olarak; $C \neq 0$ olmak üzere (5.28)'le verilen u, (5.22) homojen denkleminin sıfırdan farklı bir çözümüdür. Keyfi bir c sabitini içeren (5.29)'daki belirsiz toplamla bulunan v ile u'nun çarpımı, (5.21) birinci mertebeden homojen olmayan fark denkleminin bir çözümü olur. Bu (5.21)'in genel çözümüdür, bir y_0 çözümü verilirse, bu başlangıç şartı kullanılarak c değeri belirlenebilir.

Örnekler:

1) A ve B sabit olmak üzere $y_{k+1} = Ay_k + B$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ fark denklemine bu yöntem uygulansın. Burada $a_k = A$, $r_k = B$'dir. (5.28)'de $C = 1$ seçildiğinde $u_k = \prod_{j=0}^{k-1} A = A^k$ olur.

$$\Delta^{-1}\left(\frac{1}{A}\right)^k = \begin{cases} A \neq 1 \quad \text{ise} \quad \dfrac{A}{1-A}\left(\dfrac{1}{A}\right)^k \\ A = 1 \quad \text{ise} \quad k \end{cases}$$

ve $\Delta^{-1}(B/A^{k+1}) = (B/A)\Delta^{-1}[(1/A)^k]$ olduğundan (5.29)'dan

$$v_k = \begin{cases} A \neq 1 \quad \text{ise} \quad \dfrac{B}{1-A}\left(\dfrac{1}{A}\right)^k + c \\ A = 1 \quad \text{ise} \quad Bk + c \end{cases}$$

bulunur ve çözüm

$$y_k = u_k v_k = \begin{cases} A \neq 1 \quad \text{ise} \quad cA^k + \dfrac{B}{1-A} \\ A = 1 \quad \text{ise} \quad Bk + c \end{cases}$$

olur. Bu çözüm bölüm 3.4'te bulunan sonuçla aynıdır.

2) $y_{k+1} - (k+1)y_k = (k+1)!$ fark denklemi için homojen denklemin genel çözümü

$$u_k = \prod_{j=0}^{k-1} (j+1) = 1.2.3...k = k!$$

biçimindedir. Bu durumda (5.29)'dan

$$v_k = \Delta^{-1}\frac{(k+1)!}{(k+1)!} + c = \Delta^{-1}1 + c = k + c$$

bulunur. Buradan çözüm $y_k = k!(k+2)$ olur.

$y_0 = 2$ başlangıç şartı için $y_0 = c = 2$ $(0! = 1)$ ve aranan çözüm $y_k = k!(k+2)$ olur.

Ekonomi bilimindeki "örümcek ağı" diye bilinen olgu, birinci mertebeden basit fark denklemlerinin uygulanabileceği mükemmel örnekler verir. Bu, bir dönem önceki fiyata göre üreticilerin kararlarının oluşturduğu doğrusal bir arz talep modelidir. Örneğin çiftçiler, arazilerine ekecekleri ürüne o yılın fiyatlarını temel alarak karar verirler. Fiyatlar yüksekse, fiyat düzeyinin süreceğini tahmin ederek bu bitkiye yönelirler. Ertesi sene, ürün hasat edilerek satış yerlerine getirildiğinde, arz talebi aştığı için fiyatlar düşer ve çiftçiler bu ürünü ekmeyi bırakır ya da azaltır. Sonraki ürün hasadında, arz talebin altında kalır, fiyatlar artar ve çiftçiler bu ürünü daha çok ekmeye karar verir. Daha sonraki yıl yine arz talebi geçer, fiyatlar düşer, çiftçiler bu ürünü ekmeyi bırakır ve bu olay bu şekilde devam eder.

Burada matematiksel olarak, $t = 0, 1, 2, \ldots$ için tanımlanan şu üç fonksiyon incelenecektir. S_t, t periyodundaki arz miktarı; D_t, t periyodundaki talep miktarı, p_t her bir t periyodundaki birim fiyat. Buna göre aşağıdaki varsayımlar yapılsın:

1) Fiyat-talep bağıntısı satına alma zamanındaki fiyatla belirlenen talep miktarını belirtir; yani $D_t = f(p_t)$ olacak şekilde bir f fonksiyonu vardır.

2) Fiyat-arz eğrisi herhangi bir periyottaki arz ve bir önceki dönemdeki fiyat arasındaki ilişkiyi gösterir, yani $S_{t+1} = g(p_t)$ olacak şekilde bir g fonksiyonu vardır.

3) Arz ve talep miktarının eşit olduğu fiyat satış fiyatını belirler; yani $p_{t,}$ $S_t = D_t$ denkleminin çözümü gibi belirlenir.

f ve g fonksiyonları biliniyorsa p_0'ın verildiği farz edilerek (2)'den S_1, (3)'ten D_1 hesaplanabilir. Buradan (1)'deki talep fiyatı eğrisinden p_1'i elde edilir. Bu işlem p_1'le başlanarak tekrarlandığında p_2 elde edilir ve bu şekilde devam edilerek $\{p_t\} = p_0$, p_1 p_2, ... fiyat dizisi elde edilir. Bu dizinin salınımlı davranışı incelenecektir.

f ve g lineer fonksiyonlar ve bunların belirttiği talep-fiyat ve arz-fiyat eğrileri doğrular olsun. Bu durumda (1) ve (2)'deki denklemler

$$D_t = -m_d p_t + b_d \qquad m_d > 0, b_d > 0 \tag{5.30}$$

$$S_{t+1} = m_s p_t + b_s \qquad m_s > 0, b_s > 0 \tag{5.31}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $-m_d$ ve b_d talep eğrisinin eğimi ve eğrinin D eksenini kestiği değer, m_s ve b_s arz eğrisine karşılık olan sabitlerdir. Arz eğrisinin eğimi pozitif olduğunda talep eğrisinin eğimi negatif olur. Fiyattaki 1 birim artış, talepte m_d birim azalmaya, arzda m_s birim artışa neden olur. 0 fiyatında, talep ve stok sırasıyla b_d ve b_s'dir.

(3) hipotezine göre fiyat, talep ve arzın eşitlenmesiyle belirlenir. t+1 dönemi için bu

$$S_{t+1} = D_{t+1} \tag{5.32}$$

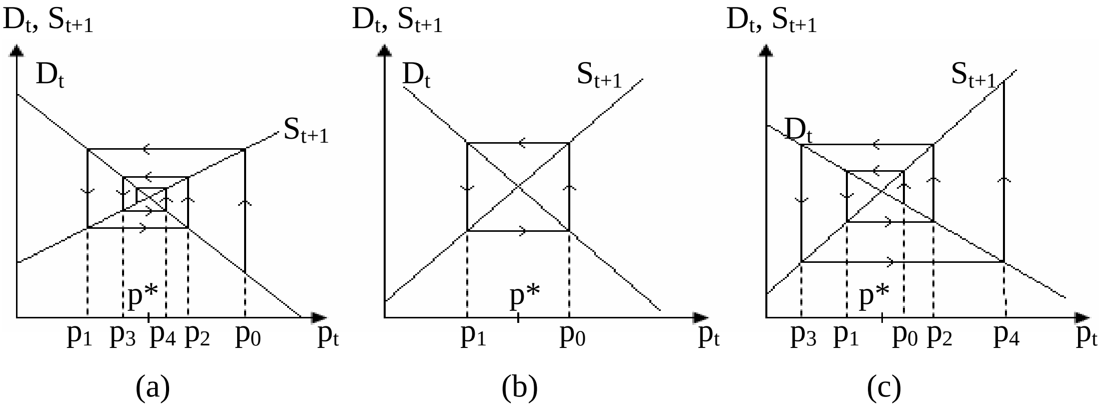
şeklindedir. O hâlde $m_s p_t + b_s = -m_d p_{t+1} + b_d$ eşitliğinden $A = -m_s/m_d$ ve $B = (b_d - b_s)/m_d$ olmak üzere

$$p_{t+1} = Ap_t + B \tag{5.33}$$

elde edilir.

Birinci mertebeden (5.33) fark denklemi bölüm 3.4'te incelenmişti. A negatif olduğu için Teorem 3.7'ye göre $\{p_t\}$ dizisi her zaman sıçramalıdır. $\{p_t\}$, $-1 < A < 0$ ise daralan salınımlı, yakınsak ve limiti $p^* = B/(1-A)$; $A = -1$ ise sabit salınımlı; $A < -1$ ise genişleyen salınımlı bir dizidir. Arz ve talep eğrilerinin eğiminin oranı olan A, fiyat dizisinin davranışını belirler.

Bu davranışa "örümcek ağı" denmesinin nedeni grafikle açıkça görülür. Şekil 4.1 $-1 < A < 0$, $A = -1$ ve $A < -1$ durumlarını özetler. p_0 ile başlanıp düşey olarak ilerlenerek arz doğrusundan S_1, daha sonra yatay olarak ilerlenerek ($S_1 = D_1$ olduğu için) D_t, buradan da fiyat ekseni üzerindeki p_1 belirlenir. S_2, p_1'in üstündeki arz doğrusundan, D_2 de yine S_2'den talep doğrusuna yatay ilerlenerek bulunur ($D_2 = S_2$) ve bu işlemler bu şekilde devam eder. Arz ve talep doğrularının ara kesiti p* denge fiyatını belirler. Şekil 4.1'de (a), örümcek ağının denge noktasına doğru gittiğini, yani fiyatın değişmesine rağmen p*'a yakınsadığını; (b), örümcek ağının durmadan tekrar eden bir kare olduğunu, yani fiyatın iki değer arasında sabit salınım yaptığını; (c), örümcek ağının arakesit noktasından uzaklaştığını, yani fiyatın p* denge noktası etrafında genişleyen salınım yaparak p*'dan uzaklaştığını gösterir. p*, bu üç durumun sadece ilkinde kararlıdır.



Şekil 5.1. Örümcek ağı devreleri

Burada lineerlik kabulü yapılmazsa, fiyat belirlemede kullanılan fark denklemi lineer olmayacaktır. Böyle problemler açık çözümün bulunamayacağı zor problemlerdir. Burada lineer olmayan fark denklemlerinden bahsedilmeyecektir.

5.3. Karakteristik Denklemin Çözümleri

α bir sabit, N pozitif bir tamsayı olmak üzere, k'nın N tane değeri için tanımlı ikinci mertebeden

$$y_{k+2} - (2-\alpha)y_{k+1} + y_k = 0 \qquad k = 0,1,2,...,N-1 \tag{5.34}$$

homojen fark denklemi göz önüne alınarak

$$y_0 = 0 \qquad\qquad y_{N+1} = 0 \tag{5.35}$$

sınır şartlarını ve (5.34)'ü sağlayan tüm çözümlerin arandığı sınır değer problemi tanımlansın. Çözümlerden biri, bütün k değerleri için özdeş olarak sıfır olan bir fonksiyon yardımıyla verilebilir. Buna aşikâr çözüm denir. Burada aşikâr çözümden farklı çözümler varsa onlar bulunmaya çalışılacaktır. y'nin ardışık iki değeri verilmediğinden bölüm 2.3'teki teklik teoremi burada uygulanamaz.

(5.34)'ün yardımcı denklemi

$$m^2 - (2-\alpha)m + 1 = 0\,, \tag{5.36}$$

bu denklemin kökleri (m_1 ve m_2)

$$m_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(2-\alpha) \pm \sqrt{\alpha(\alpha-4)}\right] \tag{5.37}$$

şeklindedir. Burada yardımcı denklemin diskriminantının pozitif (reel ve farklı kökler), sıfır (reel ve eşit kökler) ya da negatif (kompleks eşlenik kökler) olması şeklinde üç durum vardır. $\alpha(\alpha-4)$ diskriminantı, $0<\alpha<4$ olduğunda negatif, $\alpha=0$ ya da $\alpha=4$ olduğunda sıfır, α'nın diğer bütün değerlerinde pozitiftir. $0<\alpha<4$ olduğu varsayılırsa, m_1 ve m_2 kökleri kompleks eşleniktir ve

$$r(\cos\theta \pm i\sin\theta) \tag{5.38}$$

şeklinde gösterilir. Köklerin çarpımı r^2 olduğundan r'nin değeri bulunabilir. İkinci dereceden (5.36) denkleminin köklerinin çarpımı 1'e eşit olduğundan $r^2=1$ ve $r=1$ olur. Teorem 4.7'e göre y çözümü, A ve B sabitler olmak üzere;

$$y_k = A\cos(k\theta + B) \tag{5.39}$$

biçiminde yazılabilir ve buradan (5.35) sınır şartlarını sağlayacak şekilde sabitler bulunabilir. $y_0 = 0$ şartından $y_0 = A\cos B = 0$ olur. Aşikâr çözümden farklı çözümler araştırıldığından $A \neq 0$ alınarak $B = \pi/2$ bulunur ve $y_k = A\cos(k\theta + \pi/2)$ ya da

$$y_k = -A\sin k\theta \tag{5.40}$$

olur. (5.35)'teki ikinci sınır şartına göre $y_{N+1} = -A\sin(N+1)\theta = 0$ 'dır. Yine $A \neq 0$ alındığında, bu denklemi sağlayan θ değerinin var olduğu görülür. Her n tam sayısı için $\sin n\pi = 0$ olacağından; θ, $(N+1)\theta = n\pi$ ya da $\theta = n\pi/(N+1)$ eşitliğini sağlayacak şekilde seçilmelidir. Burada $n = 0$ ve $n = N + 1$ sıfır çözümü verdiğinden bu değerler ihmal edilir. Eğer

$$\theta_n = \frac{n\pi}{N+1} \qquad n = 1, 2, ..., N \tag{5.41}$$

ile θ_n tanımlanırsa; θ'nın bu N değerinden her biri, (5.40)'da $\theta = \theta_n$ yazılarak elde edilen aşikâr olmayan bir çözümü belirler. $A = -1$ alınarak bulunan çözüme $y^{(n)}$ denilirse,

$$y_k^{(n)} = \sin\frac{n\pi k}{N+1} \qquad n = 1, 2, ..., N \tag{5.42}$$

olur. (5.40)'taki A keyfi sabit olduğundan; $y^{(n)}$'nin herhangi bir sabitle çarpımı da yine sınır değer probleminin bir çözümü olacaktır. Ayrıca sinüs fonksiyonunun periyodik olmasından dolayı $n = N+1,\ N+2,\ N+3,\ ...$ yazıldığında farklı çözümler elde edilmez. Örneğin, $n = N + 1$ alındığında bulunan çözüm, $n = 0$ alındığında bulunan çözümle aynı olur. $n = N + 2$ için bulunan çözüm de $n = 1$ için bulunan çözümle aynıdır.

$$\sin\frac{(N+1)\pi k}{N+1} = \sin \pi k = 0$$

$$\sin\frac{(N+2)\pi k}{N+1} = \sin\left(\frac{\pi k}{N+1} + \pi k\right) = \pm\sin\frac{\pi k}{N+1}$$

(5.41)’deki her bir θ değeri, (5.36) yardımcı denkleminin kompleks eşlenik köklerinin genliğine karşılık gelir. Bu şekildeki her bir eşlenik kök çifti, α sabitinin özel bir değeriyle belirlenir. $r = 1$ olduğu için (5.38)’de verilen köklerin toplamı $2\cos\theta$ olur. (5.36)’nın köklerinin toplamı da $2 - \alpha$ olduğundan α ve θ arasında $2 - \alpha = 2\cos\theta$ ($\alpha = 2(1 - \cos\theta)$) şeklinde bir bağıntı bulunur. $(1 - \cos\theta)/2 = \sin^2(\theta/2)$ trigonometrik özdeşliğinden $\alpha = 4\sin^2(\theta/2)$ ya da α_n’nin, α’nın $\theta = \theta_n$ değerine karşılık geldiği varsayılarak

$$\alpha_n = 4\sin^2\frac{n\pi}{2(N+1)} \qquad n = 1, 2, ..., N \tag{5.43}$$

yazılabilir. Böylece α, (5.43)’teki değerlerden birini aldığında; (5.35) sınır şartlarıyla verilen (5.34) fark denkleminin belirttiği sınır değer probleminin aşikâr olmayan çözümleri bulunur. $\alpha = \alpha_n$ için bu, (5.42)’de verilen $y^{(n)}$ çözümüne karşılık gelir.

Sınır değer probleminin aşikâr olmayan çözümlerini var eden α değerlerine problemin karakteristik değerleri, bunlara karşılık gelen çözümlere de karakteristik fonksiyon denir.

Buraya kadar bulunanlar $0 < \alpha < 4$ kabulüyle bulundu. α’nın bu değer aralığı dışında olması durumunda sınır değer probleminin aşikâr olmayan çözümünün olmadığı daha sonra gösterilecektir. Şimdiye kadar yapılan varsayımların sonuçları aşağıdaki teoremle özetlenebilir.

Teorem 5.3: $y_0 = 0$ ve $y_{N+1} = 0$ sınır şartlarıyla verilen $y_{k+2} - (2 - \alpha)y_{k+1} + y_k = 0$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N - 1$) fark denklemi, $\alpha_n = 4\sin^2\{n\pi/[2(N + 1)]\}$ ($n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$) şeklinde verilen α’nın N tane karakteristik değerini belirler. $\alpha = \alpha_n$’ye karşılık $y_k^{(n)} = \sin[n\pi k/(N + 1)]$ şeklinde $y^{(n)}$ karakteristik fonksiyonu vardır.

Bu sınır değer probleminin N tane karakteristik değerinin tek türlü olduğunu ispatlamak için α, $0 < \alpha < 4$ aralığının dışında olduğunda bunlardan başka karakteristik değer bulunamayacağı gösterilmelidir.

$\alpha \neq 0$ ya da $\alpha \neq 4$ ise Teorem 4.7'ye göre (5.36)'nın kökleri reel ve farklı olduğundan (5.34)'ün çözümü $y_k = C_1 m_1^k + C_2 m_2^k$'dır. (5.35) sınır şartlarının ilkinden $C_2 = -C_1$ bulunur ve $y_k = C_1(m_1^k - m_2^k)$ olur. İkinci sınır şartına göre

$$y_{N+1} = C_1(m_1^{N+1} - m_2^{N+1}) = 0 \tag{5.44}$$

olmalıdır. Parantez içinin sıfıra eşit olması için m_1 ve m_2'nin mutlak değerlerinin eşit olması gereklidir (yeterli değil). $m_1 m_2 = 1$ olduğundan bu ancak köklerin reel değerlerinin $m_1 = m_2 = 1$ ya da $m_1 = m_2 = -1$ olması durumunda sağlanır. Fakat $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \neq 4$ farz edildiği için m_1 ve m_2 reel ve eşit olmamalıdır. Buradan parantez içinin sıfır olamayacağı ve (5.44)'ün ancak $C_1 = 0$ olduğunda sağlanacağı görülür. Böylece $\alpha < 0$ ya da $\alpha > 4$ olduğunda sınır değer probleminin tek çözümü aşikâr çözüm olur. $\alpha = 0$ ya da $\alpha = 4$ ise o zaman $m_1 = m_2$, çözüm de $y_k = (C_1 + C_2 k) m_1^k$ olur. Benzer şekilde (5.35) sınır şartlarının sadece C_1 ve C_2'nin 0 olduğunda sağlanacağı görülür ve bu durumda y yine aşikâr çözüm olur. Böylece Teorem 5.3'te verilen iddialar tamamlanmış olur. Burada incelenen problem fark denklemleri için karakteristik değer problemlerinin bazı önemli yanlarını açıklamak için verilen basit bir örnektir.

5.4. Üretici Fonksiyonlar

Dizi adı verilen belirli fonksiyonların incelenmesi için geliştirilen üretici fonksiyonlar metodu analizin güçlü metotları arasındadır. Daha önce görüldüğü gibi bir fark denkleminin çözümü k değerlerinin (0, 1, 2, ...) kümesi üzerinde tanımlı bir dizidir. Bu yüzden fark denklemlerinin çözümlerini inceleme ve bulmada üretici fonksiyonları kullanmak çok yararlıdır.

Tanım 5.1: $y_0, y_1, y_2, \ldots$ bir reel sayı dizisiyse, s noktasında aldığı değer

$$Y(s) = y_0 + y_1 s + y_2 s^2 + \ldots + y_k s^k + \ldots \tag{5.45}$$

serisiyle verilen Y fonksiyonu $\{y_k\}$ dizisinin üretici fonksiyonudur. (Y, sıfırı içeren bir reel sayı aralığında tanımlıdır.)

Örnekler:

a) $Y(s) = 1/(1-s)$ fonksiyonu 1, 1, 1, ... sabit dizisinin üretici fonksiyonudur. 1, $(1-s)$'ye bölündüğünde

$$\frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + ... + s^k + ... \tag{5.46}$$

bulunur ve (5.45)'ten $y_0 = 1$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, ... olur.

b) (5.46) (1–s)'ye bölündüğünde

$$\frac{1}{(1-s)^2} = 1 + 2s + 3s^2 + ... + (k+1)s^k + ... \tag{5.47}$$

elde edilir. Buradan {k+1} dizisinin (1, 2, 3, ...) üretici fonksiyonu $1/(1-s)^2$ olarak bulunur. (5.47), s ile çarpılarak $s + s^2 + s^3 + \ldots$ serisi elde edilir ve böylece 0, 1, 2,... ya da {k} dizisinin üretici fonksiyonu $s/(1-s)^2$ olarak bulunur.

c) A sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $\{A^k\}$ dizisinin üretici fonksiyonu $Y(s) = 1 + As + A^2s^2 + \ldots + A^ks^k + \ldots$ şeklinde ortak çarpanı As olan sonsuz bir geometrik seridir. $|s| < 1/|A|$ ise bu oranın mutlak değeri 1'den daha küçüktür ve sonsuz geometrik dizinin toplam formülünden $Y(s) = 1/(1 - As)$ bulunur.

d) Binom teoremine göre $(A + Bs)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^ks^k$ 'dir. Buradan n herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere $(A + Bs)^n$; genel terimi $k = 0, 1, 2, ...$ için $y_k = \binom{n}{k} A^{n-k}B^k$ ve $k > n$ için $y_k = 0$ olan $\{y_k\}$ dizisinin üretici fonksiyonudur.

Tablo 5.1 bu hesaplamaları özetler. Bu tablodan hem sol taraftaki dizinin üretici fonksiyonu, hem de sağ taraftaki üretici fonksiyonu veren dizi bulunabilir.

Tablo 5.1. Bazı dizilere ait üretici fonksiyonlar

Sıra	$\{y_k\}$ Dizisinin genel terimi	Y(s) Üretici fonksiyonu
(1)	1	$\dfrac{1}{1-s}$
(2)	k	$\dfrac{s}{(1-s)^2}$
(3)	$k(k+1)$	$\dfrac{2s}{(1-s)^3}$
(4)	A^k	$\dfrac{1}{1-As}$
(5)	$\begin{cases} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k & k=0,1,2,...n \\ 0 & k>n \end{cases}$	$(A+Bs)^n$

Diziden üretici fonksiyona dönüşüm yapılarak üretici fonksiyonun hesaplanması akıllıca bir iştir. Bu dönüşüm sonucu Tablo 5.1 soldan sağa doğru okunur. (Karşı tarafa gitmek, yani verilen üretici fonksiyondan ona karşılık gelen diziye gitmek, ters dönüşüm yapmak olarak bilinir.)

Üretici fonksiyon dönüşümünün temel özelliği onun doğrusallığıdır. $\{y_k^{(1)}\}$'in üretici fonksiyonu Y_1, $\{y_k^{(2)}\}$'nin üretici fonksiyonu Y_2 ise, c_1 ve c_2 herhangi birer keyfi sabit olmak üzere $\{c_1y_k^{(1)} + c_2y_k^{(2)}\}$ dizisinin üretici fonksiyonu $c_1Y_1 + c_2Y_2$'dir.

$$Y_1(s) = y_0^{(1)} + y_1^{(1)}s + y_2^{(1)}s^2 + ... + y_k^{(1)}s^k + ...$$

$$Y_2(s) = y_0^{(2)} + y_1^{(2)}s + y_2^{(2)}s^2 + ... + y_k^{(2)}s^k + ...$$

Serilerin ilki c_1, ikincisi c_2 ile çarpılıp toplanırsa (serilerin terim terime çarpılıp toplanması genellikle doğru olmadığı halde kuvvet serilerinde bu uygulanabilir.) $c_1Y_1 + c_2Y_2$'nin $\{c_1y_k^{(1)} + c_2y_k^{(2)}\}$ dizisinin üretici fonksiyonu olduğu bulunur.

$$c_1Y_1 + c_2Y_2 = (c_1y_0^{(1)} + c_2y_0^{(2)}) + (c_1y_1^{(1)} + c_2y_1^{(2)})s + (c_1y_2^{(1)} + c_2y_2^{(2)})s^2 + \dots$$
$$+ (c_1y_k^{(1)} + c_2y_k^{(2)})s^k + \dots$$

Böylece üretici fonksiyonların lineerliği ispatlanmış olur.

Fark denklemlerinin incelenmesi için üretici fonksiyonları uygulamadan önce bir başka sonuca dikkat edilmelidir. $\{y_k\}$dizisinin üretici fonksiyonu biliniyorsa, $\{y_{k+1}\}$, $\{y_{k+2}\}$, … dizilerinin üretici fonksiyonları da kolaylıkla bulunabilir. (5.45)'ten başlanırsa $\{y_{k+1}\}$ dizisinin üretici fonksiyonu

$$\frac{Y(s)-y_0}{s}=y_1+y_2s+y_3s^2+\ldots+y_{k+1}s^k+\ldots \tag{5.48}$$

şeklinde bulunur. Benzer biçimde $\{y_{k+2}\}$ dizisinin üretici fonksiyonu da

$$\frac{Y(s)-y_0-y_1s}{s^2}=y_2+y_3s+y_4s^2+\ldots+y_{k+2}s^k+\ldots$$

olarak bulunur. Tablo 5.1'in devamı niteliğindeki bu sonuçlar Tablo 5.2'de verilmiştir.

Tablo 5.2. Diziler ile üretici fonksiyon arasındaki ilişki

Satır	Dizinin genel terimi	Üretici fonksiyon
(6)	y_k	$Y(s)$
(7)	y_{k+1}	$\frac{Y(s)-y_0}{s}$
(8)	y_{k+2}	$\frac{Y(s)-y_0-y_1s}{s^2}$
(9)	y_{k+n}	$\frac{Y(s)-y_0-y_1s-\ldots-y_{n-1}s^{n-1}}{s^n}$
(10)	$c_1y_k^{(1)}+c_2y_k^{(2)}$	$c_1Y_1(s)+c_2Y_2(s)$

Fark denklemlerinin çözümünde üretici fonksiyonların kullanılmasının iki nedeni vardır: İlki çözüm dizisinin üretici fonksiyonunun kendi çözümünden daha kolay elde edilmesi, ikincisi ise üretici fonksiyon bilindiğinde çözüm dizisinin kolaylıkla hesaplanabilir olması (yukarıda bahsedilen ters dönüşümle), hatta bu hesaplama mümkün değilse üretici fonksiyon yardımıyla çözümün önemli özelliklerinin belirlenebilmesidir.

Bu söylenenler A ve B sabitler olmak üzere, birinci mertebeden

$$y_{k+1} = Ay_k + B \qquad k = 0,1,2,... \tag{5.49}$$

fark denklemine üretici fonksiyon tekniği uygulanarak sayısal olarak gösterilebilir. y_0 verildiğinde (Teorem 3.7'den)

$$y^* = \frac{B}{1-A} \tag{5.50}$$

olmak üzere (5.49)'un tek çözümü

$$y_k = \begin{cases} A \neq 1 \text{ ise} & A^k(y_0 - y^*) + y^* \\ A = 1 \text{ ise} & y_0 + Bk \end{cases} \tag{5.51}$$

olarak bulunur. $\{y_k\}$'nın üretici fonksiyonu Y ile gösterilirse, Tablo 5.2'nin (7) satırından $\{y_{k+1}\}$'in üretici fonksiyonu, Tablo 5.2'nin (10) ve Tablo 5.1'in (1) satırından $\{Ay_k+B\}$ dizisinin üretici fonksiyonu bulunarak (5.49) üretici fonksiyon yardımıyla yazılır:

$$\left.\begin{array}{l} \{y_{k+1}\} \rightarrow \dfrac{Y(s)-y_0}{2} \\ \{Ay_k + B\} \rightarrow AY(s) + B \cdot \dfrac{1}{1-s} \end{array}\right\} \Rightarrow \; y_{k+1} = Ay_k + B \;\rightarrow\; \frac{Y(s)-y_0}{2} = AY(s) + B \cdot \frac{1}{1-s}$$

Bu eşitlik düzenlendiğinde (5.49) fark denkleminin üretici fonksiyonu

$$Y(s) = \frac{y_0}{1-As} + \frac{Bs}{(1-s)(1-As)} \tag{5.52}$$

şeklinde bulunur ve buradan ters dönüşümle $\{y_k\}$ dizisi elde edilir. (5.52)'nin sağ tarafındaki $y_0/(1-As)$ terimine karşılık gelen dizi Tablo 5.1'in (4) satırından $\{y_0A^k\}$ olarak bulunur. $Bs/[(1-s)(1-As)]$ terimine karşılık gelen dizi de basit kesirlere ayırma metodu, yani α ve β belirli sabitler olmak üzere

$$\frac{s}{(1-s)(1-As)}=\frac{\alpha}{1-s}+\frac{\beta}{1-As} \tag{5.53}$$

özdeşliği kullanılarak bulunur. Eşitlik düzenlendiğinde

$$\frac{s}{(1-s)(1-As)}=\frac{\alpha(1-As)+\beta(1-s)}{(1-s)(1-As)}$$

olur. Her iki tarafın paylarının eşit olması gerektiğinden $s=(\alpha+\beta)+(-\alpha A-\beta)s$ elde edilir. s'nin bütün değerleri için bu eşitliğin doğru olması için α ve β, $\alpha+\beta=0$ ve $-A\alpha-\beta=1$ eşitliklerini sağlamak zorundadır. Birinci denklemden $\beta=-\alpha$, ikinci denklemden $\alpha(1-A)=1$ bulunur ve $A\neq 1$ olmak üzere $\alpha=1/(1-A)$, $\beta=-1/(1-A)$ olur. (5.53) bu eşitlikler yardımıyla düzenlendiğinde

$$\frac{s}{(1-s)(1-As)}=\frac{1}{1-A}\left(\frac{1}{1-s}-\frac{1}{1-As}\right) \qquad (A\neq 1)$$

elde edilir. Bu durumda (5.52) üretici fonksiyonu

$$Y(s)=\frac{y_0}{1-As}+\frac{B}{1-A}\left(\frac{1}{1-s}-\frac{1}{1-As}\right) \qquad (A\neq 1)$$

ya da (5.50) kullanılıp terimler düzenlenirse

$$Y(s)=(y_0-y^*)\frac{1}{1-As}+y^*\frac{1}{1-s}$$

şeklinde yazılabilir. Üretici fonksiyon tablolarının (10), (4) ve (1) satırlarında sağdan sola doğru gidilirse $y_k = (y_0 - y^*)A^k + y^*$ elde edilir. Bu, $A \neq 1$ durumunda (5.51)'in çözümüdür. İddiayı tamamlamak için $A = 1$ alındığında (5.52) üretici fonksiyonu $Y(s) = y_0/(1-s) + Bs/(1-s)^2$, Tablo 5.1'in ilk iki satırından da çözüm $y_k = y_0 + Bk$ olarak bulunur ve tekrar (5.51) elde edilir.

Aşağıdaki örnek üretici fonksiyonlar metodunun ikinci mertebeden fark denklemlerinin çözümüne uygulanmasıyla ilgilidir.

Örnek:

$y_0 = 2$ ve $y_1 = 1$ şartlarıyla verilen $y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 2^k$ fark denkleminden üretici fonksiyon tablolarının (8), (7), (6) ve (4) satırları kullanılarak

$$\frac{Y(s) - 2 - s}{s^2} - 2\frac{Y(s) - 2}{s} + Y(s) = \frac{1}{1-2s}$$

eşitliği elde edilir. Her iki taraf s^2 ile çarpılıp, terimler düzenlendiğinde

$$Y(s) = \frac{2}{(1-s)^2} - \frac{3s}{(1-s)^2} + \frac{s^2}{(1-s)^2(1-2s)}$$

bulunur. Son terim basit kesirlere ayrılırsa

$$\begin{aligned}\frac{s^2}{(1-s)^2(1-2s)} &= \frac{\alpha}{1-s} + \frac{\beta}{(1-s)^2} + \frac{\gamma}{(1-2s)} \\ &= \frac{\alpha(1-s)(1-2s) + \beta(1-2s) + \gamma(1-s)^2}{(1-s)^2(1-2s)} \\ &= \frac{(\alpha+\beta+\gamma) + (-3\alpha - 2\beta - 2\gamma)s + (2\alpha+\gamma)s^2}{(1-s)^2(1-2s)}\end{aligned}$$

olur. Burada paylar özdeş olduğundan α, β ve γ, aynı anda lineer olan $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $-3\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0$, $2\alpha + \gamma = 1$ eşitliklerinden $\alpha = 0$, $\beta = -1$ ve $\gamma = 1$ olarak bulunur ve üretici fonksiyon $Y(s) = 1/(1-s)^2 - 3s/(1-s)^2 + 1/(1-2s)$ olur. Üretici fonksiyon tablolarından da çözüm $y_k = (k+1) - 3k + 2^k = 1 - 2k + 2^k$ olarak bulunur.

Genel olarak üretici fonksiyonlar metodunun ana hatları aşağıdaki gibidir: (1) Başlangıç şartıyla (şartlarıyla) beraber çözümü $\{y_k\}$ dizisi olan bir fark denklemi verilir. (2) Üretici fonksiyon dönüşümü fark denklemine uygulanarak, $\{y_k\}$ çözüm dizisinin daha kolay çözülebilen, cebirsel bir denklem olan Y üretici fonksiyonu bulunur. (3) İstenilen $\{y_k\}$ çözümünü elde etmek için Y'ye ters dönüşüm yapılır. Fark denklemleri teorisi, özellikle sabit katsayılı denklemler için üretici fonksiyon tekniği kullanılarak geliştirilebilir. Tabi bu Tablo 5.1 ve 5.2'de on satırda özetlenen dizi çiftleri ve onlar hakkında daha geniş bir bilgi gerektirir.

Diğer dönüşümler, mesela Laplace, Dirichlet ve Laurent sadece fark denklemlerinin incelenmesi ve çözümleri için kullanılmaz, aynı zamanda diferansiyel, integral ve diğer fonksiyonel denklemlerin çözümü ve incelenmesi içinde de kullanılabilir. Üretici fonksiyon metoduna geri dönülürse bu metodun olasılık teorisinde de çok yararlı olduğu birkaç soruyla gösterilebilir.

Her bir denemenin sonucunun kesin olarak istenen sonuç (S) ya da istenmeyen sonuç (F) olarak sınıflandırılabileceği bir deney göz önüne alınsın. Örneğin, yazı tura atışında tura istenen sonuç, yazı istenmeyen sonuç; bir T lâbirentindeki koşuda sağa dönme S, sola dönme F; bir oylamada verilen "evet" cevabı S, diğer cevaplar ("hayır", bilmiyorum", ...) F ile gösterilebilir. İstenen sonucun olma olasılığı p ile gösterilirse $0 \le p \le 1$ ve istenen sonucun olmama olasılığı $q = 1 - p$'dir.

Her bir denemenin diğerinden bağımsız olduğu bir deneyin n kez tekrar edildiği farz edilirse her bir denemenin sonucu S ya da F olacağından, deneyin sonuçları S ve F'nin bir dizisini meydana getirir. Üç kez yazı tura atıldığında sonuç tura, yazı, turaysa bu SFS ile gösterilebilir. Deney n kez tekrar edildiğinde istenen sonucun elde edilme sayısı X ile gösterilsin. X'e rasgele değişken denir. X, n kez tekrar edilen bir deneyde istenen sonucun elde edilme sayısını gösteren 0,1,2, ... , n sayılarından herhangi biridir. n kez tekrarlanan bir deneyde istenen sonucun k kez elde edilme olasılığı $y_{k,n}$ ile gösterilsin.

$$y_{k,n} = P(X = k) \qquad k = 0,1,2,...,n \tag{5.54}$$

Burada P( ), parantez içindeki olayın olma olasılığını gösterir. Elbette n deneme yapıldığında 0, 1, 2, …, n'nin elde edileceği kesin olduğundan, n denemeden elde edilen X'in her bir değeri için

$$\sum_{k=0}^{n} y_{k,n} = y_{0,n} + y_{1,n} + y_{2,n} + ... + y_{n,n} = 1 \tag{5.55}$$

olur.[3] (5.54)'le tanımlanan $y_{0,n}$, $y_{1,n}$, …, $y_{n,n}$ sayıları, 1 olasılığının (kesin olasılığın) X'in $(n+1)$ tane farklı değerine dağılımıdır. Bu nedenle y'ye X'in olasılık dağılımı denir. n parametresi sabitle belirlendiği zaman, k değerlerinin (0, 1, 2, …) kümesi için y tanımlanmış olur. Burada y'yi bulabilmek için y'nin sağladığı bir fark denklemi bulunarak üretici fonksiyonlar yardımıyla bu denklem çözülecektir.

Deneydeki (n+1) denemede istenen sonucun $(k+1)$ kez elde edilmesi ancak iki yolla mümkündür. 1) n tekrar sonunda istenen sonuç $(k+1)$ kez elde edilir, sonraki $(n+1)$. denemede istenen sonuç elde edilmez. 2) n tekrar sonunda istenen sonuç k kez elde edilir, sonraki (n+1). denemede de istenen sonuç elde edilir. (1) olayının olma olasılığı ilk n denemede istenen sonucun $(k+1)$ kez elde edilme olasılığı ile (n+1).'de istenen sonucun olmama olasılığının çarpımıdır;[4] yani $qy_{k+1,n}$'dir. Benzer şekilde (2)'nin olma olasılığı $py_{k,n}$'dir. Buradan

$$y_{k+1,n+1} = qy_{k+1,n} + py_{k,n} \qquad k = 0,1,2,...,n \qquad n = 0,1,2,... \tag{5.56}$$

elde edilir.[5]

$k = -1$ olduğunda yukarıdaki iddia bozulur. Bu istenen sonucun $(n+1)$ denemede 0 kez elde edilmesi anlamına gelir ki bu da ancak istenen sonucun n denemede 0 kez elde edilmesi ve sonraki $(n+1)$. denemede istenen sonucun elde edilmemesiyle

---

[3] Olasılığı 1 olan olaya kesin olay denir.
[4] Birbirinden bağımsız iki olayın olma olasılığı, bu olayların olma olasılıkları çarpımına eşittir.
[5] İki ayrık olayın olma olasılığı bu olayların olma olasılıkları toplamına eşittir.

(olmamasıyla) mümkün olur. Buradan

$$y_{0,n+1} = qy_{0,n} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.57}$$

fark denklemi elde edilir. Herhangi bir deneyde istenen sonucun 0 kez elde edilmesi sadece imkânsız [6] olayda mümkün olduğundan başlangıç şartları

$$y_{0,0} = 1, \;\; y_{k,0} = 0 \qquad k > 0 \tag{5.58}$$

şeklinde yazılabilir.

(5.56), y için kısmî fark denklemidir.[7] (5.58) başlangıç şartlarıyla verilen (5.57) fark denklemi çözülerek X'in olasılık dağılımı olan y bulunabilir.

$y_{k,n}$, n'nin keyfi ama sabit bir tamsayı olduğu göz önüne alındığında $\{y_{k,n}\}$ dizisinin genel terimi olarak düşünülebilir. Bu nedenle bu dizinin Y_n üretici fonksiyonu

$$Y_n(s) = y_{0,n} + y_{1,n}s + y_{2,n}s^2 + \ldots + y_{k,n}s^k + \ldots. \tag{5.59}$$

şeklinde tanımlanabilir. Her bir n değeri için tek bir üretici fonksiyon vardır ve bu fonksiyon, Tablo 5.2'nin (7) satırı yardımıyla (5.56) fark denkleminden

$$\frac{Y_{n+1}(s) - y_{0,n+1}}{s} = q\frac{Y_n(s) - y_{0,n}}{s} + pY_n(s) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem düzenlendiğinde

$$Y_{n+1}(s) = (q + ps)Y_n(s) + (y_{0,n+1} - qy_{0,n}) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

[6] Olasılığı 0 olan olaya imkânsız olay denir.

[7] z, x ve y'nin negatif olmayan bütün değerleri için (x,y) noktalarında tanımlı iki değişkenli bir fonksiyon olsun. z'nin (j,k)'deki değeri $z_{j,k}$ şeklinde gösterilir. Bu fonksiyonun x değişkenine göre birinci kısmî farkı $\underset{1}{\Delta} z_{j,k} = z_{j+1,k} - z_{j,k}$, y değişkenine göre birinci kısmî farkı da $\underset{2}{\Delta} z_{j,k} = z_{j,k+1} - z_{j,k}$ şeklinde gösterilir. İkinci kısmi farkı ise, $\underset{1}{\Delta}(\underset{1}{\Delta} z)$, $\underset{1}{\Delta}(\underset{2}{\Delta} z)$, $\underset{2}{\Delta}(\underset{1}{\Delta} z)$, $\underset{2}{\Delta}(\underset{2}{\Delta} z)$ şeklinde dört tanedir.

olur ve (5.57)'den bu eşitlik

$$Y_{n+1}(s) = (q + ps)Y_n(s) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5.60)$$

biçiminde yazılabilir. Bu, üretici fonksiyonun birinci mertebeden fark denklemidir. (5.58)'den $Y_0(s) = y_{0,0} + y_{1,0}s + y_{2,0}s^2 + ... = y_{0,0} = 1$ elde edilir ve bu başlangıç şartına bağlı (5.60)'ın çözümü Teorem 3.7'den ($A = q + ps$, $B = 0$)

$$Y_n(s) = (q + ps)^n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5.61)$$

şeklinde bulunur. (5.61) üretici fonksiyonuna ters dönüşüm uygulanarak $\{y_n\}$ dizisiyle verilen olasılık dağılımı hesaplanır. Tablo 5.1'in (5) satırından

$$y_{k,n} = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad k=0, 1, 2, \ldots, n \qquad (5.62)$$

elde edilir, fakat $k > n$ ise $y_{k,n} = 0$'dır.

(5.62)'de belirtilen olasılıklar binom olasılık dağılımını (n ve p parametreli) tanımlar ve bu olasılık dağılımına sahip bir tesadüfî değişkene binom dağılımı denir. Özet olarak, bir deneydeki n bağımsız denemede istenen olayın olması (p) ve istenen olayın olmaması ($q = 1 - p$) şeklinde sadece iki sonuç varsa buna binom dağılımı denir ve bu durumda istenen sonucun k kez olma olasılığı (5.62) ile verilir.

Örnekler:

1) Bir zar dört kez atıldığında zarın iki kez 1 ya da 2 gelme olasılığı nedir?

Bir zar atıldığında herhangi bir atışta 1 ya da 2 gelme olasılığı 1/3'tür. Dört bağımsız atışta istenen olayın iki kez olma olasılığı aşağıdaki gibi bulunur:

$$y_{2,4} = P(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9} = \frac{8}{27}$$

2) 10 fare arasında yapılan bir koşuda, ilk denemede sekiz sağa dönüş ve iki sola dönüş gözlemleniyor. Her bir farenin sağa ya da sola dönüş olasılığının eşit ve birbirinden bağımsız olduğu varsayılırsa en az 8 farenin sağa dönme olasılığı kaçtır?

Deneyin sonuçları istenen olayın olması (sağa dönüş), istenen olayın olmaması (sola dönüş) olarak ikiye ayrılsın. İstenen olayın olma olasılığı 1/2'dir. Deney birbirinden bağımsız olarak on kez tekrar edildiğinde sağa dönüş sayısı binom dağılımından $(n=0,\ p=1/2)$ bulunabilir. En az sekiz sağa dönüşün olması 8, 9 ya da 10 sağa dönüşün olmasıdır ve olasılığı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$
\begin{aligned}
P &= y_{8,10} + y_{9,10} + y_{10,10} \\
&= \binom{10}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{1} + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\
&= \frac{45}{1024} + \frac{10}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{56}{1024} = 0,0546875 \cong 0,055
\end{aligned}
$$

Bu tür hesaplamalar, bazı denge problemlerinin temelidir ve (5.62) binom olasılık dağılımlarının daha geniş tabloları mevcuttur. Binom dağılımının bazı özellikleri (5.61) üretici fonksiyonundan direkt olarak elde edilebilir. Burada bu özelliklerden sadece biri verilecektir.

Gelişigüzel bir X değişkeninin E(X) değerine, X'in ortalama değeri, beklenen değeri ya da matematiksel beklenen değeri denir ve aşağıdaki gibi tanımlanır: X; p_0, p_1, p_2, … olasılıklarıyla beraber verilen sırasıyla x_0, x_1, x_2, … değerleri olarak farz edilsin. Bu durumda

$$E(X) = \sum_{k=0} x_k p_k \tag{5.63}$$

olur ve bu bütün X değerleri üzerindeki dağılımın toplamıdır. (Bu tanım kesikli tesadüfî değişkenlere uygulanır, yani bu değerler sonlu ya da sonsuz bir dizi biçimindedir.) Kısacası E(X), X değerlerinin ağırlıklı ortalamasıdır, her biri bu olayların olma olasılığının ağırlıdır. Örneğin bir rasgele değişkenin sadece 1 ve 3 değerlerinin (iki değerinin) olduğu kabul edilsin ve her birinin olasılığı 1/2 olsun. Bu durumda $E(X) = 1\cdot(1/2) + 3\cdot(1/2) = 2$ olur.

X binom dağılımı olduğunda (n ve p parametreleriyle) $E(X) = np$ olduğu (5.61) üretici fonksiyonu kullanılarak ispatlanabilir. Ortalama değer tanımından k, 0'dan n'ye kadar değişmek üzere X, $y_{k,n}$ olasılığına sahip k değer aldığından

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k y_{k,n} \tag{5.64}$$

olur. Bu toplamın np'ye eşit olduğu ispatlanmak isteniyor. (5.59)'daki $Y_n(s)$ üretici fonksiyonunun s'ye göre türevi $Y_n'(s) = y_{1,n} + 2y_{2,n}s + \ldots + ky_{k,n}s^{k-1} + \ldots$'dir ve burada s yerine 1 yazıldığında (5.64) toplamı elde edilir. $Y_n'(1)$'in değeri bulunduğunda X'in ortalama değeri olan E(X) de bulunur. (5.61)'e göre $Y_n'(s) = n(q + ps)^{n-1}p$'dir ve iddia edildiği gibi $E(X) = Y'(1) = n(q + p)^{n-1}p = np$ olur $(p + q = 1)$.

Örnekler:

1) 10 farenin bulunduğu bir labirentteki bağımsız bir koşuda sağa ya da sola dönme olasılığı eşit olduğundan, seçilen bir noktadan sağa dönen farelerin sayısının $E(X) = 10\cdot(1/2) = 5$'tir.

2) Her birinin cevabının birbirinden bağımsız olduğu farz edilen 1000 kişiye sorulan bir soruda, "evet" cevabını verenlerin olasılığı 1/4, "hayır" diyenlerin olasılığı 3/4 ise "evet" diyenlerin sayısının $E(X) = 1000\cdot(1/4) = 250$ olduğu beklenir.

Bu bölüm, kelime öğrenmenin matematiksel modeline üretici fonksiyonların bir uygulamasıyla bitirilecektir. Deney prosedürü şu şekildedir: Bir kişiye bir kelime listesi verilir, sonra bu kişi hatırladığı kelimeleri yazar. Bu işlem her seferinde kelimelerin sırası değiştirilerek peş peşe tekrarlanır.

Önceki denemelerde k kez hatırlanan kelimenin k durumunda olduğu söylenirse, n deneme sonunda k durumunda olan kelimenin olasılığı $p_{k,n}$, k durumdaki bir kelimenin tekrarlanma olasılığı τ_k olsun. ($k = 0, 1, 2, \ldots; n=0, 1, 2, \ldots$) τ_k, n deneme sayısından bağımsız olarak "Listelerdeki herhangi bir kelimenin öğrenilme derecesi, önceki denemelerde kaç defa tekrarlandığıyla belirlenir" şeklinde tanımlanır. τ_0, τ_1, τ_2, … sayıları deneydeki verilerden belirlendiği için bunların bilindiği farz edilerek $p_{k,n}$ olasılığı belirlenebilir. İlk olarak bu olasılığı sağlayan kısmî fark denkleminin türevi alınır.

$n + 1$ denemede bir kelimenin $k + 1$ kez hatırlanmasının iki anlamı vardır: 1) kelime n denemede $k + 1$ kez hatırlanmış, $(n + 1)$. denemede hatırlanamamıştır. 2) kelime n denemede k kez hatırlanmış ve $(n + 1)$. denemede de hatırlanmıştır. Bu denemeler istatistiksel olarak bağımsız olacak şekilde ardı ardına tekrarlanırsa bu durumda (1)'in olasılığı bir kelimenin n denemede $k + 1$ kez hatırlanma durumunun olasılığı $p_{k+1,n}$ ile bu kelimenin sonraki denemelerde hatırlanmama olasılığı olan $(1 - \tau_{k+1})$'nin çarpımıdır. Benzer şekilde (2)'nin olasılığı $p_{k,n}$ ve τ_k'nın çarpımına eşittir. Buradan

$$p_{k+1,n+1} = (1 - \tau_{k+1})p_{k+1,n} + \tau_k p_{k,n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.65}$$

bulunur. Bu eşitlik $p_{0,n+1}$'e uygulanamaz, çünkü bir kelime $n + 1$ denemede hiç hatırlanmamışsa bu, kelimenin n denemede ve $(n + 1)$. denemede hatırlanamadığı anlamına gelir. Bu durumda

$$p_{0,n+1} = (1 - \tau_0)p_{0,n} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.66}$$

olur. İlk denemeden önce kelimelerin hatırlanamayacağı göz önüne alınarak başlangıç şartları

$$p_{0,0} = 1 \qquad p_{k,\,0} = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.67}$$

şeklinde yazılabilir.

(5.65), genel şekli (5.56) olan çözümü oldukça zor bir kısmî fark denklemidir.

k sabit olduğunda genel terimi $p_{k,n}$ olan $p_{k,0}$, $p_{k,1}$, $p_{k,2}$, … dizisinin üretici fonksiyonu

$$P_k(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{k,n} s^n \tag{5.68}$$

olarak tanımlanırsa Tablo 5.2’nin (7) satırı yardımıyla (5.66)’dan $[P_0(s) - p_{0,0}]/s = (1 - \tau_0)P_0(s)$ bulunur ve düzenlendiğinde (5.67) başlangıç şartından

$$P_0(s) = \frac{1}{1 - s(1 - \tau_0)} \tag{5.69}$$

elde edilir. Benzer bir dönüşümle k’nın 0, 1, 2, … değerleri için (5.65)’ten $[P_{k+1}(s) - p_{k+1,0}]/s = (1 - \tau_{k+1})P_{k+1}(s) + \tau_k P_k(s)$ bulunur ve (5.67) kullanılarak bu eşitlik

$$P_{k+1}(s) = \frac{s\tau_k}{1 - s(1 - \tau_{k+1})} P_k(s) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.70}$$

şeklinde yazılabilir.

(5.70) denklemi birinci mertebeden homojen bir fark denklemidir ve bölüm 5.2’de 4.22’yi çözmek için kullanılan metotla çözülebilir. Buradan

$$P_k(s) = P_0(s) \prod_{j=0}^{k-1} \frac{s\tau_j}{1 - s(1 - \tau_{j+1})} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.71}$$

bulunur ve herhangi bir k değeri için (5.69)’daki $P_0(s)$ ile $\{p_{k,n}\}$ dizisinin üretici fonksiyonu P_k belirlenebilir. Böylece $p_{k,n}$ olasılıklarını bulma problemi (5.69) ve (5.71)’deki üretici fonksiyonlara ters dönüşüm uygulamaya indirgenmiş olur. $k = 0$ için Tablo 5.1’in (4) satırından (5.69)’un tersi

$$p_{0,n} = (1 - \tau_0)^n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.72}$$

şeklinde elde edilir. (5.71)’de $k = 1$ yazılırsa

$$P_1(s) = \frac{\tau_0 s}{[1-s(1-\tau_0)][1-s(1-\tau_1)]} \tag{5.73}$$

bulunur ve kısmî kesir metoduyla buradan

$$P_1(s) = \frac{\tau_0}{\tau_1 - \tau_0}\left[\frac{1}{1-s(1-\tau_0)} - \frac{1}{1-s(1-\tau_1)}\right] \qquad \tau_1 \neq \tau_0 \tag{5.74}$$

bulunur. $\tau_1 \neq \tau_0$ olduğu için üretici fonksiyon tablolarının (4) ve (10) satırlarından

$$p_{1,n} = \frac{\tau_0}{\tau_1 - \tau_0}\left[(1-\tau_0)^n - (1-\tau_1)^n\right] \tag{5.75}$$

bulunur. k'nın 2, 3, 4, … değerleri için $p_{k,n}$ olasılıkları da benzer şekilde bulunabilir.

Genellikle üretici fonksiyondan doğrudan bilgi edinilebildiğinden açık çözümü bulmak gerekmez. Bu noktayı açıklamak için, kelimenin k defa hatırlanıp daha sonraki denemelerde hiç hatırlanmama olasılığının arandığı varsayılsın. Bir kelimenin n denemede k defa hatırlanıp daha sonra da tekrar hatırlanma olasılığı $p_{k,n}\tau_k$'dır. n herhangi bir tamsayı değerini alabileceğinden $\pi_k = \sum_{n=0}^{\infty} p_{k,n}\tau_k$ toplamı oluşturulursa, bir kelimenin k defa hatırlanıp daha sonra tekrar hatırlanma ihtimali bulunabilir. τ_k, n'ye bağlı olmadığından

$$\pi_k = \tau_k \sum_{n=0}^{\infty} p_{k,n} \tag{5.76}$$

yazılabilir. (5.76)'daki toplam $s = 1$ için (5.68)'de tanımlanan P_k üretici fonksiyonudur. Buradan

$$\pi_k = \tau_k P_k(1) \tag{5.77}$$

olur ve π_k olasılığı için sadece $P_k(1)$'i hesaplamak yeterlidir. $\tau_0 \neq 0$ farz edilirse

(5.69)’dan $P_0(1) = 1/\tau_0$ ve buradan da $\pi_0 = \tau_0 P_0(1) = 1$ elde edilir. $\tau_0 \neq 0$, $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$, … farz edilerek (4.71)’den benzer şekilde

$$P_k(1) = P_0(1)\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\tau_j}{1-(1-\tau_{j+1})} = \frac{1}{\tau_0}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\tau_j}{\tau_{j+1}} = \frac{1}{\tau_0}\cdot\frac{\tau_0}{\tau_1}\cdot\frac{\tau_1}{\tau_2}\cdot\frac{\tau_2}{\tau_3}\cdots\frac{\tau_{k-2}}{\tau_{k-1}}\cdot\frac{\tau_{k-1}}{\tau_k} = \frac{1}{\tau_k}$$

bulunur. (5.77)’deki τ_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) geçiş olasılıklarının hepsi pozitif olduğundan

$$\pi_k = 1 \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.78}$$

bulunur, yani ard arda deneme yapıldığında k kez hatırlandıktan sonra $(k + 1)$. kez hatırlanma olasılığı 1’dir. Limit durumunda ise sonlu sayıda hatırlanma olasılığı 0’dır. k defa hatırlanma olayı deneme sayısı sonsuz artarken yine sonlu kalıyorsa bunun olasılığı sıfıra gidecektir.

5.5. Lineer Olmayan Denklemler

Nonlineer denklemler lineer denklemlerden çok daha karışıktır ve çözümleri daha farklıdır. Burada sadece

$$y_{n+1} = \rho y_n\left(1-\frac{y_n}{k}\right) \tag{5.79}$$

lojistik denklemi incelenecektir. Bu denklem $u_n = y_n/k$ eşitliği yardımıyla

$$u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n) \tag{5.80}$$

şeklinde yazılabilir. Burada ρ pozitif bir sayıdır. (5.80) denkleminin denge veya sabit çözümünün bulunabilmesi için $u_{n+1} = u_n$ alınarak (5.80)’de yerine yazılır. Buradan

$$u_n = \rho u_n(1 - u_n)$$
$$u_n = \rho u_n - u_n^2 \tag{5.81}$$

elde edilir. Bu denklemin denge çözümleri

$$u_n = 0, \quad u_n = \frac{\rho - 1}{\rho} \tag{5.82}$$

'dir [6].

Bu denge çözümlerin verilen başlangıç şartları altında kararlı olup olmadığını bulmak için (5.80) denklemine lineer bir denklemle yaklaşılacaktır. $u_n = 0$ civarındaki denge çözümlerinde u_n^2, u_n'e göre çok küçük olacağından bu terim ihmal edilebilir. Bu durumda (5.80) denklemi

$$u_{n+1} = \rho u_n \tag{5.83}$$

şeklinde lineer bir denkleme dönüşür. Bu denklem sıfıra yeterince yakın bir u_n için (5.80) denklemine iyi bir yaklaşımdır. n sonsuza giderken u_n'in sıfıra gitmesi $|\rho| < 1$ olması durumunda mümkündür ve ρ pozitif bir sayı olduğundan $0 < \rho < 1$ olmak zorundadır. ρ'nun bu değerlerinin kümesinde $u_n = 0$ denge çözümü civarında nonlineer (5.80) denklemi, lineer (5.83) denklemine asimptotik olarak yaklaşır ve (5.80) denkleminin çözümü de (5.83) denkleminin çözümüne benzer.

Eğer $u_n = (\rho - 1)/\rho$ denge çözümü göz önüne alınırsa, v_n çok küçük olmak üzere, bu çözümün komşuluğu

$$u_n = \frac{\rho - 1}{\rho} + v_n \tag{5.84}$$

şeklinde yazılabilir. (5.84) denklemi (5.80) denkleminde yerine yazılırsa

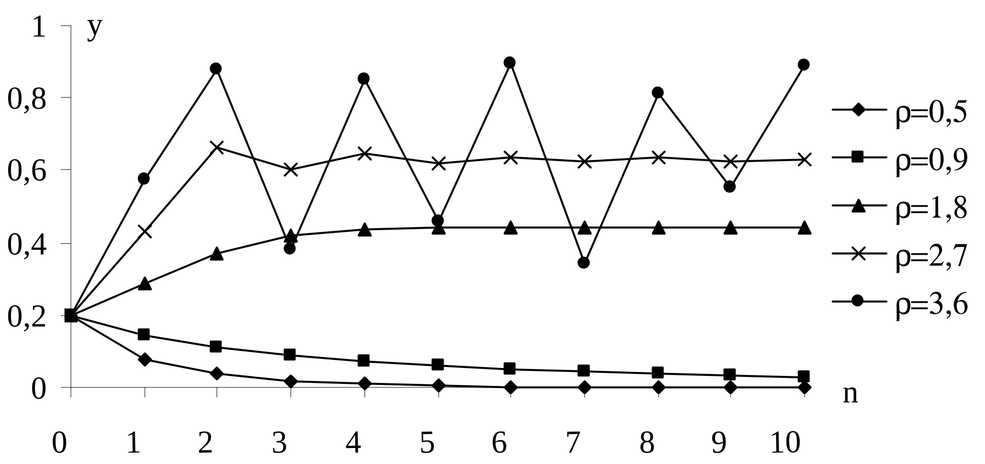
$$v_{n+1} = (2 - \rho)v_n - \rho v_n^2 \tag{5.85}$$

bulunur. v_n çok küçük olduğundan yine v_n^2 terimi ihmal edilebilir. Buradan

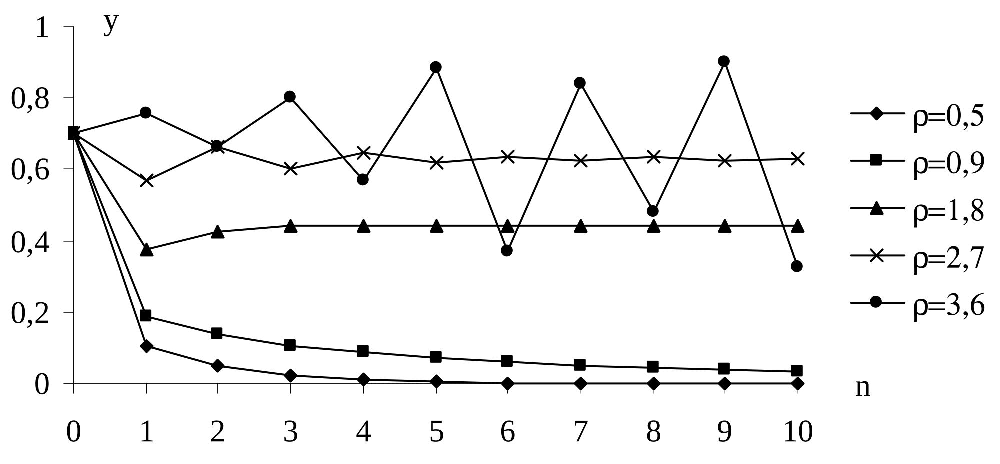
$$v_{n+1} = (2-\rho)v_n \tag{5.86}$$

lineer denklemi elde edilir ve burada da n sonsuza giderken v_n'nin sıfıra gitmesi için $|2-\rho| < 1$, yani $1 < \rho < 3$ olmalıdır. Böylece $u_n = (\rho-1)/\rho$'nun belirtilen ρ değerleri kümesinde asimptotik olarak dengede olduğu bulunur.

Şekil 5.2'de (5.80) denkleminin $y_0 = 0{,}2$ başlangıç değeriyle ρ'nun 0,5; 0,9; 1,8; 2,7 ve 3,6 değerleri için çözümleri grafikle gösterilmiştir. Şekil 5.3'te de (5.80) denkleminin yine aynı ρ değerleri ve $y_0 = 0{,}7$ başlangıç değeri için çözümü grafik olarak verilmiştir.



Şekil 5.2. $y_0 = 0{,}2$ başlangıç değeri ve ρ'nun 0,5; 0,9; 1,8; 2,7 ve 3,6 değerleri için lojistik denklemin çözümleri



Şekil 5.3. $y_0 = 0{,}7$ başlangıç değeri ve ρ'nun 0,5; 0,9; 1,8; 2,7 ve 3,6 değerleri için lojistik denklemin çözümleri

Şekil 5.2 ve 5.3’te de görüldüğü gibi ρ’nun (0,1) aralığındaki değerleri için lojistik denklemin çözümleri 0 denge değeri civarında, ρ’nun (1,3) aralığındaki değerleri için de $(\rho - 1)/\rho$ denge değeri civarında kararlıdır. ρ’nun 3’ten büyük değerinde ise y_n’nin kararlı olmadığı yine şekillerde görülmektedir.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada çeşitli alanlarda ortaya çıkan problemlerin modellenerek lineer fark denklemlerine nasıl uyarlandığı ve de bunların çözüm yöntemleri üzerinde durulmuştur. Bununla birlikte sosyal bilimler, davranış bilimleri veya iktisat alanında oluşturulan problemlerin birçoğu lineer olmayan fark denklemleriyle karakterize edilmektedir. Her ne kadar bu tip problemler daha karmaşık çözümleri gerektirseler de, bu çalışmanın devamı niteliğinde böyle problemler de ele alınabilir. Gen popülâsyonunu karakterize eden denklemler bunlara örnek verilebilir. Ayrıca kaotik yapılar, lineer olmayan fark denklemleri için bifurcation teorisi veya atraktörler bir diğer çalışma konusu olabilir.

KAYNAKLAR

[1] GOLDBERG S., Introduction to difference equations, John Wiley&Sons,New York, 1960; 1–203

[2] BATHELDER P. M., An Introduction to linear difference equations, Daver Publicetions, New York, 1967; 1–29

[3] SCHEID F., Nümerik Analiz, Editör: H. Hilmi Hacısalihoğlu, Çeviri: Adnan Köksal, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 1988; 22–23

[4] ATEŞ S., Fark denklemleri, Syllabus, Mathematical Economics II, Lecture notes, (7), http://idari.cu.edu.tr/sanli/matikt2-7.pdf; 52–60

[5] TEKDAL M., Etkileşimli fizik simülasyonlarının geliştirilmesi ve etkin kullanılması, V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Konferansı, ODTÜ Kültür ve Kongre Merkezi, 18 Eylül 2002

[6] BOYCE W. E., DIPRIMA R. C., Elementary differential equations and boundary value problems, Chichester; Wiley, New York, 1992; 98–111

ÖZGEÇMİŞ

Nevin Demircioğlu, 17.12.1979’da Sakarya’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Adapazarı’nda tamamladı. 1996 yılında başladığı YTÜ Matematik bölümünden 2001 yılında mezun oldu. 2001 yılında Milli Eğitim Bakanlığı tarafından Esentepe Fatma Özkan İlköğretim Okuluna Matematik Öğretmeni olarak atandı. Halen bu okulda görevine devam etmektedir.