

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

CEBİRSEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat ÇEKEN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdullah YILDIZ

Eylül 2007

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

CEBİRSEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat ÇEKEN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 07 / 09 /2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Abdullah YILDIZ
Jüri Başkanı**

**Yrd. Doç. Dr.
Ö. Faruk GÖZÜKIZIL
Üye**

**Yrd. Doç. Dr.
Yılmaz GÜNEY
Üye**

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında çok büyük emeği olan sayın Prof. Dr. Abdullah YILDIZ' a (Sakarya Üniversitesi), Prof. Dr. Mustafa BAYRAM' a (Yıldız Teknik Üniversitesi) ve ayrıca Arş. Gör. Mustafa ERÖZ' e (Sakarya Üniversitesi) ayrıca tezin yazılmasında çok büyük emeği geçen Alper EKİNCİ'ye ve Cemil KARAMAN'a teşekkür ederim.

ÖNSÖZ

Diferansiyel denklemin pratik uygulamadaki önemi bilinmektedir. Son yıllarda teknolojinin gelişmesine paralel olarak diferansiyel denklemler bazı kısıtlarla - ki bu kısıtların çoğu cebirsel kısıtlardır, ortaya çıkmaktadır. Bu cebirsel kısıtlamalar altında diferansiyel denklemlerin çözümü son yıllarda önemini artırarak ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışma, bu tür problemleri ele alarak sayısal çözümler geliştirmeyi amaçlamaktadır. Ortaya konulan modellerde cebirsel ve diferansiyel bilinmeyenler birlikte çözüm gerektirmektedir. Bunun için cebirsel denklemler, diferansiyeli alınarak diferansiyel denkleme eklenmektedir. Bu diferansiyelleme yeni problemler ortaya çıkarmaktadır. Bu ortaya çıkan problemler, denklem modellerinin yapısına bağlı olarak çeşitlilik arz etmektedir. Dolayısıyla bütün cebirsel diferansiyel denklemleri çözen genel bir metot geliştirilememektedir.

Bu çalışmada, bugüne kadar bu konu ile ilgili yapılan çalışmalar verilecektir ve bazı problemlerin bilgisayar programları ile çözümleri yapılarak grafikleri çizilecektir

Türkiye’de henüz yeni yeni gündeme gelen bu konuda derli toplu bir kaynak olması dileğiyle.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vii
TABLolar LİSTESİ.....	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	x
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.	
CEBİRSEL DİFERANSİYEL DENKLEM NEDİR ?.....	5
2.1. Bazı Temel DAE Örnekleri	6
2.2. Uygulamalar	8
2.2.1. Varyasyonel problemler	9
2.2.2. Ağ-Network modellemesi	11
2.2.3. Model indirgeme ve tekil pertürbasyon	13
2.2.4. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılması	14
BÖLÜM 3.	
CEBİRSEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAPISI	16
3.1. İndeks ve Matematiksel Yapı	18
3.2. Özel DAE Formları	27
3.3. DAE Stabilitesi	32

3.4. İndeks İndirgemesi ve Stabilizasyonu	34
3.5. Genelleştirilmiş Koordinatlar	35
BÖLÜM 4.	
CEBİRSEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ.....	38
4.1. Doğrudan Ayrıklaştırma Metotları	39
4.2. Geri Fark Euler Metodu	40
4.3. BDF Metodu	43
4.4. Radau Kollakasyonu ve Kapalı Runge – Kutta Metotları	48
4.5. Bazı Pratik Zorluklar	50
4.6. Kötü Koşullu İterasyon Matrisi	54
4.7. İndeksi 2 Olan DAE'ler İçin Hata Tahmini	54
4.8. Örnekler	61
BÖLÜM 5.	
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	71
KAYNAKLAR.....	72
EKLER	73
ÖZGEÇMİŞ.....	78

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

ODE	: Adi Diferansiyel Denklem(Ordinary Differential Equation)
DAE	: Diferansiyel Cebirsel Denklem (Differential Algebraic Equation)
BDF	: Geri Fark Formül (Backward Differential Formula)
MOL	: Doğrular Metodu (Method Of Lines)
U_N	: Düğüm Potansiyeli
U_B	: Dal Potansiyeli
I_B	: Daldaki Akım
$\sum_{i=0}^m$: i=0 dan m'ye kadar i'lerin toplamı
$\prod_{i=0}^m$: i=0 dan m'ye kadar i'lerin çarpımı
∇	: Geri fark
Δx	: x'lerin değişimi
\square	: Çok küçük
$F^{(n)}$: F fonksiyonunun n'inci mertebeden türevi
$\ y\ $: y'nin normu
A^T	: A matrisinin transpozesi (devriği)
$P(t)$: Interpolasyon polinomu
(a_{ij})	: i satırlık j sütunluk matris elemanları
I	: Birim matris
$\frac{df}{dt}$: f fonksiyonunun t değişkenine göre türevi
$\frac{\partial f}{\partial t}$: f fonksiyonunun t değişkenine göre kısmi türevi
M^{-1}	: M matrisinin tersi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1.	Basit sarkaç.....	2
Şekil 3.1.	Bir fonksiyon ve ondan daha az düzgün türevi.....	16
Şekil 3.2.	Basit bir elektrik devresi.....	25
Şekil 4.1.	İnterpolasyon polinomu ve t_{l+m} deki türevinin hesabı.....	44

TABLolar LİSTESİ

Şekil 4.1.	Geri fark tablosu.....	45
Şekil 4.2.	6. mertebeye kadar BDF metodları için katsayılar.....	48

ÖZET

Anahtar kelimeler: Diferansiyel denklem, cebirsel denklem, cebirsel diferansiyel denklem

Diferansiyel denklemler mühendislikte ve pozitif bilimlerde standart hale gelmiş modelleme malzemesidir.

Diferansiyel denklemler cebirsel kısıtlarla donatılınca Cebirsel diferansiyel Denklemler ortaya çıkmaktadır. Bunların beraberce çözümlenmesi çeşitli zorlukları da beraberinde getirmektedir. Bu çalışmada bu zorlukları ve çareleri verilecektir.

Çoğunlukla cebirsel değişkenler de diferansiyel denkleme dahil edilir ve tüm bilinmeyenleri içeren diferansiyel denklem sistemleri çözülür. Bu türevleme işi sayısal çözümlemede çeşitli güçlükler oluşturmaktadır. Bir başka problem de denklemlere yeni giren cebirsel değişkenlere uyumlu bir başlangıç koşulu vermektir.

Bu çalışmada ilk önce diferansiyel cebirsel denklemin tanımı, daha sonra diferansiyel cebirsel denklemlerin yapısı, son olarak da çokça kullanılan bazı sayısal yöntemler verilmiştir.

Her DAE problemini çözen sayısal bir yöntem yoktur. Problem nevi şahsına münhasır olarak bazı özel yapılar sergilemektedir. Bu nedenle bu çalışmada ağırlıklı olarak BDF-Geri fark diferansiyel formülü (Bu İngilizce “Backward Differential Formula”nın kısaltmasıdır) kullanılarak sayısal çözümler yapılacaktır. Bunun yanında bu problemlerle ilgili bu zamana kadar kullanılan çözüm yöntemleri kullanılacaktır. Ayrıca bazı problemlerin bilgisayar programlarıyla çözümleri yapılarak grafikleri çizilecektir.

DIFFERENTIAL ALGEBRAIC EQUATIONS

SUMMARY

Keywords: Differential equation, algebraic equation, differential algebraic equation

Differential equations are the modelling material that being standart in engineering and positive science.

Differential equations, with combining algebraic conditions are lead to Differential Algebraic Equations (DAE). To solve them together cause various difficulties. In this discussion we give these difficulties and solutions.

We include these algebraic variables to differential equation mostly and solve all unknowns' differential equations system. This differentiation work produce several difficulties in numerical solutions. Another problem is to give an initial condition coherent with new differential variables that join equation.

In this discussion, we give first the definition of differential equation then structure of DAE and last some usefull numerical methods.

There is no numerical method can solve every DAE. Most of problems have unique and spesific structures. Therefore, in this study we explain BDF (Backward Differential Formula) and make some numeric practises.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bir başlangıç değer problemi

$$y' = f(t, y) \quad 0 \leq t \leq b$$
$$y(0) = c$$

formundadır.

Bir sınır değer problemi

$$y' = f(t, y)$$
$$g(y(0), y(b)) = 0$$

formundadır.

Diferansiyel denklemler

$$y' = f(t, y)$$

formunda ise açık

$$f(t, y, y') = 0$$

formunda ise kapalı form olarak isimlendirilir.

Son denklemde $\frac{\partial f}{\partial y'}$ jakobiyen matrisi uygun bir bölgede argümanlarına göre tekil değil ise bu koşul altında y' , t ve y cinsinden çözülebilir. Bazen ODE'ler yalnız başına değil de aşağıdaki şekilde cebirsel kısıtlarla beraber ortaya çıkmaktadır.

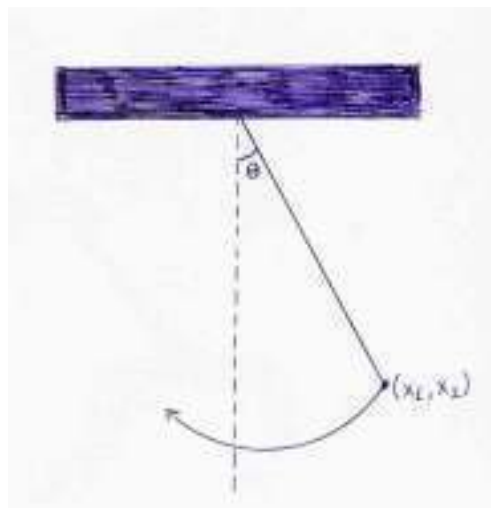
$$\begin{aligned}x' &= f(t, x, z) \\ 0 &= g(t, x, z)\end{aligned}$$

Burada diferansiyel değişken $x(t)$, $z(t)$ cebirsel değişkenleriyle bağlantılıdır. Çözümler cebirsel denklemin sağlanmasını da gerektirmektedir. Yukarıdaki sisteme yarı-açık diferansiyel cebirsel denklem denir. Bu denklemler $y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ vektörü tanımlanarak yeni bir ODE sistemine dönüştürülebilir. Ama artık jakobiyen matris

$$\frac{\partial f(t, y, y')}{\partial y'} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olup tekildir.

Örnek : (Basit Sarkaç)



Şekil 1.1. Basit sarkaç

Şekildeki basit sarkacın hareketi (x_1, x_2) kartezyen koordinatları cinsinden aşağıdaki şekilde verilir:

$$x_1' = -zx_1'$$

$$x_2'' = -zx_2 - g$$

Burada $z(t)$, Lagrange çarpanıdır. Sarkacın çubuğu sabit birim uzunluğa sahip hareket

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

şartını sağlamak zorundadır.

Bu 1.mertebeden sisteme çevrildiğinde $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_1'$, $z_4 = x_2'$ yeni değişkenler olmak üzere

$$z_1' = z_3$$

$$z_2' = z_4$$

$$z_3' = z_1$$

$$z_4' = z_2 - g$$

$$0 = z_1^2 + z_2^2 - 1$$

cebirsel diferansiyel denklemler takımı elde edilir. Aynı problemde

$$x_1 = \sin \theta, \quad x_2 = -\cos \theta$$

değişken dönüşümü yapıp z yok edilirse

$$\theta'' = -g \sin \theta$$

elde edilir. Burada θ , Şekil 1.1.'de dikey eksenden ayrılma açısıdır. $\theta(0)$ ve $\theta'(0)$ başlangıç pozisyonu ve hız göstergeleri verilirse bu bir başlangıç değer problemi olur.

Not: Bir kapalı ODE ile DAE arasındaki temel fark sadece tekil olmayan jakobiyen değildir. Ayrıca DAE'lerin çözümü için uygun başlangıç koşulları verilmelidir.

Aşağıdaki basit örneğe bakılırsa

$$\begin{aligned}x' &= z \rightarrow x' = f(t, x, z) \\ 0 &= x-t \rightarrow 0 = g(t, x, z)\end{aligned}$$

çözüm

$$x(t) = t, z = 1$$

olup hiçbir başlangıç ve sınır koşuluna ihtiyaç yoktur.

$$x(0) = c$$

diye bir başlangıç koşulu verilirse DAE uygun olmayan bir başlangıç koşuluna sahip olmuş olabilir. Zaruri olarak burada $c=0$ olmak zorundadır.

Not edilmesi gereken bir önemli nokta da uyumlu başlangıç koşulları verilmiş olsa bile DAE'ler için genel bir varlık ve teklik problemleri yoktur. Lineer olmayan denklemler keyfi sayıda çözüm de verebilirler.

BÖLÜM 2. CEBİRSEL DİFERANSİYEL DENKLEM NEDİR ?

1. mertebeden ODE denklemleri

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \quad (2.1)$$

formunda kapalı olarak tanımlanır. Burada F ve y vektör değerli fonksiyonlardır. Bu kapalı form diferansiyel denklem bazı koşullarda açık ya da normal,

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (2.2)$$

formunda yazılabilir. Çoğunlukla (2.2) ile ilgili teoremler ve sayısal teknikler geliştirilir. (2.2) önemli olmaya devam ederken, direkt (2.1) ile çalışmak bazen avantaj sağlayabilir.

Bu durum yöntem seçimini ve uygulamaları etkileyecektir. Bir diferansiyel-cebirselle denklem sisteminde değişkenlerin cebirsel kısıtları vardır. Bu şartlar aşağıdaki (2.3b) sisteminde açıkça ortaya çıkar.

$$F(x', x, y, t) = 0 \quad (2.3a)$$

$$G(x, y, t) = 0 \quad (2.3b)$$

Burada F 'nin x' e göre jakobiyeni tekil değildir. İlerideki konularda jakobiyenin her zaman tekil olduğu varsayılacak.

(2.1) formunda ODE denklemlerini direkt göz önüne almanın çeşitli sebepleri vardır. Öncelikle, fiziksel problemler modellendiğinde model genellikle, değişkenleri ve

türevlerinin bazılarının koleksiyonunu tasvir eden bir DAE şeklini alır. Bu bağlantı, bir modelleme veya simülasyon programından otomatik olarak üretilebilir. Değişkenlerin genellikle fiziksel anlamı vardır. Modeli (2.2)'ye çevirmek daha az anlamlı değişkenler üretebilir. Parametre değerlerini değiştirmek, değişkenler arasındaki ilgiyi değiştirebilir ve farklı boyutlardaki çözüm manifoldlarına dayanan farklı modeller gerektirebilir. Eğer orijinal DAE direkt çözülebilirse, bilim adamları ve mühendislerin, modelleme değişiklikleri ve parametrelerin etkisinin gözlemlenmelerini kolaylaştıracaktır. Bu ayrıca ara yüz modelleme ve dizayn yazılımcılığını da kolaylaştıracaktır. Formu değiştirmek, mümkün olsa bile uygun sistem yapısından faydalanılması engellenebilir.

DAE'lere ilgi son zamanlarda giderek artmaktadır. DAE'ler önceleri tekil, açık olmayan, diferansiyel-cebirsal, yarı hal, genelleştirilmiş durum uzayı, kanonik olmayan, şartlı, indirgenmiş düzen modeli ve standart olmayan sistemler olarak adlandırıldı. 1960'larda ve 1970'lerin başında lineer sabit katsayılı ve bazı lineer olmayan sistemlerin analitik teorisi çalışıldı. Bu çalışma, koordinat değişikliği, indirgeme ve diferansiyellemeye dayanıyordu. DAE'nin kesin sınıfları için ilk pratik nümerik metotlar, geri fark formülleri (BDF). 1970'lerin sonunda bilimsel ve matematik literatüründe DAE'lere olan ilgide bir artış yaşandı. Yeni ve daha güvenilir programlar yapıldı.

2.1. Bazı Temel DAE Örnekleri

DAE'lerin sınıflandırılmasında, analizinde ve sayısal çözümlerinde yapısal formlar çeşitli kolaylıklar sağlamaktadır. Bu nedenle DAE'lerin mümkün olduğu kadar çeşitli yapısal varsayımlar altında göz önüne alınmaları tercih edilir. Bu yaklaşım daha çok direkt problem formülasyonu ile ilgilidir. Birçok uygulamada DAE'ler doğrulanması daha kolay olan basit yapısal formlar sergilerler. Yeni algoritmalar ve sonuçlar üretmede bu çok faydalıdır. Yapısal sınıflandırma, bu bölümde başlayacak ve bir sonraki bölümde detaylı olarak devam edecektir.

En basit yapısal formda sabit katsayılı lineer DAE'ler aşağıdaki formdadır:

$$Ax'(t) + Bx(t) = f(t) \quad (2.4)$$

Burada A ve B reel veya kompleks değerli kare matrisler ve t reel bir değişkendir. Gösterim kolaylığı için genellikle vektörler reel kabul edilecektir. Fakat sonuçlar kompleks durumdakiyle de aynıdır. (2.4)'ün genel analitik ve nümerik davranışı daha kolay anlaşılır olmasına rağmen kontrol teorisi literatüründe ve matris yapısının hesaplanmasındaki problemlerde hala (2.4)'ün uygulamalarıyla ilgili çeşitli araştırmalar yapıyor.

Uygulamaların çoğu hem lineer sabit katsayılı hem de lineer olmayan ve lineer zaman değişkenli

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t) \quad (2.5)$$

şeklinde dirler.

Burada $A(t)$ her t için tekildir. Bu da genel DAE'leri sabit katsayılı DAE'lerden ayıran davranışların çoğunu gösterir. Lineer olmayan sistemler için uygun görülen bazı metodlar olmasına rağmen tam ve katı bir ispat sadece lineer zaman değişkenli sistemler için mevcuttur. Bu yüzden (2.5) genel DAE'leri anlama açısından önemli bir DAE sınıfıdır.

(2.2) sistemi tamamen açık olmayan lineer zaman değişkenli DAE'dir. Önemli bir özel durum yarı açık lineer DAE'dir.

$$\begin{aligned} x'(t) + B_{11}(t)x_1(t) + B_{12}(t)x_2(t) &= f_1(t) \\ B_{21}(t)x_1(t) + B_{22}(t)x_2(t) &= f_2(t) \end{aligned}$$

Genel(veya tam kapalı) lineer olmayan DAE

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \quad (2.6)$$

formundadır. Eğer türevinde lineerlik varsa bu halde lineer olarak kapalı DAE diye isimlendirilir. (2.6)'nın özel bir durumu yarı açık lineer olmayan DAE'dir.

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), t) \\ 0 &= f_2(x_1(t), x_2(t), t) \end{aligned}$$

Uygulamaya bağlı olarak, bazen bu sistem

$$\begin{aligned} F(x'(t), x(t), y(t), t) &= 0 \\ G(x(t), y(t), t) &= 0 \end{aligned}$$

yarı açık sistem olarak adlandırılacak. Burada F_x tekil değildir. Birçok varyasyonel problemler yarı açık sistemlere dönüşür. Böylece sistemler bazı nümerik algoritmalar tarafından kullanılabilen özelliklere sahiptir. Bununla birlikte, tam kapalı lineer sabit katsayılı DAE bir sabit koordinat değişimi ile yarı-açık lineer DAE'ye dönüştürülebildiğinden bu iki durum ayrı ayrı değerlendirilmeli.

2.2. Uygulamalar

Bu bölümde DAE'lerin sıklıkla ortaya çıktığı bazı problem sınıfları tanıtılacaktır. Uygulamalarda gruplama, denklem tiplerinden çok bunların nasıl türevleneceğine bağlı olarak yapılır. Bu çalışmanın kalan kısmının tamamında, ana kavramların ilgisini göstermek amacıyla bu problemlere referans verilecektir. DAE'lerin sayısal çözümlerini içeren bazı özel uygulamalar Bölüm 4'te detaylı olarak verilecektir.

2.2.1. Varyasyonel problemler

Varyasyonel problemler çoğunlukla DAE'lere dönüşen problemlerdir. Örneğin, konumun x , hızın u , kinetik enerjinin $T(x,u)$, dış kuvvet $f(x,u,t)$ ve şart $\Phi(x)=0$ ise bir şartlı mekanik sistemde, Euler-Lagrange formülasyonu

$$\begin{aligned}x' &= u \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial u} T(x,u) &= \frac{\partial T}{\partial x} + f(x,u,t) + G^T \lambda \\ 0 &= \Phi(x)\end{aligned}$$

ile verilir. Burada $G = \partial\Phi / \partial x$ ve λ Lagrange çarpanıdır.

Bu sistem aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} u' = g(x,u,t) + G^T \lambda \quad (2.7a)$$

$$x' = u \quad (2.7b)$$

$$0 = \Phi(x) \quad (2.7c)$$

u , x ve λ bilinmeyen değişkenlerine bağlı bu DAE sistemi türevlerde lineerdir. Eğer $\partial^2 T / \partial u^2$ pozitif tanımlı bir matrisse (2.7a)'nın $(\partial^2 T / \partial u^2)^{-1}$ ile çarpımı (2.7)'i yarı açık DAE'ye dönüştürür.

Varyasyonel problemlere örnek olarak daha önce verilen, L uzunluğundaki bir sarkacın hareketi göz önüne alınsın. g yerçekimi ivmesi, λ çubuktaki kuvvet ve (x,y) kütlesi son derece küçük topun koordinatları olmak üzere, aşağıdaki DAE elde edilir:

$$x'' = \lambda x$$

$$y'' = \lambda y - g$$

$$0 = x^2 + y^2 - L^2$$

Robot bilimdeki bir çok problem varyasyonel yaklaşımdan yararlanılarak bir DAE olarak formülize edilebilir. Bir örnek olarak, kolunu yüzeydeki temas noktasın hareket ettiren bir robot ele alınırsa birleşik koordinatlar kullanarak, bu nesnenin hareketi aşağıdaki DAE ile gösterilebilir.

$$\begin{aligned} M(x)x'' + G(x, x') &= u + B^T(x)\lambda \\ 0 &= \Phi(x) \end{aligned}$$

Burada

$$B = \Phi(x), \quad x \in R^n, \quad \lambda \in R^m$$

dir. M kütle matrisi, G robotun santrifüj ve kütle etkileri, u birleşme yerindeki kontrol vektörü, c temas yüzeyi ve $B^T \lambda$ temas kuvvet vektörüdür. Bu sistem standart $x' = v$ yer değiştirmesi ile türevleri lineer olan bir DAE'ye dönüştürülebilir.

DAE'nin diğer uygulamaları optimal kontrol problemlerini içeren şartlı varyasyonel problemlerden doğar. Bu problemlerde

$$x' = f(x, u, t) \quad (2.8)$$

ile verilen bir denklem ve

$$J[x, u] = \int_{t_0}^{t_1} g(x, u, s) ds \quad (2.9)$$

ile verilen bir maliyet fonksiyonelidir. Burada problem u 'yu, (2.9) maliyetini, (2.8) şartıyla ve belirlenmiş iç ve sınır değerleriyle en küçük yapacak şekilde seçmektir. (2.8) ve (2.9) için varyasyonel denklemler, sabit zaman veya sabit bitiş noktası problemi için aşağıdaki yarı-açık DAE sistemine dönüşür.

$$\begin{aligned} x' &= f(x, u, t) \\ \lambda' &= -g_x(x, u, t) - f_x^T \lambda \\ 0 &= g_u(x, u, t) f_u^T \lambda \end{aligned}$$

Bu tip DAE'nin en çok çalışılan özel bir formu

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bu \\ J[x, u] &= \int_{t_0}^{t_1} x^T Qx + u^T Ruds \end{aligned} \quad (2.10)$$

şekindedir. Burada A, B, Q, R matrislerdir (Q ve R pozitif tanımlıdır). Bu durumda, varyasyonel denklem lineer zaman değişkenli aşağıdaki yarı- açık DAE sistemine dönüşür.

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bu \\ \lambda' &= -Qx + A^T \lambda \\ 0 &= Ru + B^T \lambda \end{aligned} \quad (2.11)$$

Başlangıç ve sınır değerlerine bağlı olarak, bu DAE'ler sıklıkla sınır değer problemleridir.

2.2.2. Ağ-Network modellemesi

Bu yaklaşımda, önce bir nicelik koleksiyonu ya da bilinenler veya bunlar arasındaki istenen şartlarla işe başlanır. Elektrik akımları sıklıkla bu şekilde modellenir. Akım düğümlere bağlı kollar üzerinde bulunan bir aygıt koleksiyonu olarak modellenir. Örneğin kaynaklar, dirençler, indüktörler ve kapasitörler gibi. Bu fiziksel niceliklerin ilgisi genellikle kollardaki akıma ve düğümlerdeki voltaja gider. Bu nicelikler genellikle aygıt kanunları ile ilgilidir (Kirchoff akım ve voltaj kanunları). Bu DAE'ler elektrik mühendisliği literatüründe tanımlayıcı veya yarı durumlu sistemler olarak tanımlanır. Lineer kapasitör, direnç ve indüktörlü bir RLC devresinde denklemler yarı açık, sıklıkla lineer sabit katsayılı olacaktır. Böylece aygıtlar, diotlar veya lineer olmayan dirençler dahil edildiğinde, bu denklemler lineer olmayacaklardır. Bu sistemlerin çoğu türevleri lineer olan

$$\begin{aligned} Ax' + B(x) &= Du \\ y &= F(x) \end{aligned}$$

formunda yazılabilir. Burada A tekil olabilir, u giriş vektörü ve y çıkışlar veya gözlemler vektörüdür.

Benzer bir problem önceden tanımlı yol kontrolü olarak tanımlanabilir. Bu yol kontrolünde

$$x' = f(x, u, t) \quad (2.12)$$

ile verilen işlem göz önüne alınır. Burada x durum değişkeni ve u kontrol değişkenidir. Burada amaç yol değeri x' 'in önceden tanımlı yolu izlemesidir.

$$0 = g(t, x, z) \quad (2.13)$$

Sıklıkla u , (2.13)'de bulunmaz.

Bu problem ve daha önceki şartlı optimizasyon problemleri arasındaki ilişkiyi göstermek amacıyla, robotik bir kontrol problemi göz önüne alınsın. Eğer bir temas noktası yüzey üzerinde hareket ediyorsa, bu durumda şart yüzey ile belirtilir. Yüzey robottaki kuvvetleri kullanır ve problem çoğunlukla varyasyonel bir yaklaşım gibi modellenir. Bununla birlikte eğer robot belirlenen alanda ve belirlenen güzergâhta (2.13) serbestçe hareket ediyorsa sabit objeler çarpmamasından emin olunmalıdır. Bu durumda problem çoğunlukla (2.12) serbest dinamiklerini alıp (2.13) şartlarını uygulayarak modellenir. Bölüm 3'de DAE'nin indeksi denen temel bir kavram tanımlanacak. Genellikle indeks ne kadar büyükse problemin nümerik çözümü de o kadar zor olmaktadır. Robot kollarının belirlenen güzergâhta hareketi şimdiye kadar görülen en büyük indeksli problemleri oluşturur. Yörüngesi belirli yol kontrol problemlerinde, DAE sistemi uzayda uçan bir aracı modeller (cebirsal yol şartları yörüngesi tarafından belirlenir). Bu tip DAE'nin daha ayrıntılı bir örneği, bir uzay mekiği için güvenli bir yeniden giriş profilinin dizaynıdır. Mekiğin yeniden girişinde hasar görmemesini garantilemek amacıyla, görev kısıtlamaları, ısı şartlarını ve mekiğe etkiyen kuvvetlerle hesaplanan yapısal sağlamlık şartlarını içermelidir.

2.2.3. Model indirgeme ve tekil pertürbe

Verilen bazı modellerde çeşitli küçük parametreler vardır. Modeli basitleştirmek ve birinci mertebeden yaklaşımlar elde etmek için bu parametre sıfırlanır.

Klasik tekil pertürbe problemi $0 < \varepsilon \leq 1$ ile

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, t, \varepsilon) \\ \varepsilon y' &= g(x, y, t, \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$\varepsilon = 0$ alınarak

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, t, 0) \\ 0 &= g(x, y, t, 0) \end{aligned} \quad (2.15)$$

yarı-açık DAE elde edilir.

(2.14) denklemleri $\forall t \geq 0$ için aranmaktaysa da (2.15) DAE sistemi çözülür ve daha sonra sınır tabakaları düzeltmeleri çözümlere dahil edilir.

Genelde küçük parametreler birden çok olabilirler ve orijinal denklemler kendileri bile DAE olabilirler.

(2.14) tipli denklemler stiff diferansiyel denklem olarak bilinirler ve bunların çözümleri diferansiyel denklem açık formda olsa bile özel sayısal metod seçimini gerektirir.

Uygun çözümler ve uygun çözüm yöntemleri için çok küçük adım uzunluğu ile ilerlenmelidir.

Teori ve çözüm yöntemleri açısından DAE ile stiff denklemler arasında büyük benzerlik vardır.

2.2.4. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılması

Kısmi türevli bir diferansiyel denklemin sayısal çözerken ayrıklaştırma yapılır. Bu esnada DAE ler ortaya çıkar. Genel strateji kısmi türevlerin yerine fark yaklaşımları alınmasıdır. MOL(Methods of lines) doğrular metodu parabolik tip denklemlerde başarıyla kullanılan adi diferansiyel denkleme indirgeme yöntemidir.

Örnek olarak

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$ bölgesinde tarif edilsin. $y(t,0)$, $y(t,1)$ sınır koşulları ve $y(0,x)$ başlangıç koşulları verilsin. Düzgün ayrıklaştırma yapılarak Δx aralıklarla $x_j = (j+1) \Delta x$, $1 \leq j \leq 1/\Delta x - 1 = N$ ağ noktaları oluşturulsun. Fark formülleri kullanılarak $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ türevinin yaklaşık değeri alınarak $y_i(t) = y(t, x_i)$ olmak üzere

$$y_j'(t) - \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{(\Delta x)^2} = 0 \quad j=2, \dots, N-1$$

$$y_1 - y(t,0) = 0$$

$$y_N - y(t,1) = 0$$

sistemi elde edilir. Son örnek düzgün ağ örgülü Navier-Stokes denklemleriyle verilen sıkıştırılmaz viskos akışkanların akışıyla ilgilidir.

Bu denklemler

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \gamma \nabla^2 u \quad (2.16a)$$

$$\nabla u = 0 \quad (2.16b)$$

dir.

Burada u , 2 veya 3 boyutlu uzayda hızdır. p bir skaler basınçtır, ν kinematik viskozite katsayısıdır. (2.16a) denklemi momentum denklemdir, (2.16b) ise sıkıştırılama koşuldur.

Zaman dışındaki argümanları sonlu eleman ve sonlu farklar ile ayrıklaştırarak $U(t)$ ve $P(t)$, $u(t,x)$, $p(t,x)$ 'in ilgili bölgelerdeki yaklaşıklıkları olmak üzere aşağıdaki denkleme dönüştürülür.

$$MU' + (K + N(U))U + CP = f(U, P)$$

$$C^T U = 0$$

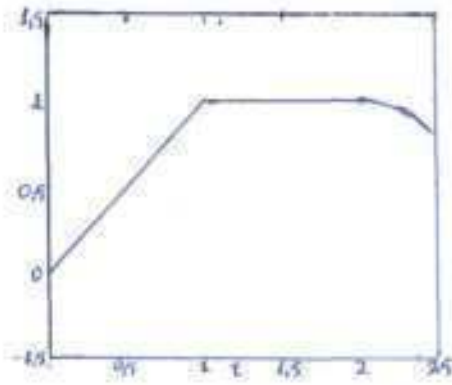
Bu DAE sisteminde M matrisi, sonlu fark ayrıklaştırılması kullanılmışsa özdeşlik matrisidir ve sonuç yarı açık DAE'dir veya sonlu elemanlar kullanılmışsa simetrik pozitif tanımlıdır. Bu durumda DAE, M^{-1} ile çarpılarak yarı açık hale dönüştürülebilir. Fakat ilk DAE'nin fazla sıfırlı formu kaybolur. ∇ operatörünün ayrıklaştırılması C 'dir ve f kuvvetleri sınır koşullarında ortaya çıkar.

BÖLÜM 3. CEBİRSEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAPISI

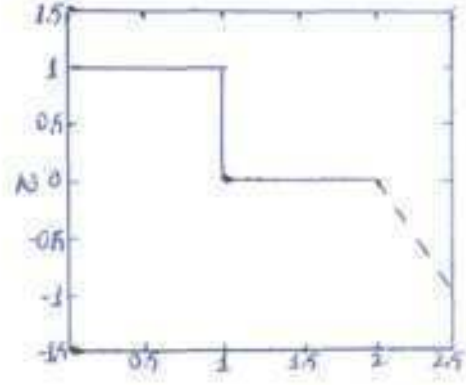
Bu bölümün ilk kısmında DAE'lerin yapısı çalışılacak. Böyle sistemlerin matematiksel yapısı ve bazı temel analitik transformasyonlar-dönüşümler göz önüne alınacaktır. Nümerik yaklaşımlar ayrıklaştırma bir sonraki bölümde tartışılacak. Bunun sebebi DAE teorisinin Adi diferansiyel denklem teorisine göre yeni gelişmesidir. Bunun bir sonucu olarak DAE teorisinde iyi sonuçlar az bulunuyor. Daha önemlisi yapıyı anlamak, iyi nümerik algoritmalar üretmek ve bu alanda ilerlemek için gereklidir.

DAE'ler ve ODE'ler arasındaki benzerliği ve farkı anlamak için t 'nin $[0,b]$ aralığında

$$y'(t) = z(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq b$$



(a) $y(t)$



(b) $z(t) = y'(t)$

Şekil 3.1. Bir fonksiyon ve ondan daha az düzgün türevi

şeklinde tanımlanan $y(t)$ ve $z(t)$ fonksiyonlarını göz önüne alınsın ve bu fonksiyonlardan birini diğerinden üretilmeye çalışılsın. z' 'yi, y' 'den oluşturmak için $y(t)$ türetilmelidir. z' 'den, y' 'yi oluşturmak için $z(t)$ integre edilmelidir. (Bu $y(0)$ değerinin verilmesi gibi bir yan şart gerektiren bir işlemdir.) Bu türev almanın integrasyondan daha basit ve doğrudan bir işlem olduğunu gösterir. Diğer taraftan $y(t)$ 'nin $z(t)$ 'den daha düzgün bir fonksiyon olduğuna dikkat edilmeli. Mesela $z(t)$ sınırlı ve sıçramalı süreksizliğe sahipse $y(t)$ bir kez diferansiyellenebilir. Böylece diferansiyel bir düzgünleştirmeme işlemi iken integrasyon bir düzgünleştirme işlemidir. Diferansiyel işlemi aşağıdaki anlamda stabil de değildir.

$y(t)$ 'ye $\varepsilon \cos wt$ gibi küçük bir değişiklik verilirse,

$$|\varepsilon| \ll 1 \text{ ve } w > |\varepsilon^{-1}|$$

olmak üzere $z(t)$, $|w \varepsilon|$ büyük değeri miktarınca değişmeye tabi olur.

Bununla birlikte analitik olarak türev almak çok basittir. Diferansiyel denklemin çözümü integrasyon işlemiyle yapılır. Lineer

$$y' = Ay + q(t)$$

sisteminin çözümünde $y(t)$ 'nin düzgünlüğü $q(t)$ 'nin düzgünlüğünden fazladır. Diğer taraftan DAE diferansiyel ve integrasyon işlemlerini içerir. 3.1 probleminde olduğu gibi DAE lerin bir sınıfı bütün ODE leri içerir. Fakat bu ayrıca diferansiyel ve integrasyon işlemlerinin kompleks bir şekilde olduğu problemler de içerir. Bunların etkisi nümerik işlemi karmaşıktırır.

3.1. İndeks ve Matematiksel Yapı

Bir DAE integrasyon ve türev işlemini içerdiği için, verilen bir sistem için analitik diferansiyel alma işlemine başvurup gereken yok etmeler yapılarak, bütün bilinmeyenler için açık bir ODE sistemi bulunması ümit edilebilir. Bu, problem tekil olmadığı sürece doğrudur. Bu transformasyon için gereken diferansiyel işlemlerinin sayısına DAE'nin indeksi denir. Böylece ODE'lerin indeksi 0 olur.

Örnek 3.1.

$q(t)$ verilen düzgün bir fonksiyon olsun ve $y(t)$ için aşağıdaki problemleri göz önüne alınsın.

$y = q(t)$ için skaler denklemi bir (aşıkarak) indeksi 1 olan DAE dir. Çünkü y için bir ODE elde etmek için bir diferansiyel işlemi gerekir.

$$\begin{aligned} y_1 &= q(t) \\ y_2 &= y_1' \end{aligned}$$

sistemi için önce ilk denklemin diferansiyeli alınırsa

$$y_2 = y_1' = q'(t)$$

elde edilir. Ve daha sonra ikinci denklemin diferansiyelinden

$$y_2' = y_1'' = q''(t)$$

bulunur. Burada indeks 2'dir. Çünkü $q(t)$ 'nin iki defa diferansiyelinin alınması gerekir.

$$u = q(t)$$

$$y_3 = u''$$

sistemi için benzer yöntem kullanılırsa y_3 'ün bir ODE'sini elde etmek için 3 diferansiyel gereklidir. İndeks 3'tür.

m tane ODE'nin çözümünün belirlenmesi için m tane başlangıç veya sınır şartının verilmelidir. Örnek 3.1'de basit DAE ler için, çözüm sağ taraftan tam olarak belirlidir. Daha karmaşık DAE sistemleri genellikle birkaç ODE alt sistemi içerir. Böylece, DAE sistemi; l , 0 ve m arasında olmak üzere genel olarak l serbestlik derecesine sahiptir.

Genel olarak bu zor olabilir, en azından hemen aşikar olmayabilir. DAE çözümü belirlemek için l kadar bilgi gereklidir. Genellikle bütün başlangıç çözüm vektörü belirlidir. DAE'yi iyi tanımlı kılmak için gereken başlangıç ve sınır şartları tutarlı olmalıdır. Bir başka deyişle bunlar sistemin kısıtlarını sağlamalıdır. Örneğin indeks-1 sisteminin bir başlangıç şartı $y_1(0) = q(0)$ denklemini sağlamalıdır. İndeks-2 sistemi için durum biraz daha karmaşıktır. Her çözümün aşikar kısıt $y_1 = q(t)$ 'yi sağlaması yetmez, ayrıca çözümün her t için sağlaması gereken gizli bir $y_2 = q'(t)$ şartı vardır. Bu yüzden tutarlı başlangıç koşulları

$$y_1(0) = q(0) , y_2(0) = q'(0)$$

$$y_1 = q(t)$$

$$y_2 = y_1'$$

dır. Bu indeks-1 ile yüksek indeksli arasında önemli bir farktır. Yüksek indeksli DAE'ler gizli koşullar içerirler. Bu gizli yan koşullar sistemin açıkça ortaya koyduğu yan koşulların türevleridirler. İndeks-2 sistemi yan koşulların 1. türevlerini içeren gizli sistemlerdir. Yüksek indeksli sistemler yüksek mertebeden türeve tekabül eden gizli yan şartlar barındırırlar.

Örneğin;

$$\begin{aligned} u' &= q'(t) \\ y_3 &= q''(t) \end{aligned}$$

index-3 sistemi

$$u' = q'(t) \text{ ve } y_3 = q''(t)$$

gizli şartları sağlamalıdır.

En genel formu ile DAE

$$f(t, y, y') = 0 \quad (3.1)$$

kapalı formundadır. Burada $\frac{\partial f}{\partial y'}$ tekil olabilir. Bu jacobiyenin rankı ve yapısı $y(t)$ çözümüne bağlıdır. Basit hallerde t 'den bağımsızdır.

Yarı-açık DAE veya yan koşullu ODE:

$$x' = f(t, x, z) \quad (3.2a)$$

$$0 = g(t, x, z) \quad (3.2b)$$

$f(t, y, y') = 0$ 'ın özel bir halidir. $\partial G / \partial Z$ tekil değilse indeks-1'dir. Çünkü (3.2b) bir defa türetilerek z' prensip olarak elde edilir. Yarı-açık indeks-1 DAE'lerde diferansiyellenebilen değişkenle- $x(t)$ ve cebirsel değişken- $z(t)$ ayrılabilir. Cebirsel değişken diferansiyel değişkenlerden daha düzgündür. Genel halde y 'nin her bir bileşeni diferansiyel ve cebirsel bileşenlerin karışımını içerebilir. Nümerik çözümler bu halde daha riskli ve zordur. Yarı-açık formlar bu anlamda iki çift gurup oluşturabilir.

Öte yandan indeks 1 yükseltirise

$$y' = z \quad (3.3a)$$

$$0 = f(t, y, z) \quad (3.3b)$$

elde edilir. Yalnız bu şekilde yazmak problemi basitleştirmez. Tersine bir işlemde mümkündür. Mesela yarı-açık indeks 2 sistemi verilsin.

$w' = z$ yazarak indeks-1 sistemi elde edilir.

Böylece (3.1) le verilen kapalı indeks-1 sistemleri yarı-açık (3.2) indeks-2 sistemleri denktirler.

Genel olarak indeks çözüme de bağlıdır, sadece denklemin formuna bağlı değildir.

Aşağıdaki örnekler bunu göstermektedir.

Örnek 3.2.

$$y = (y_1, y_2, y_3)^T$$

olmak üzere

$$y_1' = y_3$$

$$0 = y_2(1 - y_2)$$

$$0 = y_1 y_2 + y_3(1 - y_2) - t$$

DAE sistemi göz önüne alınsın. Bu DAE sisteminde 2. denklem 2 tane çözüm vermektedir.

$$y_2 = 0, \quad y_2 = 1.$$

$y_2 = t$ bu iki değerden başka bir değer alamaz. y_2' ve y_4' içeren denklemler $y_4(0)$ verilen değeri ile' nin sürekliliğini ister .

1. y_2 yi sıfır alırsak 3. denklem $y_3 = t$ yi verir. 1. denklem ise

$$y_1 = y_1(0) + \frac{t^2}{2}$$

bulunur ve sistemin indeksi 1 dir.

Çözüm :

$$y(t) = (y_1(0) + \frac{t^2}{2}, 0, t)^T \quad (3.4)$$

2. $y_2 = 1$ alalım. 3. denklem $y_1 = t$ çözümünü verir. 1. denklem de türetilerek $y_3 = 1$ elde edilir ve sistemin indeksi 2 olur.

Çözüm :

$$y(t) = (t, 1, 1)$$

İndex-1 olanın zıttına başlangıç değeri gerekmemektedir. y_2 'yi içeren denkleme 1. türevi de alınarak;

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3 \\ y_2' &= 0 \\ 0 &= y_1 y_2 + y_3(1 - y_2) - t \end{aligned} \quad (3.5)$$

sistemi elde edilir.

Şimdi indeks başlangıç koşullarına bağlıdır. Eğer $y_2(0) = 0$ ise indeks-1'dir. $y_2(0) = 1$ ise index-2'dir.

Bu incelemelerden sonra index'in tanımı şöyle verilebilir:

İndeks, genel (3.5) DAE sistemi için y' vektörünü y ve t cinsinden tek türlü çözebilmeyi imkanı kılacak kadar minimum sayıda diferansiyellenebilme sayısıdır.

Yani index aşağıdaki türevlerin

$$\begin{aligned}
 F(t, y, y') &= 0 \\
 \frac{dF}{dt}(t, y, y', y'') &= 0 \\
 &\vdots \\
 \frac{d^p F}{dt^p}(t, y, y', \dots, y^{(p+1)}) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

p sayısıdır ki bu sistemde y' , y ve t cinsinden tek türlü çözülebilir.

Pratikte (3.6) sisteminin hesaplamaları nadiren yapılır. Fakat bu tanım DAE sisteminin matematik yapısını anlamak için önemlidir. Buna göre de uygun nümerik çözüm seçilir.

Örnek 3.3.

Elektrik şebekelerinin bilgisayar destekli tasarımı, zaman içindeki davranışının simülasyonunu içerir. Elektrik devresi, resistör, diyot, indüktör, kapasitör ve kaynaklar gibi basit elemanlardan oluşur. Geniş devreler geniş DAE sistemlerine dönüştürülebilir.

Bir devre elementlerinin tipleri ve şebekenin topolojisiyle karakterize edilebilir. Her bir element için voltaj farkı, elemanların bağlantısı ve akım arasında bir ilişki vardır. Mesela doğrusal bir resistör ohm kanununu sağlar. $V = RI$ (V , potansiyel farkı

$I = Q'$ akım ve (Q yükür) R, direnç) $V = LI'$ (L indüktör) kapasitör. $I = CU'$ (C kapasitans) Bu ikisinin lineer olmayan formları da vardır. Mesela akım kontrollü indüktör için $L = L(I)$ veya voltaj kontrollü kapasitör için $C = C(U)$ 'dır.

Şebeke, düğümler ve dallardan (yönlendirilmiş grafikler) oluşur ve topolojisi bir A matrisi ile gösterilebilir. A'nın (i,j) elemanı 1'dir. Eğer akım i. düğüm noktasından j. dala akarsa -1 dir. j. daldan i. düğüm noktasına akarsa 0 dır, i. düğüm noktasıyla j. dal ayrıkrsa . Böylece A büyük ve çok sıfırlıdır. u_N , bütün düğüm potansiyellerinin vektör fonksiyonu, u_B , dalpotansiyelleri ve i_B de daldaki akımlar olsun. Kirchoff kanunu $Ai_B = 0$ olduğunu ve Kirchoff'un voltaj kanunu

$$u_B = A^T u_N$$

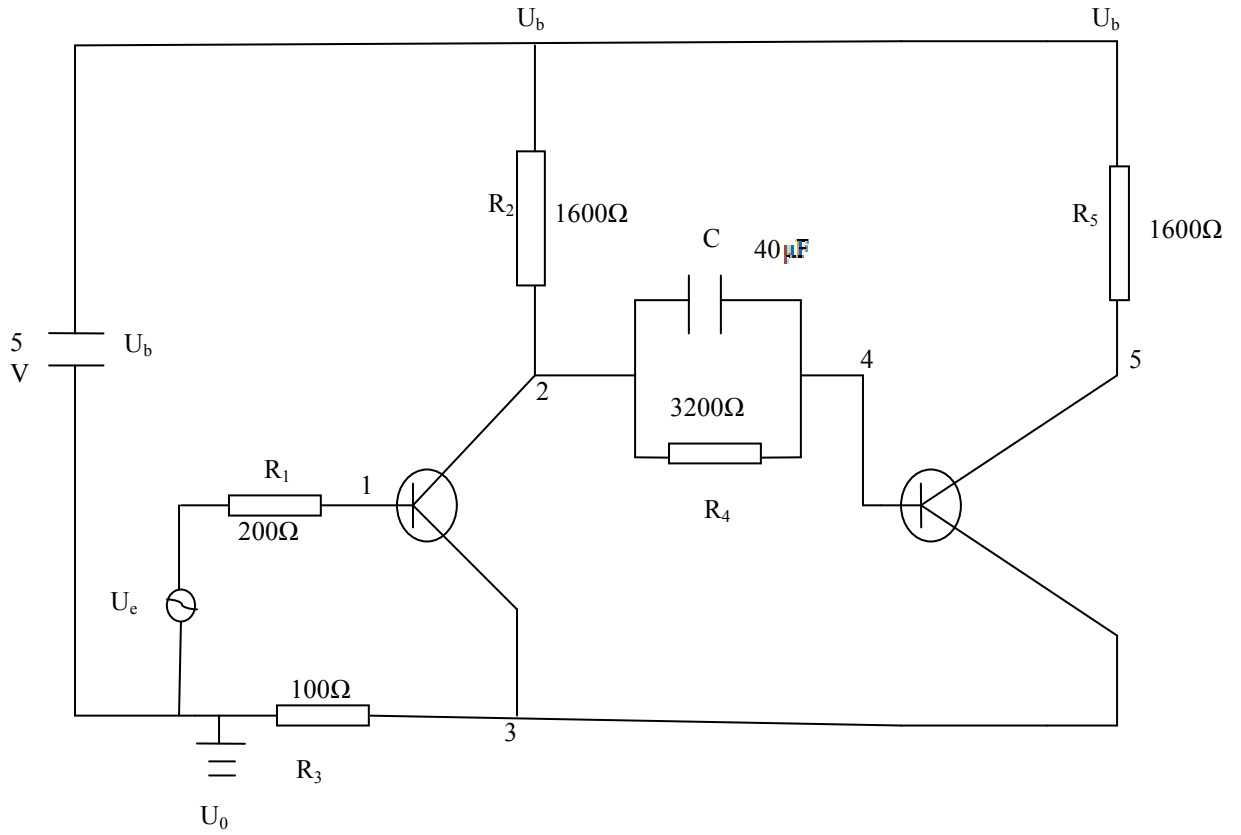
olduğunu söyler. Buna daha önce tanımlanan karakteristik eleman denklemleri eklenerek

$$\Phi(i_B, u_B, i'_B, u'_B) = 0 \quad (3.11)$$

formunda çok büyük çok sıfırlı DAE elde edilir.

Başlangıç değer ODE leri için çözümün varlığını, tekliğini ve başlangıç datalarının sürekli bağımlılığını teoremler garanti etmektedir. DAE ler için böyle bir garanti yoktur. Sınır değer DAE ler de sınır değer adi denklemlerden daha karmaşıktırlar.

Örnek 3.4.



Şekil 3.2. Basit bir elektrik devresi

Lineer direnç, kapasitör, voltaj kaynağı ve iki tane bipolar olmayan transistör içeren basit bir elektrik şebekesinin şeması şekilde gösterilmiştir. Direnç ve kapasitör, akımlar, voltaj ilişkileri bilindiği gibidir. Transistör ilişkileri lineer değildir.

$$U = U_B - U_E$$

ile ilişkilidir.

$$I_E = f(U) = \beta[e^{U/U_F} - 1],$$

$$I_C = -\alpha I_E,$$

$$I_B = (\alpha - 1)I_E,$$

5 noktada Kirchoff kanunlarını uygulayarak aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}
0 &= (U_1 - U_e) / R_1 - (\alpha - 1)f(U_1 - U_3), \\
C(U_2' - U_4') &= (U_b - U_2) / R_2 + (U_4 - U_2) / R_4 - \alpha f(U_1 - U_3), \\
0 &= (U_3 - U_0) / R_3 - f(U_1 - U_3) - f(U_4 - U_3), \\
C(U_4' - U_2') &= (\alpha - 1)f(U_4 - U_3) - (U_4 - U_2) / R_4, \\
0 &= (U_5 - U_b) / R_5 + \alpha f(U_5 - U_3).
\end{aligned}$$

$U_0 = 0$ (topraklama voltajı). $U_b = 5$, $U_e = 5 \sin(2000\pi t)$, $R_1 = 200$, $R_2 = 1600$, $R_3 = 100$, $R_4 = 3200$, $R_5 = 1600$, $C = 40e-6$ (potansiyeller volt cinsinden, dirençler ohm cinsinden, t ise saniyedir.)

Bu indeks-1 DAE sistemidir. $U_2 - U_4$ değişkeni türetilerek yarı-açık hale getirilebilir. Fakat kapalı formuyla Radau5 Kollakasyon formülleri direkt olarak uygulanabilir. 3 noktada Radau kollakasyonu uygulanırsa

$$My' = \overset{\square}{f}(t, y)$$

elde edilir.

Burada M matrisi şudur:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uygun başlangıç koşulları için $U_2(0)$ ve $U_4(0)$ serbesttirler. Diğerleri 4 cebirsel denklemden elde edilirler. (3 tanesi açıktır, 4, ise diğer iki denklemi toplayarak elde edilir. Uyumlu başlangıç koşulu ise

$$y(0) = (0, U_b, 0, 0, U_b)^T$$

olarak verilmelidir.

3.2. Özel DAE Formları

(3.1) genel DAE sistemi matematiksel anlamda iyi tanımlı olmayan problemler içerebildiği gibi problemler herhangi bir doğrudan ayrıklaştırma yönteminde (y ve y' nün yeniden formüle edilmeden diskritize edilen-ayrıklaştırılan denklemlere dayalı metodlar) başarısız olur. Maalesef pratikte karşılaşılan yüksek indeksli problemlerin çoğu kısıtlarla birleşmiş ODE'lerin daha kısıtlayıcı yapılarının kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Burada cebirsel ve diferansiyel değişkenler açıkça daha yüksek indeksli DAE'ler için tanımlanmış olmakla birlikte cebirsel değişkenlerin hepsi prensipte aynı sayıda diferansiyel işlemi ile yok edilebilen Hassenberg formları tanıtılacaktır.

Hassenberg indeks-1

$$x' = f(t, x, z) \quad (3.9a)$$

$$0 = g(t, x, z) \quad (3.9b)$$

Burada g_z jakobiyen matris fonksiyonunun her t için tekil olmadığı kabul edilmiştir. Buna ayrıca yarı-çık indeks-1 sistemi de denir. Yarı-açık indeks-1 DAE'ler kapalı ODE'lerle çok yakın ilişkilidir. Kapalı fonksiyon teoreminden prensip olarak (3.9b)'deki z , (3.9a)'da yerine konularak x cinsinden bir ODE elde edilebilir. Bununla birlikte teklik garanti edilemez. Çeşitli sebeplerden dolayı bu uygulama sayısal çözümler için tavsiye edilemez.

Hassenberg indeks-2

$$x' = f(t, x, z) \quad (3.10a)$$

$$0 = g(t, x) \quad (3.10b)$$

Burada g_x, f_z jakobiyenlerinin çarpımı her t için tekil olmayan (3.10b) kısıtlarında cebirsel z değişkeni yoktur.

Örnek 3.5.

Soyut indeks-2 sisteminin pratik bir örneği sıkıştırılmayan bir sıvının akış modelinde Navier-stokes denklemleriyle ortaya çıkar.

$$ut + uu_x + vu_y + p_x - \nu(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \quad (3.11a)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + p_y - \nu(v_{xx} + v_{yy}) = 0 \quad (3.11b)$$

$$u_x + v_y = 0 \quad (3.11c)$$

Burada alt indeksler x , y kısmi türevleri, t zamanı, u ve v sırasıyla x ve y yönlerindeki hızları, p skaler basınç ve ν viskoziteyi gösteriyor. (3.11a) ve (3.11b) momentum denklemleri ve (3.11c) ise sıkıştırılmazlık şartıdır. 3 boyutlu problemlere geçmek kolaydır. (3.15)'in bir sonlu fark, sonlu hacim, sonlu element metodlarından biriyle ayrıklaştırılması mümkündür. $y(t)$ ve $p(t)$ vektörlerinin yaklaşımları $(u(t,x,y))$, $v(t,x,y)$ ve $p(t,x,y)$ ye ilgili bölgede

$$Mu' + (K + N(u) + Cp = f \quad (3.12a)$$

$$C^T u = 0 \quad (3.12b)$$

denklemlerine dönüşür.

Bu DAE'de, M kütle matrisi, simetrik ve pozitif tanımlıdır. Ayrıklaştırmanın (3.12a) ve (3.12b)'de oluşan C matrisinin değil $C^T M^{-1} C$ 'nin de sınırlı tersi olan tekil olmayan matris olduğu kabul edilecek. Bu Hassenberg formunda bir indeks-2 DAE verir. Bu DAE M^{-1} ile çarpılarak yarı açık yapılabilir. Fakat katsayılar matrisinin fazla sıfırlılığı kaybolur. F kuvvet fonksiyonu sınır koşullarından gelir. İyi biliniyor ki (3.11)'deki basıncın hassas bir çözümünü elde etmek problemlidir. Genellikle bu değişken farklı bir ayrıklaştırma metoduyla muameleye tabi tutulur. (3.11c) zamana göre diferansiyellenerek ve (3.11a), (3.11b) yerine konularak p 'ye bağlı sağ tarafı u ve v 'nin fonksiyonu olan bir poisson denklemi oluşur. Bu denkleme basınç poisson denklemi de denir. Yukarıdaki $C^T M^{-1} C$ matrisi uygun sınır koşullarında Laplace operatörünün diskritizasyonu olarak görülebilir ve elde edilen sistem indeks-1 dir.

İndeks-2 değişkenlerine DAE'lerin yan koşullu optimizasyon problemleriyle yakın ilgisi gözlemlenerek bakılabilir. Bu bakış açısından (3.12)'deki p , Lagrange çarpanının yerini tutar. Yüksek mertebeden DAE'ler ve şartlı optimizasyon problemleri arasındaki bu ilişki tesadüf değildir. Bu DAE'lerin çoğu sıkıştırılmaz Novier-stokes denklemleri de dahil çeşitli kısıtlı varyasyonel problemlerde ortaya çıkar.

Örnek 3.6.

$$\begin{aligned} y' &= \lambda y_1 - y_4 \\ y_2' + y_3' &= (2\lambda - \sin^2 t)(y_2 + y_3) + 1/2(y_2 - y_3)^2 \\ 0 &= y_2 - y_3 - 2(\sin t)(y_1 - 1) \\ 0 &= y_2 + y_3 - 2(y_1 - 1)^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

DAE sistemi verilsin. Bu DAE'de, λ bir parametre ve $y_1(0) = 2$ ve $y_2(0) = 1$ olarak verilsin. Bu DAE yarı-açık formda değildir. Bununla birlikte kolayca sabit, tekil olmayan aşağıdaki dönüşümlerle

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3), \quad z_1 = \frac{1}{2}(y_2 - y_3), \quad z_2 = y_4$$

yarı-açık forma çevirilebilir.

$$x_1' = \lambda x_1 - z_2 \quad (3.14a)$$

$$x_2' = (2\lambda - \sin^2 t)x_2 + z_1^2 \quad (3.14b)$$

$$0 = z_1 - (\sin t)(x_1 - 1) \quad (3.14c)$$

$$0 = x_2 - (x_1 - 1)^2 \quad (3.14d)$$

(3.2)'deki DAE şimdi yarı-açık formdadır. Fakat bu Hassenberg formunda değildir. Özel olarak (3.14c)'den $z_1 = z_1(x)$ 'dir. Böylece z_2 indeks-1 cebirsel değişkenidir. Halbuki z_2 diferansiyel işlemi olmadan yok edilemez. (3.14d)'nin bir diferansiyelinin (3.14a)'da yerine konması verilen başlangıç şartları için z_2 'nin

sonradan yok edilebildiğini gösterir. Bu yüzden DAE'nin indeksi-2'dir ve z_2 indeks-2 cebirsel değişkenidir. Eğer z_1 için yerine koymaya devam edilirse sonuç DAE'si

$$\begin{aligned}x_1' &= \lambda x_1 - x_2 \\x_2' &= (2\lambda - \sin^2 t)x_2 + z_1^2 \\0 &= x_2 - (x_1 - 1)^2\end{aligned}\tag{3.15}$$

dir. Bu da Hassenberg formunda bir indeks-2 DAE'dir

Hassenberg indeks-3

$$x' = f(t, x, y, z)\tag{3.16a}$$

$$y' = g(t, x, y)\tag{3.16b}$$

$$0 = h(t, y)\tag{3.16c}$$

Burada 3 matris fonksiyonunun çarpımı $h_y g_x f_z$ tekil değildir.

Örnek 3. 7.

Örnek 3.6.'da tanımlanan holonomik kısıtlı mekanik sistemler Hassenberg indeks-3'tür. Bu tip DAE'ler sıklıkla 2.mertebe ODE konusunda çıkar.

Şüphesiz ODE'ler Newton'un 2. hareket kanununu tanımlar. İvme yolun 2. türevi olduğundan, kısıtlar iki diferansiyelin şartlı ODE'lerinin sistemine konacağını gösteren pozisyona konulur. Hassenberg formunda DAE'nin indeksi genel durumda olduğu gibi diferansiyel işlemi ile bulunur.

Örnek 3. 8.

Bu örnekte Hassenberg DAE'nin indeksinin değerini bulmak için basit sarkaç sistemi incelenecek. (Örnek 2.1'den kartezyen koordinatlardaki sarkaç). Pozisyon koordinatları için q ve $v = q'$ kullanılır. Önce DAE, 1.mertebe sistemi olarak aşağıdaki şekilde yazılır:

$$q_1' = v_1 \quad (3.17a)$$

$$q_2' = v_2 \quad (3.17b)$$

$$v_1' = -\lambda q_1 \quad (3.17c)$$

$$v_2' = -\lambda q_2 - g \quad (3.17d)$$

$$0 = q_1^2 + q_2^2 - 1 \quad (3.17e)$$

($\lambda = \lambda(t)$ bilinmeyen ve g bilinen sabit bir sayıdır.)

Bu durumda pozisyon kısıtları (3.17e) bir kez diferansiyellenerek

$$q_1 q_1' + q_2 q_2' = 0$$

elde edilir. (3.17a) ve (3.17b) 'deki q' ifadeleri yerine konularak

$$q^T v = q_1 v_1 + q_2 v_2 = 0 \quad (3.18)$$

elde edilir.

(3.17c) ve (3.17d)'deki v' yerine yazılarak ve pozisyon(yol) şartları basitleştirilerek hız yan koşulları şu şekilde elde edilir:

$$-\lambda - q_2 g + v_1^2 + v_2^2 = 0 \quad (3.19)$$

Bu, q ve v için bir ODE elde etmek üzere (3.17c) ve (3.17d)'de yerine konulacak olan λ 'yı verir. Bütün bilinmeyenler için bir diferansiyel denklem elde etmek üzere

(3.19) bir kere daha diferansiyellenerek λ için bir ODE elde edilir. Açık bir ODE sistemi elde etme sürecinde yol kısıtlamaları 3 kez diferansiyellendi. Bu yüzden bu sistemin indeksi 3'tür. Uygun sayısal metotlar bulmak ve inşa etmek amacıyla DAE'leri sınıflandırmak için indeksin kullanışlı bir kavram olduğu kanıtlanmıştır. İndeksi bulmak için diferansiyel alma işlemi çoğu zaman gerekli değildir. Çünkü fiziksel sistemlerin çoğu Hassenberg yapılarının ya da Hassenberg yapılarının basit kombinasyonlarının sonucu olarak kolayca görülebilir.

3.3. Cebirsel Diferansiyel Denklemlerin Stabilitesi

Örnek 3.2 gösteriyor ki indeks yerel bir kavramdır. Her bir ayrık gerçek çözüm için farklılaşır. Bundan sonra lineer DAE'lerdeki küçük değişmeler-pertürbeler göz önüne alınacak ve indeksle stabilite arasındaki ilişkiler incelenecek. Lineer olmayan sistemler için gerçek çözümlere ait varyasyonel problemler ve bunların pertürbasyonları oluşturulur. Bu lineer problemlerin indeksini yerel olarak tarif ederek lineer olmayan problemlerin yerel indeksleri tanımlanır.

Lineer problemlerdeki hedef problemin verilen dataları cinsinden çözümlere sınırlamalar getirmektir. Aynı sınırlamalar pertürbasyonlarda da yapılmalıdır.

$$y' = A(t) + q(t), \quad 0 < t < b$$

Lineer ODE sistemi homojen başlangıç ve sınır koşulları altında verilsin. $\tau = t/b$ dönüşümü ile $b=1$ olur.

Diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi aşağıdaki stabilite sınırlaması doğrudur:

$$\|y\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |y(t)| \leq \kappa \int_0^1 |q(s)| ds = \kappa \|q\|$$

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bz + q_1(t) \\ 0 &= Cx + Dz + q_2(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Yukarıdaki yarı-açık indeks-1 DAE'de A, B, C, D, E sınırlı fonksiyonlardır ve D sınırlı terse sahiptir.

$$\|y\| \leq \kappa \|q\|$$

Burada κ stabilite sabitidir. D fonksiyonun sınırlı tersinin varlığına bağlıdır. İndeks-1 genel DAE için

$$E(t)y' = A(t)y + q(t)$$

elde edilir. Homojen başlangıç ve sınır koşulları altında $E(t)$ fonksiyonu şöyle parçalanabilir:

$$E(t) = S(t) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}(t)$$

Burada T ve S tekil olmayan matris fonksiyonlarıdır ve sınırlı kondisyon sayılarına sahiptir. Burada

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = T^{-1}y$$

dönüşümü yapılırsa DAE yarı-açık forma indirgenir.

Böylece ,

$$\|y\| \leq \kappa \|q\|$$

geçerli olur. Kısaca lineer indeks-1 problemleri için

1. Türev almaksızın yarı-açık forma indirgenebilir. Burada cebirsel değişkenler yok edilerek ODE elde edilir.
2. Dönüşümler iyi şartlı olmalıdırlar.
3. Elde edilen ODE problemleri stabildirler.

Bu şartlarda indeks-1 DAE problemleri de stabildirler.

Yüksek indeksli problemler için denklemlerden bazılarının diferansiyeli alınmalıdır. İndeks-p DAE için (p-1) tane diferansiyellemeye ihtiyaç vardır. Bunun sonucunda indeks-1 sistemi elde edilir. Böylece ümit edilen stabilite formu şu şekildedir:

$$\|y\| \leq \kappa \sum_{j=1}^p \|q^{(j-1)}\|$$

3.4. İndeks İndirgemesi ve Stabilizasyonu

Bu bölümde yüksek mertebeden ve yarı-açık DAE'leri yeniden formüle etmek için bir teknik verilecek. Buradaki esas kavram DAE'leri değişmez adi diferansiyel denklemlere dönüştürmektir. (p+1) indeksli Hassenberg formundaki DAE, m tane adi diferansiyel denklem ve l tane kısıtlamalara sahip olsun. Cebirsel değişkenleri yok etmek için p defa diferansiyellemeye ihtiyaç vardır. Burada kapalı formda m boyutunda bir ODE elde edilir.

$$0 = g(t, x, z)$$

Denklemleri ve (p-l) tane türevi ile beraber z(t) yok edilebilir. p ve l cebirsel koşul ile değişmez bir küme tarif edilir. Bu cebirsel kısıtlamalar kullanılarak m-pl tane bilinmeyenli daha küçük bir küme yazılabilir. Bu manifoldlar üzerinde ODE demektir. Kısıtlamaların manifoldu pl boyutludur. Tüm sistemin gerçek boyutu ise m-pl' dir.

3.5. Genelleştirilmiş Koordinatlar

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$$

Genelleştirilmiş koordinatları kullanılarak çeşitli cisimlerin hareketleri

$$g_j(t, q(t)) = 0 \quad j=1,2,\dots,m$$

kısıtlarıyla

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i=1,2,\dots,n$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada

$$L = T - U - \sum \lambda_i g_i$$

Lagrancian, T kinetik enerji, U potansiyel enerjidir.

Sonuçta hareket denklemleri:

$$\begin{aligned} q' &= v \\ M(t, q)v' &= f(t, q, v) - G^T(t, q)\lambda \\ 0 &= g(t, q) \end{aligned}$$

olarak verilir. Burada

$$G = \frac{\partial g}{\partial q}$$

dir. M, pozitif tanımlı kütle matrisi, f dış kuvvet, v genelleştirilmiş hızdır. Sistemin boyutu $n \times m$ dir.

Örnek 3. 9.

Birim uzunlukta, yay sabiti ε^{-1} , $\varepsilon > 0$ olan sarkaç çubuğu yerine yay sistemi verilen bir problem ele alınsın.

$$e(q, v) = \frac{1}{2}[v^T v + \varepsilon^{-1}(r-1)^2 q^2] + gq_2$$

Sistemdeki potansiyel ve kinetik enerjilerin toplamı,

$$q = (q_1, q_2)^T$$

kartezyen koordinatlar,

$$v = (v_1, v_2)^T$$

hızlar,

$$r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$$

yayın verilen boyu ve g yerçekimi ivmesi olmak üzere

$$\begin{aligned} q' &= e_v = v, \\ v' &= -e_q = -\varepsilon^{-1} \frac{r-1}{r} q - \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ifadesi bir ODE'dir.

Aynı sistem

$$\lambda = \varepsilon^{-1}(r-1)$$

tanımlayarak

$$q'' = -\frac{1}{r}q\lambda - \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon\lambda = r - 1$$

şeklinde bir DAE olarak yazılır. Bu DAE yarı-açık indeks-1 DAE'dir.

Yay çok sert olduğunda ne olur? Bu durumda yayın hızlı bir şekilde sallanması beklenir.

Başlangıç koşullarında

$$r(t) = 1 + O(\varepsilon)$$

olur ve indeks bu formülasyondaki şart denklemini dengeleyen

$$\lambda(t) = O(1)$$

olmalıdır. Böylece

$$q'' = -q\lambda - \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$0 = r - 1$$

Örnek 2.1 deki basit sarkacın denklemlerini veren yukarıdaki DAE elde edilir. Bu Hassenberg formunda bir indeks-3 DAE'dir. ODE çözümünün aksine DAE çözümü yavaş değişir.

BÖLÜM 4. CEBİRSEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

DAE'nin sayısal çözümü için iki sınıf metot vardır:

1. Verilen sistemin doğrudan ayrıklaştırılması
2. Yeniden formüle ederek diskritize etme(Mesela indeks indirgeme)

Doğrudan ayrıklaştırma indeks-1 sistemlerine daha uygundur. Fakat karşılaşılan DAE'lerin indeksi 1 olabildiği gibi yüksek indeksli de olabilir. İki'den daha fazla indekse sahip olan DAE'lerin sayısal çözümleri için indeks indirgeme metodunun kullanılması daha uygun olmaktadır. Ayrıca yüksek indeksli DAE'ler Hessenberg sistemlerinin basit bileşimleri olarak ifade edilebilirler.En kötü haller aşağıda verilecek örneklerde anlatılacaktır. Doğrudan sayısal ODE yaklaşımlar bazen bu problemler için çalışmayabilir. Burada genellikle iki sınıf problem göz önüne alınacak.

Tam kapalı indeks-1 DAE nin genel formu:

$$0 = F(t, y, y') \quad (4.1)$$

İndeks-2 DAE , Hessenberg formu ile:

$$x' = f(t, x, z) \quad (4.2a)$$

$$0 = g(t, x, z) \quad (4.2b)$$

Yarı açık indeks-2 DAE'leri , tam kapalı indeks-1 DAE'lere denktirler.

4.1. Doğrudan Ayrıklaştırma Metodları

Bu metodu anlatmak için

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, z) \\ \varepsilon z' &= g(t, x, z) & 1 \\ 0 \leq \varepsilon &\leq 1 & 2 \end{aligned}$$

tekil sisteminin regülarizasyonu göz önüne alınacak. 2 denkleminin yerine $\varepsilon = 0$ alınarak

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, z) \\ 0 &= g(t, x, z) \end{aligned} \quad (4.3)$$

bulunur. Bu bilinen bir DAE formudur.

Eğer tekil bir DAE oluşması halinde çok katı-stiff bir ODE sistemi elde edilir. Bu halde çözüm için uygun bir ODE çözüm sistemi seçilmelidir.

Regülerize edilmiş bir ODE çok katı olduğu için katı ODE'ler için kullanılan metotlar tercih edilir.

ODE ayrıklaştırması katılığın düşmesi halinde çok kullanışlıdır.

Bundan sonra BDF metodu ve Radau kollokasyon metodu verilecek. Bunlardan önce basit bir metot olan Geri-fark Euler metodu verilecek.

4.2. Geri-Fark Euler Metodu

$$0 = F(t, y, y')$$

Yukarıdaki DAE doğrudan ayrıklaştırma, y ve y' için çok adımlı metotlar veya Runge-Kutta ayrıklaştırma formülleri ile ayrıklaştırılır. Mesela Geri-fark Euler metodu kullanılırsa yukarıdaki DAE şu şekilde yazılabilir:

$$0 = F(t_n, y_n, \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}) \quad (4.4)$$

Bu genelde her bir adımda y_n ayrık bilinmeyenleri için lineer olmayan denklem sistemidir.

Geri-fark Euler metodu genellikle indeksi 1 olan DAE'lerin çözümü için uygundur. Ancak yüksek indeksli DAE'lerin çözümü için uygun olmayabilir.

Örnek 4.1.

η parametresine bağlı bir indeks-2 DAE

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \eta t \end{pmatrix} y' + \begin{pmatrix} 1 & \eta t \\ 0 & 1 + \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

şeklinde veriliyor. Bu DAE'nin gerçek çözümü şudur:

$$y_1(t) = q(t) + \eta t q(t), \quad y_2(t) = -q'(t)$$

η 'nin normal değerlerinde problem stabildir, fakat $\eta = -1$ olunca çözüm yoktur. Geri-fark Euler metodu $\eta < -0.5$ ise stabil değildir.

$$u = y_1 + \eta t y_2, \quad v = y_2$$

olarak tanımlanırsa problem

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -\eta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$u' + v = 0, \quad u = q(t)$$

halini alır. Geri-fark Euler metodu ile problem

$$u_n = q(t_n), \quad v_n = \frac{q(t_n) - u_{n-1}}{h_n}$$

olur. $u_0 = q(0)$ başlangıç değeri ile yola çıkılırsa

$$v_n = -q'(t_n) + O(h)$$

bulunur. (4.5)'de doğrudan Euler yazılırsa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \eta t_n \end{pmatrix} \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + \begin{pmatrix} 1 & \eta t_n \\ 0 & 1 + \eta \end{pmatrix} y_n = \begin{pmatrix} q(t_n) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \eta t_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_n$$

elde edilir.

Buradan da

$$u_n = q(t_n), \quad (1 + \eta)v_n = (q(t_n) - q(t_{n-1})) / h$$

elde edilir.

Yarı açık formlar dönüşüm yapılarak y vektörü diferansiyel ve cebirsel değişkenlerine ayrılır. Fakat genel olarak yüksek indeksli DAE'lerde bu ayırım tavsiye edilmemektedir.

En basit yarı-açık indeks-1 lineer olmayan DAE

$$x' = f(t, x, z) \quad (4.6a)$$

$$0 = g(t, x, z) \quad (4.6b)$$

formundadır. Burada g_z tekil değildir. Geri-fark Euler metodu aynen ODE'de olduğu gibi bütün özelliklerini korur(mertebe,stabillik ve yakınsama,...vb.). Kapalı fonksiyon teoreminden

$$z = \tilde{g}(t, x)$$

çözülebilir ise bu alınıp (2.7a)'da yerine yazılırsa aşağıdaki ODE elde edilir.

$$x' = f(t, x, \tilde{g}(t, x)) \quad (4.7)$$

Yukarıdaki denkleme Geri-fark Euler metodu uygulanırsa

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h_n} = f(t_n, x_n, z_n) \quad (4.8a)$$

$$0 = g(t_n, x_n, z_n) \quad (4.8b)$$

şeklinde ayrışır.

z ikinci denklemden tek türlü çözülürse

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h_n} = f(t_n, y_n, z_n) \quad (4.9)$$

olur. Bu da yukarıdaki cebirsel denkleme denktir. Stiff olmayan halde Geri-fark Euler metodu yarı-açık indeks-1 DAE'ler için 1. mertebeden hassas, stabil ve yakınsaktır. Tam kapalı indeks-1 DAE'ler için yakınsaklık analizi biraz karışıktır.

Lineer olmayan

$$0 = F\left(t_n, y_n, \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$$

kapalı denklemden y_n bilinmeyenleri Newton ardışık yaklaşımlar metodu y_n^0 yaklaşımı ile başlayarak (v+1). adımda

$$y_n^{v+1} = y_n^v - \left(\frac{1}{h_n} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} \cdot F\left(t_n, y_n^v, \frac{y_n^v - y_{n-1}}{h_n}\right) \quad (4.10)$$

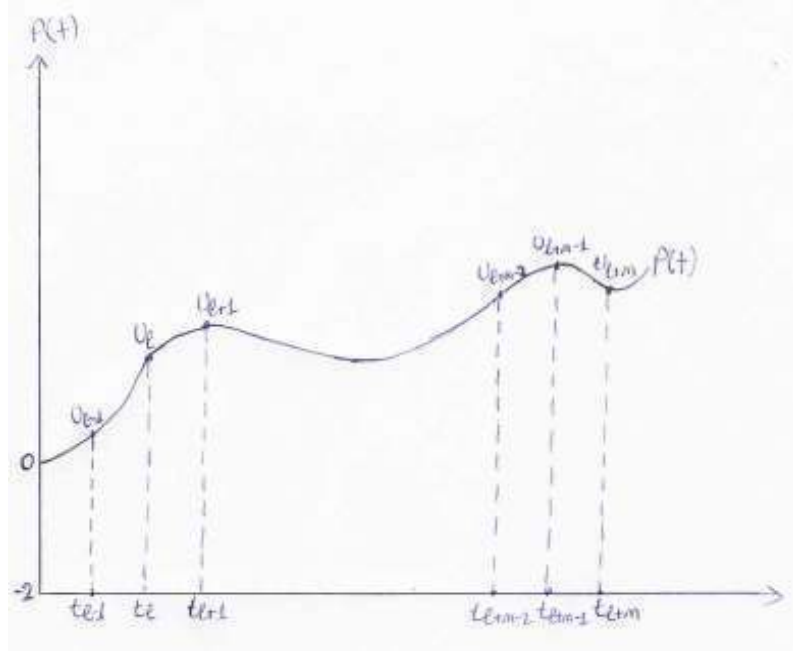
formülüyle hesaplanırlar.

4.3. BDF Metodu

m adımlı BDF metodu için $m \geq 1$ olsun. $l = 0, 1, \dots, n - m$ aralığında değişsin.

$$u_j \approx y(t_j) , j = l, l+1, \dots, l+m-1$$

olsun.



Şekil 4.1. İnterpolasyon Polinomu ve t_{l+m} 'deki Türevini Hesabı

Burada

$$u_{l+m} \approx y(t_{l+m})$$

olsun. $P(t_j)$ interpolasyon polinomu,

$$P(t_j) = u_j, j=1, l+1, \dots, l+m, p \in \prod_m^N$$

koşullarıyla hesaplanır. Bunun türevi alınarak

$$P'(t_{l+m}) = f_{l+m} \text{ ile } f_{l+m} := f(t_{l+m}, u_{l+m})$$

bulunur.

Lemma: $r+1$ eşit mesafeli $x_l = x_0 + lh$, $h>0$ artış miktarı, $l=0,1,2,\dots,r$ noktaları ve $g_0, \dots, g_r \in R$ değerleri verilsin. Geri fark formülleri vasıtasıyla interpolasyon polinomu

$$P(x_r, sh) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k g_r, \quad s \in R$$

$$\binom{-s}{k} = \frac{(-s)(-s-1)\dots(-s-k-1)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!} s(s+1)\dots(s+k-1)$$

olarak verilir.

$$\nabla^k g_i = \nabla^{k-1} g_i - \nabla^{k-1} g_{i-1}$$

olmak üzere geri fark tablosu aşağıdaki şekildedir:

Tablo 4.1. Geri-fark Tablosu

x	$g(x)$	∇'_g				
x_0	g_0	$\nabla'g_0$				
x_1	g_1	$\nabla'g_1$	$\nabla^2 g_1$			
x_2	g_2	$\nabla'g_2$	$\nabla^2 g_2$	$\nabla^3 g_2$		
$x_i = x_0 + lh$						
x_r	g_r	$\nabla'g_r$	$\nabla^2 g_r$		$\nabla^{r-1} g_r$	$\nabla^r g_r$

$\nabla^k g_r$ yerine

$$\nabla^k g_r = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} g_{r-j}, \quad 0 \leq k \leq v \leq r$$

yazılırsa m adımlı BDF metodu

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \nabla^k u_{l+m} = hf_{l+m}$$

olur. Burada $\nabla^k u_{l+m}$ yerine

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} u_{l+m-j}$$

yazılırsa

$$\sum_{j=0}^m \left[(-1)^j \sum_{k=\max(j,1)}^m \frac{1}{k} \binom{k}{j} \right] u_{l+m-j} = hf_{l+m}$$

olur. Burada

$$\alpha_m = \sum_{j=0}^m \left[(-1)^j \sum_{k=\max(j,1)}^m \frac{1}{k} \binom{k}{j} \right] u_{l+m-j}$$

yazılırsa bu ifade $\alpha_0 = 1$ için

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i u_{l+m-1} = h\beta_0 f_{l+m}$$

şeklinde yazılabilir.

Örneğin $m=2$ için formül

$$\sum_{j=0}^2 \left[(-1)^j \sum_{k=\max(j,1)}^m \frac{1}{k} \binom{k}{j} \right] u_{l+2-j}$$

olur. Buradan $j = 0$ için

$$\frac{3}{2} u_{l+2}$$

$j = 1$ için

$$-2u_{l+1}$$

$j = 2$ için

$$\frac{1}{2} u_l$$

bulunur. Böylece $m = 2$ için

$$\frac{1}{2} (3u_{l+2} - 4u_{l+1} + u_l) = hf_{l+2}$$

olur. Aynı yöntemle 6. mertebeye kadar BDF metodu için aşağıdaki katsayılar tablasu elde edilir:

Tablo 4.2. 6. Mertebeye kadar BDF metodları için katsayılar

p	k	β_0	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
1	1	1	1	-1					
2	2	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$				
3	3	$\frac{6}{11}$	1	$-\frac{18}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{2}{11}$			
4	4	$\frac{12}{25}$	1	$-\frac{48}{25}$	$\frac{36}{25}$	$-\frac{16}{25}$	$\frac{3}{25}$		
5	5	$\frac{60}{137}$	1	$-\frac{300}{137}$	$\frac{300}{137}$	$-\frac{200}{137}$	$\frac{75}{137}$	$-\frac{12}{137}$	
6	6	$\frac{60}{147}$	1	$-\frac{360}{147}$	$\frac{450}{147}$	$-\frac{400}{147}$	$\frac{225}{147}$	$-\frac{72}{147}$	$\frac{10}{147}$

4.4. Radau Kollasyonu ve Kapalı Runge-Kutta Metotları

Tam kapalı indeksi -1 DAE

$$0 = f(t, y, y')$$

şeklinde. s adımlı kapalı Runge-Kutta Metotları genel lineer olmayan DAE'lere aşağıdaki şekilde uygulanır:

$$0 = f(t_i, Y_i, K_i)$$

$$t_i = t_{n-1} + c_i h, \quad i=1,2,\dots,s$$

$$y_i = y_{n-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j,$$

$$\text{ve } y_n = y_{n-1} + h \sum_{i=1}^s b_i K_i$$

Burada $A=(a_{ij})$ matrisinin katsayıları tekil değildir.

Yarı açık indeks-2 DAE

$$\begin{aligned} 0 &= g(t, x, z) \\ x' &= f(t, x, z) \end{aligned}$$

şeklindedir. Yukarıdaki formüller bu tip DAE'lerde

$$\begin{aligned} K_i &= f(t_i, x_i, z_i) \\ x_i &= x_{n-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j \\ 0 &= g(t_i, x_i, z_i) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada cebirsel değişken z daha kolay elde edilebilir.

Bazı hallerde merteye indirgemeye karşılaşılabılır. Aşağıdaki adi denkleme olduğu gibi

$$\begin{aligned} \varepsilon z' &= -z + q(t) \\ \varepsilon \rightarrow 0 \quad 0 &= -z + q(t) \end{aligned}$$

olur. Buna da s adımlı Runge-Kutta metotları tekil olmayan A matrisiyle uygulanabilir.

Bir Runge-Kutta metodu eğer yerel kesme hatasının minimumu r ise buna her bir adımda r mertebeden olan Runge-Kutta metodu denir. s kademeli kollakasyon metodlarında merteye s, köşegensel Runge-Kutta (DIRK) metodlarında seviye mertebesi 1'dir.

4.5. Pratik Bazı Zorluklar

Burada DAE'lerin çözümlerinde ortaya çıkan bazı zorlukları verilecek. Bunlardan bir tanesi uyumlu başlangıç koşulları kümesinin elde edilmesidir.

Pratikte ODE ile DAE çözümlenmesinde en önemli fark DAE sistemleri uyumlu bir başlangıç şartlar kümesiyle başlama mecburiyetindedir. DAE'de verilen kısıtlar ve mümkün bazı gizli kısıtlar başlangıç noktasında uygun olarak sağlanmalıdırlar. 2 tip temel başlangıç problemi vardır. Bunlardan 1.'si yeterli bilgi olmaması halidir, 2.'si ise ya fazla bilgilendirme vardır ya da doğru olmayan bilgilendirme vardır.

Aşağıdaki örnekle 1. durum anlaşılabilir.

$$\begin{aligned}x' &= f(t,x,z) \\ 0 &= g(t,x,z) \\ x(0) &= x_0 \text{ verilsin.}\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklem vasıtasıyla y, z olmaksızın $x'(0)$ değeri belirlenebilir. Bu x'_0 ile gösterilsin. Bu bilgiler Newton iterasyonu için başlangıç tahminlerinde kullanılabilir. Bu DAE'yi çözebilmek için z_0 değerine de ihtiyaç vardır.

$t=0$ da z_1 değerini hesaplamak için ve $x'_0 = f(0, x_0, z_0)$ 'dan x' değerini bulmak için buna ihtiyaç vardır.

$$0 = g(0, x_0, z_0)$$

genelde lineer olmayan denkleminde z_0 çözülür. Üstüne üstlük lineer olmayan bu denklemlerin çözümlerinden birden fazla çözüm çıkarılabilir.

Buradan da anlaşılıyor ki indeksi 1 olan DAE'ler bu haldedir ve cebirsel değişkenler birbirinden ayrılamazlar. Bu halde uyumlu başlangıç koşullarını belirlemek daha

zordur. Bu halde bazı bilgiler DAE sistemlerine dışarıdan eklenmelidir. Birkaç örnekle bu durum anlatılacaktır.

Örnek 4.2.

Yarı açık bir indeks-1 DAE

$$\begin{aligned} u'' &= -(u+v)/2 + q_1(t) \\ 0 &= (u-v)/2 - q_2(t) \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. u_0 belli ise

$$v_0 = v_0 - 2q_2(0)$$

olarak hesaplanır. u'_0 de

$$-(u_0 + v_0)/2 + q_1(0)$$

olarak belirlenir.

Aynı problem $u = y_1 + y_2$ ve $v = y_1 - y_2$ dönüşümü yapılırsa aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\begin{aligned} y_1' + y_2' + y_1 &= q_1(t) \\ y_2 &= q_2(t) \end{aligned}$$

Bu DAE'de y_1 ve y_2 çözümlerini ayrı ayrı elde edebilmek için $y_1(0)$ ve $y_2(0)$ değerleri keyfi olarak verilemez.

$$y_2(0) = q_2(0)$$

olmalıdır.

Ayrıca

$$y_1(0) + y_2(0)$$

da belirlenmelidir.

$y_1(0)$ 'ın bilinmesi ile diğerlerinin belirlenmesi mümkün değildir. Buna mukabil

$$y_1'(0) + y_2'(0) = q_1(0) - y_1(0)$$

olur. $y_1(0)$ ve $y_2(0)$ 'ı ayrı ayrı bulmak için yan şart kısıtının türevinin hesaplanması gerekir. Yani

$$y_2'(t_0) = q_2'(t_0)$$

olarak alınmalıdır. Bu durum daha yüksek indeksli problemlerde daha karışık bir hal alabilmektedir. Yüksek indeksli DAE'lerde esas kısıtların yanında gizli kısıtlar da oluşabilmektedir.

Örnek 4.3.

Kartezyen koordinatlardaki basit sarkacın hareketi aşağıdaki DAE ile verilsin.

$$q_1' = v_1 \quad (a)$$

$$q_2' = v_2 \quad (b)$$

$$V_2' = -\lambda q_1 \quad (c)$$

$$V_2' = -\lambda q_2 - g \quad (d)$$

$$0 = q_1^2 + q_2^2 - 1 \quad (e)$$

$$q_1 v_1 + q_2 v_2 = 0 \quad (f)$$

Burada q' lar yer koordinatlarını, $v = q'$ ler de hızları belirlemektedir.

$q(0)$ keyfi olarak verilemez.

Eğer $q_1(0)$ belli ise

$$q_2(0) = \pm \sqrt{1 - q_1^2(0)}$$

olur. Böylece işareti farklı 2 değer bulunur. Yan koşulun 1. türevinin alınmasıyla elde edilen bu ifade (gizli koşul) $v(0)$ 'ın verilmesiyle belirlenir. Yani $q(0)$ ve $v(0)$, (e) ve (f) koşullarını sağlamalıdır. Bunlara göre $q'(0)$, (a) ve (b) denklemlerinden belirlenir ve daha sonrada $\lambda(0)$

$$-\lambda - q_2 g + v_1^2 + v_2^2 = 0$$

den belirlenir.

Son olarak da $v'(0)$, (c) ve (d)'den bulunur.

Burada

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

dir.

Not : Uyumlu bir başlangıç değerler kümesi ile denklem takımı çözmek için graph-teori algoritması kullanılarak optimum küme elde edilmektedir. Bu mümkün olmazsa bütün alternatif halleri içeren başlangıç koşulları oluşturulur.

4.6. Kötü Koşullu İterasyon Matrisi

Bir lineer olmayan sistem Newton iterasyonları ile çözüldüğünde indeks -1 ve indeks 2 sistemleri için aşağıdaki şekilde bir zorluk ortaya çıkmaktadır.

$$\begin{aligned}x' &= f(t,x,z) \\ 0 &= g(t,x,z)\end{aligned}$$

Bu sisteme Geri-fark Euler metodu uygulandığında iterasyon matrisi şudur:

$$\begin{pmatrix} h_n^{-1}I - f_x & -f_z \\ -g_x & -g_z \end{pmatrix}$$

Bu matris ODE'de $h_n \rightarrow 0$ iterasyon matrisi birim matrise dönüşür. İndeks -1 ve Hessenberg DAE'lerde ise iterasyon matrisinin kondisyon sayısı p sistemin indeksi ise $O(h_n^{-p})$ 'dir. $p=1$ ise yukarıda olduğu gibi $O(h_n^{-1})$ 'dir. h_n çok küçükse Newton iterasyonu yanlış sonuç verir. Bunun üstesinden gelmek için kısıtlar $\frac{1}{h_n}$ den bağımsız yapılır.

4.7. İndeks 2 DAE ler İçin Hata Tahmini

Her bir adımda çözüm değişkenlerinin ağırlıklı normları kullanılarak hata tahminleri yapılır. Bu tip hata tahminleri tam kapalı indeks -1 problemleri için kullanılır. Fakat indeks -2 DAE'ler için uygun değildir.

Örnek 4.4.

$$\begin{aligned}y_1 &= q(t) \\ y_2 &= y_1'\end{aligned}$$

İndeksi 2 olan DAE verilsin. Bu DAE Geri-fark Euler'le çözülsün

$$y_{1,n} = q(t_n)$$

$$y_{2,n} = \frac{y_{1,n} - y_{1,n-1}}{h_n} = \frac{q(t_n) - q(t_{n-1})}{h_n}$$

olur. Kesme hatası 2 bölünmüş farkla verilir. Buna göre cebirsel değişken y_2 'deki kesme hatası

$$\text{Tahmin} = h_n (h_n + h_{n-1}) [y_{2,n}, y_{2,n-1}, y_{2,n-2}]$$

$$= h_n (h_n + h_{n-1}) \left(\frac{\frac{y_{2,n} - y_{2,n-1}}{h_n} - \frac{y_{2,n-1} - y_{2,n-2}}{h_{n-1}}}{h_n} \right)$$

$$= h_n \left(\frac{\frac{q(t_n) - q(t_{n-1})}{h_n} - \frac{q(t_{n-1}) - q(t_{n-2})}{h_{n-1}}}{h_n} \right)$$

$$= \left(\frac{\frac{q(t_{n-1}) - q(t_{n-2})}{h_{n-1}} - \frac{q(t_{n-2}) - q(t_{n-3})}{h_{n-2}}}{h_{n-1}} \right)$$

$$\lim_{h_n \rightarrow 0} \text{Tahmin} = \lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{q(t_n) - q(t_{n-1})}{h_n} - \frac{q(t_{n-1}) - q(t_{n-2})}{h_{n-1}}$$

$$= q'(t_{n-1}) - \frac{q(t_{n-1}) - q(t_{n-2})}{h_{n-1}}$$

olur. Bu ifade sıfır değildir. y_2 'deki yaklaşım böylelikle hataların birikmesine sebep olacaktır. Bu gibi hallerde indeks indirgenmesine başvurulabilir fakat bu da bazı problemlerde çare olmamaktadır.

Örnek: 4.5.

$$0 \leq t \leq 1$$

$$x_1'(t) = (t-2)\lambda z + q_1(t)$$

$$x_2'(t) = (\lambda-1)z + q_2(t)$$

$$0 = (t+2)x_1 + (t^2-4)x_2 + r(t)$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1$$

$$q_1(t) = (1-\lambda)e^t, \quad q_2(t) = \left(1 + \frac{\lambda-1}{2-t}\right)e^t, \quad r(t) = -(t^2+t-2)e^t$$

olmak üzere DAE probleminin çözümü.

Çözüm: $z = y'$ kabul edilirse indeks 1'e düşer. Bu durumda gerçek çözüm şu şekildedir:

$$x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = e^t, \quad y(t) = \frac{e^t}{2-t}$$

Metod : $y = y_0 + ex$ olmak üzere 1. dereceden yaklaşım yapılırsa

$$x_1(t) = x_{0,1} + e_1 t \Rightarrow x_1(t) = 1 + e_1 t$$

$$x_2(t) = x_{0,2} + e_2 t \Rightarrow x_2(t) = 1 + e_2 t$$

$$y(t) = y_0 + e_3 t \Rightarrow y(t) = e_3 t$$

elde edilir. Burada t' 'ye göre türev alınırsa

$$x_1'(t) = e_1$$

$$x_2'(t) = e_2$$

$$y'(t) = e_3$$

$$e_1 = (t-2)10e_3 - 9e^t$$

$$e_2 = 9e_3 + \left(1 + \frac{9}{2-t}\right)e^t$$

$$0 = (t+2)e_1 + (t^2-4)e_2 - (t^2+t-2)e^t$$

elde edilir.

$$e_1 + 20e_3 + 9e^t - 10te_3 = 0$$

eşitliğinde

$$e^t = 1 + t$$

yazılırsa ve

$$e_1 + 20e_3 + 9 + 9t - 10te_3 = 0$$

ifadesinde $t=0$ alınır

$$e_1 + 20e_3 + 9 = 0$$

olur.

$$e_2 - 9e_3 - (1+t)\left(1 + \frac{9}{2-t}\right) = 0$$

eşitliğinde $t = 0$ alınır

$$e_2 - 9e_3 - \frac{11}{2} = 0$$

olur.

$$0 = (t+2)e_1 + (t^2 - 4)e_2 - (t^2 + t - 2)e^t$$

ifadesi açılırsa

$$te_1 + 2e_1 + t^2e_2 - 4e_2 - t^2 - t^3 - t - t^2 + 2 + 2t = 0$$

elde edilir ve bu denklemden $t = 0$ alınır

$$2e_1 - 4e_2 + 2 = 0$$

olur. Bulunan değerler alt alta yazılırsa

$$\begin{aligned} e_1 + 20e_3 + 9 &= 0 & e_1 + 20e_3 &= -9 \\ e_2 - 9e_3 - \frac{11}{2} &= 0 & e_2 - 9e_3 &= \frac{11}{2} \\ 2e_1 - 4e_2 + 2 &= 0 & 2e_1 - 4e_2 &= -2 \end{aligned}$$

olur ve buradan da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & -9 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ \frac{11}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikten de

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

bulunur. Böylece sistemin çözümü

$$x_1(t) = 1 + t, \quad x_2(t) = 1 + t, \quad y(t) = -\frac{t}{2}$$

olur. Bulunan çözüme $e_1 t^2$, $e_2 t^2$ ve $e_3 t^2$ eklenirse

$$x_1(t) = 1 + t + e_1 t^2$$

$$x_2(t) = 1 + t + e_2 t^2$$

$$y(t) = -\frac{t}{2} + e_3 t^2$$

elde edilir. Bu yeni 2. çözümleri teklif edilerek çözüme devam edilirse

$$(14 + 2e_1 + 40e_3)t + Q(t^2) = 0$$

$$\left(-\frac{31}{4} + 2e_2 - 18e_3\right)t^2 + Q(t^2) = 0$$

$$(1 + 2e_1 - 4e_2)t^2 + Q(t^3) = 0$$

bulunur.

$Q(t^2)$, $Q(t^3)$ ihmal edilince

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 40 \\ 0 & 2 & -18 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -14 \\ \frac{31}{4} \\ -1 \end{pmatrix},$$

bulunur. $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ olursa

$$e = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan da çözüm

$$x_1(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$

$$x_2(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$

$$y(t) = -\frac{t}{2} - \frac{3}{8}t^2$$

olarak bulunur. Bu işlemlere devam edilirse

$$x_1(t) = x_2(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{720}t^6 + \frac{1}{5040}t^7 + \frac{1}{40320}t^8 + \frac{1}{362880}t^9$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{24}t^3 - \frac{19}{192}t^4 - \frac{7}{160}t^5 - \frac{109}{5760}t^6 - \frac{331}{40320}t^7 - \frac{155}{430080320}t^8 - \frac{2327}{1451520}t^9 - \frac{20947}{29030400}t^{10}$$

bulunur. $y'(t) = z(t)$ olduğu için

$$z(t) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}t - \frac{5}{8}t^2 - \frac{19}{48}t^3 - \frac{7}{32}t^4 - \frac{109}{960}t^5 - \frac{331}{5700}t^6 - \frac{155}{53760040}t^7 - \frac{2327}{161280}t^8 - \frac{20947}{2903040}t^9$$

olarak bulunur.

4.8. Örnekler

Bu kısımda, eklerde verilen programlara göre bazı problemlerin çözümleri ve grafikleri verilecektir.

Örnek 1:

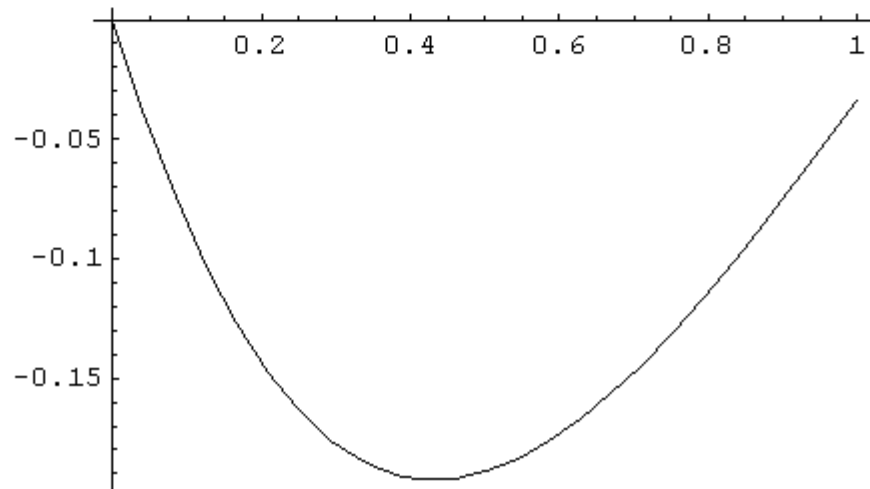
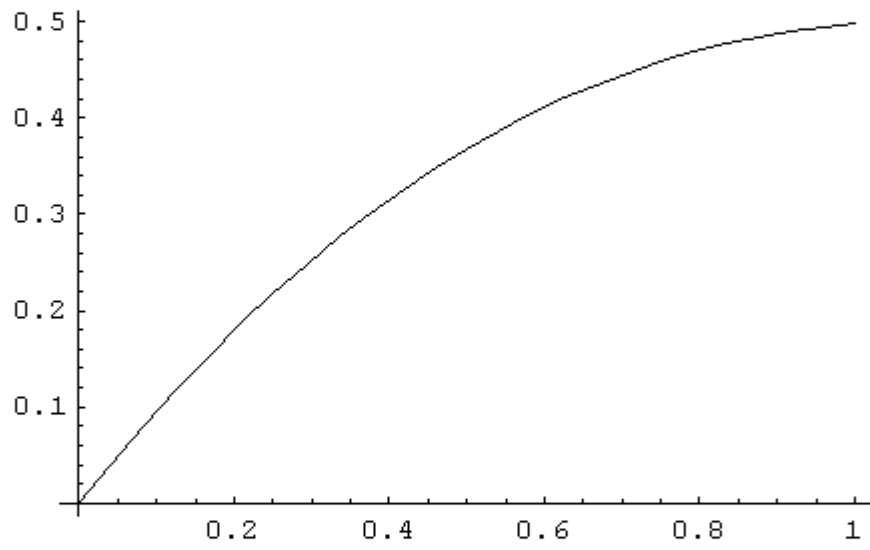
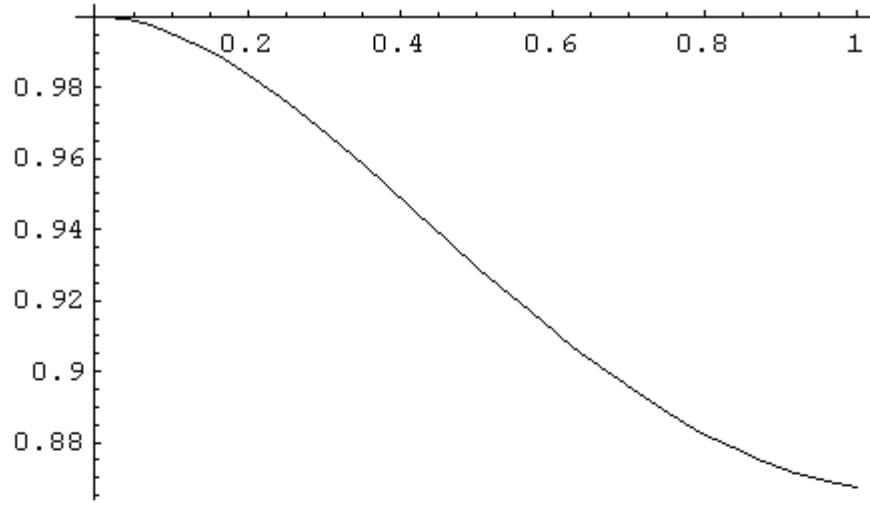
$$\begin{aligned}
 z_1'(t) &= z_3(t) \\
 z_2'(t) &= z_4(t) \\
 z_3'(t) &= -z_1(t).\lambda(t) \\
 z_4'(t) &= -z_2(t).\lambda(t) - g \\
 \lambda'(t) &= -2\lambda(t).z_1(t).z_3(t) - 3z_4(t) - 2\lambda(t).z_2(t).z_4(t) \\
 z_1(0) &= 1, z_2(0) = 0, z_3(0) = 0, z_4(0) = 1, \lambda(0) = 1 \\
 0 \leq t \leq 1, g &= 1
 \end{aligned}$$

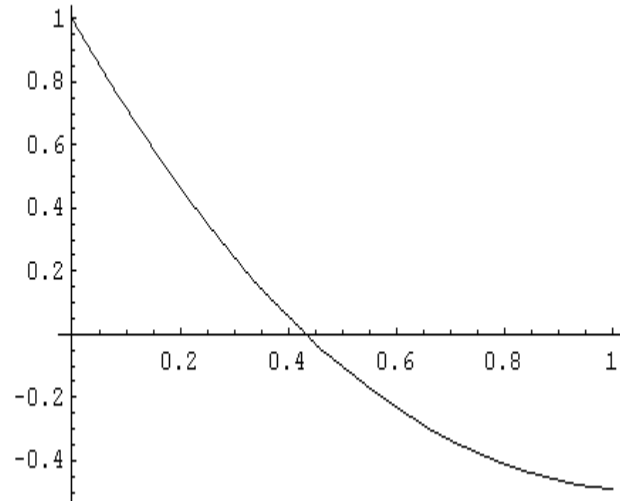
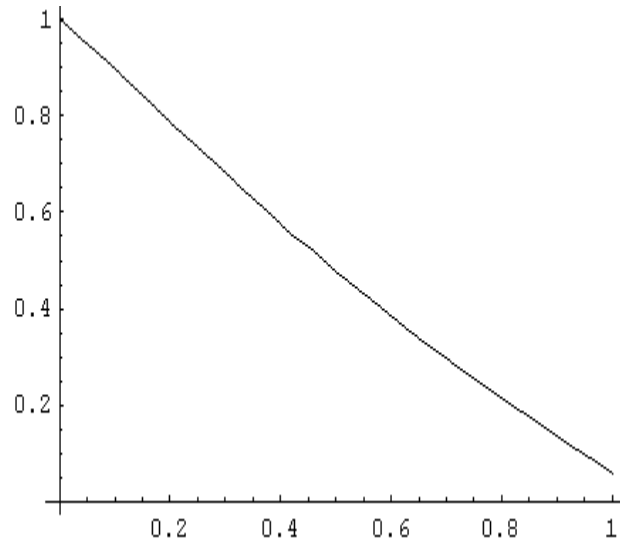
Bir basit sarkacın hareketinin Program 1'e göre mathematica nın kendi komutu ile çözümü:

$$\begin{aligned}
 z11(1) &= \{0.867349\} \\
 z12(1) &= \{0.497701\} \\
 z13(1) &= \{-0.033748\} \\
 z14(1) &= \{0.058813\} \\
 \lambda1(1) &= \{-0.493103\} \\
 z11(01) &= \{0.999951\} \\
 z12(01) &= \{0.00994983\} \\
 z13(01) &= \{-0.00985033\} \\
 z14(01) &= \{0.989951\} \\
 \lambda1(01) &= \{0.970151\} \\
 G1 &= \{1.52019 \times 10^{-8}\} \\
 G2 &= \{-1.58711 \times 10^{-8}\} \\
 G3 &= \{-2.68135 \times 10^{-8}\}
 \end{aligned}$$

Burada G_1 , G_2 , G_3 sırasıyla cebirsel kısıtlardır. Çözümün bu kısıtları ne kadar sağladığı gösterilmektedir.

Aşağıdaki şekillerde $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, $z_4(t)$ ve $\lambda(t)$ 'nin grafikleri verilmiştir.





Örnek 2:

$$z_1'(t) = z_3(t)$$

$$z_2'(t) = z_4(t)$$

$$z_3'(t) = -z_1(t) \cdot \lambda(t)$$

$$z_4'(t) = -z_2(t) \cdot \lambda(t) - g$$

$$\lambda'(t) = -2\lambda(t) \cdot z_1(t) \cdot z_3(t) - 3z_4(t) - 2\lambda(t) \cdot z_2(t) \cdot z_4(t)$$

$$z_1(0) = 1, z_2(0) = 0, z_3(0) = 0, z_4(0) = 1, \lambda(0) = 1$$

$$0 \leq t \leq 1, g = 1$$

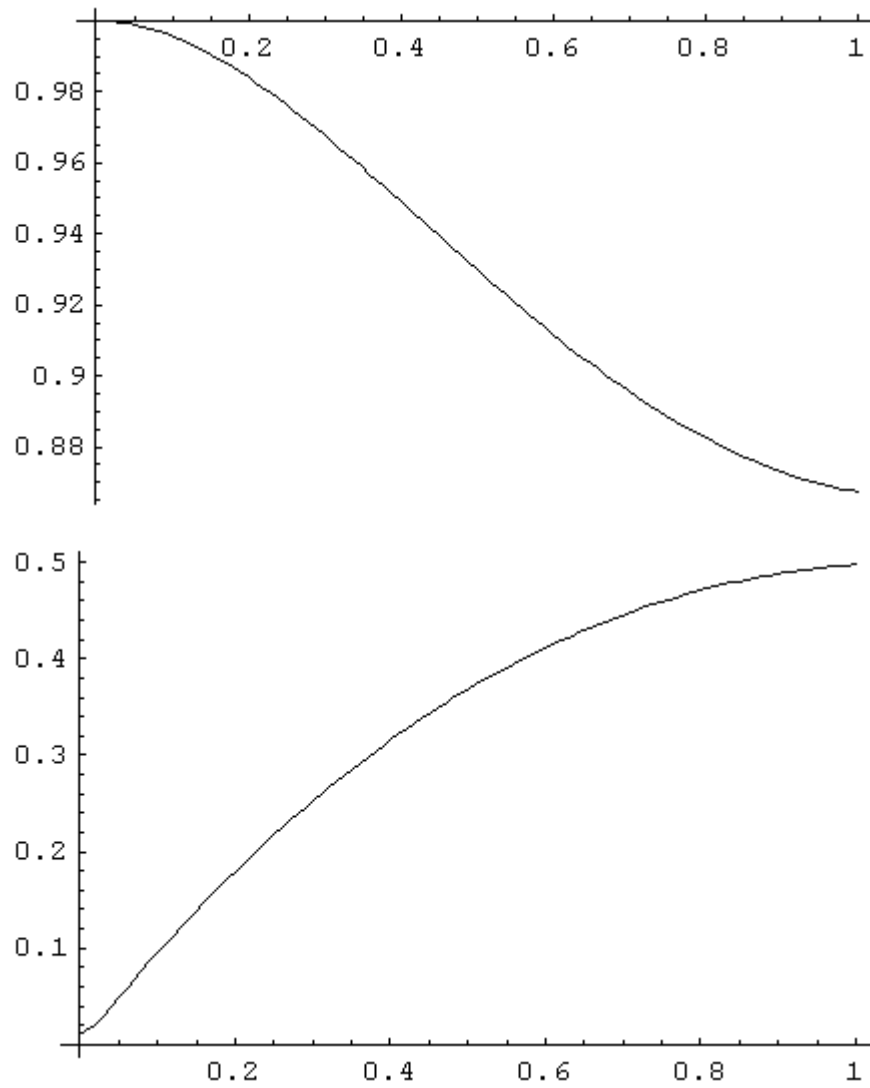
Basit Sarkaç ve cebirsel kısıtların eklerdeki program 2'ye göre çözümünü ve grafiği

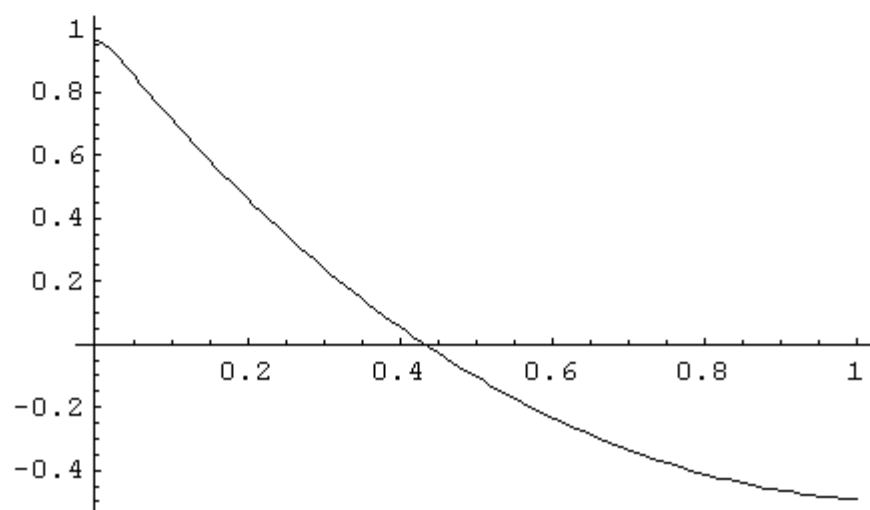
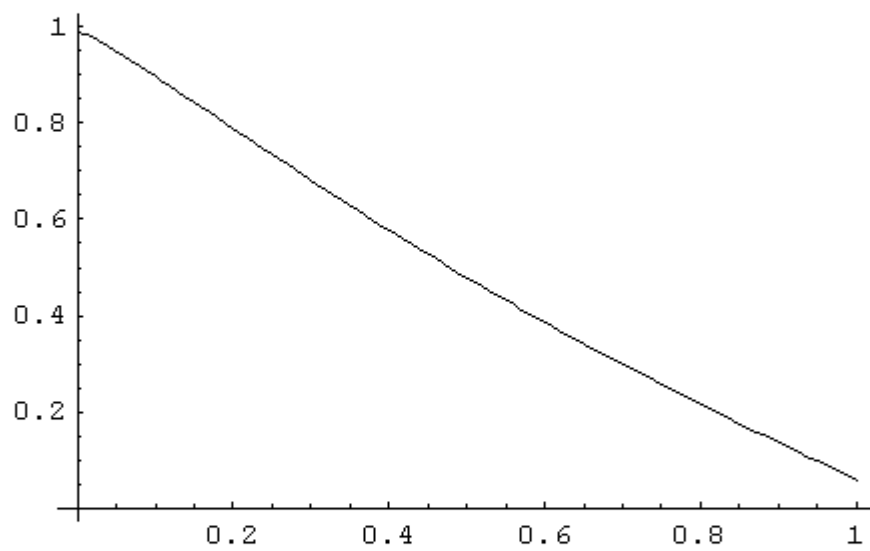
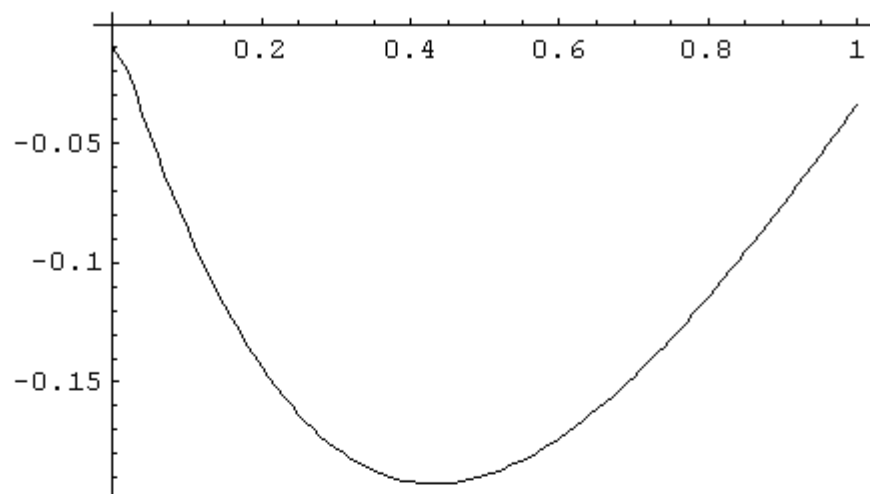
$$\text{Çözüm}(t=1) = \begin{pmatrix} 0.867323 \\ 0.497931 \\ -0.0337502 \\ 0.0590756 \\ -0.493725 \end{pmatrix}$$

$$G1 = -0.000185108$$

$$G2 = 0.000143219$$

$$G3 = 0.000423179$$





Örnek 3:

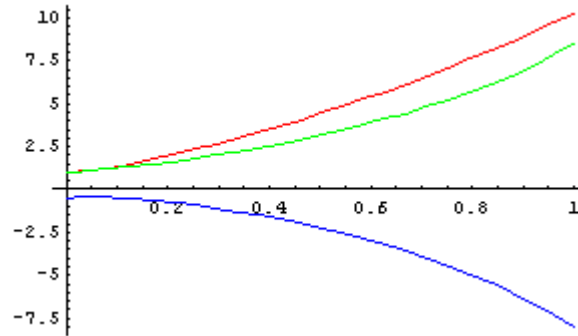
$$x_1' = \left(\alpha - \frac{1}{2-t}\right)x_1 + (2-t)\alpha z + \frac{3-t}{2-t}$$

$$x_2' = \left(\frac{1-\alpha}{t-2}\right)x_1 - x_2 + (\alpha-1)z + 2e^t$$

$$0 = (t+2)x_1 + (t^2-4)x_2 - (t^2+t-z)e^t$$

$$0 \leq t \leq 1, \alpha = 10$$

Bu sorunun Program 3'e göre mathematica'nın kendi komutuyla çözümünün grafiği:



Örnek 4:

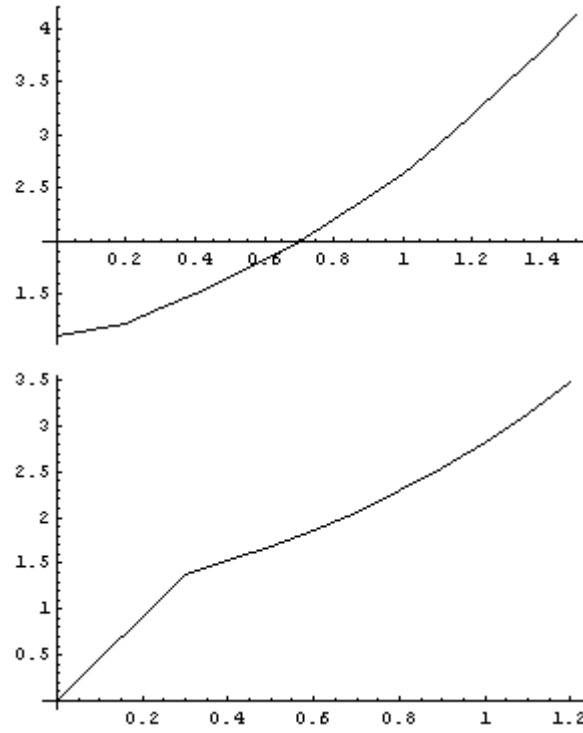
$$x_1' = \left(\alpha - \frac{1}{2-t}\right)x_1 + (2-t)\alpha z + \frac{3-t}{2-t}$$

$$x_2' = \left(\frac{1-\alpha}{t-2}\right)x_1 - x_2 + (\alpha-1)z + 2e^t$$

$$0 = (t+2)x_1 + (t^2-4)x_2 - (t^2+t-z)e^t$$

$$0 \leq t \leq 1, \alpha = 10$$

Bu DAE'nin Program 4'e göre BDF metodu ile çözümünün grafiği:

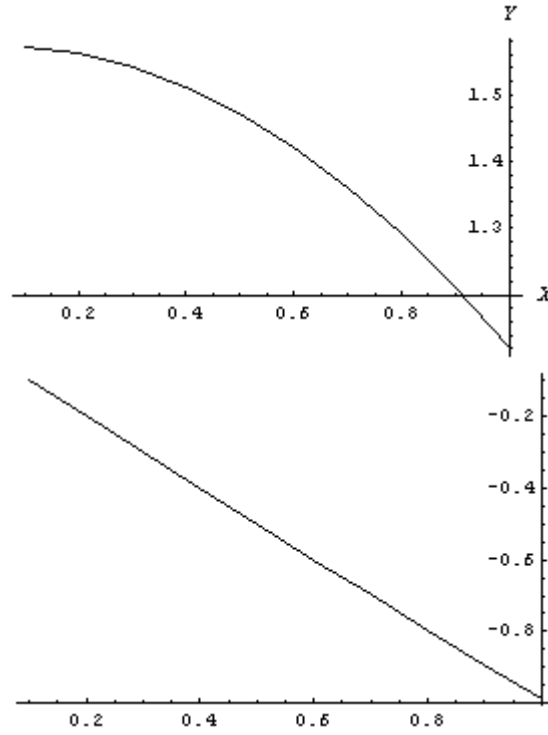


Örnek 5:

$$\begin{aligned}
 y_1' &= y_2 \\
 y_2' &= -\sin y_1 \\
 y_1(0) &= \frac{\pi}{2} \\
 y_2(0) &= 0
 \end{aligned}$$

Başlangıç değer probleminin Euler metodu ile çözümü ve ektaki Program 5'e göre sonuçları

xx=0.1	y1=1.5708	y2=-0.1
xx=0.2	y1=1.5608	y2=-0.2
xx=0.3	y1=1.5408	y2=-0.299995
xx=0.4	y1=1.5108	y2=-0.39995
xx=0.5	y1=1.4708	y2=-0.49977
xx=0.6	y1=1.42082	y2=-0.599271
xx=0.7	y1=1.3609	y2=-0.698148
xx=0.8	y1=1.29108	y2=-0.795953
xx=0.9	y1=1.21149	y2=-0.892067
xx=1.	y1=1.12228	y2=-0.985681



Örnek 6:

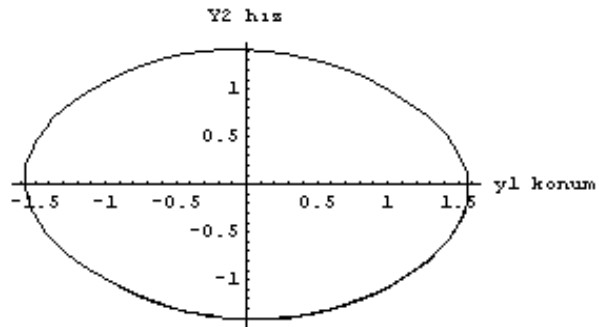
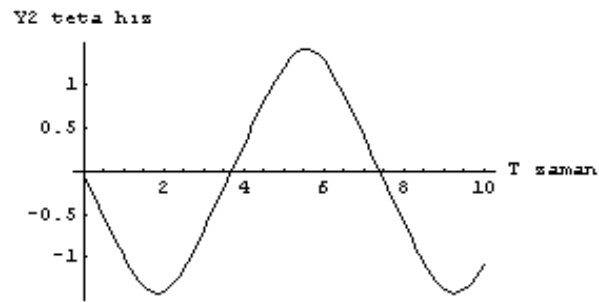
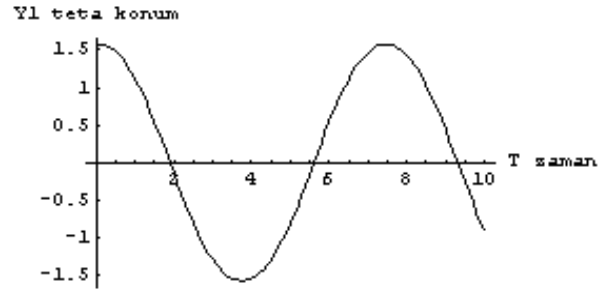
$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\sin y_1 \\ y_1(0) &= \frac{\pi}{2} \\ y_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

Başlangıç Değer Probleminin Runge-Kutta ile çözümü ve ekteki Program 6'ya göre sonuçları

```

tt=0.1 y1= 1.5708 y2=-0.1
tt=0.2 y1= 1.5608 y2=-0.199995
tt=0.3 y1= 1.5408 y2=-0.29995
tt=0.4 y1= 1.5108 y2=-0.39977
tt=0.5 y1= 1.47082 y2=-0.499271
tt=0.6 y1= 1.4209 y2=-0.598149
tt=0.7 y1= 1.36108 y2=-0.695958
tt=0.8 y1= 1.29149 y2=-0.792083
tt=0.9 y1= 1.21228 y2=-0.885725
tt=1. y1= 1.12371 y2=-0.975896

```



Örnek 7:

$$y'' = -\sin y(t)$$

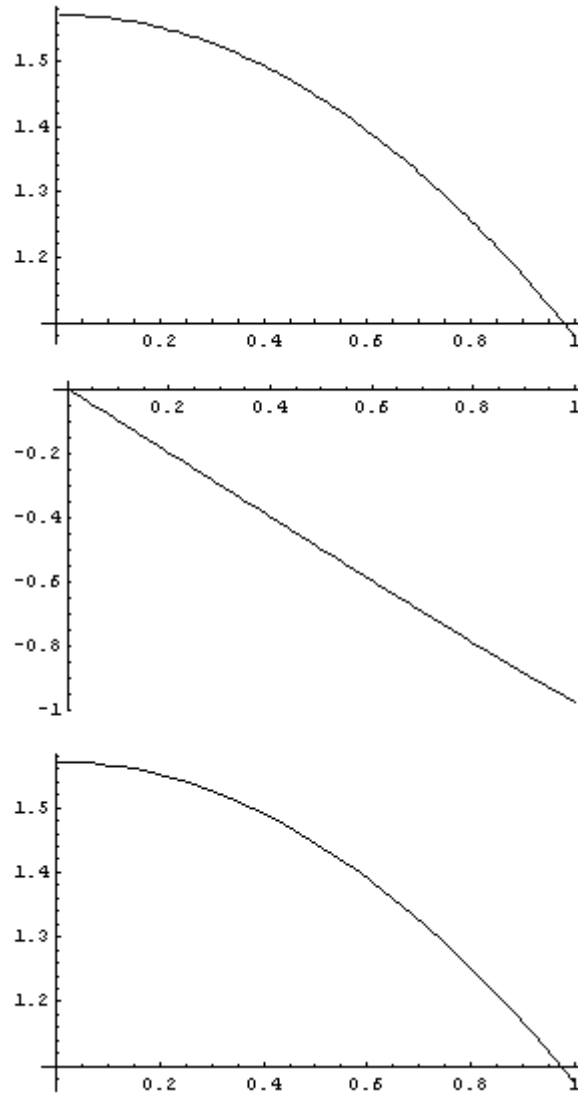
$$y(0) = \pi / 2$$

$$y'(0) = 0$$

Bu DAE'nin Euler metodu ile eklerdeki Program7'ye göre mathematica'nın kendi komutu ile çözümü

xx=0.01	y1=1.5708	y2=-0.01
xx=0.02	y1=1.5707	y2=-0.02
xx=0.03	y1=1.5705	y2=-0.03
xx=0.04	y1=1.5702	y2=-0.04
xx=0.05	y1=1.5698	y2=-0.05
xx=0.06	y1=1.5693	y2=-0.06
xx=0.07	y1=1.5687	y2=-0.07
xx=0.08	y1=1.568	y2=-0.08
xx=0.09	y1=1.5672	y2=-0.0899999
xx=0.1	y1=1.5663	y2=-0.0999999

Çözümün Grafiği:



BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Diferansiyel ve cebirsel denklemlerin kullanım alanları son yıllarda giderek artmaktadır. Buna paralel olarak da diferansiyel cebirsel denklemler üzerine olan çalışmalar ve sayısal çözüm yöntemleri üzerine araştırmalar giderek artmaktadır. Türkiye’de bu konu yeni yeni gündeme girmektedir.

DAE’ler ODE’lere göre daha karmaşıktır. Çünkü DAE’ler çözülürken başlangıç koşullarının sağlanmasının yanında bazı gizli kısıtların da sağlanması gerekmektedir. Bu çalışmada diferansiyel cebirsel denklemlerin tanımı, yapısı ve bazı sayısal çözüm yöntemleri verildi. Ayrıca sayısal çözüm yöntemleri için bazı bilgisayar programları kullanıldı. Bu çözüm yöntemlerinde indeksin öneminden bahsedildi. Yüksek indeksli DAE’lerin çözümünün daha karmaşık olduğu görüldü

Bu çalışmada her DAE’nin çözümü için kullanılabilen bir yöntem olmadığı görüldü. Dolayısıyla DAE konusu daha uzun yıllar bilim adamlarının ilgisini çekecektir ve bu konudaki çalışmalar artarak devam edecektir.

Stiff-katı ODE’lerin çözümünde nasıl hassas çözüm bulmak için yüksek mertebe yaklaşımli algoritmalar kullanılıyorsa, adım uzunluğu küçültülerek hata azaltılmaya çalışılıyorsa DAE’lerin de benzer yapıda olduğunu ve bunların çözümleri için de BDF gibi, Kapalı Runge-Kutta gibi metotlar tercih edilmektedir.

Çözülecek problemin yapısı, indeksi, uyumlu koşulların verilmesi, lineer olmayan denklemlerin çözümlere girmesi işleri iyice zorlaştırmaktadır.

Yapılan programlarla çözümlerde ilk adımlardan sonra hatanın arttığı gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] BRENAN, K., E., CAMPBELL, S., L., PETZOLD, L., R., Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. North-Holland, New York, 1989.
- [2] KAAJSTROM, B., RUHE, A., Matrix Pencils, Vol, 973, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1983.
- [3] GEAR, C., W., Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1971.
- [4] GEAR, C., W., PETZOLD, L., R., ODE Methods For The Solution of Diiferential/Algebraic Systems, SIAM Jurnal, August 1984.
- [5] PETZOLD, L., R., ASCHER, U., M., Computer Methods of Ordinary Differential Equations and Differential Algebraic Equations, 1946.
- [6] CAMPBELL, S., L., Numerical Methods for Unstructured Higher - Index DAEs. Ann. Numer. Math. 1:265-278, 1994.
- [7] ASCHER, U., M., CHIN, H., REICH, S., Stabilization of DAE's and invariant manifolds, Numer. Math.,67, 131-149, 1994.
- [8] BARRLUND, A., Constrained least squares methods for linear time varying DAE systems, Numer. Math., 60, 145-161, 1991.
- [9] CAMPBELL, S., L., MOORE, E., Progres on a general numerical method for nonlinear higher index DAE's II, Circuits Systems Signal Process., 13, 123-138, 1994.


```

FT = A[v] -  $\frac{4}{3}$  * X1 +  $\frac{1}{3}$  * X0 -  $\frac{2 * h}{3}$  * XF;

JAK = IdentityMatrix[5] - JAK;
A[v+1] = A[v] - Inverse[JAK] . FT
, {v, 1, 5}];

z11[[k+1, 1]] = t; z12[[k+1, 1]] = t; z13[[k+1, 1]] = t; z14[[k+1, 1]] = t;
λ1[[k+1, 1]] = t;
z11[[k+1, 2]] = A[6] [[1, 1]]; z12[[k+1, 2]] = A[6] [[2, 1]];
z13[[k+1, 2]] = A[6] [[3, 1]]; z14[[k+1, 2]] = A[6] [[4, 1]];
λ1[[k+1, 2]] = A[6] [[5, 1]]; X0 = X1; X1 = A[6]
, {k, 2, 100}];
Print["Çözüm(t=1)=", X1 // MatrixForm]

G1 = 1 - X1[[1, 1]]^2 - X1[[2, 1]]^2; Print["G1=", G1];
G2 = X1[[1, 1]] * X1[[3, 1]] + X1[[2, 1]] * X1[[4, 1]]; Print["G2=", G2];
G3 = X1[[3, 1]]^2 + X1[[4, 1]]^2 - X1[[5, 1]] - X1[[2, 1]]; Print["G3=", G3];

ListPlot[z11, PlotJoined → True]; ListPlot[z12, PlotJoined → True];
ListPlot[z13, PlotJoined → True]; ListPlot[z14, PlotJoined → True];
ListPlot[λ1, PlotJoined → True];

```

Program 3:

```

α = 10;
solution =
NDSolve[{{{{{{x1'[t] == (α -  $\frac{1}{2-t}$ ) * x1[t] + (2-t) * α * z[t] +  $\frac{3-t}{2-t}$ , x1[0] == 1}}}},
{{{{x2'[t] ==  $\frac{1-α}{t-2}$  * x1[t] - x2[t] + (α-1) * z[t] + 2 * Exp[t], x2[0] == 1}}}}, {{{
z'[t] == ( $\frac{2 * α}{t-2} + \frac{4 * t - t^2 + 6}{(t-2) * (t^2-4)}$ ) * x1[t] + ( $\frac{-4 * t + t^2 - 2}{(t^2-4)}$ ) * x2[t] - (2 * α +  $\frac{4 * t + 4}{t^2-4}$ ) * z[t] -
 $\frac{t^3 - 14 * t + 20}{(2-t)^2 * (t^2-4)}$  - ( $\frac{t-1}{t+2}$ ) * Exp[t], z[0] == -0.5}}}}, {x1, x2, z}, {t, 0, 1}]

Plot[Evaluate[{x1[t], x2[t], z[t]} /. First[solution]], {t, 0, 1},
PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]};

```

Program 4:

```

FF[t_, x[t]_, y[t]_, z[t]] ==  $\left(\alpha - \frac{1}{2-t}\right) * x[t] + (2-t) * \alpha * z[t] + \frac{3-t}{2-t};$ 
GG[t_, x[t]_, y[t]_, z[t]] ==  $\frac{1-\alpha}{t-2} * x_1[t] - x_2[t] + (\alpha-1) * z[t] + 2 * \text{Exp}[t];$ 
HH[t_, x[t]_, y[t]_, z[t]] ==  $\left(\frac{2*\alpha}{t-2} + \frac{4*t-t^2+6}{(t-2)*(t^2-4)}\right) * x_1[t] + \left(\frac{-4*t+t^2-2}{(t^2-4)}\right) * x_2[t] -$ 
 $\left(2*\alpha + \frac{4*t+4}{t^2-4}\right) * z[t] - \frac{t^3-14*t+20}{(2-t)^2*(t^2-4)} - \left(\frac{t-1}{t+2}\right) * \text{Exp}[t];$ 
h = 0.1;

daex1 = Table[0, {15}, {2}]; daex2 = Table[0, {12}, {2}]; daex3 = Table[0, {12}, {2}]; daex1[[1, 1]] = 0;
daex1[[1, 2]] = Exp[0.1]; daex1[[2, 1]] = 0.2; daex1[[2, 2]] = Exp[0.2];
alpha = 10; h = 0.1; Do[t = n * h;

AA[t_] :=  $\frac{h * 6}{11} * \begin{pmatrix} \left(\alpha - \frac{1}{2-t}\right) & 0 & (2-t) * \alpha \\ \frac{1-\alpha}{t-2} & -1 & (\alpha-1) \\ \left(\frac{2*\alpha}{t-2} + \frac{4*t-t^2+6}{(t-2)*(t^2-4)}\right) & \frac{-4*t+t^2-2}{(t^2-4)} & -\left(2*\alpha + \frac{4*t+4}{t^2-4}\right) \end{pmatrix};$ 

A[t_] := AA[t] - IdentityMatrix[3];

B[t_] :=  $\frac{h * 6}{11} * \begin{pmatrix} \frac{3-t}{2-t} \\ 2 * \text{Exp}[t] \\ \frac{t^3-14*t+20}{(2-t)^2*(t^2-4)} - \left(\frac{t-1}{t+2}\right) * \text{Exp}[t] \end{pmatrix};$ 

BC[t_] :=  $-\frac{2}{11} * \begin{pmatrix} \text{Exp}[t-3*h] \\ \text{Exp}[t-3*h] \\ \frac{\text{Exp}[t-3*h]}{t-2-3*h} \end{pmatrix} + \frac{9}{11} * \begin{pmatrix} \text{Exp}[t-2*h] \\ \text{Exp}[t-2*h] \\ \frac{\text{Exp}[t-2*h]}{t-2-2*h} \end{pmatrix} - \frac{18}{11} * \begin{pmatrix} \text{Exp}[t-h] \\ \text{Exp}[t-h] \\ \frac{\text{Exp}[t-h]}{t-2-h} \end{pmatrix} - B[t];$ 

X = Inverse[A[t]].BC[t]; Print[X // MatrixForm]; daex1[[n, 1]] = t; daex1[[n, 2]] = X[[1, 1]];
daex2[[n, 1]] = t; daex2[[n, 2]] = X[[2, 1]]; daex3[[n, 1]] = t; daex3[[n, 3]] = X[[3, 1]], {n, 3, 15}];
ListPlot[daex1, PlotJoined -> True]; ListPlot[daex2, PlotJoined -> True];

```

Program 5:

```

h = 0.1; y1 = Table[0, {10}]; xx = Table[0, {10}]; y2 = Table[0, {10}]; xx[[0]] = 0;
f1[x_, y1_, y2_] := y2; f2[x_, y1_, y2_] := -Sin[y2]; y1[[0]] = N[ $\frac{\pi}{2}$ ]; y2[[0]] = 0; Birr = Table[0, {10}, {2}];
Birr = Table[0, {10}, {2}];
Do[xx[[n+1]] = h * (n+1); y1[[n+1]] = y1[[n]] + h * f1[xx[[n+1]], y1[[n]], y2[[n]]];
y2[[n+1]] = y2[[n]] + h * f2[xx[[n+1]], y1[[n]], y2[[n]]];
Print["xx=", xx[[n+1]], " y1=", y1[[n+1]], " y2=", y2[[n+1]]; Birr[[n+1, 1]] = xx[[n+1]];
Birr[[n+1, 2]] = y1[[n+1]]; Birr[[n+1, 1]] = xx[[n+1]]; Birr[[n+1, 2]] = y2[[n+1]], {n, 0, 9}];
ListPlot[Birr, PlotJoined -> True, AxesLabel -> TraditionalForm /@ {X, Y}];
ListPlot[Birr, PlotJoined -> True];

```

Program 6:

```

tt = Table[0, {100}]; y1 = Table[0, {100}]; y2 = Table[0, {100}]; h = 0.1; tt[[0]] = 0; f1[x_, y1_, y2_] := y2;
f2[x_, y1_, y2_] := -Sin[y2]; Bi = Table[0, {100}, {2}]; Bim = Table[0, {100}, {2}]; Fazz = Table[0, {100}, {2}];
y1[[0]] = N[ $\frac{\pi}{2}$ ]; y2[[0]] = 0;
Do[tt[[n+1]] = h*(n+1);
  ky11 = h*y2[[n]];
  ky12 = h*y2[[n]];
  ky13 = h*y2[[n]];
  ky14 = h*y2[[n]];
  y1[[n+1]] = y1[[n]] +  $\frac{1}{6}$ *(ky11 + 2*ky12 + 2*ky13 + ky14);
  ky21 = h*f2[tt[[n+1]], y1[[n+1]], y2[[n+1]]];
  ky22 = h*f2[tt[[n+1]], y1[[n+1]], y2[[n+1]]];
  ky23 = h*f2[tt[[n+1]], y1[[n+1]], y2[[n+1]]];
  ky24 = h*f2[tt[[n+1]], y1[[n+1]], y2[[n+1]]];
  y2[[n+1]] = y2[[n]] +  $\frac{1}{6}$ *(ky21 + 2*ky22 + 2*ky23 + ky24); Bi[[n+1, 1]] = tt[[n+1]];
  Bi[[n+1, 2]] = y1[[n+1]]; Bim[[n+1, 1]] = tt[[n+1]]; Bim[[n+1, 2]] = y2[[n+1]];
  Fazz[[n+1, 1]] = y1[[n+1]]; Fazz[[n+1, 2]] = y2[[n+1]];
  Print["tt=", tt[[n+1]], " ", "y1=", y1[[n+1]], " ", "y2=", y2[[n+1]],
    {n, 0, 99}];
ListPlot[Bi, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"T zaman ", "Y1 teta konum"}];
ListPlot[Bim, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"T zaman ", "Y2 teta hiz"}];
ListPlot[Fazz, PlotJoined -> True, AxesLabel -> {"y1 konum ", "Y2 hiz"}];

```

Program 7:

```

h = 0.01; y1 = Table[0, {100}]; xx = Table[0, {100}]; y2 = Table[0, {100}]; xx[[0]] = 0;
f1[x_, y1_, y2_] := y2; f2[x_, y1_, y2_] := -Sin[y2]; y1[[0]] = N[ $\frac{\pi}{2}$ ]; y2[[0]] = 0; Bir = Table[0, {100}, {2}];
Birr = Table[0, {100}, {2}];
Do[xx[[n+1]] = xx[[0]] + h*(n+1); y1[[n+1]] = y1[[n]] + h*f1[xx[[n+1]], y1[[n]], y2[[n]]];
  y2[[n+1]] = y2[[n]] + h*f2[xx[[n+1]], y1[[n]], y2[[n]]]; Print["xx=", xx[[n+1]], " y1=", y1[[n+1]], " y2=", y2[[n+1]]];
  Bir[[n+1, 1]] = xx[[n+1]]; Bir[[n+1, 2]] = y1[[n+1]]; Birr[[n+1, 1]] = xx[[n+1]]; Birr[[n+1, 2]] = y2[[n+1]], {n, 0, 99}];
ListPlot[Bir, PlotJoined -> True]; ListPlot[Birr, PlotJoined -> True];
solution = NDSolve[{y'[t] == -Sin[y[t]], y[0] == N[ $\frac{\pi}{2}$ ], y'[0] == 0}, y, {t, 0, 1}]; Plot[y[x] /. solution, {x, 0, 1}]

```


ÖZGEÇMİŞ

Murat ÇEKEN 1981' de Sakarya'nın Karasu ilçesinde doğdu. İlk ve ortaöğretimini 1988-1999 yılları arasında Düzce'nin Akçakoca İlçesinde tamamladı. Daha sonra 1999 Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesini kazandı ve 2003'te mezun oldu. Aynı yıl tezsiz yüksek lisansa başladı ve 2004'te mezun oldu. Aynı yıl Sakarya Üniversitesi'nde tezli yüksek lisansa başladı. Bunun yanında 2003-2006 arasında Özel Sakarya Açılım Dershanesi'nde Matematik ve Geometri Öğretmeni olarak çalıştı.

Halen Özel Pendik Birikim Dershanesi ÖSS şubesinde Geometri Öğretmeni olarak çalışmaktadır.