T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİZİ UZAYLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mahpeyker ÖZTÜRK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Metin BAŞARIR**

Temmuz 2007

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİZİ UZAYLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mahpeyker ÖZTÜRK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 27 / 07 /2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.	**Prof. Dr.**	**Doç. Dr.**
Metin BAŞARIR	**Abdullah YILDIZ**	**Elman ALİYEV**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bana zaman ayırıp ilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Metin BAŞARIR'a teşekkürlerimi sunarım.
Her zaman yanımda olan annem Melek ÖZTÜRK, babam Hüseyin ÖZTÜRK'e destekleri için sonsuz teşekkürler.

Bu tez, Sakarya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından 2006.50.01.066 no ile desteklenmiştir.

Mahpeyker ÖZTÜRK

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR... ii

İÇİNDEKİLER iii

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ... vi

ŞEKİLLER LİSTESİ viii

ÖZET... ix

SUMMARY... x

BÖLÜM 1.

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER………………………………………. 1

1.1. Temel Kavramlar ve Teoremler.. 1

1.2 Bir Banach Uzayının Rotund Olma Özelliği............................. 6

1.3 Banach Uzayının Konvekslik Özelliği………………………… 10

1.4. Bazı Geometrik Özellikler………….. 12

1.5. Bazı Geometrik Sabitler……….. 14

1.6. Opial Özelliği……….. 18

1.7. Sabit Nokta Özelliği………... 19

BÖLÜM 2.

MODÜLER UZAYLAR... 20

2.1. Giriş... 20

2.2. Pseudomodüllerin Özellikleri... 21

2.3. Eşlenik Modüller.. 24

2.4. Modüler Yakınsaklık... 26

BÖLÜM 3.

BAZI DİZİ UZAYLARI.. 29

3.1. Musielak-Orlicz Dizi Uzayları……………………………...... 29

3.2.Nakano Dizi Uzayları.. 32

3.3. Köthe Dizi Uzayları.. 33

3.4. Cesaro Dizi Uzayı………………………............................. 34

BÖLÜM 4.

BAZI DİZİ UZAYLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ........................ 37

4.1.Musielak-Orlicz Dizi Uzayının Bazı Geometrik Özellikleri...... 37

4.2. Nakano Dizi Uzaylarında Extremum Nokta, Rotund Olma, Düzgün λ-Özelliği, H-Özelliği, Düzgün Konvekslik (UC), (UKK) Özelliği, (NUC) Özelliği, Damla Özelliği ………………………………… 38

4.2.1. Extremum nokta ve rotund olma………………………… 38

4.2.1. Düzgün λ-özelliği……………………………………....... 39

4.2.1. H-Özelliği…………………………………………....... 39

4.2.2. Düzgün konvekslik……………………………………..... 40

4.2.3. Düzgün Kadec-Klee özelliği…………………………....... 41

4.2.3. Hemen hemen (nearly) düzgün konvekslik……............ 41

4.2.4. Lokal düzgün rotund olma..........……………………......... 42

4.2.4. Midpoint lokal düzgün rotund olma................................. 42

4.2.5. k-Konvekslik, zayıf düzgünrRotund olma……................ 43

4.2.5. Damla (drop) özelliği.. 43

4.3. Cesaro Dizi Uzayı………………………............................. 44

4.3.1. H-Özelliği, rotund olma, k-NUC özelliği....................... 44

4.3.2. Düzgün Kadec-Klee özelliği.. 46

4.3.3. Opial özelliği.. 47

BÖLÜM 5.

$C(s,p)$ DİZİ UZAYININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ.................. 49

5.1. $C(s,p)$ Dizi Uzayı.. 49

5.2. $C(s,p)$ Dizi Uzayında H-Özelliği, Rotund Olma, k-NUC

Özelliği,.. 59
5.3. $C(s,p)$ Dizi Uzayında Düzgün Kadec-Klee Özelliği.............. 66
5.4. $C(s,p)$ Dizi Uzayında Opial Özelliği..................................... 71

BÖLÜM 6.
SONUÇLAR VE ÖNERİLER…….. 81

KAYNAKLAR.. 83
ÖZGEÇMİŞ.. 86

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

ρ	: Konveks modül
X_{ρ}	: Modüler uzay
$\lVert \cdot \rVert_{L}$	: Lüksemburg normu
$\lVert \cdot \rVert_{0}$	: Orlicz-Amemiya normu
l^{0}	: Reel dizi uzayı
Φ	: Musielak-Orlicz fonksiyonu
l_{Φ}	: Musielak-Orlicz dizi uzayı
h_{Φ}	: Musielak-Orlicz dizi uzayının alt uzayı
l	: Nakano dizi uzayı
ces_{p}	: Cesaro dizi uzayı
$ces(p)$	: Genelleştirilmiş Cesaro dizi uzayı
ces_{Φ}	: Cesaro-Musielak-Orliz dizi uzayı
$C(s,p)$	: $C(s,p)$ dizi uzayı
$N(X)$	: Normal yapı katsayısı
$BS(X)$	: Sınırlı dizi katsayısı
$WCS(X)$	: Zayıf yakınsak dizi katsayısı
$M(X)$	: Maluta katsayısı
$p=(p_{k})$	: pozitif reel sayıların sınırlı dizisi
conv(A)	: A kümesinin konveks kabuğu
$\overline{conv}(A)$	: A kümesinin kapalı konveks kabuğu
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi

Ψ	: Φ fonksiyonunun Young anlamında tümleyen fonksiyonu
$\Phi \in \delta_2$	: Φ fonksiyonu δ_2 şartını sağlar
$\Phi \in \delta_2^s$	: Φ fonksiyonu kuvvetli δ_2 şartını sağlar
$B(\mathrm{X})$	: X uzayının kapalı birim yuvarı
$S(\mathrm{X})$	: X uzayının birim küresi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Banach uzaylarında rotund olma özelliklerinin şematik gösterimi.. 9

Şekil 1.2. Banach uzaylarının geometrik özelliklerinin şematik gösterimi.. 13

ÖZET

Anahtar kelimeler: $C(s,p)$ Dizi Uzayı, Cesaro Dizi Uzayı, Musielak-Orlicz Dizi Uzayı, Nakano Dizi Uzayı, Köthe Dizi Uzayı, Modül, Lüksemburg Normu, Orlicz (Amemiya) Normu, Rotund Olma, Konvekslik, Geometrik Sabitler

“Bazı dizi uzaylarının geometrik özellikleri” isimli bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. İlk dört bölüm bu konu ile ilgili yapılan çalışmaların bir kısmının derlemesinden oluşmaktadır. Beşinci bölüm tezin orijinal kısmıdır.

Birinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, Modüler uzaylardan bahsedildi. Modül kavramı, modüler uzay tanımı ve modüler yakınsaklık kavramı incelendi.

Üçüncü bölümde, bazı geometrik özellikleri incelenecek olan dizi uzayları tanıtıldı.

Dördüncü bölümde ise, tanıtılan dizi uzaylarının sahip olduğu bazı geometrik özellikler teorem ve örneklerle incelendi.

Beşinci bölümde ise Cesaro dizi uzayının genelleştirilmiş hali olan $C(s,p)$ dizi uzayının geometrik özellikleri diğer bölümlerden elde edilen sonuçlar doğrultusunda çalışıldı.

Son bölümde ise, elde edilen bazı genel sonuçlar verilmiştir.

GEOMETRIC PROPERTIES OF SOME SEQUENCE SPACES

SUMMARY

Key Words: $C(s,p)$ Sequnce Space, Cesaro Sequence Space, Musielak-Orlicz Sequence Space, Nakano Sequence Space, Köthe Sequence Space, Modul, Luxemburg Norm, Orlicz Norm,

This study which is entitled “Geometric Properties of Some Sequence Spaces” contains six chapters. The first four chapters are composed of a compilation of some studies on this subject. The fifth chapter is contained original results which related to the geometric properties of $C(s,p)$ sequence space.

In the first chapter, some basic definitions and theorems which are used in the following chapters, are given.

In the second chapter, Modular spaces are introduced. The explanation of the term of modular, definition of modular spaces and modular convergence are examined.

In the third chapter, the sequence spaces whose geometric properties will examined are introduced.

Fourth chapter deals with the theorems and examples which are concerned with the geometric properties of the sequence spaces.

In the fifth chapter, we obtained some general results about the geometric properties of generalized Cesaro sequence space $C(s,p)$.

The last chapter gives some general results which are obtained.

BÖLÜM 1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

1.1. Temel Kavramlar ve Teoremler

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1. $X \neq \varnothing$ olmak üzere

$$+ : X \times X \to X \qquad\qquad . : \mathbb{R} \times X \to X$$

$$(x, y) \to x + y \qquad\qquad (\lambda, x) \to \lambda . x$$

ikili işlemleri aşağıdaki şartları sağlarsa, $(X,+,.)$ üçlüsüne, $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

$\forall \lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ ve $\forall$ $x, y, z \in X$ için

1) $x+y = y+x$
2) $(x+y)+z = x+(y+z)$
3) $\forall x \in X$ için $x+e = e+x = x$ olacak şekilde bir $e \in X$ mevcuttur.
4) $\forall x \in X$ için $x+(-x) = (-x)+x$ olacak şekilde bir $-x \in X$ mevcuttur.
5) $1.x = x$
6) $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
7) $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
8) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu).x$

Tanım 1.1.2. Üzerinde bir norm tanımlanmış X vektör uzayına bir normlu uzay adı verilir. Bir X vektör uzayı üzerindeki norm ise, X üzerinde tanımlı olup, bir $x \in X$ noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen ve x ve y, X uzayında keyfi vektörler ve α bir skaler olmak üzere aşağıdaki özellikleri gerçekleyen reel değerli bir fonksiyondur:

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

Tanım1.1.3. Bir $(X, \| \|)$ normlu uzayı, bir $x_0 \in X$ noktası ve pozitif bir r sayısı verilsin. Bu taktirde

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{B_r}(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$$

kümesine de x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi (küre) denir.

Tanım 1.1.4. X vektör uzayı üzerinde tanımlı $\|x\|_\alpha$ ve $\|x\|_\beta$ normları verilsin. Her $x \in X$ için

$$A\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq B\|x\|_\alpha$$

olacak şekilde $A > 0$ ve $B > 0$ sayıları varsa $\|x\|_\alpha$ ve $\|x\|_\beta$ normlarına denk normlar adı verilir.

Tanım 1.1.5. Bir $(X,\| \|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi X içinde bir noktaya yakınsıyorsa, bu $(X,\| \|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir. X bir Banach uzayı olmak üzere,

$$B(X)=\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

kümesine X uzayının kapalı birim yuvarı,

$$S(X)=\{x \in X : \|x\| = 1\}$$

kümesine ise, X uzayının birim küresi denir.

Tanım1.1.6. X bir K sayı cismi$(K=\mathbb{R}, K=\mathbb{C})$ üzerinde tanımlı bir normlu uzay olsun. X üzerinde tanımlı tüm lineer fonksiyonellerden oluşan $L(X,K)$ Banach uzayına X uzayının (cebirsel) duali denir ve X' ile gösterilir.

Tanım1.1.7. X' Banach uzayının duali olsun. $X''=(X')'$ uzayına X uzayının ikinci duali denir. $L(X',K)=X''$ ikinci dual uzay da bir Banach uzayıdır.

Tanım1.1.8. X normlu bir uzay ve $X=X''$ ise X uzayına refleksif (veya yansımalı) bir uzay adı verilir. Refleksif uzaylara örnek olarak $\mathbb{R}^n$, l_p ve $L_p[a,b]$ $(p>1)$ uzayları gösterilebilir. c_0 uzayının dual uzayı l_1 ve l_1 uzayının dual uzayı l_∞ olduğundan c_0 refleksif olmayan bir uzaydır.

Tanım1.1.9. X bir K sayı cismi$(K=\mathbb{R}, K=\mathbb{C})$ üzerinde bir normlu uzay olsun. X üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $B(X,K)$ uzayına X uzayının sürekli duali denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 1.1.10. Bir X vektör uzayının bir A alt kümesini ele alalım. Eğer, x, y$\in$A olduğunda,

$$M=\{z \in X : z=\alpha x+(1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$$

oluyorsa, A alt kümesi konvekstir denir.

Tanım 1.1.11. $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu $\forall u,v\in\mathbb{R}$ için

$$\Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)\le\frac{1}{2}\Phi(u)+\frac{1}{2}\Phi(v)$$

şartını sağlarsa konveks bir fonksiyon olarak tanımlanır [32].

Tanım 1.1.12. $\Phi:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa bir Orlicz fonksiyonu olarak adlandırılır :

i. Φ fonksiyonu çift fonksiyondur,
ii. Φ fonksiyonu konveks fonksiyondur,
iii. Φ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur,
iv. $\Phi(0)=0$,
v. $u\to\infty$ iken $\Phi(u)\to\infty$ dur.

Eğer Φ Orlicz fonksiyonu aşağıdaki şartı sağlarsa bir N'-fonksiyonudur:

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\Phi(u)}{u}=\infty$$

Φ, N'- fonksiyonu

$$\lim_{u\to 0}\frac{\Phi(u)}{u}=0$$

şartını sağlarsa bir *N*-fonksiyondur [32].

Tanım 1.1.13. Her Φ Orlicz fonksiyonu için, $\Psi:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ fonksiyonu, Φ nin tümleyen fonksiyonu olarak adlandırılır ve $\forall v\in\mathbb{R}$ için

$$\Psi(v)=\sup_{u>0}\{u|v|-\Phi(u)\}$$

ile tanımlıdır. Ψ fonksiyonu da bir Orlicz fonksiyonudur [32].

Tanım 1.1.14. (Young Eşitsizliği) Φ ve Ψ fonksiyonları karşılıklı olarak birbirinin tümleyeni olan *N*-fonksiyonlar ise, bu durumda $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$xy \leq \Phi(x) + \Psi(y)$$

dir [32].

Tanım 1.1.15. Bir Φ *N*-fonksiyonu verilsin. $\lim\sup_{x\to\infty} \dfrac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} < \infty$ şartı sağlanıyorsa, Φ fonksiyonu δ_2 şartını sağlar denir $(\Phi \in \delta_2)$. Yani, x in yeterince büyük değerleri için,

$$\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır [25].

Tanım 1.1.16. Ψ, Φ fonksiyonunun Young anlamında tümleyen fonksiyonu olmak üzere, $\Psi \in \delta_2$ ise, Φ fonksiyonu δ_2^* şartını sağlar denir [25].

1.2 Bir Banach Uzayının Rotund Olma Özelliği

Bu özellik 1936 yılında James Clarkson ve Mark Krein tarafından tanımlanıp formülleştirilmiştir. Clarkson düzgün rotund olma özelliği ile daha fazla ilgilenmiştir.

Tanım 1.2.1. (Extremum Nokta) Bir $x \in S(\mathrm{X})$ noktası verilsin. Herhangi $y,z \in B(\mathrm{X})$ için $2x = y + z \Rightarrow y = z$ eşitliği sağlanıyorsa $x \in S(\mathrm{X})$ noktası extremum noktadır [9].

Tanım 1.2.2. (Rotund Uzay) $\forall x \in S(\mathrm{X})$ noktası $B(\mathrm{X})$ in bir extremum noktası olan X Banach uzayına rotund uzay denir [9].

Örnek 1.2.3. e_1, e_2 c_0 ın iki standart birim vektörü olsunlar. $x_1 = e_1 + e_2$ ve $x_2 = e_1 - e_2$ olarak tanımlansın.

$$\|x_1\|_\infty = \|x_2\|_\infty = \left\|\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right\|_\infty = 1$$

dir. Yani ne c_0 ne de l_∞ rotund uzay değildir [35].

Tanım 1.2.4.(Düzgün Rotund Uzay) Herhangi $\varepsilon \in (0,1)$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olan herhangi $x,\ y \in S(\mathrm{X})$ için, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon) \in (0,1)$ varsa X Banach uzayına düzgün rotund uzay denir (UR) [35].

Teorem 1.2.5. X Banach uzayı düzgün rotund uzaydır (UR) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = 2$ olan $\forall x_n,\ y_n \in S(\mathrm{X})$ için, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$ sağlanır [35].

Teorem 1.2.6. Her düzgün rotund Banach uzayı refleksiftir. Yani uzay refleksif bir uzay değilse düzgün rotund uzay da değildir [35].

Tanım 1.2.7.(Lokal Düzgün Rotund Uzay) $\lim_{n\to\infty}\|x_n + x\| = 2$ olan her bir $x \in S(\mathrm{X})$ ve her bir $x_n \in S(\mathrm{X})$ için, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ sağlanıyorsa X Banach uzayı lokal düzgün rotund uzay olarak adlandırılır (LUR) [35].

Tanım 1.2.8. (Kompakt Lokal Rotund Uzay) $\lim_{n\to\infty}\|x_n + x\| = 2$ olan her bir $x \in S(\mathrm{X})$ ve her bir $x_n \in S(\mathrm{X})$ için, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi norm topolojisine göre relatif kompakt ise X Banach uzayı kompakt lokal düzgün rotund uzaydır (CLUR) [35].

Tanım1.2.9. (Zayıf Düzgün Rotund Uzay) $\lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = 2$ olan $\forall x_n, y_n \in S(\mathrm{X})$ için $n \to \infty$ iken $(x_n - y_n) \xrightarrow{w} 0$ oluyorsa X Banach uzayı zayıf düzgün rotund uzay (WUR) olarak adlandırılır [35].

Tanım 1.2.10. (Zayıf Lokal Düzgün Rotund Uzay) X Banach uzayında $\|x\| = \|y\| = \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| = 1$ olan $x \neq y \in \mathrm{X}$ için, $x^*(x-y) \neq 0$ olan $x^* \in S(\mathrm{X}^*)$ varsa X Banach uzayı zayıf lokal düzgün rotund uzaydır (WLUR) denir [35].

Önerme1.2.11. Her lokal düzgün rotund normlu uzay, zayıf lokal düzgün rotund uzaydır. Her zayıf düzgün rotund uzay, zayıf lokal düzgün rotund uzaydır ve bu uzaylarda rotund uzaydır [35].

$$(LUR) \Rightarrow (WLUR)$$

$$(WUR) \Rightarrow (WLUR) \Rightarrow (R)$$

Tanım 1.2.12.(Kuvvetli Rotund Uzay) X normlu uzay ve C, X uzayının boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun. t, $d(0,C)$ ye azalarak yaklaşırken, $C \cap tB(\mathrm{X})$ kümesinin çapı, sıfıra yaklaşırsa X uzayına kuvvetli rotund veya kuvvetli konveks uzay denir. X uzayı bu özelliğe sahipse X uzayı K özelliğine sahiptir denir [35].

Önerme 1.2.13. Her düzgün rotund uzay kuvvetli rotunddur, ve her kuvvetli rotund uzay da rotunddur [35].

$$(UR) \Rightarrow (K) \Rightarrow (R)$$

Teorem 1.2.14. Her kuvvetli rotund uzay H-özelliğine sahiptir. Yani

$$(K) \Rightarrow (H)$$

dir [35].

Teorem 1.2.15. H- özelliğine sahip olan her refleksif rotund uzay kuvvetli rotunddur [35].

$$(Rf) \text{ ve } (R) \text{ ve } (H) \Rightarrow (K)$$

Sonuç 1.2.16. Her refleksif, lokal düzgün rotund uzay kuvvetli rotunddur [35]**.**

$$(Rf) \text{ ve } (LUR) \Rightarrow (K)$$

Tanım 1.2.17.(Midpoint Lokal Düzgün Rotund Uzay) (x_n) ve (y_n) dizileri X uzayındaki iki dizi olsun. $\|x_n\| \to 1$, $\|y_n\| \to 1$ ve $\frac{1}{2}(x_n + y_n)$ dizisi $S(\mathrm{X})$in bazı elemanlarına yakınsak iken, $\|x_n - y_n\| \to 0$ oluyorsa X normlu uzayı midpoint lokal düzgün rotund uzaydır (MLUR) denir [35].

Önerme 1.2.18. Her kuvvetli rotund ve lokal düzgün rotund uzay, midpoint lokal düzgün rotund uzaydır. Her midpoint lokal düzgün rotund uzay da rotund uzaydır [35].

$$(K) \Rightarrow (MLUR)$$

$$(LUR) \Rightarrow (MLUR) \Rightarrow (R)$$

Banach uzaylarında tanımlanan bu özellikler arasındaki ilişki, aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\begin{tikzcd}
& (K) \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
& (H) & (MLUR) \arrow[dr] & \\
(UR) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ddr] & (LUR) \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[dr] & & (R) \\
& & (WLUR) \arrow[ur] & \\
& (WUR) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.1 Geometrik özellikler

Tanım 1.2.19.(k-Rotund Uzay) X vektör uzayı verilsin. Eğer $k \geq 1$ için, $S(\mathrm{X})$ deki $\|x_1 + x_2 + ... + x_{k+1}\| = k+1$ olan $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ vektörleri için $\{x_1, ..., x_{k+1}\}$ kümesi lineer bağımlı ise, X uzayına k-rotund (kR) uzay denir [2].

Tanım1.2.20. X Banach uzayı verilsin. Eğer $S(\mathrm{X})$ deki her (x_n) dizisi, bütün $\left(x_n^{(1)}\right), \left(x_n^{(2)}\right), ..., \left(x_n^{(k)}\right)$ alt dizileri için $n \to \infty$ iken $\left\|x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + ... + x_n^{(k)}\right\| \to k$ özelliğini sağlayan bir Cauchy dizisi ise, X Banach uzayı k-rotund uzaydır denir [16].

Tanım 1.2.21.(Kompakt k-Rotund Uzay) $\left(x_n^{(1)}\right), \left(x_n^{(2)}\right), ..., \left(x_n^{(k)}\right)$ alt dizileri için $n \to \infty$ iken $\left\|x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + ... + x_n^{(k)}\right\| \to k$ olan $S(\mathrm{X})$ deki her (x_n) dizisi, relatif kompakt bir küme oluşturuyorsa X Banach uzayı kompakt k-rotund uzaydır (CLkR) denir [16].

Tanım 1.2.22. .(Lokal k-Rotund Uzay) $\left(x_n^{(1)}\right), \left(x_n^{(2)}\right), ..., \left(x_n^{(k)}\right)$ alt dizileri için $n \to \infty$ iken $\left\|x_n^{(1)} + x_n^{(2)} + ... + x_n^{(k)} + x\right\| \to k+1$ olan herhangi $(x_n) \in S(\mathrm{X})$ ve $\mathrm{x} \in S(\mathrm{X})$ relatif kompakt bir küme oluşturuyorsa, herhangi $\mathrm{k} \geq 2$ için X Banach uzayı lokal k-rotund uzay (LkR) olarak tanımlanır [16].

1.3. Konvekslik

Tanım 1.3.1. (Düzgün Konveks Uzay) $\forall \varepsilon > 0$ ve $x,\ y \in S(\mathrm{X})$ için,

$$\|x-y\| > \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| < 1-\delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa X Banach uzayına düzgün konveks uzay (UC) denir [3].

Örnek 1.3.2. Hilbert uzayları paralelkenar kuralının bir sonucu olarak düzgün konveks uzaylardır. $x,\ y \in S(\mathrm{X})$ ve $\|x-y\| > \varepsilon$ ise,

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < \sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$$

dir. $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$ olarak alınırsa, bu uzayların düzgün konveksliği elde edilir [37].

Tanım 1.3.3 .(ε -Ayrılmış Dizi) $\{x_n\} \subset \mathrm{X}$ dizisi bazı $\varepsilon > 0$ için,

$$sep(x_n) = \inf\{\|x_n - x_m\|, n \neq m\} > \varepsilon$$

olacak şekilde varsa bu dizi ε -ayrılmış dizi olarak tanımlanır [3].

Tanım1.3.4.(Hemen Hemen (nearly) Düzgün Konveks Uzay) $\forall \varepsilon > 0$ ve $sep(x_n) > \varepsilon$ olan $\forall (x_n) \subseteq$B(X) dizisi için,

$$conv(x_n) \cap \big((1-\delta)B(\mathrm{X})\big) \neq \varnothing$$

olan $\delta \in (0,1)$ sayısı varsa X Banach uzayı hemen hemen (nearly) düzgün konveks uzaydır (NUC) denir [3].

Tanım 1.3.5. (k-Hemen Hemen (nearly) Düzgün Konveks Uzay) $k \geq 2$ bir tamsayı olsun. Herhangi $\varepsilon > 0$, $sep(x_n) > \varepsilon$ olan herhangi $(x_n) \subset B(\mathrm{X})$ dizisi ve $n_1, n_2, ...n_k \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \frac{x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nk}}{k} \right\| < 1 - \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa X Banach uzayı k-NUC uzay olarak tanımlanır [3].

Tanım 1.3.6. (Her Yönde Düzgün Konveks Uzay) $x_n - y_n = \alpha_n z$ ve $\|x_n + y_n\| \to 2$ olacak biçimde (x_n), $(y_n) \subseteq S(\mathrm{X})$ dizileri ve $z \in \mathrm{X} - \{0\}$ elemanı verildiğinde, $(\alpha_n) \to 0$ oluyorsa, X Banach uzayı her yönde düzgün konveks uzay (UCED) olarak adlandırılır [35].

1.4. BazıGeometrik Özellikler

Tanım 1.4.1. (Drop (damla) Özelliği) Herhangi $x \notin B(\mathrm{X})$ için, x ile tanımlı "drop" (damla) kümesi

$$D(x, B(\mathrm{X})) = conv(\{x\} \cup B(\mathrm{X}))$$

kümesidir. $B(\mathrm{X})$ ile ayrık olan her kapalı C kümesi için bir $x \in C$

$$D(x, B(\mathrm{X})) \cap C = \{x\}$$

olacak şekilde varsa X Banach uzayı drop (damla(D)) özelliğine sahiptir denir [3].

Tanım 1.4.2. (Kadec-Klee (H) Özelliği) Birim küre üzerindeki her zayıf yakınsak dizi norma göre yakınsaksa X Banach uzayı Kadec-Klee (H) özelliğine sahiptir denir [35].

Tanım 1.4.3. (Düzgün Kadec-Klee Özelliği) $\forall \varepsilon > 0$ ve $sep(x_n) > \varepsilon$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ olan $S(\mathrm{X})$ deki $\forall (x_n)$ dizisi için,

$$\|x\| < 1 - \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ varsa X Banach uzayı düzgün Kadec-Klee (UKK) özelliğine sahiptir denir [3].

Teorem 1.4.4. Her UKK Banach uzayı (H) özelliğine sahiptir [23].

Tanım 1.4.5. (λ ve Düzgün λ-Özellikleri) $ExtB(\mathrm{X})$ ile X Banach uzayının kapalı birim yuvarının extremum noktalarının kümesi gösterilsin. Her bir $z \in B(\mathrm{X})$ için,

$$\lambda(z) = \sup\{\lambda \in [0,1] : z = \lambda x + (1-\lambda)y, \text{ bazı } x \in ExtB(\mathrm{X}) \text{ ve } y \in B(\mathrm{X})$$

için $\}$

olsun.

$\forall z \in B(\mathrm{X})$ için $\lambda(z) \neq 0$ ise, X uzayı λ-özelliğine sahiptir denir. Ayrıca;

$$\lambda(\mathrm{X}) := \inf\{\lambda(z) : z \in S(\mathrm{X})\}$$

olsun. Eğer $\lambda(\mathrm{X}) > 0$ X uzayı düzgün λ-özelliğine sahip bir uzay olarak adlandırılır [2].

Tanımladığımız özelliklerin birbirlerini gerektirmeleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Rfx+R $\quad$ UKK $\rightarrow$ H

$\uparrow$ $\qquad$ $\uparrow$

(k+1)C $\leftarrow$ kC $\quad$ NUC $\rightarrow$ D

$\uparrow$ $\quad$ $\nearrow$ $\quad$ $\nwarrow \downarrow$

WU R $\leftarrow$ UR $\quad$ Rfx+UKK $\leftarrow$ Rfx

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$ $\searrow$ $\qquad$ $\uparrow$

WLUR $\leftarrow$ LUR $\quad$ UkR $\rightarrow$ U(k+1)R

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$

MLUR $\quad$ LUkR

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$

R $\rightarrow$ kR

Şekil 1.2 Geometrik Özellikler

1.5. Bazı Geometrik Sabitler

Tanım 1.5.1. X Banach uzayının sınırlı bir A alt kümesi için, non-kompakt olmanın küme ölçümü

$$\alpha(A) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{A, çapı } \leq \varepsilon \text{ olan sonlu çokluktaki küme ile örtülebilir}\}$$

dir.

Non-kompakt olmanın yuvar ölçümü ise,

$$\beta(A) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{ A, çapı } \leq \varepsilon \text{ olan sonlu çokluktaki yuvarla örtülebilir}\}$$

dır. α ve β fonksiyonları sırasıyla X uzayının non-kompakt olmasının Kuratowski ölçümü ve Hausdorff ölçümü olarak adlandırılır [28].

Tanım 1.5.2. X uzayının paketleme oranı, Kuratowski ve Hausdorff ölçümleri kullanılarak

$$\Upsilon(\mathrm{X}) = \sup\{\beta(A)/\alpha(A) : \text{A, X uzayında sınırlı ve ön kompakttır}\}$$

ile tanımlanabilir. Bu ifade sabit küme ve yuvar konsantrasyonları arasındaki ilişkiyi belirlemek amacıyla tanımlanmıştır [38].

Tanım 1.5.3. X Banach uzayının kapalı, sınırlı, konveks bir alt kümesi A olsun. A kümesinin çapı

$$\text{diam A} = \sup_{x \in A}\{\|y - x\| : y \in A\}$$

dir [10].

Tanım 1.5.4. (Banach Uzaylarında Normal Yapı) X refleksif bir Banach uzayı ve A, X uzayının kapalı, sınırlı, konveks bir alt kümesi olsun. A kümesindeki her bir x elemanı için $r(x,A)=\sup\{\|x-y\|: y\in A\}$ olmak üzere A kümesinin Chebyhsev yarıçapı,

$$R(A)=\min\{r(x,A): x\in A\}$$

ile tanımlanır.
X uzayının kapalı, sınırlı, konveks, birden fazla elemana sahip her A alt kümesi için

$$R(A)<\text{diam}(A)$$

şartı sağlanıyorsa, X Banach uzayı normal yapıya sahiptir denir [28].

Tanım 1.5.5. (Normal Yapı Katsayısı) X Banach uzayının $N(\mathrm{X})$ ile gösterilen normal yapı katsayısı, birden fazla
elemanı olan X uzayının bütün kapalı, konveks A alt kümeleri üzerinden alınan $diam(A)/R(A)$ sayı kümesinin infimum değeridir.

$N(\mathrm{X})=\inf\{diam(A)/R(A):$ A, X uzayının $|A|>1$ olan boştan farklı, kapalı, konveks, sınırlı alt kümesi $\}$

olarak X uzayının normal yapı katsayısı tanımlanır [1].

Tanım 1.5.6. (Sınırlı Dizi Katsayısı) X Banach uzayındaki sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisinin asimptotik çapı

$$\lim_n \sup\{\|x_m-x_k\|: m\geq n, k\geq n\}$$

ile tanımlanır ve bu sayı $A(\{x_n\})$ ile gösterilir. X uzayının sınırlı dizi katsayısı, asimptotik çapı $A(\{x_n\})$ olan her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için, $\{x_n\}$ dizisinin kapalı, konveks kabuğunda bulunan bazı y elemanları için

$$M \limsup_n \|x_n - y\| \leq A$$

özelliğine sahip bütün M sayılarının kümesinin supremumudur ve $BS(\mathrm{X})$ ile gösterilir, yani

$$BS(\mathrm{X}) = \sup\{M : \mathrm{X} \text{ deki her sınırlı } \{x_n\} \text{ dizisi için, } y \in \overline{conv}(x_n) \text{ vardır öyle}$$
$$\text{ki } M \limsup_n \|x_n - y\| \leq A(\{x_n\}) \}$$

şeklinde tanımlı katsayı ise X uzayının sınırlı dizi katsayısı olarak adlandırılır [13].

Teorem 1.5.7. Bir X Banach uzayı için,

$$N(\mathrm{X}) = BS(\mathrm{X})$$

dir [13].

Tanım 1.5.8. X Banach uzayındaki sınırlı bir (x_n) dizisi için

$$A(\{x_n\}) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sup\left\{\|x_i - x_j\| : i, j \geq n, i \neq j\right\}\right\}$$
$$A_1(\{x_n\}) = \lim_{n\to\infty}\left\{\inf\left\{\|x_i - x_j\| : i, j \geq n, i \neq j\right\}\right\}$$

olsun. $\{x_n\}$ dizisi için $A(\{x_n\}) = A_1(\{x_n\})$ ise bu dizi asimptotik eş uzaklıkta olan dizi olarak adlandırılır [14].

Tanım 1.5.9. (Zayıf Yakınsak Dizi Sabiti) X uzayının zayıf yakınsak dizi sabiti $WCS(\mathrm{X})$ ile gösterilir ve

$$WCS(\mathrm{X}) =$$

$$\sup\left\{ k > 0 : \text{ her } \mathrm{x_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathrm{x} \text{ için, } \mathrm{k} \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\| \le A(\{x_n\}) \text{ olan, } y \in conv(\{x_n\}) \text{ var dır} \right\}$$

ile tanımlıdır. $conv(\{x_n\})$, $\{x_n\}$ dizisinin elemanlarının konveks kabuğudur. $WCS(\mathrm{X})$, $N(\mathrm{X})$ ve $BS(\mathrm{X})$ katsayıları normal yapı ile bağlantılıdır öyle ki bu üç katsayıdan herhangi biri 1 den büyük (veya hepsi 1 ile 2 arasında) ise uzay normal yapıya sahiptir [28].

Tanım 1.5.10. (Maluta Katsayısı) $M(\mathrm{X}) = \dfrac{1}{WCS(\mathrm{X})}$ sayısı refleksif bir Banach uzayı için Maluta katsayısı olarak tanımlanır ve her non-refleksif Banach uzayı için $M(\mathrm{X})$ =1 dir [27].

1.6. Opial Özelliği

Opial özelliği Banach uzaylarının sabit nokta teorisinde önemli bir rol oynar.

Tanım 1.6.1. (Opial Özelliği) X uzayındaki herhangi sıfıra zayıf yakınsak $\{x_n\}$ dizisi ve herhangi $x \in \mathrm{X} - \{0\}$ için,

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n + x\|$$

sağlanıyorsa, X Banach uzayı Opial özelliğine sahiptir denir [20].

Tanım 1.6.2. (Düzgün Opial Özelliği) Herhangi $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\|x\| \geq \varepsilon$ olan herhangi $x \in \mathrm{X}$ ve $S(\mathrm{X})$ in sıfıra zayıf yakınsak $\{x_n\}$ dizisi için $r > 0$ sayısı

$$1 + r < \liminf_{n\to\infty} \|x_n + x\|$$

olacak şekilde varsa, X Banach uzayı düzgün Opial özelliğine sahiptir denir [20].

Tanım 1.6.3. (L-Özelliği)

$\beta(A) = \inf\{\varepsilon > 0 :$ A, çapı $\leq \varepsilon$ olan sonlu çokluktaki yuvarla örtülebilir$\}$,

non-kompakt olmanın Hausdorff ölçümü olmak üzere**,** her $\varepsilon > 0$ için

$\Delta(\varepsilon) = \inf\{1 - \inf[\|x\| : x \in A] : \beta(A) \geq \varepsilon$ olan A, $B(\mathrm{X})$ in kapalı alt kümesi$\}$

tanımlansın. Δ fonksiyonuna non-kompakt konveksliğin modülüs fonksiyonu denir. $\lim_{\varepsilon\to 1} \Delta(\varepsilon) = 1$ ise, X Banach uzayı L -özelliğine sahiptir denir.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\Delta(\varepsilon) > 0$ ise, X uzayı Δ-düzgün konveks uzay olarak adlandırılır [20].

Teorem 1.6.4. X Banach uzayı L- özelliğine sahiptir $\Leftrightarrow$ X refleksiftir ve düzgün Opial özelliğine sahiptir [20].

1.7. Sabit Nokta Özelliği

Tanım 1.7.1. A kümesi, X Banach uzayının alt kümesi olsun. $x, y \in A$ için $\|Ux - Uy\| \leq \|x - y\|$ eşitsizliği sağlanırsa $U : A \to \mathrm{X}$ dönüşümüne genişlemeyen (nonexpansive) bir dönüşüm adı verilir.

Tanım 1.7.2. Her boş kümeden farklı, sınırlı, kapalı, konveks A kümesi ve her genişlemeyen U:$A \to A$ dönüşümü için $U(x) = x$ olan $x \in A$ varsa X Banach uzayı sabit nokta özelliğine sahiptir denir [20].

Teorem 1.7.3. A kümesi normal yapıya sahip olan refleksif bir Banach uzayının konveks, sınırlı, kapalı bir alt kümesi olsun. U:$A \to A$ dönüşümü genişlemeyen bir dönüşüm ise, U bir sabit noktaya sahiptir [20].

Teorem 1.7.4. *X,* duali X^* olan bir Banach uzayı olsun. X^* L- özelliğine sahipse, X uzayı da sabit nokta özelliğine sahiptir [20].

BÖLÜM 2. MODÜLER UZAYLAR

Tanım 2.1.1. X reel veya kompleks vektör uzayı olsun. $\rho : \mathrm{X} \to [0,\infty]$ fonksiyonu, keyfi x,y$\in$ X için aşağıdaki şartları sağlarsa bir pseudomodül adını alır:

i. $\rho(\theta) = 0$

ii. $\rho(-x) = \rho(x)$ (X uzayının reel olması durumunda); $\rho(e^{it}x) = \rho(x)$ $\forall t \in R$ için (X uzayının kompleks olması durumunda)

iii. $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ $\alpha, \beta \geq 0; \alpha + \beta = 1$

iii yerine aşağıdaki şart sağlanırsa , $s \in (0,1]$ için ρ pseudomodülü s-konveks pseudomodül adını alır:

iv. $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s \rho(x) + \beta^s \rho(y)$ ($\alpha, \beta \geq 0, \alpha^s + \beta^s = 1$ için). s=1 olması durumunda ise konveks modül adını alır. i şartının yanında $\forall \lambda > 0$ için $\rho(\lambda x) = 0 \Rightarrow x = \theta$ şartı da sağlanırsa ρ semi-modül adını alır.

Üstelik ; $\rho(x) = 0 \Rightarrow x = \theta$ durumunun sağlanması halinde ρ bir modüldür [32].

Örnek 2.1.2. $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde $\mathrm{X} = L^p$ olsun. $\rho(x) = \int_a^b |x(t)|^p dt$, $0 < p < 1$ için, X üzerinde p-konveks modüldür, $p \geq 1$ için ise X üzerinde konveks modüldür [32].

Uyarı 2.1.3. X reel sayıların uzayı ve $\forall x \in \mathrm{X}$ için $\rho(x) \geq 0$, $\rho(\theta) = 0$ olsun. (ii) şartı ρ nun bir çift fonksiyon olması demektir; (iii) ise ρ fonksiyonunun $x \geq 0$ için azalmayan bir fonksiyon olması durumu ile denktir [32].

2.2. Pseudomodüllerin Özellikleri

i. $|\alpha| \le 1 \Rightarrow \rho(\alpha x) \le \rho(x)$

ii. $\alpha_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \ \Rightarrow\ \rho\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)$

iii. $0 < s \le 1$ için ρ, s- konveks ise; $\alpha_i \ge 0,\ \rho\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^s \rho(x_i)$ dir [32].

Tanım 2.2.1. ρ, X uzayında bir pseudomodül ise,

$$X_\rho = \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0 \right\}$$

uzayına modüler uzay denir [32].

Tanım 2.2.2. Bir X vektör uzayı üzerinde $|.| : X \to [0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa F-pseudonorm adını alır:

i. $|\theta| = 0$

ii. $|-x| = |x|,\quad \left(|e^{it}x| = |x| \quad (\forall t \in \mathbb{R}\ \text{için})\right.$ X uzayının kompleks uzay olması durumunda$\left.\right)$

iii. $|x + y| \le |x| + |y|$

iv. $\alpha_k \to \alpha, |x_k - x| \to 0$ ise, $|\alpha_k x_k - \alpha x| \to 0$.

Üstelik;

v. $|x| = 0,\ x = \theta$ olmasını gerektiriyorsa "$|.|$" F-normu adını alır.

X uzayında $\alpha > 0$ için x in azalmayan fonksiyonu $|\alpha x|$ olmak üzere; her F-normu olan $|.|$ (F-pseudonormu) , bir modüldür (pseudomodüldür).

Eğer $|.| : X \to [0,\infty)$ fonksiyonu yukarıdaki (i),(ii),(iii) şartları ve

vi. $|\alpha x| = |\alpha|^s |x|$, $0 < s \le 1$ şartını sağlarsa $|.|$, s-homojen pseudonorm veya kısaca s-pseudonorm adını alır ve son olarak (v) şartı da eklenirse X de bir s-normu elde edilir. Bir s-normu genellikle $\| \|^s$ ile gösterilir. s=1 olması durumunda 1- norm elde edilir ve $\|.\|$ ile gösterilir.

X uzayı, $|.|$ F-normu (s-norm, norm) ile, $d(x,y) = |x-y|$ olan bir metriklenebilir vektör uzayıdır [32].

Teorem 2.2.3. ρ X uzayında bir pseudomodül ise

$$|x|_\rho = \inf\left\{u > 0 : \rho\left(\frac{x}{u}\right) \le u\right\},$$

fonksiyonu X_ρ uzayında bir F-pseudonormdur ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $x_1, x_2 \in X_\rho$ iken $\forall \lambda > 0$ için $\rho(\lambda x_1) \le \rho(\lambda x_2) \Rightarrow |x_1|_\rho < |x_2|_\rho$ dur.

ii. $x \in X_\rho \Rightarrow \alpha \ge 0$ için $|\alpha x|$ azalmayan bir fonksiyondur.

iii. $|x|_\rho < 1 \Rightarrow \rho(x) \le |x|_\rho$ dur [32].

ρ , X uzayında semi-modül ise, $|.|_\rho$ X uzayında bir F- normudur. Eğer ρ, $0 < s \le 1$ için s-konveks pseudomodül ise;

$$\|x\|^s = \inf\left\{u > 0 : \rho\left(\frac{x}{u^{\frac{1}{s}}}\right) \le 1\right\}$$

X uzayında bir s-pseudonormdur. Eğer ρ bir s-konveks semi-modül ise; $\|.\|_\rho^s$, X_ρ uzayında s-homojen normdur [32].

Teorem 2.2.4. ρ, X uzayında bir pseudomodül olsun. $x \in X_\rho$ ve k=1,2,3,…. için $x_k \in X_\rho \Rightarrow k \to \infty$ iken $|x_k - x|_\rho \to 0$ şartı, $\forall \lambda > 0$ için $k \to \infty$ iken $\rho(\lambda(x_k - x)) \to 0$ şartı ile denktir [32].

Tanım 2.2.5. k=1,2,3,… için $x_k \in X_\rho$ ise, X_ρ uzayı üzerinde, F-pseudonormu $|.|_\rho$ tanımlanmış bir uzay olmak üzere (x_k) bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow$ $\forall \lambda > 0$ için $k,\ l \to \infty$ iken $\rho(\lambda(x_k - x_l)) \to 0$ dır. ρ, X uzayında bir s-konveks pseudomodül ise $|\ |_\rho$ ile $\|\ \|_\rho$ nun yerleri değiştirilerek aynı durum sağlanır [32].

Tanım 2.2.6. X uzayında bir ρ pseudomodülü

i. sağdan süreklidir demek $\forall x \in X_\rho$ için $\lim_{\lambda \to 1^+} \rho(\lambda x) = \rho(x)$ olmasıdır.

ii. soldan süreklidir demek $\forall x \in X_\rho$ için $\lim_{\lambda \to 1^-} \rho(\lambda x) = \rho(x)$ olmasıdır.

Hem sağdan hem de soldan sürekli ise süreklidir denir [32].

Teorem 2.2.7. Eğer ρ bir s-konveks pseudomodül ise;

$$\|x\|_\rho^s = \inf_{k>0} \frac{1 + \rho\left(k^{\frac{1}{s}} x\right)}{k}$$

X_ρ uzayında s-pseudonormdur ve $\forall x \in X_\rho$ için $\|x\|_\rho^s \le \|x\|_0^s \le 2\|x\|_\rho^s$ tir [32].

s=1 olması durumunda, X_ρ uzayında, Luxemburg normu,

$$\|x\| = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \le 1\right\}$$

Orlicz veya Amemiya normu da

$$\|x\|_0 = \inf\left\{k > 0 : \frac{1}{k}\left(1 + \rho(kx)\right)\right\}$$

ile tanımlanır.

2.3. Eşlenik Modüller

ρ , X reel veya kompleks vektör uzayında bir konveks pseudomodül ve

$$\|x\|_\rho = \inf\left\{u > 0 : \rho\left(\frac{x}{u}\right) \le 1\right\}$$

normu ile tanımlı $\left(\mathrm{X}_\rho, \|\ \|_\rho\right)$ normlu uzayı üzerinde tanımlı bütün sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayı X_ρ^* olsun [32].

Tanım 2.3.1. ρ nun ρ^* eşlenik modülü, $x^* \in \mathrm{X}_\rho^*$ için

$$\rho^*\left(x^*\right) = \sup\left\{\left|x^*(x)\right| - \rho\left(x\right) : x \in \mathrm{X}_\rho\right\}$$

formülü ile tanımlıdır ve ρ^*, X_ρ^* üzerinde bir semi-modüldür [32].

Teorem 2.3.2. ρ , X vektör uzayı üzerinde bir konveks pseudomodül ise; ρ^*, X_ρ^* uzayında konveks, soldan sürekli bir semi-modüldür [32].

Bu teoremden hareketle X_ρ^* uzayında ρ^* tarafından üretilen $x^* \in \mathrm{X}_\rho^*$ için

$$\|x^*\|_{\rho^*} = \inf\left\{u > 0 : \rho^*\left(\frac{x^*}{u}\right) \le 1\right\}$$

normu tanımlanabilir.

Bu normun yanı sıra ρ fonksiyonunun, X uzayında bir konveks semi-modül olması durumunda, X_ρ^* uzayında

$$\|x^*\|_\rho^* = \sup\left\{\left|x^*(x)\right| : \|x\|_\rho \le 1,\ x \in \mathrm{X}_\rho\right\}$$

normu da tanımlıdır [32].

Teorem 2.3.3. ρ, X uzayında konveks ve soldan sürekli bir semi-modül ise; $\forall\ x^* \in X_\rho^*$ için

$$\left\|x^*\right\|_{\rho^*} \leq \left\|x^*\right\|_\rho^* \leq 2\left\|x^*\right\|_{\rho^*}$$

dır [32].

2.4. Modüler Yakınsaklık

Tanım 2.4.1. ρ , X uzayında bir pseudomodül olsun. $k \to \infty$ iken bir $\lambda > 0$ sayısı $\rho\left(\lambda\left(x_k - x\right)\right) \to 0$ olacak şekilde varsa, X_ρ uzayının elemanlarının bir (x_k) dizisi $x \in X_\rho$ elemanına modüler yakınsaktır ya da kısaca ρ- yakınsaktır denir. Bu $x_k \xrightarrow{\rho} x$ ile gösterilir [32].

2.4.2. Modüler yakınsaklığın özellikleri

i. $x_k' \xrightarrow{\rho} x'$ ve $x_k'' \xrightarrow{\rho} x'' \Rightarrow x_k' + x_k'' \xrightarrow{\rho} x' + x''$

ii. $x_k \xrightarrow{\rho} x$ ve c bir sabit ise, $cx_k \xrightarrow{\rho} cx$

iii. ρ bir modüler ise , X_ρ uzayının elemanlarından oluşan her (x_k) dizisi en fazla bir modüler limite sahiptir.

iv. Norma göre yakınsaklık ve ρ -yakınsaklık X_ρ uzayında denktir $\Leftrightarrow x_k \in X_\rho$ olmak üzere $\rho\left(x_k\right) \to 0 \Rightarrow \rho\left(2x_k\right) \to 0$ dır [32].

Uyarı 2.4.3. ρ -yakınsaklık norma göre yakınsaklığı gerektirmez. Bu durum modüler uzaylar teorisinin gelişiminde önemlidir, çünkü X_ρ uzayında yalnızca norma göre yakınsaklık olsaydı, ρ modülünün bir vektör uzayında kullanılabilmesi ancak bu uzayda bir norm tanımlamak şartı ile mümkün olacaktır.

Teorem 2.4.4. $\left(x_n\right) \subset X_\rho$ olsun. $\|x_n\| \to 0$ (veya denk olarak $\|x_n\|_0 \to 0$) $\Leftrightarrow \forall \lambda > 0$ için, $n \to \infty$ iken $\rho\left(\lambda\left(x_n\right)\right) \to 0$ dır [24].

Tanım 2.4.5. Herhangi $\varepsilon > 0$ için, $K \geq 2$, $a > 0$ sabitleri $\rho\left(u\right) \leq a$ olan $\forall u \in X_\rho$ için

$$\rho\left(2u\right) \leq K\rho\left(u\right) + \varepsilon$$

olacak şekilde varsa ρ modülü δ_2 şartını sağlar denir.

ρ modülü $a>0$ sayısına bağlı $K\geq 2$ için δ_2 şartını sağlarsa, ρ kuvvetli δ_2 şartını sağlar denir ve $\rho\in\delta_2^s$ ile gösterilir [32].

Teorem 2.4.6. $\rho\in\delta_2^s$ ise, herhangi $L>0$ ve $\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ vardır öyle ki $\rho(u)\leq L,\ \rho(v)\leq\delta$ olan $u,\ v\in X_\rho$ için $\left|\rho(u+v)-\rho(u)\right|<\varepsilon$ olur [24].

Teorem 2.4.7.

i. $\rho\in\delta_2^s$ ise, herhangi $x\in X_\rho$ için, $\|x\|=1 \Leftrightarrow \rho(x)=1$ dir.

ii. $\rho\in\delta_2^s$ ise, X_ρ uzayındaki herhangi (x_n) dizisi için

$$\|x_n\|\to 0 \Leftrightarrow \rho(x_n)\to 0$$

dır [24].

Teorem 2.4.8. $\rho\in\delta_2^s$ iken herhangi $\varepsilon\in(0,1)$ için, $\delta\in(0,1)$ vardır öyle ki

$$\rho(x)\leq 1-\varepsilon \Rightarrow \|x\|\leq 1-\delta$$

dır .

İspat: Farz edelim ki teorem sağlanmasın. $\varepsilon>0$ ve $x_n\in X_\rho$ vardır öyle ki $\rho(x_n)\leq 1-\varepsilon$ ve $\frac{1}{2}\leq\|x_n\|\to 1$ olsun. $a_n=\frac{1}{\|x_n\|}-1$ dizisi alalım. $n\to\infty$ iken $a_n\to 0$ dır. $L=\sup\{\rho(2x_n):n\in\mathbb{N}\}$ olsun. $\rho\in\delta_2^s$ olduğundan $K\geq 2$ sayısı vardır öyle ki $\rho(u)\leq 1$ olan $\forall u\in X_\rho$ için $\rho(2u)\leq K\rho(u)+1$ dir. $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\rho(2x_n)\leq K\rho(x_n)+1<K+1$ olur. Böylece $0<L<\infty$ olur. $\rho\in\delta_2^s$ olduğundan teorem (2.4.7) (i) den herhangi $x\in X_\rho$ için $\|x\|=1 \Leftrightarrow \rho(x)=1$ olduğundan

$$1=\rho\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)=\rho\left(\frac{1}{\|x_n\|}x_n\right)=\rho\left(x_n(a_n+1)\right)=\rho\left(2a_nx_n+(1-a_n)x_n\right)$$

$$1 \leq a_n \rho(2x_n) + (1-a_n)\rho(x_n)$$

$$1 \leq a_n L + (1-a_n)(1-\varepsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 \leq \lim_{n\to\infty} a_n L + \lim_{n\to\infty}(1-a_n)(1-\varepsilon)$$
$$1 \leq (1-\varepsilon)$$

olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla teoremin şartları sağlanır.

Teorem 2.4.9. $\rho \in \delta_2$ ise, norma göre yakınsaklık ile modüler yakınsaklık denktir [24].

BÖLÜM 3. BAZI DİZİ UZAYLARI

3.1. Musielak-Orlicz Dizi Uzayları

l^0 bütün reel dizilerin uzayı olsun. $\Phi = (\phi_i)_{i=1}^{\infty}$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi iken, Musielak-Orlicz dizi uzayı l_Φ,

$$l_\Phi = \left\{ x = \left(x(i) \right)_{i=1}^{\infty} \in l^0 : I_\Phi\left(\lambda x\right) < \infty \text{ bazı } \lambda > 0 \text{ için} \right\},$$

ile tanımlıdır ve $I_\Phi\left(\lambda x\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i\left(\lambda x(i)\right)$, l_Φ üzerinde konveks modüldür. l_Φ, hem Luxemburg normu, hem de Amemiya (Orlicz) normu ile Banach uzayıdır. Notasyonları kolaylaştırmak için bu uzaylar sırasıyla $l_\Phi = \left(l_\Phi, \| \ \|\right)$ ve $l_\Phi^0 = \left(l_\Phi, \| \ \|_0\right)$ olarak gösterilecektir.

$$h_\Phi = \left\{ x \in l_\Phi : I_\Phi\left(\lambda x\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i\left(\lambda x(i)\right) < \infty, \text{ herhangi } \lambda > 0 \text{ için} \right\}$$

uzayı l_Φ uzayının alt uzayıdır.

Herhangi $x \in l_\Phi$ için,

$$\theta(x) = \sup\left\{ \lambda > 0 : I_\Phi\left(\lambda x\right) < \infty \right\}$$

alınırsa, $h_\Phi = \left\{ x \in l_\Phi : \theta(x) = \infty \right\}$ olduğu açıktır [11].

Musielak-Orlicz uzayları l_Φ ve l_Φ^0, $\forall i \in \mathbb{N}$ için $x \le y \Leftrightarrow x(i) \le y(i)$, kısmi sıralaması altında birer Banach latisidirler [16].

Sabit bir $x \in l_\Phi^0$ noktası için elde edilen $\|x\|_0 = \inf_{k>0} \frac{1}{k}\left(1 + I_\Phi(kx)\right)$ deki infimumu alınan k ların kümesi $K(x)$ ile gösterilsin. Hudzık ve Zbaszynıak [40] daki makalelerinde Amemiya normu ile donatılmış l_Φ uzayında herhangi $i \in \mathbb{N}$ için $u \to \infty$ iken $\frac{\phi_i(u)}{u} \to \infty$ ise, $x \in l_\Phi$ için $\|x\|_0 = \frac{1}{k}\left(1 + \rho_\Phi(kx)\right)$ olan bir k$\in \mathbb{R}$ sayısının var olduğunu göstermişlerdir. Eğer Orlicz dizi uzayı l_Φ^0, $\lim_{u\to\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$ şartını sağlamayan bir Φ Orlicz fonksiyonu tarafında üretilen bir uzay ise $K(x)$ kümesi boş küme olabilir. $\forall x \in l_\Phi$ için, Φ bir N'- fonksiyonu ise $K(x) \neq \emptyset$ dir [15].

Teorem 3.1.1. $\Phi = (\phi_i)_{i=1}^\infty$ Orlicz fonksiyonlarının bir dizisi iken, Musielak-Orlicz dizi uzayı l_Φ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

i. $l_\Phi = h_\Phi$

ii. δ_2 şartı sağlanır,

iii. l_Φ uzayında modular yakınsaklık ve norma göre yakınsaklık denktir [32].

Tanım 3.1.2. Herhangi $\varepsilon \in (0,1)$ için, $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki, $\forall i \in \mathbb{N}$ için $\Phi_i(u) \le 1 - \varepsilon$ iken $\Phi_i((1+\delta)u) \le 1$ ise, Φ Musielak-Orlicz fonksiyonu (*) şartını sağlar denir.

Lemma 3.1.3. Bir Musielak-Orlicz fonksiyonu $\Phi = (\Phi_i)$, (*) şartını sağlarsa ve $\Phi \in \delta_2$ ise, $\forall \varepsilon > 0$ için, $I_\Phi(x) < 1 - \varepsilon$ iken $\|x\|_\Phi < 1 - \delta$ olan bir $\delta > 0$ sayısı vardır [4].

Lemma 3.1.4. Bir Musielak-Orlicz fonksiyonu $\Phi = (\Phi_i)$ için, $\Phi \in \delta_2$ ve (*) şartı sağlanıyorsa, $\forall \varepsilon > 0$ için $\sigma > 0$ sayısı vardır öyle ki $I_\Phi(x) \le 1, I_\Phi(y) \le 1$ ve $I_\Phi(x - y) \le \sigma$ iken $\left|I_\Phi(x) - I_\Phi(y)\right| < \varepsilon$ olur [4].

Lemma 3.1.5. Φ fonksiyonu δ_2^* şartını sağlarsa, $\theta \in (0,1)$ sayısı ve $\mathbb{R}$ de $\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(h_i) < \infty$ olan (h_i) dizisi vardır öyle ki, $\forall i \in \mathbb{N}$ ve $\Phi_i(h_i) \leq \Phi_i(u) \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan $u \geq 0$ için $\Phi_i\left(\frac{u}{2}\right) \leq \frac{(1-\theta)}{2}\Phi_i(u)$ eşitsizliği sağlanır [4].

Lemma 3.1.6. $\Phi \in \delta_2$ ise, $\|x\|_\Phi = 1 \Leftrightarrow I_\Phi(x) = 1$ dir [4].

Teorem 3.1.7. $x \in l_\Phi^0, (x \neq 0)$ olsun. $K(x) = \varnothing$ ise, bu taktirde,

$$\|x\|_0 = \lim_{k \to \theta(x)^-} \frac{1}{k}\left(1 + I_\Phi(kx)\right)$$

dir [11].

Sonuç 3.1.8. $\theta(x) < \infty$ ve $x \in l_\Phi^0$ ise, $K(x) \neq \varnothing$ dir [11].

Sonuç 3.1.9. $x \in l_\Phi^0$ ve $K(x) = \varnothing$ ise, bu durumda, herhangi $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x(i)e_i\right\|_0 = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} I_\Phi\left(k\sum_{i=1}^{n} x(i)e_i\right)$$

$$\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty} x(i)e_i\right\|_0 = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} I_\Phi\left(k\sum_{i=n+1}^{\infty} x(i)e_i\right)$$

dir [11].

Sonuç 3.1.10. $x \in l_\Phi^0$ ve $K(x) = \varnothing$ ise, $A = \lim_{u \to \infty} \frac{\Phi(u)}{u}$ olduğunda, $\|x\|_0 = A\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|$ olur [11].

3.2. Nakano Dizi Uzayı

Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ olan pozitif reel sayıların bir (p_k) dizisi verilsin.

$$l := l(p) = \{x = (x_k) : \rho(\lambda x) < \infty, \text{ bazı } \lambda > 0 \text{ için}\}$$

uzayı, $\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k}$ modül fonksiyonu olmak üzere, $\|x\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$ normuna göre bir Banach uzayıdır ve bu uzay Nakano dizi uzayı olarak adlandırılır. $0 < p_k \leq 1$ için l uzayı çeşitli yazarlar tarafından çalışılmıştır. Yukarıda tanımlanan ve Luxemburg normu adı verilen norm, Nakano tarafından tanımlanan normdan farklıdır. Aslında Nakano tarafından tanımlanan x in normu

$$\|x\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \left|\frac{x_k}{\lambda}\right|^{p_k} \leq 1\right\}$$

biçimindedir. Her bir $x \in l$ ve bazı $\lambda > 0$ için, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} |\lambda x_k|^{p_k} < \infty$ dur. Nakano dizi uzayları Musielak-Orlicz dizi uzaylarının özel bir durumudur [2].

3.3. Köthe Dizi Uzayı

Tanım 3.3.1. X Banach uzayı aşağıdaki koşulları sağlarsa Köthe dizi uzayı olarak adlandırılır:

i. $\forall x \in l^0$ ve $\forall i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $|x_i| \leq |y_i|$ şartını sağlayan $y \in \mathrm{X}$ için, $x \in \mathrm{X}$ ve $\|x\| \leq \|y\|$ olur.

ii. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $x(i) > 0$ olan bir $x \in \mathrm{X}$ vardır [19].

Tanım 3.3.2. X Köthe dizi uzayında herhangi $x \in \mathrm{X}$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|(0,0,0,...,x(n+1),x(n+2),...)\| = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, X uzayı kesin sürekli norma sahiptir denir [19].

Tanım 3.3.3. $e_i = \left(0,0,...,\overset{i.}{1},0,0,...\right)$ olmak üzere, $\forall x \in \mathrm{X}$ için $\lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{i=1}^{n} x(i) e_i\right\| = \|x\|$ ise, X Köthe dizi uzayı A- özelliğine sahiptir denir [8].

Tanım 3.3.4. $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $0 \swarrow x_n(i) \leq |x(i)|$ olan X uzayındaki herhangi $x = x(i)$ elemanı için, $\|x_n\| \to 0$ sağlanıyorsa $x = x(i)$ elemanı (dizisi) sıralı süreklidir denir. X uzayındaki sıralı sürekli elemanların kümesi X_a ile gösterilir. $\mathrm{X} = \mathrm{X}_a$ ise X uzayı sıralı süreklidir denir [8].

Tanım 3.3.5. Herhangi $i \in \mathbb{N}$ için,

$$0 \leq x_n(i) \nearrow x(i) \;\; \Rightarrow \;\; \|x_n\| \nearrow \|x\|$$

ise, X Köthe dizi uzayı monoton tam uzay olarak adlandırılır. X uzayı bu şartı sağlarsa yarı-Fatou özelliğine sahiptir de denir [19].

3.4. Cesaro Dizi Uzayı

l^0 bütün reel dizilerin uzayı olmak üzere, $1 < p < \infty$ için, Cesaro dizi uzayı (ces $_p$)

$$ces_p = \left\{ x \in l^0 : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x(i)| \right)^p < \infty \right\}$$

ile tanımlıdır. Bu uzay

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x(i)| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile donatılmıştır. Bu uzay ilk olarak Shiue [36] tarafından tanımlanmıştır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 1$ olan pozitif sayıların $p = (p_n)$ dizisi tanımlansın. Genelleştirilmiş Cesaro dizi uzayı ces(p), $\rho(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x(i)| \right)^{p_n} \right)$ konveks modül fonksiyonu ile

$$ces(p) = \{ x \in l^0 : \rho(\alpha x) < \infty \text{ bazı } \lambda > 0 \text{ için } \}$$

olarak tanımlıdır.

Biz ces(p) uzayını $\|x\| = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \rho\left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \leq 1 \right\}$ şeklinde olan Luxemburg normu veya $\|x\|_0 = \inf \left\{ k > 0 : \frac{1}{k}\left(1 + \rho(kx)\right) \right\}$ olan Orlicz (veya Amemiya) normu ile donatılmış olarak alacağız ve bu uzaylar sırasıyla, $ces(p) = \left(ces(p), \|.\| \right)$ ve $ces^0(p) = \left(ces(p), \|.\|_0 \right)$ olarak gösterilen Banach uzaylarıdır. $p = (p_k)$ sınırlı ise

$$ces(p) = \left\{ x = (x(i)) : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x(i)| \right)^{p_n} < \infty \right\}$$

dir [6].

Burada, $M = \sup_r p_r$ ve $x \in l^0$ için $x|_i = \left(x(1), x(2), ..., x(i), 0, 0, ...\right)$ ve $x|_{\mathbb{N}-i} = \left(0, 0, ..., x(i+1), x(i+2), ...\right)$ gösterimleri kullanılacaktır.

Teorem 3.4.1. ρ fonksiyoneli $ces(p)$ üzerinde konveks modüldür [5].

Teorem 3.4.2. $x \in ces(p)$ için ρ modülü aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha^M \rho\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) \leq \rho(x)$ ve $\rho(\alpha x) \leq \alpha\rho(x)$

ii. $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha^M \rho\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) \geq \rho(x)$

iii. $\alpha \geq 1 \Rightarrow \rho(\alpha x) \geq \alpha\rho(x) \geq \rho(x)$

[5].

Teorem 3.4.3. Herhangi $x \in ces(p)$ için

i. $\|x\| < 1 \Rightarrow \rho(x) \leq \|x\|$,

ii. $\|x\| > 1 \Rightarrow \rho(x) \geq \|x\|$,

iii. $\|x\| = 1 \Leftrightarrow \rho(x) = \|x\|$,

iv. $\|x\| < 1 \Leftrightarrow \rho(x) < \|x\|$,

v. $\|x\| > 1 \Leftrightarrow \rho(x) > \|x\|$,

vi. $0 < \alpha < 1$ ve $\|x\| > \alpha \Rightarrow \rho(x) > \alpha^M$

vii. $\alpha \geq 1$, $\|x\| < \alpha \Rightarrow \rho(x) < \alpha^M$ dir

[5].

Teorem 3.4.4. ρ modülü $ces(p)$ uzayında süreklidir [6].

Teorem 3.4.5. $\{x_n\} \subset ces(p)$ olsun.

i. $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\| = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n) = 1$

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n) = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$

[5].

Teorem 3.4.6. $x \in ces(p)$ ve $\{x_n\} \subset ces(p)$ olsun. $n \to \infty$ iken $\rho(x_n) \to \rho(x)$ ve $\forall i \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ iken $x_n(i) \to x(i) \;\Rightarrow\; x_n \to x$ dir [5].

BÖLÜM 4. BAZI DİZİ UZAYLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Musielak-Orlicz, Nakano, Cesaro dizi uzaylarının bazı geometrik özellikleri verilecektir.

4.1. Musielak-Orlicz Dizi Uzayının Bazı Geometrik Özellikleri

Teorem 4.1.1. $x \in S\left(l_{\Phi}^{0}\right)$ noktasının bir H-noktası olması için gerek ve yeter şart $\Phi \in \delta_2$ veya $K\left(x\right) = \varnothing$ olmasıdır [8].

Sonuç 4.1.2. Orlicz normu ile donatılmış olan Musielak-Orlicz dizi uzayının H-özelliğine (Kadec-Klee özelliğine) sahip olması için gerek ve yeter şart $\Phi \in \delta_2$ olmasıdır [8].

Teorem 4.1.3. Orlicz normu ile donatılmış olan Musielak-Orlicz dizi uzayı düzgün Kadec –Kleee (UKK) özelliğine sahiptir $\Leftrightarrow$ $\Phi \in \delta_2$ dir [8].

Sonuç 4.1.4. Üzerinde Orlicz normu tanımlanmış olan Musielak-Orlicz dizi uzayı hemen hemen
(nearly) düzgün konvekstir (NUC) $\Leftrightarrow$ bu uzay refleksiftir [8].

Teorem 4.1.5. Musielak-Orlicz dizi uzayı üzerinde Orlicz normu tanımlanmış olsun. Bu uzayın sabit nokta özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart uzayın refleksif olmasıdır [8].

Teorem 4.1.6. l_{Φ}^{0} uzayı kompakt yerel düzgün rotund uzaydır $\Leftrightarrow$ $\Phi \in \delta_2$ ve $\Psi \in \delta_2$ dir [11].

4.2. Nakano Dizi Uzayında Extremum Nokta, Rotund Olma, Düzgün λ-Özelliği, H-Özelliği, (UC), (UKK) Özelliği, (NUC) Özelliği, Damla Özelliği

(p_k) pozitif sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $k \geq 0$ için μ_k ile $\{n : p_n = 1\} \leq k$ olan kümenin eleman sayısı (sayma ölçüsü) ve $\inf\limits_{n \notin F} p_k > 1$ (en fazla k elemana sahip bazı sonlu F kümeleri için) olan sayılar da ve v_k ile gösterilecektir. Bu ifadeler Nakano dizi uzayının geometrik özellikleri çalışılırken kullanılır. Bununla birlikte aşağıdaki ifadeler de konu ile ilgili özelliklerin çalışılması sırasında ihtiyaç duyulan bazı özelliklerdir:

1. $\lim\limits_{\delta \to 1} \rho(\delta x) = \rho(x)$
2. $p_* = \inf_k p_k$ ve $p^* = \sup_k p_k$ olmak üzere

   $\|x\| \geq 1 \;\Rightarrow\; \|x\|^{p_*} \leq \rho(x) \leq \|x\|^{p^*}$

   $\|x\| < 1 \;\Rightarrow\; \|x\|^{p^*} \leq \rho(x) \leq \|x\|^{p_*}$

3. $\|x\| = 1 \;\Leftrightarrow\; \rho(x) = 1$ ve $\|x_n\| \to 1 \;\Leftrightarrow\; \rho(x_n) \to 1$ dir.

4.2.1. Extremum nokta ve rotund olma

Lemma 4.2.1.1. $x \in Ext\, \mathrm{B}(l) \;\Leftrightarrow$

i. $\rho(x) = 1$ ve

ii. μ, $\mathbb{Z}^+$ de sayma ölçüsü iken $\mu\{k : x_k \neq 0, p_k = 1\} \leq 1$ dir [2].

Teorem 4.2.1.2. l Nakano dizi uzayının rotund olması için gerek ve yeter şart en fazla bir k için $p_k = 1$ olmasıdır [2].

Teorem 4.2.1.3. l Nakano dizi uzayı kR uzaydır $\Leftrightarrow$ $\mu\{k : p_k = 1\} \leq k$ dir [2].

Uyarı 4.2.1.4. l Nakano dizi uzayın rotund uzay olması için gerek ve yeter şart bu uzayın 1-rotund olmasıdır:

$$\mathrm{R} \Leftrightarrow 1\mathrm{R}.$$

İspat: $(\Rightarrow)$ $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ ve $\|x_1 + x_2\| = 2$ ise $x := \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \in S(l)$ dir.

$$2x = x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

ve böylece x_1 ve x_2 nin lineer bağımlı olduğu görülür.

$(\Leftarrow)$ $\|x\| = 1,\ \|y\| \le 1,\ \|z\| \le 1$ ve *2x=y+z* olsun. $2 = \|y+z\| \le \|y\| + \|z\| \le 2$ den $\|y\| = \|z\| = 1$ olur. Böylece bazı *c* elemanları için *y=cz* olur.

$$1 = \|y\| = |c|\|z\| = |c|$$

dir ve buradan *c*=1 olduğu elde edilir.

Teorem 4.2.1.5. l Nakano dizi uzayı düzgün λ-özelliğine sahiptir $\Leftrightarrow$ $\mu\{k : p_k = 1\} < \infty$ olur.

Teorem 4.2.1.6. l Nakano dizi uzayı H-özelliğine sahiptir.

4.2.2. Düzgün konvekslik

Lemma 4.2.2.1. $K>1$ ve $f(p)=f_K(p)=\left(1+\frac{1}{K}\right)^p+\left(1-\frac{1}{K}\right)^p-2,\ (p\geq 1)$ olsun. f fonksiyonu $[1,\infty)$ aralığında kesin artan bir fonksiyondur.

Uyarı 4.2.2.2. Yukarıdaki lemmadan aşağıdaki ifadeler elde edilebilir:

a) $0\leq \frac{a}{K}<\varepsilon\leq a$ ve $p\geq p_*>1$ için,

$$(a+\varepsilon)^p+(a-\varepsilon)^p-2a^p=a^p\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{a}\right)^p+\left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)^p-2\right]\geq a^p\left[\left(1+\frac{1}{K}\right)^p+\left(1-\frac{1}{K}\right)^p-2\right]$$

$$\geq a^p f(p_*)\geq \varepsilon^p f(p_*)\ .$$

b) $0\leq a<\varepsilon\leq Ka$ ve $p\geq p_*>1$ için,

$$(\varepsilon+a)^p+(\varepsilon-a)^p-2a^p\geq \varepsilon^p\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{a}\right)^p+\left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)^p-2\right]\geq \varepsilon^p f(p_*).$$

c) $0\leq Ka<\varepsilon$ ve $p>1$ için,

$$(\varepsilon+a)^p+(\varepsilon-a)^p-2a^p\geq(\varepsilon+a)^p+(\varepsilon-a)^p-2\left(\frac{\varepsilon}{K}\right)^p$$

$$=\varepsilon^p\left[\left(1+\frac{a}{\varepsilon}\right)^p+\left(1-\frac{a}{\varepsilon}\right)^p-\frac{2}{K^p}\right]\geq \varepsilon^p\left(2-\frac{2}{K^p}\right).$$

Teorem 4.2.2.3. l Nakano dizi uzayının düzgün konveks uzay (UC) olması için gerek ve yeter şart bazı k_0 elemanları için $\inf\limits_{k\neq k_0} p_k>1$ olmasıdır.

4.2.3 Düzgün Kadec-Klee özelliği (UKK), hemen hemen (nearly) düzgün konvekslik (NUC)

Teorem 4.2.3.1. l Nakano dizi uzayı düzgün Kadec-Klee (UKK) özelliğine sahiptir [2].

Teorem 4.2.3.2. l Nakano dizi uzayı neredeyse düzgün konveks (NUC) uzaydır $\Leftrightarrow$ $\liminf_{k\to\infty} p_k > 1$ dir.

Huff [23], X uzayının NUC uzay olması için gerek ve yeter şart X uzayının refleksif ve UKK özelliğine sahip olmasıdır, olduğunu göstermiştir. Böylece teorem 4.2.6.1 ve teorem 4.2.7.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.3.3. l Nakano dizi uzayı refleksiftir $\Leftrightarrow$ $\liminf_{k\to\infty} p_k > 1$ dir [2].

4.2.4. Lokal düzgün rotund olma özelliği (LUR), mid-point lokal düzgün rotundluk (MLUR)

Teorem 4.2.4.1. l Nakano dizi uzayı düzgün k-rotund (UkR) uzaydır $\Leftrightarrow$ $\inf_{n \notin F} p_n > 1$ dir, $\inf_{n \notin F} p_n$ en fazla k elemana sahip bazı sonlu F kümeleri içindir [2].

Teorem 4.2.4.2. l Nakano dizi uzayının lokal düzgün rotund uzay olması için gerek ve yeter şart $\forall k$ için $p_k > 1$ veya bazı k_0 elemanları için $\inf_{k \neq k_0} p_k > 1$ olmasıdır [2].

Lemma 4.2.4.3. Her n doğal sayısı için $x_0 \in S(l), x_n \in B(l)$ ve $\|x_n + x_0\| \to 2$ ise, $p_k > 1$ olan her k için $x_{nk} \to x_{0k}$ dır [2].

Teorem 4.2.4.4. l Nakano dizi uzayında zayıf lokal düzgün rotund olma ve lokal düzgün rotund olma denktir [2].

Teorem 4.2.4.5. l Nakano dizi uzayının lokal düzgün k -rotund uzay olması için gerek ve yeter şart l Nakano dizi uzayının düzgün k rotund veya $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n > 1$ olmasıdır [2].

Teorem 4.2.4.6. l uzayının mid-point lokal düzgün rotund uzay olması için gerek ve yeter şart en fazla bir k için $p_k = 1$ olmasıdır.

4.2.5. k- Konvekslik (kC) ve zayıf düzgün rotund olma (WUR), damla (drop, D) özelliği

Teorem 4.2.5.1. l Nakano dizi uzayının k-konveks uzay olması için gerek ve yeter şart bazı n_0 elemanları için $\inf_{n \neq n_0} p_k > 1$ olmasıdır [2].

Teorem 4.2.5.2. l Nakano dizi uzayının zayıf düzgün rotund uzay olması için gerek ve yeter şart l uzayının düzgün rotund uzay olmasıdır [2].

Teorem 4.2.5.3. l Nakano dizi uzayının D özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart $\liminf_{k \to \infty} p_k > 1$ olmasıdır [2].

Verilen bu geometrik özellikler Nakano dizi uzaylarında aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

l uzayı daima H, K ve UKK özelliklerine sahiptir.

LUR $\Leftrightarrow$ WLUR $\Leftrightarrow$ μ_0 veya v_1 sağlanır.

LUkR $\Leftrightarrow$ μ_0 veya v_k sağlanır.

R $\Leftrightarrow$ MLUR $\Leftrightarrow$ URED $\Leftrightarrow$ μ_1 sağlanır.

kR $\Leftrightarrow$ μ_k sağlanır.

Rfx $\Leftrightarrow$ NUC $\Leftrightarrow$ D $\Leftrightarrow$ v_k (bazı k lar için) sağlanır.

UR $\Leftrightarrow$ k C $\Leftrightarrow$ WUR $\Leftrightarrow$ v_1 sağlanır.

UkR $\Leftrightarrow$ v_k sağlanır.

Düzgün λ-özelliği $\Leftrightarrow$ μ_k (bazı k lar için) sağlanır [2].

4.3 Cesaro Dizi Uzayında Bazı Geometrik Özellikler

4.3.1. Cesaro dizi uzayında H-özelliği, rotund olma, k-NUC özelliği

Teorem 4.3.1.1. $ces(p)$ uzayı H- özelliğine sahiptir [5].

Sonuç 4.3.1.2. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ olan $p = \left(p_k\right)$pozitif sayıların sınırlı bir dizisi için Luxemburg normu ile donatılmış olan $ces(p)$ uzayı rotund uzay değildir. Bunu görmek için x=(0,1,1,0,…,0,…..) ve y=(0,2,0,0,0,0,….) dizilerini alalım.

$$\|x\| = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^r} \sum_r |x(i)| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$ ve p=1 olsun. $\sum_r$, $2^r \leq i < 2^{r+1}$ olmak üzere

$$\|x\| = \frac{1}{2^0}(0) + \frac{1}{2^1}(1+1) + \frac{1}{2^2}(0+0+0+0) + \ldots..$$

$$\|x\| = 1$$

$$\|y\| = \frac{1}{2^0}(0) + \frac{1}{2^1}(2+0) + \frac{1}{2^2}(0+0+0+0) + \ldots..$$

$$\|y\| = 1$$

$\|x\| = 1$ ve $\|y\| = 1$ olduğundan $x, y \in S\left(ces\left(p\right)\right)$ dir. $\|x\| \to 1 \Leftrightarrow \rho\left(x\right) = 1$ olduğundan $\rho\left(x\right) = \rho\left(y\right) = 1$ dir.

$x_0 = \dfrac{x+y}{2}$ olsun. $1 = \rho\left(x_0\right) \leq \dfrac{1}{2}\left(\rho\left(x\right) + \rho\left(y\right)\right) \leq 1$

$$\|x_0\| = \left\| \frac{x+y}{2} \right\| = \frac{1}{2^0}(0) + \frac{1}{2^1}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^2}(0+0+0+0) + \ldots..$$

$\|x_0\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$, bu da $x=y$ olması demektir. Halbuki x ve y farklı dizilerdir yani x_0 noktası extremum nokta değildir. $ces(p)$ uzayının birim küresinde extremum nokta olmayan bir nokta bulduğumuzdan bu uzay rotund değildir.

Teorem 4.3.1.3. Herhangi $\mathrm{k} \geq 2$ için $ces(p)$ uzayı k-NUC uzaydır [3].

Sonuç 4.3.1.4. $1 < p < \infty$ için $ces(p)$ uzayı NUC uzaydır [3].

Sonuç 4.3.1.5. $1 < p < \infty$ için $ces(p)$ uzayı drop (damla) özelliğine sahiptir [3].

Sonuç 4.3.1.6. $1 < p < \infty$ için $ces(p)$ uzayı NUC uzay olduğundan $ces(p)$ refleksif uzaydır ve H- özelliğine sahiptir [3].

4.3.2. Cesaro uzayında düzgün Kadec-Klee özelliği

Teorem 4.3.2.1. Her bir $x \in ces(p)_0$ için , en az bir $k \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki,

$$\|x\|_0 = \frac{1}{k}\left(1+\rho_\Phi(kx)\right)$$

dır [12].

Teorem 4.3.2.2. Farz edelim ki $\{x_n\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ olan $ces(p)_0$ uzayında sınırlı bir dizi ve bazı $x \in ces(p)_0$ için $x_n \xrightarrow{w} x$ olsun. $k_n \in K(x_n)$ ve $k_n \to \infty \Rightarrow x = 0$ dır [12].

Teorem 4.3.2.3. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ ise $ces(p)_0$ uzayı UKK özelliğine sahiptir [12]. Her UKK Banach uzayı H-özelliğine sahip olduğundan, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.3.2.4. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ ise $ces(p)_0$ uzayı H -özelliğine sahiptir [12].

Sonuç 4.3.2.5. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\liminf_{k\to\infty} p_k > 1$ ise $ces(p)_0$ uzayı NUC uzaydır [12].

Sonuç 4.3.2.6. $ces(p)_0$ uzayı NUC uzay ve UKK özelliğine sahip olduğundan refleksif uzaydır [12].

4.3.3. Cesaro dizi uzayında Opial özelliği

$$Sces(p)_0 = \{x \in l^0 : \rho(\lambda x) < \infty \text{ herhangi } \lambda > 0 \text{ için}\}$$

ile tanımlanan uzay $ces(p)_0$ uzayının alt uzayıdır.

Teorem 4.3.3.1. $Sces(p)_0$, $ces(p)_0$ dizi uzayının kapalı bir alt uzayıdır [24].

Lemma 4.3.3.2. E kümesi, sonlu sayıdaki koordinatları sıfırdan farklı olan dizilerin kümesi olsun. $\rho(x) < \infty$ ise, x ten E kümesine olan $d(x,E)$ uzaklığı 1 den daha azdır [24].

Teorem 4.3.3.3. $\lim_{j\to\infty} \inf p_j > 1$ ise, aşağıdaki iddialar doğrudur:

i. $Sces(p)_0 = \overline{E}$.

ii. $Sces(p)_0$, $ces(p)_0$ uzayının bütün sıralı sürekli elemanlarının alt uzayıdır.

iii. $Sces(p)_0$ ayrılabilir uzaydır [24].

Uyarı 4.3.3.4. $\|.\|_L$ ve $\|.\|_0$ normları denk olduğundan yukarıdaki teoremler $ces(p)$ uzayı üzerinde Luxemburg normu tanımlandığında da geçerlidir. Bu uzay $ces(p)_L$ ile gösterilir [24].

Şimdi ise $ces(p)_0$ ve $ces(p)_L$ uzaylarının düzgün Opial özelliğini sağlamaları için gerekli olan şartlar verilecektir.

Teorem 4.3.3.5. $\forall j \in \mathbb{N}$ için $p_j > 1$ ve $\lim_{j\to\infty} \sup p_j < \infty$ ise $ces(p)_0$ uzayı düzgün Opial özelliğine sahiptir [24].

Teorem 4.3.3.6. $\lim_{j\to\infty} \sup p_j < \infty$ ise $ces(p)_L$ uzayı düzgün Opial özelliğine sahiptir [24].

Teorem 4.3.3.7. Herhangi $1 < p < \infty$ için, $ces(p)$ uzayı düzgün Opial özelliğine sahiptir [38].

Sonuç 4.3.3.8. $ces(p)$ uzayı L-özelliğine ve sabit nokta özelliğine sahiptir [38].

BÖLÜM 5. $C(s,p)$ DİZİ UZAYINDA BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER

Bu bölümde daha önce verilen Cesaro dizi uzayının genel bir hali olan $C(s,p)$ uzayı tanıtılıp, üzerinde tanımlanan Luxemburg veya Orlicz normları ile birlikte oluşan Banach uzaylarının bazı geometrik özellikleri verilecektir.

5.1. C(s,p) Dizi Uzayı

l^0 bütün reel dizilerin uzayı olsun. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p = (p_k)$, $p_k \geq 1$ olan pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $C(s,p)$ uzayı $\sum_r$ ile, $2^r \leq i < 2^{r+1}$ üzerindeki toplam alınmak ve $s \geq 0$ olmak üzere

$$C(s,p) = \left\{ x \in l^0 : \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^r} \sum_r i^{-s} \left| x(i) \right| \right)^{p_r} < \infty \right\}$$

ile tanımlıdır [22]. Cesaro dizi uzayı, $C(s,p)$ uzayının *s=0* a karşılık gelen özel bir durumudur [22].

$x \in C(s,p)$ için ,

$$\rho(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^r} \sum_r i^{-s} \left| x(i) \right| \right)^{p_r}$$

dir. $C(s,p)$ uzayı Luxemburg normu ve Orlicz (veya Amemiya) normu ile birer Banach uzayıdır.

Teorem 5.1.1. ρ fonksiyonu $s \geq 0$ için $C(s,p)$ üzerinde konveks modüldür.

İspat:

i. ρ (x)=0 $\Leftrightarrow$ *x=0* olduğunu gösterelim:

$$\rho(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r}=0 \;\Leftrightarrow\; \left|x(i)\right|=0 \;\Leftrightarrow\; x=0$$

ii. $\rho\,(\alpha x)=\rho(x),\ |\alpha|=1$ olan $\forall\alpha$ skaleri için

$$\rho(\alpha x)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|\alpha x(i)\right|\right)^{p_r}=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{|\alpha|}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r}$$

$$=|\alpha|^{p_r}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r}\Leftrightarrow \rho\,(\alpha x)=\rho(x),\ |\alpha|^{p_r}=1$$

iii. $\alpha\ge 0,\ \beta\ge 0;\ \alpha+\beta=1$ olsun . $\rho(\alpha x+\beta y)\le\alpha\rho(x)+\beta\rho(y)$ dir.

$$\rho(\alpha x+\beta y)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|\alpha x(i)+\beta y(i)\right|\right)^{p_r}$$

$$\le\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|\alpha x(i)\right|+\frac{1}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|\beta y(i)\right|\right)^{p_r}$$

$$\le\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|x(i)\right|+\frac{\beta}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|y(i)\right|\right)^{p_r}$$

$$\rho(\alpha x+\beta y)\le\alpha\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r}+\beta\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r}$$

$$\rho(\alpha x+\beta y)\le\alpha\rho(x)+\beta\rho(y).$$

Teorem 5.1.2. $x \in C(s,p)$ için ρ modülü aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. $0<\alpha<1 \Rightarrow \alpha^{M}\rho\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) \le \rho(x)$ ve $\rho(\alpha x) \le \alpha\rho(x)$

ii. $\alpha>1 \Rightarrow \alpha^{M}\rho\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) \ge \rho(x)$

iii. $\alpha \ge 1 \Rightarrow \rho(\alpha x) \ge \alpha\rho(x) \ge \rho(x)$

İspat:

i. $0<\alpha<1$ olsun.

$$\rho(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{r}}\sum_{r} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r}=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2^{r}}\sum_{r} i^{-s}\left|\frac{x(i)}{\alpha}\right|\right)^{p_r}$$

$$\rho(x)=\alpha^{p_r}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{r}}\sum_{r} i^{-s}\left|\frac{x(i)}{\alpha}\right|\right)^{p_r} \ge \alpha^{M}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{r}}\sum_{r} i^{-s}\left|\frac{x(i)}{\alpha}\right|\right)^{p_r}$$

$M=\sup\limits_{r} p_r,\ 0<\alpha<1 \Rightarrow \alpha^{M}\rho\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) \le \rho(x)$ dir.

$0<\alpha<1 \Rightarrow \rho(\alpha x) \le \alpha\rho(x)$ olduğunu gösterelim.

$$\rho(\alpha x)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{r}}\sum_{r} i^{-s}\left|\alpha x(i)\right|\right)^{p_r}=\left|\alpha\right|^{p_r}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{r}}\sum_{r} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r}$$

$0<\alpha<1 \Rightarrow \alpha \ge \alpha^{p_r}$

$$\rho(\alpha x)=\left|\alpha\right|^{p_r}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{r}}\sum_{r} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r} \le \alpha\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{r}}\sum_{r} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r}$$

$\rho(\alpha x) \le \alpha\rho(x)$.

ii. $\alpha>1 \Rightarrow \alpha^{M}\rho\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) \ge \rho(x)$

$$\rho(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_{r} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r} = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2^r}\sum_{r} i^{-s}\left|\frac{x(i)}{\alpha}\right|\right)^{p_r}$$

$$= \alpha^{p_r}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_{r} i^{-s}\left|\frac{x(i)}{\alpha}\right|\right)^{p_r}$$

dir. $\alpha \geq 1 \Rightarrow \alpha^{p_r} \leq \alpha^{M}$ olduğundan

$$\rho(x)=\alpha^{p_r}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_{r} i^{-s}\left|\frac{x(i)}{\alpha}\right|\right)^{p_r} \leq \alpha^{M}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_{r} i^{-s}\left|\frac{x(i)}{\alpha}\right|\right)^{p_r}$$

bulunur. Bu durumda $\rho(x) \leq \alpha^{M}\rho\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ olur.

iii. $\alpha \geq 1 \Rightarrow \rho(\alpha x) \geq \alpha\rho(x) \geq \rho(x)$

$\rho(\alpha x) \geq \alpha\rho(x)$ olduğunu gösterelim:

$$\rho(\alpha x)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_{r} i^{-s}\left|\alpha x(i)\right|\right)^{p_r} = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{|\alpha|}{2^r}\sum_{r} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r}$$

$\rho(\alpha x)=|\alpha|^{p_r}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_{r} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r}$ ve $\alpha \geq 1 \Rightarrow \alpha^{p_r} \geq \alpha$ olduğundan

$$\rho(\alpha x)=\alpha^{p_r}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_{r} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r} \geq \alpha\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_{r} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r}$$

$$\rho(\alpha x) \geq \alpha\rho(x) \tag{5.1.2.1}$$

$\alpha\rho(x) \geq \rho(x)$ olduğunu gösterelim:

$$\rho(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r} \leq \alpha\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^r}\sum_r i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_r}$$

$$\rho(x) \leq \alpha\rho(x) \tag{5.1.2.2}$$

(5.1.2.1) ve (5.1.2.2) den

$$\rho(\alpha x) \geq \alpha\rho(x),\ \alpha\rho(x) \geq \rho(x) \Rightarrow \rho(\alpha x) \geq \alpha\rho(x) \geq \rho(x)$$

dir.

Teorem 5.1.3. Herhangi $x \in C(s,p)$ için

i. $\|x\|<1 \Rightarrow \rho(x) \leq \|x\|$,

ii. $\|x\|>1 \Rightarrow \rho(x) \geq \|x\|$,

iii. $\|x\|=1 \Leftrightarrow \rho(x)=\|x\|$,

iv. $\|x\|<1 \Leftrightarrow \rho(x) < \|x\|$,

v. $\|x\| >1 \Leftrightarrow \rho(x) > \|x\|$ dir.

İspat:

i. $0<\varepsilon<1-\|x\|$ olan $\varepsilon>0$ alalım. $\varepsilon<1-\|x\| \Rightarrow \|x\|+\varepsilon<1$ olur. $\|.\|$ un tanımından $\lambda>0$ sayısı vardır öyle ki $\|x\|+\varepsilon>\lambda$ ve $\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right)\leq 1$ dir.Teorem(5.1.2.) (i) ve (iii) maddelerine göre

$$\rho(x)\leq\rho\left(\frac{(\|x\|+\varepsilon)}{\lambda}x\right)=\rho\left((\|x\|+\varepsilon)\frac{x}{\lambda}\right)\leq(\|x\|+\varepsilon)\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right)\leq(\|x\|+\varepsilon),$$

olur. Bu ise $\rho(x)\leq\|x\|$ olmasını gerektirir. Böylece (i) sağlanır.

ii. $\|x\|>1,\ \varepsilon\in\left(0,\dfrac{\|x\|-1}{\|x\|}\right)$ olsun.

$$\varepsilon<\frac{\|x\|-1}{\|x\|}\ \Rightarrow\varepsilon<1-\frac{1}{\|x\|}\Rightarrow 1<\|x\|(1-\varepsilon)\Rightarrow 1>\frac{1}{\|x\|(1-\varepsilon)}>0$$

dır.

$$0<\frac{1}{\|x\|(1-\varepsilon)}<1\ \Rightarrow\ 1<\rho\left(\frac{1}{\|x\|(1-\varepsilon)}x\right)\le\frac{1}{\|x\|(1-\varepsilon)}\rho(x)$$

$$1<\frac{1}{\|x\|(1-\varepsilon)}\rho(x)$$

$\|x\|(1-\varepsilon)<\rho(x)$ olur. Bu ise $\forall\varepsilon\in\left(0,\dfrac{\|x\|-1}{\|x\|}\right)$ için $\rho(x)\ge\|x\|$ olmasını gerektirir.

iii. $\|x\|=1$ olsun. $\varepsilon>0$ için $\lambda>0$ vardır öyle ki $1+\varepsilon>\lambda>\|x\|$ ve $\rho\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)\le 1$ dir. Teorem (5.1.2.) (ii) den, $\rho(x)<\lambda^M\rho\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)\le 1$ dir.

$$\rho(x)<\lambda^M<(1+\varepsilon)^M$$

$$\rho(x)<(1+\varepsilon)^M\ \Rightarrow\ [\rho(x)]^{\frac{1}{M}}<1+\varepsilon,$$

$\forall\varepsilon>0$ için

$$[\rho(x)]^{\frac{1}{M}}\le 1\ \Rightarrow\ \rho(x)\le 1$$

dir. $\rho(x)<1$ ise, $a\in(0,1)$ olsun öyle ki $\rho(x)\le a^M<1$ dir. Teorem (5.1.2.) (i) den $\rho\left(\dfrac{x}{a}\right)\le\dfrac{1}{a^M}\rho(x)<1$, böylece $\|x\|\le a<1$ olur, bu ise bir çelişkidir. Yani $\rho(x)=1$ olmalıdır.

Tersine $\rho(x)=1$ olsun. $\|.\|$ un tanımından $\|x\|\le 1$ olduğu sonucuna ulaşırız. Eğer $\|x\|<1$ ise (i) den $\rho(x)\le\|x\|<1$ olur ki bu da kabulümüz ile çelişir ve $\|x\|=1$ olduğunu elde ederiz.

iv. $(\Rightarrow:)$ $\|x\|<1 \Rightarrow \rho(x)\leq\|x\|<1$ olduğundan (i) den $\rho(x)<1$ dir.

$(\Leftarrow:)$ $\rho(x)<1$ ise, $\rho(x)\leq a^M<1$ olacak biçimde $a\in(0,1)$ alalım. Teorem(5.1.2) (i) den

$$\rho\left(\frac{x}{a}\right)\leq\frac{1}{a^M}\rho(x)<1 \Rightarrow \|x\|\leq a<1 \Rightarrow \|x\|<1 \text{ dir.}$$

v. $(\Rightarrow:)$ $\|x\|>1 \Rightarrow \rho(x)\geq\|x\|>1 \Rightarrow \rho(x)>1$ dir.

$(\Leftarrow:)$ $\rho(x)>1$ olsun. $\|x\|<\rho(x) \Rightarrow 1\leq\|x\|$ olduğu (i) den görülür. Kabul edelim ki $\|x\|=1$ olsun. $1=\|x\|<\rho(x)$ olur. (iii) den $\|x\|=1 \Leftrightarrow \rho(x)=\|x\|$ idi. Bu ise bir çelişkidir, dolayısıyla $\|x\|>1$ olmalıdır.

Teorem 5.1.4. $x\in C(s,p)$ için

i. $0<\alpha<1$ ve $\|x\|>\alpha \Rightarrow \rho(x)>\alpha^M$

ii. $\alpha\geq 1$, $\|x\|<\alpha \Rightarrow \rho(x)<\alpha^M$ dir.

İspat:

i. $0<\alpha<1$ ve $\|x\|>\alpha$ olsun. $\left\|\frac{x}{\alpha}\right\|>1$ dir. Teorem (5.1.3) (ii) den

$$\left\|\frac{x}{\alpha}\right\|>1 \Rightarrow \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right)>\left\|\frac{x}{\alpha}\right\|>1 \Rightarrow \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right)>1 \text{ dir. } 0<\alpha<1 \text{ ise teorem}$$

(5.1.2)(i) den $\alpha^M\rho\left(\frac{x}{\alpha}\right)\leq\rho(x)$ olduğundan $\alpha^M<\rho(x)$ olur.

ii. $\alpha\geq 1$, $\|x\|<\alpha$ olsun. $\left\|\frac{x}{\alpha}\right\|<1$ dir. Teorem (5.1.3.)(i) den

$$\left\|\frac{x}{\alpha}\right\|<1 \Rightarrow \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right)\leq\left\|\frac{x}{\alpha}\right\|<1 \Rightarrow \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right)<1$$

olur. $\alpha=1 \Rightarrow \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\rho(x)<1=\alpha^M$ dir. $\alpha>1$ ise teorem (5.1.1) (ii) den

$$\rho(x) \leq \alpha^M \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) \Rightarrow \rho(x) < \alpha^M$$

dir.

Teorem 5.1.5. $\{x_n\} \subset C(s,p)$ olsun.

i. $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n) = 1$

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$

İspat:

i. $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$ olsun. $\varepsilon \in (0,1)$ alalım.

$\forall n \geq n_0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki, $\left|\|x_n\| - 1\right| < \varepsilon$ olur. $\forall n \geq n_0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki, $-\varepsilon < \|x_n\| - 1 < \varepsilon$,

$\forall n \geq n_0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki, $1-\varepsilon < \|x_n\| < 1+\varepsilon$ olur.

Teorem (5.1.4.) (i) ve (ii) den $\forall n \geq n_0$ için $1-\varepsilon < \|x_n\| \Rightarrow \rho(x_n) > (1-\varepsilon)^M$ ve $\forall n \geq n_0$ için

$$\|x_n\| < 1+\varepsilon \Rightarrow \rho(x_n) < (1+\varepsilon)^M$$

dir. Yani $\varepsilon \in (0,1)$ ve $\forall n \geq n_0$ için

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki, $1-\varepsilon < \|x_n\| < 1+\varepsilon \Rightarrow (1+\varepsilon)^M < \rho(x_n) < (1+\varepsilon)^M$

dir. Bu ise $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} \rho(x_n) = 1$ olduğu sonucunu verir.

ii. Farz edelim ki $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \neq 0$ olsun. $\varepsilon \in (0,1)$ alalım. (x_n) dizisinin (x_{n_k}) alt dizisi vardır öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x_{n_k}\| > \varepsilon$ olur. Teorem (5.1.4.) (i) den $0 < \varepsilon < 1$, $\|x_{n_k}\| > \varepsilon \Rightarrow \rho(x_{n_k}) > \varepsilon^M$ olur bu ise $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{n_k}) \neq 0$ olduğunu gösterir yani $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n) \neq 0$ dır.

Teorem 5.1.6. $x \in C(s,p)$ ve $\{x_n\} \subset C(s,p)$ olsun. $n \to \infty$ iken $\rho(x_n) \to \rho(x)$ ve $\forall i \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ $x_n(i) \to x(i)$ $\Rightarrow$ $x_n \to x$ dir.

İspat: $\varepsilon > 0$ verilsin. $\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i^{-s} |x(i)| \right)^{p_k} < \infty$ olduğundan $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\sum_r$, $2^r \le i < 2^{r+1}$ olmak üzere

$$\rho(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i^{-s} |x(i)| \right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^{M+1}} \tag{5.1.6.1}$$

dir. $n \to \infty$ iken

$$\rho(x_n) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i^{-s} |x_n(i)| \right)^{p_k} \to \rho(x) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i^{-s} |x(i)| \right)^{p_k}$$

olduğundan ve $\forall i \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ iken , $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n \ge n_0$ için

$$\rho(x_n) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i^{-s} |x_n(i)| \right)^{p_k} < \rho(x) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i^{-s} |x(i)| \right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{2^M} \tag{5.1.6.2}$$

ve $\forall n \ge n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i^{-s} |x_n(i) - x(i)| \right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.1.6.3}$$

tür. $n \ge n_0$ için (5.1.6.1), (5.1.6.2) ve (5.1.6.3) den

$$\rho(x_n - x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} i^{-s} |x_n(i) - x(i)| \right)^{p_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i^{-s} |x_n(i) - x(i)| \right)^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i^{-s} |x_n(i) - x(i)| \right)^{p_k}$$

olur. (5.1.6.3) den $\sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i^{-s}\left|x_n(i)-x(i)\right|\right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{3}$ olduğundan

$$< \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left\{ \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i^{-s}\left|x_n(i)\right|\right)^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_k} \right\}$$

$$= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left\{ \rho(x_n) - \sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i^{-s}\left|x_n(i)\right|\right)^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_k} \right\}$$

dir.(5.1.6.2) den

$$\rho(x_n) - \sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i^{-s}\left|x_n(i)\right|\right)^{p_k} < \rho(x) - \sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2^M}$$

olduğundan

$$< \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left\{ \rho(x) - \sum_{k=1}^{k_0}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2^M} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_k} \right\}$$

$$= \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left\{ 2\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2^M} \right\}$$

olur. (5.1.6.1) den $\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i^{-s}\left|x(i)\right|\right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2^{M+1}}$ olduğundan

$$< \frac{\varepsilon}{3} + 2^M \left\{ 2\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2^{M+1}} + \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{2^M} \right\}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ olur.}$$

Bu da $n \to \infty$ iken $\rho(x_n - x) \to 0$ olması demektir. Bir önceki teorem (ii) den $n \to \infty$ iken $\rho(x_n - x) \to 0 \Rightarrow \left\|x_n - x\right\| \to 0$, yani $x_n \to x$ tir.

5.2. $C(s,p)$ Dizi Uzayında H-Özelliği, Rotund Olma Özelliği, k-NUC Özelliği,

Teorem 5.2.1. $C(s,p)$ uzayı H- özelliğine sahiptir.

İspat: $x \in S\left(C(s,p)\right)$, $(x_n) \subseteq C(s,p)$ alalım öyle ki $n \to \infty$ iken $\|x_n\| \to 1$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ olsun. Teorem (5.1.5)(i) den "$n \to \infty$ iken $\|x_n\| \to 1$ ise $n \to \infty$ iken $\rho(x_n) \to 1$"olduğundan, $\rho(x_n) \to 1$ olduğunu elde ederiz. $x \in S\left(C(s,p)\right)$ olduğundan $\|x\| \to 1$ dir. Teorem (5.1.3) (iii) den "$\|x\| = 1 \Leftrightarrow \rho(x) = 1$"idi. Yani $\rho(x) = 1$ dir. Bu da $\rho(x_n) \to 1$ ise $n \to \infty$ iken $\rho(x_n) \to \rho(x)$ olduğu sonucunu verir. $x_n \xrightarrow{w} x$ ve $\pi_i(x) = x_i$ ile tanımlı $\pi_i : C(s,p) \to \mathbb{R}$, $i.$koordinat dönüşümü sürekli olduğundan bu durum $\forall i \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ iken $x_n(i) \to x(i)$ olmasını gerektirir. Buradan yukarıdaki teoremi kullanarak $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ olduğu görülür. Sonuç olarak $C(s,p)$ uzayında alınan her zayıf yakınsak dizi norma göre de yakınsak olduğundan $C(s,p)$ uzayının H -özelliğine sahip olduğu söylenir.

Sonuç 5.2.2. Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ olan $p = (p_k)$ pozitif sayıların sınırlı bir dizisi için Luxemburg normu ile donatılmış olan $C(s,p)$ uzayı rotund uzay değildir. Bunu görmek için x=(1,0,0,…,0,…..) ve y=(0,2,3,0,0,0,….) dizilerini alalım.

$$\|x\| = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^r} \sum_r i^{-s} |x(i)| \right)^{p_r} \right)^{\frac{1}{p_r}}, \text{ s=1 ve } (p_r) = p = 1 \text{ olsun. } \sum_r, 2^r \leq i < 2^{r+1}$$

olmak üzere

$$\|x\| = \frac{1}{2^0}\left(\frac{1}{1}.1\right) + \frac{1}{2^1}\left(\frac{1}{2}.0 + \frac{1}{3}.0\right) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{4}.0 + \frac{1}{5}.0 + \frac{1}{6}.0 + \frac{1}{7}.0\right) + ...$$

$$\|x\| = 1$$

$$\|y\| = \frac{1}{2^0}\left(\frac{1}{1}.0\right) + \frac{1}{2^1}\left(\frac{1}{2}.2 + \frac{1}{3}.3\right) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{4}.0 + \frac{1}{5}.0 + \frac{1}{6}.0 + \frac{1}{7}.0\right) + ...$$

$$\|y\| = 1$$

$\|x\| = 1$ ve $\|y\| = 1$ olduğundan $x,\ y \in S\left(C(s,p)\right)$ dir. $\|x\| \to 1 \;\Leftrightarrow\; \rho(x) = 1$ olduğundan $\rho(x) = \rho(y) = 1$ dir.

$x_0 = \dfrac{x+y}{2}$ olsun. $1 = \rho(x_0) \le \dfrac{1}{2}\left(\rho(x) + \rho(y)\right) \le 1$

$$\|x_0\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \frac{1}{2^0}\left(\frac{1}{1}.\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^1}\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{2} + \frac{1}{3}.\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{4}.0 + \frac{1}{5}.0 + \frac{1}{6}.0 + \frac{1}{7}.0\right) + ...$$

$\|x_0\| = \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| = 1,$ bu da x=y olması demektir. Halbuki x ve y farklı dizilerdir yani x_0 extremum nokta değildir. $C(s,p)$ uzayının birim küresi üzerinde extremum nokta olmayan bir nokta bulduğumuzdan bu uzay rotund değildir.

Teorem 5.2.3. $\rho \in \delta_2^s$ ise, herhangi $L > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ vardır öyle ki $\rho(u) \le L,\ \rho(v) \le \delta$ olan $u,\ v \in C(s,p)$ için $\left|\rho(u+v) - \rho(u)\right| < \varepsilon$ olur [12].

Teorem 5.2.4.

i. $\rho \in \delta_2^s$ ise, herhangi $x \in C(s,p)$ için, $\|x\| = 1 \;\Leftrightarrow\; \rho(x) = 1$ dir.

ii. $\rho \in \delta_2^s$ ise, $C(s,p)$ uzayındaki herhangi x_n dizisi için

$$\|x_n\| \to 0 \;\Leftrightarrow\; \rho(x_n) \to 0$$

dır[12].

Teorem 5.2.5. $\rho \in \delta_2^s$ iken herhangi $x \in C(s,p)$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ için, $\delta \in (0,1)$ vardır öyle ki $\rho(x) \le 1-\varepsilon \;\Rightarrow\; \|x\| \le 1-\delta$ dır.

İspat: Farz edelim ki teorem sağlanmasın. $\varepsilon > 0$ ve $x_n \in C(s,p)$ vardır öyle ki $\rho(x_n) < 1-\varepsilon$ ve $\frac{1}{2} \le \|x_n\| \to 1$ olsun. $a_n = \frac{1}{\|x_n\|} - 1$ dizisi alalım. $n \to \infty$ iken $a_n \to 0$ dır. $L = \sup\{\rho(2x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $\rho \in \delta_2^s$ olduğundan $K \ge 2$ sayısı vardır öyle ki $\rho(u) \le 1$ olan $\forall u \in C(s,p)$ için $\rho(2u) \le K\rho(u) + 1$ dir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\rho(2x_n) \le K\rho(x_n) + 1 < K + 1$ dir. Böylece $0 < L < \infty$ olur. $\rho \in \delta_2^s$ olduğundan yukarıdaki teorem (i) den herhangi $x \in C(s,p)$ için $\|x\| = 1 \Leftrightarrow \rho(x)$ olduğundan

$$1 = \rho\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \rho\left(\frac{1}{\|x_n\|} x_n\right) = \rho\big(x_n(a_n+1)\big) = \rho\big(2a_n x_n + (1-a_n)x_n\big)$$

$$1 \le a_n \rho(2x_n) + (1-a_n)\rho(x_n)$$

$$1 \le a_n L + (1-a_n)(1-\varepsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 \le \lim_{n\to\infty} a_n L + \lim_{n\to\infty}(1-a_n)(1-\varepsilon)$$
$$1 \le (1-\varepsilon)$$

olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla teoremin şartları sağlanır [12].

Teorem 5.2.6. Herhangi k≥ 2 için, $C(s,p)$ uzayı k-NUC uzaydır.

İspat: $\varepsilon > 0$ ve $sep(x_n) \ge \varepsilon$ olan $(x_n) \subset B(C(s,p))$ alalım. $\forall i \in \mathbb{N}$ için $x_n^{(i)} = \big(0,0,\ldots,x_n(i),x_n(i+1),\ldots.\big)$ olsun. $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\big(x_n(m)\big)_{m=1}^{\infty}$ dizisi sınırlı olduğundan, köşegen metodunu kullanarak $\forall i \in \mathbb{N}$ için (x_n) dizisinin (x_{n_k}) alt dizisini bulabiliriz öyle ki $\forall m\in\mathbb{N}$ için $1\le m\le i$ $\left(x_{n_j}(m)\right)$ yakınsaktır. Böylece $sep\left(\left(x_{n_j}{}^{i}\right)_{j\ge t_i}\right)\ge\varepsilon$ olan artan bir t_i pozitif tamsayı dizisi vardır. $r_1<r_2<\ldots$olan $\left(r_i\right)_{i=1}^{\infty}$ pozitif tamsayı dizisi vardır öyle ki $\forall i\in\mathbb{N}$ için $\left\|x_{r_i}{}^{i}\right\|\ge\frac{\varepsilon}{2}$ dir. Teorem (5.2.4) ten $\eta>0$ vardır öyle ki $\forall i\in\mathbb{N}$ için $\rho\left(x_{r_i}{}^{i}\right)\ge\eta$ olur. $\alpha>0$ alalım öyle ki $1<\alpha<\liminf\limits_{n\to\infty} p_n$ olsun. Sabit bir $k\ge 2$ tamsayısı için $\varepsilon_1=\frac{k^{\alpha-1}-1}{(k-1)k^{\alpha}}\left(\frac{\eta}{2}\right)$ alalım. Teorem(5.2.3) ten $\delta>0$ vardır öyle ki $\rho(u)\le 1,\ \rho(v)\le\delta$ iken $\left|\rho(u+v)-\rho(u)\right|<\varepsilon_1$ dir. "Herhangi $x\in C(s,p)$ için $\|x\|\le 1\Rightarrow\rho(x)\le\|x\|$" önermesinden $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\rho(x_n)\le 1$ olduğundan, $i_1<i_2<\ldots<i_{k-1}$ olan $i_m=(m=1,2,\ldots,k-1)$ pozitif tamsayıları vardır öyle ki $\rho\left(x_m{}^{i_m}\right)\le\delta$ ve $\forall j\ge i_{k-1}$ için $\alpha\le p_j$ dir. $i_k=i_{k-1}+1$ tanımlayalım. $\rho\left(x_{r_i}{}^{i}\right)\ge\eta$ olduğundan $\rho\left(x_{r_{i_k}}{}^{i_k}\right)\ge\eta$ olur. $1\le m\le k-1$ için $t_m=m$ ve $t_k=r_{i_k}$ olsun. $\rho\left(x_{r_i}{}^{i}\right)\ge\eta$, $\left|\rho(u+v)-\rho(u)\right|<\varepsilon_1$ ve $f_i(u)=|u|^{p_i}$ $(i\in\mathbb{N})$ fonksiyonunun konveksliğinden aşağıdaki özellik elde edilir..

$$\rho\left(\frac{x_{t_1}+x_{t_2}+\ldots+x_{t_k}}{k}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|\frac{x_{t_1}(m)+x_{t_2}(m)+\ldots+x_{t_k}(m)}{k}\right|\right)^{p_n}$$

$$=\sum_{n=1}^{i_1}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|\frac{x_{t_1}(m)+x_{t_2}(m)+\ldots+x_{t_k}(m)}{k}\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=i_1+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|\frac{x_{t_1}(m)+x_{t_2}(m)+\ldots+x_{t_k}(m)}{k}\right|\right)^{p_n}$$

$$\le\sum_{n=1}^{i_1}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|\frac{x_{t_1}(m)+x_{t_2}(m)+\ldots+x_{t_k}(m)}{k}\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=i_1+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|\frac{x_{t_2}(m)+x_{t_3}(m)+\ldots+x_{t_k}(m)}{k}\right|\right)^{p_n}+\varepsilon_1$$

$$\leq\sum_{n=1}^{i_1}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|x_{t_j}(m)\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=i_1+1}^{i_2}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|\frac{x_{t_2}(m)+x_{t_3}(m)+\ldots+x_{t_k}(m)}{k}\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=i_2+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|\frac{x_{t_2}(m)+x_{t_3}(m)+\ldots+x_{t_k}(m)}{k}\right|\right)^{p_n}+\varepsilon_1$$

$$\leq\sum_{n=1}^{i_1}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|x_{t_j}(m)\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=i_1+1}^{i_2}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|\frac{x_{t_2}(m)+x_{t_3}(m)+\ldots+x_{t_k}(m)}{k}\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=i_2+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|\frac{x_{t_3}(m)+x_{t_4}(m)+\ldots+x_{t_k}(m)}{k}\right|\right)^{p_n}+2\varepsilon_1$$

$$\leq\sum_{n=1}^{i_1}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|x_{t_j}(m)\right|\right)^{p_n}+\sum_{n=i_1+1}^{i_2}\frac{1}{k}\sum_{j=2}^{k}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|x_{t_j}(m)\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=i_2+1}^{i_3}\frac{1}{k}\sum_{j=3}^{k}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|x_{t_j}(m)\right|\right)^{p_n}+\ldots+$$

$$+\sum_{n=i_{k-1}+1}^{i_k}\frac{1}{k}\sum_{j=k-1}^{k}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|x_{t_j}(m)\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=i_k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|\frac{x_{t_k}(m)}{k}\right|\right)^{p_n}+(k-1)\varepsilon_1$$

$$\leq\left(\frac{\rho(x_{t_1})+\rho(x_{t_2})+\ldots+\rho(x_{t_k})}{k}\right)+\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{i_k}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|x_{t_k}(m)\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=i_k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|\frac{x_{t_k}(m)}{k}\right|\right)^{p_n}+(k-1)\varepsilon_1$$

$$\leq\frac{k-1}{k}+\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{i_k}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|x_{t_k}(m)\right|\right)^{p_n}$$

$$+\frac{1}{k^{\alpha}}\sum_{n=i_k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|x_{t_k}(m)\right|\right)^{p_n}+(k-1)\varepsilon_1$$

$$\leq 1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\left(1-\sum_{n=i_k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|x_{t_k}(m)\right|\right)^{p_n}\right)$$

$$+\frac{1}{k^{\alpha}}\sum_{n=i_k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}\left|x_{t_k}(m)\right|\right)^{p_n}+(k-1)\varepsilon_1$$

$$\leq 1+(k-1)\varepsilon_1-\left(\frac{k^{\alpha-1}-1}{k^{\alpha}}\right)\left(\sum_{n=i_k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\left|x_{t_k}(m)\right|\right)^{p_n}\right)$$

$$\leq 1+(k-1)\varepsilon_1-\left(\frac{k^{\alpha-1}-1}{k^{\alpha}}\right)\eta$$

$$\leq 1+(k-1)\left(\frac{k^{\alpha-1}-1}{(k-1)k^{\alpha}}\right)\frac{\eta}{2}-\left(\frac{k^{\alpha-1}-1}{k^{\alpha}}\right)\eta$$

$$\leq 1-\left(\frac{k^{\alpha-1}-1}{k^{\alpha}}\right)\frac{\eta}{2}$$

Teorem(5.2.5) ten,

$$\rho\left(\frac{x_{t_1}+x_{t_2}+...+x_{t_k}}{k}\right)\leq 1-\left(\frac{k^{\alpha-1}-1}{k^{\alpha}}\right)\frac{\eta}{2}$$

$$\Rightarrow\left\|\frac{x_{t_1}+x_{t_2}+...+x_{t_k}}{k}\right\|\leq 1-\mu$$

olur. Bu da $C(s,p)$ uzayının k-NUC uzay olduğu sonucunu verir. k-NUC olma NUC olmayı NUC olma da H -özelliğini gerektirdiğinden ve refleksifliği sağladığından bu teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.2.7. s ≥ 0 için $C(s,p)$ uzayı NUC uzaydır.

Sonuç 5.2.8. s ≥ 0 için $C(s,p)$ uzayı drop (damla) özelliğine sahiptir.

Sonuç 5.2.9. s ≥ 0 için $C(s,p)$ uzayı NUC uzay olduğundan $C(s,p)$ refleksif uzaydır ve H- özelliğine sahiptir.

5.3 $C(s,p)$ Dizi Uzayında Düzgün Kadec-Klee Özelliği

Teorem 5.3.1. Her bir $x \in C(s,p)_0$ için , en az bir $k \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $\|x\|_0 = \frac{1}{k}\left(1+\rho(kx)\right)$ dir.

İspat: İlk olarak $u \to \infty$ iken $\frac{\phi_i(u)}{u} \to \infty$ durumunu sağlayan Orlicz fonksiyonunu, $\phi(t) = |t|^r$ $(r>1)$ için, fonksiyonu olarak alalım. $\forall x = (x(i))_{i=1}^{\infty} \in C(s,p)_0$, $\forall i \in \mathbb{N}$ için $\phi_i(t) = |t|^{p_i}$ ve $\Phi = (\phi_i)_{i=1}^{\infty}$ olduğunda $x' = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^s}|x(i)|\right)_{n=1}^{\infty} \in l_\Phi$ elemanına sahibiz. Üstelik; $\|x\|_0 = \|x'\|_{l_\Phi^0}$ dır ve Φ bir N'-fonksiyon olduğundan, [15] den $k \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki

$$\|x\|_0 = \|x'\|_{l_\Phi^0} = \frac{1}{k}\left(1+\rho(kx')\right) = \frac{1}{k}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^s}|x(i)|\right)^{p_n}\right) = \frac{1}{k}\left(1+\rho(kx)\right)$$

olur.

Teorem 5.3.2. Farz edelim ki $\{x_n\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ olan $C(s,p)_0$ uzayında sınırlı bir dizi ve bazı $x \in C(s,p)_0$ için $x_n \xrightarrow{w} x$ olsun. $k_n \in K(x_n)$ ve $k_n \to \infty \Rightarrow x = 0$ dır.

İspat: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\eta > 0$ ve

$$G_{(n,\eta)} = \left\{ i \in \mathbb{N} : \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j^s}|x_n(j)| \geq \eta \right\}$$

olsun. İlk olarak iddia ediyoruz ki $\forall \eta > 0$ için ve yeterince büyük n ler için $G_{(n,\eta)} = \varnothing$ dir. Böyle olmasın, genelliği bozmadan $\forall n \in \mathbb{N}$ için ve bazı $\eta > 0$ için $G_{(n,\eta)} \neq \varnothing$ olsun.

$$\|x_n\|_0 = \frac{1}{k_n}\left(1+\rho\left(k_n x_n\right)\right) = \frac{1}{k_n}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k_n}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^s}\left|x_n\left(i\right)\right|\right)^{p_n}\right) \geq \frac{\left(k_n\eta\right)^{p_n}}{k_n}$$

$r>1$ olduğunda $t\to\infty$ iken $\dfrac{|t|^r}{t}\to\infty$ olduğundan $\|x_n\|_0 \geq \dfrac{\left(k_n\eta\right)^{p_n}}{k_n}$ olur ve $k_n\to\infty$ iken $\|x_n\|_0\to\infty$ dır, bu ise $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı bir dizi olması ile çelişir. Yani,

$$G_{(n,\eta)} = \left\{ i\in\mathbb{N} : \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{i^s}\left|x_n\left(j\right)\right| \geq \eta \right\} = \varnothing$$

dır.

$G_{(n,\eta)} = \left\{ i\in\mathbb{N} : \dfrac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\dfrac{1}{j^s}\left|x_n\left(j\right)\right| \leq \eta \right\}$ olur. $n\to\infty$ iken $\left\{ i\in\mathbb{N} : \dfrac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\dfrac{1}{j^s}\left|x_n\left(j\right)\right| \to 0 \right\}$ ve böylece tümevarımla $\forall i\in\mathbb{N}$ için $n\to\infty$ iken $x_n(i)\to 0$ olduğunu elde ederiz. $x_n\xrightarrow{w}x$ olduğundan, $\forall i\in\mathbb{N}$ için $x_n(i)\to x(i)$ dir. $x_n(i)\to 0$ ve $x_n(i)\to x(i)$ olduğundan $x(i)=0$ olmalıdır.

Teorem 5.3.3. $\forall \mathrm{k}\in\mathbb{N}$ için $p_k>1$ ise $\mathrm{C}(\mathrm{s},\mathrm{p})_0$ uzayı UKK özelliğine sahiptir.

İspat: Verilen bir $\varepsilon>0$ için $\rho\in\delta_2 \Rightarrow C(s,p)_0$ uzayında norma göre yakınsaklık ile modüler yakınsaklık denk olduğundan $\delta\in(0,1)$ vardır öyle ki $\|y\|_0\geq\dfrac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \rho(y)\geq 2\delta$ dır. $x_n\in B\left(C(s,p)_o\right)$ verildiğinde, $x_n\xrightarrow{w}x$ ve $n\neq m$ için $\|x_n-x_m\|_0\geq\varepsilon$ olsun. İspatı tamamlamak için $\|x\|_0\leq 1-\delta$ olduğunu göstermeliyiz. *x=0* ise teorem açıktır. $x\neq 0$ olsun. Bu durumda bir önceki teoremden $k_n\in K(x_n)$ sınırlı dizisi vardı. Alt diziye geçerek, bazı $k>0$ için gerekirse $k_n\to k$ olduğunu kabul edebiliriz. $\mathbb{N}$ kümesinin I sonlu alt kümesini $I=\{1,2,3,...,j\}$, $\left\|x|_I\right\|_o\geq\|x\|_0-\delta$ olacak biçimde seçelim. $\{x_n\}$ dizisinin zayıf yakınsaklığı $x_n\to x$ koordinatsal yakınsaklığı gerektirdiğinden I kümesi üzerinde $x_n\to x$ düzgün yakınsaktır. Sonuçta, $n_0\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki;

$\left\|\left(x_n - x_m\right)\big|_I\right\|_0 \le \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall n,\ m \ge n_0$ ki bu da, $\left\|\left(x_n - x_m\right)\big|_{\mathbb{N}-I}\right\|_0 \ge \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall n,\ m \ge n_0$, $n \ne m$ olmasını gerektirir. Bu durum $\forall m,\ n \ge n_0$ ve $n \ne m$ için $\left\|x_{m|_{\mathbb{N}-I}}\right\|_0 \ge \dfrac{\varepsilon}{4}$ olduğu sonucunu verir bu ise sayılabilir sonsuz çoklukta $n \in \mathbb{N}$ için $\left\|x_{n|_{\mathbb{N}-I}}\right\|_0 \ge \dfrac{\varepsilon}{4}$ olması demektir ve böylece $\rho\left(x_{n|_{\mathbb{N}-I}}\right) \ge 2\delta$ olur. Genelliği kaybetmeden sayılabilir sonsuz çokluktaki *n* ler değil $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|x_{n|_{\mathbb{N}-I}}\right\|_0 \ge \frac{\varepsilon}{4}$$

olduğunu kabul edebiliriz. $\left(a, b \ge 0, t \ge 1\right)$, $\left(a+b\right)^t \ge a^t + b^t$ eşitsizliğini kullanarak $k_n \ge 1$ gerçeği ile birlikte ve $t \to \left|t\right|^{p_n}$ fonksiyonunun konveksliğinden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$1 - 2\delta \ge \left\|x_n\right\|_0 - \rho\left(x_{n|_{\mathbb{N}-I}}\right) \ge \left\|x_n\right\|_0 - \frac{1}{k_n}\rho\left(k_n x_{n|_{\mathbb{N}-I}}\right)$$

$$= \frac{1}{k_n}\left(1 + \rho\left(k_n x_n\right)\right) - \frac{1}{k_n}\rho\left(k_n x_{n|_{\mathbb{N}-I}}\right)$$

$$= \frac{1}{k_n}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{k_n}{i}\left(\sum_{r=1}^{i}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r\right)\right|\right)^{p_i}\right) - \frac{1}{k_n}\left(\sum_{i=j+1}^{\infty}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i-j}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r+j\right)\right|\right)^{p_i}\right)$$

$$= \frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r\right)\right|\right)^{p_i} + \frac{1}{k_n}\sum_{i=j+1}^{\infty}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r\right)\right|\right)^{p_i}$$

$$-\frac{1}{k_n}\left(\sum_{i=j+1}^{\infty}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i-j}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r+j\right)\right|\right)^{p_i}\right)$$

$$= \frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r\right)\right|\right)^{p_i}$$

$$+\frac{1}{k_n}\left(\sum_{i=j+1}^{\infty}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r\right)\right|\right)^{p_i}-\sum_{i=j+1}^{\infty}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i-j}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r+j\right)\right|\right)^{p_i}\right)$$

$$=\frac{1}{k_n}+\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r\right)\right|\right)^{p_i}$$

$$+\frac{1}{k_n}\left(\sum_{i=j+1}^{\infty}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{j}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r\right)\right|+\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i-j}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(j+r\right)\right|\right)^{p_i}-\sum_{i=j+1}^{\infty}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i-j}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r+j\right)\right|\right)^{p_i}\right)$$

$$\geq\frac{1}{k_n}+\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r\right)\right|\right)^{p_i}+\frac{1}{k_n}\left(\sum_{i=j+1}^{\infty}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{j}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r\right)\right|\right)^{p_i}\right)$$

$$+\frac{1}{k_n}\left(\sum_{i=j+1}^{\infty}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i-j}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(j+r\right)\right|\right)^{p_i}\right)-\frac{1}{k_n}\left(\sum_{i=j+1}^{\infty}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i-j}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(j+r\right)\right|\right)^{p_i}\right)$$

$$=\frac{1}{k_n}+\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{j}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{i}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r\right)\right|\right)^{p_i}+\frac{1}{k_n}\left(\sum_{i=j+1}^{\infty}\left(\frac{k_n}{i}\sum_{r=1}^{j}\frac{1}{r^s}\left|x_n\left(r\right)\right|\right)^{p_i}\right)$$

$$=\frac{1}{k_n}+\frac{1}{k_n}\rho\left(k_n x_{n_{|I}}\right)\;\rightarrow\;\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\rho\left(kx_{|I}\right)\geq\left\|x_{|I}\right\|_0\geq\left\|x\right\|_0-\delta$$

$$1-2\delta\geq\left\|x\right\|_0-\delta$$

$$1-\delta\geq\left\|x\right\|_0$$

olur ki bu da $C\left(s,p\right)_0$ uzayının UKK özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Her UKK Banach uzayı H-özelliğine sahip olduğundan, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.3.4. Her k $\in\mathbb{N}$ için $p_k>1$ ise $C\left(s,p\right)_0$ uzayı H- özelliğine sahiptir.

Sonuç 5.3.5. Her k $\in \mathbb{N}$ için, $\liminf_{k\to\infty} p_k > 1$ ise $C(s,p)_0$ uzayı NUC uzaydır.

Sonuç 5.3.6. $C(s,p)_0$ uzayı NUC uzay ve UKK özelliğine sahip olduğundan refleksif uzaydır.

5.4. $C(s,p)$ Uzayında Opial Özelliği

$C(s,p)$ uzayının

$$SC(s,p)=\{x\in l^0 : \rho(\lambda x)<\infty \text{ herhangi } \lambda>0 \text{ için}\}$$

alt uzayı verilsin. Aşağıdaki teoremlerde bu alt uzayın özellikleri incelenecektir.

Teorem 5.4.1. $SC(s,p)_0$, $C(s,p)_0$ dizi uzayının kapalı bir alt uzayıdır.

İspat: $SC(s,p)_0$ uzayının $C(s,p)_0$ uzayının alt uzayı olduğunu görmek kolaydır. $SC(s,p)_0$ nın $C(s,p)_0$ da kapalı olduğu gösterilmelidir. Göstermemiz gereken $\forall n\in\mathbb{N}$ için $x_n\in SC(s,p)_0$ ve $x_n\to x\in C(s,p)_0$ ise $x\in SC(s,p)_0$ olduğudur. Herhangi bir $\mathrm{k}>0$ sayısı alalım. $\|x_n-x\|\to 0$ olduğundan "$(x_n)\subset X_\rho$ olsun. $\|x_n\|\to 0$ (veya denk olarak $\|x_n\|_0\to 0$) $\Leftrightarrow \forall\lambda>0$ için $n\to\infty$ iken $\rho(\lambda(x_n))\to 0$" teoreminden $\forall t>0$ için $\rho(t(x-x_n))\to 0$ olur ve böylece, $N\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $\rho(2k(x-x_n))<1$ dir ve $x_N\in SC(s,p)_0$ olduğundan $\rho(2k(x_N))<\infty$ dur. Buradan,

$$\rho(kx)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{k}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}|x(i)|\right)^{p_j}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{k}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}\left|\frac{2(x(i)-x_N(i))}{2}+\frac{2x_N(i)}{2}\right|\right)^{p_j}$$

$$\leq\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{k}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}|2x(i)-x_N(i)| + \frac{1}{2}\frac{k}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}|2x_N(i)|\right)^{p_j}$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{k}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}|2x(i)-x_N(i)|\right)^{p_j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{k}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}|2x_N(i)|\right)^{p_j}$$

$$= \frac{1}{2}\rho\left(2k\left(x - x_N\right)\right) \; + \; \frac{1}{2}\rho\left(2kx_N\right) < \infty$$

olur. Yani $x \in SC(s,p)_0$ dır.

E kümesi, sonlu sayıdaki koordinatları sıfırdan farklı olan dizilerin kümesi olsun. Aşağıdaki lemma $SC(s,p)_0 = \overline{E}$ olduğunu göstermek için kullanılacak olan bir araçtır.

Lemma 5.4.3. $\rho(x) < \infty$ ise, x ten E kümesine olan $d(x,E)$ uzaklığı 1 den daha azdır.

İspat: $\varepsilon > 0$ verilsin. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \left(x(1), x(2), ..., x(n), 0, 0, ...\right)$ ile $x_n \in E$ tanımlansın. $n \to \infty$ iken $\rho(x_n) \to \rho(x)$ ve $\rho(x - x_n) \le \rho(x) - \rho(x_n)$ dir. $\rho(x_N) > \rho(x) - \varepsilon$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ seçilsin. Böylece normun $\|.\|_0$ tanımından $d(x,E) \le \|x - x_N\|_0 \le 1 + \rho(x - x_N) \le 1 + \rho(x) - \rho(x_N) < 1 + \varepsilon$ olur ki bu da ε keyfi olduğundan $d(x,E) \le 1$ olması anlamına gelir.

Teorem 5.4.4. $\lim_{j\to\infty} \inf p_j > 1$ ise, aşağıdaki iddialar doğrudur:

iv. $SC(s,p)_0 = \overline{E}$.

v. $SC(s,p)_0$, $C(s,p)_0$ uzayının bütün sıralı sürekli elemanlarının alt uzayıdır.

vi. $SC(s,p)_0$ ayrılabilir uzaydır.

İspat:

i. Herhangi $x \in SC(s,p)_0$ ve $k \ge 1$ için $kx \in SC(s,p)_0$ dir. Buradan, lemmayı kullanarak $d(kx,E) \le 1$ veya $d(x,E) \le \dfrac{1}{k}$ olduğu elde edilir. k keyfi olduğundan, $x \in \overline{E}$ dır.Tersine, ilk teoremden $SC(s,p)_0$, $C(s,p)_0$ uzayının kapalı lineer bir alt uzayı olduğundan $\overline{E} \subseteq SC(s,p)_0$ olduğunu göstermek için $\forall i \in \mathbb{N}$ için $e_i \in SC(s,p)_0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\lim_{j\to\infty} \inf p_j > 1 = \alpha$ olsun. $i \in \mathbb{N}$ sabit ve $k > 0$ alınsın. $\forall j > j_0$ için $p_j \geq \alpha$ olan $j_0 > \max\{i,k\}$ seçilsin.

Buradan,

$$\rho(ke_i) = \sum_{j=i}^{j_0} \left(\frac{k}{j} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i^s} |e_i| \right)^{p_j} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(\frac{k}{j} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i^s} |e_i| \right)^{p_j}$$

$$\rho(ke_i) = \sum_{j=i}^{j_0} \left(\frac{k}{j} \right)^{p_j} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(\frac{k}{j} \right)^{p_j} \leq \sum_{j=i}^{j_0} \left(\frac{k}{j} \right)^{p_j} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(\frac{k}{j} \right)^{\alpha} < \infty$$

olur. Yani $e_i \in SC(s,p)_0$ dir.

ii. Sadece $SC(s,p)_0$ nın her elemanının sıralı sürekli bir eleman olduğunun gösterilmesi gereklidir. Çünkü alt uzay olduğu (i) den görülmektedir. $x \in SC(s,p)_0$ ve $\varepsilon > 0$ için, $x \in SC(s,p)_0$ olduğundan, $\forall i > i_0$ için $\rho\left(\frac{x - x_{|i}}{\varepsilon} \right) < \varepsilon$ olan $i_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $\forall i > i_0$ için,

$$\left\| \frac{x - x_{|i}}{\varepsilon} \right\|_0 \leq 1 + \rho\left(\frac{x - x_{|i}}{\varepsilon} \right) \leq 1 + \varepsilon$$

olur. Bu da $i \to \infty$ iken ε keyfi olduğundan $\left\| x - x_{|i} \right\|_0 \to 0$ olduğu sonucunu verir.

iii. Bu iddia doğrudan (i) den elde edilir.

Uyarı 5.4.5. $\|.\|_L$ ve $\|.\|_0$ normları denk olduğundan yukarıdaki teoremler $C(s,p)$ uzayı üzerinde Luxemburg normu tanımlandığında da geçerlidir. $C(s,p)_L$ ile bu uzayı göstereceğiz.

Şimdi ise $C(s,p)_0$ ve $C(s,p)_L$ uzaylarının düzgün Opial özelliğini sağlamaları için gerekli olan şartlar verilecektir.

Teorem 5.4.6. $\forall j \in \mathbb{N}$ için $p_j > 1$ ve $\lim_{j\to\infty} \sup p_j < \infty$ ise $s \geq 0$ için $C(s,p)_0$ uzayı düzgün Opial özelliğine sahiptir.

İspat: Herhangi $\varepsilon > 0$ ve $\|x\|_0 \geq \varepsilon$ olan $x \in C(s,p)_0$ alalım. (x_n), $SC(s,p)_0$ uzayında sıfıra zayıf yakınsak bir dizi olsun. $\lim_{j\to\infty} \sup p_j < \infty$ olduğundan , "$\rho \in \delta_2$ ise X_ρ uzayında modüler yakınsaklık ile norma göre yakınsaklık denktir." teoreminden x ten bağımsız bir $\delta \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ vardır öyle ki $\rho\left(\frac{x}{2}\right) > \delta$ dir. Ayrıca; $\lim_{j\to\infty} \sup p_j < \infty$ olduğundan $SC(s,p)_0 = C(s,p)_0$ dır. Yukarıdaki teoremin (ii) deki iddiasındaki gibi x , $j_0 \in \mathbb{N}$ bulmamızı sağlayan sıralı sürekli bir eleman olsun öyle ki $\left\|x_{|\mathbb{N}-j_0}\right\| < \frac{\delta}{4}$ ve $\sum_{j=j_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}\frac{|x(i)|}{2}\right) < \frac{\delta}{8}$ dir. Bunu,

$$\delta \leq \sum_{j=1}^{j_0}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}\frac{|x(i)|}{2}\right)^{p_j} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}\frac{|x(i)|}{2}\right)^{p_j}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{j_0}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}\frac{|x(i)|}{2}\right)^{p_j} + \frac{\delta}{8}$$

olması izler ki bu da

$$\frac{7}{8}\delta \leq \sum_{j=1}^{j_0}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}\frac{|x(i)|}{2}\right)^{p_j} \tag{5.4.6.1}$$

olmasını gerektirir. $x_n \xrightarrow{w} 0$ olduğundan $\forall i \in \mathbb{N}$ için $x_n(i) \to 0$ olur. Yani $\forall n > n_0$ için $\left\|x_{|j_0}\right\| < \frac{\delta}{4}$ olan $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece,

$$\begin{aligned}\|x + x_n\|_0 &= \left\|(x+x_n)_{|j_0} + (x+x_n)_{|\mathbb{N}-j_0}\right\|_0 \\ &\geq \left\|x_{|j_0} + x_{n|\mathbb{N}-j_0}\right\|_0 - \left\|x_{|\mathbb{N}-j_0}\right\|_0 - \left\|x_{n|j_0}\right\|_0 \\ &\geq \left\|x_{|j_0} + x_{n|\mathbb{N}-j_0}\right\|_0 - \frac{\delta}{2} \quad . \end{aligned} \tag{5.4.6.2}$$

$\left\|x_{|j_0} + x_{n|\mathbb{N}-j_0}\right\|_0$ ifadesi göz önüne alınsın. $\forall j \in \mathbb{N}$ için $p_j > 1$ olduğundan, $k_n > 0$ vardır öyle ki

$$\left\|x_{|j_0} + x_{n|\mathbb{N}-j_0}\right\|_0 = \frac{1}{k_n}\left(1+\rho\left(k_n\left(x_{|j_0} + x_{n_{|\mathbb{N}-j_0}}\right)\right)\right)$$

dır. Bu, (5.4.6.2) ile birleştirilerek supp(x)∩supp(y)=∅ ise $\rho(y+z) \geq \rho(y)+\rho(z)$ gerçeği ile birlikte göz önüne alınırsa,

$$\|x+x_n\|_0 \geq \frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_n}\rho\left(k_n x_{|j_0}\right) + \frac{1}{k_n}\rho\left(k_n x_{n|\mathbb{N}-j_0}\right) - \frac{\delta}{2}$$

$$\geq \left\|x_{n|\mathbb{N}-j_0}\right\| + \frac{1}{k_n}\rho\left(k_n x_{|j_0}\right) - \frac{\delta}{2} \tag{5.4.6.3}$$

bulunur. $k_n \geq \frac{1}{2}$ olması durumunda düşünmek yeterlidir, çünkü diğer durumda $\|x+x_n\|_0 \geq 2 - \frac{\delta}{2} > 1+\delta$ olur. $2k_n \geq 1$ olduğundan $t \to |t|^p$ fonksiyonunun konveksliğinden $\rho\left(k_n x_{|j_0}\right) \geq 2k_n \rho\left(x_{|j_0}\right)$ elde edilir. (5.4.6.1) ve (5.4.6.3) eşitsizlikleri

$$\|x+x_n\|_0 \geq \left\|x_{n_{|\mathbb{N}-j_0}}\right\| + 2\rho\left(\frac{x_{|j_0}}{2}\right) - \frac{\delta}{2}$$

$$\geq \left\|x_{n_{|\mathbb{N}-j_0}}\right\|_0 + 2\sum_{j=1}^{j_0}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}\frac{|x(i)|}{2}\right)^{p_j} - \frac{\delta}{2}$$

$$> 1 - \frac{\delta}{4} + \frac{14\delta}{8} - \frac{\delta}{2}$$

$$= 1+\delta$$

olmasını gerektirir. Bu da $\lim_{n\to\infty}\inf\|x+x_n\|_0 \geq 1+\delta$ olduğu sonucunu verir.

Teorem 5.4.7. $\lim_{j\to\infty}\sup p_j < \infty$ ise $s \geq 0$ için $C(s,p)_L$ uzayı düzgün Opial özelliğine sahiptir.

İspat: Herhangi $\varepsilon > 0$ ve $\|x\|_0 \geq \varepsilon$ olan $x \in C(s,p)_L$ alalım. (x_n), $SC(s,p)_L$ uzayında sıfıra zayıf yakınsak bir dizi olsun. $\lim_{j\to\infty} \sup p_j < \infty$ olduğundan, "$\rho \in \delta_2$ ise X_ρ

uzayında modüler yakınsaklık ile norma göre yakınsaklık denktir." teoreminden x ten bağımsız $\rho(x) > \delta$ olacak şekilde $\delta \in (0,1)$ vardır. Ayrıca, $\rho \in \delta_2^s$ olduğundan," $\rho \in \delta_2^s$ ise herhangi $L > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için, $\delta > 0$ vardır öyle ki $\rho(u) \leq L,\ \rho(v) \leq \delta$ olan $u,\ v \in X_\rho$ için

$$\left|\rho(u+v) - \rho(u)\right| < \varepsilon$$

dir." teoremi de $\rho(y) \leq 1,\ \rho(z) \leq \delta_1$ iken

$$\left|\rho(y+z) - \rho(y)\right| < \frac{\delta}{4} \tag{5.4.7.1}$$

olacak şekilde $\delta_1 \in (0,\delta)$ sayısının var olduğunu gösterir. $j_0 \in \mathbb{N}$ seçilsin öyle ki

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=j_0+1}^{j}\frac{1}{i^s}\left|x(i)\right|\right)^{p_j} < \sum_{j=j_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}\left|x(i)\right|\right)^{p_j} < \frac{\delta_1}{4} \tag{5.4.7.2}$$

dir. Bu da aşağıdaki sonucu verir:

$$\delta < \sum_{j=1}^{j_0}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}\left|x(i)\right|\right)^{p_j} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}\left|x(i)\right|\right)^{p_j}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{j_0}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}\left|x(i)\right|\right)^{p_j} + \frac{\delta_1}{4},$$

ki bu ise

$$\sum_{j=1}^{j_0}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^s}\left|x(i)\right|\right)^{p_j} > \delta - \frac{\delta_1}{4} > \delta - \frac{\delta}{4} = \frac{3\delta}{4}$$

olmasını gerektirir. Bu ve $x_n \xrightarrow{w} 0$ kabulünden ve zayıf yakınsaklık koordinatsal yakınsaklığı gerektirdiğinden, $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$\frac{3\delta}{4} \le \sum_{j=1}^{j_0} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i^s} \left| x_n(i) + x(i) \right| \right)^{p_j} \tag{5.4.7.3}$$

dir. $x_n \xrightarrow{w} 0$ olmasından $n_1 > n_0$ vardır öyle ki $\forall n > n_1$ için $\left\| x_{n|j_0} \right\|_L < 1 - \left(1 - \frac{\delta}{4}\right)^{\frac{1}{M}}$ dir, ($\forall j \in \mathbb{N}$ için $p_j \le M$ olan $M \in \mathbb{N}$ olduğunda). Böylece normdaki üçgen eşitsizliğinden $\left\| x_{n|\mathbb{N}-j_0} \right\|_L > \left(1 - \frac{\delta}{4}\right)^{\frac{1}{M}}$ olur, dolayısıyla normun tanımından

$$1 \le \rho\left(\frac{x_{n|\mathbb{N}-j_0}}{(1-\delta/4)^{\frac{1}{M}}} \right) = \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{j}\right) \sum_{i=j_0+1}^{j} \frac{1}{i^s} \left| x_n(i) \right|}{(1-\delta/4)^{\frac{1}{M}}} \right)^{p_j} \le \left(\frac{1}{(1-\delta/4)^{\frac{1}{M}}} \right)^{M} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=j_0+1}^{j} \frac{1}{i^s} \left| x_n(i) \right| \right)^{p_j}$$

elde edilir. $\forall n > n_1$ için

$$1 - \frac{\delta}{4} \le \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=j_0+1}^{j} \frac{1}{i^s} \left| x_n(i) \right| \right)^{p_j}$$

olur. Bununla birlikte herhangi $n > n_1$ için (5.4.7.1), (5.4.7.2) ve (5.4.7.3) den;

$$\rho(x_n + x) = \sum_{j=1}^{j_0} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i^s} \left| x_n(i) + x(i) \right| \right)^{p_j} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i^s} \left| x_n(i) + x(i) \right| \right)^{p_j}$$

$$> \sum_{j=1}^{j_0} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i^s} \left| x_n(i) + x(i) \right| \right)^{p_j} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=j_0+1}^{j} \frac{1}{i^s} \left| x_n(i) + x(i) \right| \right)^{p_j}$$

$$\ge \frac{3\delta}{4} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} \sum_{i=j_0+1}^{j} \frac{1}{i^s} \left| x_n(i) \right| \right)^{p_j} - \frac{\delta}{4}$$

$$\geq \frac{3\delta}{4}+\left(1-\frac{\delta}{4}\right)-\frac{\delta}{4}$$

$$=1+\frac{\delta}{4}$$

bulunur. $\rho \in \delta_2^s$ olduğundan, "$\rho \in \delta_2^s$ ise herhangi $\varepsilon > 0$ için $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $\rho(x) \geq 1+\varepsilon$ iken $\|x\| \geq 1+\delta$ dir." teoreminden sadece δ ya bağlı τ sayısı vardır öyle ki $\|x_n + x\|_L \geq 1+\tau$ olur.

Teorem 5.4.8. Herhangi $(p_r) = p$, $1 < p < \infty$ ve $s \geq 0$ için, $C(s,p)$ uzayı düzgün Opial özelliğine sahiptir.

İspat: Herhangi $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon_0 \in (0,\varepsilon)$ pozitif sayısı bulunabilir öyle ki

$$1+\frac{\varepsilon^p}{2} > (1+\varepsilon_0)^p$$

olur. $x \in X$ ve $\|x\| \geq \varepsilon$ olsun. $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\sum_{i=n_1+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^s}|x(i)|\right)^p < \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^p$$

dir. Böylece $e_i = \left(0,0,...,\overset{i.}{1},0,...\right)$ olduğunda

$$\left\|\sum_{i=n_1+1}^{\infty} x(i)e_i\right\| < \frac{\varepsilon_0}{4} < \frac{\varepsilon}{4}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\varepsilon^p \leq \sum_{n=1}^{n_1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^s}|x(i)|\right)^p + \sum_{n=n_1+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^s}|x(i)|\right)^p$$

$$< \sum_{n=1}^{n_1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^s}|x(i)|\right)^p + \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^p < \sum_{n=1}^{n_1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^s}|x(i)|\right)^p + \frac{\varepsilon^p}{4}$$

olur dolayısıyla

$$\frac{3\varepsilon^p}{4} < \sum_{n=1}^{n_1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^s}\left|x(i)\right|\right)^p$$

dir. Herhangi sıfıra zayıf yakınsak $\{x_m\} \subset SC(s,p)$ için $i = 1,2,...$ için $x_m(i) \to 0$ olduğundan $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $m > m_0$ iken

$$\left\|\sum_{i=1}^{n_1} x_m(i)e_i\right\| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

dir. Böylece, $m > m_0$ iken

$$\|x_m + x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_m(i)+x(i)\right)e_i + \sum_{i=n_1+1}^{\infty}\left(x_m(i)+x(i)e_i\right)\right\|$$

$$\geq \left\|\sum_{i=1}^{n_1}\left(x(i)\right)e_i + \sum_{i=n_1+1}^{\infty}\left(x_m(i)\right)e_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_m(i)\right)e_i\right\| - \left\|\sum_{i=n_1+1}^{\infty}\left(x(i)\right)e_i\right\|$$

$$\geq \left\|\sum_{i=1}^{n_1}\left(x(i)\right)e_i + \sum_{i=n_1+1}^{\infty}\left(x_m(i)\right)e_i\right\| - \frac{\varepsilon_0}{2}$$

olur. Üstelik, $a := \sum_{i=1}^{n_1}\left|x(i)\right|$ için

$$\left\|\sum_{i=1}^{n_1}\left(x(i)\right)e_i + \sum_{i=n_1+1}^{\infty}\left(x_m(i)\right)e_i\right\|^p = \sum_{n=1}^{n_1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^s}\left|x(i)e_i\right|\right)^p + \sum_{n=n_1+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^s}\left(a+\left|x_m(i)\right|\right)\right)^p$$

$$\geq \sum_{n=1}^{n_1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^s}\left|x(i)e_i\right|\right)^p + \sum_{n=n_1+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^s}\left|x_m(i)\right|\right)^p$$

$$\geq \frac{3\varepsilon^p}{4} + \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{4}\right) = 1 + \frac{\varepsilon^p}{2} > \left(1+\varepsilon_0\right)^p$$

sağlanır. Bu eşitsizlik bir önceki ifadeyle birleştirilerek,

$$\|x_m + x\| \geq \left\|\sum_{i=1}^{n_1}\left(x(i)\right)e_i + \sum_{i=n_1+1}^{\infty}\left(x_m(i)\right)e_i\right\| - \frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\geq 1+\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=1+\frac{\varepsilon_0}{2}$$

sonucu elde edilir. Bu da $C(s,p)$ uzayının düzgün Opial özelliğine sahip olması anlamına gelir. $C(s,p)$ refleksif ve düzgün Opial özelliğine sahip olduğundan aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 5.4.9. $C(s,p)$ uzayı L- özelliğine sahiptir.

Sonuç 5.4.10. $C(s,p)$ uzayı refleksif, düzgün Opial özelliğine ve L- özelliğine sahip bir uzay olduğundan normal yapıya ve dolayısıyla sabit nokta özelliğine de sahiptir.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde bazı dizi uzaylarının geometrik özellikleri verilmiştir. Tezin orijinal bölümünü ise, $C(s,p)$ dizi uzayının bazı geometrik özellikleri oluşturmaktadır. Bu son bölümde elde edilen temel özellikler sonuçlar halinde verilecektir.

Sonuç 6.1. $C(s,p)$ uzayı H- özelliğine sahiptir.

Sonuç 6.2. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ olan $p=(p_k)$pozitif sayıların sınırlı bir dizisi için Luxemburg normu ile donatılmış olan $C(s,p)$ uzayı rotund uzay değildir.

Sonuç 6.3. Herhangi k≥ 2 için, $C(s,p)$ uzayı k-NUC uzaydır.

Sonuç 6.4. s ≥ 0 için $C(s,p)$ uzayı NUC uzaydır.

Sonuç 6.5. s ≥ 0 için $C(s,p)$ uzayı drop (damla) özelliğine sahiptir.

Sonuç 6.6. Her k $\in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ ise, $C(s,p)_0$ uzayı UKK özelliğine sahiptir.

Sonuç 6.7. Her k $\in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ ise, $C(s,p)_0$ uzayı H- özelliğine sahiptir.

Sonuç 6.8. Herhangi $1 < p < \infty$ ve s≥ 0 için, $C(s,p)$ uzayı düzgün Opial özelliğine sahiptir.

Sonuç 6.9. $C(s,p)$ uzayı L- özelliğine sahiptir.

Sonuç 6.10. $C(s,p)$ uzayı refleksif, düzgün Opial özelliğine ve L- özelliğine sahip bir uzay olduğundan normal yapıya ve dolayısıyla sabit nokta özelliğine de sahiptir.

Bu uzayda gösterilen bu geometrik özelliklerin yanı sıra, Banach uzaylarında var olan diğer geometrik özelliklerin de bu uzayda olup olmadığı açık bir problem olarak araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] DOMINGUEZ BENAVIDES T., GAVIRA B., The fixed point property for multivalued nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 1-13, 2006.

[2] DHOMPONGSA S., Convexity properties of Nakano Spaces, Science Asia, 26, 21-31, 2000.

[3] SANHAN W., SUTHEP S., On k-nearly uniform convex property in generalized Cesaro Sequence Spaces, Hindawi Publishing Corp., 57, 3599-3607, 2003

[4] WANGKEEREE R., On property (k-NUC) in Cesaro-Musielak-Orlicz Sequence Spaces, Thai Journal of Mathematics, 1, 119-130, 2003.

[5] SANHAN W., SUTHEP S., Some Geometric Properties of Cesaro Sequence Space, Kyungpook J. Math., 43, 191-197, 2003.

[6] SUTHEP S., On Some Convexity Properties of Generalized Cesaro Sequence Spaces, Georgian J. Math., 10, 193-200, 2003.

[7] SUTHEP S., On the H-Property of Some Banach Sequence Spaces, Archivum Mathematicum (Brno), 39, 309-316, 2003.

[8] THOMPSON B.H., CUI Y., The Fixed Point Property ın Musielak-Orlicz Sequence Spaces, Comment Math.Univ.Carolinae, 42, 299-309, 2001.

[9] CUI Y., HUDZIK H., MENG C., On Some Geometry of Orlicz Sequence Spaces Equipped With the Luxemburg Norm, Acta Math. Hungar, 80, 143-154, 1998.

[10] LANDES T., Normal Structure and Weakly Normal Structure of Orlicz Sequence Spaces, Transactions of the American Mathematical Society, 285, 523-534, 1984.

[11] CUI Y., HUDZIK H., NOWAK M., PLUCIENNIK R., Some Geometric Properties in Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm, Journal of Convex Analysis, 6, 91-113, 1998.

[12] PETROT N., SUTHEP S., On Uniform Kadec-Klee Properties and Rotudity in Generalized Cesaro Sequence Space,. Hindawi Publishing Corp., 2, 91-97, 2003.

[13] TECK C.L., On the Normal Structure Coefficient and the Bounded Sequence Coefficient, Proceedings of the Mathematical Society, 88, 262-264, 1983.

[14] CUI H., WANG F., Some Estimates on the Weakly Convergent Sequence Coefficient in Banach Spaces, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7, 1-6, 2006.

[15] CUI Y., HUDZIK H., PETROT N., SUTHEP S., SZYMASZKIEWICZ A., Basic Topological and Geometric Properties of Cesaro-Orlicz Spaces, Proc. Indian Acad. Sci., 115, 461-476, 2003.

[16] CUI Y., HUDZIK H., KOWALEWSKI W., On Fully Rotundity Properties and Approximative Compactness in Some Banach Sequence Spaces, Indian J.Pure Appl. Math., 34, 17-30, 2003.

[17] PETROT N., SUTHEP S., Some Geometric Properties in Orlicz-Cesaro Spaces, Science Asia, 31, 173-177, 2005.

[18] YAN Y.Q., On Estimates of Normal Structure Coefficients of Banach Spaces, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 5, 1-5, 2004.

[19] CUI Y., Weakly Convergent Sequence Coefficient in Köthe Sequence Spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, 126, 195-201, 1998.

[20] PRUS S., Banach Spaces with the Uniform Opial Property, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 18, 697-704, 1992.

[21] SUTHEP S., PETROT N., MALIGRANDA L., On The James Constant and B-Convexity of Cesaro and Cesaro-Orlicz Sequence Spaces, J. Math. Anal. Appl., 326, 312-331, 2007.

[22] BİLGİN T., The sequence space C(s,p) and related matrix transformations, Punjab Univ.J.Math , 67-77 , (1997).

[23] HUFF R, Banach Spaces which are Nearly Uniformly Convex, Rocky Mountain J. Math. , 10, 743-749, (1985).

[24] SUTHEP S., PETROT N., Uniform Opial Properties in Generalized Cesaro Sequence Spaces, Nonlinear Analysis, 63, 1116-1125, 2005.

[25] ALEXOPOULOS J., Weakly Compact Sets ın Banach Spaces, Ph. D. Thesis, Kent State University Graduate College, 1992.

[26] BİLGİN T., Matrix Transformation on Certain Sequence Spaces, Applied Mathematics and Computation, 1-4, 2003.

[27] CUI Y., HUDZIK H., HONGWEI Z. , Maluta's Coefficient in Musielak-Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm, Proceedings of the American Mathematical Society,126, 115-121, 1998.

[28] BYNUM W.L., Normal Structure Coefficients for Banach Spaces, Pacific J. Math., 86, 427-436, 1980.

[29] MALUTA E., Uniformly Normal Structure and Related Coefficients for Banach Spaces, Pacific J. Math., 111, 357-369, 1984.

[30] LIM T.C., On the Normal Structure Coefficient and the Bounded sequence Coefficient, Proceedings of the American Mathematical Society, 88, 262-264, 1983.

[31] RAO M.M., REN Z.D., Theory of Orlicz Spaces, Marcel Dekker Inc., 1991.

[32] MUSIELAK J., Orlicz Spaces and Modular Spaces, Lecture Notes in Math., 1034, Springer-Verlag, 1983.

[33] KRASNOSELSKII M.A., RUTICKII Y.B., Convex Functions and Orlicz Spaces, P.Nordhoff Ltd., translation, Groningen, 1961.

[34] DIESTEL J., Geometry of Banach Spaces-Selected Topics, Springer-Verlag, 1984.

[35] MEGGINSON R.E., An Introduction to Banach Space Theory, Springer-Verlag, 1998.

[36] SHIUE J.S., Cesaro Sequence Spaces, Tamkang J. Math., 1, 19-25, 1970.

[37] DOMINGUEZ BENAVIDES T., Geometric Properties of Banach Spaces and Metric Fixed Point Theory, Extracta Mathematicae, 17, 331-349, 2002.

[38] CUI Y., HUDZIK H., Some Geometric Properties Related to Fixed Point Theory in Cesaro Sequence Spaces, Collectanea Mathematica, 50, 277-288, 1999.

[39] PRUS S., Some Estimates for the Normal Structure Coefficient in Banach Spaces, Rend. Circ. Math. , Palermo, 40, 128-135, 1991.

[40] HUDZIK H., ZBASZYNIAK Z., Smooth Points of Musielak-Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Luxemburg Norm, Colloq. Math. , 65, 157-164, 1993.

ÖZGEÇMİŞ

Mahpeyker Öztürk, 25.02.1982 de Kayseri' de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sakarya Hendek'te tamamladı. 1999-2000 eğitim yılında Hendek Atike Hanım Anadolu Lisesinden mezun oldu. 2000-2001 eğitim yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki Lisans eğitimini 2003-2004 eğitim yılında bitirdi. 2004-2005 eğitim yılında Özel Sakarya Kültür Dershanesi'nde Matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2005 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans eğitimine başladı. 20 Mart 2006 tarihinden itibaren Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.