

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

SPLINE FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatih BAŞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdullah YILDIZ

Eylül 2007

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLINE FONKSİYONLARI VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatih BAŞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 07 / 09 /2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.
Abdullah YILDIZ
Jüri Başkanı

Yrd. Doç. Dr.
Ö. Faruk GÖZÜKIZIL
Üye

Yrd. Doç. Dr.
Yılmaz GÜNEY
Üye

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana öneren, çalıőmam sırasında yardımcı olan, danıőmanım Sayın Prof. Dr. Abdullah YILDIZ'a sonsuz teőekkürlerimi ve őükranlarımı sunarım.

Tez çalıőmam süresince çeşitli yardım ve desteğini gördüğüm; eőim Aynur BAŞ'a teşekkür ederim.

Bu çalıőmanın, ihtiyacı olan kişilere yardımcı olmasını dilerim.

İÇİNDEKİLER

| | |
|--|------|
| TEŞEKKÜR..... | ii |
| İÇİNDEKİLER | iii |
| SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ..... | v |
| ŞEKİLLER LİSTESİ..... | vi |
| TABLolar LİSTESİ..... | viii |
| ÖZET..... | ix |
| SUMMARY..... | x |
| BÖLÜM 1. | |
| GİRİŞ..... | 1 |
| BÖLÜM 2. | |
| BÖLÜN MÜŞ FARKLAR..... | 3 |
| 2.1. Yüksek Mertebeli Bölünmüş Farklar..... | 6 |
| 2.2. Bölünmüş Farkların Özellikleri..... | 9 |
| BÖLÜM 3. | |
| SPLINE FONKSİYONLARI..... | 11 |
| 3.1. Kübik Spline..... | 13 |
| 3.1.1. Tension (gerilme) spline..... | 20 |
| 3.1.2. Yüksek dereceli doğal spline'lar teorisi..... | 23 |
| BÖLÜM 4. | |
| PARABOLİK SPLINE İNTERPOLASYON..... | 28 |

| | |
|--|----|
| 4.1. Parçalı Polinom Fonksiyonları..... | 35 |
| 4.2. $\prod_{<k,\varepsilon,\nu}$ Uzayı ve Kısaltılmış Kuvvet Fonksiyonları Tabanı..... | 36 |
| 4.3. $\prod_{<k,\varepsilon} \prod_{<k,\varepsilon,\nu}$ İçin Kısaltılmış Kuvvet Tabanı..... | 40 |
| 4.4. B-Splinelar Vasıtasıyla PP Fonksiyonlarının Oluşturulması..... | 44 |
| 4.4.1. İki özel düğüm (knot) dizisi..... | 47 |
| 4.4.2. B-Spline'lar için ardışık olma bağıntısı | 48 |
| 4.4.3. Spline uzayı $\mathcal{S}_{k,t}$ | 52 |
| 4.4.4. B-Spline ve spline'ların kararlı-stabil hesaplanması..... | 63 |
| 4.4.5. B-Spline fonksiyonunun diferansiyeli ve integrali..... | 65 |
| 4.4.6. B-Spline'lar yardımıyla çeşitli fonksiyonlara yaklaşım..... | 69 |
| BÖLÜM 5. | |
| SONUÇLAR VE ÖNERİLER..... | 72 |
| KAYNAKLAR..... | 73 |
| EKLER..... | 74 |
| ÖZGEÇMİŞ | 76 |

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

| | |
|----------------------------|--|
| I_k | : k. mertebeden (k-1). dereceden spline'lar ile interpolasyon |
| $B_{i,k}(t)$ | : k. mertebeden i. B-spline baz fonksiyonu |
| pp | : Parçalı polinom |
| $\Pi_{<k}$ | : k. mertebeden küçük polinomlar uzayı |
| $\Pi_{<k,\xi}$ | : ξ kırılma noktaları dizisi ile k. mertebeden küçük parçalı polinomlar |
| $\Pi_{<k,\xi,v}$ | : ξ kırılma noktalarında, v süreklilik mertebelerini ifade etmesi koşuluyla $\Pi_{<k,\xi}$ uzayının alt uzayı |
| $D^j f$ | : f fonksiyonunun j. dereceden türevi |
| $\mathcal{S}_{k,t}$ | : $span(B_{i,k,t})$, t düğüm dizisi ile k. mertebeden spline'ların lineer uzayı |
| $\Delta \tau_i$ | : $\tau_{i+1} - \tau_i$ ileri farkı |
| $\nabla \tau_i$ | : $\tau_i - \tau_{i-1}$ geri farkı |
| $sıçrama_a f$ | : f fonksiyonunun a noktasındaki sıçraması |
| $(x)_+$ | : $\max(x, 0)$ uyarlanmış fonksiyon |
| $(\cdot - x)_+^{k+1}$ | : x bir değer olmak üzere \cdot yerindeki değişkene göre fonksiyon işlem görür. Sonuç bu x noktasındaki değerdir |
| D, D_x | : Türev operatörleri |
| $[\tau_i, \dots, \tau_j]f$ | : f 'in τ_i, \dots, τ_j noktalarındaki $j - i$ 'nci mertebeden bölünmüş farkları. $f[\tau_i, \dots, \tau_j]$ şeklinde gösterilir |
| $\tau_{i+1/2}$ | : $(\tau_i + \tau_{i+1})/2$ |
| $f(a^+)$ | : $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(a + h)$ |

ŞEKİLLER LİSTESİ

| | | |
|-------------|--|----|
| Şekil 3.1. | 0'inci dereceden bir spline | 12 |
| Şekil 3.2. | 1'inci dereceden bir spline | 12 |
| Şekil 3.3. | $S(x)$ interpolasyon fonksiyonunun görünümü | 20 |
| Şekil 3.2a. | Yüksek gerilimli spline ($\tau = 10$) | 21 |
| Şekil 3.2b. | Düşük gerilimli spline ($\tau = 0.1$) | 21 |
| Şekil 4.1. | $l = 7$ için parçalı polinom fonksiyonları | 35 |
| Şekil 4.2. | Bir histograma parabolik “alan uyumlu” spline tahmini | 37 |
| Şekil 4.3. | Lineer sistemin görüntüsü | 39 |
| Şekil 4.4. | $6(x - \xi)_+^0, 6(x - \xi)_+^1, 3(x - \xi)_+^2, (x - \xi)_+^3$ fonksiyonlarında $x = \xi$ değerinde artan düzgünlüğe sahiptirler, her birinin sağdaki fonksiyonun türevi olması bu durumu açıklar | 41 |
| Şekil 4.5. | Uyarlanmış kuvvet fonksiyonları bazı için zorluklara sebep olan lineer bir yaklaşım | 43 |
| Şekil 4.6. | $(t_1, \dots, t_{5+3}) = (0, 1, 1, 3, 4, 6, 6, 6)$ düğüm dizisi için parabolik spline'lar düğüm katlılığı ve düzgünlük arasındaki ilişki | 51 |
| Şekil 4.7. | (t_j, \dots, t_{j+1}) aralığında k . mertebeden B-Spline'nin en sol ve en sağdaki parçalarının sıfırdan farklı oluşunun dayanağı | 53 |
| Şekil 4.8. | Kırılma noktalarına ve süreklilik koşullarına uygun düğüm katlılıklarını belirleme tablosu | 59 |
| Şekil 4.9. | B-Spline katsayıları modeli ile fonksiyonun temsili $0..10]$ üzerindeki kübik bir polinomsal f ve onun B-Spline katsayıları $(\alpha_j), \alpha_j \square f(t_{jk}^*)$ 'yi göstermektedir. \times işareti ile işaretlenen noktalar düzgün düğüm dizisi $0,1,\dots,10$ 'dan gelmektedir, Θ işareti ile işaretlenenler daha sık düğüm dizisi $0,1/2,\dots,10$ dan gelmektedir | 62 |

| | | |
|-------------|--|----|
| Şekil 4.10. | Dört kübik polinom birleşerek B-Spline fonksiyonunu oluşturur | 65 |
| Şekil 4.11. | $f(x) = \sin x$ fonksiyonuna 5. mertebeden B-Spline'lar ile 20 nokta kullanılarak $[-6, +6]$ aralığında yapılan yaklaşım | 69 |
| Şekil 4.12. | $f(x) = x^3$ fonksiyonuna 3. mertebeden B-Spline'lar ile 15 nokta kullanılarak $[-8, +8]$ aralığında yapılan yaklaşım | 70 |
| Şekil 4.13. | $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonuna 4. mertebeden B-Spline'lar ile 5 nokta kullanılarak $[0, 4]$ aralığında yapılan yaklaşım | 71 |

TABLULAR LİSTESİ

| | | |
|------------|---|----|
| Tablo 2.1. | Örnek2.1'in bölünmüş fark tablosu | 8 |
| Tablo 4.1. | P_i için ayrılmış fark tablosu | 32 |
| Tablo 4.2. | Sıfır olmayan $[t_i, t_{i+1}]$ üzerindeki $\leq k$ mertebe B-Spline larının üçgensel dizimi | 64 |

ÖZET

Anahtar kelimeler: İnterpolasyon, Spline, B_spline

1960'lerden sonra parçalı sürekli fonksiyonların konusu öncelikli bir çalışma alanı haline gelmiştir. Özellikle Spline fonksiyonları bu tarihlerde çalışılmaya başlanmıştır.

Bu fonksiyonlar Yaklaşım teorisinde veri uydurmada, Sayısal integrasyonda, Adi, Kısmi diferansiyelde integral denklemlerin sayısal çözümlerinde bir çok değişik formlarda kullanılmaya başlanmıştır. İnterpolasyonlar teorisi açısından bakıldığında çok daha avantajlı olmaktadır.

Biz bu çalışmaya interpolasyon ile başlayıp spline fonksiyonlarını ve bunların hesaplanmasını verip Diferansiyel denklem çözümünde kullanacağız.

B-Spline teoriyle de bir başka gelişme anlatılacaktır.

SPLINE FUNCTIONS AND APPLICATIONS

SUMMARY

Key Words: Interpolation, Spline, B_spline

The subject of piecewise continuous function becomes prior study area after 1960s. Spline functions are studied especially these times.

This functions are used in different forms the approximation theory, data interpolasyon, Numerical integration, simple partical differential and for numerical solitions of integral equations. When it is considered as interpolation theory, it will be more advantageous.

We will start this study with interpolationby giving spline functions and their computing and then we will use them for solution of differential equation.

It will be described another development with B_Spline theory.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Yaklaşım yöntemleri Matematikte olduğu kadar Temel Bilimlerin diğer alanlarında ve Mühendislikte yaygın olarak kullanılan önemli çözüm tekniklerindedir. Tek yada çok değişkenli fonksiyonların yaklaşık hesabında kullanılan bu yöntem ile ilgili olarak günümüzde; İnterpolasyon ve yaklaşım, Nümerik integral ve türev, Adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri, integral denklemler, diferansiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri, özdeğer hesapları ve operatörlerin öz fonksiyonlarının hesaplanması, kontrol teorisi gibi alanlarda çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Yaklaşım yöntemleri içerisinde polinom yaklaşımları önemli bir yer tutmaktadır. Ancak, nokta sayısının artmasıyla elde edilecek interpolasyon polinomunun dercesinde artar. Bunun yanında bir de noktalar dışında interpolasyon polinomunun gerçek fonksiyondan göstereceği büyük sapmalarda dikkate alındığında, polinom interpolasyonu yerine başka tekniklere gerek olduğu anlaşılmaktadır.

Birçok durumda bir diferansiyel denklemin belirli şartları sağlayan özel çözüm eğrisini bilmiyor ya da analitik yollarla çözülemiyor olunabilir. Bu durumda bilinmeyen fonksiyon değerlerini, çözümün var olduğu aralığı parçalara bölerek, her bir parçada ikinci, üçüncü ya da daha yüksek dereceden polinom yaklaşımı yapmak suretiyle yaklaşık olarak hesap edilir. Her bir aralıkta değişik fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı bu tür interpolasyona Spline interpolasyonu denir.

Belirli verilere uyan, bilinmeyen fonksiyonların yaklaşık çözümünde kullanılan Spline'lar konusunda ilk çalışma 1940'lı yıllarda Schoenberg tarafından ortaya konulmuştur. Spline fonksiyonları, parçalı polinomların bir sınıfından olup, bu fonksiyonlar, polinomların süreklilik özelliği taşıyan dizilişleri ile oluşmaktadırlar. Yaklaşım fonksiyonları, interpolasyon ve eğri uydurma fonksiyonları olarak üstün

özelliklere sahiptirler. İkinci bölümde Spline fonksiyonlarını kavramamızda gerekli olacak bölünmüş farklar ve bölünmüş farkların özelliklerinden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde kübik spline fonksiyonlarından, dördüncü bölümde ise parabolik spline'ler ve B-Spline fonksiyonlarından bahsedilmiştir.

BÖLÜM 2. BÖLÜN MÜŞ FARKLAR

x_0, x_1, \dots, x_n noktalar dizisinde değerleri bilinen veya hesaplanan bir f fonksiyonunu alınır. Bunların sıralanmaya ihtiyaçları yoktur. $n+1$ noktada f 'i interpolate eden n . dereceden tek bir P polinomu vardır.

$$p(x_i) = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq n) \quad (2.1)$$

P polinomu, $1, x, x^2, \dots, x^n$ baz polinomlarının lineer bir kombinasyonu olarak yapılandırılabilir. Bu baz tavsiye edilmez, interpolasyon polinomu için Newton formuna uygun bir baz kullanılması tercih edilir;

$$\begin{aligned} q_0(x) &= 1 \\ q_1(x) &= (x - x_0) \\ q_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \\ q_3(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &\vdots \\ q_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Baz fonksiyonları ile Newton formu,

$$p(x) = \sum_{j=0}^n c_j q_j(x)$$

şeklinde oluşur.

İnterpolasyon koşulları, c_j bilinmeyen kat sayılarının saptanması için lineer bir denklem sistemi oluşturur;

$$\sum_{j=0}^n c_j q_j(x_i) = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq n) \quad (2.2)$$

Bu eşitlik sisteminde katsayı matrisi elemanları

$$a_{ij} = q_j(x_i) \quad (0 \leq i, j \leq n) \quad (2.3)$$

olan $(n+1) \times (n+1)$ boyutlu bir A matrisidir. A matrisi bir üçgen matrisdir çünkü

$$q_j(x) = \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) \quad (2.4)$$

$$q_j(x_i) = \prod_{k=0}^{j-1} (x_i - x_k) = 0 \quad (i \leq j-1)$$

dır. Özel olarak üç nokta durumu düşünülürse;

$$p_2(x) = c_0 q_0(x) + c_1 q_1(x) + c_2 q_2(x)$$

$$= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$x = x_0, x = x_1$ ve $x = x_2$ alındığında, bir üçgen sistem elde edilir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

c_0, c_1, \dots, c_n katsayıları için (2.2) eşitliğinin çözümünde c_j katsayılarını (2.5) ifadesinde en üstten çözmeye başlayarak hesaplanır. Bu yöntemde c_0 'ın sadece $f(x_0)$ 'a, c_1 katsayısının $f(x_0)$ ve $f(x_1)$ 'e bağlı olduğu ve böylece devam

ettiği görülür. Bu nedenle $c_n, x_0, x_1, \dots, x_n$ noktalarında f fonksiyonuna bağlıdır.

Aşağıdaki notasyon

$$c_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n] \quad (2.6)$$

yıllar önce bu bağımlılığı vurgulamak için kabul edildi.

$q_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) = x^n +$ daha düşük dereceli terimler olduğundan x_0, x_1, \dots, x_n noktalarında f fonksiyonunu interpolate eden n dereceli polinomun içerisinde $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ 'ye x^n 'in katsayısı denilebilir. $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ ifadesi f fonksiyonunun bölünmüş farkları olarak adlandırılır. Öncelikle $f[x_0]$, x_0 noktasında f fonksiyonunu interpolate eden 0 dereceli polinom içinde x^0 'ın katsayısıdır. Buradan şu ifade elde edilir;

$$f[x_0] = f(x_0) \quad (2.7)$$

$f[x_0, x_1]$ değeri, x_0 ve x_1 noktalarında f 'i interpolate eden birinci dereceden polinom içerisinde x 'in katsayısıdır. Böylece polinom

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) \quad (2.8)$$

şeklinde olduğundan $q_1(x)$ 'in katsayılarının

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (2.9)$$

olduğu görülür. Bu durum terim olarak neden bölünmüş farkların kabul edildiğinin işaretini verir. Aşağıdaki dataların bölünmüş fark tablosu şu şekilde gösterilebilir;

$$\begin{array}{l} x_0 \quad f(x_0) \quad f[x_0, x_1] \\ x_1 \quad f(x_1) \end{array}$$

ve interpolasyon polinomu aşağıdaki ifadeden kolaylıkla oluşturulur.

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

Formül (2.7) ve (2.9) sistem (2.5) içerisinde c_0 ve c_1 için çözümlenerek elde edilebilir, çünkü $c_0 = f[x_0]$ ve $c_1 = f[x_0, x_1]$ eşitlik (2.6) ile uyumludur. Eşitlik (2.1) Newton interpolasyon polinomunu aşağıdaki formda yazmamızı sağlar.

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k q_k(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) \quad (2.10)$$

2.1. Yüksek Mertebeli Bölünmüş Farklar

Daha yüksek mertebeli bölünmüş farkları hesaplamak için aşağıdaki teorem kullanılır.

Teorem 2.1. : Bölünmüş farklar şu eşitliği sağlar;

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad (2.11)$$

İspat: Öncelikle x_0, x_1, \dots, x_k noktalarında f fonksiyonunu interpolate eden k dereceli polinom P_k ile gösterilsin. P_n ve P_{n-1} 'e ihtiyaç vardır. x_1, x_2, \dots, x_n noktalarında f fonksiyonunu interpolate eden $n-1$ dereceli polinom q ile gösterilsin. Aşağıdaki ifade elde edilir,

$$p_n(x) = q(x) + \frac{x - x_n}{x_n - x_0} [q(x) - p_{n-1}(x)] \quad (2.12)$$

Bu eşitlik öncelikli olarak şuna dikkat ederek ispatlanır; eşitliğin her iki tarafında n dereceli bir polinom vardır. Böylece sağ ve soldaki bu polinomların değerlerinin x_0, x_1, \dots, x_n noktalarında aynı olduğu görülür. Bu sebeple polinomlar benzer olmalıdır. Eşitlik (2.12) nin sol ve sağ yanındaki x^n katsayıları eşit olmalıdır, böylece eşitlik (2.11)'e ulaşırız.

Önceki teorem bize şu özel formülleri verir;

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Bu formüllerde x_0, x_1, x_2, \dots bağımsız değişkenler olarak düşünülebilir. Bu nedenle (2.13) eşitliği gibi eşitlikler elde edilir.

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i} \quad (2.13)$$

Burada $f[x_i], f[x_i, x_{i+1}], f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}], f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$, v.b. 0,1,2,3 mertebelerinin farklarıdır.

Eğer $(x_i, f(x_i))$ fonksiyon değerlerinin bir tablosu verilirse bu tablodan bölünmüş farkların bir tablosu oluşturulabilir. Bu alışılmış şekilde her biri tamamlanmış olan sütun içinde gösterilen 0,1,2,3 mertebelerinin farkları aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$\begin{array}{l|l} x_0 & f[x_0] \\ x_1 & f[x_1] \\ x_2 & f[x_2] \\ x_3 & f[x_3] \end{array} \left| \begin{array}{l} f[x_0, x_1] \quad f[x_0, x_1, x_2] \quad f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ f[x_1, x_2] \quad f[x_1, x_2, x_3] \\ f[x_2, x_3] \end{array} \right.$$

Dikey çizginin solundaki bilgiler verilir ve sağda formüller hesaplanır. Formül (2.11) bunu yapmak için kullanılır. Formül (2.11)'in tekrarlanan yapısı bölünmüş fark tablosunun üçgen biçimini meydana getirir. Örneğin verilen veri $f[x_3, x_4], f[x_2, x_3, x_4]$, v.b. ni hesaplamamıza izin vermez.

Eşitlik (2.10) ve (2.11) karşılaştırılarak bölünmüş fark tablosu içindeki en üst sırada bulunan ve Newton interpolasyon polinomu için gereken katsayılar görülür.

Örnek 2.1.: Aşağıdaki fonksiyon değerleri için bölünmüş fark tablosunu oluşturalım;

| | | | | |
|--------|---|----|---|---|
| x | 3 | 1 | 5 | 6 |
| $f(x)$ | 1 | -3 | 2 | 4 |

Çözüm: Verilen tabloyu dikey olarak oluşturulur, formül (2.11)'i kullanılarak bölünmüş farklar hesaplanır ve aşağıdaki tablo elde edilir.

Tablo 2.1. Örnek2.1'in bölünmüş fark tablosu

| | | | | |
|---|----|-----|------|------|
| 3 | 1 | 2 | -3/8 | 7/40 |
| 1 | -3 | 5/4 | 3/20 | |
| 5 | 2 | 2 | | |
| 6 | 4 | | | |

Örnek 2.2.: Tablo 2.1. deki fonksiyon değerleri için Newton interpolasyon polinomunu oluşturalım;

$$P(x) = 1 + 2(x-3) - \frac{3}{8}(x-3)(x-1) + \frac{7}{40}(x-3)(x-1)(x-5)$$

2.2. Bölünmüş Farkların Özellikleri

Teorem 2.2.: Bölünmüş fark, argümanlarının simetrik bir fonksiyonudur. Eğer (z_0, z_1, \dots, z_n) (x_0, x_1, \dots, x_n) 'nin bir permütasyonu ise bu durumda;

$$f[z_0, z_1, \dots, z_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] \quad (2.14)$$

eşitliği yazılabilir.

İspat: Eşitlik (2.14)'ün sol tarafındaki bölünmüş fark, z_0, z_1, \dots, z_n noktalarında f 'i interpolate eden n dereceli polinom içindeki x^n 'in katsayısıdır. Sağdaki bölünmüş fark, x_0, x_1, \dots, x_n noktalarında f 'i interpolate eden n dereceli polinom içindeki x^n 'in katsayısıdır. Bu iki polinom elbette aynıdır.

Teorem 2.3.: P $n+1$ elemanlı x_0, x_1, \dots, x_n noktalar dizisinde, bir f fonksiyonunu interpolate eden n dereceli bir polinom olsun. Eğer t , bu noktalardan farklı bir nokta ise bu durumda;

$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] \prod_{j=0}^n (t - x_j) \quad (2.15)$$

$$f(t) = p(t) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] \prod_{j=0}^n (t - x_j)$$

ifadesi elde edilmiş olur.

Teorem 2.4.: Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde n kez sürekli olarak diferansiyellenebiliyor ise ve eğer x_0, x_1, \dots, x_n $[a, b]$ içinde belirli noktalar ise bu durumda (a, b) içinde bir ξ noktası aşağıdaki gibi ortaya çıkar;

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad (2.16)$$

İspat: İlk olarak P , x_0, x_1, \dots, x_{n-1} noktalarında f fonksiyonunu interpolate eden $n-1$ dereceli polinom olsun. (a, b) içinde bir ξ noktası aşağıdaki gibi ortaya çıkar,

$$f(x_n) - p(x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) \quad (2.17)$$

Teorem 2.3. den yola çıkarak;

$$f(x_n) - p(x_n) = f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) \quad (2.18)$$

eşitlik (2.17) ve (2.18)'i karşılaştırarak eşitlik (2.16)'yı elde ederiz.

BÖLÜM 3. SPLİNE İNTERPOLASYON

Bir Spline fonksiyon, alt aralıklar üzerinde belirli süreklilik koşullarıyla birlikte birleşen polinom parçaları içerir. t_0, t_1, \dots, t_n $n+1$ tane nokta $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ sırasıyla verilmiş olsun. Bu noktalar düğüm olarak adlandırılır. Ayrıca $k \geq 0$ tam sayısı alınsın. t_0, t_1, \dots, t_n düğümlerini içeren k derecesindeki bir spline fonksiyon şu şekilde bir S fonksiyonudur;

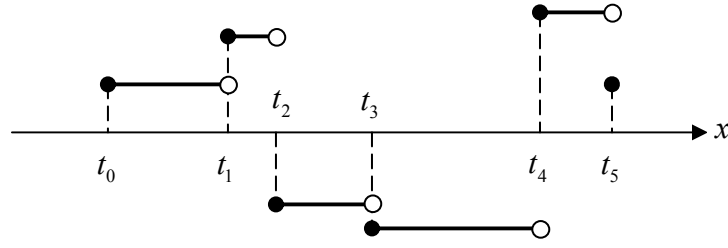
- (i) Herbir $[t_{i-1}, t_i)$ aralığı üzerinde, S fonksiyonu $\leq k$ derecesinden bir polinomdur.
- (ii) S fonksiyonu $[t_0, t_n]$ üzerinde $(k-1)$ 'inci dereceden sürekli türeve sahiptir.

S fonksiyonu en fazla $k-1$ derecesine kadar bütün mertebelerdeki sürekli türevlere sahip k derecesinin sürekli parçalı bir polinomsalıdır.

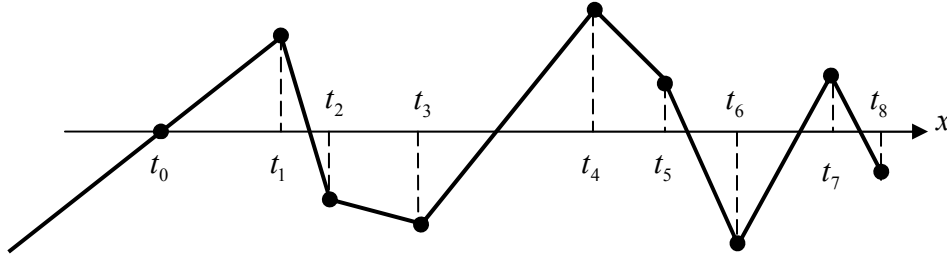
0 (sıfır)'ıncı derecenin spline'ları parçalı sabitlerdir. 0 (sıfır) derecesinin bir spline'ı aşağıdaki biçimde verilir;

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = c_0 & x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) = c_1 & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = c_{n-1} & x \in [t_{n-1}, t_n) \end{cases}$$

$[t_{i-1}, t_i)$ aralıkları birbiriyle kesişmez, bu nedenle böyle bir fonksiyonun düğüm noktalarında hiçbir karışıklık ortaya çıkmaz. 0 (sıfır) derecesinin altı düğümlü tipik bir spline'ı aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.1. 0 (sıfır)'ıncı dereceden bir Spline



Şekil 3.2. 1'inci dereceden bir Spline

1'inci dereceden tipik bir spline fonksiyon aşağıdaki gibi parçalı polinom olarak tanımlanır.

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x + b_0 & x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) = a_1x + b_1 & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}x + b_{n-1} & x \in [t_{n-1}, t_n) \end{cases}$$

Eğer t_i düğüm noktaları ve a_i, b_i katsayılarının tümü belliyse, S nin x noktasındaki değeri, öncelikle x 'i içeren $[t_i, t_{i+1})$ alt aralığının tanımlanmasıyla elde edilir. Spline fonksiyonu tüm Reel Sayılar üzerinde tanımlanabilir. Bunun için $(-\infty, t_1)$ aralığı üzerinde $a_0x + b_0$ ve (t_{n-1}, ∞) aralığı üzerinde $a_{n-1}x + b_{n-1}$ ifadesini kullanılabilir. S fonksiyonu süreklidir, bu sebeple parçalı polinomlar düğümlerde eşittirler; yani

$$S_i(t_{i+1}) = S_{i+1}(t_{i+1})$$

dir.

3.1. Kübik Spline

($k=3$) kübik spline'ların yapısı ve teorisi tam olarak geliştirilecek, çünkü kübik spline'lar uygulamalarda fazlaca kullanılır. Kübik spline S , aşağıdaki değerler tablosunu interpolate etmek için yapılandırılın.

| | | | | |
|-----|-------|-------|---------|-------|
| x | t_0 | t_1 | \dots | t_n |
| y | y_0 | y_1 | | y_n |

Herbir $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ aralığında S , farklı bir kübik polinom tarafından ifade edilir. S_i 'yi $[t_i, t_{i+1}]$ üzerinde S 'yi temsil eden kübik polinom yapalım. Böylece

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) & x \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & x \in [t_{n-1}, t_n) \end{cases} \quad (3.1)$$

S_{i-1} ve S_i polinomları t_i noktasında aynı değeri alırlar ve bu durumda;

$$S_{i-1}(t_i) = y_i = S_i(t_i) \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

olur.

S kendiliğinden sürekli olur. Ayrıca S' ve S'' fonksiyonları içinde aynı koşullar geçerlidir, bu koşullar kübik spline fonksiyonunun türetilmesinde kullanılacaktır.

S, S' ve S'' sürekliliği kübik bir spline'ı tanımlamak için yeterli koşulları sağlarmı? Parçalı kübik polinomların içinde $4n$ tane kat sayı vardır, çünkü n adet kübik polinomun her birinde 4 adet kat sayı vardır. Her bir $[t_i, t_{i+1})$ alt aralığı üzerinde $2n$ tane koşulu veren 2 interpolasyon koşulu $S(t_i) = y_i$ ve $S(t_{i+1}) = y_{i+1}$

vardır. S' sürekliliği ile her bir iç düğümde $S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i)$ ifadesiyle $n-1$ adet ek koşul elde edilir. Buna benzer olarak S'' sürekliliğide $n-1$ adet ek koşul üretir. Böylece $4n$ kat sayılarını saptamak için tam olarak $4n-2$ koşul vardır. İki koşula daha ihtiyaç vardır.

Şimdi $[t_i, t_{i+1}]$ aralığı üzerinde $S_i(x)$ parçası aşağıdaki şekilde türetilir. İlk olarak $z_i = S''(t_i)$ sayıları tanımlanır. Açıkça z_i , $0 \leq i \leq n$ için aşağıdaki ifadeyi sağlar.

$$\lim_{x \downarrow t_i} S''(x) = z_i = \lim_{x \uparrow t_i} S''(x) \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

Çünkü her bir iç düğümde S'' süreklidir. $[t_i, t_{i+1}]$ üzerinde S_i kübik bir polinom olduğu için, $S''_i(t_i) = z_i$ ve $S''_i(t_{i+1}) = z_{i+1}$ ifadelerini sağlayan S''_i lineer bir fonksiyondur ve bu sebeple $h_i \equiv t_{i+1} - t_i$ olmak üzere z_i ve z_{i+1} arasında düz bir doğru parçası elde edilir. Yani

$$S''_i(x) = \frac{z_i}{h_i}(t_{i+1} - x) + \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - t_i)$$

dir. Eğer bu ifade iki kez integre edilirse, sonuç C ve D integrasyonun sabitleri olmak üzere S_i ifadesi

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + C(x - t_i) + D(t_{i+1} - x) \quad (3.2)$$

şeklini alır.

$S_i(t_i) = y_i$ ve $S_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$ interpolasyon koşulları C ve D yi saptamak için (3.2)'e uygulanırsa;

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1} - x) \quad (3.3)$$

eşitliği kolaylıkla elde edilir. İnterpolasyon koşullarının sağlandığını görmek için $x = t_i$ ve $x = t_{i+1}$ noktalarını kullanalım. Eğer z_0, z_1, \dots, z_n 'in değerleri belirlenirse $[t_0, t_n]$ aralığında her hangi bir x için (3.1) ve (3.3) eşitlikleri ile $S(x)$ değeri hesaplanabilir.

z_1, z_2, \dots, z_{n-1} 'yi saptamak için S' 'nün süreklilik koşullarını yani t_i iç düğümlerinde $S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i)$ ifadesini kullanırız. Eşitlik (3.3) türevlenerek bize $S'_i(x)$ i verir. Daha sonra $x = t_i$ nin yerine koyulması ve sadeleştirilmesi

$$S'_i(t_i) = -\frac{h_i}{3} z_i - \frac{h_i}{6} z_{i+1} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i} \quad (3.4)$$

ifadesini verir. Buna paralel olarak S_{i-1} için eşitlik (3.3)'ü kullandığımızda

$$S'_{i-1}(t_i) = \frac{h_{i-1}}{6} z_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3} z_i - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{y_i}{h_{i-1}} \quad (3.5)$$

ifadesi elde edilir. Eşitlik (3.4) ve (3.5)'in sağ tarafları birbirine eşit olarak yazıldığında

$$h_{i-1} z_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1}) z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_i} (y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}} (y_i - y_{i-1}) \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik sadece $i = 1, 2, \dots, n-1$ için kullanılır. $n+1$ bilinmeyenleri z_0, z_1, \dots, z_n için $n-1$ lineer eşitliğin bir sistemini verir. z_0 ve z_n keyfi olarak seçebilir ve z_1, z_2, \dots, z_{n-1} bilinmeyenlerini elde etmek için (3.6) eşitliği ile kurulan denklem sistemi çözülür. Bir alternatif seçim $z_0 = z_n = 0$ dır. Bulunan spline fonksiyonu doğal kübik spline olarak isimlendirilir.

$z_0 = 0$ ve $z_n = 0$ ile $1 \leq i \leq n-1$ için eşitlik (3.6)'nın lineer sistemi simetrik, tridiagonal, köşegen olarak baskın ve

$$\begin{aligned}
h_i &= t_{i+1} - t_i \\
u_i &= 2(h_i + h_{i-1}) \\
b_i &= \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) \\
v_i &= b_i - b_{i-1}
\end{aligned}$$

kısaltmalarıyla

$$\begin{bmatrix}
u_1 & h_1 & & & & & \\
h_1 & u_2 & h_2 & & & & \\
& h_2 & u_3 & h_3 & & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
& & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} & \\
& & & & h_{n-2} & u_{n-1} & \\
& & & & & & z_{n-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
z_1 \\
z_2 \\
z_3 \\
\vdots \\
z_{n-2} \\
z_{n-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
v_1 \\
v_2 \\
v_3 \\
\vdots \\
v_{n-2} \\
v_{n-1}
\end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Bu algoritmada u_i ile bölmeler olduğu için $u_i \neq 0$ olduğunun ispatlanması gerekir.

$u_i > h_i > 0$ olduğu tüme varım ile gösterilir. $i=1$ için $u_1 = 2(h_0 + h_1)$ olduğu açıktır.

Eğer $u_{i-1} > h_{i-1}$ ise bu durumda

$$u_i = 2(h_i + h_{i-1}) - \frac{h_{i-1}^2}{u_{i-1}} > 2(h_i + h_{i-1}) - h_{i-1} > h_i = t_{i+1} - t_i > 0$$

olduğu için $u_i > h_i$ dir.

z_0, z_1, \dots, z_n kat sayıları saptandıktan sonra herhangi bir kübik spline fonksiyon (3.1)'in değeri eşitlik (3.3) den hesaplanabilir. Herhangi bir x verildiğinde, öncelikle x içeren aralıkların $(-\infty, t_1), [t_1, t_2), \dots, [t_{n-2}, t_{n-1}), [t_{n-1}, \infty)$ saptanması zorunludur. Kabul sebebiyle sadece $[t_0, t_1]$ üzerinde değil, $(-\infty, t_0)$ üzerinde de S_0 kurulur. Ayrıca $[t_{n-1}, t_n]$ üzerinde ve (t_n, ∞) üzerinde S_{n-1} kullanılır. x 'i içeren aralığı tespit etmek için $x - t_{n-1}, x - t_{n-2}, \dots, x - t_1$ ifadesindeki terimlerden hangisinin negatif

olmadığını bulmak gerekir. Bu da test etme vasıtasıyla saptanır. Eğer bunlardan biri negatif değilse böyle durumlarda birinci alınır $x - t_i$ denir. Böylece $x - t_i \geq 0$ fakat $x - t_{i+1} < 0$ dir, bu nedenle $t_i \leq x < t_{i+1}$ dir. Eğer tüm test edilmiş terimler negatif ise bu durumda $x \in (-\infty, t_1]$ olur. Böylece belirlenen i ile S_i polinomunun eşitlik (3.3)'ü kullanarak verilen x değerinde değeri hesaplanabilir. Bununla birlikte (3.3) eşitliği

$$A_i = \frac{1}{6h_i}(z_{i+1} - z_i)$$

$$B_i = \frac{z_i}{2}$$

$$C_i = -\frac{h_i}{6}z_{i+1} - \frac{h_i}{3}z_i + \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$$

ifadelerini kullanılarak aşağıdaki gibi daha etkili bir biçimde tekrar yazılabilir.

$$S_i(x) = y_i + (x - t_i)[C_i + (x - t_i)[B_i + (x - t_i)A_i]] \quad (3.7)$$

Şimdi doğal kübik spline'in olası en düzgün interpolasyon fonksiyonunu ürettiğine dair bir teoremi inceleyelim.

Teorem 3.1.: f'' in $[a, b]$ ($a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$) içinde sürekli olsun. Eğer S $0 \leq i \leq n$ için t_i düğümlerinde f i interpolate eden doğal kübik bir spline ise bu durumda;

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

ifadesi sağlanır.

İspat: $g \equiv f - S$ olsun. Böylece $0 \leq i \leq n$ ve

$$\int_a^b (f'')^2 dx = \int_a^b (S'')^2 dx + \int_a^b (g'')^2 dx + 2 \int_a^b S'' g'' dx$$

için $g(t_i) = 0$ dir. Eğer $\int_a^b S'' g'' dx \geq 0$ olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanmış olacaktır. S'' , $[t_{i-1}, t_i]$ üzerinde sabittir gerçeği, $S''(t_0) = S''(t_n) = 0$ koşulu ve kısmi integrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_a^b S'' g'' dx &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} S'' g'' dx \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ (S'' g')(t_i) - (S'' g')(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} S''' g' dx \right\} \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} S''' g' dx = - \sum_{i=1}^n c_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} g' dx \\ &= - \sum_{i=1}^n c_i [g(t_i) - g(t_{i-1})] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $y = f(x)$ eşitliği tarafından tanımlanan bir eğrinin eğriliğinin $|f''(x)| \left[1 + \{f'(x)\}^2 \right]^{-3/2}$ miktarında olduğu bilinir. Eğer lineer olmayan terim çıkarılırsa, eğrilik derecesine bir tahmin olarak $|f''(x)|$ ifadesi alınabilir. Doğal kübik spline interpolasyonu $\int_a^b [f''(x)]^2 dx$ miktarı için bir aralık üzerindeki en iyi yaklaşık eğriliği oluşturan fonksiyon olur.

Örnek3.1.: $A(0,0), B(1,4), C(2,3), D(3,1)$ noktalarından geçen kübik spline fonksiyonlarını bulalım?

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [t_0, t_1) \\ S_1(x) & x \in [t_1, t_2) \\ S_2(x) & x \in [t_2, t_3) \end{cases}$$

İfadesinde $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3$ ve $y_0 = 0, y_1 = 4, y_2 = 3, y_3 = 1$ dir. $i = 0, 1, 2, 3$ için h_i değerleri ise 1 dir. $S_i(x)$ kübik spline fonksiyonlarını aşağıdaki ifade yardımıyla hesaplarız.

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1} - x)$$

Bu ifadedeki z_0, z_1, z_2, z_3 bilinmeyenlerini hesaplamak için

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

eşitliğinden yararlanacağız. Burada $i=1,2$ için iki denklem elde edilir. $z_0 = z_3 = 0$ kabul edilirse z_1, z_2 bilinmeyenleri denklem sisteminden bulunabilir. $i=1,2$ için

$$h_0 z_0 + 2(h_1 + h_0)z_1 + h_1 z_2 = \frac{6}{h_1}(y_2 - y_1) - \frac{6}{h_0}(y_1 - y_0) \text{ ifadesi düzenlenirse}$$

$$4z_1 + z_2 = -30$$

$$z_1 + 4z_2 = -6$$

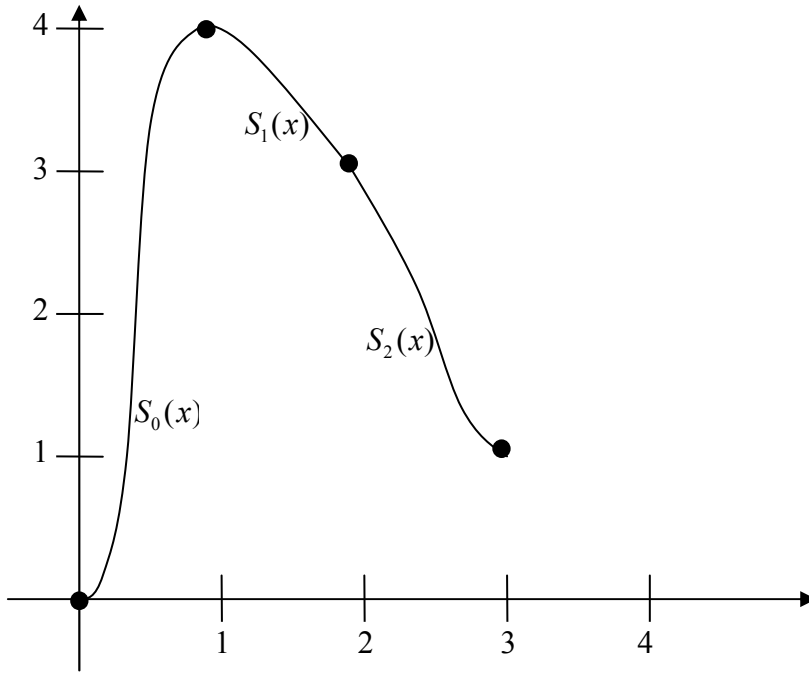
denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözümlerse $z_1 = -7.6, z_2 = 0.4$ olarak bulunur. $i = 0, 1, 2, 3$ için z_0, z_1, z_2, z_3 değerleri

$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1} - x)$$

ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = \frac{-7.6}{6}x^3 + \left(4 + \frac{7.6}{6}\right)x & x \in [0, 1) \\ S_1(x) = \frac{-7.6}{6}(2-x)^3 + \frac{0.4}{6}(x-1)^3 + \left(\frac{17.6}{6}\right)(x-1) + \left(\frac{31.6}{6}\right)(2-x) & x \in [1, 2) \\ S_2(x) = \frac{0.4}{6}(3-x)^3 + (x-2) + \left(3 - \frac{0.4}{6}\right)(3-x) & x \in [2, 3) \end{cases}$$

bulunur.



Şekil 3.3. $S(x)$ interpolasyon fonksiyonunun görünümü

3.1.1. Tension (gerilme) spline'ları

Bazı veri uyum problemleri içerisinde gerilme olarak adlandırılan, mevcut bir τ parametresine sahip olmak yararlıdır. τ büyük bir değerde verildiğinde, veri noktalarından geçen eğim yüksek gerilmeye sahip olacaktır. τ , veri noktaları arasındaki eğimi geren bir kuvvet olarak yorumlanabilir (şekil 3.2.). τ düşük bir değerde verildiğinde eğim yaklaşık olarak interpole kübik spline'ın şekli gibi olacaktır. $\tau \rightarrow +\infty$ olduğunda eğim parçalı lineer fonksiyona yani 1. dereceden spline'a yaklaşır.

Az önce tanımlandığı gibi böyle bir eğimin matematiksel bir modeli aşağıdadır. Daha önce olduğu gibi her bir t_i de verilen y_i verisi ve $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ düğümleri mevcuttur. Araştırılan gerilme spline'ları şu özelliklere sahip bir f fonksiyonudur;

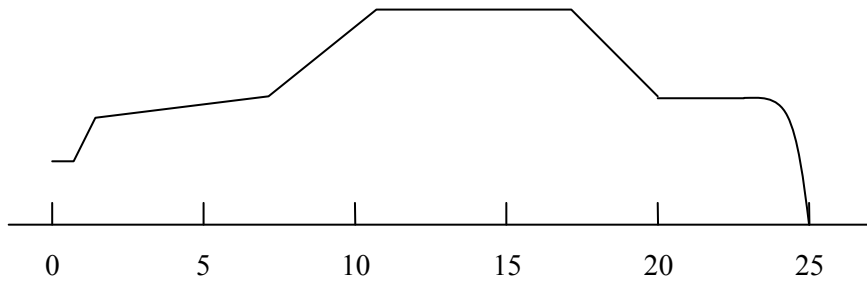
- (i) $f \in C^2[t_0, t_n]$,
- (ii) $f(t_i) = y_i$ ($0 \leq i \leq n$),

(iii) Her bir açık aralık (t_{i-1}, t_i) üzerinde f fonksiyonu $f^{(4)} - \tau^2 f'' = 0$ diferansiyel denklemini sağlar.

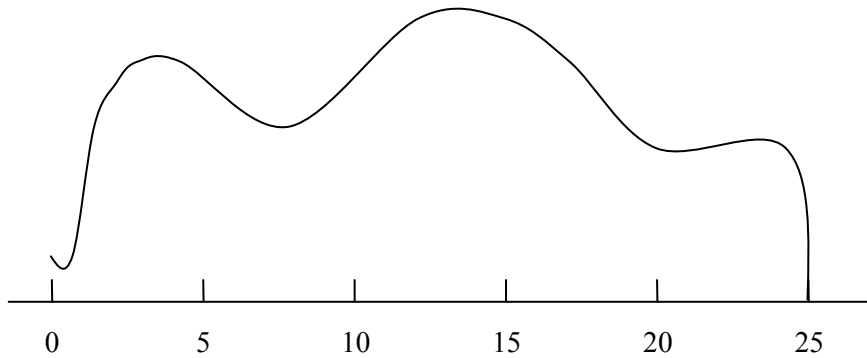
Bu nedenle f iki sürekli türeve sahiptir, eldeki veriyi interpolate eder ve her bir alt aralık içinde ayrıştırılmış belli bir eşitliği sağlar. $f^{(4)} = 0$ kübik polinomlar eşitliğinin çözümü için $\tau = 0$ olduğunda bu tanımın kübik bir spline'ı ürettiği açıktır.

f' 'i saptamak için kübik spline'larda olduğu gibi ilerlenir. Bu nedenle $z_i \equiv f''(t_i)$ oluşturulur ve $[t_i, t_{i+1}]$ aralığında bulunması gereken f koşulları yazılır.

$$\begin{aligned} f^{(4)} - \tau^2 f'' &= 0 \\ f(t_i) &= y_i & f(t_{i+1}) &= y_{i+1} \\ f''(t_i) &= z_i & f''(t_{i+1}) &= z_{i+1} \end{aligned}$$



Şekil 3.2a. Yüksek gerilimli spline ($\tau = 10$)



Şekil 3.2b. Düşük gerilimli spline ($\tau = 0.1$)

Bu iki noktalı sınır değer probleminin çözümünün

$$f(x) = \{z_i \sinh[\tau(t_{i+1} - x)] + z_{i+1} \sinh[\tau(x - t_i)]\} / [\tau^2 \sinh(\tau h_i)] \\ + (y_i - z_i / \tau^2)(t_{i+1} - x) / h_i + (y_{i+1} - z_{i+1} / \tau^2)(x - t_i) / h_i \quad (3.8)$$

olduğu görülür.

z_i katsayıları saptandıktan sonra bu eşitlik $[t_i, t_{i+1}]$ aralığı üzerinde f 'in değerini hesaplamak için kullanılacaktır. Hepsi kübik spline'ların durumuna tam olarak benzerdir.

f fonksiyonu C^2 sınıfından olduğundan,

$$\lim_{x \downarrow x_i} f'(x) = \lim_{x \uparrow x_i} f'(x) \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

koşulları iç düğümlerde kullanılmalıdır. Kübik spline'ların durumunda olduğu gibi z_0, z_1, \dots, z_n bilinmeyenleri için sonuç üçköşegenli sistemdir, şu şekilde yazılabilir;

$$\alpha_{i-1} z_{i-1} + (\beta_{i-1} + \beta_i) z_i + \alpha_i z_{i+1} = \gamma_i - \gamma_{i-1} \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad (3.9)$$

Burada,

$$\alpha_i = 1/h_i - \tau / \sinh(\tau h_i) \\ \beta_i = \tau \cosh(\tau h_i) / \sinh(\tau h_i) - 1/h_i \\ \gamma_i = \tau^2 (y_{i+1} - y_i) / h_i$$

kısaltmaları yapılmıştır.

z vektörünü saptamak için iki ek koşulun gerekli olduğu gözlenir. Kübik spline larda olduğu gibi $z_0 = z_n = 0$ alınabilir.

(t_i, y_i) verisine uygun olan tension spline f 'i elde etmek için izlenecek adımlar şöyledir.

- (i) $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ olduğunun test edilmesi.
- (ii) $0 \leq i \leq n-1$ için $h_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ nin hesaplanması.
- (iii) $z_1 = z_n = 0$ in oluşturulması.
- (iv) $2 \leq i \leq n-1$ ve z_i için üçköşegenli sistem (3.9)'un çözülmesi.
- (v) $[t_i, t_{i+1}]$ aralığı üzerinde f değerinin hesaplanması için (3.8) formülünün kullanılması.

Burada oluşturulan basit yaklaşım ilginç deneyler için kullanılır. Örneğin şekil 3.2a ve şekil 3.2b. içinde gösterilen iki eğimi meydana getirir. İlk olarak $\tau = 20$ ve ikinci olarak $\tau = 0.25$ tir. Veri aynıydı ve $1 \leq i \leq 10$ için $t_i = i$ tam sayı noktalarında tanımlanmış fonksiyon değerlerini içermekteydi.

Tension spline'lar Schweikert (1966) tarafından tanıtıldı. Daha sonraki ilgili çalışmalar Cline (1974 b) ve Pruess'e (1976,1978) aittir. Tension spline'ların yardımıyla eğimlerin hesaplanmasında kullanılan yazılım ve yüzeyler Cline tarafından geliştirilmiştir. Tension spline'lara alternatif olarak de Boor (1984) tarafından taut spline'lar gösterilmiştir. Bu fonksiyonlar ek düğümlü, sıradan kübik spline'lardır ve bu spline'lar eğimin ani yön değişimi istendiğinde kullanılır. Taut spline'ların avantajı yeni bilgisayar programlarına gerek duymamalarıdır, büyük fonksiyonların kullanımında gerekli olan hesaplama yükünden kurtulunabilir.

3.1.2. Yüksek dereceli doğal spline'lar teorisi

Bu bölümde son olarak yüksek dereceli doğal spline'lar teorisinin bir kısmı verilecek. Doğal spline'lar yalnızca tek derecelerde ortaya çıkar ve derece burada $2m+1$ olacaktır. $m=1$ olduğunda daha önce geliştirildiği gibi doğal kübik spline'lar elde edilir. Genel bir teori için biraz farklı tarzda ilerlemek uygundur. Daha önceki gibi $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ düğüm dizisi verilir.

$2m+1$ dereceli doğal bir spline, $S \in C^{2m}(R)$ şeklinde bir fonksiyondur. Bu fonksiyon her bir $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ aralığında $\leq 2m+1$ dereceli bir polinom ve $(-\infty, t_0)$ ve (t_n, ∞) içinde m dereceli bir polinom olur. Doğal bir kübik spline bu tanım altında $(-\infty, t_0)$ ve (t_n, ∞) içinde lineer polinomlara inmelidir.

t_0, t_1, \dots, t_n $n+1$ düğümlü, $2m+1$ dereceli tüm doğal spline'ların lineer uzayı $N_n^{2m+1}(t_0, t_1, \dots, t_n)$ ile veya kısaca N_n^{2m+1} ile gösterilir.

x_+^n ile ifade edilen, uyarlanmış kuvvet fonksiyonunu kullanmak uygundur. Eğer $x \geq 0$ olursa bu x^n olarak tanımlanır, eğer $x < 0$ olursa 0 (sıfır) olarak tanımlanır. Bu fonksiyon C^{n-1} sınıfına aittir.

Teorem 3.2.: N_n^{2m+1} 'in her elemanı için

$$\sum_{i=0}^n b_i t_i^j = 0 \quad (0 \leq j \leq m)$$

olmak üzere,

$$S(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i + \sum_{i=0}^n b_i (x - t_i)_+^{2m+1}$$

formuna sahiptir.

İspat: $(-\infty, t_0)$ aralığında S , m dereceli p_0 polinomudur. Bu polinom a_i kat sayılarını saptar. (t_0, t_1) aralığında S , $2m+1$ dereceli p_1 polinomuna iner. t_0 da süreklilik koşulları şöyledir.

$$p_0^{(j)}(t_0) = p_1^{(j)}(t_0) \quad (0 \leq j \leq 2m)$$

Taylor teoreminden yola çıkarak p_1 aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= \sum_{j=0}^{2m+1} \frac{1}{j!} p_1^{(j)}(t_0)(x-t_0)^j \\
&= \sum_{j=0}^{2m} \frac{1}{j!} p_0^{(j)}(t_0)(x-t_0)^j + b_0(x-t_0)^{2m+1} \\
&= p_0(x) + b_0(x-t_0)^{2m+1}
\end{aligned}$$

Bu eşitlik $(-\infty, t_1)$ üzerinde şunu gösterir,

$$S(x) = p_0(x) + b_0(x-t_0)_+^{2m+1}$$

t_0 'da kullanılan yöntem şimdi $b_i(x-t_i)_+^{2m+1}$ kalan terimlerini elde etmek için her bir noktada tekrarlanır. (t_n, ∞) aralığı üzerinde S , $\leq m$ dereceli bir polinoma iner.

Bu sebeple bu aralıkta,

$$0 = S^{(m+1)}(x) = \sum_{i=0}^n b_i(2m+1)(2m)\dots(m+1)(x-t_i)^m$$

Bu eşitlikten Binomial teoreminin yardımıyla aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$0 = \sum_{i=0}^n b_i(x-t_i)^m = \sum_{i=0}^n b_i \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^{m-j} (-t_i)^j$$

Burada x içinde m dereceli bir polinom elde ederiz. Böylece $j = 0, 1, \dots, m$ için

$$\sum_{i=0}^n b_i t_i^j = 0 \text{ olur.}$$

Teorem 3.3.: $0 \leq m \leq n$ ve verilen $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ düğümleri verilsin. Düğümlerde tanımlanan değerleri alan $2m+1$ dereceli tek bir doğal spline vardır.

İspat: Teorem 3.2.'den yola çıkarak, doğal bir spline aşağıdaki biçimde yazılır.

$$S(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j + \sum_{j=0}^n b_j (x - t_j)_+^{2m+1}$$

Eğer S için tanımlanan değerler λ_i ise bu durumda (Teorem 3.2. ile uyumlu şekilde) interpolasyon problemi, aşağıdaki sistemin çözülmesini gerektirir.

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^m a_j t_i^j + \sum_{j=0}^n b_j (t_i - t_j)_+^{2m+1} = \lambda_i & (0 \leq i \leq n) \\ \sum_{j=0}^m b_j t_i^j = 0 & (0 \leq i \leq m) \end{cases}$$

$m+n+2$ bilinmeyenleri içindeki $m+n+2$ eşitliğinin kare sistemi budur. Bunun tekil olmadığını göstermek için, uyumlu homojen problemlerin sadece 0(sıfır) çözümlü olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Bu nedenle $0 \leq i \leq n$ için $S(t_i) = 0$ olduğunu varsayalım. $a = t_0$ ve $b = t_n$ olduğunda aşağıdaki ifade ispatlanır.

$$I \equiv \int_a^b [S^{(m+1)}(x)]^2 dx = 0$$

Parçalı integrasyonun sonucu;

$$\begin{aligned} I &= S^{(m+1)}(x)S^{(m)}(x) \Big|_a^b - \int_a^b S^{(m)}(x)S^{(m+2)}(x) dx \\ &= - \int_a^b S^{(m)}(x)S^{(m+2)}(x) dx \end{aligned}$$

Burada S nin, $(-\infty, a)$ içinde m dereceli bir polinom olması kullanıldı ve bu sebeple $S^{(m+1)}(a) = 0$ oldu. Buna benzer olarak $S^{(m+1)}(b) = 0$ olur. Bu yöntem, aşağıdaki sonuca varılana kadar tekrar edilir.

$$I = (-1)^m \int_a^b S^{(1)}(x)S^{(2m+1)}(x) dx$$

Şimdi $S^{(2m+1)}$ parçalı süreklidir ve böylece,

$$I = (-1)^m \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} c_i S'(x) dx = (-1)^m \sum_{i=1}^n c_i [S(t_i) - S(t_{i-1})] = 0$$

olur. Bundan $S^{(m+1)} \equiv 0$ olduğu anlaşılır. Bu nedenle S , m dereceli bir polinomdur. S , $n+1 > m$ ve t_0, t_1, \dots, t_n düğümlerinde sıfırlara sahip olduğu için $S = 0$ olduğunu görürüz.

Teorem 3.4.: $m \leq n$ ve $f \in C^{m+1}[a, b]$ olsun. S , $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ düğümlerinde f 'i interpolate eden $2m+1$ dereceli doğal bir spline olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b [S^{(m+1)}(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f^{(m+1)}(x)]^2 dx$$

ifadesi yazılabilir.

İspat: Teorem 3.1. deki gibi başlayarak $g = f - S$ alınsın. Daha sonra $0 \leq i \leq n$ için $g(t_i) = 0$ olsun. Tekrarlanan parçalı integrasyondan yola çıkarak, aşağıdaki ifadeyi ispatlayabiliriz.

$$\int_a^b g^{(m+1)}(x) S^{(m+1)}(x) dx = 0$$

Böylece ispat aşağıdaki ifadeyi yazarak tamamlanır.

$$\begin{aligned} \int_a^b [f^{(m+1)}(x)]^2 dx &= \int_a^b [S^{(m+1)}(x) + g^{(m+1)}(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [S^{(m+1)}(x)]^2 dx + 2 \int_a^b S^{(m+1)}(x) g^{(m+1)}(x) dx + \int_a^b [g^{(m+1)}(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [S^{(m+1)}(x)]^2 dx + \int_a^b [g^{(m+1)}(x)]^2 dx \\ &\geq \int_a^b [S^{(m+1)}(x)]^2 dx \end{aligned}$$

BÖLÜM4. PARABOLİK SPLİNE İNTERPOLASYON

Parabolik spline formülasyonunda kırılma noktalarından başka diğer noktalarda yapılan interpolasyonun zaman zaman avantaj olabileceği gösterilecek. Yöntem bazı fonksiyonların interpolasyonu yapılarak örneklerle açıklanacak. $a = \tau_1 < \dots < \tau_n = b$ veri noktalarında verilen $g(\tau_1), \dots, g(\tau_n)$ değerleri alınsın. Tam olarak parçalı kübik interpolasyonun yapısındaki gibi ilerlenecek. Parabolik parçalar içermesi koşuluyla g 'ye f interpolantını aşağıdaki gibi seçelim.

$P_i \in \Pi_{<3}$ için $\tau_i \leq x \leq \tau_{i+1}$ üzerinde $f(x) = P_i(x)$ olsun. $i = 1, \dots, n-1$. $P_i(x)$ 2. derece 3. mertebe bir polinomu

$$P_i(\tau_i) = g(\tau_i), \quad P_i(\tau_{i+1}) = g(\tau_{i+1}) \quad (4.1)$$

koşullarını sağlasın. Bu koşullar yeterli olmayıp her parça için bir serbestlik derecesine sahip olduğumuz açıktır. Biz bu serbestlik derecesini

$$\tau_{i+1/2} := (\tau_i + \tau_{i+1})/2, \quad \text{ile} \quad P_i(\tau_{i+1/2}) = v_{i+1} \quad (4.2)$$

şeklinde seçebiliriz. Örneğin eğer daha sonraki sayılar mevcut ise $\tau_{i+1/2}$, $i = 2, \dots, n$ noktalarındada g 'yi interpolate ederek $v_{i+1} = g(\tau_{i+1/2})$ 'yi seçebiliriz. Eğer g için bu şekilde parabolik interpolant kullanırsak, $\int_a^b g(x)dx$ integrali için Simpson kuralını elde ederiz.

Bir başka düşüncede interpolate edilmiş f fonksiyonunu parabolik bir spline yapmaktır. Yani sürekli türevlenebilir yapmaktır. Bunun için v_i sayılarının $i = 2, 3, \dots, n$ lineer sistemini üretmek amacıyla P_i polinomu Newton formunda alınır.

$$\begin{aligned} P_i(x) &= P_i(\tau_i) + (x - \tau_i)P_i'[\tau_i, \tau_{i+1/2}] + (x - \tau_i)(x - \tau_{i+1/2})P_i''[\tau_i, \tau_{i+1/2}, \tau_{i+1}] \\ &= P_i(\tau_i) + (x - \tau_i)s_i^+ + (x - \tau_i)(x - \tau_{i+1/2})(s_{i+1}^- - s_i^+)/\Delta\tau_i \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} s_i^+ &:= P_i'[\tau_i, \tau_{i+1/2}] = (v_{i+1} - g(\tau_i))/(\Delta\tau_i/2) \\ s_{i+1}^- &:= P_i''[\tau_{i+1/2}, \tau_{i+1}] = (g(\tau_{i+1}) - v_{i+1})/(\Delta\tau_i/2) \\ \Delta\tau_i &= \tau_{i+1} - \tau_i \end{aligned}$$

kısaltmaları yapılırsa bu durumda ifade;

$$\begin{aligned} P_i'(\tau_i) &= s_i^+ + (\tau_i - \tau_{i+1/2})(s_{i+1}^- - s_i^+)/\Delta\tau_i = (3s_i^+ - s_{i+1}^-)/2 \\ P_{i-1}'(\tau_i) &= s_{i-1}^+ + (\tau_i - \tau_{i-1} + \tau_i - \tau_{i-1/2})(s_i^- - s_{i-1}^+)/\Delta\tau_{i-1} = (3s_i^- - s_{i-1}^+)/2 \end{aligned}$$

olur. f fonksiyonunun birinci türevinin sürekliliği böylece $i=2, \dots, n-1$ için sağlatılırsa

$$P_{i-1}'(\tau_i) = P_i'(\tau_i)$$

$(3s_i^- - s_{i-1}^+)/2 = (3s_i^+ - s_{i+1}^-)/2$ elde edilir. Terimlerin yeniden düzenlenmesi aşağıdaki lineer sistemi üretir.

$$\begin{aligned} 4v_i/\Delta\tau_{i-1} + 4v_{i+1}/\Delta\tau_i &= \\ (3g(\tau_i) + g(\tau_{i-1}))/\Delta\tau_{i-1} + (3g(\tau_i) + g(\tau_{i+1}))/\Delta\tau_i & \quad i = 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ve bu düzenlemeyle $n-1$ tane ν_2, \dots, ν_n bilinmeyi için $n-2$ tane eşitlik elde edilir. Bu durumda bilinmeyenlerden birini, örneğin bazı ilave şartlar tarafından tespit edilen ν_2 saptanırsa, ν_3, \dots, ν_n için sistem (4.3) tek türlü çözülebilir. i . eşitliğin sağ tarafına b_i denirse aşağıdaki ifadeyi elde edilir.

$$\nu_{i+1} = (\Delta\tau_i/4)b_i - (\Delta\tau_i/\Delta\tau_{i-1})\nu_i, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (4.4)$$

Seçilen ν_2 ifadesinin etkisini daha iyi saptamak için aynı veriler kullanılarak iki adet farklı ν_2 için interpolate edilmiş parabolik spline f ve \hat{f} fonksiyonunu düşünelim. İki fonksiyonun farkı $d := f - \hat{f}$ olsun.

Bu farkla $[a, b]$ 'de parabolik bir spline'dır ve $\tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ noktalarında ve ayrıca a ve b 'de sıfırdır. Ayrıca (4.4) eşitliğinden

$$d(\tau_{i+1/2}) = -(\Delta\tau_i/\Delta\tau_{i-1})d(\tau_{i-1/2}) = (-)^{i-1}(\Delta\tau_i/\Delta\tau_1)d(\tau_{3/2})$$

olur. $h := (b-a)/(n-1)$ olmak üzere ve her i için $\tau_i = a + (i-1)h$ şeklinde datalar ile aşağıdaki ifadeleri elde ederiz

$$f(x) - \hat{f}(x) = \left[f(\tau_{3/2}) - \hat{f}(\tau_{3/2}) \right] (-)^{i-1} p((x - \tau_i)/h) \quad (\tau_i \leq x \leq \tau_{i+1})$$

$$p(x) := 4x(1-x) \quad (4.5)$$

dir. Bu sonuç olarak şunu gösterir; ν_2 nin seçimi aralık üzerinde interpolant f 'yi az veya çok tüm aralıkta etkiler ve bu sebeple ilave noktalarda g 'nin değeri yerel datalara bağlı olmamaktadır. Gerekli ek koşulu nasıl elde ettiğimize bakmaksızın kalan bir bilinmeyen için farklı seçimine bağlı olan $f(x) - \hat{f}(x)$ fark yaklaşımı, (4.3) lineer sisteminin köşegenel baskın matris olarak çözümünü temin etmeyebilir. Eğer interpolant, aşağıdaki şekilde ξ_1, \dots, ξ_{n+1} kırılma noktaları seçilirse $P_i(x) \in \Pi_{<3}$

$i=1, \dots, n$ için $\xi_i \leq x \leq \xi_{i+1}$ üzerinde $f(x)=P_i(x)$ formunda yapılandırılırsa bu tür zorluklarla karşılaşılmaz.

$$\xi_1 \leq a = \tau_1 < \xi_2 < \tau_2 < \xi_3 < \tau_3 < \dots < \tau_{n-1} < \xi_n < \tau_n = b \leq \xi_{n+1}.$$

olsun. τ_i veri noktalarının orta noktalarını $\xi_i = \tau_{i-1/2} = (\tau_i + \tau_{i-1})/2$ kırılma noktaları olarak $i = 2, \dots, n$ şeklinde seçebilir.

İnterpolasyon şartları her bir polinomsal parçaya sadece bir koşul yükler,

$$P_i(\tau_i) = g(\tau_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.6)$$

Böylece polinomsal parça başına iki ek parametre seçmekte özgürüz. Bu ek parametreler ν_1, \dots, ν_{n+1} 'in nasıl seçildiğine bakmaksızın, her bir parçayı birleştiren ve sonuçlanan f fonksiyonunun sürekliliğini sağlayan aşağıdaki koşullar seçilebilir.

$$P_i(\xi_i) = \nu_i, \quad P_i(\xi_{i+1}) = \nu_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.7)$$

Elbette şimdi $\xi_1 < a$ ve $b < \xi_{n+1}$ olduğu varsayılır.

ν_1, \dots, ν_{n+1} serbest parametreleri interpolate edilirse yani $\nu_i = g(\xi_i)$ her i için alınırsa, daha önce anlatılan Simpson'un kuralı ile bağlantılı tabloya dönülür. Bunun yerine f 'i parabolik spline olarak seçip f 'nün sürekliliğini sağlamak için ν_2, \dots, ν_n seçilirse, ν_i için gerekli eşitlikler aşağıdaki gibi türetilir. P_i Newton formunda yazılırsa,

$$P_i(x) = P_i(\xi_i) + (x - \xi_i)P_i[\xi_i, \tau_i] + (x - \xi_i)(x - \tau_i)P_i[\xi_i, \tau_i, \xi_{i+1}]$$

(4.6) ve (4.7) eşitliklerinden P_i için ayrılmış fark tablosu Tablo 4.1 elde edilir.

Burada

$$s_i^+ := P_i[\xi_i, \tau_i] = (g(\tau_i) - v_i) / (\tau_i - \xi_i),$$

$$s_{i+1}^- := P_i[\tau_i, \xi_{i+1}] = (v_{i+1} - g(\tau_i)) / (\xi_{i+1} - \tau_i),$$

kısaltmaları yapılırsa

$$P_i(x) = v_i + (x - \xi_i)s_i^+ + (x - \xi_i)(x - \tau_i)(s_{i+1}^- - s_i^+) / \Delta \xi_i$$

$$= c_{1,i} + (x - \xi_i)c_{2,i} + (x - \xi_i)^2 c_{3,i} \quad (4.8)$$

elde edilir. Buradan

$$c_{1,i} = v_i, \quad c_{2,i} = s_i^+ + (\xi_i - \tau_i)c_{3,i}, \quad c_{3,i} = (s_{i+1}^- - s_i^+) / \Delta \xi_i \quad (4.9)$$

(4.8) ve (4.9)' dan aşağıdaki ifade bulunur.

$$P_i'(\xi_i) = s_i^+ + (\xi_i - \tau_i)(s_{i+1}^- - s_i^+) / \Delta \xi_i$$

ve

$$P_{i-1}'(\xi_i) = s_{i-1}^+ + (\xi_i - \xi_{i-1} + \xi_i - \tau_{i-1})(s_i^- - s_{i-1}^+) / \Delta \xi_{i-1}$$

$$= s_i^- + (\xi_i - \tau_{i-1})(s_i^- - s_{i-1}^+) / \Delta \xi_{i-1}.$$

olur.

Tablo 4.1. P_i için ayrılmış fark tablosu

| | | | |
|-------------|-------------|--------------------------------------|--|
| ξ_i | v_i | | |
| | | s_i^+ | |
| τ_i | $g(\tau_i)$ | $(s_{i+1}^- - s_i^+) / \Delta \xi_i$ | |
| | | s_{i+1}^- | |
| ξ_{i+1} | v_{i+1} | | |

f' fonksiyonunun sürekliliği böylece, $i=2, \dots, n$ için

$$P'_i(\xi_i) = P'_{i-1}(\xi_i)$$

eşitliğinden elde edilir. Veya

$$s_i^+ + (\xi_i - \tau_i)(s_{i+1}^- - s_i^+)/\Delta \xi_i = s_i^- + (\xi_i - \tau_{i-1})(s_i^- - s_{i-1}^+)/\Delta \xi_{i-1}$$

terimleri topladıktan sonra,

$$\frac{\xi_i - \tau_{i-1}}{\Delta \xi_{i-1}} s_{i-1}^+ - \left(1 + \frac{\xi_i - \tau_{i-1}}{\Delta \xi_{i-1}}\right) s_i^- + \left(1 - \frac{\xi_i - \tau_i}{\Delta \xi_i}\right) s_i^+ + \frac{\xi_i - \tau_i}{\Delta \xi_i} s_{i+1}^- = 0$$

olur. Terimlerin uygun bir şekilde tekrar düzenlenmesi aşağıdaki lineer denklem sistemini verir.

$$\begin{aligned} & \left(a_{i-1} - \frac{1}{\Delta \xi_{i-1}}\right) v_{i-1} + \left(\frac{1}{\Delta \xi_{i-1}} + \beta_{i-1} + a_i + \frac{1}{\Delta \xi_i}\right) v_i + \left(\beta_i - \frac{1}{\Delta \xi_i}\right) v_{i+1} \\ & = (a_{i-1} + \beta_{i-1})g(\tau_{i-1}) + (a_i + \beta_i)g(\tau_i), \quad i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.10)$$

Burada $a_i := 1/(\tau_i - \xi_i)$, $\beta_i := 1/(\xi_{i+1} - \tau_i)$ olarak kısaltılmıştır.

(4.10) lineer sistemi kesin bir şekilde sütun baskın köşegenli olduğundan, iki bağımsız parametre olarak v_1 ve v_{n+1} seçildiğinde Gauss eliminasyon yöntemiyle v_2, \dots, v_n kolayca çözülebilir.

İnterpolasyon noktalarında bulunan parabolik spline interpolasyonun daha önceki tablosuna tezatlığını kanıtlamak için (4.10) eşitliğinden, interpolant üzerindeki v_1 ve v_{n+1} için özel bir seçimin etkisini araştıralım. Bunun için tekrar eşit olarak aralanmış olan veri noktalarını ve bu veri noktaları arasındaki interpolasyon

noktalarını ve $h := (b-a)/(n-1)$ olarak seçelim.

$\xi_i \leq x \leq \xi_{i+1}$ aralığında ve tüm i 'ler için $d_1(x) = p((x - \xi_i)/h)/\lambda^{i-1}$ fonksiyonunda λ değeri $\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$ denkleminin mutlak değerce büyük olan çözümü yani $\lambda := -3 - \sqrt{8} = -5.828427\dots$ 'dir. $p(x)$ fonksiyonu ξ_2, \dots, ξ_n interpolasyon noktaları ile oluşturulmuş bütün τ_1, \dots, τ_n noktalarından geçen ve ξ_1 'de 1 değerine sahip olan parabolik bir spline'dir. Ayrıca $(\xi_i \dots \xi_{i+1})$ aralığında yaklaşık $1/6$ 'lık bir oran ile x artarken d_1 üstel olarak azalır. $(a+b)/2$ orta noktasına göre d_1 'in yansıtılmasıyla $\xi_i \leq x \leq \xi_{i+1}$ aralığında ve tüm i 'ler için $d_{n+1} := p((\xi_{i+1} - x)/h)/\lambda^{n+1-i}$ fonksiyonu bulunur.

Ayrıca bu fonksiyon ξ_2, \dots, ξ_n noktaları ile oluşturulmuş τ_1, \dots, τ_n noktalarından geçen fakat ξ_{n+1} 'de 1 değerine sahip ve b 'den uzaklaşan x azalırken asıl değerden farklılaşan parabolik bir spline'dir.

Eğer f ve \hat{f} , (4.10) eşitliğinden, v_1 ve v_{n+1} için farklı seçimleri olan aynı noktalardan elde edilen interpolate edilmiş iki parabolik spline ise bu fonksiyonların farkı α ve β 'nin aşağıdaki koşulları sağlaması ile

$$\begin{aligned} \alpha d_1(\xi_1) + \beta d_{n+1}(\xi_1) &= \delta v_1 := f(\xi_1) - \hat{f}(\xi_1) \\ \alpha d_1(\xi_{n+1}) + \beta d_{n+1}(\xi_{n+1}) &= \delta v_{n+1} := f(\xi_{n+1}) - \hat{f}(\xi_{n+1}) \end{aligned}$$

$f - \hat{f} = \alpha d_1 + \beta d_{n+1}$ şeklindedir. $d_1(\xi_1) = d_{n+1}(\xi_{n+1}) = 1$ ve $d_{n+1}(\xi_1) = d_1(\xi_{n+1}) = 1/\lambda^n$ olduğu için, $\alpha \approx \delta v_1$ ve $\beta \approx \delta v_{n+1}$ elde edilir. Bu da gösteriyor ki: v_1 ve v_{n+1} 'in seçimi sadece a ve b 'ye yakın olan yerlerde f interpolantını etkiler. Yerel bilgilerden bu parametreleri türetmek daha uygun olur. Doğal olarak ξ_1 noktasında g 'nin değeri olarak v_1 seçilebilir.

4.1. Parçalı Polinom Fonksiyonları

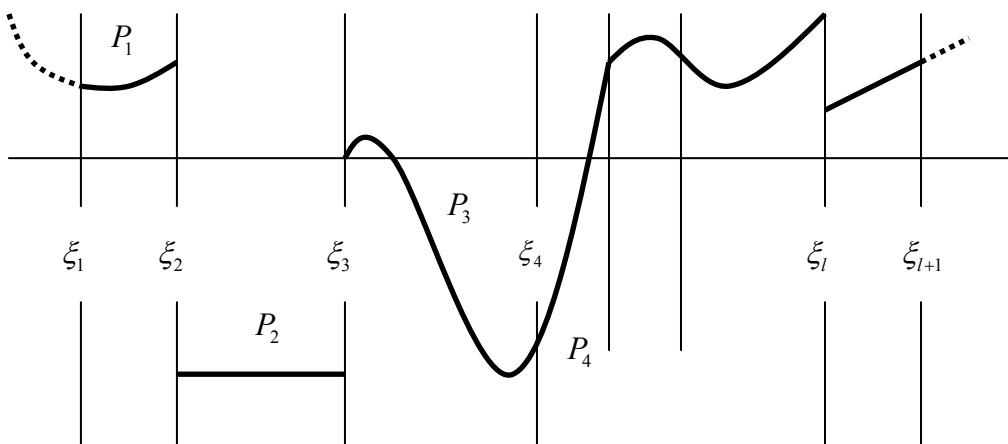
$\xi := (\xi_i)_{i=1}^{l+1}$ kesin artan bir nokta dizisi olsun. P_1, P_2, \dots, P_l l tane her biri k . mertebeden ($(k-1)$. dereceden) polinomlar olsunlar. Parçalı polinom fonksiyonlar aşağıdaki gibi tarif edilir.

$$f(x) := P_i(x) \quad \xi_i < x < \xi_{i+1} \quad (i=1, \dots, l) \quad (4.11)$$

ξ_i noktalarına f 'in kırılma noktaları denir. Tüm reel sayılarda tanımlamak için

$$f(x) := \begin{cases} P_1(x) & x \leq \xi_1; \\ P_l(x) & \xi_{l+1} \leq x. \end{cases} \quad (4.12)$$

olarak genişletilir. Kısaca parçalı polinom fonksiyonları pp olarak göstereceğiz. $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_l$ iç noktalarında fonksiyonların tek olarak tanımlılığını garantilemek için f sağdan sürekli olsun yani $f(\xi_i) := P_i(\xi_i^+)$ ($i=1, \dots, l$). k . mertebeden $\xi = (\xi_i)_{i=1}^{l+1}$ noktalarına sahip pp fonksiyonlarının kümesini $\prod_{<k, \xi}$ ile gösterilir. Bu uzayın boyutu kl dir. $D^j f$ ifadesi ile f fonksiyonunun j . türevi ifade edilir.



Şekil 4.1. $l = 7$ için parçalı polinom fonksiyonları

Bilgisayar programlarında pp fonksiyonlarını temsil etmek için çeşitli yöntemler vardır. Aşağıdaki veriler bilgisayar programlarında etkin bir hesaplama imkanı sağlar.

k ve l mertebesi ve parça sayısı tam sayı olarak verilir. Kesin artan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ kırılma noktaları belirlenir ve $C = (C_{ji})_{j=1, \dots, k; i=1, \dots, l}^k \cdot l$ kırılma noktalarının sağ türevleri yani $C_{ji} := D^{j-1} f(\xi_i^+)$ ($j=1, \dots, k; i=1, \dots, l$) ile verilirler.

$$D^j f(x) = \sum_{m=j}^{k-1} C_{m+1,i} (x - \xi_i)^{m-j} / (m-j)!$$

ifadesiyle x noktasındaki $D^j f$ değeri hesaplanır. Buradaki i tam sayısı

$$\begin{aligned} & i = 1 & x \leq \xi_2 \\ \text{veya} & 1 < i < l & \xi_i \leq x < \xi_{i+1} \\ \text{veya} & i = l & \xi_l \leq x \end{aligned}$$

şekindedir. Her hangi bir x noktasındaki f fonksiyonunun değeri ise

$$\xi_i \leq x < \xi_{i+1} \text{ olmak üzere } f(x) = \sum_{m=0}^{k-1} C_{m+1,i} \frac{(x - \xi_i)^m}{m!} \text{ dir.}$$

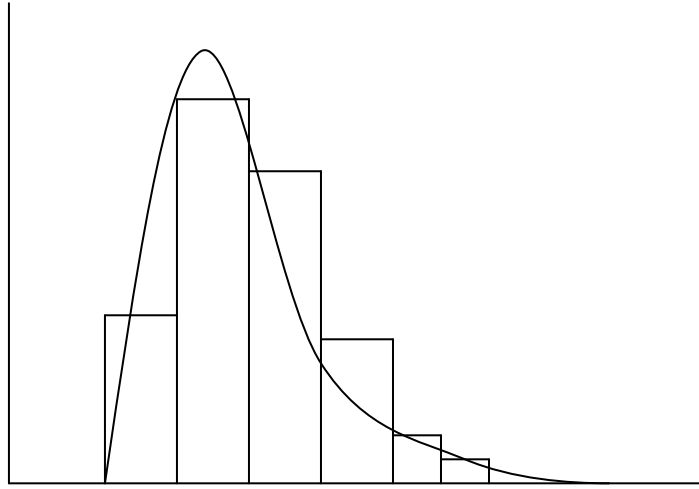
4.2. $\prod_{<k, \xi, \nu}$ Uzayı ve Kısıtlanmış Kuvvet Fonksiyonları Tabanı

PP (parçalı polinomlar) fonksiyonları için hesaplama problemleri aşağıdaki gibi saptanabilir. Belirli bir g fonksiyonu hakkında bazı bilgiler verilir ve $\prod_{<k, \xi}$ uzayı içinde g ile aynı şartları sağlayan f fonksiyonunun yapılandırılması istenir. f 'nin belirli dereceye kadar türevleri sürekli olmalıdır şeklinde ilave koşullar istenirse $\prod_{<k, \xi}$ 'nin alt uzayı $\prod_{<k, \xi, \nu}$ uzayında çalışılması gerekir. Bu uzay içinde uygun bir taban gerekecektir.

Bu bölümde $\prod_{<k,\xi,\nu}$ uzayı için uyarlanmış kuvvet tabanı tanıtılacak ve onun bazı eksiklikleri gösterilecektir.

Parabolik spline'larla düzgünleştirme ile Şekil 4.3'deki histogramı en iyi temsil eden bir eğri aranıyor. $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n+1}$ noktaları ve h_1, h_2, \dots, h_n pozitif sayıları (τ_i, τ_{i+1}) açık aralığında yükseklik h_i olmak üzere verilsin. Bu sayıların olağan yorumu şöyledir ki $h_i \Delta \tau_i$ yaklaşık olarak $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ aralığı üzerindeki g temel dağılımının integraline eşittir. Bu durum böylece interpolasyon koşulları ile f parabolik spline fonksiyonlarının bulunmasına imkan sağlar.

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(x) dx = h_i \Delta \tau_i, \quad i = 1, \dots, n$$



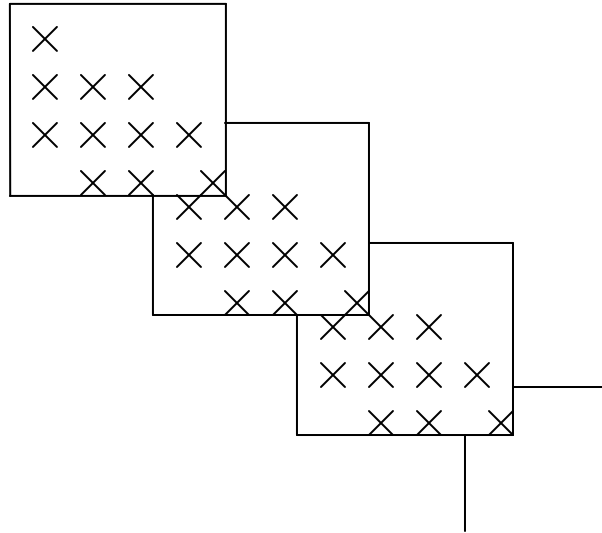
Şekil 4.2. Bir histograma parabolik "alan uyumlu" spline tahmini

$f \in \prod_{<3,\varepsilon} \cap C^{(1)}$ olmalıdır. Ardışık τ ile çakışan ardışık ξ kırılma noktaları seçeriz. g düzgün ve $[\tau_1, \tau_{n+1}]$ aralığı dışında sıfır ise bu durumda g 'nin düzgünlüğü kapsamında $j = 0, 1, \dots$ için $g^{(j)}(\tau_1) = g^{(j)}(\tau_{n+1}) = 0$ 'ı elde edilir. Böylece ek interpolasyon koşulu olarak $f(\tau_1) = f(\tau_{n+1}) = 0$ ifadesi alınarak g belirlenebilir.

f fonksiyonu için pp formu içerisindeki $(C_{ji} := D^{j-1}f(\xi_i^+))$ ifadesini hatırlayalım) $3n$ polinom katsayıları $(C_{ji})_{j=1}^3 \cdot n$ üstündeki $3n$ koşullarının toplamı için yukarıdaki eşitlik $n+2$ interpolasyon şartı ve $2(n-1)$ homojen olma şartını verir. Sonuçlanan lineer sistem aşağıdaki görüntüye sahiptir.

$$\begin{aligned}
C_{11} &= 0 \quad \tau_1 \text{'deki interpolasyondan} \\
C_{11} + C_{21} \frac{\Delta\tau_1}{2} + C_{31} \frac{\Delta\tau_1^2}{6} &= h_1 [\tau_1.. \tau_2] \text{ üzerinde alan eşleştirmesi} \\
C_{11} + C_{21}\Delta\tau_1 + C_{31} \frac{\Delta\tau_1^2}{2} - C_{12} &= 0 \quad \tau_2 \text{ de } f \text{ in sürekliliği} \\
C_{21} + C_{31}\Delta\tau_1 - C_{22} &= 0 \quad \tau_2 \text{ de } Df \text{ sürekliliği} \\
C_{12} + C_{22} \frac{\Delta\tau_2}{2} + C_{32} \frac{\Delta\tau_2^2}{6} &= h_2 [\tau_2.. \tau_3] \text{ üzerinde alan eşleştirmesi} \\
C_{12} + C_{22}\Delta\tau_2 + C_{32} \frac{\Delta\tau_2^2}{6} - \dots &= 0 \quad \tau_3 \text{ de } f \text{ sürekliliği} \\
C_{22} + C_{32}\Delta\tau_2 - \dots &= 0 \quad \tau_3 \text{ de } Df \text{ sürekliliği} \\
&\dots = \dots \text{ v.b.}
\end{aligned}$$

Sistematik olarak bu lineer sistem aşağıdaki gibi hemen hemen blok diogonal forma sahiptir.



Şekil 4.3. Lineer sistemin görüntüsü

Bu tür sistemleri Gauss eliminasyon yöntemiyle etkili bir biçimde çözmek mümkündür. c_{ij} katsayıları bulununca parabolik parçalı polinom elde edilir.

İnterpolasyon için bir başka yöntemde $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ lineer bağımsız fonksiyonlarından yararlanmaktadır. Bu yöntemde bir çok bilinmeyen olduğu kadar interpolasyon koşullarında olduğu ve her birinin bütün homojenlik koşullarını sağlaması gerektiğinden hareket edilir. Böylece f fonksiyonu g hakkında verilen bilgilerden saptanan α_i katsayılarıyla birlikte

$$\sum_j \alpha_j \varphi_j = f$$

biçiminde bulunur. Aslında homojen şartlar bize f 'in $\Pi_{<k,\xi}$ 'nin alt uzayına ait olduğunu söyler ($\Pi_{<k,\xi}$ uzayı içindeki alt uzayın tüm fonksiyonları bu homojen koşulları sağlamalıdır) ve yukarıdaki yapı bu alt uzay için yaklaşık bir taban oluşturur.

$\Pi_{<k,\xi,\nu}$ uzayında bilinen homojen koşullar belirli sayıda sürekli türevlerin varlığını ister. Bu koşullar negatif olmayan tam sayıların vektörü $\nu := (\nu_i)_2^l$ ile

$$\text{sıçrama}_{\xi} D^{j-1} f = 0 \quad j = 1, \dots, \nu_i \text{ ve } i = 2, \dots, l \quad (4.13)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\text{sıçrama}_{\alpha} f := f(\alpha^+) - f(\alpha^-)$$

dır. Bu kısaltma (veya lineer fonksiyonel) “ f ’in α noktasında sıçraması” olarak okunur. Burada ν_i, ξ_i ’de süreklilik şartı sayısıdır. Özellikle $\nu_i = 0$, her hangi bir ξ_i ’de sadece süreklilik koşulu anlamına gelir.

(4.13) eşitliğindeki koşullar lineer ve homojen olduğu için verilen bir vektör ν için gerekli bütün $f \in \Pi_{\langle k, \xi \rangle}$ ’in alt kümesi $\Pi_{\langle k, \xi, \nu \rangle}$ ’in lineer alt uzayıdır. Bu alt uzayı $\Pi_{\langle k, \xi, \nu \rangle}$ ile gösteririz. Bu rakamlar ve işaretler sistemi içerisinde daha önceki histogramın temsili gerektiren parabolik spline’lar için $\nu = 2 := (2, \dots, 2)$ ’dir ve uzayımız $\Pi_{\langle 3, \xi, \nu \rangle}$ olur.

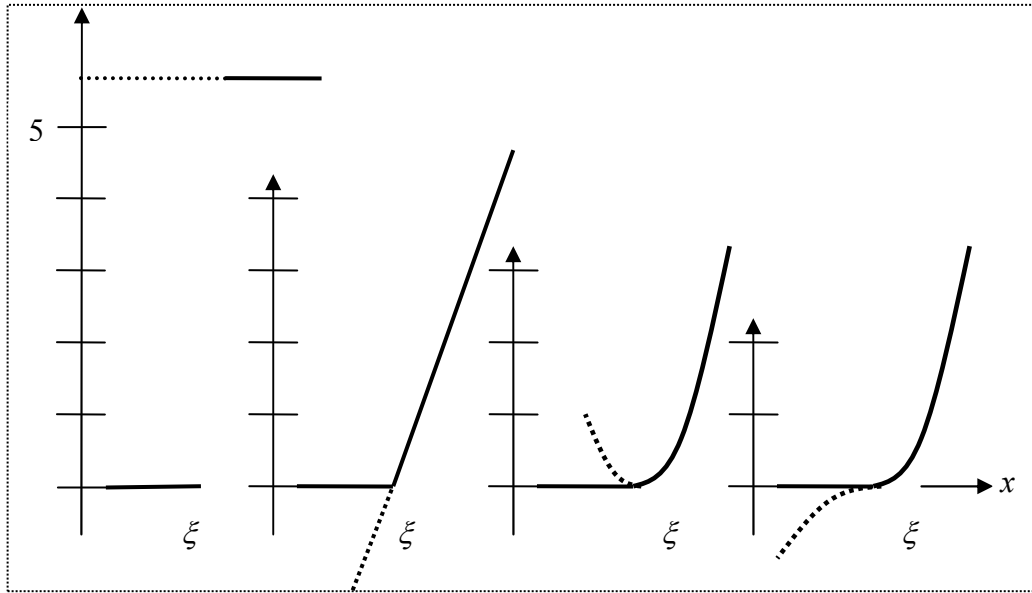
Bunun için bir tabana ihtiyacımız vardır. Yani ϕ_1, ϕ_2, \dots fonksiyonları $\Pi_{\langle k, \xi, \nu \rangle}$ içinde olmalı ve $\Pi_{\langle k, \xi, \nu \rangle}$ içindeki bütün fonksiyonlar ϕ_1, ϕ_2, \dots fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabildiğinden ϕ_1, ϕ_2, \dots fonksiyonları $\Pi_{\langle k, \xi, \nu \rangle}$ uzayı için bir bazdır. Yani $\forall f \in \Pi_{\langle k, \xi, \nu \rangle}$ için $f = \sum_j \alpha_j \phi_j$ ’dir.

4.3. $\Pi_{\langle k, \xi \rangle} \Pi_{\langle k, \xi, \nu \rangle}$ İçin Kısaltılmış Kuvvet Tabanı

$(x-t)_+ := \max\{x-t, 0\}$ uyarlanmış fonksiyonunu tanımlayalım.

$(x)_+^r := (x_+)^r$ ’dir.

$f(x) := (x - \xi)_+^r$ fonksiyonu parçalı bir polinomdur, $r+1$ mertebesinde ve $r > 0$ durumunda ξ 'de süreklidir, $r = 0$ iken ξ 'de 1(bir) ölçüsünde sıçramaya sahiptir. $D(-\xi)_+^r = r(-\xi)_+^{r-1}$ olduğu için, $(-\xi)_+^r$ 'nin $(r-1)$. sürekli türevine sahip ve ξ noktasında r . türevinde $r!$ ölçüsünde bir sıçramaya sahip olduğu görülür.



Şekil 4.4. $6(x - \xi)_+^0$, $6(x - \xi)_+^1$, $3(x - \xi)_+^2$, $(x - \xi)_+^3$ fonksiyonlarında $x = \xi$ değerinde artan düzgünlüğe sahiptirler, her birinin sağdaki fonksiyonun türevi olması bu durumu açıklar

λ_{ij} lineer fonksiyonelleri ve bunlara karşılık $j = 0, \dots, k-1$ için φ_{ij} fonksiyonları aşağıdaki ifade vasıtasıyla tanımlansın.

$$\lambda_{ij} f := \begin{cases} D^j f(\xi_1), & i = 1; \\ \text{sıçrama}_{\xi_i} D^j f, & i = 2, \dots, l; \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\varphi_{ij}(x) := \begin{cases} (x - \xi_1)^j / j!, & i = 1; \\ (x - \xi_i)_+^j / j!, & i = 2, \dots, l \end{cases}$$

Her bir φ_{ij} fonksiyonunun $\prod_{<k,\xi}$ içinde olduğu açıktır. Ayrıca daha önce belirtilen ifadeden yola çıkarakta,

$$\lambda_{ij}\varphi_{rs} = \delta_{ir}\delta_{js} = \begin{cases} 1, & i = r \text{ ve } j = s \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.15)$$

yazılabilir. Bu çift dizi (φ_{ij}) 'nin lineer bağımsız olduğunu gösterir. (φ_{ij}) kl tane fonksiyon ve $\prod_{<k,\xi}$ kl boyutuna sahip olduğundan şu sonuca varırız: $(\varphi_{ij}), \prod_{<k,\xi}$ için bir tabandır. Buna göre her $f \in \prod_{<k,\xi}$ fonksiyonu

$$f = \sum_{ij} (\lambda_{ij}f)\varphi_{ij}$$

formunda tek türlü yazılabilir. (4.14) ve (4.15) vasıtasıyla bu ifade açık bir şekilde

$$f(x) = \sum_{j<k} f^{(j)}(\xi_1)(x-\xi_1)^j/j! + \sum_{i=2}^l \sum_{j<k} (\text{sıçrama}_{\xi_i} D^j f)(x-\xi_i)_+/j! \quad (4.16)$$

şeklinde yazılır.

Şimdi f için (4.16) içerisindeki katsayılar açıkça görülen çeşitli noktalarda f fonksiyonunun çeşitli türevlerinde oluşan sıçramaya dikkat edelim. (4.16) ifadesi aşağıdaki

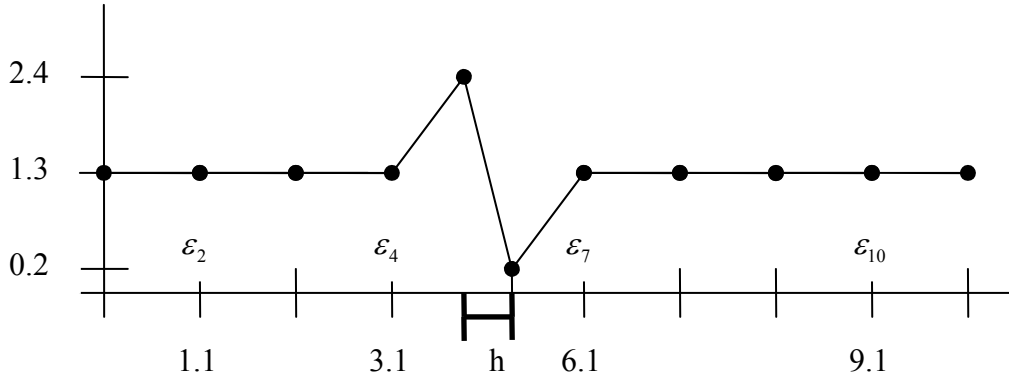
$$\text{sıçrama}_{\xi_i} D^{j-1} f = 0 \quad j = 1, \dots, \nu_i \text{ ve } i = 2, \dots, l \quad (4.17)$$

koşullarını istemektedir. Bu katsayılar sıfır olduğu için (4.16) formundaki f fonksiyonuna etkisi sınırlanır. Demek oluyor ki

$$\varphi_{ij}, \quad j = \nu_i, \dots, k-1 \quad \text{ve } i = 2, \dots, l \quad (4.18)$$

çift dizisi $\prod_{<k,\xi,\nu}$ için bir tabandır. Burada $\nu_1 := 0$ dır. Bir diğer deyişle $f \in \prod_{<k,\xi,\nu}$

fonksiyonu $f = \sum_{i=1}^l \sum_{j=\nu_i}^{k-1} \alpha_{ij} \varphi_{ij}$ biçiminde tam olarak yazılabilir.



Şekil 4.5. Uyarlanmış kuvvet fonksiyonları bazı için zorluklara sebep olan lineer bir yaklaşım

İlk bakışta taban (φ_{ij}) bazı düzgün pp fonksiyonlarıyla alakalı problemler için uygun görülebilir. Fakat ppformun Şekil 4.3 ile (4.16)'daki ifadenin karşılaştırılmasında iki şikayet akla gelir;

- (i) Eğer l büyükse bir x noktasında f 'in değerinin hesabı fazla işlem içermektedir.
- (ii) Düzgün olmayan ξ kırılma noktalarında taban fonksiyonlar φ_{ij} 'nin bazıları diğerlerine lineer bağlı olurlar. Dolayısıyla katsayılar içindeki küçük değişiklikler sunulan fonksiyon içinde daha küçük veya daha büyük değişiklikler üretebilir. Uyarlanmış kuvvet fonksiyonları tabanı bu olası kötü koşulu nedeniyle iyi konumlu olmayan lineer sistemler meydana getirebilir.

Örnek 4.2.: Uyarlanmış kuvvet fonksiyonları tabanı kötü olabilir. f fonksiyonu doğrusal olarak yapılandırılırsa, yani $f \in \prod_{<2,\xi} \cap C^{(0)}$ ise tüm i 'ler için $f(\xi_i) = 1.3$ fakat $j = 5, 6$ için $f(\xi_5) = 2.4$ ve $f(\xi_6) = .2$ 'dir. $(\xi_i)_1^{11}$ kırılma noktaları Şekil 4.4'de belirtildiği gibi olsunlar. $\nu = (1, \dots, 1)$ ile $f \in \prod_{<2,\xi,\nu}$ olur. Böylece;

$$f(x) = \alpha + \beta(x - \xi_1) + \sum_2^l \alpha_i (x - \xi_i)_+ \text{ ve } \alpha = 1.3, \beta = f'(\xi_1) = 0, \text{ ve } \alpha_i = 0 \text{ 'dır. Ve}$$

$$(\alpha_4, \dots, \alpha_7) = (1.1/\Delta\xi_4, -2.2/h - 1.1/\Delta\xi_4, 1.1/\Delta\xi_6 + 2.2/h, -1.1/\Delta\xi_6) \text{ 'dir.}$$

$h := \Delta\xi_5$ küçük olduğu için $(x - \xi_5)_+ \square (x - \xi_6)_+$ elde edilir ve buna paralel olarakta

$-\alpha_5 \square \alpha_6 \gg 1$ elde edilir. Bu durum f fonksiyonunun hesaplanmasında önemli hane kaybına sebep olur. Örneğin $\xi_5 = 4.5$, $\xi_6 = 4.8$ ve $h = .3$ seçilirse iki önemli desimal rakam alındığında şu değerler elde edilir; $\alpha = 1.3$, $\beta = 0$, $\alpha_4 = .79$, $\alpha_5 = -8.1$, $\alpha_6 = 8.2$, $\alpha_7 = -.85$ diğer α 'lar sıfırdır. Sonra $x = 9.5$ noktasında f fonksiyonu değerlendirilirse 1.3 doğrusu yerine 2.1 değeri bulunur.

Bunu iyileştirmenin yolu; aşağıdaki kural ile verilen fonksiyonları kullanmaktır.

$$H_i(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (x - \varepsilon_{i-1}) / \Delta \varepsilon_{i-1}, & \varepsilon_{i-1} < x \leq \varepsilon_i, \\ (\varepsilon_{i+1} - x) / \Delta \varepsilon_i, & \varepsilon_i \leq x < \varepsilon_{i+1}, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{array} \right\}$$

Burada $\xi_0 \leq \xi_1$ ve $\xi_{12} \geq \xi_{11}$ ifadeleri kullanılır. Şimdi

$$f(x) = 1.3H_1(x) + \dots + 1.3H_4(x) + 2.4H_5(x) + .2H_6(x) + 1.3H_7(x) + \dots$$

Ve tekrar iki desimal rakam aritmetiği ile aşağıdaki ifade elde edilir;

$$f(9.5) = 1.3(4/.9) + 1.3(5/.9) = 1.3 \cdot .44 + 1.33 \cdot .56 = .57 + .73 = 1.3$$

Aslında $h = \Delta \xi_5$ 'in sıfıra yaklaşmasına izin verilebilir ve bu durumda bile H_i baz fonksiyonları f fonksiyonunu iyi temsil ederler. Genel durum içerisinde uyarlanmış kuvvet fonksiyonları bazına karşı daha önce belirtilen her iki itirazda B-Spline'lar şeklinde isimlendirilen 'şapka' fonksiyonlarının genelleştirilmesiyle çürütülmüştür (en azından uygun k için). Bunlar uyarlanmış kuvvet fonksiyonlarının belli lineer bileşenleriyle elde edilebilirler.

4.4. B-Spline'lar Vasıtasıyla pp Fonksiyonların Oluşturulması

Bu bölümde k . mertebedeki B-Spline'lar, uyarlanmış kuvvet fonksiyonlarının k . mertebeden bölünmüş farkları yardımıyla tanımlanacak. $\prod_{<k, \xi, \nu}$ 'nin bu şekilde B-spline'lardan oluşan bir tabana sahip olduğu gösterilecek. Bu durum bir pp fonksiyonu için B-spline form'a geçişi sağlar.

Tanım: $t := (t_j)$ 'nin azalmayan bir dizisi olsun (sınırlı, sınırsız veya çift taraflı sınırsız olabilir). Düğüm noktaları dizisi t için k 'ninci merteye (normalleştirilmiş) j 'ninci B-Spline $B_{j,k,t}$ ile gösterilir ve şu kural ile tanımlanır.

$$\text{Tüm } x \in \mathbb{R} \text{ için } B_{j,k,t}(x) := (t_{j+k} - t_j) [t_j, \dots, t_{j+k}] (\cdot - x)_+^{k-1} \quad (4.19)$$

veya

$$B_{j,k,t}(x) = [t_{j+1}, \dots, t_{j+k}] (\cdot - x)_+^{k-1} - [t_j, \dots, t_{j+k-1}] (\cdot - x)_+^{k-1} \quad (4.20)$$

dir.

Noktalı boşluk işareti şunu göstermek için kullanılır: iki değişken t ve x in $(t-x)_+^{k-1}$ fonksiyonu k, x 'i sabitleyerek yalnız, t 'nin fonksiyonu olarak $(t-x)_+^{k-1}$ düşünülerek işlem yapılır. Sonuçlanan sayı seçilen özel x değerine bağlıdır. Yani sonuçlanan sayı x 'in değişimiyle değişir ve sonuç olarak $B_{j,k,t}$ fonksiyonu x 'in fonksiyonu olur. k ve t bilinen anlamlarıyla $B_{j,k,t}$ yerine B_j veya $B_{jk} = B_{j,k}$ alınacak.

Bu bölümde ve sonraki bölümlerde B-Spline 'ın çeşitli özellikleri sinüs,cosinüs fonksiyonu gibi bilinen bir fonksiyon yapma amacıyla incelenecek. Çeşitli bölünmüş fark özelliklerden yola çıkarak tüm bu özellikler doğrudan yukarıdaki tanımdan türetilirdi.

Bununla birlikte sadece B-Spline ardışık olma bağıntısını kurmak ve daha sonra her şeyi, bölünmüş farkların yardımı olmaksızın bu bağıntıyla türetmek oldukça etkili bir yoldur. Ardışık olma bağıntısından eşitlik (4.19)'u türetmekte ayrıca mümkündür. Yukarıdaki Curry-Schoenberg tanımı en azından $t_j < \dots < t_{j+k}$ için (4.19)'de tanımlanan fonksiyon açıkça k mertebesinin pp fonksiyonudur; sınırlı bir desteğe sahiptir.

$$x \notin [t_j, t_{j+k}] \text{ için } B_{j,k,t}(x) = 0$$

Eğer $x \notin [t_j, t_{j+k}]$ ise, bu durumda $g := (\cdot - x)_+^{k-1}$ ifadesi $[t_j, t_{j+k}]$ üzerinde k . mertebeden polinomdur, böylece $[t_j, \dots, t_{j+k}]g = 0$ 'ı elde ederiz. Ayrıca aşağıdaki Curry-Schoenberg B-Spline'ı

$$M_{j,k,t} := \frac{k}{t_{j+k} - t_j} B_{j,k,t}$$

olarak farklı bir şekilde normalleştirilmiştir. Bölünmüş fark Taylor özdeşliğinin her iki tarafında uygulanırsa bu normalleştirme doğal olarak ortaya çıkar.

$$f = \sum_{r < k} D^r f(a) (\cdot - a)^r / r! + \int_a^b (\cdot - s)_+^{k-1} D^k f ds / k!$$

($t_j, \dots, t_{j+k} \in [a, b]$ varsayımı altında)

$$[t_j, \dots, t_{j+k}] f = \int_{\mathbb{R}} M_{j,k,t} D^k f / k!$$

$M_{j,k,t}$ nin bölünmüş fark için Peano çekirdeği olduğu görülür. Özel olarak $f(x) = x^k$ ile,

$$\int_{\mathbb{R}} M_{j,k,t} = 1$$

bulunur. $B_{j,k,t}$ yerine $N_{j,k,t}$ işaretide sıkça kullanılır. B_{jk} 'lar için

$$[t_{r+k-1}^+, t_{s+1}^-] \text{ üzerinde } \sum_{j=r}^s B_{jk} = 1$$

özellği vardır.

4.4.1. İki özel düğüm (knot) dizisi

Sıklıkla kullanılan iki tane düğüm dizisi hesaplamalarda önemli ölçüde kolaylaştırma sağlamaktadır.

Düzgün düğüm dizisi, $t = \mathbf{Z} = (\dots, -1, 0, 1, 2, \dots)$ dır. Bu durumda B-Spline'lar kardinal (cardinal) olarak adlandırılır. Bu kardinal spline'lar verilen bir k için her birinin tam sayısı ötelenmesidir.

$$B_{j,k,\mathbf{Z}}(x) = \sum_{r=0}^k (-1)^{k-r} \binom{k}{r} (r-x-j)_+^{k-1} / (k-1)!$$

böylece büyük oranda çalışmalarını kolaylaştırırlar.

Diğeri $t = \mathbf{IB} := (\dots, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$ düğüm dizisidir. Bu düğüm dizisi iki tane düğüme sahiptir yani 0 ve 1'e, fakat her ikisinde sonsuz çokluktur. Bu düğüm dizisi için mertebesi k olan k tane sıfırdan farklı B-spline'lar vardır yani, $[0..1]$ 'de bunlar

$$b_{j,k-1}(x) := \binom{k-1}{j} x^{k-1-j} (1-x)^j, \quad j = 0, \dots, k-1$$

Benstein polinomlarıdır. k . metbeden f için

$$\sum_{j=0}^{k-1} f\left(\frac{j}{k-1}\right) b_{j,k-1}$$

dir. $(b_{j,k-1} : j = 0, \dots, k-1)$ Benstein fonksiyon dizisi $\prod_{<k}$ için bir tabandır.

4.4.2. B-Spline'lar için ardışık olma bağıntısı

Doğrudan tanımdan $B_{j1} = (\cdot - t_{j+1})_+^0 - (\cdot - t_j)_+^0$ j 'ninci düğüm aralığının karakteristik fonksiyonudur, yani

$$B_{j1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t_j \leq x < t_{j+1}; \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bu fonksiyonlar sağdan süreklidir. Diğer başka seçimlerde yapılabilir. B_j fonksiyonlarının toplamı 1'dir. Buna birimin parçalanması denir yani

$$\sum_j B_{j1} = 1$$

dir. Özel olarak $t_j = t_{j+1}$ ise $B_{j1} = 0$ olur. Bu ilk mertebeye B-Spline'lar ile başlayarak aşağıdaki ifadenin yardımıyla daha yüksek mertebeye B-Spline'ları yapılandırabiliriz.

Ardışık Olma Bağıntısı; $k > 1$ için

$$\omega_{jk}(x) := \frac{x - t_j}{t_{j+k-1} - t_j}$$

olmak üzere

$$B_{jk} = \omega_{jk} B_{j,k-1} + (1 - \omega_{j+1,k}) B_{j+1,k-1} \quad (4.21)$$

dir.

(4.21) eşitliği şu şekilde elde edilir; $(t - x)_+^{k-1} = (t - x)(t - x)_+^{k-2}$ çarpımına k bölünmüş farkların Leibniz formülü uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$[t_j, \dots, t_{j+k}] (\cdot - x)_+^{k-1} = (t_j - x) [t_j, \dots, t_{j+k}] (\cdot - x)_+^{k-2} + 1 [t_{j+1}, \dots, t_{j+k}] (\cdot - x)_+^{k-2} \quad (4.22)$$

iken $[t_j] (\cdot - x) = (t_j - x)$, $[t_j, t_{j+1}] (\cdot - x) = 1$ olduğu ve $r > j+1$ için $[t_j, \dots, t_r] (\cdot - x) = 0$ 'dır.

$$(t_j - x) [t_j, \dots, t_{j+k}] = \frac{t_j - x}{t_{j+k} - t_j} ([t_{j+1}, \dots, t_{j+k}] - [t_j, \dots, t_{j+k-1}])$$

olduğundan (4.22) ifadesi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[t_j, \dots, t_{j+k}] (\cdot - x)_+^{k-1} = \frac{x - t_j}{t_{j+k} - t_j} [t_j, \dots, t_{j+k-1}] (\cdot - x)_+^{k-2} + \frac{t_{j+k} - x}{t_{j+k} - t_j} [t_{j+1}, \dots, t_{j+k}] (\cdot - x)_+^{k-2}$$

Ve bu eşitliğin $(t_{j+k} - t_j)$ ile çarpımdan sonra (4.21) eşitliği bulunur. Böylece ikinci merteye B-Spline

$$B_{j2} = \omega_{j2} B_{j1} + (1 - \omega_{j+1,2}) B_{j+1,1}$$

ile verilir. İki lineer parçadan oluşur, bu parçalar $[t_j, t_{j+1})$ aralığının dışında sıfır olan ve süreklilik koşuluyla birleşen lineer fonksiyon parçalarıdır. Bu nedenle B_{j2} lineer B-Spline olarak adlandırılır. $t_j = t_{j+1}$ ise bu durumda B_{j2} sadece bir tane sıfır olmayan lineer parçadan oluşur.

Üçüncü merteye B-Spline,

$$\begin{aligned} B_{j3} &= \omega_{j3} B_{j2} + (1 - \omega_{j+1,3}) B_{j+1,2} \\ &= \omega_{j3} \omega_{j2} B_{j1} + (\omega_{j3} (1 - \omega_{j+1,2}) + (1 - \omega_{j+1,3}) \omega_{j+1,2}) B_{j+1,1} + (1 - \omega_{j+1,3}) (1 - \omega_{j+2,2}) B_{j+2,1} \end{aligned}$$

genel olarak üç parabolik parçalardan oluşur, bu parçalar $[t_j..t_{j+2})$ dışında sıfır olan bir $C^{(1)}$ fonksiyonunu şekillendirmek için birleşir. Ardışık olma bağıntısı $k-1$ defa uygulanırsa B_{jk} 'yi aşağıdaki biçimde elde ederiz.

$$B_{jk} = \sum_{r=j}^{j+k-1} b_{rk} B_{r1} \quad (4.23)$$

Her bir k için b_{rk} k . mertebeden polinomlardır ($k-1$ lineer polinomun birleşimidir; aslında (4.23) içindeki $k-1$ dereceden her bir b_{rk} 'nin toplamıdır).

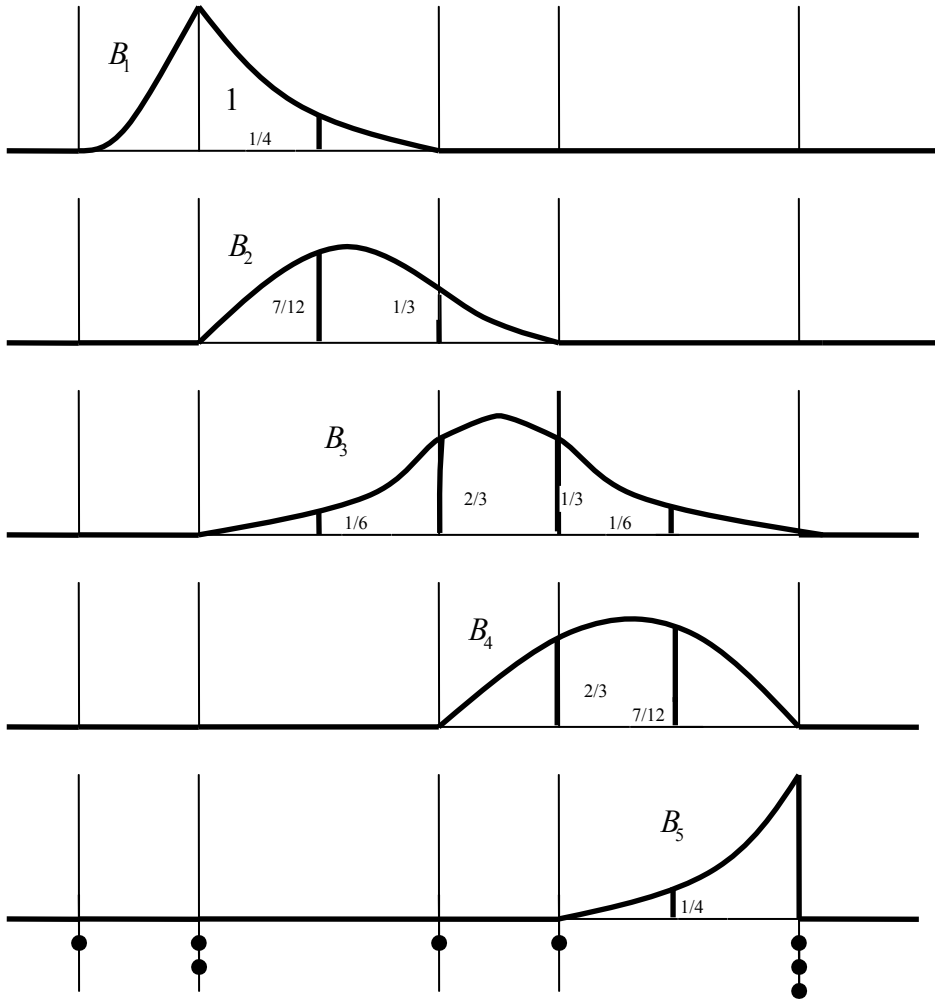
B-Spline $B_{j,k,t}$, t_j, \dots, t_{j+k} kırılma noktalarında k 'ninci mertebeden pp fonksiyonudur. Bu sebeple çoğunlukla sıfır olmayan k adet polinomsal parçadan oluşup, $[t_j..t_{j+k})$ aralığının dışında sıfırdır ve bu aralığın içinde pozitifdir yani

$$t_j < x < t_{j+k} \text{ için } B_{j,k,t}(x) > 0, \quad (4.24)$$

dir. $t_j = t_{j+k}$ ise $B_{jk} = 0$ 'dır.

(4.24) eşitliğini şu şekilde açıklayabiliriz; B_{j1} ($t_j..t_{j+1}$) üzerinde pozitifdir. $k < r$ için (4.24) doğru olsun. ω_{jr} ve $(1 - \omega_{j+1,r})$ ifadelerinin ($t_j..t_{j+r}$) üzerinde pozitif olduğunu varsaymak, (4.21) ile (4.24)'ün ayrıca $k = r$ yi de kapsadığını gösterir.

B-Spline $B_{j,k,t}$ sadece $k+1$ tane t_j, \dots, t_{j+k} düğüm noktasına bağlıdır. Bu nedenle $B_{j,k,t} =: B(\cdot | t_j, \dots, t_{j+k})$ şeklinde gösterilir. B_{jk} 'nin düzgünlüğü (t_j, \dots, t_{j+k}) düğüm dizisi içinde gözükken düğüm noktalarının katlılığına bağlıdır.



Şekil 4.6. $(t_1, \dots, t_{5+3}) = (0, 1, 1, 3, 4, 6, 6, 6)$ düğüm dizisi için parabolik spline'lar düğüm katlılığı ve düzgünlük arasındaki ilişki açıkça görülür

Şekil 4.6. düğüm dizisi $(0, 1, 1, 3, 4, 6, 6, 6)$ için 5 adet parabolik B-Spline grafiği gösterilmektedir. Burada Özellik (ii) açıkça görülmektedir. Ayrıca

$[t_{r+k-1}^+, t_{s+1}^-]$ üzerinde $\sum_{j=r}^s B_{jk} = 1$ ifadesi, fonksiyon değerlerinin sayısal olarak

verildiği birkaç noktada görülmektedir. $[t_k, t_{n+k}] = [1, 6]$ üzerinde $\sum_1^5 B_j(x) = 1$ 'dir fakat $[0, 1)$ üzerinde toplam 1'e eşit değildir.

Her bir B_j , parçalı parabolik bir spline'dır ve B-spline'da veya onun türevlerinden birinde süreksizlikler açıkça görünür. Sadece B_5 süreksizdir. Düğüm 6 B_5 tanımını kapsayan t_j, \dots, t_{j+k} düğüm dizisi içerisinde üç kez görülür. Sadece üç B-Spline süreksiz ilk türeve sahip

olarak görülür B_1 ve B_2 düğüm 1'de t_j, \dots, t_{j+k} dizisi içinde iki kez görülür, düğüm 6'da B_4 'de (3,4,6,6)'da iki kez ortaya çıkar. B_3 'ün 1 düğümünde sürekli türeve sahiptir. Düğüm dizisi $(t_3, t_4, t_5, t_6) = (1, 3, 4, 6)$ 'dır. 1'i sadece bir kez içerir. Diğer tüm noktalarda B_j fonksiyonları en kötü olasılıkla ikinci türevde bir süreksizliğe sahiptir. Örneğin [1..3] üzerinde B_3 yukarıya doğru iç bükey bir paraboldür, bu yüzden orada ikinci türev pozitif sabittir. [3..4] üzerinde aşağıya doğru iç bükey olup $sıçrama_3 D^2 B_3 < 0$ 'dır. Düğüm katlılığı ve süreklilik koşulu arasındaki bu ilişki B-Spline'ların kullanımında esastır.

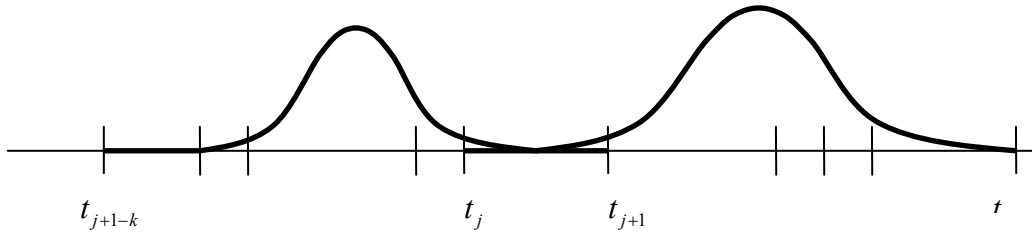
4.4.3. Spline uzayı $\mathcal{S}_{k,t}$

Düğüm dizisi t ile k . mertebeden bir spline fonksiyonu, t düğüm dizisi için k . mertebeden B-spline'ların lineer bileşimidir. Bu tür fonksiyonların kümesi $\mathcal{S}_{k,t}$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathcal{S}_{k,t} := \left\{ \sum_i \alpha_i B_{i,k,t} : \text{her } i \text{ için } \alpha_i \in R \right\}$$

dir. Eğer t sonsuz veya çift taraflı sonsuz ise, bu durumda tanımdaki sonsuz toplam problem oluşturmaz çünkü x noktasında $\sum_i \alpha_i B_i$ fonksiyonunun değeri hesaplanırken sıfırdan farklı terimler sonlu tane olduğundan hesaplama kolayca yapılır.

Spline fonksiyonu'nun bu tanımı okuyucuyu spline fonksiyonlarının tam olarak ne olduğu konusunda şüpheye düşürmüş olabilir. Okuyucular kübik spline'lar veya parabolik spline'lar gibi tanımların daha önce anlatıldığını ve bu tanımların yukarıdaki tanımla tamamen uyuşmadığını söyleyebilir. Fakat bunu tartışmadan önce daha önemli bir soruyu ele alacağız; $\mathcal{S}_{k,t}$ 'nin tanımına göre spline'lar tam olarak



Şekil 4.7. (t_j, t_{j+1}) aralığında k .mertebeden B-Splinelardan en sol ve en sağdaki desteği

$(B_{j-k+1}, B_{j-k+2}, \dots, B_j)$ burada sıfırdan farklıdır)

nedir yani tam olarak ne tür fonksiyonlar $\mathcal{S}_{k,t}$ uzayını hazırlar.

B-spline fonksiyonlarının özellikleri gereği $\mathcal{S}_{k,t} \subseteq \prod_{<k,t}$ 'dir. Fakat aşağıdaki Curry-Schoenberg teoremini $\mathcal{S}_{k,t} = \prod_{<k,\varepsilon,v}$ olduğunu söylemektedir. Son uyarı aşağıdaki ardışık olma bağıntısında ortaya çıkan zorluklar ile ilgilidir. Ardışık olma bağıntısı;

$$\sum_j \alpha_j B_{jk} = \sum_j (\omega_{jk} \alpha_j + (1 - \omega_{jk}) \alpha_{j-1}) B_{j,k-1} \quad (4.25)$$

dır. Eğer $t = (t_1, t_2, \dots)$ ise bu durumda (4.25) eşitliğinde soldaki toplam $j=1$ ile başlar, fakat sağdaki toplam α_{j-1} terimini içerdiği için sadece $j=2$ ile başlar. Bu zorluğu yenmek için t dizisini çift yönlü sonsuz bir düğüm dizisine her hangi bir yolla genişletmek gerekir. Bununla birlikte mevcut B-Spline'ların sayısındaki artış spline uzaylarımızı artırır. Sadece orijinal spline uzaylarımızla ilgilenildiğinden daha sonra ilave B-Spline kat sayıları sıfır alınır. B-Spline için en geniş aralık belirlenir. Bunu $\mathcal{S}_{k,t}$ için taban aralık olarak adlandırılır ve şu şekilde gösterilir;

$$I_{k,t} = (t_-..t_+) \quad (4.26)$$

burada

$$t_- := \begin{cases} t_k, & \text{eğer } t = (t_1, \dots); \\ \inf_j t_j, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, t_+ := \begin{cases} t_{n+k}, & \text{eğer } t = (\dots, t_{n+k}); \\ \sup_j t_j, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. Pratikte düğüm dizisi sınırlı olduğundan birinci ve sonuncu elemana sahiptir. Bu durumda $I_{k,t}$ kapalıdır ve bütün pp fonksiyonları sağ-sürekli yapılır.

Şimdi (4.25) eşitliği $S_{k,t}$ 'nin k . mertebeden bütün polinomları içerdiğini göstermek ve ayrıca $p \in \Pi_{<k}$ 'nin B-Spline katsayılarını formülize etmek için kullanılacak.

$\tau \in IR$ için

$$(\cdot - \tau)^{k-1} = \sum_j \psi_{jk}(\tau) B_{jk} \quad (4.27)$$

dir. Burada

$$\psi_{jk}(\tau) := (t_{j+1} - \tau) \dots (t_{j+k-1} - \tau) \quad (4.28)$$

dir. (4.27) ve (4.28)'i kanıtlamak için (4.25)

$$\text{tüm } j \text{ ler } \alpha_j = \psi_{jk}(\tau)$$

özel dizisi olarak ele alınsın. O halde

$$t_j < t_{j+k-1} \text{ için } B_{j,k-1} \neq 0$$

$$\begin{aligned} \omega_{jk} \alpha_j + (1 - \omega_{jk}) \alpha_{j-1} &= \psi_{j,k-1}(\tau) (\omega_{jk} (t_{j+k-1} - \tau) + (1 - \omega_{jk}) (t_j - \tau)) \\ &= \psi_{j,k-1}(\tau) (\cdot - \tau) \end{aligned}$$

herhangi f için $\omega_{jk} f(t_{j+k-1}) + (1 - \omega_{jk}) f(t_j)$ ifadesi t_j ve t_{j+k-1} 'de f ile uyum gösteren doğru denklemi olduğundan kendine eşittir ve f lineerdir. Böylece tüme varım vasıtasıyla,

$$\sum_j \psi_{jk}(\tau) B_{jk} = (\cdot - \tau)^{k-1} \sum_j \psi_{j1}(\tau) B_{j1}$$

elde edilir ve $\psi_{j_1} = 1$ olduğundan son toplam 1'e eşittir.

(4.27) içinde τ keyfi olduğu için $\mathcal{S}_{k,t}$ bütün k . mertebeden polinomları içerir. Dahada fazlası $p \in \Pi_{<k}$ için B_{jk} cinsinden açık bir ifade kolaylıkla elde edilebilir. $(k-1)!$ ile (4.27) eşitliği bölünür daha sonra bu eşitliğin aşağıdaki (4.29) eşitliğini elde etmek için τ ' ya göre $v-1$ kez türevi alınır.

$$\frac{(\cdot - \tau)^{k-v}}{(k-v)!} = \sum_j \frac{(-D)^{v-1} \psi_{jk}(\tau)}{(k-1)!} B_{jk}, \quad v > 0 \quad (4.29)$$

Taylor formülü bu eşitlik için kullanılırsa,

$$p = \sum_{v=1}^k \frac{(\cdot - \tau)^{k-v}}{(k-v)!} D^{k-v} p(\tau)$$

ifadesi $p \in \Pi_{<k}$ için geçerli olduğundan Lineer fonksiyonel λ_{jk} ,

$$\lambda_{jk} f := \sum_{v=1}^k \frac{(-D)^{v-1} \psi_{jk}(\tau)}{(k-1)!} D^{k-v} f(\tau) \quad (4.30)$$

olmak üzere,

$$p = \sum_j \lambda_{jk} p B_{jk}, \quad p \in \Pi_{<k} \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.31) eşitliği taban aralık I_{kt} 'de geçerlidir.

(B_{jk}) dizisi pozitiftir ve birin parçalanmasını sağlar yani her bir B_{jk} , $(t_j \cdot t_{j+k})$ üzerinde pozitiftir, $[t_j \cdot t_{j+k}]$ nin dışında sıfırdır ve I_{kt} üzerinde,

$$\sum_j B_{jk} = 1 \quad (4.32)$$

dir.

B-spline'ların bir diğer özelliği düğüm ortalamaları ile ilgilidir. $k > 1$ ve her hangi $l \in \mathbb{Z}$ için,

$$l = \sum_j l(t_{jk}^*) B_{jk}$$

Burada t_{jk}^* Greville noktaları,

$$\text{tüm } j \text{ ler } t_{jk}^* := \frac{t_{j+1} + \dots + t_{j+k-1}}{k-1} \quad (4.33)$$

dir. Gerçekten $D^{k-2}\psi_{jk}$, t_{jk}^* 'da sıfır olan lineer bir polinom olduğu için sözü edilen iddia (4.31) eşitliğinden görülür.

Marsden'in özdeşliği (4.27) belirli uyarlanmış kuvvet fonksiyonları için bir B-spline açılımı sağlar. $t_j < t_i < t_{j+k}$, $\#t_i := \#\{r: t_r = t_i\}$ ile $v \leq \#t_i$ için $D^{v-1}\psi_{jk}(t_i) = 0$ anlamına geldiği için, t düğüm dizisi içinde t_i 'nin katlılığını verir. (4.29) eşitliği içerisindeki $r = t_i$ seçimi mümkün olduğunca sıfır olmayan terimler bırakır, bu sıfır olmayan terimlerin içinde sadece ya t_i 'nin tamamen soluna doğru ya da t_i 'nin tamamen sağına doğru destekleyen terimler toplamı vardır. Buradan hareketle,

$$\frac{(\cdot - \tau)_+^{k-v}}{(k-v)!} = \sum_{j \geq i} \frac{(-D)^{v-1} \psi_{jk}(\tau)}{(k-1)!} B_{jk}, \quad 0 < v \leq \#t_i, \quad \tau = t_i \quad (4.34)$$

elde edilir.

Denklem (4.34), B-Spline'ı tanımlamak için kullanılan (4.19) denklemini çıkarmak için gerekli bütün bilgileri sağlar.

Teorem 4.1. (Curry ve Schoenberg): Verilen kesin artan dizi $\xi = (\xi_i)_1^{l+1}$ ve verilen bir negatif olmayan tam sayı dizisi $v_i \leq k$, tüm i 'ler ile $v = (v_i)_2^l$ için

$$n := k + \sum_{i=2}^l (k - v_i) = kl - \sum_{i=2}^l v_i = \dim \Pi_{\langle k, \xi, v \rangle}$$

olmak üzere ve $t := (t_i)_1^{n+k}$, aşağıdaki iki koşul vasıtasıyla ξ 'den elde edilen, azalmayan bir dizi olur.

- (i) $i = 2, \dots, l$ ξ_i sayısı t içinde tam olarak $k - v_i$ katlı olsun.
- (ii) $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq \xi_1$ ve $\xi_{l+1} \leq t_{n+1} \leq \dots \leq t_{n+k}$.

Bu düğüm dizisi t için k . merteye B-Spline'ların B_1, \dots, B_n dizisi $\Pi_{\langle k, \xi, v \rangle}$ için $I_{k-t} = [t_k \dots t_{n+1}]$ üzerinde bir tabandır. Yani $I_{k,t}$ üzerinde $\mathcal{S}_{k,t} = \Pi_{\langle k, \xi, v \rangle}$ 'dir. İspat için Curry ve Schoenberg [1966].

Curry-Schoenberg teoremi uygun bir düğüm dizisi t için bir yöntem sağlayarak herhangi belli bir pp uzayı $\Pi_{\langle k, \xi, v \rangle}$ için bir B-Spline taban yapısına imkan verir. t 'nin bu seçimi bir kırılma noktasında (v tarafından belirlendiği gibi) istenen düzgünlüğü daha az düğümle daha fazla süreklilik şartlarına uyum ile o noktada uyumlu düğümler dizisine çevirir. Bunu yaparken, ξ 'de süreklilik koşullarının sayısı ile ξ 'daki düğüm sayısı toplamı k 'ya eşit olmalıdır kuralına uyar.

Böylece bir noktada k katlı bir düğüm noktası olması orada süreksizlik demektir.

$\sum_2^l (k - v_i)$ içerisindeki düğümlere ilave olarak $(\xi_2 \leq t_{k+1} \leq \dots \leq t_n \leq \xi_l)$ k tane başlangıç ve k tane sonuncu düğüm alınır. Bunlar keyfî olup sadece taban aralık

$[\xi_1 \dots \xi_{l+1}]$ 'in içerisinde olmamalıdır.

Bu teorem ilk k ve son k düğümlerinin seçimini açık bırakmaktadır. Uygun bir seçim $v_1 = 0 = v_{l+1}$ olduğundan

$$t_1 = \dots = t_k = \xi_1, \quad t_{n+1} = \dots = t_{n+k} = \xi_{l+1}$$

olur.

ξ_1 ve ξ_{l+1} 'de hiçbir süreklilik şartı yüklemeyiz. Bu, B-Spline tabanının sadece $[t_k \dots t_{n+1}]$ aralığı üzerinde $\Pi_{\langle k, \xi, v \rangle}$ 'nin elemanları için geçerli bir sunum sağladığı gerçeğiyle tutarlıdır. Yani $\mathcal{S}_{k,t}$ için taban aralığını $\Pi_{\langle k, \xi, v \rangle}$ için taban aralığıyla uyumlu yapar.

Teorem 4.1. pp fonksiyonların B-Spline'lar şeklinde sunulmasını sağlar.

Tanım: $f \in \Pi_{\langle k, \xi, v \rangle}$ için B-Spline formu şunları içerir;

- (i) f 'nin mertebesini (bir pp fonksiyonu olarak) ve lineer parametrelerin sayısını (yani, $n = kl - \sum_i v_i = \dim \Pi_{\langle k, \xi, v \rangle}$) veren tam sayılar k ve n ,
- (ii) (Teorem 4.1. teoremindeki gibi ξ ve v den yapılan) artan sırada düğümleri içeren vektör $t = (t_i)_1^{n+k}$ dizisi ve
- (iii) Düğüm dizisi t için $\Pi_{\langle k, \xi, v \rangle}$ 'de B-Spline tabanı $(B_i)_1^n$ 'ye göre f 'in kat sayılarının vektörü $\alpha = (\alpha_i)_1^n$.

Bu ifadelerle, $[t_k \dots t_{n+1}]$ içinde bir x noktasında f 'in değeri,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i(x) \tag{4.35}$$

| kırılma noktaları | ε_1 | ε_2 | ε_3 | ... | ε_l | ε_{l+1} |
|--|-----------------|-----------------|------------------|-----|-----------------|---------------------|
| süreklilik koşullarının sayısı | $v_1 = 0$ | v_2 | v_3 | ... | v_l | $v_{l+1} = 0$ |
| bunlara karşılık düğümlerdeki katlılık | $k - v_1 = k$ | $k - v_2$ | $k - v_3$ | ... | $k - v_l$ | $k - v_{l+1} = k$ |
| sonuçlanan düğümler | t_1 | t_{k+1} | t_{2k-v_2+1} | ... | t_n | t_{n+1} |
| | \vdots | \vdots | \vdots | | \vdots | \vdots |
| | t_k | t_{2k-v_2} | $t_{3k-v_2-v_3}$ | | t_n | t_{n+k} |

Şekil 4.8. Kırılma noktalarına ve süreklilik koşullarına uygun düğüm katlılıklarını belirleme tablosu

olarak verilir. Özellikle $j \in \{k, \dots, n\}$ için $t_j \leq x \leq t_{j+1}$ ise bu durumda

$$f(x) = \sum_{i=j-k+1}^j \alpha_i B_i(x)$$

olur. Demek oluyor ki pp formun önemli bir özelliği bir noktadaki değer sadece k kat sayıya bağlıdır.

k . mertebeden bir pp fonksiyonu için B-Spline formu en az $2k$ düğümünü (genellikle daha fazlasını) gerektirir. Tersine k . mertebeden spline fonksiyonu $k+1$ düğüm noktası (fakat daha az değil) gerektirir. Eğer k . mertebeden bir spline için pp formu kurarsak $[a..b] = [t_1..t_{n+k}]$ aralığı üzerinde $n+k$ adet düğüm noktaları t_1, \dots, t_{n+k} ile $n+k-1$ polinomsal parça ile üretiriz. Eğer şimdi $t_1 < t_2$ ve $t_{n+k-1} < t_{n+k}$ ise bu durumda $[a..b] = [t_1..t_{n+k}]$ üzerinde $n+k+2(k-1)$ düğümleriyle bir spline elde ederiz.

f fonksiyonunu bir B formundan pp forma dönüştürmek kolaylıkla başarılabilir eğer (4.35) formülünden stabil ve etkili bir biçimde kendisi ve türevleri hesaplanabilirse $l+1$ farklı nokta t_k, \dots, t_{n+1} sayıları ile bulunur (l belirlenir) ve ξ_1, \dots, ξ_{l+1} artan sırada seçilir. $i=1, \dots, l$ için $D^{j-1}f(\xi_i^+)$ sayısı hesaplanır ve C_{ij} , $j=1, \dots, k$ olarak depolanır.

f için pp formdan B forma dönüştürme daha zordur. Çünkü pp form kırılma noktalarındaki f 'in düzgünlüğü hakkında kesin bilgi içermez yani bir spline fonksiyon olarak f 'in oluşturulması için gerekli bilgi, düğüm noktalarındaki katlılık güvenilir olarak elde edilemez. Fakat f 'in her hangi bir şekilde belli bir v için $\prod_{<k, \xi, v}$ içinde bulunduğu bilinirse uygun t düğüm dizisi, ξ ve v 'den Teorem 4.1.'deki gibi yapılandırılabilir.

B-spline'ların bir önemli özelliğide aşağıdadır. Her hangi bir $f \in \mathcal{S}_{k,t}$ için

$$\lambda_{jk} f := \sum_{v=1}^k \frac{(-D)^{k-v} \psi_{jk}(\tau_j)}{(k-1)!} D^{v-1} f(\tau_j) \quad (4.36)$$

olmak üzere $t_j^+ \leq \tau_j \leq t_{j+k}^-$ (tüm j ler) için $f = \sum_j \lambda_{jk} f B_{jk}$ 'dir.

Böylece

$$\forall i \text{ için } \lambda_{ik} \left(\sum_j \alpha_j B_j \right) = \alpha_i$$

olur. $[t_j^+, t_{j+k}^-]$ aralığı içinde τ_j keyfi olarak seçilebilir. İspat için Carl de Boor[2001].

B forma dönştürme, $[0..10]$ üzerinde 1,2,...,9 iç düğümleri ile kübik bir spline olarak aşağıdaki ifadenin B-Spline formunu bulalım.

$$f(x) = (x-3)(x-6)(x-9) \quad (4.37)$$

$i = 1, \dots, 9$ için; $t_1 = \dots = t_4 = 0$; $t_{4+i} = i$ alalım. $k = 4$ ve $n = 13$ ile $t_{n+1} = \dots = t_{n+4} = 10$ 'dur. (4.36)'da aşağıdaki formülün özelleştirdiği durum içinde tüm j 'ler için $\tau_j = t_{j+2}$ alınır.

$$\alpha_j = f(t_{j+2}) + 1/3(\Delta t_{j+2} - \Delta t_{j+1})f'(t_{j+2}) - 1/3\Delta t_{j+1}\Delta t_{j+2}f''(t_{j+2})/2 \quad (4.38)$$

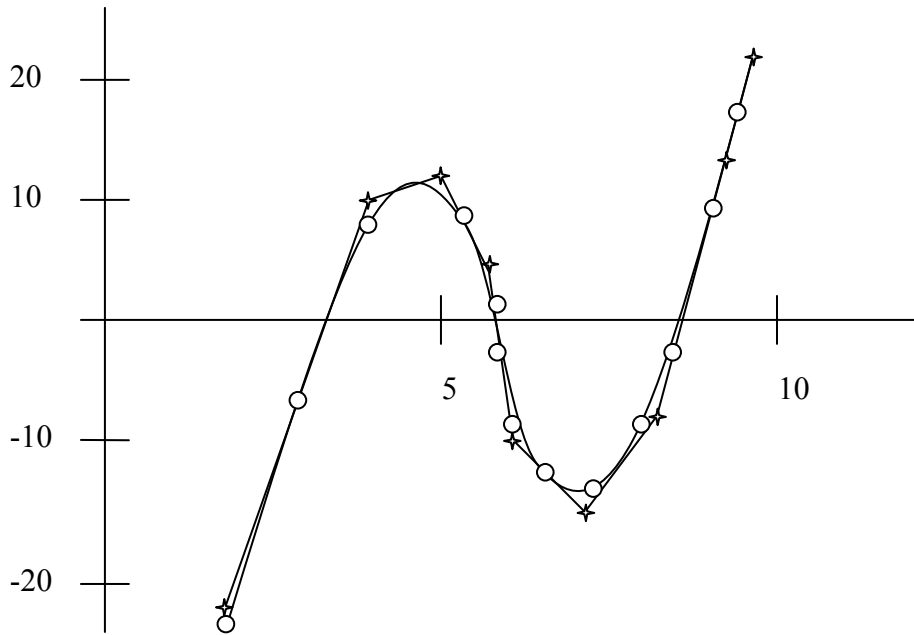
İç içe çarpım algoritma vasıtasıyla Newton formunda (4.37) sıfır civarında f 'in Taylor açılımı yani $D^i f(0)/i!$, $i = 1, 2, 3, 4$ sayıları bulunur. f için aşağıdaki bölünmüş fark tablosundan,

| x | $f(x)$ | 1.d.d | 2.d.d | 3.d.d |
|-----|--------|-------|-------|-------|
| 3 | . | . | . | 1 |
| 6 | . | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 0 | 18 | -3 | 1 |
| 0 | -162 | 99 | -9 | 1 |
| 0 | -162 | 99 | -18 | 1 |
| 0 | -162 | 99 | | |

$f(x) = -162 + x(99 + x(-18 + x))$ elde edilir. Bunlardan $f(\tau_{i+2}), f'(\tau_{i+2}), f''(\tau_{i+2})$ sayıları hesaplanır. (4.38) vasıtasıyla α_j 'ler hesaplanır.

$$t_{jk}^* = (t_{j+1} + \dots + t_{j+k-1})/(k-1) \quad (4.39)$$

ortalama değer noktalarında $\alpha_j \square f(t_{jk}^*)$ olarak f değeri hesaplanır. $1/2, 1, 3/2, \dots, 9, 19/2$ noktalarını alarak düğümlerin sayısını artırdığımızda daha hassas sonuçlara ulaşırız (Şekil 4.10).



Şekil 4.9. B-Spline katsayıları modeli ile fonksiyonun temsili $0..10]$ üzerindeki kübik bir polinom f ve onun B-Spline katsayıları (α_j) , $\alpha_j \approx f(t_{jk}^*)$ 'yi göstermektedir. \times işareti ile işaretlenen noktalar düzgün düğüm dizisi $0,1,\dots,10$ 'dan gelmektedir, \circ işareti ile işaretlenenler daha sık düğüm dizisi $0,1/2,\dots,10$ dan gelmektedir

Bu spline fonksiyon tanımı , bir kübik spline tanımıyla veya bir parabolik spline'ın tanımıyla tam olarak uyuşmaz. Spline teorisinin ilk zamanlarında (bkz. Schoenberg [1946]) k . mertebenin bir spline fonksiyonu $k-2$ sürekli türevleriyle birlikte (sınırlı veya sınırsız) aralık üzerinde ve yine k . mertebenin bir pp fonksiyonu olarak tanımlandı. Diğer bir deyişle Spline fonksiyon olabildiğince düzgün bir pp fonksiyonu ifade etti. Maksimum'dan daha az düzgünlükte olan pp fonksiyonlarının oldukça ilginç ve yararlı olduğu bulundu. Örneğin kübik Hermite interpolasyonu veya kübik Bessel interpolasyonu zaman zaman kübik spline interpolasyonuna tercih edilir. Bazıları maksimumdan daha az düzgün olan bu tür pp fonksiyonlarını yetersiz (eksik) spline olarak ifade eder. Bunlar katlı düğüm noktalıdırlar. Fakat "Spline" kelimesinin bu genişlemesi tüm pp fonksiyonlarını spline yapar.

4.4.4. B-Spline ve spline'ların kararlı-stabil hesaplanması

Bu bölümde B-Spline'ların ve B-Spline lineer bileşenleri ve B-Spline serileri incelenecek. Spline'ların integrali ve diferansiyeli üzerine ve onların ardışık olma bağıntısı yardımıyla stabil hesaplamaları üzerinde durulacak.

B-Spline B_i 'nin bölünmüş bir fark olarak doğrudan hesaplanması, çeşitli bölünmüş farkların hesaplanması süresince olası değer kaybı nedeni ile dikkatle yapılmalıdır. Ayrıca, tekrar veya katlı düğümler durumunda belli koşullar sağlanmalı.

Avantajlı olarak B-Spline'ları katlı düğümler için hiçbir özel düzenleme gerektirmeyen ve değer kaybına uğramayan ardışık olma bağıntısı yardımıyla hesaplamak mümkündür. B-Spline'lar yalnızca bu ardışık olma bağıntısının keşfinden sonra uygulanabilir bir hesaplama aracı oldular.

Ardışık olma bağıntısı, sıfır olmayan k . mertebeden B-Spline'ların x noktasındaki, aynı anda oluşan değerlerin üretimi için bir algoritmaya öncülük eder.

$t_i < t_{i+1}$ ve $x \in [t_i, t_{i+1}]$ olduğunu varsayalım. x noktasında otomatik olarak sıfır olmayan tüm B-Spline değerleri aşağıdaki ($B_{j_r}(x)$ yerine tabloyu basit tutmak için B_{j_r} yazarız) gibi üçgensel olarak sıralanır.

0 (sıfır)'ın bu tablodaki yeri, tabloda açıkça belirtilmeyen (k . mertebe veya daha azının) diğer tüm B-Spline'ların x noktasında sıfır olduğu anlamındadır.

Bu üçgensel tablo sütun sütun oluşturulacak, birinci sütun bilindiği için bir sonraki sütun içindeki her bir değer hesaplanabilir. Elbette bir sütunun birinci ve son sıfır olmayan girişini bulmak için aşağıdaki formüller kullanılır.

$$B_{j1} = \begin{cases} 1 & t_j \leq x \leq t_{j+1} \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad B_{jk} = \frac{x-t_j}{t_{j+k-1}-t_j} B_{j,k-1} + \frac{t_{j+k}-x}{t_{j+k}-t_{j+1}} B_{j+1,k-1}$$

Tablo 4.2. Sıfır olmayan $[t_i, t_{i+1}]$ üzerindeki $\leq k$ mertebe B-Spline larının üçgensel dizimi

| | | | | | |
|----------|-------------|-------------|---|-----------------|---------------|
| | | | | 0 | |
| | | | 0 | | |
| | | | . | | $B_{i-k+1,k}$ |
| | 0 | | . | $B_{i-k+2,k-1}$ | |
| | 0 | | . | | $B_{i-k+2,k}$ |
| 0 | | $B_{i-2,3}$ | . | $B_{i-k+3,k-1}$ | |
| | $B_{i-1,2}$ | | . | . | $B_{i-k+3,k}$ |
| B_{i1} | | $B_{i-1,3}$ | . | | . |
| | $B_{i,2}$ | | . | $B_{i-1,k-1}$ | . |
| 0 | | $B_{i,3}$ | . | | $B_{i-1,k}$ |
| | 0 | | . | $B_{i,k-1}$ | |
| | | 0 | . | | $B_{i,k}$ |
| | | | . | | |
| | | | 0 | | |
| | | | | | 0 |

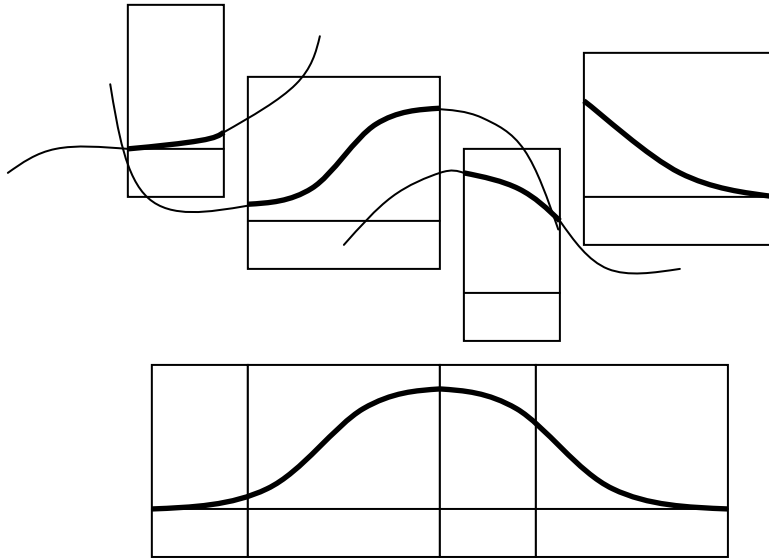
$B_{i-j+1,j}(x), \dots, B_{ij}(x)$ sayılarını $b := (b_r)_1^j$ vektörüne yazalım. $b' := (b'_r)_1^{j+1}$ $j+1$ gelecek sütun sayıları $B_{i-j,j+1}(x), \dots, B_{i,j+1}(x)$ ifadelerini içerir, (4.21) vasıtasıyla $b_0 := b_{j+1} := 0$ ile $r = 1, \dots, j+1$ için

$$b'_r = (x - t_{i-j+r-1}) \frac{b_{r-1}}{t_{i+r-1} - t_{i-j+r-1}} + (t_{i+r} - x) \frac{b_r}{t_{i+r} - t_{i-j+r}} \quad (4.40)$$

olarak hesaplanır. $\delta_{sj}^L := x - t_{i-j+s}$, $\delta_s^R := t_{i+s} - x$, $s = 1, \dots, k-1$ kısaltmalarını kullanarak (4.40) eşitliği

$$b'_r = \delta_{r-1,j}^L \frac{b_{r-1}}{\delta_{r-1,j}^L + \delta_{r-1}^R} + \delta_r^R \frac{b_r}{\delta_{rj}^L + \delta_r^R}, \quad r = 1, \dots, j+1 \quad (4.41)$$

biçiminde yazılır. Varsayım $t_i < t_{i+1}$, (4.41) içinde paydaların hiç birini sıfırlamaz.



Şekil 4.10. Dört kübik polinom birleşerek B-Spline fonksiyonunu oluşturur

4.4.5. B-Spline fonksiyonunun diferansiyeli ve integrali

$g(x) = (t-x)_+^{k-1}$ 'nin x 'e göre birinci türevi $D_x (t-x)_+^{k-1} = -(k-1)(t-x)_+^{k-2}$ 'dir.

Burada D ve D_x türev operatörleridir.

$$\begin{aligned} DB_{ik}(x) &= ([t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] - [t_i, \dots, t_{i+k-1}]) D_x (\cdot - x)_+^{k-1} \\ &= -(k-1) ([t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] - [t_i, \dots, t_{i+k-1}]) (\cdot - x)_+^{k-2} \\ &= (k-1) \left(\frac{-B_{i+1, k-1}(x)}{t_{i+k} - t_{i+1}} + \frac{B_{i, k-1}(x)}{t_{i+k-1} - t_i} \right) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$D \left(\sum_j \alpha_j B_{jk} \right) = (k-1) \sum_j \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{t_{j+k-1} - t_j} B_{j, k-1} \quad (4.42)$$

olur. Bu gösterir ki, bir spline fonksiyon $\sum_j \alpha_j B_{jk}$ 'nin birinci türevi onun B-Spline kat sayılarının diferansiyellerini alarak basitçe bulunabilir. (4.42) içindeki toplamada sınırlama yaparak kesin formül

$$D \left(\sum_{j=r}^s \alpha_j B_{jk} \right) = \sum_{j=r}^{s+1} (k-1) \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{t_{j+k-1} - t_j} B_{j,k-1}, \quad (4.43)$$

$$\alpha_{r-1} := 0 =: \alpha_{s+1}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan sabit aralık $[t_r..t_s]$ ile ilgilenirsek bu durumda

$$[t_r..t_s] \text{ üzerinde } \sum_j \alpha_j B_{jk} = \sum_{j=r-k+1}^{s-1} \alpha_j B_{jk} \quad (4.44)$$

ifadesinden aşağıdaki ifade elde edilir.

$$[t_r..t_s] \text{ üzerinde } D \left(\sum_j \alpha_j B_{jk} \right) = \sum_{j=r-k+2}^{s-1} (k-1) \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{t_{j+k-1} - t_j} B_{j,k-1}$$

$B_{j,k-1}$, $j \notin [r-k+2..s-1]$ için $[t_r..t_s]$ üzerinde özdeş olarak sıfırdır. Yani (4.43)'de olduğu gibi ilave kat sayılar getirilmesine gerek yoktur. (4.42)'nin tekrarlanan uygulaması bir spline'in m . türevi için aşağıdaki formülü üretir,

$$D^m \left(\sum_j \alpha_j B_{jk} \right) = \sum_j \alpha_j^{m+1} B_{j,k-m}$$

ile

$$\alpha_r^{(m+1)} := \begin{cases} \alpha_r, & m = 0 \text{ için;} \\ \frac{\alpha_r^{(m)} - \alpha_{r-1}^{(m)}}{(t_{r+k-m} - t_r)/(k-m)}, & m > 0 \text{ için.} \end{cases}$$

olarak hesaplanır. B-Spline fonksiyonlarının integrasyonu düşünüldüğünde, (4.42) formülünden şunu biliyoruz

$$D\left(\sum_i \beta_i B_{i,k+1}\right) = \sum_i k \frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{t_{i+k} - t_i} B_{ik}$$

Bu demek oluyor ki $\sum_i \alpha_i B_{ik}$, $k(\beta_i - \beta_{i-1})/(t_{i+k} - t_i) = \alpha_i$, (tüm i ler için) veya

$$\beta_i = \beta_{i-1} + \alpha_i(t_{i+k} - t_i)/k, \quad (\text{tüm } i \text{ ler için}) \quad (4.45)$$

şartıyla $\sum_i \beta_i B_{i,k+1}$ spline'ının ilk türevidir. Bu keyfi bir spline için integral içindeki bir B-Spline kat sayısının belirlenmesini sağlar ve diğer tüm kat sayılar (4.45) vasıtasıyla saptanır. $\sum_i \alpha_i B_{i,k}$ spline'ı için en genel integral, $\sum_i \beta_i B_{i,k+1}$ ile

$$\beta_i = c + \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i_0}^i \alpha_j (t_{j+k} - t_j)/k, & i \geq i_0; \\ -\sum_{i+1}^{i_0-1} \alpha_j (t_{j+k} - t_j)/k, & i < i_0, \end{array} \right\} \quad (4.46)$$

olmak üzere verilir, c ve i_0 keyfidirler.

Burada $\sum_i \alpha_i B_{ik}$ spline'ı sadece sınırlı düğüme sahipse uygun sıfır terimleri ilavesi ile sonsuz düğümlü bir spline olarak düşünemeyiz. Bu oldukça gereklidir; çünkü sınırlı birkaç düğümlü bir spline genellikle sınırlı düğümlü integrale sahip değildir. Gerçekten özel bir spline $f = \sum_1^n \alpha_i B_{ik}$ için (4.46) içerisindeki $c = 0$, $i_0 = 1$ i seçerek tüm $i < 1$ ler için $\beta_i = 0$ ile $\sum_i \beta_i B_{i,k+1}$ integrali yapılandırılabilir. Fakat sonra

$$i = n, n+1, \dots \text{ için } \beta_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j (t_{j+k} - t_j)/k$$

olur. Bu da şunu takip eder; eğer $\sum_1^n \alpha_j (t_{j+k} - t_j) = 0$ ise $\sum_1^n \alpha_i B_{ik}$ spline'ı sınırlı düğümlü bir spline'ın türevidir.

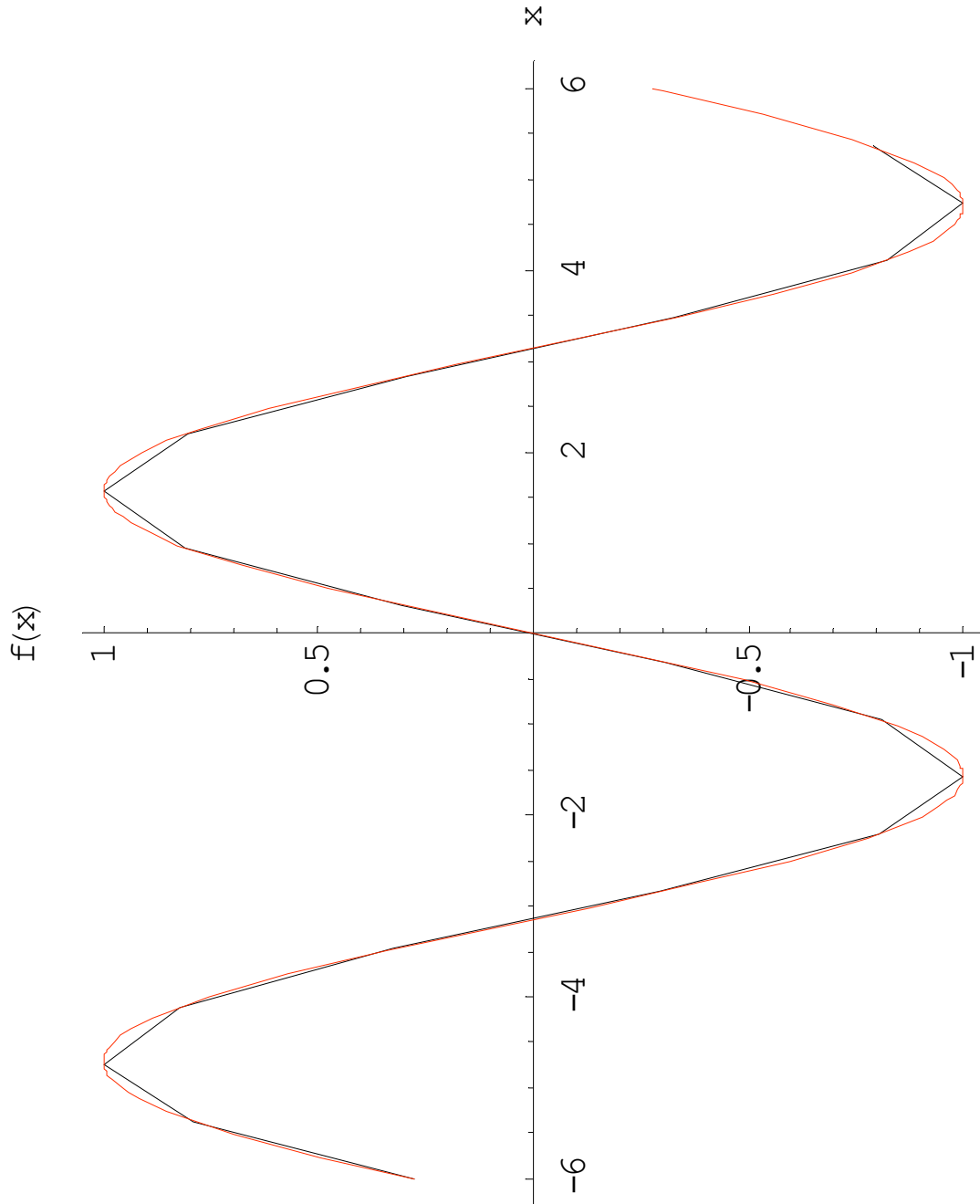
Düğümlerin sınırlı sayısını içeren aralık üzerinde integral $t_1 \leq x \leq t_s$ için

$$\int_{t_1}^x \sum_{i=1}^n \alpha_i B_{ik}(y) dy = \sum_{i=1}^{s-1} \left(\sum_{j=1}^i \alpha_j (t_{j+k} - t_j) / k \right) B_{i,k+1}(x)$$

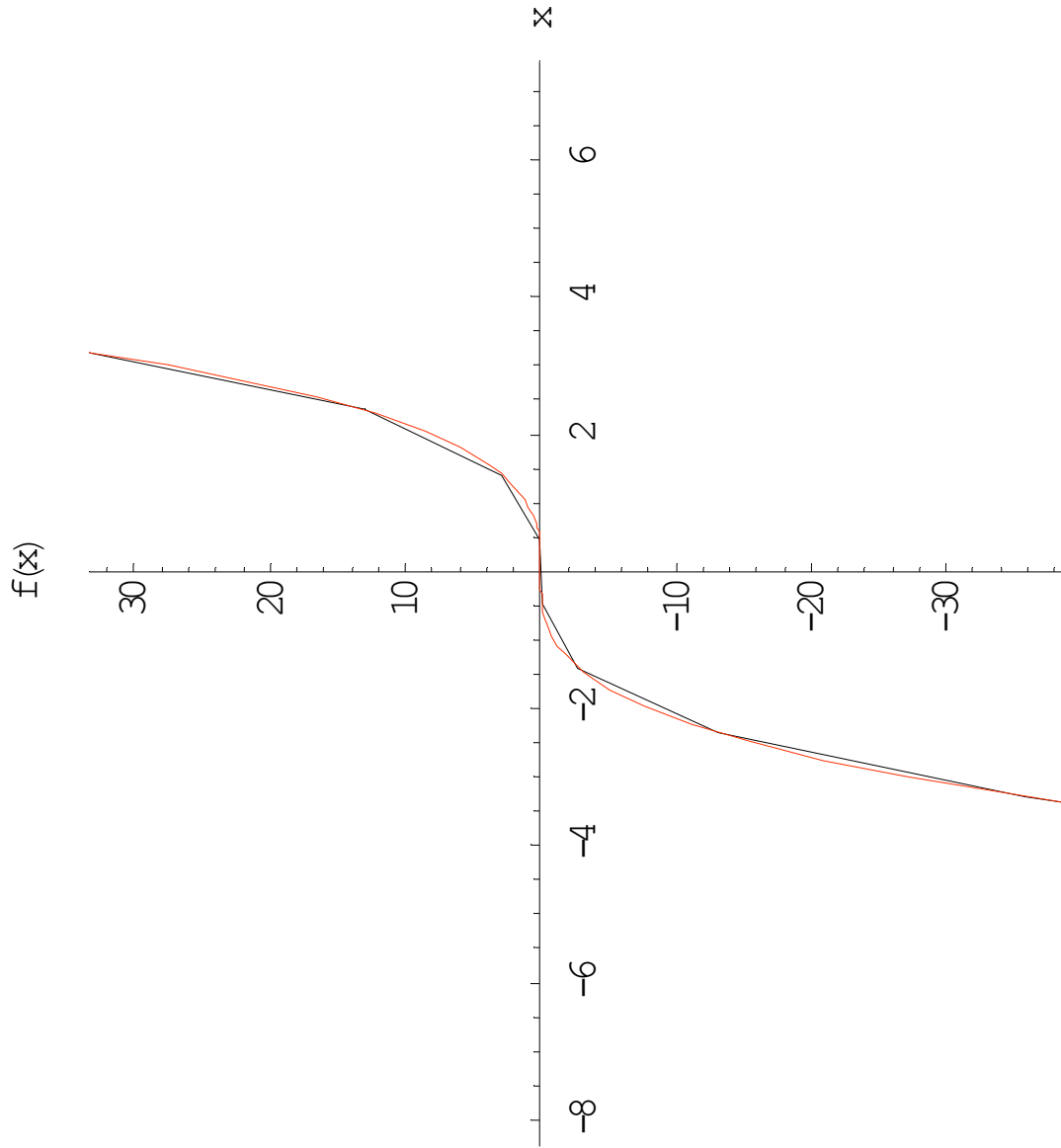
ifadesi ile hesaplanır.

4.4.6. B-Spline'lar yardımıyla çeşitli fonksiyonlara yaklaşım

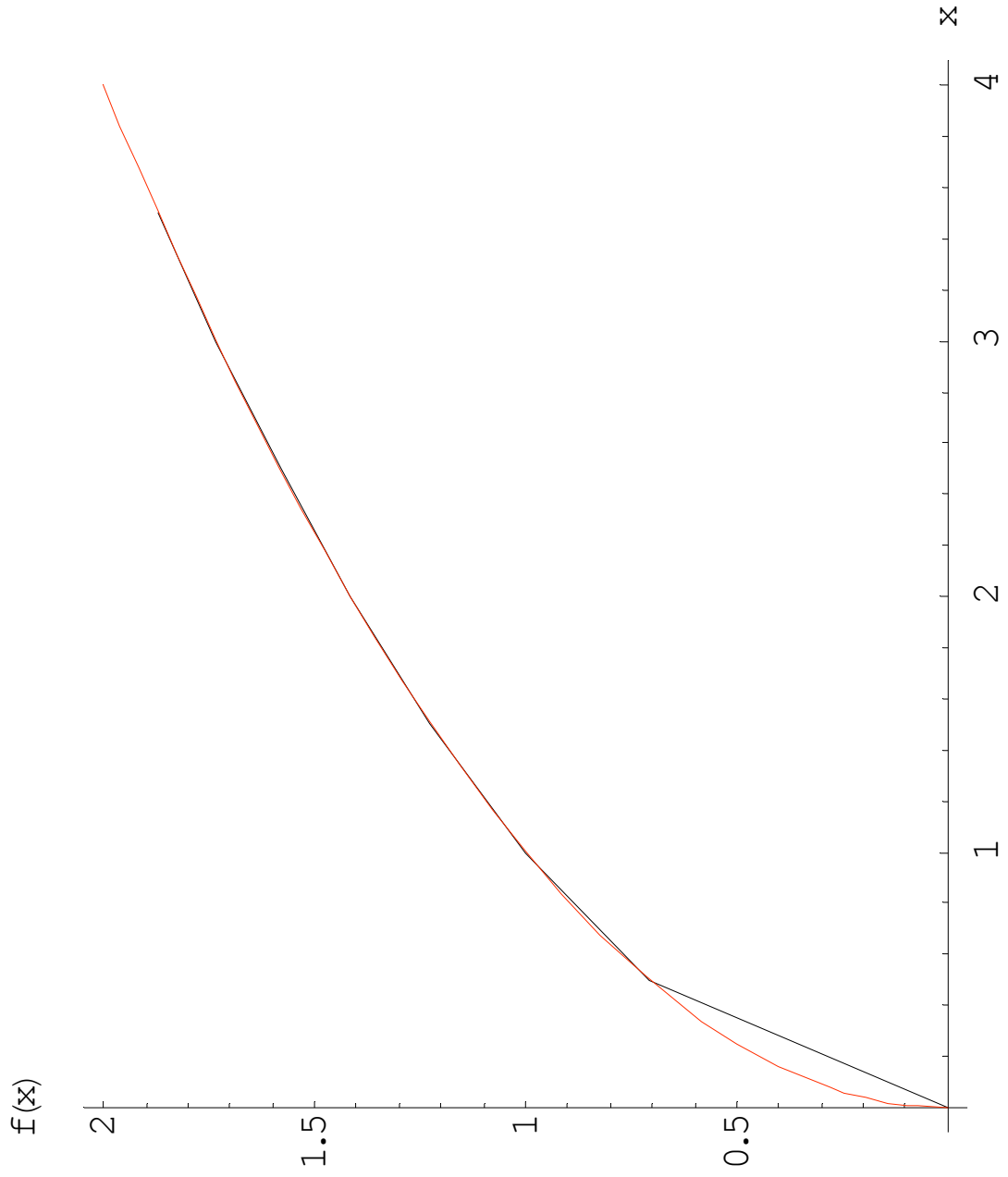
Bu bölümde $\sin x, \cos x, \sqrt{x}, x^3$ fonksiyonlarına B-Spline fonksiyonları yardımıyla yapılan yaklaşımlar şekillerle ifade edilecek.



Şekil 4.11. $f(x) = \sin x$ fonksiyonuna 5. mertebeden B-Spline'lar ile 20 nokta kullanılarak $[-6, +6]$ aralığında yapılan yaklaşım



Şekil 4.12. $f(x) = x^3$ fonksiyonuna 3. mertebeden B-Spline'lar ile 15 nokta kullanılarak $[-4, +4]$ aralığında yapılan yaklaşım



Şekil 4.13. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonuna 4. mertebeden B-Spline'lar ile 5 nokta kullanılarak $[0, 4]$ aralığında yapılan yaklaşım

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Spline fonksiyonları Yaklaşım teorisinde veri uydurmada, Sayısal integrasyonda, Adi, Kısmi diferansiyelde, integral denklemlerin sayısal çözümlerinde bir çok değişik şekilde kullanılan ve diğer yaklaşım yöntemlerine göre daha iyi sonuçlar veren fonksiyonlardır. Bu nedenle uygulama sahası çok geniştir.

Diğer interpolasyon metodlarına göre çok daha fazla avantajlıdır. Lagrange interpolasyonunda görülen çokça salınıma müsaade etmez ve yüksek mertebe interpolantlar yerine belirli(ki bu isteğe bağlıdır) mertebeyi geçmeyecek şekilde interpolasyon sağlar.

Eğri uydurmada eğrimizi en iyi temsil edebilme kabiliyeti en yüksek fonksiyon sınıfıdır. Çünkü konkavlığı en iyi olacak şekilde oluşmaktadır. Hesaplama teknikleri kolayca programlanabilmektedir. B-Spline'lar bazı vasıtasıyla yaklaşık denklem çözümleri hassas bir şekilde yapılabilmektedir. Bu örneklerde görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] DE BOOR, C., A Practical Guide to Splines Springer Verlag, New York/Berlin, 1978.
- [2] DE BOOR, C., ‘ On Calculating With B-splines ‘ J. Approximation Theory Vol 6 pp 50-62, 1972.
- [3] AHLBERG, J., H., NILSON, E., N., WALSH, J.,L., The Theory of Splines and Their Applications, 1967.
- [4] KINCAID, D., CHANEY, W., Numerical Analysis Mathematics of Scientific Computing, 1990.
- [5] SCHOENBERG, I., J., “On Spline Functions” In Inequalities (O.Shisha, ed.) 255-91, NewYork, Academic Press, 1967.
- [6] SCHULTZ, M., H., Spline Analysis Englewood Cliffs, N.J.:Prentice-Hall., 1973.
- [7] SCHUMAKER, L., L., Spline Functions. NewYork : Wiley-Interscience, 1981.
- [8] SCHWEIKERT, D., G., “An Interpolation Curve Using Splines In Tension” Journal Mathematics&Physics 45,312-317, 1966.

EKLER

Verilen bir fonksiyona, B-Spline fonksiyonları yardımıyla yapılan yaklaşımı gösteren bilgisayar programı.

```
k=5;JHIGH=k;ARSAY=20;DELTAR=Table[0,{40}];DELTAL=Table[0,{40}];HDELTAR=Table[0,{40}];HDELTAL=Table[0,{40}];HX=Table[0,{k+1}];FXX=Table[0,{ARSAY+k-1},{2}];
a=-6;b=6;BX=Table[0,{ARSAY+k-1},{ARSAY+k-1}];
T=Table[0,{ARSAY+2*k+1}];FX=Table[0,{ARSAY+k-1}];ÇÖZ=Table[0,{ARSAY+k-1},{2}];
DX=(b-a)/ARSAY;HDX=(b-a)/(NOKSAY-1);
Do[T[[i]]=a+(-k+i-1)*DX,{i,1,ARSAY+2*k+1}];
Do[If[T[[i]]==a,u=i],{i,1,ARSAY+2*k+1}];
DDX=(b-a)/(ARSAY+k-1);
Do[x=a+(i-1)*DDX;
  Do[If[T[[m]]≤x<T[[m+1]],LEFT=m],{m,1,ARSAY+2*k}];
  r=LEFT-u;
  J=1;BIAT=Table[0,{k}];BIAT[[1]]=1;
  Do[JP1=J+1;DELTAR[[J]]=T[[LEFT+J]]-x;DELTAL[[J]]=x-T[[LEFT+1-J]];SAVED=0;
    Do[TERM=BIAT[[I]]/(DELTAR[[I]]+DELTAL[[JP1-I]]);BIAT[[I]]=SAVED+DELTAR[[I]]*TERM;
      SAVED=DELTAL[[JP1-I]]*TERM
    ],{I,1,J}];BIAT[[JP1]]=SAVED
  ],{J,1,JHIGH-1}];
Do[BX[[{i},{r+n}]]]=BIAT[[n]},{n,1,k}];
FX[[{i}]]]=N[Sin[x]]; FXX[[i,1]]=x;FXX[[i,2]]=N[Sin[x]]
(* Print["x=",x," BIAT(x)=",BIAT]*),
```

```

    {i,1,ARSAY+k-1}];
Print["FXX=",FXX//MatrixForm];
CC=Inverse[BX].FX;
Do[x=a+(h-1)*DDX;
    Do[If[T[[m]]≤x<T[[m+1]],LEFT=m],{m,1,ARSAY+2*k}];
        q=LEFT-u;
        J=1;BIAT=Table[0,{k}];BIAT[[1]]=1;
        Do[JP1=J+1;HDELTA[[J]]=T[[LEFT+J]]-x;HDELTA[[J]]=x-
T[[LEFT+1-J]];SAVED=0;
            Do[TERM=BIAT[[I]]/(HDELTA[[I]]+HDELTA[[JP1-
I]]);BIAT[[I]]=SAVED+HDELTA[[I]]*TERM;
                SAVED=HDELTA[[JP1-I]]*TERM
                    ,{I,1,J}];BIAT[[JP1]]=SAVED
                        ,{J,1,JHIGH-1}];HX[[k+1]]=0;
                            Do[HX[[i]]=CC[[q+i]]*BIAT[[i]],{i,1,k}];
                                Do[HX[[k+1]]=HX[[k+1]]+HX[[i]],{i,1,k}];
                                    ÇÖZ[[h,{1}]]=x;ÇÖZ[[h,{2}]]={HX[[k+1]],{h,1,ARSAY+k-
1}];Print["ÇÖZ=",ÇÖZ//MatrixForm];

GR2=Plot[N[Sin[x]],{x,-6,6},PlotStyle→{Hue[0.03]},DisplayFunction→Identity];
GR1=ListPlot[ÇÖZ,PlotJoined→True,PlotStyle→PointSize[0.05],DisplayFunction→I
dentity];Show[GR1,GR2,AxesLabel→{"x","f(x)"},DisplayFunction→$DisplayFuncti
on];

```

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Samsun'da doğdu. İlk öğrenimini Adıyaman, orta ve lise öğrenimini Sakarya'da tamamladı. 1995 yılında girdiği Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi'ni 1999'da tamamladı ve aynı yıl Erzurum'da öğretmen olarak göreve başladı. Halen Sakarya Anadolu Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.