T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RASYONEL YAKLAŞIM TEORİSİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cemil KARAMAN

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Tez Danışmanı	:	Prof. Dr. Abdullah YILDIZ

Eylül 2007

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RASYONEL YAKLAŞIM TEORİSİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cemil KARAMAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 07 / 09 /2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.	**Yrd. Doç. Dr.**	**Yrd. Doç. Dr.**
Abdullah YILDIZ	**Ö. Faruk GÖZÜKIZIL**	**Yılmaz GÜNEY**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu tezi hazırlamamda benden hiçbir yardımı esirgemeyen ve bana en iyi şekilde yol gösteren sayın hocam Prof. Dr. Abdullah Yıldız'a teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca bu tezi hazırlamamda bana her konuda destek olan aileme ve dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

C_n	: Taylor seri açılımına sahip bir fonksiyonunun katsayılarının ilk n teriminin sürekli kesirlerle ifadesi
$C[a,b]$	: $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesi
$dist(v,M)$	: v 'nün M 'ye göre en yakın mesafesi
$\delta = dist(f, R_m^n)$	: R_m^n içerisinde f ’ye en yakın mesafesi
$e = f - R$	: Hata fonksiyonu
$E_v(M)$	: v 'nün M 'ye göre en yakın mesafesi
$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$	: Formal kuvvet serisi
$f_n(x)$	: Taylor seri açılımına sahip bir fonksiyonunun ilk n teriminin sürekli kesirlerle ifadesi
$L(P)$	: Lagrange enterpolasyon polinomu
∂P	: P polinomunun derecesi
$\partial P \leq n$	: Derecesi n-yi geçmeyen P polinomu
P	: Derecesi n-yi geçmeyen polinomlar uzayı
$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$	: Taylor polinomu
P_n	: Pade yaklaşımının payı
P_n/Q_m	: f fonksiyonunun (m,n) inci mertebeden Pade yaklaşımı
Q_m	: Pade yaklaşımının paydası
$R(x)$	: Rasyonel fonksiyon
$R_m^n[a,b]$	: $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı rasyonel fonksiyonlar kümesi

R_m^n : Payı-n, paydası-m dereceden olan rasyonel fonksiyonlar uzayı

$R_m^n = P_n(x)/Q_m(x)$: Payı-n, paydası-m dereceden olan Pade yaklaşımı

$U^{\perp}$: U'nun diki

$(X, \| \ \|)$: X kümesinde tanımlı normlu uzay

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Rasyonel Yaklaşım, Pade Yaklaşımı, Sürekli Kesirler

Yaklaşım teorisinde lineer olarak parametrelerin devreye girdiği problemler yanında parametrelerin lineer olmayacak şekilde ortaya çıkması mümkündür. Örneğin;

$$f(x) \approx \sin[\alpha(\log x)^{\beta}]$$

yaklaşımındaki parametrelerin hesaplanması gibi.

Bu tip problemler için bir teori geliştirmek çok zor olmaktadır. Çok kısıtlı şartlar altında genel teoriler verilebilmektedir. Bu teoriler polinom yaklaşımlarının belirli özelliklerini taşımaktadırlar. Rasyonel yaklaşımlar bunlara örnektir.

Pade yaklaşımları da, Taylor seri yaklaşım teorisini paylaşarak benzer gelişmeler sergilemiştir.

Varlık, teklik, karakterizasyon ve en iyi yaklaşım hesabı bu çalışmanın konusu olacaktır.

Pade teorisi ve sürekli kesirler konusunda örnekler işlenecektir ve uygulamalar yapılacaktır.

RATIONAL APPROXIMATION THEORY AND APPLICATIONS

SUMMARY

Key Words: Rational Approximation, Pade Approximation, Continuous Fractions

It is possible that the parameters occur as not to be linearly as much as the problems in which parameters occur as nonlinearly. For example the parameters as in the following approximation.

$$f(x) \approx \sin[\alpha(\log x)^{\beta}]$$

It is difficult to develop a theory for these problems. General theories can be given under very limited circumstances. These Theories carry out precise properties of polynomial approximations. Rational approximations can be given as an example for that.

Also Pade approximations display similar developments by sharing Taylor series approximation theory.

Existences, unicity, characterization and the best approximation computing methods will be the subject of this study.

Firstly, examples about Pade theory and continuous fraction will be studied and applied.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

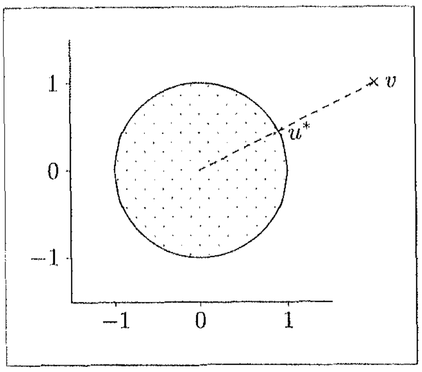
1.1. En İyi Yaklaşım

Tanım 1.1. : $(X, \| \, \|)$ normlu uzayı verilsin. $\varnothing \neq M \subset X$ olsun. $v \in X$ alalım. u^* elemanına v'ye M-en iyi yaklaşımı denir. Eğer,

$$u^* \in M \text{ , } \left\| u^* - v \right\| = \inf_{u \in M} \| u - v \| =: \mathbf{E}_v(M)$$

ise bu $\mathbf{E}_v(M)$ sayısına da v'nin M'ye göre en yakın mesafesi denir. $u^* \in M$ ise v'nün M de en iyi yaklaşımı olarak isimlendirilir. $\mathbf{E}_v(M) = dist(v, M)$ ile de gösterilir.

Örnek 1.1. :



$$X = \mathrm{IR}^2$$

$$\|v\| = \|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$M = \{x \in X : \|x\|_2 \leq 1\}$$

Şekil 1.1. En İyi Yaklaşımın Varlığı

Eğer $v=(2,1)$ ise $u^{*}=(2/\sqrt{5},1/\sqrt{5})$ M' nin v' ye en iyi yaklaşımıdır ve bu tek türlü belirlenir.

Örnek 1.2. : $X=C[0,1]$, $\|v\|=\|v\|_2=\max\limits_{t\in[0,1]}|v(t)|$, $M=\{e^{\beta t}:\beta>0\}$

$v\equiv\frac{1}{2}$ olsun. O zaman, $\left\|e^{\beta t}-v\right\|_{\infty}=e^{\beta}-\frac{1}{2}$ $(>\frac{1}{2})$, $\beta>0$ için v noktasının kümeye olan uzaklığı $\mathrm{E}_v(M)=\frac{1}{2}$ dir. Dolayısıyla bu v' ye en iyi yaklaşımda mevcut değildir.

Tanım 1.2. : $(X,\|\ \|)$ normlu uzayı verilsin. $\varnothing\neq M\subset X$ olsun. $(u_k)\in M$ dizisi v'ye M-minimize dizisi denir. Eğer,

$$\|u_k-v\|\to\inf_{u\in M}\|u-v\|=:\mathrm{E}_v(M),\ k\to\infty \text{ için.}$$

Eğer, bu dizi M içerisinde u^{*} yığılma noktasına sahip ise u^{*} v'ye M'ye göre en iyi yaklaşımdır.

Teorem 1.1. : Eğer, M kümesi $(X,\|\ \|)$ normlu uzayının kompakt bir alt kümesi ise her $v\in X$ için v'ye M-en iyi yaklaşımı mevcuttur.

Eğer, $U\subset X$ sonlu boyutlu lineer alt uzay ise yine en iyi yaklaşım vardır.

1.1.1. En iyi yaklaşımın tekliği

Teorem 1.1.1. : $\varnothing\neq M\subset X$ kesin konveks alt küme ise, her $v\in X$ için en fazla bir tane v'ye M-en iyi yaklaşımı vardır.

En iyi yaklaşımın varlığı, tekliği ve en iyi yaklaşımın bulunması metodu yaklaşım teorisinin esas konularıdır.

$$f(u) = \|u - v\| \to \min \quad u \in M \subset X$$

optimizasyon problemi bu formda tanımlanır.

1.2. İç Çarpım Uzaylarında Yaklaşım Teorisi

1.2.1. Lineer alt uzaylardaki en iyi yaklaşım

$M \subset X$, $M^{\perp} = \{y \in X : \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in M\}$ olsun.

Teorem 1.2.1. : $U \subset X$, X vektör uzayının bir alt vektör uzayı olsun. $u^* \in U$, $v \in X$ 'e en iyi yaklaşımdır ancak ve ancak $u^* - v \in U^{\perp}$ ise.

İspat : $\Leftarrow$: $u^* - v \in U^{\perp}$ ve keyfi bir $u \in U$ için,

$$\begin{aligned}
\|u - v\|^2 &= \|u^* - v + u - u^*\|^2 \\
&= \|u^* - v\|^2 + 2\underbrace{\langle \overbrace{u^* - v}^{\in U^{\perp}}, \overbrace{u - u^*}^{\in U}\rangle}_{=0} + \underbrace{\|u - u^*\|^2}_{\geq 0} \\
&\geq \|u^* - v\|^2
\end{aligned}$$

olduğundan u^*, v için U da en iyi yaklaşımdır.

$\Rightarrow$: $u^* - v \notin U^{\perp}$ olmasın. O zaman, $\psi \in U$ vardır ki $\langle u^* - v, \psi\rangle \neq 0$ dır. $\langle u^* - v, \psi\rangle < 0$ olsun. $0 < t << 1$ alırsak

$$\begin{aligned}
\|u^* + t\psi - v\|^2 &= \|u^* - v\|^2 + \underbrace{2t\langle u^* - v, \psi\rangle + t^2\|\psi\|^2}_{\text{0<t<<1 için 0}} \\
&< \|u^* - v\|^2
\end{aligned}$$

O zaman, u^* en iyi yaklaşım olamaz. $\square$

Teorem 1.2.2. : $u_1, u_2, ..., u_m$, sonlu boyutlu U'nun bir bazı olsun. O zaman, $u^* \in U$ 'yu $u^* = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j$ olarak yazabiliriz. $\alpha_1, ..., \alpha_m$ aşağıdaki lineer denklem sisteminden çözülür.

$$\sum_{j=1}^{m} \langle u_j, u_k \rangle \alpha_j = \langle v, u_k \rangle_2 \ , \quad k = 1,2,...,m \tag{1.2.1}$$

İspat : $w \in U^{\perp} \Leftrightarrow \langle w, u_k \rangle = 0 \quad k = 1,2,...,m$ için.

□

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_1, u_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_m, u_1 \rangle & \dots & \langle u_m, u_m \rangle \end{bmatrix}}_{=:G}$$

matrisine Gram matrisi denir ve simetriktir. $\alpha^T G \alpha = \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \right\|^2$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)^T \in IR^m$ olup pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla (1.2.1) denklemine en iyi yaklaşım için normal denklem adı verilir.

$u_1, ..., u_m$ vektörlerine U alt uzayının ortonormal bazı denir. Buna göre,

$$u^* = \sum_{k=1}^{m} \langle v, u_k \rangle u_k$$

en iyi yaklaşım olur.

BÖLÜM 2. RASYONEL YAKLAŞIM

2.1. Giriş

Yaklaşım teorisinde lineer olarak parametrelerin kullanıldığı problemlerin yanı sıra parametrelerin lineer olarak ortaya çıkmadığı durumlarda mümkündür. Mesela;

$$f(x) \approx \cos[\alpha(\log x)^{\beta}]$$

yaklaşımındaki parametrelerin hesaplanması gibi.

Bu tip problemler için bir teori geliştirmek çok zor durumlar oluşturmaktadır. Çok kısıtlı şartlar altında genel teoriler verilebilmektedir. Bu teoriler polinom yaklaşımlarının belirli özelliklerini taşımaktadırlar. Rasyonel yaklaşımlar bunlara örnektir.

Varlık, teklik, karakterizasyon ve en iyi yaklaşım hesabı sonraki esas konularımız olacaktır.

Rasyonel fonksiyonları ilk önce aşağıdaki şekilde

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} \tag{2.1.1}$$

kuralım. Burada $R(x)$ içinde $n+m+2$ bilinmeyen katsayı vardır. Pay ve paydayı $b_0 \neq 0$ ile bölerek $n+m+1$ serbestlik derecesi elde edilir. Bu ise, $R(x)$-leri bir alt uzay olarak düşünüldüğünde yaklaşım teorisi açısından $n+m$ dereceden bir polinomun yaklaşımını temin edilir.

$R(x)$ aşağıdaki şekilde bir sürekli kesir şekline dönüştürülebilir.

$$R(x) = P_1(x) + \cfrac{c_2}{P_2(x) + \cfrac{c_3}{P_3(x) + \ddots + \cfrac{c_k}{P_k(x)}}}$$

Bu haldeki bir kesrin hesaplanması daha az işlem gerektirdiği için önemlidir. $\max\{n, m\}$ işlemle sonuç alınabilir.

Örnek 2.1. : $R(x) = \dfrac{2x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 4}{x^3 - 2x^2 - x + 5}$

$$= 2x + \frac{2x - 4}{x^3 - 2x^2 - x + 5}$$

$$= 2x + \cfrac{2}{\cfrac{x^3 - 2x^2 - x + 5}{x - 2}}$$

$$= 2x + \cfrac{2}{x^2 - 1 + \cfrac{3}{x - 2}}$$

2.2. En İyi Yaklaşımın Varlığı

Aşağıdaki yaklaşım problemi ele alınsın. Bir fonksiyon $f \in C[a, b]$ ve bir çift tamsayı $n \geq 0, m \geq 0$ verilsinler.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$
$$\qquad (2.2.1)$$
$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

olmak üzere $R \equiv P/Q$ şeklinde fonksiyonlarla f ye en iyi yakın elemanı belirlemeye çalışılır. Fonksiyonlarımız R içinde sadeleştirilmeyen P/Q formunda olsunlar. Sonra $R \equiv P/Q$ da Q'nun $[a,b]$ üzerinde kökünün olmaması şart koşulsun. Böylece sürekli fonksiyonların yaklaşımı için $[a,b]$ üzerinde $Q(x) > 0$ kabulü şeklinde genelleme de yapılabilir. Rasyonel fonksiyonların kümesi $\mathrm{R}_m^n[a,b]$:

$$\mathrm{R}_m^n[a,b] := \left\{ \frac{P}{Q} : \partial P \le n, \partial Q \le m, [a,b] \text{ de } Q(x) > 0 \right\} \qquad (2.2.2)$$

ile belirtilir. Burada $\partial 0 = -\infty$ kuralıyla ∂P, P nin derecesini gösterir. Q'nun daha fazla sadeleştirilemeyen haliyle olduğunu kabul edilebilir. Hemen R_m^n de en iyi yaklaşımların varlığı sorusuyla göz göze gelinir. Daha önceki teoremlerden varlığı garantileyen kümelerin kompakt kümeler olduğunu biliniyor. Mesela, derecesi n'yi geçmeyen polinomlar f-ye en iyi yaklaşım elbette ki

$$\{ P : \partial P \le n, \|f - P\| \le \|f\| \} \qquad (2.2.3)$$

kompakt kümesinde bulunmaktadır. En azından sıfırla olan yaklaşımın sağlandığı kadar P - lerin f yaklaşımı sağlanmalıdır. Aynı şeyler mevcut durumlarda doğru değildir.

Aslında

$$\{ R \in R_m^n : \|R - f\| \le \|f\| \} \qquad (2.2.4)$$

kümesi genel olarak kompakt değildir (Buradaki norm düzgün normdur). Bu iddiayı destekleyecek basit bir örnek rasyonel fonksiyonların

$$R_k(x) = \frac{1}{kx+1} \qquad (k = 1,2,3,\ldots) \tag{2.2.5}$$

dizisiyle verilmiştir. $[0,1]$ aralığında $\|R_k\| \le 1$ dir. Eğer onlardan yakınsak bir alt dizi çıkarmak mümkün olsaydı, limit fonksiyonu sürekli olmak zorunda olurdu. Fakat $x = 0$ için $R_k(0) = 1$, $x > 0$ için $R_k(x) \to 0$ dır. Yani limit fonksiyon süreksizdir. Bu yorumlara rağmen, kompaktlık varlık teoreminde önemli bir rol oynar.

Varlık Teoremi : $f \in C[a,b]$ deki her fonksiyona $\mathrm{R}_m^n[a,b]$ den en azından bir en iyi yaklaşım karşılık gelir.

İspat : $\delta = dist(f, \mathrm{R}_m^n)$ olsun. R_k, R_m^n içerisinde $\|R_k - f\| \to \delta$ olacak şekilde bir dizi olsun. $R_k = P_k / Q_k$ formundadır ve $\partial P_k \le n, \partial Q_k \le m$ dir. $\|Q_k\| = 1$ alalım ve $Q(x) > 0$ dır. $[a,b]$ de $\|R_k - f\| \le \delta + 1$ bütün k indislerinde sağladığını kabul edelim, eğer böyle değilse bunu sağlayan bir alt dizi seçilebilir. Sonuç olarak , $\|R_k\| \le \|R_k - f\| + \|f\| \le \delta + 1 + \|f\| \equiv \theta$ dir. $|P_k(x)| = |Q_k(x)|\,|R_k(x)| \le \|Q_k\|\,\|R_k\| \le \theta$ olduğundan (P_k, Q_k) çifti $\|P\| \le \theta$ ve $\|Q\| = 1$ olan kompakt kümesinin içinde kalırlar. $P_k \to P$ ve $Q_k \to Q$ olarak yakınsasın. Bunun için gerekirse bir alt dizi kullanılabilir. $\|Q\| = 1$ olduğundan $Q(x_i) = 0$ şartını sağlayan en fazla m tane nokta olabilir ve bunun dışındaki noktalarda $P(x)/Q(x)$ iyi tanımlıdır. $P_k(x)/Q_k(x) \to P(x)/Q(x)$ 'e gider. $|P(x)/Q(x)| \le \theta$ olur veya $|P(x)| \le \theta |Q(x)|$ olur. Süreklilikten dolayı bu bütün $x \in [a,b]$ için doğrudur. Sonuç olarak Q'nun sıfırları P'nin de sıfırları olur. Buna tekabül eden lineer çarpan P ve Q dan sadeleştirilebilir. Bu sadeleştirme işlemine sonlu defa devam edilebilir. Bu işleme Q' nun sıfırı kalmayana kadar devam edilir. Sonuçta elde edilen elemana R diyelim. $R_k \to R$ olduğundan $\|R - f\| = \delta$ dır.

$\square$

Eğer varlık teoremi genel rasyonel fonksiyonlara

$$\frac{a_0 g_0(x)+\cdots+a_n g_n(x)}{b_0 h_0(x)+\cdots+b_m h_m(x)}=R(x) \qquad (2.2.6)$$

daki gibi genelleştirilmeye çalışılırsa sorunlarla karşılaşacaktır. Çünkü çarpanlara ayırma tekniği artık geçerli olmayacaktır.

Tanım 2.2.1. : g_i ve h_i'nin bütün fonksiyonları $[a,b]$ de analitik olsun. Böylece herhangi bir $x \in [a,b]$ noktasında her fonksiyon x' in komşuluklarında Taylor açılımına sahip olur. **R** kümesi

$$R(x)\sum b_i h_i(x)=\sum a_i g_i(x) \quad (\sum |b_i| \neq 0) \qquad (2.2.7)$$

formunun eşitliğini sağlayan $[a,b]$ de bütün R sürekli fonksiyonlarını temsil etsin.

Teorem 2.2.1. : $C[a,b]$deki her fonksiyon **R**'de en iyi yaklaşıma sahiptir.

İspat : $\{h_0,\ldots,h_m\}$ kümesinin lineer olarak bağımlı ise $\mathbf{R}=C[a,b]$ olur ve teorem açıktır. $R_k \in \mathbf{R}, \|f-R_k\| \to dist(f,R)$ olacak şekilde seçelim. R' nin tanımı $\{g_0,\ldots,g_n\}$ lineer gerenindeki P_k fonksiyonu ve $\{h_0,\ldots,h_m\}$ lineer gerenindeki Q_k fonksiyonu için $R_k Q_k = P_k$ ve $Q_k \neq 0$ dır. $\|f-R_k\| \to \delta,$ $\|R_k\|$ sınırlı olduğundan $\|Q_k\|=1$ varsayımı genellenebilir. Kompaktlıktan , $Q_k \to Q$ ve $P_k \to P$ olduğu varsayılsın. Açıkça $\|Q\|=1$ dir. Burada Q'nun $[a,b]$ de en fazla belirli bir sayıda sonlu sıfırı olduğunu ispatlayalım. $[\alpha,\beta]$ alt aralığında Q'nun sıfırlandığı farz edilsin. $\beta-\alpha$ 'nın maksimum olduğu varsayılsın. Q , $[a,b]$ de sıfır olmadığından bizim alt aralığımız $[a,b]$ de mevcuttur. Mesela , $\alpha > a$ diyelim. Q'nun Taylor yaklaşımı $Q(x)=\sum c_k (x-\alpha)^k$ olsun ve bu eşitlik N'nin α olan komşuluğunda geçerli olsun. $\beta-\alpha$ maksimal olduğundan N'nin $Q(x)\neq 0$ olduğu bir noktası vardır. c_k katsayıları sıfırlanmadığından c_ν 'yü bunlarda ilk sıfırı olmayanı kabul edelim. Öyleyse

$$Q(x)=(x-\alpha)^{\nu}\left\{c_\nu+(x-\alpha)\left[c_{\nu+1}+c_{\nu+2}(x-\alpha)+\cdots\right]\right\} \tag{2.2.8}$$

dir. Bu eşitlikten bütün x' lerin α 'ya yakın olduğu yerlerde fakat α 'dan farklı olduğu yerlerde $Q(x)\neq 0$ dır. B köşeli parantez içinin üst sınırı olsun. x, N'de değişmektedir. Eğer, $0<|x-\alpha|B<|c_\nu|$ ve $x\in N$ ise $Q(x)\neq 0$ dır. Böylece (α,β) içinde bazı noktalarda $Q(x)\neq 0$ olmasıyla çelişki oluşur. Farz edelim ki Q , $[a,b]$ de sonsuz sayıda sıfırı sahip. Kompaklıkta sıfırların bir yakınsak dizisi vardır; $z_k\to z$ olduğu şekilde Q hiçbir aralıkta sıfırlanmadığı için Q'nun Taylor serisi tanımlanmış değildir. α noktasıyla ilerlediğimizde Q , z_k'da sıfırlanmaz. $Q(x)\neq 0$ olduğu x noktasında $R(x)=P(x)/Q(x)$ şeklinde tanımlanır ve R süreklidir. Dahası bu nedenle $R(x)=\lim R_k(x)$ $|R(x)-f(x)|\leq\delta$ olduğundandır. $Q(z)=0$ olduğu herhangi bir z noktasında Taylor serisi,

$$Q(x)=\sum_{k\geq\nu}c_k(x-z)^k \text{ ve } P(x)=\sum_{k\geq\mu}d_k(x-z)^k, c_\nu d_\mu\neq 0 \tag{2.2.9}$$

şeklinde yazılır. $|R(x)|$ bütün z'nin yakınındaki x-ler için fakat z'den farklı $\delta+\|f\|$ olan durumlarda $\mu\geq\nu$ sonucuna varılır. Böylece $P(x)/Q(x)$ bölümü z komşuluğunda

$$R(x)=\frac{d_\mu(x-z)^{\mu-\nu}+d_{\mu+1}(x-z)^{\mu-\nu+1}+\cdots}{c_\nu+c_{\nu+1}(x-z)+c_{\nu+2}(x-z)^2+\cdots} \tag{2.2.10}$$

daki gibi yazılır. Açıkça R, z'de süreklidir ve R' nin elemanıdır. $Q(x)\neq 0$ olduğunda $|R(x)-f(x)|\leq\delta$ olduğunda R süreklidir. Bu eşitsizlik $Q(x)=0$ noktalarında geçerlidir. Bu yüzden $\|R-f\|\leq\delta$ dir.

Sonuç olarak en iyi yaklaşımın varlığı rasyonel trigonometrik fonksiyonlar için, aşağıdaki formda ifadesini bulan ve çokça kullanılan haliyle verilsin.

$$R(\theta)=\frac{\sum_{j-0}^{n}(a_j\cos j\theta+b_j\sin j\theta)}{\sum_{j-0}^{m}(c_j\cos j\theta+d_j\sin j\theta)} \tag{2.2.11}$$

Eğer interval $[-\pi,\pi]$ alınırsa, en iyi yaklaşım teoreminde payda daima pozitif olur. Bu da meselenin en önemli noktasıdır.

2.3. En İyi Yaklaşımın Karakterizasyonu

Bu kısımda, genelleştirilmiş rasyonel yaklaşımlar için karakterizasyon teoremi oluşturmak isteniyor. En iyi yaklaşım hata eğrisinin salınımlarıyla ilgili olarak verilecektir. $C[X]$den **P** ve **Q** sonlu boyutlu alt uzaylarını seçelim. Burada X kompakt bir küme. Daha sonra bu *X'* i reel sayı aralığı alacağız. X üzerinde **Q**'nun pozitif olan bir fonksiyonunun bulunduğu kabul edilsin. Bu durumda yaklaşım için kullanacağımız fonksiyon ailesi $R=P/Q$ tipindeki fonksiyonları içeren **R** kümesi olur. Burada $P\in\mathbf{P},Q\in\mathbf{Q}$ ve $Q(x)>0$ dır.

R kümesinin bu tip fonksiyonlarına genelleştirilmiş rasyonel fonksiyonlar denir. Eğer $f\in C[X]$ ise **R** içerisinde f -ye en iyi yaklaşım bulunabilir veya bulunmayabilir. Bulunduğunu varsayalım. Daha önceden varlığını garanti ettiğimiz bir hal, **P** derecesi n'yi geçmeyen polinomlar, **Q** derecesi m'yi geçmeyen polinomlar ve X bir sayı aralığı olduğu haldir. Diğer bir durumda **Q**, 1 boyutlu bir uzay, **P** ise keyfi bir uzay olmak üzere daha önce bilinen lineer bir yaklaşıma indirgemektir. En genel halde varlık teoremi garantilenememesine rağmen **R'**den en iyi yaklaşımı karakterize edilebilir. **R'**de sabit bir R elemanı verilsin.

$$\mathbf{P}+R\mathbf{Q}=\{P+RQ:P\in\mathbf{P}\ ve\ Q\in\mathbf{Q}\}$$

Bu $C[a,b]$ nin bir lineer alt uzayıdır. Eğer **P**'nin bazı $\{g_1,\ldots,g_n\}$ ve **Q**'nun bazı da $\{h_1,\ldots,h_n\}$ ise bu uzay,

$$\{g_1,\ldots,g_n,Rh_1,\ldots,Rh_n\}$$

bazı tarafından gerilir. Fakat **P** $+R$ **Q**'nun boyutu en fazla $n+m-1$ dir. Çünkü eğer $R=\sum a_i g_i \big/ \sum b_i h_i$ yazılırsa,

$$\sum a_i g_i - \sum b_i R h_i = 0$$

dan dolayı bunlar lineer bağımlı olurlar. Bunun için boyutu en fazla $n+m-1$ dir.

Karakterizasyon Teoremi : $R \in \mathbf{R}$, $f \notin$ **R'**ye en iyi yaklaşımdır ancak ve ancak

$$Y=\{y : |f(y)-R(y)| = \|f-R\|\}$$

kritik noktaları kümesinde $f-R$ ile aynı işarete sahip olan hiçbir $\phi \in \mathbf{P}+R\mathbf{Q}$ fonksiyonunun bulunmamasıdır.

Teorem 2.3.1. : $R \in \mathbf{R}$, $f \notin$ **R'**ye en iyi yaklaşımdır ancak ve ancak $x_i \in X$ sayıları ve $\lambda_i \neq 0$ skalerleri için eğer,

1) $f(x_i)-R(x_i)=(\operatorname{sgn}\lambda_i).\|f-R\|$

2) $\sum \lambda_i \emptyset(x_i)=0$ her $\phi \in \mathbf{P}+R\mathbf{Q}$

oluyorsa.

Teorem 2.3.2. : $R \in \mathbf{R}$, f - ye en iyi yaklaşımdır ancak ve ancak n boyutlu uzayın sıfırı aşağıdaki kümenin konveks kabuğu içerisinde ise

$$\left\{\delta(x)\hat{x} : \left|f(x)-R(x)\right| = \left\|f-R\right\|\right\}$$

burada $\delta(x) = \operatorname{sgn}\left[f(x)-R(x)\right], \hat{x} = \left[\Phi_1(x),\ldots,\Phi_n(x)\right]$ ve $\mathbf{P}+R\mathbf{Q}$'nun bir bazıdır. Eğer, Haar şartlarını sağlayan bir alt uzayda yaklaşım yapılıyorsa hata fonksiyonunun salınımları burada da kullanılabilir. Haar şartlarını sağlayan bir alt uzay, özel bir alt uzaydır. $C\left[a,b\right]$ nin Haar alt uzayı sonlu boyutlu bir alt uzay olup baz fonksiyonları Haar şartlarını sağlarlar. M bir Haar alt uzayı olup, eğer $\left\{g_1,\ldots,g_n\right\}$ M'nin bir bazı ise,

$$\begin{vmatrix} g_1(x_1)\ldots g_n(x_1) \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ g_1(x_n)\ldots g_n(x_n) \end{vmatrix}$$

determinantı sıfır olmayacak şekilde ($a \le x_i \le b$ farklı) noktaları vardır ve bu özellik M nin baz seçiminden bağımsızdır. *M, n* boyutlu bir Haar alt uzayıdır, ancak ve ancak $\left[a,b\right]$ içerisinde *n* veya daha fazla köke sahip sadece sıfır fonksiyonu ise.

M alt uzayı ister Haar uzayı olsun veya olmasın elemanlarının işaret değiştirmeleri en küçük üst sınırı sadece M uzayına bağlı olsun. Bunu $\nu(M)-1$ ile gösterelim. $\nu(M) = 1 + \{M$ nin elemanları tarafından işaret değişimlerinin maksimum sayısı$\}$. $\nu(M)$'nin $+\infty$ olması da mümkündür. $\delta(M), M$'nin boyutu olsun. Her M Haar alt uzayı $\delta(M) = \nu(M)$ eşitliğini sağlarlar. Son olarak, M nin herhangi alt uzayları da Haar alt uzayı olarak görülebilir. $\eta(M)$ bunlar arasındaki en büyük boyuta sahip olsun. Eğer $\delta(M) = \eta(M)$ ise bu uzay Haar alt uzayıdır.

Özetle, $\delta(M) = M$ nin boyutu, $\nu(M) = 1 + \{M$ nin elemanlarının sahip olduğu işaret değişimlerinin maksimum sayısı$\}$, $\eta(M) = \max\{\delta(H) : H, M'\text{nin Haar alt uzayı}\}$ dır.

R'nin bir *R* elemanı verilsin. $\mathbf{P}+R\mathbf{Q}$ alt uzayı oluşturulsun. $\nu(\mathbf{P}+R\mathbf{Q})$ ve $\eta(\mathbf{P}+R\mathbf{Q})$ indisleri sadece *R*'ye bağlıdırlar. Hatırlayalım ki, bir *e* fonksiyonu *k* tane işaret değişimine sahip olması $x_1 < \cdots < x_k$ noktaları $e(x_i) = (-1)^i \lambda, |\lambda| = \|e\|$ şartlarıyla mevcut olması demektir.

İşaret Değişim Teoremi (Alternation Teoremi) : Eğer hata fonksiyonu $e = f - R$ en az $1 + \nu(\mathbf{P} + R\mathbf{Q})$ tane işaret değişimine sahip ise bu *R*, f 'ye en iyi yaklaşımdır. Eğer *R*, *f*'ye en iyi yaklaşım ise o zaman *e* hata fonksiyonu en az $1 + \eta(\mathbf{P} + R\mathbf{Q})$ tane işaret değiştirir. Bu genel yaklaşım polinom yaklaşımlar içinde doğrudur.

Bu teorem genel rasyonel yaklaşım için en iyi yaklaşımı tam olarak karakterize etmektedir ve bunun ancak η ve ν sayılarının eşitliğine bağlamaktadır. Bu adi rasyonel yaklaşım içinde aşağıdaki lemma da olduğu gibi doğrudur.

Lemma : **P** ve **Q** dereceleri *m*'yi ve *n*'yi geçmeyen polinomlar kümesi olsunlar. $[a,b]$ üzerinde $R = \dfrac{P}{Q}$, $P \in \mathbf{P}$, $Q \in \mathbf{Q}$ ve $Q > 0$ ve P/Q sadeleştirilemez olsun. $\mathbf{P} + R\mathbf{Q}$ bir Haar uzayıdır ve boyutu $1 + \max\{n + \partial Q, m + \partial P\}$ dir.

Sonuç : P/Q sadeleşemez rasyonel fonksiyonları $\mathrm{R}_m^n[a,b]$ sınıfında f 'ye en iyi yaklaşım olması için gerek ve yeter koşul hata fonksiyonu en az $1 + \max\{n + \partial Q, m + \partial P\}$ defa altarne etmesidir(işaret değiştirmesidir).

2.4. En İyi Yaklaşımın Tekliği

Teklik Teoremi : f fonksiyonu için **R**'den en iyi yaklaşım *R* olsun. Eğer, $\mathbf{P} + R\mathbf{Q}$ bir Haar alt uzayı ise *R* tektir.

R'de en iyi yaklaşım tek ama $\dfrac{P}{Q}$ formunda temsil asla tek değildir.

Kuvvetli Teklik Teoremi : f fonksiyonu için **R** den en iyi yaklaşım R^* olsun. Eğer, $\eta(\mathbf{P} + R^*\mathbf{Q}) = \delta(\mathbf{P}) + \delta(\mathbf{Q}) - 1$ ise tüm $R \in$ **R** için $\gamma > 0$ sabiti vardır ki

$$\|f-R\| \geq \|f-R^*\| + \gamma \|R-R^*\|$$

dir.

2.5. Algoritma

$f \in C[a,b]$ verilsin. Genelleştirilmiş rasyonel fonksiyonların $R = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{a_0 g_0 + \cdots + a_n g_n}{b_0 h_0 + \cdots + b_m h_m}$ olduğu kabul edilsin. Burada $[a,b]$ aralığında $Q(x) > 0$ dır. a_i ve b_i parametrelerinin değiştirilmesiyle oluşan tüm R lerin kümesi **R** ile gösterilir. En basit algoritma lineer eşitsizlikler sisteminin kullanılmasıdır. Belirli bir ε için $|f(x) - R(x)| \leq \varepsilon$ olması isteniyor. $R = \dfrac{P}{Q}$ dur. Pay ve paydayı uygun bir pozitif sayıyla çarparak $Q(x) \geq 1$ yapılabilir. $-\varepsilon \leq f(x) - R(x) \leq \varepsilon$ eşitsizliği $-\varepsilon Q(x) \leq f(x)Q(x) - P(x) \leq \varepsilon Q(x)$ formunda yazılabilir. Böylece P ve Q üzerine konulan şartlar

$$\left\{\begin{array}{l} -Q(x) \leq -1 \\ \\ f(x)Q(x) + P(x) \leq \varepsilon Q(x) \\ \\ -f(x)Q(x) + P(x) \leq \varepsilon Q(x) \end{array}\right\} \quad a \leq x \leq b \qquad (2.5.1)$$

lineer eşitsizlikler sistemini verir.

$$[a_0, \ldots a_n, b_0, \ldots b_m]$$

katsayıları vektörüne göre, bu lineer eşitsizlikler sistemi uyumlu veya uyumsuzdur. Uyumlu olması halinde yaklaşık çözüm devreye girer. İkinci halde ε yeterince küçük olup **R** içinde f ye bu ε mesafesi içerisinde yakın bir eleman yoktur. Şayet iyi bir yaklaşım isteniyorsa ε öyle seçilmelidir ki (2.5.1) sistemi uyumlu hale gelsin. (2.5.1) sisteminin uyumluluğunu test etmek için aşağıdaki konveks fonksiyonun minimumunu aramamız gerekmektedir.

$$\delta = \max_x \max\{1 - Q, fQ - P - \varepsilon Q, P - fQ - \varepsilon Q\}$$

Burada $\delta, c = [a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m]$'nin bir fonksiyonudur. *P, f, Q* ise $[a,b]$ aralığında değişen x'in fonksiyonlarıdır. $\delta(c)$'yi minimum yapan katsayılar Chebychev yöntemiyle bulunabilir. Eğer $\delta(c) \le 0$ ise *c* (2.5.1)'in çözümüdür. Eğer $\delta(c) > 0$ ise o zaman (2.5.1) uyumlu değildir. ε seçimine gidilir. Bu algoritmaya lineer eşitsizlik metodu denir.

Bir başka yaklaşım, ağırlıklandırılmış minimax algoritması aşağıdaki şekilde uygulanır. Minumumunu aradığımız fonksiyon şu şekilde yazılsın.

$$\Delta = \max_{a \le x \le b} \left| f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} \right| = \max_{a \le x \le b} \frac{1}{Q(x)} \left| f(x)Q(x) - P(x) \right|$$

Ardışık işlem metodu (iteration) yapılarak bu minimize edilmektedir. Bu Δ yerine,

$$\delta_k = \max_{a \le x \le b} \frac{1}{Q_{k-1}(x)} \left| f(x)Q_k(x) - P_k(x) \right|$$

alınarak δ_k minimize etmeye çalışılır. Metodun k ıncı adımında $1/Q_{k-1}(x)$ bir önceki alınarak sabit bir değer tutulur. Q_k ve P_k değiştirilir. Öyle ki δ_k minimum yapılır. Adi (trivial) çözümden kaçınmak için *P* ve *Q*'nun birinin katsayıları sabit alınabilir. δ'nın minimizasyonu Chebychev metoduyla yapılabilir [1].

Son bir algoritma uygulaması zor olmasına rağmen yakınsaklığı garantilemektedir. *k* ıncı adımda $R_k = P_k / Q_k$ bir önceki adımda bulunsun. Daha sonra $\Delta_k = \| f - R_k \|$ sayısını bulalım ve aşağıdaki yardımcı fonksiyonu tarif edelim.

$$\delta_k(R) = \max_x \{ |f(x)Q(x) - P(x)| - \Delta_k Q(x) \}$$

$R_{k+1} = P_{k+1} / Q_{k+1}$ öyle seçilir ki $\delta_k, \|Q_{k+1}\| = 1$ kısıtı altında minimize edilir. $\|P\|$ çok büyükse $\delta_k(R)$ çok büyüktür. Bundan dolayı δ_k nın minimizasyonu için $\|P_{k+1}\|$ kısıtlaması gerekli değildir. Başlangıçta R_0 keyfidir. Sadece paydası $[a,b]$ de sıfırdan büyüktür. Eğer $\delta_k(R_{k+1}) \geq 0$ ise dururuz ve R_k da f ye en iyi yaklaşım olur. Bu metoda diferansiyel düzeltme metodu denir [1].

Teorem 2.5.1. : Diferansiyel düzeltme algoritması içerisinde $\Delta_k \rightarrow \Delta^* = \inf \Delta$ dır. Eğer en iyi yaklaşım varsa bu yaklaşım lineerdir. $\Delta_{k+1} - \Delta^* \leq \theta(\Delta_k - \Delta^*)$ $\quad \theta < 1$ dır.

BÖLÜM 3. PADE YAKLAŞIMI VE GENELLEŞTİRİLMESİ

Pade yaklaşımı Taylor polinom yaklaşımının rasyonel fonksiyon benzeridir. Temel matematikte aşağıdakileri biliyoruz. Bir fonksiyon orijin merkezli bir aralıkta kuvvet serisiyle yaklaştırılsın.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (-b < x < b)$$

$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, f-nin Taylor polinomu denir. Bu kısmıyla polinomla fonksiyon

$$P(0) = f(0), P'(0) = f'(0), \ldots, P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \tag{3.1}$$

koşullarında uyum sağlarlar. Derecesi n'yi geçmeyen bütün polinomlar arasında bu polinom f'ye

$$\|g\| = |g(0)| + |g'(0)| + \cdots + |g^{(n)}(0)|$$

yarı normuna göre en iyi yaklaşımdır.

Bu yaklaşım aşağıdaki şekilde de verilebilir. Biz sadece P'nin aşağıdaki denklemi sağladığı kabul edilsin.

$$|f(x) - P(x)| \le M |x^{\nu}| \qquad (-b < x < b) \tag{3.2}$$

ve burada ν mümkün olduğu kadar büyük olsun. Eğer *f, (-b,b)* aralığında *n+1* sürekli türeve sahipse, $\nu = n+1$ alınabilir. Çünkü Taylor teoremi istenilen özelliğe sahip bir polinom vermektedir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(x)}(0)x^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}$$

Burada ξ, x e bağımlıdır, *(-b,b)* arasındadır. $\nu = n+1$ alınırsa

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k \qquad M = \frac{\left\| f^{(n+1)} \right\|}{(n+1)!} \tag{3.3}$$

olarak (3.2) sağlanır.

Buradaki norm *(-b,b)* deki supremum normudur ve derecesi *n*'yi geçmeyen polinomlar (3.2) eşitsizliğini $\nu = n+1$ ile tek türlü bulunurlar. Bu kavramlar *f* hakkında bu kadar kabul yapılmadan da gösterilebilir. Bu halde (3.2) ifadesi (3.1) formunda *n+1* tane denklem veya *n+1* eşitsizlik sistemi

$$\left| f(x) - P(x) \right| \le M \left| x^k \right| \qquad (k = 1, \ldots, n+1)$$

olarak ele alınıp çözülebilir. Çünkü, bilinmeyen katsayılarla öne sürülen şartlar eşittir.

Yukarıdakine benzer tarzda rasyonel yaklaşım $P_n(x)/Q_m(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k / \sum_{k=0}^{m} q_k x^k$ formunda aşağıdaki (3.4) eşitsizliğini sağlayacak tarzda da bulunabilir.

$$\left| f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \right| \le M \left| x^\nu \right| \qquad (-b \le x \le b) \tag{3.4}$$

Burada rasyonel fonksiyonun katsayıları öyle seçilsin ki ν mümkün olduğu kadar büyük olsun (ν nün ∞ olması da dahil). Fakat en büyük mümkün değer ise *n+m+1* dir. $\nu \leq n+m$ olursa aşağıdaki teorem bu soruyu cevaplayacaktır. Bütün bu hallerdeki P_n / Q_m rasyonel yaklaşımları *f* fonksiyonunun (*n,m*) inci mertebeden Pade yaklaşımı adını alır.

(0 noktasında) Her sınırlı fonksiyon her bir (*n,m*) çifti için Pade yaklaşımına sahiptir.

Gerekli olduğu zaman ν =0 alınabilir.

Teorem 3.1. : *f, n+m+1* sürekli türeve sahipse (*n,m*) mertebesinden Pade yaklaşımına sahiptir. $\nu > n$ için eğer $\nu \leq n+m+1$ ise *p* ve *q* katsayıları aşağıdaki denklem takımından hesaplanır.

$$\sum_{j=0}^{k} a_j q_{k-j} = p_k \qquad (k = 0,\ldots,\nu-1) \tag{3.5}$$

Burada $a_k = f^{(k)}(0)/k!$, ve $p_{n+i} = q_{m+i} = 0$, $i \geq 1$dir.

İspat : $\nu = n+1$ ise $Q_m(x) = 1$ alalım ve (3.3) Taylor polinom olur. Kabul edilsin ki $Q_m(0) \neq 0$ olsun. Aksi takdirde rasyonel fonksiyon 0'da ya indigenebilirdir ya da sonsuzdur. (3.4) eşitsizliği buna göre sıfırın bir komşuluğunda

$$\left| f(x)Q_m(x) - P_n(x) \right| \leq M \left| x^{\nu} Q_m(x) \right| \leq M_1 \left| x^{\nu} \right| \tag{3.6}$$

denklemine eşittir. Taylor teoreminden

$$f(x) = f^*(x) + r(x)$$

Burada $f^*(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n+m} x^{n+m}$ dir

$$r(x) = \frac{f^{(n+m+1)}(\xi)x^{n+m+1}}{(n+m+1)!}$$

ξ ,x' e bağımlıdır ve $|\xi| < |x|$ i sağlar. (3.6) denklemi

$$\left| f^*(x)Q_m(x) + r(x)Q_m(x) - P_n(x) \right| \leq M_1 \left| x^\nu \right|$$

Eğer $\nu \leq n+m+1$ ise, eşitliği garantilemek için,

$$\left| f^*(x)Q_m(x) - P_n(x) \right| \leq M_2 \left| x^\nu \right|$$

olması yeterlidir.

Bu kaldırılan *r(x)Q(x)* terimi bu eşitsizliği sağlar. Uygunluk için f^*, P_n ve Q_m polinomları sonsuz seri tarzında yazılsın. O zaman,

$$\left| (\sum_0^\infty a_k x^k)(\sum_0^m q_k x^k) - \sum_0^n p_k x^k \right| \leq M_2 \left| x^\nu \right| \tag{3.7}$$

eşitsizliğine sahip olunur. Bu (3.7) ifadesi seriler çarpılarak düzenlenirse,

$$\left| \sum_{k=0}^\infty (\sum_{j=0}^k a_j q_{k-j} - p_k) x^k \right| \leq M_2 \left| x^\nu \right|$$

bulunur. Bu da (3.5) formüllerini verir.

(3.5) denkleminin homojen kısmı $\nu \leq m+n+1$ ise devamlı trivial olmayan çözüme sahiptir. Çünkü $[p_0, \ldots, p_n, q_0, \ldots, q_m]$ matris satır vektör (*n*+*m*+*2*) boyutlu uzayda ν vektörlerine diktir. Fakat bununla beraber $q_0 \neq 0$ kabul edilmelidir.

Daha açık olarak aşağıdaki denklem takımları çözülerek Pade yaklaşımı bulunur.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}p_k x^k = p_0+p_1x+\ldots+p_nx^n$$

$$Q_m(x)=\sum_{k=0}^{m}q_k x^k = q_0+q_1x+\ldots+q_mx^m$$

Tanım gereği;

$$f(x)-P_n(x)/Q_m(x)=O(x^{n+m+1})$$

dir.

Burada; $q_0=1$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
a_0 \qquad\qquad\qquad &= p_0 \\
a_1+a_0q_1 \qquad\quad &= p_1 \\
a_2+a_1q_1+a_0q_2 &= p_2 \qquad\qquad (*) \\
\vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\
a_n+a_{n-1}q_1+\cdots+a_0q_n &= p_n \\
a_{n+1}+a_nq_1+\cdots+a_{n-m+1}q_m &= 0 \\
\vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \qquad\qquad (**) \\
a_{n+m}+a_{nm-1}q_1+\cdots+a_nq_m &= 0
\end{aligned}$$

Burada, öncelikle (**) denklem takımından a_j katsayıları bilindiğinden q_i katsayıları bulunur.
Daha sonra, (*) denklem takımında bulduğumuz q_i katsayıları yerlerine yazılarak p_i katsayıları hesaplanır.

Bu denklem takımlarını düzenlersek $R_m^n = P_n(x)/Q_m(x)$ Pade yaklaşımını aşağıdaki determinant formunda elde edilir.

$$R_m^n = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-m+1} & a_{n-m+2} & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+m} \\ \sum_{j=m}^{n} a_{j-m} x^j & \sum_{j=m-1}^{n} a_{j-m+1} x^j & \cdots & \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{n-m+1} & a_{n-m+2} & \cdots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+m} \\ x^m & x^{m-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}$$

Pade yaklaşımıyla elde edilen sonuçlarımızı aşağıdaki tablo formu ile gösterebiliriz.

Tablo 3.1 Pade tablosu

m \ n	0	1	2	…
0	R_0^0	R_0^1	R_0^2	…
1	R_1^0	R_1^1	R_1^2	…
2	R_2^0	R_2^1	R_2^2	…
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Pade yaklaşımı bir örnekle gösterelim. Sıfırıncı mertebeden Bessel fonksiyonunu alalım.

$$J_0(2x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{36} + \cdots = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \left(\frac{x^k}{k!}\right)^2$$

ve *(n,m)*=(*1,1*) olsun. O zaman (3.7) denklemi

$$\left|\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{36} + \cdots\right)(q_0 + q_1 x) - (p_0 + p_1 x)\right| \le M\left|x^\nu\right|$$

$$\left|(q_0 - p_0) + (q_1 - p_1)x - q_0 x^2 + \cdots\right| \le M\left|x^\nu\right|$$

$q_0 \neq 0$ olduğundan ν en fazla 2 olabilir. Çünkü sol tarafta $-q_0 x^2$ terimi vardır. Dolayısıyla $q_0 = p_0 = 1$ alalım ve $q_1 = p_1$ çıkar. O zaman (1,1) deki Pade yaklaşımı $J_0(2x) \approx 1$ olur. ν de *n+m+1* den küçüktür. Dolayısıyla yaklaşım iyi değildir. (*n,m*)=(2,4) alalım. $\left|f(x)Q_m(x) - P_n(x)\right| \le M\left|x^\nu\right|$ yerine

$$f(x)Q_m(x) - P_n(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{\nu-1}x^{\nu-1} + c_\nu x^\nu + \cdots$$

yazılsın ve $c_0 = c_1 = \cdots = c_{\nu-1} = 0$ yapılsın. Bu, f fonksiyonunun kuvvet serisine açılabildiği zaman mümkündür.

$$f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{c_\nu x^\nu + \cdots}{Q_m(x)} \tag{3.8}$$

O zaman,

$$\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{36} + \frac{x^8}{576} - \cdots\right)\left(q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3 + q_4 x^4\right)$$

$$-\left(p_0 + p_1 x + p_2 x^2\right) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{\nu-1}x^{\nu-1} + c_\nu x^\nu + \cdots$$

denklemi elde edilir. Bunları düzenlersek,

$$(q_0 - p_0) + (q_1 - p_1)x + (q_2 - q_0 - p_2)x^2 + (q_3 - q_1)x^3$$
$$+\left(q_4 - q_2 + \frac{q_0}{4}\right)x^4 + \left(\frac{q_1}{4} - q_3\right)x^5 + \left(-\frac{q_0}{36} + \frac{q_2}{4} - q_4\right)x^6$$
$$+\left(-\frac{q_1}{36} + \frac{q_3}{4}\right)x^7 + \left(\frac{q_0}{576} - \frac{q_2}{36} + \frac{q_4}{4}\right)x^8 + \cdots$$

$q_0 = 1$ seçilirse , $q_0 = p_0 = 1, q_1 = p_1 = q_3 = 0, q_2 = \frac{8}{27}, p_2 = -\frac{18}{27}, q_4 = \frac{5}{108}$ bulunur.

$$c_8 = \frac{q_0}{576} - \frac{q_2}{36} + \frac{q_4}{4} = \frac{79}{15,552} \approx \frac{1}{200}$$

olur. O zaman,

$$J_0(2x) = \frac{1 - \frac{19}{27}x^2}{1 + \frac{8}{27}x^2 + \frac{5}{108}x^4} + \frac{(79/15,552)x^8 + \cdots}{1 + \frac{8}{27}x^2 + \frac{5}{108}x^4}$$

olur. Burada bunun bir uygulamasını yapalım. $J_0(2x)$'in ilk kökünü bulalım. Esas kökü $\pm 1,202$ iken

$$1 - \frac{19}{27}x^2 = 0$$

denklemini çözersek $x = \pm 1,192$ bulunur.

Şimdi de, $f(x) = Arc\sin x$ fonksiyonu için Pade tablosunu yapalım.

Tablo 3.2 $f(x) = Arc\sin x$ fonksiyonu için Pade tablosu

m \ n	0	1	2	3	4
0	0	x	x	$\frac{1}{6}(6x+x^3)$	$\frac{1}{6}(6x+x^3)$
1	0	x	x	$\frac{1}{6}(6x+x^3)$	$\frac{1}{6}(6x+x^3)$
2	0	$\frac{6x}{-6+x^2}$	$\frac{6x}{-6+x^2}$	$\frac{-60x+17x^3}{-60+27x^2}$	$\frac{-60x+17x^3}{-60+27x^2}$
3	0	$\frac{6x}{-6+x^2}$	$\frac{6x}{-6+x^2}$	$\frac{-60x+17x^3}{-60+27x^2}$	$\frac{-60x+17x^3}{-60+27x^2}$
4	0	$\frac{360x}{-360+60x^2+17x^4}$	$\frac{360x}{-360+60x^2+17x^4}$	$\frac{14280x-7340x^3}{14280-9720x^2+549x^4}$	$\frac{14280x-7340x^3}{14280-9720x^2+549x^4}$

Teorem 3.2. : Eğer P_n/Q_m $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ nın (n,m) mertebesinden Pade yaklaşımı ise burada hata $\dfrac{\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k x^k}{Q_m(x)}$ ve $c_k = \sum_{i=0}^{m} a_{k-i} q_i$ dir.

İspat : Yukarıda verildiği gibi Pade yaklaşımı

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} q_k x^k\right) - \sum_{k=0}^{n} p_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

şartını sağlar. Burada $c_0 = \cdots = c_{\nu-1} = 0$ dır. Teorem 3.1 den $\nu > n$ olduğundan x^k 'nın katsayılarını kıyaslayarak istenilen c_k lar bulunur.

Pade yaklaşımı genel rasyonel yaklaşıma genelleştirilebilir. Düzgün normda veya en küçük kareler normunda optimum yaptırılabilir. Bu durumda $1, x, x^2, \ldots$ yerlerine $\phi_0, \phi_1, \ldots$ polinomları kullanılabilir. Burada ϕ_k , k ıncı derecedendir. Mesela bunlar Chebychev veya Legandre polinomları alınabilir. $\phi_0, \phi_1, \ldots$ dizisi belirlendikten sonra, A_{ijk} katsayıları

$$\phi_i \phi_j = \sum_{k=0}^{i+j} A_{ijk} \phi_k$$

şartıyla belirlenir. Bu katsayıların varlığı;

1) $\phi_i \phi_j$, *i+j* inci dereceden bir polinom olmasından

2) $\{\phi_0, \ldots, \phi_{i+j}\}$ kümesi derecesi *i+j*'ye eşit olan polinomlar uzayının bazı olmasından kaynaklanır.

Bu bağlamda klasik Pade yaklaşımı $x^i x^j = x^{i+j}$ olur. Chebychev polinomları halinde A_{ijk} katsayıları basitçe hesaplanır. Kabul edilsin ki, f fonksiyonları $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k$ tarzında olsunlar ve P_n / Q_m rasyonel fonksiyonlarıyla yaklaştırılsın. $P_n = \sum_{j=0}^{n} p_j \phi_j$ ve $Q_m = \sum_{j=0}^{m} q_j \phi_j$ olsun. Klasik Pade yaklaşımındaki gibi en büyük ν için sağlanan aşağıdaki formdaki denklem ele alınsın:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k \right) \left(\sum_{k=0}^{m} q_k \phi_k \right) - \sum_{k=0}^{n} p_k \phi_k = \sum_{k>\nu}^{\infty} c_k \phi_k$$

Böylece elde edilen yaklaşıma genelleştirilmiş Pade yaklaşımı denir. Eğer Q_m polinomu verilen aralıkta sıfır olmazsa hata tahmini kolaylıkla hesaplanır. $\sum c_k\phi_k / Q_m$ ifadesinden bulunabilir. Eğer ϕ_k k ıncı Chebychev polinomları ise düzgün normdaki hata klasik Pade yaklaşımında çok daha az olmaktadır. Eğer $\{\phi_k\}$ aşağıdaki iç çarpıma göre ortogonal bir dizi ise ;

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,\omega(x)\,dx$$

genelleştirilmiş Pade yaklaşımları f ye , $\langle g,g\rangle^{1/2}$ normuna göre yakınsar.

Teorem 3.3. : Eğer f fonksiyonu, $f=\sum a_i\phi_i$ serisi formunda yazılırsa $\phi_i\phi_j=\sum_k A_{ijk}\phi_k$ 'yı sağlar. Her (n,m) için formal genelleştirilmiş Pade yaklaşımı $P_n \Big/ Q_m = \sum_{i=0}^{n} p_i\phi_i \Big/ \sum_{i=0}^{m} q_i\phi_i$ katsayıları $\sum_j \sum_i A_{ijk}a_i q_j = p_k$ denklem takımında bulunur. $k>n$ için $p_k=0$ dır ve $k>m$ için $q_k=0$ dır. Eğer $\phi_0,\phi_1,\ldots$ ortonormal bir sistem olurlarsa o zaman aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3.4. : $C[a,b]$ uzayında $\{\phi_n\}$ ortonormal bir sistem olsun. Her (n,m) için f sürekli fonksiyonunun genelleştirilmiş Pade yaklaşımı $P/Q = \sum_{i=0}^{n} p_i\phi_i \Big/ \sum_{i=0}^{m} q_i\phi_i$ olup, Q, $Q \perp f\phi_k\,(k=n+1,\ldots n+m)$ denkleminden belirlenir. O zaman $p_i=\langle fQ,\phi_i\rangle$ olur ve hata r/Q_1 dir. Burada $r=\sum_{k>n+m}\langle fQ_k,\phi_k\rangle\phi_k$ dır.

İspat **:** $fQ-P=\sum_{i>n+m} c_i\phi_i$ denklemini ele alalım. ϕ_k ile iç çarparsak, aşağıdaki üç grup denklem sistemi elde edilir.

$$\langle fQ, \phi_k \rangle = 0 \qquad (k = n+1, \ldots, n+m)$$

$$\langle fQ - P, \phi_k \rangle = 0 \qquad (k = 0, \ldots, n)$$

$$\langle fQ - P, \phi_k \rangle = c_k \qquad (k > n+m)$$

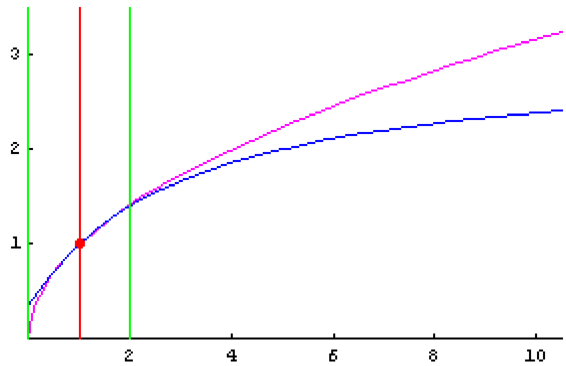
İlk m denklem $\langle Q, f\phi_k \rangle = 0$ yazılabilir. $m+1$ tane $q_0, \ldots, q_m$ katsayılarının çözümünü verir. İkinci grup denklem ise P'nin genelleştirilmiş Fourier katsayılarını verir. Son denklem ise $\langle fQ, \phi_k \rangle = c_k$ olur.

□

Örnek 3.1. : $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunu için Pade yaklaşımlarını inceleyelim.

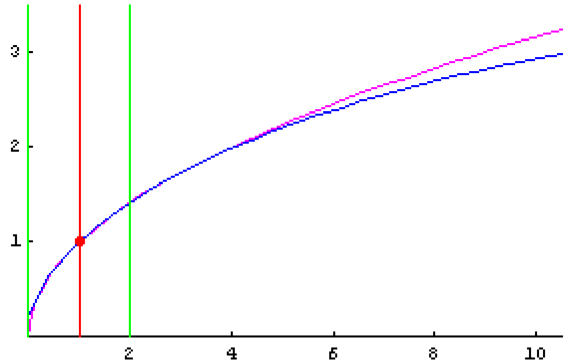
$x_0 = 1$ noktalarında yaklaşımlar ve grafikleri aşağıdadır.

$$R_1^1 = \frac{1+3x}{3+x}$$



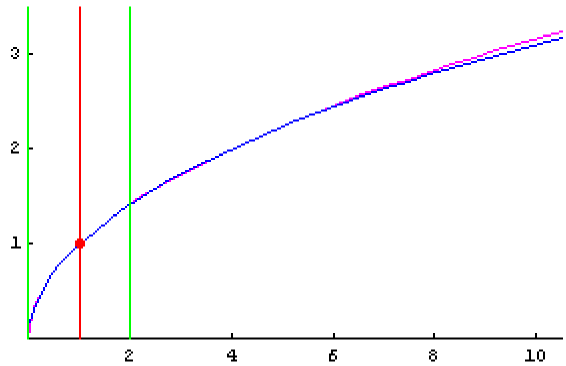
Şekil 3.1. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu ile R_1^1 Pade yaklaşımının grafiği

$$R_2^2 = \frac{1+10x+5x^2}{5+10x+x^2}$$



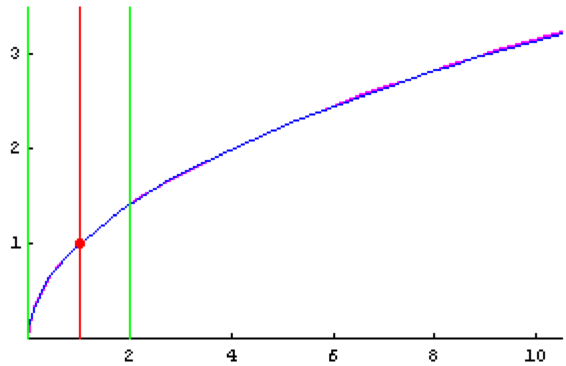
Şekil 3.2. $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu ile R_2^2 Pade yaklaşımının grafiği

$$R_3^3 = \frac{1+21x+35x^2+7x^3}{7+35x+21x^2+x^3}$$



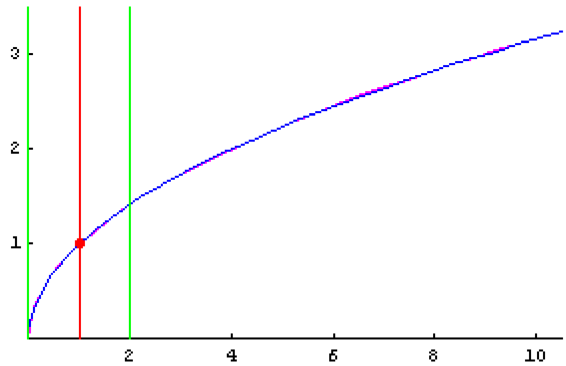
Şekil 3.3. $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu ile R_3^3 Pade yaklaşımının grafiği

$$R_4^4 = \frac{1+36x+126x^2+84x^3+9x^4}{9+84x+126x^2+36x^3+x^4}$$



Şekil 3.4. $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu ile R_4^4 Pade yaklaşımının grafiği

$$R_5^5 = \frac{1+55x+330x^2+462x^3+165x^4+11x^5}{11+165x+462x^2+330x^3+55x^4+x^5}$$



Şekil 3.5. $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu ile R_5^5 Pade yaklaşımının grafiği

BÖLÜM 4. SÜREKLİ KESİRLER

Önemli birçok özel fonksiyon sonsuz işlem aracılığıyla tanımlanır. Seriler, integraller, iterasyonlar bunlara örnektirler. Sürekli kesirler de bu sonsuz işlemlerden bir tanesidir. Sürekli fonksiyonlara bir örnek Lambert(1770) tarafından verilmiştir.

$$\arctan x = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{4x^2}{5+\cfrac{9x^2}{7+\cfrac{16x^2}{9+\cdots}}}}} \qquad (|x|<1)$$

Bu şöyle de yazılabilir.

$$\arctan x = \frac{x}{1+}\,\frac{3}{x^2+}\,\frac{4x^2}{5+}\,\frac{9x^2}{7+}\,\frac{16x^2}{9+}\cdots \quad (|x|<1)$$

Bu denklemin sağ tarafı aşağıdaki şekilde bir limitle belirlenir. Bu ifadenin ilk *n* terimi,

$$f_n(x) = \frac{x}{1+}\,\frac{3}{x^2}\,\frac{4x^2}{5+}\cdots\frac{(n-1)^2x^2}{2n-1} \qquad (n \geq 2)$$

gösterilsin. Bunun limiti,

$$\arctan x = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (|x|<1) \text{ olur.}$$

$f_n(x)-e$ sürekli kesrinin n inci yaklaşığı denir. Böylece arctan fonksiyonunun bir başka yaklaşımını bulmuş oluruz. Mesela $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$ hesaplansın. Bunun değeri $\frac{\pi}{6}$'dır. $f_n(1/\sqrt{3}), n \geq 2$ için;

Tablo 4.1. $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$ ün sürekli kesirlerle yaklaşımı

n	$f_n(1/\sqrt{3})$
2	0,519615
3	0,523892
4	0,523577
5	0,523600
6	0,523599
7	0,523599

Bu tablo altı hane kesinlikteki değerini altıncı yakınsaklığında bulmuştur.

4.1. Ardışık Formül

Sürekli kesirlerin hesaplanmasındaki zorluk seri hesaplamalarından daha fazladır. Serilerde $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kısmı toplamları $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ formülünden bulunur. Bu formüle benzer bir formül sürekli kesirler için aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$C = \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots$$

$$C_n = \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} +} \frac{a_n}{b_n}$$

$$f_n(x) = \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} +} \frac{a_n}{b_n + x}$$

fonksiyonu

$$C_n = f_n(0)$$

dır.

$f_n(x)$, $f_{n-1}(x)$ cinsinden hesaplanmak isteniyor.

$$f_n(x) = f_{n-1}(\frac{a_n}{b_n + x})$$

Direkt hesaplama ile,

$$f_1(x) = \frac{a_1}{b_1 + x}$$

$$f_2(x) = \frac{a_1 b_2 + a_1 x}{b_1 b_2 + a_2 + b_1 x}$$

$$f_3(x) = \frac{a_1 b_2 b_3 + a_1 a_3 + (a_1 b_2)x}{b_1 b_2 b_3 + a_2 b_3 + b_1 a_3 + (b_1 b_2 + a_2)x}$$

bulunur.

$$f_n(x) = \frac{A_n + A_{n-1}x}{B_n + B_{n-1}x} \qquad (n \geq 1)$$

Burada,

$$\begin{cases} A_0 = 0, A_1 = a_1 \\ \\ A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} \end{cases} \qquad (n \geq 2)$$

ve

$$\begin{cases} B_0 = 1, B_1 = b_1 \\ \\ B_n = b_n\ B_{n-1} + a_n B_{n-2} \end{cases} \qquad (n \geq 2)$$

dırlar.

Teorem 4.1.1. : $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri verilsin. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ yukarıda verilen diziler olsunlar.

$$C_n = \frac{A_n}{B_n} \quad (n \geq 1) \text{ dır.}$$

İspat : $f_n(x) = f_{n-1}(\frac{a_n}{b_n + x})$ den elde edilir.

Bu ardışık formüller etkili bir algoritma için gerekmektedir. Mesela $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$ hesabında $a_n = (n-1)^2 x^2$ ve $b_n = 2n-1$, $a_1 = x$ ve $b_1 = 1$ dir.

4.2. Serilerin Sürekli Kesir Fonksiyonuna Dönüştürülmesi

Teorem 4.2.1. : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_1 -} \frac{x_1^2}{x_1 + x_2 -} \frac{x_2^2}{x_2 + x_3 -} \cdots \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1} + x_n -}$ dır.

İspat: Bu tümevarım metoduyla kolayca ispatlanır. Bunu göstermek için arctan fonksiyonunun Mc Lauren serisi ele alınsın.

$$
\begin{aligned}
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\\
&=\frac{1}{x^{-1}}+\frac{1}{-3x^{-3}}+\frac{1}{5x^{-5}}+\cdots\\
&=\frac{1}{x^{-1}-}\,\frac{(x^{-1})^2}{x^{-1}+(-3x^{-3})-}\,\frac{(-3x^{-3})^2}{(-3x^{-3})+(5x^{5})}\cdots\\
&=\frac{x}{1+}\,\frac{-x^2}{x^2-3+}\,\frac{-9x^2}{-3x^2+5+}\,\frac{-25x^2}{5x^2-7-}\cdots
\end{aligned}
$$

arctan fonksiyonu için $n \geq 2$ için

$$a_n = -(2n-3)^2 x^2 \text{ ve } b_n = (-1)^n[(2n-3)x^2 - (2n-1)]$$

dır. $\arctan x$ hesabı için Lambert'in verdiği sürekli kesir ile bu Mc Lauren'den elde ettiğimiz birbirinden farklıdır. Bunun için kısmi toplamlar serisi hesaplanırsa,

Tablo 4.2 $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$ ün kısmı toplamlar serisi ile hesabı

n	$f_n(1/\sqrt{3})$
1	0,577350
2	0,513200
⋮	
⋮	
11	0,523599
12	0,523599

olarak bulunur. Bu tabloların kıyaslamasından daha önce elde ettiğimizin daha hızlı yakınsadığı görülür. Mc Lauren serisinden elde ettiğimiz daha yavaş yakınsamaktadır.

BÖLÜM 5. RİCCATİ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE PADE YAKLAŞIMI

5.1. Giriş

Bu bölümde katsayıları rasyonel olan Riccati diferansiyel denkleminin çözümüne ana köşegen Pade yaklaşımlarını elde etmek için τ -metodu uygulanıyor. Bu yaklaşım Riccati denkleminin çözümünü sürekli bir kesir halinde bulmak için lineer kesirli dönüşümü kullanımından oldukça farklıdır. Her metodun belirli avantajları vardır.

Khovanskii katsayıları en fazla ikinci dereceden denklemler olan Riccati denklemlerini çalıştı. Bazı yaklaşımları Pade tipindeydi. Bu durumda bizim çıkaracağımız sonuçlar çok daha geneldir. Merkes ve Scott, Riccati yaklaşımına burada ele alındığından çok daha geniş kesir çözümü bulmaya çalışmıştır. Fakat Pade yaklaşımına özel bir önem verilmedi ve sonuçlar birinci dereceden lineer diferansiyel denklemlere uygun değildir.

İlk önce polinom katsayılı Riccati denkleminin ana köşegen Pade yaklaşımlarını belirleyen ardışık kural ilişkileri(rekürrans bağıntıları) geliştirildi. İkinci bölüm ise birinci bölümde geliştirilen denklemlerin yakınsaklığıyla ilgili tartışmaları ve örnekleri içermektedir.

5.2. Riccati Denklem Çözümüne Pade Yaklaşımı

Burada ana köşegen Pade yaklaşımının çözümüne ait bir metod geliştiriliyor.

$$Py' + Qy + Ry^2 + S = 0, \quad y_0 = y(0),$$
$$P = \sum_{k=0}^{p} p_k x^k, \quad \mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{q} q_k x^k, \quad \mathrm{R} = \sum_{k=0}^{r} r_k x^k, \quad \mathrm{S} = \sum_{k=0}^{s} s_k x^k \tag{5.2.1}$$

olsunlar.

(5.2.1) in bir dizi çözümünün,

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 = y_0 \tag{5.2.2}$$

olduğu varsayılsın ve dahası

$$d_m = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_m & c_{m+1} & \cdots & c_{2m} \end{vmatrix} \neq 0, \quad m = 0,1,2,... \tag{5.2.3}$$

olsun.

Bu durumda y nin sürekli bir kesir açılımı,

$$y = y_0 - \cfrac{\alpha_1 x}{1 + \beta_1 x + \cfrac{\alpha_2 x^2}{1 + \beta_2 x + \cfrac{\alpha_3 x^2}{1 + \beta_3 x + \ddots}}} \tag{5.2.4}$$

şeklinde mevcuttur.

(5.2.4)'ün n inci değeri y'nin Pade yaklaşımının n inci derecedeki ana köşegenidir. τ -metot felsefesiyle devam ederek (5.2.1)'in sağ tarafına bir terim ilave edildi ve ilgili denklem elde edildi.

$$Py_n' + Qy_n + Ry_n^2 + S = \frac{T_n}{B_n^2} = \frac{x^{2n}}{B_n^2}\sum_{k=0}^{m}\tau_{n,k}x^k,$$

$$m = \max\{p-1, q, r, s\}, y_n = \frac{A_n}{B_n}, A_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k, \tag{5.2.5}$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}x^k \qquad y_o = \frac{A_0}{B_0} = \frac{y_0}{1}$$

y_n ’ nin y ’ nin ana köşegen Pade yaklaşımı olduğu [7] deki gibi benzer analizleri kullanarak gösterilebilir. y_n ’in y ’ye ana köşegen Pade yaklaşımı olduğundan sürekli kesir teorisinden A_n ve B_n ’ in aşağıdaki ilişkilere sahiptir.

$$A_n = p_n A_{n-1} + \alpha_n x^2 A_{n-2}, \quad p_n = 1 + \beta_n x \tag{5.2.6}$$

Uyum için,

$$\alpha_{k,j} = \alpha_k \alpha_{k-1} \cdots \alpha_j,$$

$$\alpha_{k,k} = \alpha_k, \quad \alpha_{k-1,k} = 1 \tag{5.2.7}$$

$$\alpha_{k,j} = 0 \qquad k < j-1$$

daha sonra

$$\Delta_n = B_n A_{n-1} - A_n B_{n-1} = -\alpha_n x^2 \Delta_{n-1} = (-)^{n-1}\alpha_{n,1}x^{2n-1}$$

$$\tag{5.2.8}$$

$$\Delta_1 = \alpha_1 x$$

olsun.

(5.2.5)'in her iki tarafının B_n^2 ile çarpımında ve (5.2.6) ve (5.2.8)'in sonuç denklemine tekrar tekrar uygulanmasıyla aşağıdaki sonuç alınır.

$$
\begin{aligned}
& p_n^2 T_{n-1} + \alpha_n^2 x^4 T_{n-2} + \alpha_n \Delta_{n-1} x P \\
& + 2\alpha_n p_n x^2 \left\{ p_{n-1} T_{n-2} + \sum_{k=1}^{n-3} \alpha_{n-1,n-k} p_{n-k-1} x^{2k} T_{n-k-2} \right\} + \alpha_{n,2} p_n x^{2n-2} U = T_n
\end{aligned}
\tag{5.2.9}
$$

$$
U = \left(A_0 B_1 + A_1 B_0 \right) Q + 2 A_0 A_1 R + 2 B_1 S = \sum_{k=0}^{m+1} u_k x^k \tag{5.2.10}
$$

x in (5.2.9) daki kuvvetlerinin katsayılarını eşitlediğimizde $,\alpha_n, \beta_n$ ve $\tau_{n,k}$ değerlerini direkt olarak belirleyen denklem sistemi elde edilir.

$$
\alpha_n = -\tau_{n-1,0} \Big/ \left\{ (-)^n \alpha_{n-1,1} p_0 + \alpha_{n-1,2} u_0 + 2 \sum_{j=3}^{n} \alpha_{n-1,j} \tau_{j-2,0} \right\} \tag{5.2.11}
$$

$$
\beta_n = -\left\{ \tau_{n-1,0} + (-)^{n-1} \alpha_{n,1} p_0 \right\}^{-1} \left\{ \tau_{\text{n-1},1} + (-)^n \alpha_{n,1} p_1 + \alpha_{n,2} u_1 + 2 \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n,j} \left[\tau_{j-2,1} + \beta_{j-1} \tau_{j-2,0} \right] \right\} \tag{5.2.12}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& \tau_{n,k} = \tau_{n-1,k+2} + 2\beta_n \tau_{n-1,k} + \alpha_n^2 \tau_{n-2,k} + \beta_n^2 \tau_{n-1,k} \\
& +\alpha_n = \left\{ (-)^n \alpha_{n-1,1} p_{k+2} + \alpha_{n-1,2} u_{k+2} + \alpha_{n-1,2} \beta_n u_{k+1} + 2 \sum_{j=3}^{n} \alpha_{n-1,j} \left[\tau_{j-2,k+2} + \left(\beta_n + \beta_{j-1} \right) \tau_{j-2,k+1} + \beta_n \beta_{j-1} \tau_{j-2,k} \right] \right\}
\end{aligned}
$$

$$
k = (0,1,2,\ldots,m) \qquad n = (2,3,4,\ldots) \tag{5.2.13}
$$

Başlangıç hesaplama değerleri,

$$
A_0 = y_0, \quad B_0 = 1
$$

$$A_1 = y_0 + \alpha_{1,1}x, \quad B_1 = 1 + b_{1,1}x, \quad \alpha_{1,1} = \frac{c_1^2 - c_2 y_0}{c_1} \quad \text{ve} \quad b_{1,1} = -\frac{c_2}{c_1}$$

$$\alpha_1 = \left(y_0 b_{1,1} - \alpha_{1,1}\right), \quad \beta_1 = b_{1,1}$$

$$\tau_{0,k} = y_0 q_k + y_0^2 r^k + s_k$$

$$\tau_{1,k} = -\alpha_1 p_{k+2} + y_0 q_{k+2} + y_0^2 r_{k+2} + s_{k+2} + \left(\alpha_{1,1} + b_{1,1} y_0\right) q_{k+1}$$
$$+2y_0 \alpha_{1,1} r_{k+1} + 2b_{1,1} s_{k+1} + \alpha_{1,1} b_{1,1} q_k + \alpha_1^2 r_k + b_{1,1}^2 s_k$$
$$\left(k = 0, 1, 2, \ldots m\right)$$

ve (5.2.10) dan u_k değerleri

$$u_k = 2y_0 q_k + 2y_0^2 r_k + 2s_k + \left(\alpha_{1,1} + y_0 b_{1,1}\right) q_{k-1} + 2y_0 \alpha_{1,1} r_{k-1} + 2b_{1,1} s_{k-1}, \left(k = 0, 1, 2, \ldots, m+1\right) \tag{5.2.14}$$

Teorik olarak $\tau_{n,k}$ ’ ları (5.2.11), (5.2.12) ve (5.2.13) denklemlerinden elde edilir ve önceki değerleri kullanılarak α_n ve β_n elde edilir. Genelde α_n ve β_n için kapalı bir formül elde etmek mümkün görünmeyebilir. Pade yaklaşımını (5.2.5) deki gibi *R=0* alınarak birinci derece lineer diferansiyel denklemlere uygulanabileceği belirtilmelidir. Birçok önemli aşkın(transcendental) fonksiyonların bu tip denklem türüyle tanımlanabilmesi uygundur [8].

5.3. Pade Yaklaşımının Yakınsaması

$$Y\left(x\right) = \lim_{n \to \infty} y_n(x) \tag{5.3.1}$$

$y_n\left(x\right)$’ in (5.2.5) tanımlandığı gibidir. (5.2.4) y_n sürekli kesrinin yakınsaması $Y\left(x\right)$ yakınsamasını garantiler. (5.2.4)’ün yakınsaması için gerekli kriterler verilmiştir [7].

Birinci hal,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \tag{5.3.2}$$

ise (5.2.4)'de sürekli kesir (5.2.4)'ün kutupları hariç herhangi bir bölgede yakınsar.

İkinci hal,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0 \tag{5.3.3}$$

α_n ve β_n' in reel sayılar olduğu kabul edilsin ve (5.2.4) sonuçta pozitif tanımlıdır. Yani, $\exists n$ varki $n \geq N$, $\alpha_n > 0$ dır. İzole noktalar dışında (5.2.4) deki sürekli kesri yakınsaktır. $\operatorname{Im} x \neq 0$ için,

ya

$$\sum_{k=N}^{\infty} \left|\alpha_k\right|^{-1/2} = \infty \tag{5.3.4}$$

veya

$$\sum_{k=N}^{\infty} \left|\beta_{k+1}\right| \left|\alpha_k \alpha_{k+1}\right|^{-1/2} = \infty \tag{5.3.5}$$

dahası eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n \neq 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\alpha_n\right|}{\beta_n^2} \leq \frac{1}{4} \tag{5.3.6}$$

ise (5.2.4)'ün kutup noktaları hariç ve negatif gerçek ekseni hariç tutan herhangi bir sonlu kapalı alan ve orijinin çevresinde yakınsaktır. Şu da ifade edilmeli eğer (5.2.4) yakınsak ve $x_j^{(n)}, j=1,2,\cdots,n$ $B_n(x)$' in sıfırlarıysa x_j'nin $y(x)$'in sıfırı olduğu yerde $\lim_{n\to\infty} x_j^{(n)} = x_j$ olur. Bu $y(x)$' in polleri (ve sıfırları) elde etmek için yapıcı bir metot sunar.

Örnek 5.1. : $u = \Phi(a;b;x)$ olsun. Burada $\Phi(a;b;x)$ confluent hipergeometrik fonksiyondur [9]. Daha sonra $y = u'/u$ Riccati denklemini sağlar.

$$xy' + (b-x)y + xy^2 - a = 0$$

$$y_0 = y(0) = \frac{a}{b}$$

İkinci bölümdeki yöntemleri takip edince aşağıdaki değerler bulunur.

$$A_{0=}y_0 \quad B_0 = 1$$

$$A_{1=}y_0 + a_{1,1}x \quad B_1 = 1 + b_{1,1}x$$

$$a_{1,1} = \frac{a(a+1)}{b(b+1)(b+2)} \qquad b_{1,1} = \frac{2a-b}{b(b+2)}$$

$$\alpha_1 = \frac{a(a-b)}{b^2(b+1)} \qquad \beta_1 = b_{1,1}$$

$$\tau_{n,0} = 0 \qquad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$\tau_{0,1} = (b+1)\alpha_1 \qquad \tau_{1,1} = \frac{a(a+1)(a-b)(a-b-1)}{b^2(b+1)^2(b+2)^2}$$

$$u_0 = 0 \quad u_1 = (b+2)\alpha_1 \quad u_2 = b\alpha_1\beta_1$$

ve α_n, β_n ve $\tau_{n,1}$ ' i tanımlayan denklemler

$$\alpha_n = -\tau_{n-1,1} \Big/ \left\{ (-)^n \alpha_{n-1,1} + \alpha_{n-1,2} u_1 + 2\sum_{j=3}^{n} \alpha_{n-1,j} \tau_{j-2,1} \right\}$$

$$\beta_n = -\left\{ \alpha_{n,2} u_2 + 2\sum_{j=3}^{n} \alpha_{n,j} \beta_{j-1} \tau_{j-2,1} \right\} \Big/ \left\{ 2\tau_{n-1,1} + \alpha_{n,2} u_1 + 2\sum_{j=3}^{n} \alpha_{n,j} \tau_{j-2,1} \right\}$$

$$\tau_{n,1} = \alpha_n \tau_{n-2,1} + \beta_n^2 \tau_{n-1,1} + \alpha_{n,2} \beta_n u_2 + 2\beta_n \sum_{j=3}^{n} \alpha_{n,j} \beta_{j-1} \tau_{j-2,1}$$

$\tau_{n,1}$ yukarıdaki denklemden çözerek ve matematiksel tümevarımla

$$\alpha_n = \frac{(a+n)(b-a+n)}{(b+2n-1)(b+2n)^2(b+2n+1)}$$

$$\beta_n = \frac{2a-b}{(b+2n-2)(b+2n)}$$

oldukları gösterilir.

Ve izole edilmiş kutuplar dışında yaklaşımlarımız bir fonksiyona yakınsar.

BÖLÜM 6. RASYONEL İNTERPOLASYON

R_n^m uzayında bir rasyonel fonksiyon,

$$r(x_i) = f_i \ , \ i = 1,...,k \tag{6.1}$$

şartlarını sağlasın. Burada $x_1,...,x_k$ farklı reel sayılardır. $f_1,...,f_k$ da keyfi değerlerdir ve $k = m + n + 1$ dir. $m + n + 1$ de k nın en büyük değeridir. r'nin $m + n + 1$ kadar parametresi vardır(Sıfır olmayan katsayılardan bir tanesi devamlı 1 yapılabilir). Bazı (x_i, f_i) , $i = 1,...,k$ verileri(dataları) için (6.1) denklemini R_ν^μ , $\mu + \nu < k - 1$ ve $\mu \le m, \nu \le n$ sağlayabilir. Böyle (x_i, f_i) kümelerine bozulmuş hal denir.

Polinom interpolasyonu halinde $R_n^m = R_0^m$ dır. (6.1) denklemi muhakkak sağlanır, dejenere olmaz. Fakat rasyonel interpolasyonda sağlanmayabilir. Mesela, eğer f_i lerden bazısı sıfırsa ve $\mu = 0$ ise (6.1) denklemi sağlanmaz. Daha enteresan bir zorluk da aşağıdaki şekilde ortaya çıkar. Kabul edilsin ki $f_1 = f_2 \ne f_3$ ($k = 3$ olsun)

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x} \tag{6.2}$$

olsun.

$$f_1 = \frac{a_0 + a_1 x_1}{b_0 + b_1 x_1} = \frac{a_0 + a_1 x_2}{b_0 + b_1 x_2} = f_2$$

Buradan,

$$a_0b_1(x_2-x_1)-a_1b_0(x_2-x_1)=0$$

veya $a_0b_1=a_1b_0$ bulunur. Kabul edilsin ki $b_1\neq 0$ olsun. Eğer $a_0=a_1b_0/b_1$ alınırsa (6.2) denklemindeki r sabit çıkar. $b_1=0$ olsun $a_1=0$ olur. b_0 ve b_1 aynı anda sıfır olmadığından yine r sabit çıkar ve $r=f_1$ olur. Fakat $r(x_3)\neq f_3$ olmaz. İnterpolasyon problemi bu tip datalar için çözülemez.

O halde interpolasyon probleminin çözümünün olması için ve bu çözümün nasıl bulunacağı için daha dikkatli analiz edilmesi gerekir.

Tanım 6.1. : $r_1=p_1/q_1, r_2=p_2/q_2\in R_n^m$ olmak üzere $p_1q_2=q_1p_2$ ise bu rasyonel ifadeler eşittir denir.

Teorem 6.1. : İnterpolasyon problemi R_n^m kümesi içerisinde en fazla bir çözüme sahiptir.

İspat : Eğer, $r_1,r_2\in R_n^m$ ise ve (6.1) denklemini sağlarsa $r_1(x_i)-r_2(x_i)=0,\ i=1,...,+m+n+1$ ve $p_1(x_i)q_2(x_i)-p_2(x_i)q_1(x_i)=0$ dır. Fakat $p_1q_2-p_2q_1\in P_{m+n}$ dir. Dolaysıyla sıfırdır.

□

Eğer $r=p/q$ (6.1) denklemini sağlarsa p'nin ve q'nun katsayıları aşağıdaki homojen lineer denklemi sağlamalıdır.

$$q(x_i)f_i-p(x_i)=(b_0+b_1x_i+...+b_nx_i^n)f_i-(a_0+a_1x_i+...+a_nx_i^m)=0,\ i=1,...,k \quad (6.3)$$

(6.3)'de k denklem, $k+1$ bilinmeyen mevcuttur. Dolayısıyla her zaman adi çözümden başka çözümleri vardır.

Teorem 6.2. : (6.3) denkleminin trivial olmayan bütün çözümleri aynı rasyonel fonksiyonu tarif ederler.

İspat : $q_1, q_2 \in P_n$, $p_1, p_2 \in P_m$ ve

$$q_1(x_i)f_i - p_1(x_i) = q_2(x_i)f_i - p_2(x_i) = 0, \qquad i = 1,...,k$$

O zaman,

$$p_1(x_i)q_2(x_i) - q_1(x_i)p_2(x_i) = 0, \qquad i = 1,...,k$$

ve

$$p_1q_2 - q_1p_2 \in P_{k-1}$$

□

Böylece (6.3) lineer denklemleri tek bir rasyonel fonksiyon verirler. Bu, $\overline{r} \in R_n^m$ ile gösterilsin. Eğer, (6.1) denklemi sağlanırsa $\overline{r}$ bunu interpole eden rasyonel fonksiyondur. Fakat, $\overline{r}$ (6.1) denklemini bazı i – ler için sağlamayabilir. Böyle (x_i, f_i) noktalarına alınamaz noktalar denir.

$$\overline{r}(x_i) \neq f_i \tag{6.4}$$

Eğer, $\overline{r} = \overline{p}/\overline{q}$ ve (6.4) sağlanırsa tanımdan

$$\overline{p}(x_i) = f_i\overline{q}(x_i)$$

olduğundan $\overline{q}(x_i) = \overline{p}(x_i) = 0$ olmalıdır. Yani x_i, $\overline{p}$ ve $\overline{q}$ ’nın ortak köküdür. Kabaca söylemek gerekirse alınamayan noktalar pay ve paydadan sadeleşmektedir.

Örnek 6.1. : $(-1,1),(0,1),(1,1)$ noktalarından geçen $r \in R_1^1$ fonksiyonunu bulunuz.
(6.3) denklemleri;

$$b_0 - b_1 - a_0 + a_1 = 0$$

$$-a_0 = 0$$

$$b_0 + b_1 - a_0 - a_1 = 0$$

olur. $a_0 = 0, a_1 = 1, b_0 = 0, b_1 = 1$ ve buradan;

$$\overline{r} = \frac{x}{x} = 1$$

olur. $(0,0)$ noktası alınamaz noktadır.

□

Teorem 6.3. : Eğer alınamayan nokta varsa $(x_i, f_i),\ i = 1,...,k$ dataları bozulmuş biçim oluştururlar.

İspat : h, alınamayan noktaların sayısı olsun. $\overline{p}$ ve $\overline{q}$ 'nın ortak sıfırlarına tekabül ederler. Bunları sadeleştirerek, $k-h$ alınabilen nokta için $\overline{r} \in R_{n-h}^{m-h}$ ve $\overline{r}(x_i) = f_i$ elde ederiz. $m+n-2h < m+n-h = k-h-1$ olduğundan dolayı alınabilir noktalar dejeneredir.

□

Teorem 6.4. : Yukarıdaki teoremin kısmen tersi aşağıdaki teoremdir. Eğer, $(x_i, f_i),\ i = 1,...,k$ (bozulmuş biçim), yani $r_1 \in R_{n-t}^{m-s},\ s,t \geq 0,\ s+t > 0$ öyle ki $r_1(x_i) = f_i,\ i = 1,...,k$. O zaman, R_{n+s}^{m+t} için $(x_i, f_i),\ i = 1,...,k$ kümesinde keyfi $x_{k+1} \neq x_i$ ve f_{k+1} için $r_1(x_{k+1}) = f_{k+1}$ veya (x_{k+1}, f_{k+1}) alınamaz noktadır.

İspat : $r \in R_{n+s}^{m+t}$ olsun. $r(x_{k+1}) = f_{k+1}$ fakat $r_1(x_i) \neq f_i$ olsun. h tane öbür indislerden. O zaman $r - r_1$, $k-h$ köke sahiptir ve $pq_1 - qp_1 \in P_l$ dir. Burada, $l = m+n-h < k-h$ dır. Böylece, $r = r_1$ dir ve $r_1(x_{k+1}) = f_{k+1}$ dir.

∎

Açıktır ki, interpolasyon probleminin çözümünün olması için rasyonel fonksiyonun (6.3) denklemiyle belirlenen çözümünün paydadaki polinomu $x_1,...,x_k$ interpolasyon noktalarını sıfırı olarak bulundurmamalıdır.

Son olarak interpolasyon formu bulmak için Jacobi metodu verilsin.

$\omega(x) = (x - x_1)...(x - x_k)$ olsun. O zaman,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{g_i}{\omega'(x_i)}$$

toplamı, x_i noktalarında g_i değerini alan en fazla $k-1$ inci dereceden bir polinomun baş katsayısıdır. $i = 1,...,k$. (6.3) denkleminin herhangi bir çözümü;

$$\frac{x_i^s p(x_i)}{\omega'(x_i)} = \frac{x_i^s f_i q(x_i)}{\omega'(x_i)}, \quad i = 1,...,k, \quad s = 0,...,n-1$$

denkleminin de bir çözümüdür.

Ve buradan,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^s p(x_i)}{\omega'(x_i)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^s f_i q(x_i)}{\omega'(x_i)}, \quad s = 0,...,n-1 \tag{6.5}$$

elde edilir.

$x^s p \in P_{k-2}$ olduğu için baş katsayısı sıfırdır(x^{k-1} in katsayısıdır). Böylece sol taraf sıfır olur ve dolayısıyla sağ taraf sıfırdır. q'nun katsayıları $b_0,...,b_n$, aşağıdaki formu sağlar.

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^s f_i q(x_i)}{\omega'(x_i)} = \sum_{j=0}^{n} v_{sj} b_j = 0, \quad s = 0,...,n-1 \tag{6.6}$$

Burada,

$$v_{sj} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^{s+j} f_i}{\omega'(x_i)}, \quad j = 0,...,n, \quad s = 0,...,n-1 \tag{6.7}$$

v_{sj} katsayıları $s+j$ toplamın bağımlıdır. $b_0,...,b_n$ (6.6)'dan belirlenirse $q(x_i)=0$, $i=1,...,k$ olup olmadığını buluruz. Şayet q'nun x_i-lerden hiçbiri sıfırı değilse interpolasyon çözüme sahiptir ve $r = p/q$ bulunur. Burada, p

$$p(x_i) = f_i q(x_i), \quad i = 1,..,k$$

ifadesinden bulunur.

O halde, p'yi interpole ederiz. P, Lagrange interpolasyon polinomundan da bulunabilir. Yani,

$$p(x) = \omega(x) \sum_{i=1}^{k} \frac{p(x_i)}{\omega'(x_i)(x-x_i)} = \omega(x) \sum_{i=1}^{k} \frac{f_i q(x_i)}{\omega'(x_i)(x-x_i)} \tag{6.8}$$

dir.

Örnek 6.2. : $|x|$ fonksiyonunu $x = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ noktalarında R_2^2 den bir fonksiyon ile interpole ediniz.

$$v_{00} = -\frac{4}{3}, v_{10} = v_{01} = 0, v_{11} = v_{02} = \frac{2}{3}, v_{12} = 0$$

$$r = \frac{3x^2}{1+2x^2}$$

Aynı datalarla R_1^3 $q(x) = x$ bulunur ki (0,0) alınamaz noktadır. Sonuç, $r = \frac{1}{3}(1+2x^2)$ dir ve $(-1,1)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(1,1)$ noktaları sağlanmaktadır.

□

6.1. En İyi Yaklaşımın Hesaplanması

Verilen bir fonksiyona en iyi rasyonel yaklaşımı bulma işlemi bir sürü zorluklarla doludur. Bu konu üzerinde hala çalışmalar yapılmaktadır. $f(x)$, (m,n)'de normal ve $I = [-1,1]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bir $r \in R_n^m$ bulacağız ki $f - r$, $N = m + n + 2$ noktada ardışık işaret değiştirecek. *I*, içerisindeki $N = m + n + 2$ noktaya referans noktaları denir. Bunlar $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$ olsun ve *X* ile gösterilsin.

Remez algoritmasıyla hesaplama:

(i) X_0 başlangıç referansı olsun. *F* nin $\overline{R}_n^m$ de X_0 a en iyi yaklaşımı bulunsun. Bulunan rasyonel fonksiyona r_0 denilsin. Eğer, r_0 varsa ve *f*, (m,n)'ye göre X_0 da normalse $r_0 = p_0 / q_0$ aşağıdaki yolla belirlenir.

$$[f(x_\sigma) - (-1)^\sigma A_0] q_0(x_\sigma) - p_0(x_\sigma) = 0, \quad \sigma = 1,2,\ldots,N \tag{6.1.1}$$

$N \times N$ lik denklem takımının sıfırdan farklı bir çözümü varsa bunun *k* ıncı satırı,

$$[f(x_k) - (-1)^k A_0, (f(x_k) - (-1)^k A_0)x_k, \ldots, (f(x_k) - (-1)^k A_0)x_k^n, -1, -x_k, \ldots, -x_k^m]$$

Bu A_0 sapmasının n inci dereceden bir polinom eşitliğini sağlaması anlamına gelir. Bu denkleme $\phi_0(x)=0$ denilsin. ϕ_0'ın bütün köklerinin reel olduğu biliniyor. Bu sıfırlardan birisini A_0 a koyarak yukarıdaki (6.1.1) denkleminden p_0 ve q_0 çözülür (Jacobi metoduyla da çözülebilir). ϕ_0'ın bir sıfırı $[x_1, x_N]$ aralığının dışındadır. $r_0 \in \overline{R}_n^m$'ın var olduğu ve f, (m,n)'ye göre X_0 da normalse tanıtılan işlemlere göre r_0 tek bir şekilde belli olur.

(ii) Şimdi elimizde $x_\sigma \in X_0$ için

$$f(x_\sigma) - r_0(x_\sigma) = (-1)^\sigma A_0$$

ı sağlayan $r_0 \in \overline{R}_n^m$ ve A_0 var. Somut olması için $A_0 > 0$ kabul edilsin. Şimdi X_1, yeni bir referans olarak seçilsin. Her bir $x_\sigma \in X_0$'ı I_0^σ kapalı aralığıyla çevirelim (x_σ'ın I'nın son noktası olma durumunda, x_σ ın I_0^σ nın son noktası olsun). Böylece I_0^σ ve $I_0^{\sigma+1}$ ardışık aralıklarının ortak bir noktaları vardır ve böylece

$$I = \bigcup_{\sigma=1}^{N} I_0^\sigma$$

olur. Mesela,

$$B_\sigma = \max_{x \in I_0^\sigma}[f(x) - r_0(x)] = [f(x_\sigma^{(1)}) - r_0(x_\sigma^{(1)})],\ \sigma \text{ çift ise}$$

$$B_\sigma = \min_{x \in I_0^\sigma}[f(x) - r_0(x)] = [f(x_\sigma^{(1)}) - r_0(x_\sigma^{(1)})],\ \sigma \text{ tek ise}$$

sayılarını tanımlayalım.

$x_\sigma^{(1)}$'in herhangi bir seçimi belirli tanımıyla uyumludur. Kesinlikle, her σ için, $|B_\sigma| \geq A_0$ dır.

$$B_0 = \max_\sigma |B_\sigma|$$

olsun, sonra E_n^m tanımından, $dist(f, R_m^n)$ dir. (Tanım 1.1 den)

$$A_0 \leq E_n^m(f;I) \leq B_0$$

elde edilir. Eğer, $A_0 = B_0$ olursa

$$X_1 = \{x_1^{(1)}, \dots, x_N^{(1)}\}$$

ile değiştirilen X_0'la (i)'ye dönülür ve A_0 ile A_1 ile prosedürü tekrarlanır. $B_j - A_j$ farkı sürecin ne zaman bitirilmesi gerektiğini göstermek için incelenir. X_0 üzerinde r_0'ın var olması ve f 'nin normal olması önemli kısıtlardır. Eğer f, (m,n)'ye göre I üzerinde normalse başlangıçtaki referans alterne kümeye yeterli yakınsa (Ya da eğer başlangıç referansı r rasyonel fonksiyonundan $\|f - r\|$, E_n^m'ye yeterince yakınsa) varsayımlar yeterlidir ve Remez prosedürü yakınsamaktadır [10].

BÖLÜM 7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Adi rasyonel yaklaşımlar, benzer tarzda genelleştirilmiş rasyonel yaklaşımlara genişleme imkânı sağlamaktadır. Trigonometrik rasyonel yaklaşımlar, ortogonal polinomlardan oluşan genelleştirilmiş rasyonel yaklaşımlar ve en genel rasyonel yaklaşımlar konuları bazı teoremlerle desteklenerek anlatıldı.

İki önemli uygulama rasyonel interpolasyon ve Riccati diferansiyel denkleminin çözümleri olarak verildi.

Bu yaklaşımlar mühendislik ve pozitif bilimlerin tamamında kullanılmaktadır.

Tekilliği olan fonksiyonlara yaklaşımlarda da rasyonel yaklaşımlar önemli bir yere sahiptir.

KAYNAKLAR

[1] CHENEY, E., W., Introduction to Approximation Theory, 1966.

[2] PLATO, R., Conside Numerical Mathematics, 1962.

[3] CHENEY, W., KINCAID, D., Numerical Analysis Mathematics of Scientific Computing, 2002.

[4] RIVLIN, T., J., An Introduction to the Approximation of Functions, 1969.

[5] FAIR, W., Pade Approximation to the Solution of the Riccati Equation, 1964.

[6] BAKER, A., G., Essentials of Pade Approximants, 1975.

[7] WALL, H., S., Continued Fractions, Van Nostrend, New York, 1948.

[8] LUKE, Y., L., “ The Pade Table and The τ - method ” , J. Math. And Phys., v. 37. P. 110 – 127, 1958.

[9] ERDELY, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGEN, F., TRICOMI, F., G., Highen Transcendentel Functions, Vol I, Mc Graw – Hill, New York, 1953.

[10] RALSTON, A., “ Rational Chebychev Approximation By Remez Algorithms ”, Numer. Math. PP. 322 – 330, 1965.

EKLER

Program – 1 : f(x)=Cosx fonksiyonunu için R_4^4 Pade yaklaşımı ile ilgili Mathematica programı.

İlk olarak, $f(x).Q_m(x) - P_n(x) = 0$ denklemini oluşturalım.

```
Clear[a,f,k,m,n,p,q,R,Q,P,x];
f[x_]:=Cos[x];
F[x,k]:=Series[f[x],{x,0,k}];
```

P[x,k]= $\sum_{i=0}^{k} p_i x^i$;

Q[x,k]= $1 + \sum_{i=1}^{k} q_i x^i$;

```
n=4;
m=4;
```

vars=Union[Table[p_i ,{i,0,n}], Table[q_i ,{i,1,m}]];

```
Print["Pn(x)=" ,P[x,n]];
Print["Qm(x)=" ,Q[x,m]];
Print["f(x)=" ,F[x,m+n]];
Print[" " ];
Print["Form f(x)Qm(x)-Pn(x)=0"];
Print[Expand[F[x,n+m]Q[x,m]-P[x,n]==0];
```

$P_n(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4$

$Q_m(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3 + q_4 x^4$

$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + 0[x]^9$

Form $f(x)Q_m(x) - P_n(x) = 0$

$$(1 - p_0) + (-p_1 + q_1)x + (-\frac{1}{2} - p_2 + q_2)x^2 + (-p_3 - \frac{q_1}{2} + q_3)x^3 + (\frac{1}{24} - p_4 - \frac{q_2}{2} + q_4)x^4 +$$

$$(\frac{q_1}{24} - \frac{q_3}{2})x^5 + (-\frac{1}{720} + \frac{q_2}{24} - \frac{q_4}{2})x^6 + (-\frac{q_1}{720} + \frac{q_3}{24})x^7 + (\frac{1}{40320} - \frac{q_2}{720} + \frac{q_4}{24})x^8 + 0[x]^9 == 0$$

İkinci olarak, $f(x).Q_m(x) - P_n(x) = 0$ denklemini çözelim.

L=Expand[F[x,n+m]Q[x,m]-P[x,n]];
coeffs=coefficientList[L,x];
Eqns=Distribute[coeffs==0,List];
Print[TableForm[Eqns]];
Print[“ ”];
Solset=Solve[Eqns,vars];
R[x]= Simplity[ReplaceAll[$\frac{\mathrm{P[x,n]}}{\mathrm{Q[x,m]}}$,[solset$_{[[1]]}$]];
Print[TableForm[Transpoze[solset]]];
Print[“ ”];
Print[“f[x]=” ,f[x]];
Print[“R[x]=” ,R[x]];

$$1 - p_0 == 0$$
$$-p_1 + q_1 == 0$$
$$-\frac{1}{2} - p_2 + q_2 == 0$$
$$-p_3 - \frac{q_1}{2} + q_3 == 0$$
$$\frac{1}{24} - p_4 - \frac{q_2}{2} + q_4 == 0$$
$$\frac{q_1}{24} - \frac{q_3}{2} == 0$$
$$-\frac{1}{720} + \frac{q_2}{24} - \frac{q_4}{2} == 0$$
$$-\frac{q_1}{720} + \frac{q_3}{24} == 0$$
$$\frac{1}{40320} - \frac{q_2}{720} + \frac{q_4}{24} == 0$$

$p_0 \to 1$
$p_1 \to 0$
$p_2 \to -\dfrac{115}{252}$
$p_3 \to 0$
$p_4 \to \dfrac{313}{15120}$
$q_1 \to 0$
$q_2 \to \dfrac{11}{252}$
$q_3 \to 0$
$q_4 \to \dfrac{13}{15120}$

$f[x] = Cos[x]$
$$R[x] = \frac{15120 - 6900x^2 + 313x^4}{15120 + 660x^2 + 13x^4}$$

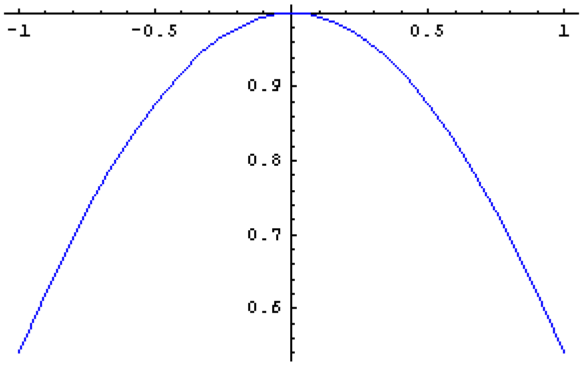
Mathematica'nın Pade çözümüyle karşılaştıralım.

```
Needs["Calculus`Pade`"];
Clear[r];
r[x]=ExpandDenominator[ExpandNumerator[Together[Pade[f[x],{x,0,4,4}]]]];
Print["f[x]=" ,f[x]];
Print["r[x]=" ,r[x]];
```

$f[x] = Cos[x]$
$$r[x] = \frac{15120 - 6900x^2 + 313x^4}{15120 + 660x^2 + 13x^4}$$

[-1,1] aralığında fonksiyonun ve Pade yaklaşımının grafiğini çizelim.

```
Needs[“Graphics`Colors`”];
Plot[{f[x],r[x]},{x,-1,1},PlotStyle→{Red,Blue}];
Print[“f[x]=” ,f[x]];
Print[“r[x]=” ,r[x]];
```

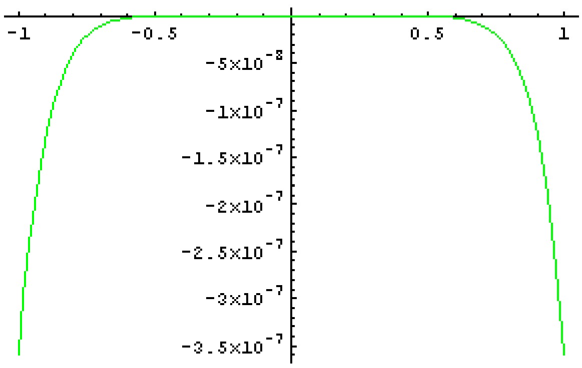


$$f[x] = Cos[x]$$

$$r[x] = \frac{15120 - 6900x^2 + 313x^4}{15120 + 660x^2 + 13x^4}$$

[-1,1] aralığında hatayı bulalım ve grafiğini çizelim.

```
Plot[f[x]-r[x],{x,-1,1},PlotRange→All,PlotStyle→Green];
Print[“f[x]-r[x]=” ,f[x]-r[x]];
Print[“The maximum error is”];
Print[“|f[x] - r[x]| ≤” ,Abs[f[1.0]-r[1.0]]];
```



$$f[x] - r[x] = -\frac{15120 - 6900x^2 + 313x^4}{15120 + 660x^2 + 13x^4} + Cos[x]$$

The maximum error is

$$|f[x] - r[x]| \le 3.5987 \times 10^{-7}$$

[-1,1] aralığında 7. dereceden Mc Lauren polinomu ile hatayı karşılaştıralım.

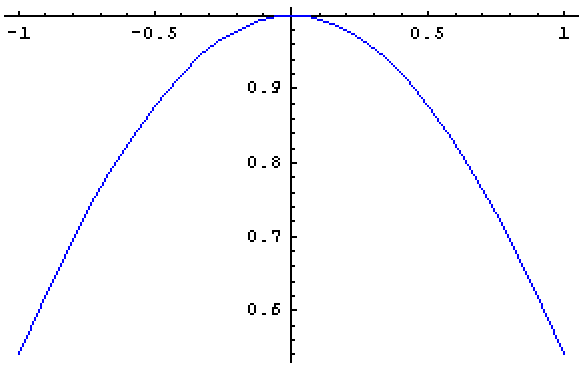
7. dereceden Mc Lauren polinomunu yazalım.

```
s[x]=Normal[Series[f[x],{x,0,7}]];
Print["s[x]=" ,s[x]];
```

$$s[x]=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}$$

[-1,1] aralığında fonksiyonun ve Pade yaklaşımının grafiğini çizelim.

```
Needs["Graphics`Colors`"];
Plot[{f[x],s[x]},{x,-1,1},PlotStyle→{Red,Blue}];
Print["f[x]=" ,f[x]];
Print["s[x]=" ,s[x]];
```

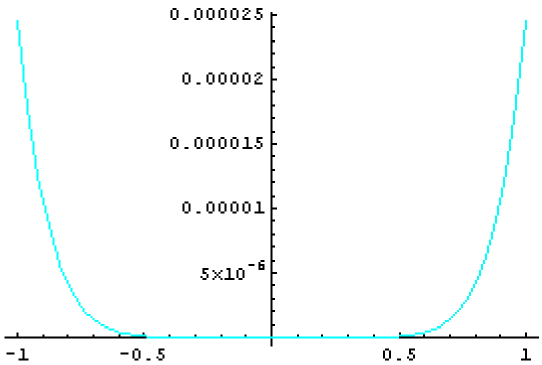


$$f[x]=Cos[x]$$

$$s[x]=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}$$

[-1,1] aralığında hatayı bulalım ve grafiğini çizelim.

```
s[x]=Normal[Series[f[x],{x,0,7}]];
Plot[f[x]-s[x],{x,-1,1},PlotRange→All,PlotStyle→Cyan];
Print["f[x]-s[x]=" ,f[x]-s[x]];
Print["The maximum error is"];
Print["|f[x] - s[x]| ≤" ,Abs[f[1.0]-s[1.0]]];
```



$$f[x]-s[x]=-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+Cos[x]$$

The maximum error is

$$|f[x]-s[x]|\leq 0.0000245281$$

[-1,1] aralığında 9. dereceden Mc Lauren polinomu ile hatayı karşılaştıralım.

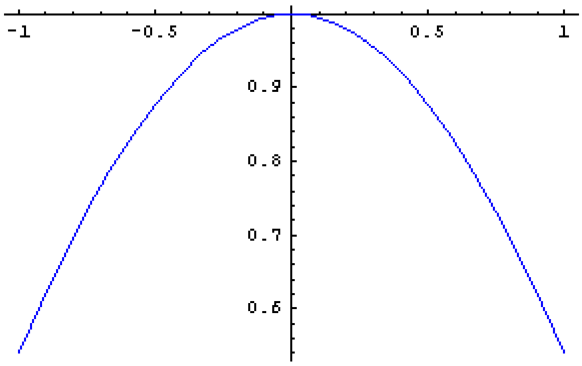
9. dereceden Mc Lauren polinomunu yazalım.

```
s[x]=Normal[Series[f[x],{x,0,9}]];
Print["s[x]=" ,s[x]];
```

$$s[x]=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}$$

[-1,1] aralığında fonksiyonun ve Pade yaklaşımının grafiğini çizelim.

```
Needs["Graphics`Colors`"];
Plot[{f[x],s[x]},{x,-1,1},PlotStyle→{Red,Blue}];
Print["f[x]=" ,f[x]];
Print["s[x]=" ,s[x]];
```

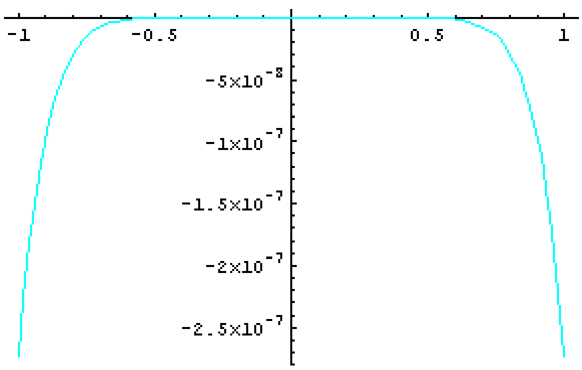


$$f[x] = Cos[x]$$

$$s[x] = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320}$$

[-1,1] aralığında hatayı bulalım ve grafiğini çizelim.

```
s[x]=Normal[Series[f[x],{x,0,9}]];
Plot[f[x]-s[x],{x,-1,1},PlotRange→All,PlotStyle→Cyan];
Print["f[x]-s[x]=" ,f[x]-s[x]];
Print["The maximum error is"];
Print["|f[x] - s[x]| ≤" ,Abs[f[1.0]-s[1.0]]];
```



$$f[x] - s[x] = -1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - \frac{x^8}{40320} + Cos[x]$$

The maximum error is

$$|f[x] - s[x]| \le 2.73497 \times 10^{-7}$$

Program – 2 : f(x)=Arctanx fonksiyonunu için R_2^3 Pade yaklaşımı ile ilgili Mathematica programı.

İlk olarak, $f(x).Q_m(x)-P_n(x)=0$ denklemini oluşturalım.

```
Clear[a,f,k,m,n,p,q,R,Q,P,x];
f[x_]:=ArcTan[x];
F[x,k]:=Series[f[x],{x,0,k}];
```
P[x,k]= $\sum_{i=0}^{k} p_i x^i$;

Q[x,k]= $1+\sum_{i=1}^{k} q_i x^i$;
```
n=3;
m=2;
```
vars=Union[Table[p_i ,{i,0,n}], Table[q_i ,{i,1,m}]];

Print["P_n(x)=" ,P[x,n]];

Print["Q_m(x)=" ,Q[x,m]];
```
Print["f(x)=" ,F[x,m+n]];
Print[" " ];
```
Print["Form f(x)Q_m(x)-P_n(x)=0"];
```
Print[Expand[F[x,n+m]Q[x,m]-P[x,n]==0];
```

$P_n(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3$

$Q_m(x)=q_0+q_1x+q_2x^2$

$f(x)=1-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+0[x]^6$

Form $f(x)Q_m(x)-P_n(x)=0$

$-p_0+(1-p_1)x+(-p_2+q_1)x^2+(-\frac{1}{3}-p_3+q_2)x^3-\frac{q_1}{3}x^4+(\frac{1}{5}-\frac{q_2}{3})x^5+0[x]^6==0$

İkinci olarak, $f(x).Q_m(x)-P_n(x)=0$ denklemini çözelim.

```
L=Expand[F[x,n+m]Q[x,m]-P[x,n]];
coeffs=coefficientList[L,x];
Eqns=Distribute[coeffs==0,List];
Print[TableForm[Eqns]];
Print[" " ];
Solset=Solve[Eqns,vars];
```
R[x]= Simplity[ReplaceAll[$\frac{P[x,n]}{Q[x,m]}$,[$solset_{[[1]]}$]];
```
Print[TableForm[Transpoze[solset]]];
Print[" " ];
Print["f[x]=" ,f[x]];
Print["R[x]=" ,R[x]];
```

$-p_0 == 0$
$1 - p_1 == 0$
$-p_2 + q_1 == 0$
$-\frac{1}{3} - p_3 + q_2 == 0$
$-\frac{q_1}{3} == 0$
$\frac{1}{5} - \frac{q_2}{3} == 0$

$p_0 \to 0$
$p_1 \to 1$
$p_2 \to 0$
$p_3 \to \frac{4}{15}$
$q_1 \to 0$
$q_2 \to \frac{3}{5}$

$f[x] = ArcTan[x]$
$R[x] = \frac{x(15+4x^2)}{15+9x^2}$

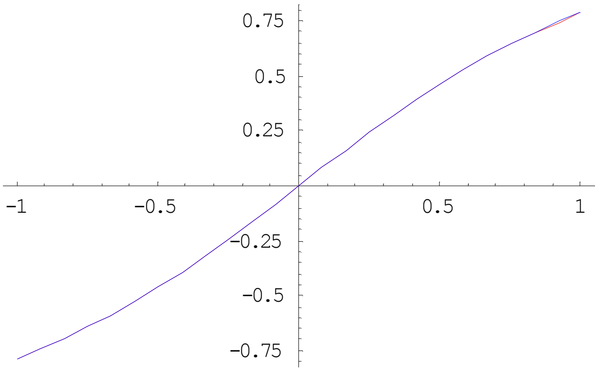
Mathematica'nın Pade çözümüyle karşılaştıralım.

```
Needs["Calculus`Pade`"];
Clear[r];
r[x]=ExpandDenominator[ExpandNumerator[Together[Pade[f[x],{x,0,3,2}]]]];
Print["f[x]=" ,f[x]];
Print["r[x]=" ,r[x]];
```

$f[x] = ArcTan[x]$
$r[x] = \frac{15x+4x^3}{15+9x^2}$

[-1,1] aralığında fonksiyonun ve Pade yaklaşımının grafiğini çizelim.

```
Needs["Graphics`Colors`"];
Plot[{f[x],r[x]},{x,-1,1},PlotStyle→{Red,Blue}];
Print["f[x]=" ,f[x]];
Print["r[x]=" ,r[x]];
```

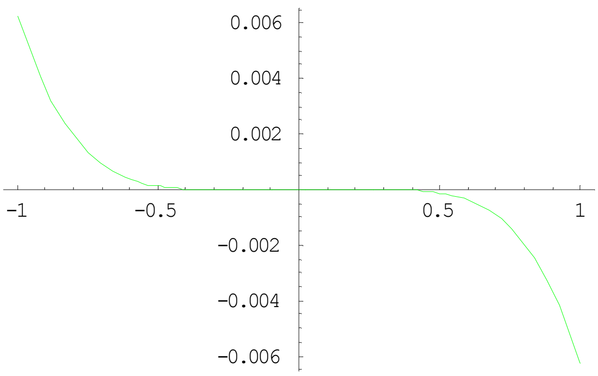


$$f[x] = ArcTan[x]$$

$$r[x] = \frac{15x + 4x^3}{15 + 9x^2}$$

[-1,1] aralığında hatayı bulalım ve grafiğini çizelim.

```
Plot[f[x]-r[x],{x,-1,1},PlotRange→All,PlotStyle→Green];
Print["f[x]-r[x]=" ,f[x]-r[x]];
Print["The maximum error is"];
Print["|f[x] - r[x]| ≤" ,Abs[f[1.0]-r[1.0]]];
```



$$f[x] - r[x] = -\frac{15x + 4x^3}{15 + 9x^2} + ArcTan[x]$$

The maximum error is

$$\left| f[x] - r[x] \right| \leq 0.0062685$$

[-1,1] aralığında 7. dereceden Mc Lauren polinomu ile hatayı karşılaştıralım.

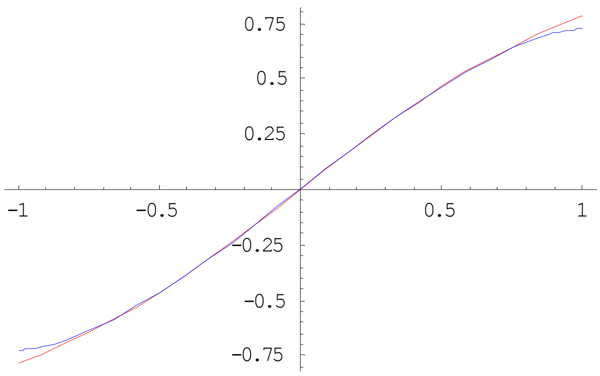
7. dereceden Mc Lauren polinomunu yazalım.

s[x]=Normal[Series[f[x],{x,0,7}]];
Print["s[x]=" ,s[x]];

$$s[x] = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$

[-1,1] aralığında fonksiyonun ve Pade yaklaşımının grafiğini çizelim.

Needs["Graphics`Colors`"];
Plot[{f[x],s[x]},{x,-1,1},PlotStyle$\rightarrow${Red,Blue}];
Print["f[x]=" ,f[x]];
Print["s[x]=" ,s[x]];

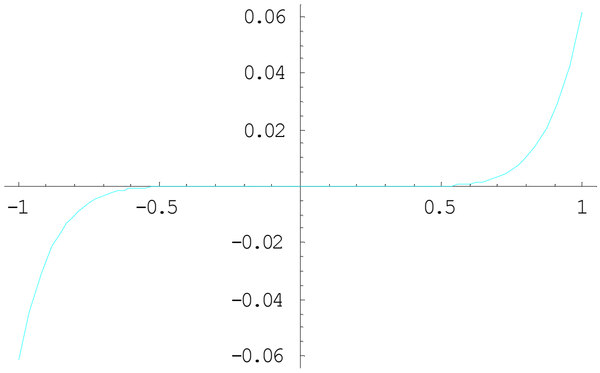


$$f[x] = ArcTan[x]$$

$$s[x] = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$

[-1,1] aralığında hatayı bulalım ve grafiğini çizelim.

s[x]=Normal[Series[f[x],{x,0,7}]];
Plot[f[x]-s[x],{x,-1,1},PlotRange$\rightarrow$All,PlotStyle$\rightarrow$Cyan];
Print["f[x]-s[x]=" ,f[x]-s[x]];
Print["The maximum error is"];
Print["$|f[x]-s[x]|\leq$" ,Abs[f[1.0]-s[1.0]]];



$$f[x]-s[x]=-1+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+ArcTan[x]$$

The maximum error is

$$|f[x]-s[x]|\leq 0.0615886$$

[-1,1] aralığında 9. dereceden Mc Lauren polinomu ile hatayı karşılaştıralım.

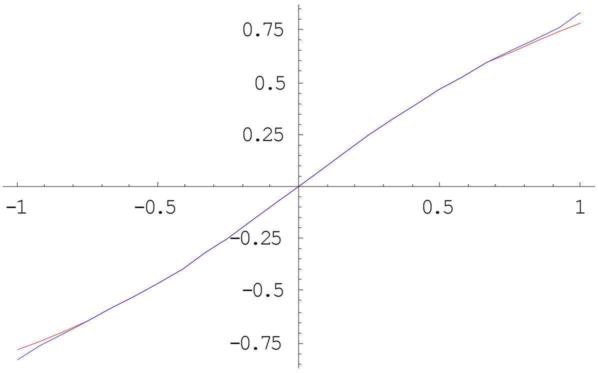
9. dereceden Mc Lauren polinomunu yazalım.

s[x]=Normal[Series[f[x],{x,0,9}]];
Print["s[x]=" ,s[x]];

$$s[x]=1-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}$$

[-1,1] aralığında fonksiyonun ve Pade yaklaşımının grafiğini çizelim.

```
Needs["Graphics`Colors`"];
Plot[{f[x],s[x]},{x,-1,1},PlotStyle→{Red,Blue}];
Print["f[x]=" ,f[x]];
Print["s[x]=" ,s[x]];
```

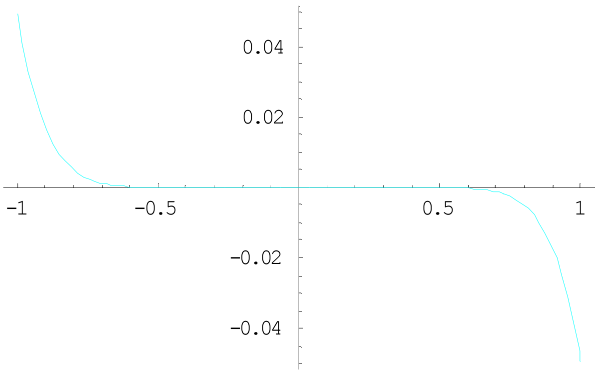


$f[x] = ArcTan[x]$

$$s[x] = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$$

[-1,1] aralığında hatayı bulalım ve grafiğini çizelim.

```
s[x]=Normal[Series[f[x],{x,0,9}]];
Plot[f[x]-s[x],{x,-1,1},PlotRange→All,PlotStyle→Cyan];
Print["f[x]-s[x]=" ,f[x]-s[x]];
Print["The maximum error is"];
Print["|f[x] - s[x]| ≤" ,Abs[f[1.0]-s[1.0]]];
```



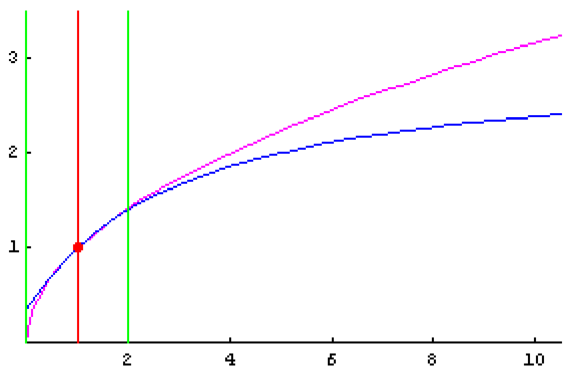
$$f[x] - s[x] = -1 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} + ArcTan[x]$$

The maximum error is

$|f[x] - s[x]| \leq 0.0495225$

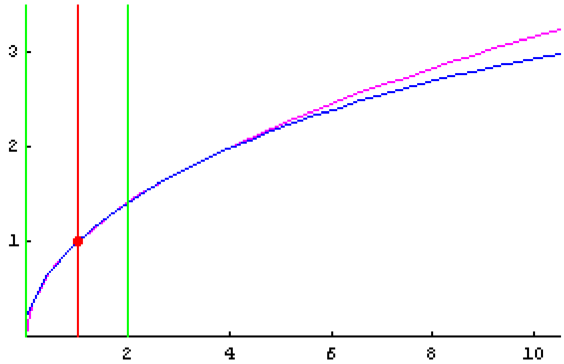
Program – 3 : $x_0=1$ civarında $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunu için Pade yaklaşımını bulalım.

```
f[x_]=√x ;
x0=1;
a=0;
b=10.5;
c=0.0;
d=3.5;
a0=0.0;
b0=2.0;
Needs["Graphics`Colors`"];
Needs["Calculus`Pade`"];
Cdot=Graphics[{{Red,PointSize[0.02].Point[{x0,f[x0]}]}}];
Rends=Graphics[{{Green,Line[{{a0,c},{a0,d}}]},{Red,Line[{{x0,c},{x0,d}}]},
          {Green,Line[{{b0,c},{b0,d}}]}}];
For[n=1,n≤5,n++,
   P[x_]=Together[Pade[f[x],{x,x0,n,n}]];
  graph=Plot[{f[x],P[x]},{x,a,b},PlotStyle→{Magenta,Blue},
      PlotRange→{{a,b},{c,d}},Ticks→{ Range[0,10,2],
        Range[0,4,1]},DisplayFunction →Identity];
Show[graph,Cdot,Rends, DisplayFunction → $DisplayFunction ];
Print["f[x]=" ,f[x]];
Print["P" n,n,"[x]=",P[x]];]
```



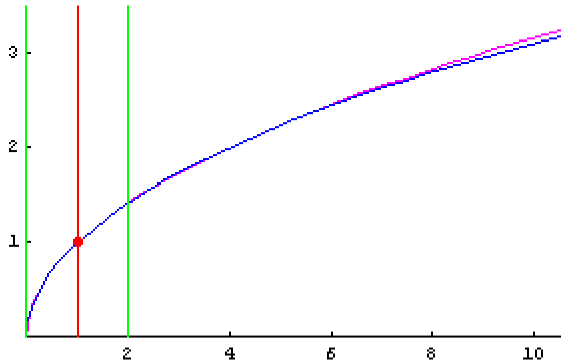
$f[x]=\sqrt{x}$

$P_{1,1}[x]=\dfrac{1+3x}{3+x}$



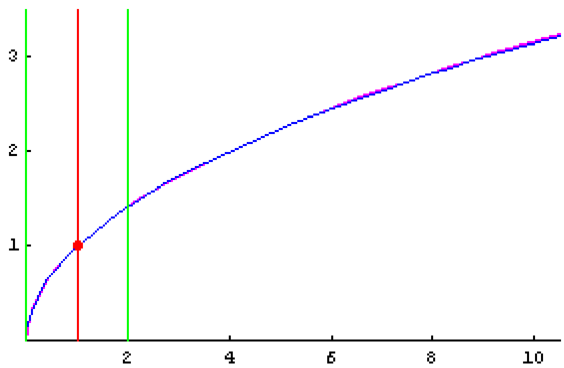
$$f[x] = \sqrt{x}$$

$$P_{2,2}[x] = \frac{1+10x+5x^2}{5+10x+x^2}$$



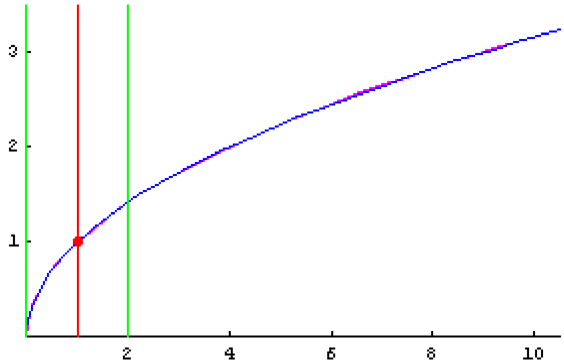
$$f[x] = \sqrt{x}$$

$$P_{3,3}[x] = \frac{1+21x+35x^2+7x^3}{7+35x+21x^2+x^3}$$



$$f[x] = \sqrt{x}$$

$$P_{4,4}[x] = \frac{1+36x+126x^2+84x^3+9x^4}{9+84x+126x^2+36x^3+x^4}$$

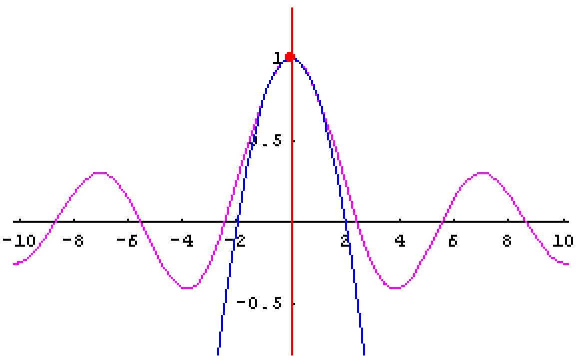


$$f[x] = \sqrt{x}$$

$$P_{5,5}[x] = \frac{1 + 55x + 330x^2 + 462x^3 + 165x^4 + 11x^5}{11 + 165x + 462x^2 + 330x^3 + 55x^4 + x^5}$$

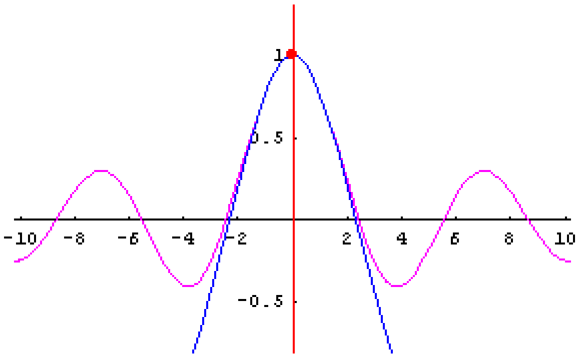
Program – 4 : $x_0=0$ civarında $f(x)=BesslJ[0,x]$ fonksiyonunu için Pade yaklaşımını bulalım.

```
f[x_]=BesselJ[0,x];
x0=0;
a=-10.2;
b=10.2;
c=-0.8;
d=1.3;
a0=-11;
b0=11;
Needs["Graphics`Colors`"];
Needs["Calculus`Pade`"];
Cdot=Graphics[{{Red,PointSize[0.02].Point[{x0,f[x0]}]}}];
Rends=Graphics[{{Green,Line[{{a0,c},{a0,d}}]},{Red,Line[{{x0,c},{x0,d}}]},
        {Green,Line[{{b0,c},{b0,d}}]}}];
For[n=1,n≤6,n++,
  P[x_]=Together[Pade[f[x],{x,x0,n+1,n}]];
 graph=Plot[{f[x],P[x]},{x,a,b},PlotStyle→{Magenta,Blue},
    PlotRange→{{a,b},{c,d}},Ticks→{ Range[-10,10,2],
     Range[-0.5,1,0.5]},DisplayFunction →Identity];
Show[graph,Cdot,Rends, DisplayFunction → $DisplayFunction ];
Print["f[x]=" ,f[x]];
Print["P" n,n,"[x]=",P[x]];]
```



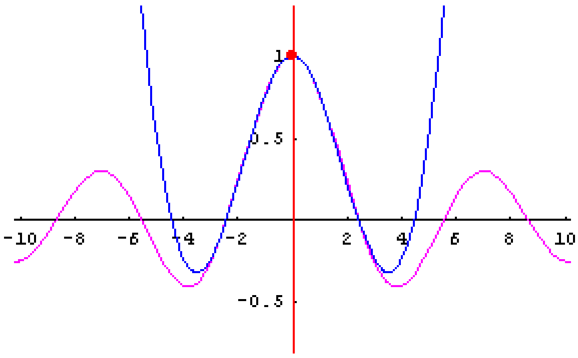
$f[x]=BesselJ[0,x]$

$P_{1,1}[x]=\frac{1}{4}(4-x^2)$



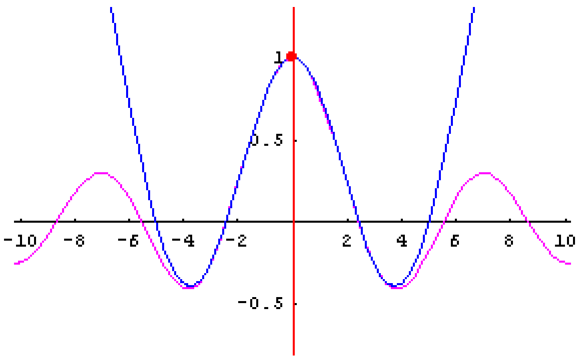
$f[x] = BesselJ[0, x]$

$$P_{2,2}[x] = \frac{16 - 3x^2}{16 + x^2}$$



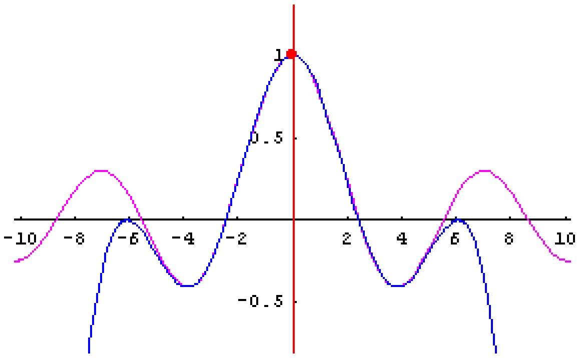
$f[x] = BesselJ[0, x]$

$$P_{3,3}[x] = \frac{576 - 128x^2 + 5x^4}{16(36 + x^2)}$$



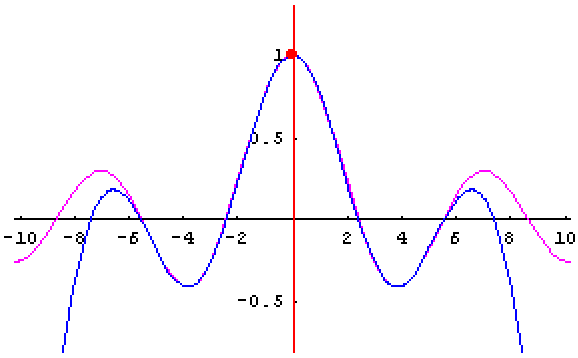
$f[x] = BesselJ[0, x]$

$$P_{4,4}[x] = \frac{11520 - 2448x^2 + 79x^4}{11520 + 432x^2 + 7x^4}$$



$$f[x] = BesselJ[0, x]$$

$$P_{5,5}[x] = \frac{1612800 - 366336x^2 + 16308x^4 - 205x^6}{36(44800 + 1024x^2 + 9x^4)}$$



$$f[x] = BesselJ[0, x]$$

$$P_{6,6}[x] = -\frac{3(-62976000 + 14073600x^2 - 587712x^4 + 6421x^6)}{188928000 + 5011200x^2 + 63936x^4 + 421x^6}$$

ÖZGEÇMİŞ

Cemil Karaman, 16.07.1980 de İstanbul' da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sakarya'da tamamladı. 1998 yılında girdiği Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2002 yılında mezun oldu. 2003 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisansını 2003 yılında tamamladı. 2003 yılında Sakarya Sapanca Şehit Albay Güner Ekici Lisesinde matematik öğretmenliğine başladı. 2007 yılında Sapanca Anadolu Lisesine matematik öğretmeni olarak atandı ve halen aynı okulda görevini sürdürmektedir.