T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HADAMARD MATRİSLER VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe Yasemin USTACIK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ö. Faruk GÖZÜKIZIL

Haziran 2007

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HADAMARD MATRİSLER VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe Yasemin USTACIK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 20 / 06 / 2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr.	**Doç. Dr.**	**Doç. Dr.**
Ö. Faruk GÖZÜKIZIL	**Murat TOSUN**	**Cemalettin KUBAT**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmaya beni yönlendirip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmanın her aşamasında zamanını ve yardımını esirgemeyen saygıdeğer Hocam Yrd. Doç. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL' a saygı ve teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Çalışmalarım esnasında manevi destekleriyle yanımda olan Yrd. Doç. Dr. İbrahim ÖZGÜR, Araştırma Görevlileri Soley ERSOY' a, Murat SARDUVAN' a teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmasının tüm sürecinde her zaman yanımda olan değerli anneme, babama ve tez yazım aşamasında bana zamanlarını ayıran kardeşlerim Arif USTACIK' a ve Habibe USTACIK GÜNEŞ' e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Anahtar kelimeler: Hadamard matris, Hadamard kuvvet, Hadamard çarpım, Konferans matris, Kronecker çarpım.

Bu çalışma beş bölüm halinde düzenlenmiştir.

Birinci bölümde, Hadamard matris, Konferans matris ve Kronecker çarpımının tanımı verilip, Hadamard matrisin genel özellikleri tanıtılmıştır.

İkinci bölüm çalışmamızın orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde Hadamard matris oluşturma yöntemleri; Konferans matris yöntemi, Kronecker çarpımı yöntemi tanıtılıp, bu yöntemlerle ile ilgili lemmalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Hadamard matris ile ilgili bazı özellikler ve bunların ispatlarıyla beraber, Hadamard çarpım, Hadamard kuvvet tanımlarına yer ver verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Hadamard matrislerle ilgili uygulamaya yer verilmiştir.

HADAMARD MATRIX AND ITS' APPLICATIONS

SUMMARY

Keywords: Hadamard Matrix, Hadamard Power, Hadamard Product, Conference Matrix, Kronecker product.

This study is prepared as five chapters.

In the first chapter, the descriptions of Hadamard Matrix, Conference matrix, Kronecker product are made and the general characteristics of Hadamard Matrix are introduced.

The second chapter forms the original part of our study. In this chapter, the methods of forming Hadamard Matrix, Conference matrix method, Kronecker product method are introduced and the lemmas related to those methods are also given.

In the third chapter, the descriptions of Hadamard Product and Hadamard force are explained including some characteristics of Hadamard Matrix and proofs of those characteristics.

In the fourth chapter, an application related to Hadamard Matrix is given.

BÖLÜM 1. HADAMARD MATRİSLER VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 1.1. (Hadamard Matris)

n. mertebeden bir Hadamard matris, elemanları -1 ve +1' lerden oluşan n×n tipinde bir karesel matristir. H_n ile gösterilir. I_n, n. mertebeden birim matris olmak üzere;

$$H_n.H_n^{\,t} = n.I_n$$

dir [1].

Örnek.

Aşağıdaki matrisler 1. mertebeden, 2. mertebeden ve 4. mertebeden Hadamard matrislerdir.

$$[+],\ \begin{bmatrix} ++ \\ +- \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} ++++ \\ +-+- \\ ++-- \\ +--+ \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} ---+ \\ +-++ \\ ++-+ \\ +--- \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} +++- \\ ++-+ \\ +-++ \\ -+++ \end{bmatrix}$$

n. mertebeden ve elemanları -1 ile +1'lerden oluşan her matris Hadamard matris değildir. Bunun için mertebenin ve elemanların dizilişinin bazı özel koşullara sahip olması gerekir. Bu koşullardan ileride bahsedilecektir.

Hadamard matrisler başta iletişim (özellikle mobil iletişim) ve kodlar teorisi olmak üzere birçok alanda kullanılmaktadır.

Halen mertebesi daha büyük Hadamard matrisler oluşturmak için çalışmalar devam etmektedir [1].

Tanım 1.2. (Denk Hadamard Matrisler ve Standart Form)

a) $H_n.H_n^{\,t} = n.I_n$ bağıntısının öncelikli sonucu, H_n ’ nin herhangi iki satırının (aynı zamanda iki sütununun) ortogonal (dik) olmasıdır.

i) Herhangi iki satır veya sütun yer değiştirilirse,

ii) Bir satır veya sütunun her elemanı -1 ile çarpılırsa,

iii) H ’nin transpozesi alınırsa,

yukarıdaki özellik değişmez.

b) Yukarıdaki üç işleme göre sadece bazı farklı kombinasyonlardan oluşan iki Hadamard matrisin denk oldukları söylenebilir.

c) Bir Hadamard matriste, en üst satırı ve en sol sütunu tamamen +1’ lerden oluşan denk bir matris oluşturabiliyorsa bu Hadamard matrise Standart form denir.

d) Arta kalan satırlar +1’lerden ve -1’lerden oluşur. Eğer n>1 ise n, çift olmak zorundadır [1].

Teorem 1.1.

Eğer bir Hadamard matris n.mertebeden ise, o zaman 1’in, 2’nin ya da 4’ün bir katı olmak zorundadır [1].

İspat.

Varsayalım ki n>2 olsun ve H_n standardındaki sütunları değiştirilsin.

Öyle ki;

$$\underbrace{\begin{matrix}++\ldots++\\++\ldots++\\++\ldots++\end{matrix}}_{a}\qquad \underbrace{\begin{matrix}++\ldots++\\++\ldots++\\--\ldots--\end{matrix}}_{b}\qquad \underbrace{\begin{matrix}++\ldots++\\--\ldots--\\++\ldots++\end{matrix}}_{c}\qquad \underbrace{\begin{matrix}++\ldots++\\--\ldots--\\--\ldots--\end{matrix}}_{d}$$

dır.Bu takdirde,

$a+b+c+d=n$ vektörlerinin uzunluğudur

$a+b-c+d=0$ 1. satır ve 2.satır ortogonaldir

$a-b-c+d=0$ 2. satır ve 3.satır ortoganaldir.

$$a - b + c - d = 0 \text{ 3.satır ve 1.satır ortogonaldir.}$$

denilebilir. Bu nedenle n=4a (aynı zamanda n=4b=4c=4d) dir.

Sonuç olarak ;
n.mertebeden bir Hadamard matrisin derecesi 1' in, 2' nin ya da 4' ün katı olmak zorundadır. Bu yüzden 3. , 5. , 7. ,…vs. mertebeden Hadamard matrisler mevcut değildir. 4' ün katı olan her n için, n.mertebeden Hadamard matrislerin varlığı henüz kesinleşmemiştir. Şu ana kadar bulunan en büyük mertebeli Hadamard matrisin mertebesi 428' dir [1].

Tanım 1.3. (Kronecker Çarpımı)

$A = (a_{ij})$ mxn. mertebeden ve $B = (b_{ij})$ pxq. mertebeden iki matris mevcut ise, mpxnq. mertebeden $A \otimes B = (Ab_{ij})$ matrisine A ile B matrisinin Kronecker Çarpımı denir.

Tanım 1.4. (Konferans Matris)

n. mertebeden bir konferans matrisi, köşegen elemanları 0'lardan, diğer tüm elemanları +1 ve -1' lerden oluşan karesel bir matristir. C ile gösterilir.
Öyle ki;

$$C.C^T = (n-1).I_n$$

dir [1].

BÖLÜM 2. HADAMARD MATRİS OLUŞTURMA YÖNTEMLERİ

Bölüm 1. de tanımlanan ve bazı temel özelliklerinden bahsedilen Hadamard matrisin tipleri ve farklı oluşturma yöntemleri vardır. Hadamard matris tipleri arasında Payley Tipi Hadamard Matris, Williamson Tipi Hadamard Matris, Dairesel Hadamard Matrisler, Bush Tipi Hadamard Matrisler yer alır. Hadamard matrisler farklı yöntemlerle oluşturulabilir. Konferans matris yöntemiyle, Kronecker çarpımı yöntemiyle, Sylvester matris yöntemiyle, Williomson tipi Hadamard matris yöntemiyle vs…

Fakat bu bölümde Hadamard matris oluşturma yöntemlerinden, Konferans matris ve Kronecker çarpımı yöntemleri tanıtılıp, Hadamard matrisin nasıl oluşturulacağı gösterilecektir.

2.1. Kronecker Çarpımı Yöntemi

H_m ve H_n iki Hadamard matris olmak üzere, bu iki matrisin Kronecker Çarpımı, yine, m.n tipinde bir Hadamard matris olur [1].

İspat.

H_m ve H_n, m. ve n. mertebeden iki Hadamard matris olmak üzere, genellikle, $H_m \otimes H_n$ formunda H_n' nin her (+1) ini H_m ile, H_n' nin her (-1) ini (–Hm) ile değiştirilerek oluşturulan matris Hadamard matristir. Bunu doğrudan hesaplayarak kontrol etmek çok kolaydır.

Şöyle ki;

$$H_m = \begin{bmatrix} +- \\ ++ \end{bmatrix} \quad H_n = \begin{bmatrix} +-+- \\ ++++ \\ +--+ \\ ++-- \end{bmatrix}$$

olarak seçildiğinde;

$$H_m \otimes H_n = \begin{bmatrix} H_m & -H_m & H_m & -H_m \\ H_m & H_m & H_m & H_m \\ H_m & -H_m & -H_m & H_m \\ H_m & H_m & -H_m & -H_m \end{bmatrix}$$

olur. Yani;

$$H = H_m \otimes H_n = \begin{bmatrix} +--++--+ \\ ++--++-- \\ +-+-+-+- \\ ++++++++ \\ +--+-++- \\ ++----++ \\ +-+--+-+ \\ ++++---- \end{bmatrix}$$

olsun.

$$H^t = \begin{bmatrix} ++++++++ \\ -+-+-+-+ \\ --++--++ \\ +--++--+ \\ ++++---- \\ -+-++-+- \\ --++++-- \\ +--+-++- \end{bmatrix}$$

ve

$$
H.H^{t} = \begin{bmatrix} +--++--+ \\ ++--++-- \\ +-+-+-+- \\ ++++++++ \\ +--+-++- \\ ++----++ \\ +-+--+-+ \\ ++++---- \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ++++++++ \\ -+-+-+-+ \\ --++--++ \\ +--++--+ \\ ++++---- \\ -+-++-+- \\ --++++-- \\ +--+-++- \end{bmatrix}
$$

$$
H.H^{t} = mn.\, I_{m.n}
$$

olur. H, Hadamard matris özelliklerini sağladığından, ispat tamamlanmış olur.

Buna göre; örneğin m=n=2 seçilirse 2.mertebeden iki Hadamard matrisi Kronecker çarpımı ile 4.mertebeden bir Hadamard matris elde edileceği görülür;

$$
H_4 = H_{2X2} = H_2 \otimes H_2 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ++++ \\ +-+- \\ ++-- \\ +--+ \end{bmatrix} .
$$

O halde;

i) t=1, 2, 3,… tamsayıları için 2^{t}. mertebeden Hadamard matrisler vardır.

ii) Eğer n. mertebeden bir Hadamard matris mevcutsa, 2n. mertebeden bir Hadamard matris te mevcuttur.

Çıkarımı yapılabilir [1].

Lemma 2.1.1.

Kronecker çarpımı yardımıyla Hadamard matris türetilirken; türetmek için seçilen Hadamard matrisler simetrik ise, oluşan Hadamard matris de simetrik; seçilenlerden en az birinin simetrik olmaması halinde ise; oluşan Hadamard matris simetrik olmayan bir matris olur.

Bu seçilen 2. mertebeden durumlar için aşağıdaki şekilde ispatlanabilir;

$A = \pm 1$, $B = \mp 1$, $D = \pm 1$, $A^2 + B^2 = 2$, $B^2 + D^2 = 2$, $AB + BD = 0$ ve $AD < 0$
şartlarını sağlayan

$$H_m = \begin{bmatrix} A\,B \\ B\,D \end{bmatrix}$$

simetrik bir Hadamard matris
ve

$$H_n = \begin{bmatrix} ++ \\ +- \end{bmatrix}$$

simetrik Hadamard matrisleri olsun.

$$H_m \otimes H_n = H = \begin{bmatrix} A & B & A & B \\ B & D & B & D \\ A & B & -A & -B \\ B & D & -B & -D \end{bmatrix}$$

olur.
H matrisinin Hadamardlığı incelenir.

$$H.H^t = \begin{bmatrix} A & B & A & B \\ B & D & B & D \\ A & B & -A & -B \\ B & D & -B & -D \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A & B & A & B \\ B & D & B & D \\ A & B & -A & -B \\ B & D & -B & -D \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = \begin{bmatrix} 2A^2 + 2B^2 & 2AB + 2BD & 0 & AB - AD \\ 2AB + 2BD & 2B^2 + 2D^2 & 0 & B^2 - BD \\ B^2 - BD & BD - D^2 & 2A^2 + B^2 + BD & AB + AD + BD + D^2 \\ 0 & 0 & 2AB + 2BD & B^2 + BD + 2D^2 \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4x4}$$

$$H.H^t = 4.I_4$$

olur.

Oluşan H matrisi simetrik Hadamard matristir.

Genelleştirme:

$(H_m.h_{ij})^t = (H_m.h_{ij})$ eşitliği sağlandığında, $H_m \otimes H_n$ formu simetrik olur.

Şimdi de simetrik olmama halini ele alalım;

$A = \pm 1,\ B = \pm 1,\ C = \mp 1,\ D = \pm 1,\ A^2 + B^2 = 2,\ C^2 + D^2 = 2$

Ve $C \neq B$ şartlarını sağlayan,

$$H_m = \begin{bmatrix} A\,B \\ C\,D \end{bmatrix}$$

simetrik olmayan bir Hadamard matris

ve

$$H_n = \begin{bmatrix} ++ \\ +- \end{bmatrix}$$

simetrik Hadamard matrisleri olsun.

$$H_m \otimes H_n = H = \begin{bmatrix} A & B & A & B \\ C & D & C & D \\ A & B & -A & -B \\ C & D & -C & -D \end{bmatrix}$$

olur.

H matrisinin hadamardlığı incelenir.

$$H.H^t = \begin{bmatrix} A & B & A & B \\ C & D & C & D \\ A & B & -A & -B \\ C & D & -C & -D \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A & C & A & C \\ B & D & B & D \\ A & C & -A & -C \\ B & D & -B & -D \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = \begin{bmatrix} 2A^2+2B^2 & 2AC+2BD & 0 & 0 \\ 2AC+2BD & 2C^2+2D^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2A^2+2B^2 & 2AC+2BD \\ \text{-}AB+AC & -BC+C^2 & AB+AC+2BD & BC+C^2+2D^2 \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4x4}$$

$$H.H^t = 4.I_4$$

olur.

Oluşan H matrisi simetrik olmayan bir Hadamard matristir.

Genelleştirme:

$(H_m.h_{ij})^t = (H_m.h_{ij})$ eşitliği sağlanmadığında, $H_m \otimes H_n$ formu simetrik matris olmaz.

Böylelikle, her ikisinin de simetrik olması halinde oluşan Hadamard matris simetrik, en az birinin simetrik olmaması halinde oluşan Hadamard matrisin simetrik olmadığı görülür.

2.2. Konferans Matris Yöntemi

n. mertebeden bir konferans matrisi, köşegen elemanları 0' lardan, diğer tüm elemanları +1 ve -1 lerden oluşan $n \times n$ tipinde ve $C.C^T = (n-1).I_n$ şartlarını sağlayan bir matristir [1].

Yani; C konferans matrisi için

$$C.C^T = (n-1).I_n$$

ise;

$$C = \begin{cases} c_{ij} = 0 & i = j \text{ için} \\ c_{ij} = \pm 1 & i \neq j \text{ için} \end{cases}$$

dır.

Lemma 2.2.1.

Eğer C ters simetrik bir konferans matris ise, $(C^t = -C)$, o zaman I+C, n.mertebeden bir Hadamard matristir [1].

İspat.

H=I+C olmak üzere, $(I+C).(I+C)^t$ doğrudan hesaplanır.

$(I+C)^t = I + C^t$ ise, $H.H^t = n.I_n$ olduğu gösterilir.

$$\begin{aligned} H.H^t &= (I+C).(I+C)^t \\ &= I + C^t + C + C.C^t \qquad \text{(ters simetriklikten } (C^t = -C)\text{)} \\ &= I - C + C + C.C^t \qquad (C.C^T = (n-1).I_n) \\ &= I + (n-1)I \\ &= I + nI - I \\ &= nI_n \end{aligned}$$

$$H.H^t = n.I_n$$

olduğu görülür. İspat tamamlanmıştır.

Lemma 2.2.2.

Eğer C , $n \times n$ tipinde bir konferans matris ise,

o zaman,

$$H = \begin{bmatrix} I+C & -I+C \\ -I+C & -I-C \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $2n \times 2n$ tipinde simetrik Hadamard matris olur [1].

İspat.

Tanımlanan H simetrik olduğundan $H^t = H$ dir.

Dolayısıyla;

$$H.H^t = \begin{bmatrix} I+C & -I+C \\ -I+C & -I-C \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I+C & -I+C \\ -I+C & -I-C \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = \begin{bmatrix} (I+C).(I+C)+(-I+C).(-I+C) & (I+C).(-I+C)+(-I+C).(-I-C) \\ (-I+C).(I+C)+(-I-C).(-I+C) & (-I+C).(-I+C)+(-I-C).(-I-C) \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = \begin{bmatrix} 2C^2+2I & 0 \\ 0 & 2C^2+2I \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} C=C^t \text{ simetrik olduğundan} \\ C^2=C.C^T=(n-1)I \end{pmatrix}$$

$$H.H^t = \begin{bmatrix} 2(n-1)I+2I & 0 \\ 0 & 2(n-1)I+2I \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = \begin{bmatrix} 2nI_n & 0 \\ 0 & 2nI_n \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = 2n. \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$H.H^t = 2n.I_{2n}$$

olur. İspat tamamlanmıştır.

Bununla beraber;

Bu genelleştirmenin n=2 için doğru olduğu fakat n=4, n=6, n=8 için doğruluğunun sayısal olarak gösterilmediği aşağıdaki lemmalar ve örneklerden anlaşılmaktadır.

Lemma 2.2.3.

4. mertebeden simetrik konferans matris yazılamaz.

İspat.

$$B=\pm 1,\ C=\pm 1,\ D=\pm 1$$

elemanlarından oluşmak üzere,

$$C=\begin{bmatrix} 0 & B & C & D \\ B & 0 & D & C \\ C & D & 0 & B \\ D & C & B & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Simetrik konferans matris olsun. Bu durumda,

$$C.C^t=(n-1)I$$

özelliğini sağlamalıdır.

Buna göre;

$$\begin{bmatrix} 0 & B & C & D \\ B & 0 & D & C \\ C & D & 0 & B \\ D & C & B & 0 \end{bmatrix}_{4x4} . \begin{bmatrix} 0 & B & C & D \\ B & 0 & D & C \\ C & D & 0 & B \\ D & C & B & 0 \end{bmatrix}_{4x4} = \begin{bmatrix} B^2+C^2+D^2 & 2DC & 2BD & 2BC \\ 2DC & B^2+C^2+D^2 & 2BC & 2BD \\ 2BD & 2BC & B^2+C^2+D^2 & 2DC \\ 2BC & 2DB & 2DC & B^2+C^2+D^2 \end{bmatrix}_{4x4}$$

$$\left.\begin{matrix} B^2+C^2+D^2=3 \\ DC=0 \\ BC=0 \\ BD=0 \end{matrix}\right\}$$

olmalıdır.Bu sistemin çözümünde B,C,D elemanları ± 1 olacak şekilde çözümü yoktur.

Bu durumda lemma 2.2.2. ye uygun olarak 8x8 tipinde simetrik Hadamard matrislerin konferans matris yöntemiyle türetilemeyeceği görülür.

Örnek.

2. mertebeden simetrik bir konferans matrislerden, 4x4 tipinde simetrik Hadamard matrisler türetilebilir.

Mesela; $A=\pm 1$ şartını sağlayan

$$C=\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$C.C^t=(n-1)I$$

şartını sağlayan simetrik konferans matris olsun.

$$\left(\begin{array}{l} C.C^t=(n-1)I \quad \text{olduğu gösterilir} \\ \\ \begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & A^2 \end{bmatrix} \quad (A=\pm 1) \end{array} \right)$$

$$H=\begin{bmatrix} I+C & -I+C \\ -I+C & -I-C \end{bmatrix}$$

alınırsa,

$$H=\begin{bmatrix} 1 & A & -1 & A \\ A & 1 & A & -1 \\ -1 & A & -1 & A \\ A & -1 & A & -1 \end{bmatrix}$$

olur.

H' nin Hadamardlığı incelenmelidir.

$$H.H^t=nI$$

olmalıdır.

$$H.H^t=\begin{bmatrix} 1 & A & -1 & A \\ A & 1 & A & -1 \\ -1 & A & -1 & A \\ A & -1 & A & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & A & -1 & A \\ A & 1 & A & -1 \\ -1 & A & -1 & A \\ A & -1 & A & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1+A^2+1+A^2 & A+A-A-A & -1+A^2+1-A^2 & A-A+A-A \\ A+A-A-A & A^2+1+A^2-1 & -A+A-A+A & A^2-1-A^2+1 \\ -1+A^2+1-A^2 & -A+A-A+A & 1+A^2+1+A^2 & -A-A+A+A \\ A-A+A-A & A^2-1+A^2+1 & -A-A+A+A & A^2+1+A^2+1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4x4}$$

$$=4.I_4$$

olur.

Böylelikle 4x4 tipinde simetrik Hadamard matrisi oluşturulmuştur.

Örnek.

4. mertebeden ters simetrik konferans matristen Hadamard matrisi türetilmesini inceleyelim.

O halde;

$$C=\begin{bmatrix} 0 & B & C & D \\ -B & 0 & -D & C \\ -C & D & 0 & -B \\ -D & -C & B & 0 \end{bmatrix}_{4\times4}$$

olsun.Bu durumda

$$C^t=\begin{bmatrix} 0 & -B & -C & -D \\ B & 0 & D & -C \\ C & -D & 0 & B \\ D & C & -B & 0 \end{bmatrix}_{4\times4}$$

olur.

$C= - C^t$ şartını sağlar. C, ters simetrik konferans matris ise I+C, Hadamard matristir.

O halde;

$$\text{I+C}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&B&C&D\\-B&0&-D&C\\-C&D&0&-B\\-D&-C&B&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&B&C&D\\-B&1&-D&C\\-C&D&1&-B\\-D&-C&B&1\end{bmatrix}_{4\times4}$$

dır.

I+C' nin hadamardlığı incelenmelidir.

n=4 olmak üzere

$$(I+C).(I+C)^t=nI_n$$

olmalıdır.

$$(I+C).(I+C)^t=\begin{bmatrix}1&B&C&D\\-B&1&-D&C\\-C&D&1&-B\\-D&-C&B&1\end{bmatrix}_{4\times4}\cdot\begin{bmatrix}1&-B&-C&-D\\B&1&D&-C\\C&-D&1&B\\D&C&-B&1\end{bmatrix}_{4\times4}$$

$$(I+C).(I+C)^t=\begin{bmatrix}1+B^2+C^2+D^2&-B+B-CD+CD&-C+BD+C-BC&-D-BC+BC+D\\-B+B-CD+CD&B^2+1+D^2+C^2&CB+D-D-CB&BD-C-BD+C\\-C+BD+C-BD&CB+D-D-CB&C^2+D^2+1+B^2&CD-CD+B-B\\-D-CB+CB+D&BD-C-BD+C&DC-CD+B-B&D^2+C^2+B^2+1\end{bmatrix}_{4\times4}$$

$$B=\pm1,\ C=\pm1,\ D=\pm1,\ B^2+C^2+D^2=3$$

olmak üzere;

$$(I+C).(I+C)^t=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}_{4\times4}$$

$(I+C).(I+C)^t=4.\,I_4$

olur.

Lemma 2.2.4.

6. mertebeden simetrik konferans matrisi yazılamaz.

İspat.

6×6 lık simetrik konferans matrisi

$$A=\pm 1,\ B=\pm 1,\ C=\pm 1,\ D=\pm 1,\ E=\pm 1$$

olmak üzere,

$$C=\begin{bmatrix} 0 & A & B & C & D & E \\ A & 0 & C & D & E & B \\ B & C & 0 & E & A & D \\ C & D & E & 0 & B & A \\ D & E & A & B & 0 & C \\ E & B & D & A & C & 0 \end{bmatrix}_{6\times 6}$$

olsun.

C, 6. mertebeden simetrik konferans matrisinin genelleştirilmiş hali,

$$C.C^t=(n-1)I$$

şartını sağlamak üzere,

$$\begin{bmatrix} 0 & A & B & C & D & E \\ A & 0 & C & D & E & B \\ B & C & 0 & E & A & D \\ C & D & E & 0 & B & A \\ D & E & A & B & 0 & C \\ E & B & D & A & C & 0 \end{bmatrix}_{6\times 6} . \begin{bmatrix} 0 & A & B & C & D & E \\ A & 0 & C & D & E & B \\ B & C & 0 & E & A & D \\ C & D & E & 0 & B & A \\ D & E & A & B & 0 & C \\ E & B & D & A & C & 0 \end{bmatrix}_{6\times 6} = 5.I_n$$

olmalıdır.

Bu durumda;

$$A^2+B^2+C^2+D^2+E^2=5$$

$$A\,C+A\,D+C\,E+D\,E=0$$

$$A\,D+B\,D+A\,E+B\,E=0$$
$$A\,B+B\,C+A\,E+C\,E=0$$
$$A\,B+A\,C+BD+C\,D=0$$
$$A\,B+B\,D+A\,E+D\,E=0$$
$$A\,B+A\,C+B\,E+C\,E=0$$
$$A\,C+B\,C+A\,D+B\,D=0$$
$$A\,D+C\,D+A\,E+C\,E=0$$
$$A\,B+B\,C+A\,D+C\,D=0$$
$$B\,D+C\,D+B\,E+C\,E=0$$
$$A\,C+B\,C+A\,E+B\,E=0$$
$$A\,C+C\,D+A\,E+D\,E=0$$
$$B\,C+B\,D+C\,E+D\,E=0$$
$$A\,B+A\,D+B\,E+D\,E=0$$
$$B\,C+C\,D+B\,E+D\,E=0$$

olacak şekilde

$$A=\pm 1,\ B=\pm 1,\ C=\pm 1,\ D=\pm 1,\ E=\pm 1$$

çözümü bulunmalıdır.

Yukarıdaki denklemlerden;

$$(A+E)\ (C+E)\ =0$$
$$(D+E)\ (A+B)\ =0$$
$$(B+E)\ (A+C)\ =0$$
$$(A+D)\ (B+C)\ =0$$
$$(B+E)\ (A+D)\ =0$$
$$(A+E)\ (B+C)\ =0$$
$$(C+D)\ (A+B)\ =0$$
$$(D+E)\ (A+C)\ =0$$
$$(B+D)\ (A+C)\ =0$$
$$(D+E)\ (B+C)\ =0$$
$$(C+E)\ (A+B)\ =0$$
$$(C+E)\ (A+D)\ =0$$
$$(B+E)\ (C+D)\ =0$$

$$(A+E)\ (B+D)=0$$
$$(C+E)\ (E+D)=0$$

ve;

$$A+E=0$$
$$C+E=0$$
$$D+E=0$$
$$A+B=0$$
$$A+C=0$$
$$A+D=0$$
$$B+C=0$$
$$B+E=0$$
$$C+D=0$$
$$B+D=0$$

denklemleri elde edilir.Fakat bu 10 tane denklemden ; aranılan çözüm bulunamaz.Çünkü bu 10 denklemi oluşturan A, B, C, D, E lerin işaret tablosundan, aranılan şekilde çözümünün olmadığı görülür.

Sonuç olarak ; $A=\pm1$, $B=\pm1$, $C=\pm1$, $D=\pm1$, $E=\pm1$ lerden oluşan 6.mertebeden simetrik konferans matris yazılamaz.

Dolayısıyla lemma 2.2.2. ye uygun olarak 12x12 tipinde simetrik Hadamard matrisin konferans matris yöntemiyle türetilemeyeceği görülür.

Lemma 2.2.5.

8. mertebeden simetrik konferans matrisi yazılamaz.

İspat.

8. mertebeden simetrik konferans matrisi

$$A=\pm1,\ B=\pm1,\ C=\pm1,\ D=\pm1,\ E=\pm1,\ F=\pm1,\ G=\pm1$$

ve

$$C = \begin{bmatrix} 0 & A & B & C & D & E & F & G \\ A & 0 & C & D & E & F & G & B \\ B & C & 0 & E & F & G & D & A \\ C & D & E & 0 & G & B & A & F \\ D & E & F & G & 0 & A & B & C \\ E & F & G & B & A & 0 & C & D \\ F & G & D & A & B & C & 0 & E \\ G & B & A & F & C & D & E & 0 \end{bmatrix}_{8x8}$$

şeklinde seçildiğinde;

C simetrik konferans matrisi, $C.C^t = (n\text{-}1)I$ şartını sağlamak üzere,

$$\begin{bmatrix} 0 & A & B & C & D & E & F & G \\ A & 0 & C & D & E & F & G & B \\ B & C & 0 & E & F & G & D & A \\ C & D & E & 0 & G & B & A & F \\ D & E & F & G & 0 & A & B & C \\ E & F & G & B & A & 0 & C & D \\ F & G & D & A & B & C & 0 & E \\ G & B & A & F & C & D & E & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & A & B & C & D & E & F & G \\ A & 0 & C & D & E & F & G & B \\ B & C & 0 & E & F & G & D & A \\ C & D & E & 0 & G & B & A & F \\ D & E & F & G & 0 & A & B & C \\ E & F & G & B & A & 0 & C & D \\ F & G & D & A & B & C & 0 & E \\ G & B & A & F & C & D & E & 0 \end{bmatrix} = 7.I_7$$

olmalı.

Bu durumda;

$$
\begin{aligned}
&A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2+G^2=7\\
&BC+CD+DE+EF+BG+FG=0\\
&AC+CE+2DF+AG+EG=0\\
&AD+2BE+AF+DG+FG=0\\
&2AE+2BF+2CG=0\\
&BC+AD+AF+CF+BG+DG=0\\
&AC+2BD+CE+AG+EG=0\\
&2AB+CD+DE+CF+EF=0\\
&BC+CD+DE+EF+BG+FG=0\\
&2AB+DE+EF+DG+FG=0\\
&AC+CE+2BF+AG+EG=0\\
&BC+AD+AF+CF+BG+DG=0\\
&2BD+2AE+2CG=0\\
&AD+CD+2BE+AF+CF=0\\
&AC+CE+2DF+AG+EG=0\\
&BC+AD+CD+AF+BG+FG=0\\
&AD+CD+2BE+AF+CF=0\\
&BC+DE+CF+EF+BG+DG=0\\
&AD+2BE+AF+DG+FG=0\\
&AC+CE+2BF+AG+EG=0\\
&BC+AD+CD+AF+BG+FG=0\\
&BC+DE+CF+EF+BG+DG=0\\
&BC+AD+AF+CF+BG+DG=0\\
&BC+CD+DE+EF+BG+FG=0\\
&AC+CE+2DF+AG+EG=0
\end{aligned}
$$

denklemleri elde edilir. Fakat bu denklemlerden $2AE+2BF+2CG=0$, $AE+BF+CG=0$ denklemi yukarıdaki $A=\pm1, B=\pm1, C=\pm1, E=\pm1$, $F=\pm1$, $G=\pm1$ şartlarını sağlamaz.Yani yazılan denklem sisteminin belirtilen koşullara uygun olarak çözümü yoktur.

Sonuç olarak; $A=\pm1, B=\pm1, C=\pm1, D=\pm1, E=\pm1$, $F=\pm1$, $G=\pm1$ lerden oluşan 8. mertebeden simetrik konferans matris yazılamaz.

Dolayısıyla olarak lemma 2.2.2. ye uygun olarak $16x16$ tipinde simetrik Hadamard matrisin konferans matris yöntemiyle türetilemeyeceği görülür.

BÖLÜM 3. HADAMARD MATRİS İLE İLGİLİ BAZI ÖZELLİKLERİN BELİRLENMESİ VE İSPATI

Özellik 3.1.

H, $n\times n$ (±1) lerden oluşan Hadamard matris ise $HH^t=n.I_n$ dir [2].

İspat.

$$H=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$n\times n$ tipinde bir Hadamard matris ve

$$A=\pm1,\ B=\pm1,\ C=\pm1,\ D=\pm1,$$

olmak üzere,

$$HH^t=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^2+B^2 & AC+BD \\ CA+DB & C^2+D^2 \end{bmatrix}$$

olur.

$$A=\pm1,\ B=\pm1,\ C=\pm1,\ D=\pm1$$

elemanlarından oluştuğundan;

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= 2 \\ AC + BD &= 0 \\ CA + DB &= 0 \\ CA + DB &= 0 \end{aligned}$$

Denklem sisteminin çözüm kümesi şu durumlarda sağlanır.

1. durum olarak; aşağıdaki çözüm kümesinden simetrik olmayan Hadamard matris türetilir.

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ + & - & + & + \\ - & - & + & - \\ + & + & - & + \\ - & + & - & - \end{array}$$

2. durum olarak aşağıda görülen çözüm kümesinden de; B=C olmak üzere , simetrik olan Hadamard matrisleri türetilir

$$\begin{array}{ccc} A & B & D \\ + & + & - \\ + & - & - \\ - & - & + \\ - & + & + \end{array}$$

Böylece ispat tamamlanmıştır.

Özellik 3.2.

Eğer H $n \times n$ tipinde bir Hadamard matris ise ,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} H$$

ortogonal bir matristir [2].

İspat.

H Hadamard matris ise,

$$HH^t = nI_n$$

dır.

$$\frac{1}{n}HH^t = I_n$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}.\frac{1}{\sqrt{n}}HH^t = I_n$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}H\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}H^t\right) = I_n$$

dir. Bu durum A. $A^t = I_n$ ortogonal özelliğini sağladığından,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} H$$

ortogonaldir.

Özellik 3.3.

A, $n\times n$ tipinde ortogonal bir reel matris olmak üzere, $(\forall \times \in R^n)$

$$\|A\times\| = \|\times\|$$

($\|x\| = \sqrt{xx^t}$ euclidan normu olmak üzere)

dir [2].

İspat.

A ortogonal bir matris $x \in R^n$ bir vektör ve

$$\|x\| = \sqrt{x.x^t}$$

ise

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \sqrt{Ax.(Ax)^t} \\
&= \sqrt{Ax.x^t.A^t} \\
&= \sqrt{A}\,.\|x\|.\sqrt{A^t} \quad \text{(x vektör ve } \|x\| \text{ bir çarpan olmak üzere)} \\
&= \|x\|.\ \sqrt{A.A^t} \qquad \text{(A ortogonal olduğundan } A.A^t = I_n\text{)} \\
&= \|x\|.I_n \\
&= \|x\| \\
\|Ax\| &= \|x\|
\end{aligned}$$

olur.

İspat tamamlanmıştır.

Özellik 3.4.

Eğer H $n \times n$ tipinde bir Hadamard matris ise $\forall x \in R^n$ olmak üzere,

$$\|Hx\| = \sqrt{n}\,\|x\|$$

dir [2].

İspat.

H Hadamard matris,

$$HH^t = nI_n \qquad , \qquad \sqrt{HH^t} = \sqrt{n}$$

ve

$$\|x\| = \sqrt{xx^t}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\|Hx\| &= \sqrt{Hx(Hx)^t} = \sqrt{Hxx^tH^t} \\
&= \sqrt{H}.\sqrt{xx^t}.\sqrt{H^t} \quad (\sqrt{xx^t} = \|x\|,\ \|x\| \text{ reel çarpan olmak üzere}) \\
&= \sqrt{H}.\sqrt{H^t}.\sqrt{xx^t} \\
&= \sqrt{HH^t}.\sqrt{xx^t} \\
&= \sqrt{nI_n}.\sqrt{xx^t} \\
&= \sqrt{n}.\|x\|
\end{aligned}$$

dır.

Yani

$$\|Hx\| = \sqrt{n}.\|x\|$$

olur.

Özellik 3.5.

Bir Hadamard matrisin sütunları, aynı zamanda ortogonaldir [2].

İspat.

H Hadamard matris ise, H^t Hadamard matrisidir. Şöyle ki;

Hadamard matris tanımından

$$H.H^t = nI_n$$

dir.

$$H.H^t = nI_n \qquad \text{(Her iki taraf n' e bölünür)}$$

$$\frac{1}{n}.H.H^t = I_n \qquad \text{(Her iki taraf soldan } H^{-1} \text{ ile çarpılır)}$$

$$H^{-1}.\left(\frac{1}{n}.H.H^t\right) = H^{-1}$$

$$H^{-1} = \frac{1}{n}.H^t$$

elde edilir.

Buradan da;

$$HH^t = nI_n$$

olur.

O halde H^t Hadamard matristir.

Yine Hadamard matris tanımından;

$$H^t.\left(H^t\right)^t = H^tH = nI_n$$

olur.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Özellik 3.6.

$n \times n$ tipinde H Hadamard matrisin bütün özdeğerleri, mutlak değerce $\sqrt{n}$ değerine sahiptir [2].

İspat.

H, $n \times n$ tipinde Hadamard matris olsun.

$$H.H^t = nI$$

dir.

$$Hx = \lambda x \qquad (*)$$

eşitliğini sağlayan λ değerleri, H nin özdeğerleri olsun.

$$\lambda_i,$$

H' nin özdeğerleri olsun.

$$|\lambda_i| = \sqrt{n}$$

mıdır?

$$Hx=\lambda x$$

eşitliğinde her iki tarafın transpozesi alınırsa

$$(Hx)^t=(\lambda.x)^t$$

$\Rightarrow x^t.H^t=x^t.\lambda$ (sağdan H ile çarpılır)

$\Rightarrow x^t.H^t.H=x^t.\lambda.H$ ($HH^t=nI_n$ eşitliğinden)

$\Rightarrow x^t.n.I_n=x^t.\lambda.H$

$\Rightarrow n.x^t=x^t.\lambda.H$ (sağdan x ile çarpılır)

$\Rightarrow n.x^t.x=x^t.\lambda.Hx$ ((*) eşitliğinden)

$\Rightarrow n.x^t.x=x^t.\lambda.\lambda x$

$\Rightarrow n.x^t=x^t.\lambda.\lambda$

$\Rightarrow n.x^t=x^t.\lambda^2$

$\Rightarrow n.x^t=\lambda^2.x^t$

$\Rightarrow n=\lambda^2$

$\Rightarrow \lambda_i=\pm\sqrt{n}$

dir.

İspat tamamlanmıştır.

Sonuç olarak;

nxn tipindeki Hadamard matrisleri için reel özdeğerleri mutlak değerce $\sqrt{n}$ (veya $\pm\sqrt{n}$) ; karmaşık özdeğerli ise (varsa) büyüklüğü $\sqrt{n}$ dir.

Yani

λ_i reel ise,

$$|\lambda_i|= \pm\sqrt{2}$$

ve

$$\lambda_i=a+ib$$

ise

$$|\lambda_i|= n$$

dir.

Özellik 3.7.

Eğer H, $n \times n$ tipinde Hadamard matris ise,

$$\det(H) = \pm n^{n/2}$$

dir [2].

İspat.

H, $n \times n$ Hadamard matris ise $H.H^t = nI_n$ dir.

$$H.H^t = n.I_n \qquad \text{(determinant özelliğinden)}$$

$$\det(H.H^t) = n.\det I$$

$$(\det H).(\det H^t) = n$$

$$(\det H)^2 = n^n \qquad (\det H \neq 0)$$

$$\sqrt{(\det H)^2} = \sqrt{n^n}$$

$$\det H = \pm n^{n/2}$$

olup, ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.1. (Hadamard Çarpım)

A ve B aynı tipte iki Hadamard matris olmak üzere

$$A = \left[a_{ij}\right]$$

ve

$$B = \left[b_{ij}\right]$$

ise

A ve B nin Hadamard çarpımı;

$$A \odot B = \left[a_{ij}\, b_{ij}\right]$$

dir [3].

Lemma 3.1.

Aynı tipte iki Hadamard matris A ve B olmak üzere, bu iki matrisin Hadamard çarpımı, Hadamard matris olamaz.

İspat.

A ve B Hadamard matrisler ise;

$$A.A^t = n.I_n$$

ve

$$B.B^t = n.I_n$$

dir.

A ve B nin Hadamard çarpımları K olsun.

$A \odot B \quad = \quad K$ (Her iki taraf soldan A^t ve sağdan B^t ile çarpılırsa)

$A^t.A \odot B.B^t = A^t.K.B^t$ ($A^t.K.B^t = K'$ eşitliği kullanılırsa)

$n.I_n \odot n.I_n = K'$

$n^2 I_n = K'_{n \times n}$

Yani, oluşan yeni K' matrisi Hadamard matris olamaz.

Lemma 3.2.

H , nxn tipinde simetrik Hadamard matris ve

$$A = \frac{1}{\sqrt{n}} H$$

olmak üzere;

A matrisi 2 periyotlu, periyodik ve involutif bir matristir.

İspat.

$$A^3 = A \quad \text{(periyodiklik tanımı)}$$

olduğu gösterilmelidir.

H simetrik Hadamard matris olduğundan;

$$H^2 = H.H^t = n.I_n$$

olur.O halde;

$$A^3 = A^2.A = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} H\right)^2.A$$

$$= \frac{1}{n} H^2.A$$

$$=\frac{1}{n}.n.I_n.A$$

$$=I_n.A$$

$$=A$$

$$A^3=A$$

olduğu görülür.

O halde A, 2 periyotlu matristir.

Ayrıca

$$A^2=I$$

olduğundan A involutiftir.

Tanım 3.2. (Hadamard Kuvvet)

A, nxn tipinde Hadamard matris ve $k\in N$ olmak üzere, A matrisinin Hadamard kuvveti

$$A^k=\left(a_{ij}{}^k\right)$$

dır [4].

Örnek.

Bir Hadamard matrisin Hadamard tek kuvveti yine Hadamard matris olur.

Mesela;

$$H=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Hadamard matris olsun.

$$H.H^t=n.I_n$$

ve

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=2.\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

dır.

Bu durumda;

H, Hadamard matris ise,

$$H^3 = H$$

olur.

Örnek.

Bir Hadamard matrisin Hadamard çift kuvveti yine Hadamard matris olmaz.

Yani;

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hadamard matris olsun.

$$H.H^t = n.I_n$$

ve

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır.

Bu durumda;

H, Hadamard matris ise;

$$H^4 \neq H$$

olur.

Sonuç olarak;

A, Hadamard matris ve $k \in N$ olmak üzere, $A^k = \left(a_{ij}{}^k\right)$ için,

$$A^k = \begin{cases} A^k \text{ Hadamard} & , \quad k \quad \text{tek ise} \\ A^k \text{ Hadamard değil}, & \quad k \quad \text{çift ise} \end{cases}$$

dır.

BÖLÜM 4. HADAMARD MATRİSLERİN UYGULAMALARI

4. 1. Kodlama Teorisinde Uygulaması

H_n , n. mertebeden bir Hadamard matris olsun. O zaman aşağıdakiler mevcuttur.

1. (n, n, $\frac{1}{2}$n) kodu – ortogonal koddur.

2. (n-1, n, $\frac{1}{2}$n) kodu – düzenli simpleks (tek yönlü) dir.

3. (n, 2n, $\frac{1}{2}$n) kodu – 1.mertebeden RM kodudur (bi-ortogonal).

- Eğer n, X gerçek vektörünün uzunluğu ise

$$Y = H_n . X$$

dönüşümü, Hadamard dönüşümü diye adlandırılır.

- H_n , n. mertebeden tüm karesel matrisler arasında maksimum determinanta sahip ise;

$$-1 \leq a_{i,j} \leq +1$$

olur.

Yakın zamanlarda Hadamard matrislerin uygulamaları içinde CDMA mobil iletişim sistemlerinin tanıttığı iki çeşit Hadamard matris kullanılmıştır.
Bunlar ortogonal kanalizasyonlar için 64. mertebeden Kronecker Çarpımı tipi ve kısa uzun kodlar için sırasıyla 2^{14}. ve 2^{42}. mertebeden Dairesel tip' dir [1].

4.2. İstatistik Hesaplamalarda ve Optimal Kontrolde Uygulaması

4.2.1. Hadamard Matrisler ve optimal tartma tasarımı

p cisimlerinin iki kefesi ve bir tarafa eğimli olmayan bir kimya terazisinde tartıldığı varsayılsın.

$x_{ij}=1$ dir. Eğer i. tartımda j. cisim sol kefeye konursa,

$x_{ij}=-1$ dir. Eğer i. tartımda j. cisim sağ kefeye konursa,

O zaman $n\times p$ matris $X=(x_{i,j})$ tartma işlemini tamamen nitelendirmektedir.p cisimlerinin gerçek ağırlıkları $w_1, w_2,\ldots,w_p$ şeklinde yazılsın, tartma işleminin sonuçları için de $y_1,y_2,\ldots,y_n$ yazılsın. (böylece elde edilen sonuçlar, i cisminin tartılması işleminde, sol kefedeki tartımın y_i miktarında sağ kefedeki tartımdan fazla olduğunu gösterir). w'ların ve y'lerin sütun vektörleri W ve Y olarak ayrı ayrı ifade edilsin.

O zaman elde edilen sonuçlar doğrusal bir modelle temsil edilebilir.

$$Y=XW+e,$$

$e_1,e_2,\ldots,e_n$ e'nin sütun vektörüdür ve e_i tahmini sonuçla gözlemlenen sonuç arasındaki hatadır. O zaman e, ortalaması sıfır ve $\sigma^2 I$ kovaryans matrisli dağılıma sahip şans vektörüdür. Bu, tartışılacak olan cisimlerin kütlesinin tartının kendisine kıyasla çok daha küçük olduğu durumlarda mantıklı bir varsayımdır.
X' in tekil olmayan bir matris olduğu varsayılsın. O zaman W'nin en iyi doğrusal sapmasız tahmini aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\hat{W}=(X^T X)^{-1}X^T Y$$

$\hat{W}$ ' nun kovaryansı

$$Cov(\hat{W})=\sigma^2(X^T X)^{-1}$$

dir.

Hottelling, $\hat{w}_i$ varyansının herhangi bir tartı tasarımında σ^2/n ' den daha az olamayacağını göstermiştir. O yüzden, herhangi bir kimyasal terazi tasarımı her iki ağırlığı da σ^2 / n minimum varyansıyla ölçebiliyorsa, onun X ağırlık tasarımının optimal olduğu anlamına gelir. Kiefer[6] aslında anlaşılan kadarıyla optimal bir tartı tasarımının çok genel bir kriter sınıfına göre optimal olduğunu kanıtlamıştır. X, sadece $X^T X = nI$ şartı sağlandığında optimal olduğu görsterilebilir.Bu da sütunları ortogonal olan ± 1'lerden oluşan $n \times p$ lik matris ise bir kimyasal tartı tasarımının optimal olduğu anlamına gelir. Yani X bir Hadamard matris olursa optimallik şartının sağlandığı anlaşılır [5].

Örnek.

Bir kimya terazisi deneyinde; X tartma işlemi, W seçilmiş 8 adet cismin gerçek ağırlıkları, Y bu cisimlerin sağ ve sol kefedeki tartımlarının farkı, e ise tahmini sonuç ile gözlemlenen sonuç arasındaki hata olmak üzere,

$$Y = XW + e$$

modeli üzerinde;

$$W = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \\ 15 \\ 7 \\ 12 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

değerleri ile,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi Hadamard matris seçildiğinde,

$$Y=XW+e$$

ifadesindeki e' nin karşılığı aranır.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \\ 15 \\ 7 \\ 12 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79 \\ -19 \\ -11 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} + e_1$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} -76 \\ 26 \\ 17 \\ 8 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. X Hadamard Matris alındığında, e_1' in karşılığı bulunmuş olur. e_1 hatalarının mutlak değerleri toplamı 6822, hataların kareleri toplamı ise 143 dür.

Aynı modelde, X Hadamard olmayan bir matris alındığında;

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \\ 15 \\ 7 \\ 12 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79 \\ 19 \\ 11 \\ -1 \\ 25 \\ 25 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} + e_2$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} -76 \\ -14 \\ -5 \\ 8 \\ -23 \\ -21 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

X Hadamard olmayan bir matris alındığında, e_2' nin karşılığı bulunmuş olur. e_2 hatalarının mutlak değerleri toplamı 7096, hataların kareleri toplamı ise 156 dır.
X' in Hadamard Matris alındığı durumda ortaya çıkan e_1 hatası; X' in Hadamard olmayan bir matris alındığı durumda ortaya çıkan e_2 hatasının kareleri toplamından ve mutlak değerleri toplamından daha küçüktür. Yani $|e_1| < |e_2|$ olduğu görülür.

Dolayısıyla; X Hadamard olduğunda, bu kimyasal tartı tasarımının optimallik şartının sağlandığı görülür.

4.2.2. Hadamard Matrisleri ve optik çokluluk

Hadamard tasarımıyla çoklu optiklerin arasındaki bağlantı artık açık seçiktir. Optiklere bilinmeyen w_i' ler bir radyasyon ışınında tek tek boşlukta ve/veya ışın dağılımıyla ilgili öğelerin yoğunluğunu temsil eder. Bu yoğunlukları teker teker ölçen tarayıcı cihazlarında tam tersi olarak, çoklu optik sistem aynı anda birkaç yoğunluğu ölçer (başka bir değişle w_i' leri tartar). y'ler bu durumda tartı yerine detektörün sonuçlarını temsil ederler. Son olarak, tartı tasarımının kendisi, X bir maske ile temsil edilir. Daha doğrusu bir tek ölçümde hangi cisimlerin mevcut olduğunu belirleyen X sırası, ileten, emen ya da yansıtan elementlere karşılık gelir. Böyle bir dizinden maske yapılandırılması olarak söz edilir.

İki tipteki tartı tasarı-kimyasal ve yaylı tartı tasarımları –ya ileten, emen ve yansıtan öğeler (kimyasal tartı tasarımı) ya da açık ve kapalı yuvalar (yaylı tartı tasarımı için) içeren maskelerle birbirlerinden ayrılırlar. Kimyasal tartılar, iki detektör gerektirirken, diğer tartıda dedektör kaldırılabilir. Hadamard değişken spektrometrede ayrılan ışık bir maskeye gönderilir.

Maskenin çeşitli bölümleri şeffaf olacak ve ışığın geçmesine izin verecek, yansıtacaktır (ışığı ikinci dedektöre gönderecek) ya da opak olacaktır. Şeffaf yansıtıcı ve opak olanı ayrı ayrı 1, -1 ile ifade edildiğinde, o zaman maskenin konfigürasyonu 1, -1 öğeleri ile temsil edilecektir. K ölçülerinin alınacağı varsayılsın. O zaman deney, k maskelerini içerecektir. Bunlar da 1 ve -1' in $n \times k$ matrisi olarak düşünülebilir. Deney, bir tartma tasarımı olarak matrisini etkinliği kadar etkindir. O yüzden en iyi maske sistemleri Hadamard matrislerinden alınmışlardır [5].

4.2.3. Hadamard Matrislerinin eleme özellikleri

İki sembol üzerindeki sıra N sırası ve k sütunu, eğer her bir p sütunu için 2p vektörü en az bir kez görünürse, bu bir (N, k, p) eleme tasarımıdır. Eleme tasarıları çoksayıda öğenin (q) incelendiği ancak bunlardan çok azının (k) önemli olacağının tahmin edildiği durumlarda yararlıdır. Hadamard matrislerinden doğan eleme matrisleri karmaşık yapıları yüzünden yararlıdır. Hadamard matrislerinden doğan eleme matrisleri karmaşık yapıları yüzünden geleneksel olarak sadece ana etkileri tanımlamak için kullanılırlar.

Genel kuralı bozmadan, herhangi bir Hadamard matrisinin birinci sütununun sadece 1' leri içerdiği konusunda ısrar edilebilir. O zaman bu sütunu kaldırarak, bir $p \geq 2$ ile (N, N-1, p) eleme matrisi elde edilir. Bu tür bazı eleme tasarımları Plackett ve Burman tarafından geliştirilmiştir. Bunlara Plackett-Burman tasarımları denir. Bu tasarımlar dairesel düzenlemeyle N-1 öğelerini içeren ilk sıradan yaratılabilirler. İkinci sıra, birinci sıradaki bütün girilen bilgileri bir konum sağa kaydırarak ve son öğeyi ilk konuma yerleştirerek oluşturulurlar. Üçüncü sıra, aynı işlem uygulanarak ikinci sıradan oluşturulur ve N-1 sıraları oluşturulduğu zaman işlem sona erer. Sonra, en son sıraya bir -1' ler sırası ilave edilir. Böylece N tekrarlarıyla ve bütün 1' leri bir sütun halinde ekleyerek bir N sıralı bir Hadamard matrisi elde ederiz. Aslında, Plackett ve Burman N sırasının, N=92 dışında bütün $N \leq 100$ için Hadamard matrislerini yapmışlardır. N=92 de 1962 yılında Baumert, Colomb ve Hall tarafından verilmiştir. N=8, 12, 20 ve 24 tekrarları için Plackett ve Burman tasarımlarını ilk sıralar bir örnek olarak aşağıda verilmiştir.

8	+++−+−−
12	++−+++−−−+−
16	++++−++−−+−−−
20	++−−++++−+−+−−−−++−
24	+++++−+−++−−++−−+−+−−−−

Bütün aktif öğelerin tanımlanmasından sonra, özgün tasarım daha fazla incelenmek üzere boyutlarına yansıtılır. Başka bir deyişle, N tekrarları ve k sütunlarıyla yeni bir tasarım oluşturmak için aktif öğelere karşılık gelen sütunları seçilir. Buna yansıtma denir.

K sütununun seçimi incelemenin sonuçlarına göre değiştiğine göre, ortaya çıkabilecek bütün yansıma tasarımları özelliklerini incelemek gerekir.
Hadamard matrislerinden doğan yansıma tasarımları ya düzenli ya da düzensiz öğesel planlardır. Düzenli öğesel tasarımların farklı yapıları vardır ve genellikle $N = 2^p$ sırlarının Hadamard matrislerinden doğarlar. Düzenli olmayan franksiyonel öğesel tasarımların karmaşık yapıları vardır.

Düzenli öğesel tasarımların karmaşık yapıları kolaylıkla hesaplanabilir. Öte yandan, düzenli olmayan tasarımların karmaşık yapıları kolaylıkla hesaplanamaz [5].

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Hadamard matris tanım ve özellikleri Hong Yeop-Song [1] ve Laszlo Babai [2] tarafından verilmiştir. Bununla beraber Konferans matris ve Kronecker çarpımı Hong Yeop-Song [1] tarafından tanıtılmıştır.Çalışmamızda Hadamard matrislerin, Konferans matris yöntemi ve Kronecker çarpımı yöntemiyle oluşturulabileceği gösterilmiştir.

Bu çalışmada Hong Yeop-Song [1] tarafından verilen lemma 2.2.2. nin doğruluğu incelenip, elde edilen sonuçlar belirlenmiştir.Bu lemmanın doğruluğu daha büyük çift sayılar için de incelenebilir.

Çalışmamızda, Hadamard matrislerin uygulamalarının kimyada kullanılabilceğini gösteren örneklere yer verilmiştir.Bu uygulamaların farklı çeşitlemeleri de incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] SONG, Hong Yeop, Examples and Constructions of Hadamard Matrices, June, 2002. Department of Electrical and Electronics Engineering Yonsei University, Seoul, 120-749 Korea.

[2] BABAI, Laszlo, Hadamard Matrices, June 14, 2002

[3] FIEDLER, M. , MARKHAM, T. L. , An Inequality for the Hadamard Product of an M-matrix and inverse M-matrix, Linear Algebra Appl. 101 (1988) 1-8.

[4] HORN, R. A., JOHNSON, C. R. , Matrix Analiysis, Cambridge University Preus, New York, 1985.

[5] EVANGELAROS H., KOUKOUVINOS C., SEBERRY J., Applications of Hadamard matrices. Journal of Telecominications and Information Technology 2/2003

[6] KIEFER, J., “Construction and optimally of generalized Youden designs” , in Statistical Design and Linear Models, J. N. Srivastava, Ed. Amsterdam:North-Holland, 1975, pp. 333-353.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşe Yasemin USTACIK, 05.03.1980 tarihinde Karabük'te doğdu. İlk ve orta eğitimini Karabük'te, lise eğitimini de İzmit'in Derince ilçesinde tamamladı. 1997 yılında Derince İmam Hatip Lisesi'nden mezun oldu. 1997 yılında başladığı Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2001 yılında bitirdi. 2001 yılında Sakarya'nın Sapanca ilçesinde Matematik Öğretmenliğine başladı. 2003 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Anabilim Dalında Yüksek Lisans Programına kaydoldu. Şu anda Sapanca'da Matematik Öğretmenliğine devam etmektedir.