T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERTRAND EĞRİLERİNİN LORENTZ UZAYLARINA UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aslı BAYKAL

Enstitü Anabilim Dalı	:	MATEMATİK
Tez Danışmanı	:	Doç. Dr. Murat TOSUN

Temmuz 2007

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERTRAND EĞRİLERİNİN LORENTZ UZAYLARINA UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aslı BAYKAL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 25/07/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Murat TOSUN	**Doç.Dr. İbrahim OKUR**	**Yrd.Doç.Dr.İbrahim ÖZGÜR**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu tezi hazırlamamda en büyük paya sahip danışmanım Doç. Dr. Murat TOSUN'a, çalışmalarım sırasında benden hiçbir zaman yardımlarını esirgemediği için en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tezimi hazırlarken bana her konuda destek olan aileme de teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

R	: Reel sayılar cümlesi
V	: Vektör uzayı
$\langle , \rangle$	: İç çarpım
$\langle , \rangle\big\vert_L$	: Lorentz anlamında iç çarpım
L^n	: n boyutlu Lorentz Uzayı
$\Vert , \Vert$	: Norm
$\wedge\big\vert_L$	: L^3 te Lorentz anlamında vektörel çarpım
$\overline{M}$	: Lorentz Alt Manifoldu
$\chi(M)$	: M üzerinde vektör alanlar cümlesi
$(M, \langle , \rangle)$	: Lorentz Manifoldu
H_i	: M nin i. Mertebeden harmonik eğrilikleri fonksiyonu
(I,α)	: Koordinat Komşuluğu
S^P	: Oskülatör p-küresi
$\forall$	: Her
M	: C^∞ Manifoldu
J	: İnsclusion dönüşümü
$V[f]$	: Vektör alanı yönünde türev

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

R	: Reel sayılar cümlesi
V	: Vektör uzayı
$\langle , \rangle$	: İç çarpım
$\langle , \rangle\big|_L$	: Lorentz anlamında iç çarpım
L^n	: n boyutlu Lorentz Uzayı
$\lVert , \rVert$	: Norm
$\wedge\big|_L$	: L^3 te Lorentz anlamında vektörel çarpım
$\overline{M}$	: Lorentz Alt Manifoldu
$\chi(M)$	: M üzerinde vektör alanlar cümlesi
$(M, \langle , \rangle)$	: Lorentz Manifoldu
H_i	: M nin i. Mertebeden harmonik eğrilikleri fonksiyonu
(I,α)	: Koordinat Komşuluğu
S^P	: Oskülatör p-küresi
$\forall$	: Her
M	: C^∞ Manifoldu
J	: İnsclusion dönüşümü
$V[f]$	: Vektör alanı yönünde türev

BÖLÜM 1.ÖKLİD UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1. (Afin Uzay)

Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : AxA \to V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

(A1). $\forall P, Q, R \in A$ için f (P,Q) + f (Q,R) = f (P,R)

(A2). $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için f (P,Q) = α olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır $[2]$.

Tanım 1.2. (Öklid uzayı)

Bir reel afin uzay A ve Aile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle , \rangle : VxV \to R$$

$$(x, y) \to \langle , \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \begin{cases} x = (x_1, ..., x \;\;) \\ y = (y_1, ..., y_n) \end{cases}$$

tanımlanırsa. A'ya bir Öklid Uzayı adı verilir. Eğer A=R^n ve V= R^n alınırsa A=R^n Öklid Uzayı, Standart Öklid Uzayı olarak isimlendirilir.

Tanım 1.3. (Uzaklık)

$$d : E^n x E^n \rightarrow IR$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \left\| \overrightarrow{xy} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid Uzayında uzaklık fonksiyonu ve d(x,y) reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir.

Teorem 1.1.

E^n de uzaklık fonksiyonu bir metriktir $[2]$.

Tanım 1.4. (Öklid Metriği)

$$d : E^n x E^n \rightarrow IR$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \left\| \overrightarrow{xy} \right\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de Öklid Metriği denir.

Tanım 1.5. (Açı)

$\forall x, y, z \in E^n$ için $\hat{xyz}$ açısının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \rangle}{\left\| \overrightarrow{xy} \right\| \left\| \overrightarrow{yz} \right\|}$$

dan hesaplanan θ reel sayısıdır.

Tanım 1.6. (Öklid Çatısı)

E^n de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, ..., P_n\}$ nokta n+1-lisine IR^n de karşılık gelen

$\left\{ \overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, ..., \overrightarrow{P_0 P_n} \right\}$ vektör n-lisi IR^n için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, ..., P_n\}$

sistemine E^n in bir dik çatısı veya Öklid Çatısı adı verilir.

Tanım 1.7.

$I \subseteq R$ bir açık aralık olmak üzere,

$$\alpha : I \longrightarrow E^n ,$$

diferansiyellenebilen fonksiyona E^n de bir eğri adı verilir. Burada $I \subseteq R$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir.

BÖLÜM 2. LORENTZ UZAYINDA TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1.

V, bir reel vektör uzayı olsun. $\forall a, b \in R$ ve $\forall$ X, Y, Z$\in$ V için

$$<,>: VxV \to R$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahipse V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer formdur denir $[6]$.

1) $< X, Y >=< Y, X >$

2) $< aX \pm bY, Z >= a < X, Z > \pm b < Y, Z >$

$< X, aY \pm bZ >= a < X, Y > \pm b < X, Z >$

Tanım 2.2.

<,>, V bir reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun.

i) Eğer $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \ \rangle 0$ oluyorsa <,> simetrik bilineer formuna, pozitif definit denir.

ii) Eğer $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \ \langle 0$ oluyorsa <,> simetrik bilineer formuna, negatif definit denir.

iii) Eğer $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \ \geq 0$ oluyorsa <,> simetrik bilineer formuna, pozitif semi-definit denir.

iv) Eğer $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \ \leq 0$ oluyorsa <,> simetrik bilineer formuna, negatif semi-definit denir.

v) $\forall w \in V$ için $\langle$ v,v$\rangle$ = 0 iken v = 0 oluyorsa <,> ya nondejenere simetrik bilineer form denir $[6]$.

Tanım 2.3.

V, bir reel vektör uzayı ve $<,>: VxV \to IR$ simetrik bilineer form olsun.

$$<,> \left| W : WxW \to IR \right.$$

negatif definit olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formun indeksi denir $[6]$.

Tanım 2.4.

IR^n üzerinde $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $\vec{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere

$$<,> \big|_L : IR^n x IR^n \to IR$$

$$(X,Y) \to < X, Y > \big|_L = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan, simetrik, bilineer, nondejenere metrik tensörüne IR^n üzerinde Lorentz Metriği denir $[6]$.

Bundan sonraki gösterimlerde aksi belirtilmedikçe <,> sembolü $<,> \big|_L$ anlamında kullanılacaktır.

Tanım 2.5.

R^n üzerinde Lorentz Metiriğinin tanımlanmasıyla meydana gelen $\{IR^n, <,> \}$ ikilisine n-boyutlu Lorentz Uzayı denir ve L^n ile gösterilir.

Tanım 2.6.

$\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in L^n$ olsun.

$<\vec{X}, \vec{X}>$ <0 ise $\vec{X}$ e time-like vektör,

$<\vec{X}, \vec{X}>$ >0 ise $\vec{X}$ e space-like vektör

$<\vec{X},\vec{X}>$ =0 ise $\vec{X}$ e null veya light-like vektör

$<\vec{X},\vec{X}> \leq 0$ ise $\vec{X}$ e nonspace-like vektör denir $[6]$.

Tanım 2.7.

L^n, n-boyutlu Lorentz uzayı ve $P \in L^n$ olsun. P noktasındaki bütün light-like (null) vektörlerinin cümlesine light-like koni (null koni) denir.

Tanım 2.8.

L^n, n-boyutlu Lorentz uzayı ve $\vec{X},\vec{Y} \in L^n$ olsun.

$$<\vec{X},\vec{Y}> = 0$$

ise $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörleri Lorentz anlamında diktirler denir $[6]$.

Tanım 2.9.

$\vec{X} \in L^n$ için $\vec{X}$ vektörünün normu diye;

$$\left\|\vec{X}\right\| L = \sqrt{|< \vec{X},\vec{X} > 1}$$

olarak tanımlanan $\| \ . \ \| \ |L$ reel gerçel sayısına denir $[6]$.

Aksi belirtilmedikçe$\| \ . \ \|$ sembolü $\| \ . \ \| \ |L$ yerine kullanılacaktır.

Teorem 2.1.

$\vec{X} \in L^n$ olmak üzere;

i) $\left\|\vec{X}\right\| > 0$ dır.

ii) $\left\|\vec{X}\right\| > 0 \Leftrightarrow \vec{X}$ bir null vektördür.

iii) $\vec{X}$ bir time-like vektör ise $\|\vec{X}\|^2 = -<\vec{X},\vec{X}>$

iv) $\vec{X}$ bir space-like vektör ise $\|\vec{X}\|^2 = <\vec{X},\vec{X}>$

dır [6].

Teorem 2.2.

L^n, n-boyutlu Lorentz uzayında iki time-like vektör $\vec{X}$, $\vec{Y}$ olsun.
Eğer $\vec{X}$, $\vec{Y}$ vektörleri aynı time konide ise

$$<\vec{X},\vec{Y}> = -\|\vec{X}\|.\|\vec{Y}\|ch\varphi$$

olacak şekilde $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ arasında hiperbolik açı diye adlandırılan bir tek $\varphi \geq 0$ sayısı vardır [1].

Tanım 2.10 (Vektörel Çarpım)

$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3) \in L^3$ olmak üzere,

$$\wedge\big|L : L^3 x L^3 \to L^3$$

$$(\vec{X},\vec{Y}) \to \vec{X} \wedge\big|L\vec{Y} = \big(-(x_2 y_3 - x_3 y_2),\ x_3 y_1 - x_1 y_3\ ,\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \big)$$

şeklinde tanımlı $\wedge\big|L$ operatörüne L^3 de Lorentz anlamında vektörel çarpım denir. Bu tanımı matris formunda;

$$\vec{X} \wedge \Big|_L \vec{Y} = \det \begin{bmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz [6].

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $\wedge\big|_L$ yerine $\wedge$ ifadesini kullanacağız.

Teorem 2.3.

$\wedge : L^3 x L^3 \to L^3$ olmak üzere $\forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in L^3$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

1) $< \vec{X} \wedge \vec{Y}, \vec{Z} >= \det(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$,

2) $(\vec{X} \wedge \vec{Y}) \wedge \vec{Z} =< \vec{Y}, \vec{Z} > \vec{X} - < \vec{X}, \vec{Z} > \vec{Y}$

3) $< \vec{X}, \vec{X} \wedge Y >= 0$,

4) $< \vec{Y}, \vec{X} \wedge \vec{Y} >= 0$

Teorem 2.4.

Her U,V $\in L^3$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1) U space-like ve V time-like vektör ise $U \wedge V$ space-like
2) U space-like ve V null vektör olmak üzere
   a) $< U, V >= 0$ ise $U \wedge V$ null vektör,
   b) $< U, V > \neq 0$ ise $U \wedge V$ space-like vektördür.

Tanım 2.11.

M, bir C^∞ manifold ve M üzerinde vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ve reel değerli fonksiyonların halkası da $C^\infty(M, R)$ olmak üzere,

$<,>: \chi(M) x \ \chi(M) \to C^\infty(M, R)$

dönüşümü

1)2-lineer
2)Simetrik
3) $\forall X \in \chi(M)$ için $< X, Y >= 0 \Rightarrow Y = 0$ dır. Özellikleri sağlanıyorsa;

$<,>$ dönüşümüne M üzerinde metrik tensör denir.

Tanım 2.12.

M bir C^{∞} manifold ve $<,>$ de M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere (M,$<,>$) ikilisine bir Yarı-Riemann Manifoldu denir $[6]$.

Tanım 2.13.

(M,$<,>$) bir Yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer boy $M \geq 2$ ve indeks $M = 1$ ise (M,$<,>$) ikilisine bir Lorentz Manifoldu denir $[6]$.

Bundan sonra Lorentz manifoldu M ile göstereceğiz.

Tanım 2.14.

$J : \overline{M} \to M$ inclusion dönüşümü olmak üzere, $J^{*}(<,>), \overline{M}$ üzerinde metrik tensör ise $\overline{M}$ ye M nin Lorentz Antimanifoldu denir $[6]$.

Tanım 2.15.

$\alpha \subset L^{n}$ Lorentz Uzayında bir eğri olsun. α eğrisinin hız vektörü $\alpha^{'}$ olmak üzere,

i) $<\alpha^{'},\alpha^{'}> < 0$ ise, α(s) time-like eğri,

ii) $<\alpha^{'},\alpha^{'}> > 0$ ise, α(s) space-like eğri,

iii) $<\alpha^{'},\alpha^{'}> = 0$ ise, α(s) null eğri olarak adlandırılır $[6]$.

Bu tanıma göre $\|\alpha^{'}\| = +1$ ise α eğrisi birim hızlı time-like eğri olacaktır. Aksi belirtilmedikçe eğriyi birim hızlı time-like eğri olarak alacağız.

BÖLÜM 3. E^n, n BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİ

Tanım 3.1.

E^n de M, N eğrileri, sırasıyla (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha(s) \in M$, $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N nin $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), V_2^*(s), ..., V_r^*(s)\}$ Frenet r- ayaklıları verildiğinde $\{V_1(s), V_2^*(s)\}$ lineer bağımlı ise (M,N) eğri çiftine bir Bertrand eğri çifti adı verilir [2].

Tanım 3.2.

E^n de yay uzunluklu bir eğri M ve bu eğrinin Frenet r- ayaklı alanı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{dV_i}{ds} = \sum_{i=1}^{n} k_{ij} V_j , \qquad ; \quad i, j = 1,2,....,r \tag{3.1}$$

olmak üzere

$$k_{ij} = \left\langle \frac{dV_i}{ds}, V_j(s) \right\rangle \tag{3.2}$$

Şeklinde tanımlanan fonksiyonlara M eğrisinin yüksek mertebeden eğrilikleri adı verilir [3].

Teorem 3.1.

M, E^n de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri olsun. M eğrisinin α (s) noktasındaki Frenet r- ayaklı alanı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad V_1'(s) = k_{12}(s)V_2(s) \\ &\text{ii)} \quad V_i'(s) = k_{i(i-1)}V_{(i-1)} + k_{i(i+1)}(s)V_{r+1}(s) \qquad (3.3) \\ &\text{iii)} \quad V_r'(s) = \varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-1}k_{r(r-1)}(s)V_{r-1}(s) \end{aligned}$$

dir [3].

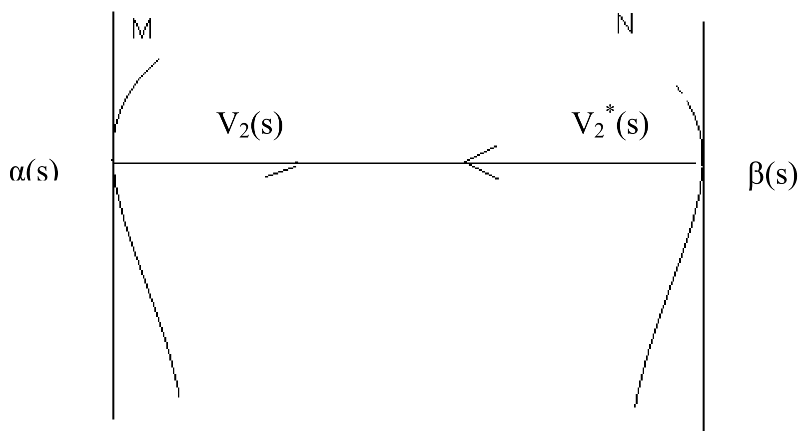
Teorem 3.2.

E^n de (M, N) Bertrand eğri çifti verilsin. M ve N sırasıyla, (I,α) ve (I,β) koordinat komşuluğu ile verilmek üzere $\forall s \in I$ için

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = sabit$$

dir [3].

İspat:



(şekil 3.1)

şekil I den dolayı

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_2(s) \qquad (3.4)$$

yazılabilir. M ve N eğrilerinin α (s) ve β(s) noktalarındaki Frenet r- ayaklıları, sırasıyla $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), V_2^*(s), ..., V_r^*(s)\}$ dir. Böylece M nin yay parametresi s, N nin yay parametresi s* olmak üzere

$$\frac{ds^*}{ds} V_1^*(s) = [1 - \lambda(s) k_{21}(s)] V_1(s) + \lambda'(s) V_2(s) + \lambda(s) k_{23}(s) V_3(s)$$

dir. O halde,

$$\langle V_1^*(s), V_2(s) \rangle = 0$$

olduğundan

$$\lambda(s) = sabit$$

$\forall s \in I$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(\alpha(s), \beta(s)) &= \|\beta(s) - \alpha(s)\| \\ &= \|\lambda V_2(s)\| \\ &=. |\lambda|, \ \forall s \in I \\ &= \text{sabit} \end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.3.

M ve N sırasıyla, (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları ile verilmiş Bertrand eğrileri olmak üzere bu eğrilerin vektör alanları arasındaki açının ölçümü sabittir, [3].

İspat:

M ve N’ nın Frenet r- ayaklı alanları sırasıyla $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), V_2^*(s), ..., V_r^*(s)\}$ olsunlar. Bertand eğri çifti tanımı gereğince $V_1^* \perp V_2$ dir. Böylece

$$V_1^* \in Sp\{V_1, V_2, ..., V_n\}$$

dir. O halde

$$V_1^* = \sum_{\substack{ş=1 \\ (ş\neq 2)}}^{n} a_ş V_i \ ; \qquad \langle V_1^*, V_1 \rangle = a_1$$

dir. Buradan

$$\frac{dV_1^*}{ds} = \sum_{\substack{ş=1 \\ (i\neq 2)}}^{n} \left(\frac{da_ş}{ds} V_i + a_ş \frac{dV_i}{ds}\right) \tag{3.5}$$

yazılabilir. Eğer Tanım 3.2 ve teorem (3.1) göz önüne alınırsa, sırasıyla

$$\frac{dV_1^*}{ds} = \sum_{j=1}^{n} k_{şj} V_j \tag{3.6}$$

ve

$$\frac{dV_1^*}{ds} = k_{12}^* V_2^* \tag{3.7}$$

yazılabilir. Bu takdirde

$$\frac{dV_1^*}{ds} \,//\, V_2^*$$

ve

$$\frac{dV_1^*}{ds} // V_2 \tag{3.8}$$

elde edilir. Teorem 3.1 ve (3.5) denklemi göz önüne alınırsa

$$\frac{dV_1^*}{ds} = \sum_{\substack{ş=1 \\ (i\neq 2)}}^{n} (\frac{da_ş}{ds} V_i + a_ş (k_{12} V_2) + a_3 (k_{32} V_2 - k_{34} V_4) + \ldots + a_n k_{n(n-1)} V_{(n-1)})$$

$$= \frac{da_1}{ds} V_1 + (a_1 k_{12} + a_3 k_{32}) V_2 + \ldots$$

bulunur. (3.7) ve (3.8) denklemleri ele alınırsa

$$\frac{da_1}{ds} = 0$$

bulunur. Bu ifade eder ki $a_1 = sabit$ tir. Eğer V_1 ve V_1^* arasındaki açının ölçüsü θ ise

$$\cos\theta = \frac{\left\langle V_1, V_1^* \right\rangle}{\|V_1\| . \|V_1^*\|} = \frac{a_1}{1.1} = a_1, \qquad \text{(sabit)}$$

tir. Şimdi $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ nın sırasıyla eğrilik fonksiyonları k_{12}, k_{23} ve k_{12}^*, k_{23}^* arasındaki bağıntıyı bulalım. (3.4) denklemi göz önüne alınırsa

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{ds}\frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda k_{21}) V_1 + (\frac{d\lambda}{ds} + \lambda k_{22}) V_2 + \lambda \sum_{j=3}^{n} k_{2j} x_j$$

yazılabilir.

$$\frac{d\lambda}{ds} = 0 \text{ ve } k_{22} = 0$$

olduğundan

$$V_1^* = \frac{ds}{ds^*}(1+\lambda k_{21})V_1 + \frac{ds}{ds^*}\lambda k_{23}V_3$$

olur.

$$V_1^* = a_1 V_1 + a_3 V_3 + \ldots + a_n V_n$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$a_1 = (1+\lambda k_{21})\frac{ds}{ds^*} \tag{3.9}$$

$$a_3 = \lambda k_{23}\frac{ds}{ds^*} \tag{3.10}$$

elde edilir. Bu son iki denklem oranlanırsa

$$\frac{1+\lambda k_{21}}{\lambda k_{23}} = \frac{a_1}{a_3} \tag{3.11}$$

bulunur. (3.9) ve (3.10) denklemlerinde λ yerine -λ yazılırsa, $\beta(s^*)$ için aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$a_1 = (1-\lambda k_{21})\frac{ds^*}{ds} \tag{3.12}$$

$$a_3 = -\lambda k_{23}\frac{ds^*}{ds} \tag{3.13}$$

Eğer (3.12) ve (3.13) denklemeleri oranlanırsa

$$\frac{1-\lambda {k_{21}}^*}{-\lambda k_{23}} = \frac{a_1}{a_3} \tag{3.14}$$

bulunur. Böylece (3.11) ve (3.13) bağıntıları iki eğrinin Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şartlardır.

Teorem 3.4. (Manhiem'ın Teoremi)

M ve N, E^n de iki Bertrand eğri çifti olsunlar. P ve P^* noktaları (M,N) nin karşılıklı iki noktası olmak üzere A_0 ve A_0^* bu noktaların eğrilik merkezi ise

$$\frac{\|P^*A_\circ\|}{\|PA_\circ\|} \div \frac{\|P^*A_\circ^*\|}{\|PA_\circ^*\|}$$

oranı sabittir [4].

İspat:

Eğer (3.9) ve (3.12) denklemleri göz önüne alınırsa

$$(1+\lambda k_{21})(1-\lambda k_{21}^*) = a_1^2 \qquad \text{(sabit)} \qquad (3.15)$$

dir. g ve g^* eğrilik yarıçapları olmak üzere aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$\|P^*A_\circ\| = -\lambda + g = -\lambda + \frac{1}{k_{12}} = \frac{-\lambda k_{12}+1}{k_{12}} \quad , \quad \|PA_\circ\| = g = \frac{1}{k_{12}},$$

$$\|P^*A_\circ^*\| = g^* = \frac{1}{k_{12}^*} \quad \text{ve} \quad \|PA_\circ^*\| = \lambda + g^* = \lambda + \frac{1}{k_{12}^*} = \frac{k_{12}^*+1}{k_{12}^*}$$

Böylece çift oran

$$\frac{\|P^*A_\circ\|}{\|PA_\circ\|} \div \frac{\|P^*A_\circ^*\|}{\|PA_\circ^*\|} = \frac{\|P^*A_\circ\|}{\|PA_\circ\|} \cdot \frac{\|PA_\circ^*\|}{\|P^*A_\circ^*\|} = \frac{\frac{-\lambda k_{12}+1}{k_{12}}}{\frac{1}{k_{12}}} \cdot \frac{\frac{\lambda k_{12}^*+1}{k_{12}^*}}{\frac{1}{k_{12}^*}}$$

$$\frac{\|P^*A_\circ\|}{\|PA_\circ\|} \div \frac{\|P^*A_\circ^*\|}{\|PA_\circ^*\|} = (-\lambda k_{12}+1)\cdot(\lambda k_{12}^*+1)$$

dir.

$$k_{12} = -k_{21} \quad \text{ve} \quad k_{12}^{*} = -k_{21}^{*}$$

olduğundan

$$\frac{\left\| P^{*} A_{\circ} \right\|}{\left\| P A_{\circ} \right\|} \div \frac{\left\| P^{*} A_{\circ}^{*} \right\|}{\left\| P A_{\circ}^{*} \right\|} = \left(1 + \lambda k_{21}\right)\left(1 - \lambda k_{21}^{*}\right)$$

yazılır. Bu son denklemle birlikte (3.15) denklemi göz önüne alınırsa

$$\frac{\left\| P^{*} A_{\circ} \right\|}{\left\| P A_{\circ} \right\|} \div \frac{\left\| P^{*} A_{\circ}^{\mp *} \right\|}{\left\| P A_{\circ}^{*} \right\|} = a_1^2 \qquad \text{(sabit)}$$

bulunur. Bu yüzden yukarıda bahsedilen çift oran süreklidir.

Tanım 3.3.

M E^n de bir eğri ve bu eğrinin birim teğet vektör alanı V_1 olsun. $x \in x(E^n)$ bir sabit birim vektör alanı olmak üzere p$\in$M için

$$\left\langle V_1, x \right\rangle \Big|_p = \cos\varphi = sbt, \qquad \varphi \neq \pi/2$$

ise M eğrisine E^n de bir eğilim çizgisi, φ açısına M nin eğilim açısı ve $Sp\{x\}$ uzayına da M nin eğilim ekseni denir $[2]$.

Tanım 3.4

M$\subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha(s) \in M$ noktasında M nin 1. ve 2. eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$
olmak üzere

$$H : I \longrightarrow IR, \qquad H(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M nin s noktasındaki 1. harmonik eğriliği denir [2].

Tanım 3.5.

M, E^n de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri ve bu eğrinin birim teğet vektör alanı V_1 olmak üzere

$$H_i : I \longrightarrow IR \quad ,$$

$$H_i = \begin{cases} \dfrac{k_1}{k_2} & , \quad i = 1 \\ \{ V_1[H_{i-1}] + H_{i-2}k_{i(i+1)} \} \dfrac{1}{k_{(i+1)(i+2)}}, & 1 \le i \le n-2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonuna M nin i. mertebeden Harmonik eğriliği denir [2].

Teorem 3.5.

E^n de M ve N, sırasıyla (I,α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilen Bertrand eğri çiftleri olsunlar. Öyle λ, μ sabitleri için

$$\mu\left(k_{23} + k_{23}^*\right) + \lambda\left(k_{12} + k_{12}^*\right) = 0$$

dır. Burada k_{12}, k_{23} ve k_{12}^*, k_{23}^* sırasıyla α ve β nın eğrilikleridir [3].

İspat:

(3.11) ve (3.14) denklemlerinde

$$\frac{a_1}{a_3}.\lambda = \mu$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\mu k_{23} - \lambda k_{21} = 1$$

$$\mu k_{23} + \lambda k_{12} = 1 \tag{3.16}$$

ve

$$1 - \lambda k_{21}^{*} = -\mu k_{23}^{*}$$

$$-\mu k_{23}^{*} - \lambda k_{12}^{*} = 1 \tag{3.17}$$

son iki denklemden aşağıdaki lineer bağıntı bulunur.

$$\mu\left(k_{23} + k_{23}^{*}\right) + \lambda\left(k_{12} + k_{12}^{*}\right) = 0$$

Teorem 3.6

M, E^n de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve bu eğri için $k_{23} \neq 0$, $k_{34} = 0$ olsun. M nin bir Bertrand eşleniği vardır.

$$\lambda k_{12} + \mu k_{23} = 1$$

dir. Burada λ, μ sabitlerdir $[4]$.

İspat:

$(\Rightarrow)$: Kabul edelim ki M nin Bertrand eşleniği N olsun. Öyle ki N eğrisi (I,β) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu takdirde bir λ sabiti vardır. Öyle ki

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_2(s)$$

dir. Her iki tarafın da diferansiyeli alınırsa

$$\frac{d\beta}{ds} = V_1 + \lambda\left(k_{21}V_1 + k_{23} + V_3\right) \tag{3.18}$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{d\beta}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \left(1 + \lambda k_{21}\right)V_1 + \lambda\, k_{23}V_3$$

$$V_1^* = \frac{ds}{ds^*} \cdot \left[\left(1 + \lambda k_{21}\right)V_1 + \lambda k_{23}V_3\right]$$

bulunur.

$$\left\langle V_1, V_1^* \right\rangle = a_1\,,\ \left\langle V_3, V_1^* \right\rangle = a_3$$

olduğundan

$$\left\langle V_1, V_1^* \right\rangle = \left(1 + \lambda k_{21}\right)\frac{ds}{ds^*} = a_1$$

$$\left\langle V_3, V_1^* \right\rangle = \lambda k_{23}\, \frac{ds}{ds^*} = a_3$$

elde edilir. Hipotezden dolayı $k_{23} \neq 0$ olduğundan

$$\frac{1 + \lambda k_{21}}{\lambda k_{23}} = \frac{a_1}{a_3}$$

$$\frac{a_1}{a_3}\cdot\lambda\cdot k_{23}-\lambda k_{21}=1$$

$$\mu k_{23}+\lambda k_{12}=1$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$: Şimdi kabul edelim ki $k_{34}=0$ ve λ, μ sabitleri için

$$\lambda k_{12}+\mu k_{23}=1$$

olsun.

$$\beta(s)=\alpha(s)+\lambda V_2(s)$$

yazılabildiğini biliyoruz. Böylece (3.18) denkleminden

$$\frac{d\beta}{ds}=\frac{d\alpha}{ds}+\lambda\frac{dV_2}{ds}=V_1+\lambda\left(k_{21}V_1+k_{23}V_3\right)$$

$$\frac{d\beta}{ds}=\left(1+\lambda k_{21}\right)V_1+\lambda k_{23}V_3=\left(1-\lambda k_{12}\right)V_1+\lambda k_{23}V_3$$

dir.

$$1-\lambda k_{12}=\mu k_{23}$$

den dolayı,

$$\frac{d\beta}{ds}=\mu k_{23}V_1+\lambda k_{23}V_3=k_{23}\left(\mu V_1+\lambda V_3\right)$$

$$V_1^*=\frac{k_{23}}{\left|k_{23}\right|\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\cdot\left(\mu V_1+\lambda V_3\right)$$

olur. Eğer

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\lambda^2}}=\wp$$

olarak seçilirse

$$V_1^*=\mp\wp(\mu V_1+\lambda V_3)$$

ve

$$\frac{dV_1^*}{ds}=\mp\wp\left(\mu\frac{dV_1}{ds}+\lambda\frac{dV_3}{ds}\right)$$

olur. Burada

$$\frac{dV_1}{ds}=k_{12}V_2 \quad \text{ve} \quad \frac{dV_3}{ds}=k_{32}V_2+k_{34}V_4$$

yerlerine yazılırsa

$$\frac{dV_1^*}{ds}=\frac{dV_1^*}{ds^*}\cdot\frac{ds^*}{ds}=\mp\wp\left[\mu k_{12}V_2+\lambda\left(k_{32}V_2+k_{34}V_4\right)\right]$$

elde edilir. Eğer $k_{34}=0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$k_{12}^*V_2^*=\mp\frac{ds}{ds^*}\cdot\wp\cdot\left(\mu k_{12}+\lambda k_{32}\right)V_2 \qquad (3.19)$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\frac{d\beta}{ds^*}=\frac{d\beta}{ds}\cdot\frac{ds}{ds^*}$$

$$V_1^*=\frac{d\beta}{ds}\cdot\frac{ds}{ds^*}$$

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\left|\frac{d\beta}{ds}\right|} = \frac{\wp}{|k_{23}|}$$

elde edilir. (3.19) denkleminden dolayı

$$V_2^* = \mp \frac{1}{k_{12}^*} \cdot \frac{1}{|k_{23}|} \cdot \wp^2 \cdot (\mu k_{12} + \lambda k_{32}) V_2$$

$$V_2^* = \mp \frac{(\mu k_{12} + \lambda k_{32})\wp^2}{k_{12}^* \cdot |k_{23}|} \cdot V_2$$

yazılır. Bu yüzden V_2 ve V_2^* lineer bağımlıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.7.

M, E^n de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. Eğer M eğrisi, birden fazla eğim eğriliğine sahipse, bu eğriliğin 1. harmonik eğriliği olan H_1 sabittir [4].

İspat:

Kabul edelim ki M eğrisinin Bertrand eşlenikleri N ve N^* olsun. Sırasıyla N ve N^* (I, α^*) ve (I, α^{**}) koordinat komşuluğu ile verilsin ve bu eğrilerin birinci ve ikinci eğrilikleri sırasıyla k_{12}, k_{23} ve k_{12}^*, k_{23}^* ve k_{12}^{**}, k_{23}^{**} olsunlar.
α nın bir Bertrand eşleniği α^* olduğundan teorem 3.6 den dolayı λ ve μ gibi iki sabit vardır. Öyle ki

$$\begin{aligned} \lambda k_{12} + \mu k_{23} &= 1 \\ -\lambda k_{12}^* - \mu k_{23}^* &= 1 \end{aligned} \tag{3.20}$$

dir. α nın bir diğer eşleniği α^{**} olduğundan aynı şekilde u, v sabitleri vardır. Öyle ki

$$\begin{aligned} uk_{12} + vk_{23} &= 1 \\ -uk_{12}^{*} - vk_{23}^{*} &= 1 \end{aligned} \tag{3.21}$$

dir. (3.20) ve (3.21) denklemlerinden

$$k_{12} = \frac{v - \mu}{\lambda v - \mu u} \quad \text{(sabit)}$$

$$k_{23} = \frac{\lambda - \mu}{\lambda v - \mu u} \quad \text{(sabit)}$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$H_1 = \frac{k_{12}}{k_{23}} \quad \text{(sabit)}$$

olur. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.6.

M, E^n de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve bu eğri için $k_{23} \neq 0$, $k_{34} = 0$ olsun. M'nin bir Bertrand eşleniği vardır.

$$\lambda k_{12} + \mu k_{23} = 1$$

dir. Burada λ, μ sabitlerdir $[4]$.

İspat:

$(\Rightarrow)$:Kabul edelim ki M nin Bertrand eşleniği N olsun. Öyle ki N eğrisi (I,β) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu takdirde bir λ sabiti vardır. Öyle ki

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_2(s)$$

dir. Her iki tarafın diferansiyeli alınırsa

$$\frac{d\beta}{ds} = V_1 + \lambda\left(k_{21}V_1 + k_{23} + V_3\right) \tag{3.22}$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{d\beta}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \left(1 + \lambda k_{21}\right)V_1 + \lambda\, k_{23}V_3$$

$$V_1^* = \frac{ds}{ds^*} \cdot \left[\left(1 + \lambda k_{21}\right)V_1 + \lambda k_{23}V_3\right]$$

bulunur.

$$\left\langle V_1, V_1^*\right\rangle = a_1\,,\ \left\langle V_3, V_1^*\right\rangle = a_3$$

olduğundan

$$\left\langle V_1, V_1^*\right\rangle = \left(1 + \lambda k_{21}\right)\frac{ds}{ds^*} = a_1$$

$$\left\langle V_3, V_1^*\right\rangle = \lambda k_{23}\,\frac{ds}{ds^*} = a_3$$

elde edilir. Hipotezden dolayı $k_{23} \neq 0$ olduğundan

$$\frac{1 + \lambda k_{21}}{\lambda k_{23}} = \frac{a_1}{a_3}$$

$$\frac{a_1}{a_3} \cdot \lambda \cdot k_{23} - \lambda k_{21} = 1$$

$$\mu k_{23} + \lambda k_{12} = 1$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$: şimdi kabul edelim ki $k_{34} = 0$ ve λ, μ sabitleri için

$$\lambda k_{12} + \mu k_{23} = 1$$

olsun.

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda V_2(s)$$

yazılabildiğini biliyoruz. Böylece (3.22) denkleminden

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} + \lambda \frac{dV_2}{ds} = V_1 + \lambda\left(k_{21}V_1 + k_{23}V_3\right)$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \left(1 + \lambda k_{21}\right)V_1 + \lambda k_{23}V_3 = \left(1 - \lambda k_{12}\right)V_1 + \lambda k_{23}V_3$$

dir.

$$1 - \lambda k_{12} = \mu k_{23}$$

den dolayı,

$$\frac{d\beta}{ds} = \mu k_{23}V_1 + \lambda k_{23}V_3 = k_{23}\left(\mu V_1 + \lambda V_3\right)$$

$$V_1^* = \frac{k_{23}}{|k_{23}|\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \cdot \left(\mu V_1 + \lambda V_3\right)$$

oluşur. Eğer,

$$\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\lambda^2}}=\wp$$

olarak seçilirse

$$V_1^* = \mp\wp(\mu V_1 + \lambda V_3)$$

ve

$$\frac{dV_1^*}{ds} = \mp\wp\left(\mu\frac{dV_1}{ds} + \lambda\frac{dV_3}{ds}\right)$$

olur. Burada

$$\frac{dV_1}{ds} = k_{12}V_2 \quad \text{ve} \quad \frac{dV_3}{ds} = k_{32}V_2 + k_{34}V_4$$

yerlerine yazılırsa

$$\frac{dV_1^*}{ds} = \frac{dV_1^*}{ds^*}\cdot\frac{ds^*}{ds} = \mp\wp\left[\mu k_{12}V_2 + \lambda\left(k_{32}V_2 + k_{34}V_4\right)\right]$$

elde edilir. Eğer $k_{34}=0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$k_{12}^* V_2^* = \mp\frac{ds}{ds^*}\cdot\wp\cdot\left(\mu k_{12} + \lambda k_{32}\right)V_2 \qquad (3.23)$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\frac{d\beta}{ds^*} = \frac{d\beta}{ds}\cdot\frac{ds}{ds^*}$$

$$V_1^* = \frac{d\beta}{ds}\cdot\frac{ds}{ds^*}$$

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\left|\frac{d\beta}{ds}\right|} = \frac{\wp}{|k_{23}|}$$

elde edilir. (3.23) denkleminden dolayı

$$V_2^* = \mp \frac{1}{k_{12}^*} \cdot \frac{1}{|k_{23}|} \cdot \wp^2 \cdot (\mu k_{12} + \lambda k_{32}) V_2$$

$$V_2^* = \mp \frac{(\mu k_{12} + \lambda k_{32}) \wp^2}{k_{12}^* \cdot |k_{23}|} \cdot V_2$$

yazılır. Bu yüzden V_2 ve V_2^* lineer bağımlıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.8.

E^n de (M, N) sırasıyla (I,α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilen Bertrand eğri çiftleri, V_1 ile V_1^* arasındaki açı θ ve M eğrisinin birinci harmonik eğriliği H_1 olsun. Eğer $k_{34}=0$ ve $H_1=\tan\theta$ ise M genel bir helistir [3].

İspat:

$\{\alpha, \alpha^*\}$ Bertrand çifti olmak üzere θ açısının sabit olduğunu $V_1^* = a_1 V_1 + a_3 V_3$ ve $a_1 = \cos\theta$ olduğunu biliyoruz. O halde V_1^* bir birim vektör alanı, $a_3 = \sin\theta$ olur. Böylece

$$V_1^* = \cos\theta V_1 + \sin\theta V_3$$

dir. Aynı zamanda

$$H_1 = \tan\theta$$

ya da

$$\frac{k_{12}}{k_{23}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$k_{12}\cos\theta = -k_{32}\sin\theta \qquad (3.24)$$

dir. Kabul edelim ki V_1^*=X olsun. Bu takdirde

$$\frac{dX}{ds} = \cos\theta\frac{dV_1}{ds} + \sin\theta\frac{dV_3}{ds}$$
$$\frac{dX}{ds} = \cos\theta(k_{12}V_2) + \sin\theta(k_{32}V_2 + k_{34}V_4)$$

$k_{34} = 0$ kullanılarak

$$\frac{dX}{ds} = \cos\theta\ k_{12}V_2 + \sin\theta\ k_{32}V_2$$

yazılabilir. (3.24) denkleminden

$$\frac{dX}{ds} = \cos\theta\ k_{12}V_2 - \sin\theta\ k_{32}V_2 = 0$$

elde edilir. Böylece X=sabit ve

$$\langle X, V_1\rangle = \langle V_1^*, V_1\rangle = \cos\theta$$

sabittir ayrıca $Sp\{V_1^*\}$ bir eğim eksenidir. Bu ifade eder ki α bir genel helistir.

BÖLÜM 4. L^n LORENTZ UZAYINDA BERTRAND EĞRİLERİ

Tanım 4.1.

IL^n, n-boyutlu Lorentz uzayında M ve N iki time like eğrisi sırasıyla (I,α) ve (I,β) koordinat komşuluğu ile verilsin. M ve N nin Frenet r- ayaklı alanları sırasıyla $\{V_1(s), V_2(s),..., V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s), V_2^*(s),..., V_r^*(s)\}$ olsun. Eğer $\{V_2(s), V_2^*(s)\}$ lineer bağımlı ise (M,N) Bertrand eğri çifti olarak adlandırılır.

Tanım 4.2.

L^n de, (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri M olsun. Bu eğrinin frenet vektör alanı $\{V_1(s), V_2(s),..., V_r(s)\}$ olsun.

$$\frac{dV_i(s)}{ds} = \sum_{j=1}^{r} k_{ij}(s) V_j(s), \qquad 1 \le i, j \le r \qquad (4.1)$$

olmak üzere

$$k_{ij}(s) = \varepsilon_{j-1} \left\langle \frac{dV_i(s)}{ds}, V_j(s) \right\rangle \qquad (4.2)$$

ile tanımlanan fonksiyonlara M nin yüksek mertebeden eğrilikleri adı verilir. Açıktır ki

$$k_{ij}(s) = -k_{ji}(s) \qquad (i \langle j)$$

dir $[5]$.

Teorem 4.1.

M, IL^n de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri ve bu eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r- ayaklı alanı $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ olsun. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
&\text{i)}\, V'_1(s) = k_{12}(s)V_2(s),\\
&\text{ii)}\, V'_i(s) = \varepsilon_{i-2}\varepsilon_{i-1}k_{i(i-1)}(s)V_{i-1}(s) + k_{i(i+1)}(s)V_{i+1}(s), \qquad (4.3)\\
&\text{iii)}\, V'_r(s) = \varepsilon_{r-2}\varepsilon_{r-1}k_{r(r-1)}(s)V_{r-1}(s).
\end{aligned}
$$

dir $[5]$.

Tanım 4.2.

$\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ L^n de 2 düzenli time-like eğrisidir. $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s^*), V_2^*(s), ..., V_r^*(s^*)\}$ sırasıyla bu eğrilerde frenet-r çatısıdır.
Eğer $V_2(s)$ ve $V_2^*(s^*)$ lineer bağımlıysa $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ Bertrand Eğrileri olarak adlandırılır.

Teorem 4.2.

L^n de (M,N) Bertrand çifti sırasıyla (I,α) ve (I,β) koordinat komşuluklarıyla verilmek üzere $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ için

$$d(\alpha(s), \beta(s^*)) = sabit, \quad \forall s \in I$$

dir $[5]$.

İspat:

Eğer Tanım 4.1 göz önünde bulundurulursa

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda(s)V_2(s) \tag{4.4}$$

yazılabilir. Böylece (4.4) denkleminden

$$V_1^*(s)\frac{ds^*}{ds} = V_1(s) + \frac{d\lambda}{ds}V_2(s) + \lambda(s)\frac{dV_2}{ds} \tag{4.5}$$

elde edilir. Son denklem ve Teorem 4.1 dikkate alınırsa

$$V_1^*(s)\frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda(s)\varepsilon_0\varepsilon_1 k_{21}(s))V_1(s) + \lambda'(s)V_2(s) + \lambda(s)k_{23}(s)V_3(s) \tag{4.6}$$

bulunur. Son denklemin her iki tarafının $V_2(s)$ ile iç çarpımı yapılırsa,

$$\lambda'(s)\varepsilon_1 = 0$$

ve

$$\lambda(s) = \text{sabit}$$

elde edilir. Böylece

$$d(\alpha(s), \beta(s)) = \|\beta(s) - \alpha(s)\| = \|\lambda(s)\| = sabit$$

olur.

Teorem 4.3.

L^n de (M,N) time like Bertrand eğri çifti olsun. M ve N sırasıyla (I, α) ve (I, β) koordinat komşuluklarıyla verilsin. M ve N nin karşılıklı noktalardaki teğet vektör alanları arasındaki açının ölçümü sabittir $[5]$.

İspat:

M ve N nin Frenet r- ayaklı alanları sırasıyla $\{V_1(s), V_2(s), \ldots\ldots, V_r(s)\}$ ve $\{V_1^*(s^*), V_2^*(s), \ldots, V_r^*(s^*)\}$ olsun. Eğer $\langle V_1(s), V_1^*(s^*)\rangle$ iç çarpımının türevini alırsak,

$$\frac{d}{ds}\langle V_1(s), V_1^*(s^*)\rangle = \langle V'(s), V_1^*(s^*)\rangle + \left\langle V_1(s), V_1^{*'}(s^*)\frac{ds^*}{ds}\right\rangle$$

$$= \langle k_{12}(s)V_2(s), V_1^*(s^*)\rangle + \langle V_1(s), k_{12}^*(s^*)V_2^*(s^*)\rangle = 0$$

elde ederiz. Bu yüzden;

$$\langle V_1(s), V_1^*(s^*)\rangle = \text{sabit}$$

dir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.4.

M ve N, IL^n de sırasıyla (I, α) ve (I, β) koordinat komşuluklarıyla verilmiş time like eğriler olsunlar. (M,N) Bertrand eğri çiftidir gerek ve yeter şart,

$$\lambda_1(s)k_{21}(s) + \lambda_2(s)k_{23}(s) = 1$$

dir, burada λ_1 ve λ_2 sabitlerdir.

İspat:

($\Rightarrow$) İlk olarak kabul edelim ki (M,N) Bertrand eğri çifti olsun. Bu takdirde

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda(s)V_2(s)$$

yazılabilir. Bu takdirde (4.6) denkleminden

$$V_1^*\left(s^*\right)=\left\{V_1(s)+\lambda(s)\left(\varepsilon_0\varepsilon_1 k_{21}(s)V_1(s)+k_{23}(s)V_3(s)\right)\right\}\frac{ds}{ds^*}$$

$$=\left\{\left(1+\varepsilon_0\varepsilon_1 k_{21}(s)\lambda(s)\right)V_1(s)+k_{23}(s)\lambda(s)V_3(s)\right\}\frac{ds}{ds^*} \tag{4.7}$$

için $\left\{V_2(s), V_2^*(s)\right\}$ lineer bağımlı olduğundan

$$V_1^* = \varepsilon_0 \cosh\theta \;\; V_1 + \varepsilon_2 \sinh\theta \;\; V_3 \tag{4.8}$$

yazılabilir. O halde (4) ve (5) denklemlerinden

$$\varepsilon_0 \cosh\theta = \left(1+\varepsilon_0\varepsilon_1\lambda k_{21}\right)\frac{ds}{ds^*} \tag{4.9}$$

$$\varepsilon_2 \sinh\theta = \lambda k_{23}\,\frac{ds}{ds^*} \tag{4.10}$$

elde edilir. Bu son iki denklemden

$$\frac{\varepsilon_0 \cosh\theta}{\varepsilon_2 \sinh\theta}=\frac{\left(1+\varepsilon_0\varepsilon_1\lambda k_{21}\right)\frac{ds}{ds^*}}{\lambda k_{23}\,\frac{ds}{ds^*}} \tag{4.11}$$

bulunur. Eğer

$$c=\frac{\varepsilon_0 \cosh\theta}{\varepsilon_2 \sinh\theta}$$

alırsak,

$$c\lambda k_{23} = 1+\varepsilon_0\varepsilon_1\lambda k_{21} \tag{4.12}$$

$$c\lambda k_{23} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \lambda k_{21} = 1$$

elde edilir. Eğer

$$\lambda_1 = -\varepsilon_0 \varepsilon_1 \lambda$$

ve

$$\lambda_2 = c\lambda$$

seçilirse

$$\lambda k_{21} + \lambda_2 k_{23} = 1$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Açıkça gösterilir ki $V_2(s)$ ve $V_2^*(s^*)$ lineer bağımlıdır. Şimdi, eğer $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ eğrilerinin yerlerini değiştirirsek

$$\alpha(s) = \beta(s^*) - \lambda V_2^*(s^*) \qquad (4.13)$$

yazabiliriz. Bundan da şunu çıkarırız;

$$\frac{d\alpha(s)}{ds} = \frac{d\beta(s^*)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} - \lambda(s)\frac{dV_2^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} \qquad (4.14)$$

$$V_1(s) = \left(1 - \lambda\varepsilon_0\varepsilon_1 k_{21}^*\right)V_1^* \frac{ds^*}{ds} - \lambda k_{23}^* V_3^* \frac{ds^*}{ds}$$

ve

$$V_1(s) = \varepsilon_0 \cosh\theta \; V_1^* + \varepsilon_2 \sinh\theta \; V_3^* \qquad (4.15)$$

dır. Son iki denklemden şunu elde ederiz ;

$$\varepsilon_0 \cosh\theta = 1 - \lambda\varepsilon_0\varepsilon_1 k_{21}^* = \frac{ds^*}{ds} \tag{4.16}$$

$$\varepsilon_2 \sinh\theta = -\lambda k_{23}^* \frac{ds^*}{ds} \tag{4.17}$$

ve

$$\frac{\varepsilon_0 \cosh\theta}{\varepsilon_2 \sinh\theta} = \frac{\left(1 - \varepsilon_0\varepsilon_1 \lambda k_{21}^*\right)\frac{ds^*}{ds}}{-\lambda k_{23}^* \frac{ds^*}{ds}} \tag{4.18}$$

elde edilir.

Teorem 4.5. (Schell'in Teoremi)

(M, N), L^n de (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilmiş Bertrand eğri çifti olsunlar. Bertrand eğrilerinin karşılıklı noktalardaki yüksek mertebeden k_{23} ve k_{23}^* fonksiyonlarının çarpımı sabittir $[5]$.

İspat:

(4.10) denklemi ile (4.16) denklemini taraf tarafa çarparsak bulunur. Buradan

$$k_{23}k_{23}^* = -\frac{\sinh^2\theta}{\lambda^2(s)} = \text{sabit}$$

sonuçları elde edilir.

Teorem 4.6 (Manhiem'in Teoremi)

(M,N), L^n time like bir Bertrand eğri çifti ve M ve N nin koordinat komşulukları sırasıyla, (I,α) ve (I,β) olsunlar. Eğer time like Bertrand eğrilerinin karşılıklı noktaları P ve P*, bu noktalardaki eğrilikleri ise A, A* iseler

$$\frac{\|P^*A\|}{\|PA\|}:\frac{\|P^*A^*\|}{\|PA^*\|}$$

oranı sabittir $[5]$.

İspat:

(4.9) ve (4.16) denklemlerinden

$$(1+\varepsilon_0\varepsilon_1\lambda k_{21})(1-\lambda\varepsilon_0\varepsilon_1 k_{21}^*)=\varepsilon_0^2\cosh^2\theta=\text{sabit}$$

olduğu görülür. Böylece g eğrilik yarıçapı olmak üzere

$$\|P^*A\|=\lambda-g=\lambda-\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{k_{12}}=\frac{\lambda k_{12}-\varepsilon_0\varepsilon_1}{k_{12}}$$

$$\|PA\|=g=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{k_{12}} \tag{4.19}$$

$$\|P^*A^*\|=g^*=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{k_{12}^*}$$

$$\|PA^*\|=\lambda+g^*=\lambda+\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{k_{12}^*}=\frac{\lambda k_{12}^*+\varepsilon_0\varepsilon_1}{k_{12}^*}$$

dir. O halde çifte oran, (4.19) denklemi göz önüne alınırsa

$$\frac{\|P^*A\|}{\|PA\|}:\frac{\|P^*A^*\|}{\|PA^*\|}=\frac{\dfrac{\lambda k_{12}-\varepsilon_0\varepsilon_1}{k_{12}}}{\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{k_{12}}}:\frac{\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{k_{12}^*}}{\dfrac{\lambda k_{12}^*+\varepsilon_0\varepsilon_1}{k_{12}^*}}$$

$$=\left(1+\lambda\varepsilon_0\varepsilon_1 k_{12}^*\right)\left(\lambda\varepsilon_0\varepsilon_1 k_{12}-1\right)$$

$$=-\left(1+\lambda\varepsilon_0\varepsilon_1 k_{12}\right)\left(1-\lambda\varepsilon_0\varepsilon_1 k_{12}^*\right)$$

=sabit

elde edilir.

Teorem 4.7

(M,N), L^n de (I,α) ve (I,β) koordinat komşulukları ile verilmiş time like Bertrand eğri çifti olsunlar. M ve N nin eğrilikleri sırasıyla k_{12},k_{23} ve k_{12}^*,k_{23}^* olmak üzere λ ve μ sabitleri için

$$\mu\left(k_{23}-k_{23}^*\right)+\varepsilon_0\varepsilon_1\lambda\left(k_{12}+k_{12}^*\right)=0$$

yazılır $[5]$.

İspat:

(4.11) ve (4.18) denklemlerinden dolayı

$$\frac{\varepsilon_0\cosh\theta}{\varepsilon_2\sinh\theta}=\frac{\left(1+\varepsilon_0\varepsilon_1\lambda k_{21}\right)\frac{ds}{ds^*}}{\lambda k_{23}\frac{ds}{ds^*}}=\text{sabit}$$

ve

$$\frac{\varepsilon_0\cosh\theta}{\varepsilon_2\sinh\theta}=\frac{\left(1-\lambda\varepsilon_0\varepsilon_1 k_{21}^*\right)\frac{ds^*}{ds}}{-\lambda k_{23}\frac{ds^*}{ds}}=\text{sabit}$$

olduğunu biliyoruz. Eğer

$$-\frac{\varepsilon_0 \cosh\theta}{\varepsilon_2 \sinh\theta}\lambda = \mu$$

olarak alınırsa

$$\mu k_{23} + \varepsilon_0 \varepsilon_1 \lambda k_{12} = 1$$

ve

$$\mu k_{23}^{*} - \varepsilon_0 \varepsilon_1 \lambda k_{12}^{*} = 1$$

elde edilir.

Böylece son iki denklemden dolayı

$$\mu\left(k_{23} - k_{23}^{*}\right) + \varepsilon_0 \varepsilon_1 \lambda\left(k_{12} + k_{12}^{*}\right) = 0$$

dır.

Teorem 4.8

M, IL^n (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş time-like bir eğri olsun. Eğer M birden fazla Bertrand eğri çiftine sahipse M nin birinci. harmonik eğriliği H_1 sabittir $[5]$.

İspat:

Kabul edelim ki L^n de M nin bir Bertrand eşlenikleri M^* ve M^{**} olsunlar öyle ki, sırasıyla M^* ve M^{**} ın koordinat komşulukları da (I,α^*) ve . (I,α^{**}) olsunlar. Ayrıca bu eğrilerin birinci ve ikinci eğrilikleri sırasıyla $k_{12}, k_{23}, k_{12}^{*}, k_{23}^{*}$ ve k_{12}^{**}, k_{23}^{**} olsunlar.
M nin Bertrand eşleniği M^* olduğundan, Teorem 4.4 ve Teorem 4.7 den dolayı

$$\mu k_{23} + \varepsilon_0 \varepsilon_1 \lambda k_{12} = 1$$

$$\mu k_{23}^{*} + \varepsilon_0 \varepsilon_1 \lambda k_{12}^{*} = 1 \tag{4.20}$$

dır. Benzer şekilde M nin diğer bir eşleniği M^{**} olmak üzere

$$\begin{aligned} u k_{12} + \varepsilon_0 \varepsilon_1 v k_{23} &= 1 \\ - u k_{12}^{**} + \varepsilon_0 \varepsilon_1 v k_{23}^{**} &= 1 \end{aligned} \tag{4.21}$$

dir. Öyle ki burada u, v sabitlerdir. Böylece (4.20) ve (4.21) denklemlerinden

$$k_{12} = \frac{v - \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 (\lambda v - \mu u)} = \text{sabit}$$

$$k_{23} = \frac{\lambda - u}{\lambda v - \mu u} = \text{sabit}$$

elde edilir. O halde harmonik eğrilik

$$H_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{k_{12}}{k_{23}} = \text{sabit.}$$

dir.

Sonuç 4.1.

Bir time like eğrinin birden fazla Bertrand eşleniği varsa, bu eğri genel bir helistir [5].

KAYNAKLAR

[1] BEEM J.K., EHRLICH, P.E.,(1981) Glabal Lorentzian Geometry, Marcel Dekker Inc New York

[2] HACISALİHOĞLU,H.H.,(1993) Diferansiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları

[3] TANRIÖVER, N., SABUNCUOĞLU, A, On Bertrand Curves ın n-Dimensional Euclidian Space. . Journal of Karadeniz University Faculty of Arts and Sciences series of Mathematics –Physics.Vol:(IX),1-9

[4] TANRIÖVER, N.,(1986) Bertrand n-Dimensional Euclidian Space. Journal of Karadeniz University Faculty of Arts and Sciences series of Mathematics –Physics.Vol:(IX),58-64

[5] EKMEKÇİ, N., İLARSLAN,(2001) K, On Curves and Their Characterization.Differential Geometry-Dynamical Sytems., No.2, 17-24

[6] O’NEİL, B.,(1983). Semi-Rieamnn Geometry, Academic Press Newyork

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adapazarı'nda tamamladı. 1995 yılında girdiği Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünü 1999'da tamamladı ve 2000 yılında Sakarya'da öğretmen olarak göreve başladı. Halen Sakarya'da Anadolu İmam Hatip Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak görevini sürdürmektedir.