T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REEL MATRİSLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSLERİNİN MATLAB 7.5 İLE HESAPLANMASI VE LİNEER MATRİS DENKLEMLERİNE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gül İNCE

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR**

Temmuz 2008

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REEL MATRİSLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSLERİNİN MATLAB 7.5 İLE HESAPLANMASI VE LİNEER MATRİS DENKLEMLERİNE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gül İNCE

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 30/07/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR	**Prof. Dr. Recep AKKAYA**	**Yrd. Doç. Dr. Soley ERSOY**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

ÖNSÖZ

Tez konusu seçiminde ve çalışmamın her safhasında büyük bir özveri ile bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım hocam Sayın Doç. Dr. Halim ÖZDEMİR'e, çalışmalarım süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Araştırma Görevlisi Murat SARDUVAN'a ve çalışma sürecimin başlangıcında yardımlarını aldığım, Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümü araştırma görevlilerinden Sayın Salih TATAR'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca matematik bölümündeki diğer değerli hocalarıma ve beni bugünlerime getiren, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Gül İNCE

Sakarya 2008

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

R^n	: n boyutlu reel vektörler kümesi
$R^{m\times n}$	: $m\times n$ boyutlu reel elemanlı matrisler kümesi
$\Re(X)$	: X matrisinin sütun uzayı
$A,B,C,...$	: matrisler; $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$
A'	: A matrisinin transpozesi
A^-	: A matrisinin genelleştirilmiş tersi
A^{-1}	: A matrisinin tersi
$iz(A)$	: A matrisinin köşegen elemanlarının toplamı
$r(A)$	: A matrisinin rankı
$x,x_0,h,...$	: vektörler; $x=(x_i)\in R^n$
∂	: delta türev operatörü
$(.)*$	: eşlenik transpoze
$\otimes$	: Kronecker çarpım
$\| \ \|$	: norm
Σ	: toplam
$>,<$	: büyük, küçük
$\in$	: elemanıdır
$\neq$	: eşit değil
E.İ.Y.Ç.	: En iyi yaklaşık çözüm
E.K.K.Ç.	: En küçük kareler çözümü
min	: minimum

ÖZET

Anahtar kelimeler: Genelleştirilmiş ters, lineer matris denklemleri, en iyi yaklaşık çözüm, en küçük kareler çözümü, yarı simetrik çözüm, simetrik çözüm.

Çalışmanın ilk bölümünde, genelleştirilmiş ters kavramının tarihsel gelişimi özetlenmektedir.

Bölüm 2 de, Bölüm 3 ve Bölüm 4 ana bölümlerine temel teşkil edecek olan bazı kavram ve teoremler verilmektedir.

Bölüm 3 de, $Ax = g$ lineer denklem sistemleri ile ilgili genel bir teoriden bahsedilmektedir. Sistemin tutarlı olması durumunda genel çözümleri içerisinden, tutarsız olması durumunda ise en küçük kareler çözümleri içerisinden olmak üzere, verilen bir x_0 vektörü için $x - x_0$ ın normunu minimum yapma problemleri ile ilgili analitik çözümler ortaya konulmaktadır.

Bölüm 4 de, önce $AXB = C$ lineer matris denklemi ile ilgili genel bir teori sunulmaktadır. Sonra, sistemin tutarlı olması durumunda genel çözümleri içerisinden, tutarsız olması durumunda en küçük kareler çözümleri içerisinden olmak üzere, verilen bir X_0 matrisi için $X - X_0$ ın Frobenius normunu minimum yapacak olan X matrisini bulma problemleri için analitik çözümler ortaya konulmaktadır.

Bölüm 2, 3 ve 4 de verilen teorik sonuçları açıklamak için, algoritmalar inşa edilmekte ve MATLAB 7.5 kullanılmak suretiyle sayısal örnekler verilmektedir. Elde edilen sonuçlarla ilgili karşılaştırma yapabilmek için Bölüm 4 teki sayısal örnekler özellikle literatürde mevcut olan örnekler olarak alınmaktadır.

CALCULATION OF GENERALIZED INVERSES OF REAL MATRICES USING MATLAB 7.5 AND APPLICATION TO THOSE LINEAR MATRIX EQUATIONS

SUMMARY

Keywords: Generalized inverse, linear matrix equations, the optimal approximate solution, the least squares solution, skew-symmetric solution, symmetric solution.

In the first chapter of the work, the historical evolution of generalized inverse concept is summarized.

In the Chapter 2, some concepts and theorems that will be the fundamental tools for the Chapter 3 and Chapter 4 are given.

In the Chapter 3, a general theory about the linear equation system $Ax = g$ is mentioned. The analytic solutions to the problem of finding the vector x, from among the general solution set of the system if it is consistent, and from among the least squares solution set of the system if it is inconsistent, such that the norm of $x - x_0$ is minimum for a given vector x_0 are established.

In the Chapter 4, a general theory about the linear matrix equation $AXB = C$ is first presented. Then, the analytic solutions to the problems of finding the matrix X, from among the general solution set of the system if it is consistent, and from among the least squares solution set of the system if it is inconsistent, such that Frobenius norm of $X - X_0$ is minimum for a given matrix X_0 are established. Morever, it is also given analytic solutions about some special cases, studied in the literature recently, of the problem considered in this work.

To explain theoretical results given in the Chapter 2, 3, and 4, the algorithms are constructed and the numerical examples are given using MATLAB 7.5. To be able to make comparison of acquired results, the examples in Chapter 4 are especially taken as examples that are available in literature.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bu çalışmada ele alınan matrislerin, vektörlerin ve skalerlerin hepsinin reel olduğunu vurgulamakta fayda vardır. Reel hayattaki problemlere uygulanabilirliği açısından reellik kavramının çoğu kez yeterli olacağı bilinmektedir.

Çalışmada esas olarak A, B, C bilinen reel matrisler ve X bilinmeyen reel matris olmak üzere, $AXB = C$ şeklindeki matris denklemleri ve literatürde son zamanlarda bazı ilgili güncel problemler üzerinde durulmaktadır. Çalışmanın esasında kullanılan temel kavram, matrislerin genelleştirilmiş tersi (Moore-Penrose tersi) kavramıdır. Sonraki bölümlerde, çalışma çerçevesinde ilgili kavram üzerinde daha detaylı durulacaktır. Bu nedenle bu kısımda bu kavram ve özellikler üzerinde durmak yerine, kavramın tarihsel gelişimi üzerinde durmak daha yararlıdır.

Eğer A bir terslenebilir kare matris ise $AG = GA = I$ olacak şekilde bir G matrisinin var olduğu ve ona A nın tersi denilip A^{-1} ile gösterildiği iyi bilinmektedir. Eğer A bir singüler (tersi olmayan) veya dikdörtgen matris ise böyle bir G matrisi yoktur. Bununla birlikte Moore, ters notasyonunu 1920 de singüler matrislere genişletmiş ve 1935'lere kadar bu kavramı ayrıntılı biçimde makalelerinde işlemiştir. A matrisi için Moore'un ters tanımı,

$$AG = P_A\,,\ GA = P_G$$

olacak şekilde bir G matrisinin var olmasına denktir. Burada P_X, X in sütunları tarafından üretilen $\Re(X)$ uzayı üzerine bir izdüşüm operatörünü göstermektedir. Moore'un bu çalışmasından habersiz olarak Penrose 1955'te A matrisinin tersi olan G yi,

$$AGA = A,\quad (AG)^* = AG$$
$$GAG = G,\quad (GA)^* = GA$$

koşullarını sağlayan matris olarak tanımlamıştır. Bu koşullar Moore'un koşullarına denktir. (Genel anlamda, iki x ve y vektörü arasında iç çarpım, $y*x$ olarak tanımlanır. Burada * eşlenik transpozu göstermektedir)

Tseng'in üç temel makalesinde matrislerden daha genel olarak singüler operatörlerin terslerini tanımlama problemi ele alınmıştır [1-3].
Bjerhammar, yine aynı zamanlarda singüler bir matrisin tersini kullanmaya ve tanımlamaya çalıştı. Ancak ortaya çıkan sonuçlar daha az genel veya sistematik olmayan çalışmalardı.

1955 te Rao, en küçük kareler teorisindeki normal denklemlerden gelen, bir singüler matrisin ters kavramını oluşturdu. O, bu terse "pseudoinvers" dedi ve normal denklemleri çözmede ve ayrıca en küçük kareler tahmin edicilerin standart hatalarını hesaplamada bir non-singüler (tersi olan) matrisin bildik tersi ile aynı amaca hizmet ettiğini gösterdi. Rao'nun pseudoinversi, Moore'un ve Penrose'nin bütün koşullarını sağlamadı. Yalnızca, A nın tersi olan G nin bir özelliğini gerektirdi. O da, herhangi bir y için tutarsız olan $Ax = y$ denkleminin bir çözümü $x = Gy$ dir. Bu Penrose'nin tanımında yalnızca $AGA = A$ koşulunu sağlayan G matrisi ile elde edilir. 1962'de Rao, bu tek koşulu yani $AGA = A$ yı sağlayan G matrisine A matrisinin g-tersi (genelleştirilmiş tersi) dedi ve onun özelliklerini çok ayrıntılı bir şekilde çalıştı. Birçok pratik uygulamada Rao tarafından 1965 ve 1966 daki diğer iki yayınıyla gösterildiği üzere, daha genel tanımı sağlayan bir g-ters ile çalışmak yeterlidir.

Böyle tanımlanan g-ters tek değildir ve böylece matris cebirinde ilginç bir çalışma konusu oluşturur. 1967 deki bir eserinde Rao, farklı amaçlara uygun olması için g-terslerin nasıl değişik şekillerde kurulabileceğini göstermiş ve g-terslerin bir sınıflandırmasını (bilimsel adlandırmalarla) ortaya koymuştur.
Bu çalışma daha sonra g-terslerin bazı yeni sınıflamalarını ortaya koyan Mitra tarafından devam geliştirildi [4-5]. Genelleştirilmiş terslerin daha ileri uygulamaları Mitra ve Rao tarafından ortak yayınlarında ele alındı [6-8].

1955 ten beri bu konuya katkıda bulunanlardan bazıları, Greville [9], Bjerhammer [10-11], Ben-Israel ve Charnes [12], Chipman [13], Chipman ve Rao [14] ve Sgroggs ve Odell [15] dir. Bose varyans analizi üzerine olan notlarında g-tersin kullanımından bahsetmiştir [16]. Boot ve Duffin karesel matrislerin kısıtlanmış tersi kavramını tanıttı. Bu kavram g-tersten farklıdır ve network teorilerindeki bazı uygulamalarda yararlıdır [17]. Chernoff, singüler pozitif yarı kararlı (A, $n \times n$ lik matris ve $x \neq 0$ olmak üzere her x için $x'Ax \geq 0$ ise, A matrisine pozitif yarı kararlıdır denir) matrisin bir tersini ele aldı. Bu kavram g-ters değil, ancak istatistiksel tahmin teorileriyle ilgili bazı problemlerin tartışılmasında faydalıdır [18].

Bu bölümün başında belirtildiği gibi ele alınan problemlerdeki nicelikler reel olacaktır. Çalışmada verilen ve elde edilen analitik yaklaşımların yanı sıra sayısal örnekler için geliştirilen algoritmalar MATLAB 7.5 çerçevesinde oluşturulmaktadır.

BÖLÜM 2. GENELLEŞTİRİLMİŞ (MOORE-PENROSE) TERS

2.1.Giriş

Bu bölümde öncelikle, uygulamalı bilimlerin hemen hepsinde ortaya çıkan reel matrislerin genelleştirilmiş tersleri ile ilgili tanım ve bazı özellikler tanıtılmaktadır. Sonra MATLAB 7.5 yardımıyla, bu tür matrislerin genelleştirilmiş terslerini hesaplayan sayısal bir algoritma kurularak örnekler verilmektedir. Bundan böyle özel olarak belirtilmediği sürece skalerler, vektörler ve matrisler reel nicelikler olarak anlaşılacaktır.

2.2. Temel Kavram ve Özellikler

Tanım 2.2.1. A bir $m \times n$ matris olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir A^- matrisi varsa, A^- ye A nın genelleştirilmiş (Moore-Penrose) tersi, yani g-tersi denir.

$(G1)$ AA^- simetriktir,

$(G2)$ A^-A da simetriktir,

$(G3)$ $AA^-A = A$,

$(G4)$ $A^-AA^- = A^-$ [19].

A matrisi kare ve tam ranklı, yani satır ya da sütun ranklı olduğunda A^{-1} in yukarıdaki koşulları sağladığı aşikardır.

Teorem 2.2.2. Bir $m \times n$ boyutlu A matrisinin g-tersi varsa, boyutu $n \times m$ dir.

İspat. A^-A nın simetrik olması gerçeğinden hemen görülür [19]. ■

Teorem 2.2.3. A, bir $m \times n$ sıfır matrisi ise, A^{-} $n \times m$ boyutlu sıfır matrisidir.

İspat: Açık olarak $A^{-} = 0$ matrisi Tanım 2.2.1'in koşullarını gerçekler [19]. ■

Teorem 2.2.4. Eğer A, r ranklı bir $m \times n$ matris ise bu durumda non-singüler P ve Q matrisleri vardır öyleki;

1) $m = n = r$ ise $PAQ = I$,

2) $m = r < n$ ise $PAQ = \begin{bmatrix} I & \vdots & 0 \end{bmatrix}$,

3) $m > r = n$ ise $PAQ = \begin{bmatrix} I \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$,

4) $m > r$, $n > r$ ise $PAQ = \begin{bmatrix} I & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

şeklindedir. Burada I, $r \times r$ boyutlu birim matristir. Bunu kullanarak; $r(A) = r > 0$ ise, B, $m \times r$ boyutlu matris, $r(B) = r$ ve C, $r \times n$ boyutlu matris, $r(C) = r$ olmak üzere, $A = BC$ olarak yazılabilir [19].

Teorem 2.2.5. Her A matrisi bir g-terse sahiptir.

İspat. Eğer $A = 0$ ise, Teorem 2.2.3'e göre $A^{-} = 0$ dır. $A \neq 0$ olsun. Teorem 2.2.4'e göre eğer A, $r(>0)$ rankına sahip ise, $A = BC$ şeklinde parçalanabilir. Burada B, $m \times r$ boyutlu r ranklı ve C, $r \times n$ boyutlu r ranklı matrisler olup, $B'B$ ve CC' matrislerinin her ikisi de non-singülerdir. Eğer

$$A^{-} = C'\left(CC'\right)^{-1}\left(B'B\right)^{-1}B' \tag{2.2.1}$$

olarak tanımlanırsa, A^{-} nin Tanım 2.2.1'in koşullarını sağladığı görülür [19]. ■

Teorem 2.2.6. Her A matrisi için bir tek g-ters vardır.

İspat. A_1^{-} ve A_2^{-}, A nın herhangi iki g-tersi olsun. Gösterilmesi gereken $A_1^{-} = A_2^{-}$ dir. $A = AA_1^{-}A$ sağdan A_2^{-} ile çarpılarak;

$$AA_2^- = AA_1^- AA_2^-$$

elde edilir. AA_2^- simetrik olduğundan $AA_1^- AA_2^-$ de simetriktir. Buradan,

$$AA_2^- = AA_1^- AA_2^- = \left[\left(AA_1^-\right)\left(AA_2^-\right)\right]' = \left(AA_2^-\right)'\left(AA_1^-\right)' = AA_2^- AA_1^- = AA_1^- \qquad (2.2.2)$$

olur. Benzer şekilde $A = AA_1^- A$ soldan A_2^- ile çarpılarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$A_1^- A = A_2^- A \qquad (2.2.3)$$

elde edilir. (2.2.2) ve (2.2.3) kullanılarak;

$$A_1^- = A_1^- AA_1^- = \left(A_1^- A\right)A_1^- = \left(A_2^- A\right)A_1^- = A_2^-\left(AA_1^-\right) = A_2^- AA_2^- = A_2^-$$

bulunur [19]. ■

Teorem 2.2.7. Herhangi bir A matrisi için, $\left(A'\right)^- = \left(A^-\right)'$ dir [19].

Teorem 2.2.8. $\left(A^-\right)^- = A$ dır [19].

Teorem 2.2.9. Herhangi bir A matrisi için $\left(A'A\right)^- = A^-\left(A'\right)^-$ dir [19].

Teorem 2.2.10. $\left(AA^-\right)^- = AA^-$ ve $\left(A^- A\right)^- = A^- A$ dır [19].

Teorem 2.2.11. A simetrik ise A^- de simetriktir.

İspat. Teorem 2.2.7'ye göre $\left(A'\right)^- = \left(A^-\right)'$ idi. Böylece $A' = A$ olduğundan $A^- = \left(A^-\right)'$ elde edilir [19]. ■

Teorem 2.2.12. Bir A matrisi için $A = A'$ ise $AA^- = A^- A$ dır.

İspat. Tanım 2.2.1'e göre $AA^- = \left(AA^-\right)'$ dir. Fakat $\left(AA^-\right)' = \left(A^-\right)' A'$ olduğundan Teorem 2.2.7 ve hipotezden sonuç görülür [19]. ■

Teorem 2.2.13. A non-singüler ise $A^{-1} = A^{-}$ dir.

İspat. A^{-1} in Tanım 2.2.1'in koşullarını sağladığını göstermek suretiyle ispat kolayca yapılır [19]. ■

Teorem 2.2.14. A matrisi simetrik ve idempotent ise $A^{-} = A$ dır [19].

Teorem 2.2.15. AA^{-}, $A^{-}A$, $I - AA^{-}$, $I - A^{-}A$ matrisleri simetrik ve idempotenttir [19].

Tanım 2.2.16. (Matrisler İçin Direkt-Kronecker Çarpım): A bir $m_2 \times n_2$ ve B bir $m_1 \times n_1$ matris olsun. Bu durumda A ve B nin Kronecker çarpımı $A \otimes B$ olarak yazılan bir $m_1 m_2 \times n_1 n_2$ boyutlu C matrisidir ve

$$C = \begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \dots & \dots & Ab_{1n_1} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \dots & \dots & Ab_{2n_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ Ab_{m_1 1} & Ab_{m_1 2} & \dots & \dots & Ab_{m_1 n_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \dots & \dots & b_{1n_1}A \\ b_{21}A & b_{12}A & \dots & \dots & b_{2n_1}A \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ b_{m_1 1}A & b_{m_1 2}A & \dots & \dots & b_{m_1 n_1}A \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Aslında, tanım bir sol direkt çarpımdır. Benzer şekilde bir sağ direkt çarpımda tanımlanabilir.

C matrisinin her biri $m_2 \times n_2$ boyutlu olan $m_1 n_1$ tane alt matrisi içerdiğine ve C_{ij} ile gösterilen $ij.$ alt matrisinin Ab_{ij} olduğuna dikkat etmek gerekir. Bazen,

$C = \left[C_{ij} \right] = \left[Ab_{ij} \right]$, $i = 1,2,...,m_1$, $j = 1,2,...,n_1$

şeklinde de yazılır.

Teorem 2.2.17. $A = \left(a_{ij} \right)$, $m \times n$ ve $B = \left(b_{ij} \right)$, $p \times q$ matrisler olmak üzere;

$\left(A \otimes B \right)^{-} = A^{-} \otimes B^{-}$

dir [23].

2.3. Genelleştirilmiş Tersi Hesaplama Formülleri

Bir matrisin g-tersini hesaplayabilmenin değişik yöntemleri vardır. Ancak, bu kısımda böyle bir tersi hesaplamada birer iteratif yöntem ortaya koyan yalnızca iki temel teorem ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 2.3.1. A bir $m \times t$ matris, A_{t-1}, A nın ilk $t-1$ sütunundan oluşan $m \times (t-1)$ boyutlu bir matris ve a_t, A nın $t.$sütunu olsun. Böylece,

$$A = \left[A_{t-1} \;\vdots\; a_t \right]$$

yazılabilir. A nın g-tersi;

$$A^{-} = \begin{bmatrix} A_{t-1}^{-} - A_{t-1}^{-} a_t b_t^{-} \\ b_t^{-} \end{bmatrix}$$

dır.

Burada $1 \times m$ boyutlu b_t^{-} vektörü, b_t nin g-tersidir ve b_t;

$$b_t = \begin{cases} (I - A_{t-1} A_{t-1}^{-}) a_t & , \text{eğer } \; a_t \neq A_{t-1} A_{t-1}^{-} a_t \; \text{ ise} \\ \dfrac{\left[1 + a_t' (A_{t-1} A_{t-1}')^{-} a_t \right] (A_{t-1} A_{t-1}')^{-} a_t}{a_t' (A_{t-1} A_{t-1}')^{-} (A_{t-1} A_{t-1}')^{-} a_t} & , \text{eğer } \; a_t = A_{t-1} A_{t-1}^{-} a_t \; \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanır [25].

Teorem 2.3.2. A, r ranklı bir $m \times n$ matris olsun. Bu durumda A nın g-tersi aşağıdaki adımlarda hesaplanabilir:

1-) $B = A'A$ yı hesapla.

2-) $C_1 = I_n$ olsun.

3-) $C_{i+1} = (1/i) iz(C_i B) I_n - C_i B$, $\quad i = 1,2,3,...,r-1$, hesapla.

4-) $(rC_r A')/iz(C_r B)$ yi hesapla ve bu değer A^{-} dir.

Aynı zamanda $C_{r+1} B = 0$ ve $iz(C_r B) \neq 0$ dır [24].

$C_{r+1}B = 0$ olduğundan, A nın rankının önceden bilinmesine gerek olmadığına dikkat etmek gerekir.

Teorem 2.3.1'de verilen metot, eğer A matrisinin boyutu büyük ise, bilgisayar programlama için daha kullanışlıdır. Sonuç olarak, hem Teorem 2.3.1'de ve hem de Teorem 2.3.2'de verilen metotların her ikisi de iteratif bir şema oluşturmaktadır.

2.4. Genelleştirilmiş Tersi Hesaplamak İçin Bir Sayısal Algoritma ve Örnekler

MATLAB 7.5 ile g-ters doğrudan hesaplanmaktadır. Ancak programın yapısına müdahale edilemediğinden hangi yöntemin kullanıldığı bilinememektedir. İlerideki bölümlerde paket programın içindeki "pinv" komutuyla hesaplama yönteminden hareket edilecektir. Böyle olmakla birlikte bu kısımda Teorem 2.3.2'deki yöntem kullanılarak bir sayısal algoritma oluşturularak örnekler verilecektir. Teorem 2.3.1 için de benzer şeylerin yapılabileceği aşikardır.

Algoritma 2.4.1.

1) A matrisini gir.
2) $B = A'A$ yı hesapla.
3) $r = \text{rank}(A)$ yı hesapla.
4) C_1, $n \times n$ boyutlu birim matrise eşittir.(n, A matrisinin sütun sayısıdır)
5) Eğer $r \neq 1$ ise $C_{i+1} = (1/i)iz(C_iB)I_n - C_iB$ değerini 2'den r'ye kadar her defasında arttırarak hesapla.
6) ters $= A^- = (rC_rA')/iz(C_rB)$ değerini hesapla.
7) Eğer $r = 1$ ise ters $= A^- = \left(I_nA'\right)/\left[iz\left(I_nB\right)\right]$ olarak hesapla.

Örnek 2.4.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisini ele alalım. Algoritma 2.4.1 kullanılarak;

$$A^{-} = \begin{bmatrix} 0.2667 & 0.3333 & 0.0667 & 0.4000 \\ 0.1333 & 0.0667 & 0.5333 & 0.2000 \\ -0.2000 & 0 & 0.2000 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur [Ek A].

Örnek 2.4.3. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ matrisi için Algoritma 2.4.1 kullanılarak;

$$A^{-} = \begin{bmatrix} -0.0133 & 0 & 0.0267 & 0.0133 & 0.0400 \\ -0.0267 & 0 & 0.0533 & 0.0267 & 0.0800 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur [Ek B].

BÖLÜM 3. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

3.1.Giriş

Matematiksel araştırmaların belki de hiçbir alanında lineer denklemlerin önemli bir rol oynamadığı yer yoktur. Bu kısımda öncelikle lineer denklem sistemleri ile ilgili genel bir teoriksel yaklaşım özetlenecektir. Daha sonra da sayısal algoritmalar oluşturularak edilerek örnekler verilecektir.

A bir $m \times n$ reel matris, g bir $m \times 1$ reel vektör ve x bir $n \times 1$ reel vektör olmak üzere n bilinmeyenli m denklemden oluşan bir sistem,

$$Ax = g \tag{3.1.1}$$

olarak yazılır. A ve $\left[A \vdots g\right]$ matrislerine denklem sisteminin sırasıyla katsayılar matrisi ve ekli matrisi denir. Bundan başka, $m = n$ olması durumunda sisteme kare sistem, $g = 0$ özel durumunda da sisteme homojen sistem denir. Genel olarak ele alınacak problemler aşağıdaki gibidir:

1) Bir $m \times n$ boyutlu A reel matrisi ve bir $m \times 1$ boyutlu g reel vektörü verildiğinde, (3.1.1) denklem sistemini sağlayan bir $n \times 1$ boyutlu x reel vektörü var mıdır?
2) Eğer 1)'in cevabı "evet" ise, sonraki soru; "kaç tane x çözüm vektörü vardır?"
3) Eğer 1)'in cevabı "hayır" ise, diğer soru; "uygun bir yaklaşıklık tanımı çerçevesinde, (3.1.1) denklem sistemini yaklaşık olarak sağlayan bir x vektörü var mıdır?"

(3.1.1) denklem sistemine, eğer 1)'in cevabı "evet" ise tutarlıdır; "hayır" ise tutarsızdır denir.

3.2. Ax = g Sisteminin Çözümlerinin Varlığı

Bu kısımda $Ax = g$ denklem sisteminin çözümlerinin varlığı ile ilgili, bir kısmı ispatsız olmak üzere, bazı özellikler verilecektir.
Lineer denklem sistemlerinin çözüm yapılarını aşağıdaki iki temel teorem ortaya koyar.

Teorem 3.2.1. (3.1.1) şeklindeki bir lineer denklem sistemi verilsin. Ayrıca p ve q sırasıyla A ve $\left[A \vdots g\right]$ matrislerinin rankları olsun. Bu durumda (3.1.1) sistemi,

1) $p < q$ ise çözüme sahip değildir.
2) $p = q = n$ ise bir tek çözüme sahiptir.
3) $p = q$ ve $p < n$ ise $n - p$ tane parametreye bağlı sonsuz çoklukta çözüme sahiptir [29].

Teorem 3.2.2. A, $n \times n$ boyutlu bir matris olmak üzere aşağıdakiler denktir:

1) A tersinirdir.
2) Herhangi bir g için $Ax = g$ bir tek çözüme sahiptir.
3) $Ax = 0$ yalnızca aşikar $(x = 0)$ çözüme sahiptir.
4) A nın satır-indirgenmiş eşelon formu I birim matrisidir [29].

Yukarıdaki temel teoremlerden görülmektedir ki (3.1.1) denklem sisteminin çözümlerinin yapısı farklı irdelemeleri içermektedir. Oysa ele alınan bir problem için, genel bir teori arzu edilir. Genelleştirilmiş terslerin (Moore-Penrose terslerin) kullanımını içeren bu tür bir teori vardır. Aşağıdaki teorem böyle bir teorinin temelini oluşturur.

Teorem 3.2.3. (3.1.1) sisteminin tutarlı olması için gerekli ve yeterli koşul $AA^{-}g = g$ olmasıdır.

İspat. $Ax = g$ sistemi tutarlı ve x_1, sistemi sağlayan, yani $Ax_1 = g$ olan bir vektör olsun. Soldan AA^{-} ile soldan çarparak,

$AA^{-}Ax_1 = AA^{-}g$ elde edilir. Fakat, sol yan $AA^{-}Ax_1 = Ax_1 = g$ dir. Böylece $AA^{-}g = g$ olur.

Şimdi $AA^{-}g = g$ olduğu kabul edilsin. $x = A^{-}g$ alınırsa ve $Ax = g$ sisteminde yerine yazılırsa, $AA^{-}g = g$ elde edilir. Böylece $x = A^{-}g$ bir çözüm olur. Bu ispatı tamamlar [19]. ■

3.3. Ax = g Sisteminin Çözümlerinin Sayısı

Bu kısımda $Ax = g$ denklemler sisteminin en az bir çözüme sahip olduğu kabul edilerek çözümlerin sayısı tartışılacak ve genel çözümün biçimi ortaya konacaktır. Aşağıdaki teorem, sistemin tüm çözümlerini verdiğinden dolayı lineer denklemler sistemleri teorisinde oldukça kullanışlıdır.

Teorem 3.3.1. A bir $m \times n$ matris olmak üzere, $Ax = g$ sistemi bir çözüme sahip olsun. h, herhangi bir $n \times 1$ boyutlu parametreler vektörü olmak üzere,

$$x_0 = A^{-}g + (I - A^{-}A)h \tag{3.3.1}$$

şeklinde yazılan x_0 vektörü bir çözümdür. Ayrıca sistemin her çözümü bir $n \times 1$, h vektörü için denklem (3.3.1) biçiminde yazılabilir.

İspat. $Ax = g$ sistemi bir çözüme sahip olsun. Bu durumda, Teorem 3.2.3'den $AA^{-}g = g$ dir. Buradan, (3.3.1) deki x_0 ın bir çözüm olduğunu ispatlamak için, x_0 soldan A ile çarpılırsa,

$$Ax_0 = AA^{-}g + A\left(I - A^{-}A\right)h$$

elde edilir. Fakat $A\left(I - A^{-}A\right) = 0$ ve $AA^{-}g = g$ olduğundan $Ax_0 = g$ elde edilir. Böylece (3.3.1) deki x_0 bir çözümdür.

Şimdi $Ax = g$ sisteminin herhangi bir x_0 çözümünün (3.3.1) biçiminde olduğu gösterilmesi gerekir. x_0 bir çözüm olduğundan, $Ax_0 = g$ dir. Bu eşitlik soldan A^{-} ile çarpılırsa,

$$A^{-}Ax_0 = A^{-}g \quad \text{veya} \quad 0 = A^{-}g - A^{-}Ax_0$$

bulunur. Her iki tarafa x_0 eklenirse,

$$x_0 = A^- g + x_0 - A^- A x_0 = A^- g + \left(I - A^- A\right) x_0$$

olur. Bu ise $h = x_0$ olmak üzere (3.3.1) şeklindedir. Böylece ispat tamamlanır [23].■

Sonuç 3.3.2. $Ax = g$ sistemi tutarlı ise, $x_0 = A^- g$ nın tek çözüm olması için gerekli ve yeterli koşul $A^- A = I$ olmasıdır.

Sonuç 3.3.3. A bir $m \times n$ matris olmak üzere, $Ax = g$ sistemi tutarlı ise sistemin tek bir çözümünün olması için gerekli ve yeterli koşul A nın rankının n olmasıdır.

3.4. Tutarsız Lineer Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümleri

(3.1.1) deki denklemler sisteminin tutarsız olduğu, yani sistemi sağlayan herhangi bir x vektörünün olmadığı kabul edilirse, bu durumda (3.1.1),

$$Ax - g = e(x) \tag{3.4.1}$$

olarak yazılabilir. Burada $e(x)$ bir kalan vektör ya da sapmalar vektörüdür. Eğer $Ax = g$ sistemini sağlayan bir x_0 vektörü olsaydı, bu $e(x_0) = 0$ olacak şekilde bir x_0 vektörü olduğu anlamına gelecekti. Eğer $e(x) = 0$ (yani, $Ax = g$) olacak şekilde bir x vektörü yoksa $e(x_0)$ "küçük" olacak şekilde bir x_0 vektörü araştırılmak istenebilir. Eğer x_0 böyle vektör ise bu durumda x_0 a $Ax = g$ sisteminin bir "yaklaşık" çözümü denilebilir. Eğer x_0 vektörü denklem (3.4.1) de, diğer tüm x vektörlerine göre "daha küçük" bir $e(x)$'i veriyorsa, x_0 a $Ax = g$ denklemler sisteminin E.İ.Y.Ç.'ü (En İyi Yaklaşık Çözümü) denir.

Not: $Ax = g$ nin çözümü olmasa bile, bazen $Ax - g = e(x)$ in yerine $Ax = g$ yazılacağına dikkat etmek gerekir.

Örnek 3.4.1.

$Ax = g$ sistemi,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

olsun. Bu sistemin tutarsız olduğu açıktır. Çözüme bir alternatif olarak, $f(x_1,x_2)$ sapmaların karesi, yani

$$f(x_1,x_2) = (x_1 + x_2 - 2)^2 + (2x_1 + 2x_2 - 2)^2 + (3x_1 + 3x_2 - 3)^2$$

olmak üzere, $f(x_1,x_2)$'yi minimum yapacak şekilde x_1 ve x_2 yi bulmak gerekli olsun. (3.4.2) deki sistemin bir $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ çözümüne sahip olmasının gerek ve yeter koşulu $f(x_1^0, x_2^0) = 0$ olmasıdır. Çözüm olmayan x_1 ve x_2 değerleri için, $f(x_1,x_2) > 0$ olduğu açıktır. Böylece $f(x_1,x_2)$ minimum olacak şekilde x_1 ve x_2 değerlerini bulmak gerekir ve buna yaklaşık çözüm denir. Bu değerleri belirlemek için analiz kullanılırsa,

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0,$$

elde edilir. Bu ifadeler,

$$\begin{aligned} 14x_1 + 14x_2 &= 15 \\ 14x_1 + 14x_2 &= 15 \end{aligned}$$

özdeş denklemlerini verir. Böylece, $14x_1 + 14x_2 = 15$'i sağlayan herhangi x_1 *ve* x_2 için $f(x_1,x_2)$ minimumdur. Dolayısıyla, $f(x_1,x_2)$ sapmalar kareleri toplamını minimumlaştırma kriteri, tek bir çözüm vermez. $f(x_1,x_2)$ yi minimumlaştıran tüm bu x_1 *ve* x_2 değerleri arasından $x_1^2 + x_2^2$ yi minimum yapacak olan değerleri seçmek gibi ilave bir kriter daha olmalıdır. Örnekte, $g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ ifadesi $14x_1 + 14x_2 = 15$ kısıtlamasına göre minimumlaştırılmalıdır. Yine analiz kullanılarak, $x_1^0 = x_2^0 = 15/28$ elde edilir. Şimdi $x_0 = A^- g$ vektörünün aynı çözüm olduğu görülecektir. Eğer A^- hesaplanırsa,

$$A^- = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

bulunur ve $A^- g$ hesaplanırsa,

$$A^- g = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bunlar, (3.4.2) eşitliğindeki sisteme yaklaşık çözüm olarak önceden bulunan değerlerle aynıdır.

Şimdi, Örnek 3.4.1 in sonuçları temel alınarak yaklaşık çözümün bir tanımı formüle edilecek ve sonra A nın g-tersinin yaklaşık bir çözümü bulmak için nasıl kullanılabileceğini açıklayan bir teorem ispatlanacaktır. $\sum e_i^2(x)$ sapmalar kareleri toplamını minimumlaştıran bir x_0 araştırılmaktadır. Bu kareler toplamı,

$e'(x)e(x)$ veya $(Ax-g)'(Ax-g)$

olarak yazılabilir.

Tanım 3.4.2. (En İyi Yaklaşık Çözüm): A bir $m \times n$ matris olmak üzere, x_0 vektörünün $Ax-g=e(x)$ denklem sisteminin en iyi yaklaşık çözümü olarak tanımlanmasının gerekli ve yeterli koşulları:

1) R^n deki tüm x ler için, $(Ax-g)'(Ax-g) \geq (Ax_0-\mathrm{g})'(Ax_0-\mathrm{g})$ bağıntısının sağlaması,
2) $(Ax-g)'(Ax-g) = (Ax_0-\mathrm{g})'(Ax_0-\mathrm{g})$ şeklindeki tüm $x \neq x_0$ vektörleri için $x'x > x_0'x_0$ bağıntısının sağlanmasıdır.

Aslında tanım x_0 ın, sapmaların kareleri toplamını minimumlaştırdığını ve her bir elemanı sapmaların kareleri toplamını minimum yapacak şekilde bir S kümesi varsa, bu durumda S'deki diğer tüm x vektörleri için $x'x$ kareler toplamı $x_0{}'x_0$ dan büyük olması halinde, S'deki x_0 vektörünün E.İ.Y.Ç. olarak seçilebileceğini ifade etmektedir.

Aşağıdaki teorem E.İ.Y.Ç.'ün var olduğunu ve katsayılar matrisinin g-tersinin E.İ.Y.Ç.'ü bulmak için kullanabileceğini ifade etmektedir.

Teorem 3.4.3. $Ax = g$ denklem sisteminin E.İ.Y.Ç.'ü, $x_0 = A^- g$ dir.

İspat. $x_0 = A^- g$ olmak üzere, R^n deki tüm x vektörleri için

$$(Ax-g)'(Ax-g) \geq (Ax_0-\mathrm{g})'(Ax_0-\mathrm{g})$$

olduğu ve eşitliği sağlayan vektörler içinde $x \neq x_0$ koşulu ile $x'x > x_0'x_0$ olduğu gösterilmelidir. AA^-g , $Ax-g$ ye bir eklenir bir çıkarılırsa, çapraz çarpım terimleri sıfıra eşit olduğundan,

$$\begin{aligned}(Ax-\mathrm{g})'(Ax-\mathrm{g}) &= \left(Ax-AA^-g+AA^-g-g\right)'\left(Ax-AA^-g+AA^-g-g\right)\\ &= \left[A\left(x-A^-g\right)+\left(AA^- - I\right)g\right]'\left[A\left(x-A^-g\right)+\left(AA^- - I\right)g\right]\\ &= \left[A\left(x-A^-g\right)\right]'\left[A\left(x-A^-g\right)\right]+\left[\left(AA^- - I\right)g\right]'\left[\left(AA^- - I\right)g\right]\\ &\geq \left[\left(AA^- - I\right)g\right]'\left[\left(AA^- - I\right)g\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik R^n deki tüm x ler için sağlanır. Eğer $x_0 = A^- g$ alınırsa, R^n deki tüm x ler için,

$$\begin{aligned}(Ax-g)'(Ax-g) &\geq \left[\left(AA^- - I\right)g\right]'\left[\left(AA^- - I\right)g\right]\\ &= (Ax_0-g)'(Ax_0-g)\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

elde edilir. Eşitliğin sağlanmasının gerekli ve yeterli koşulu $\left[A\left(x-A^-g\right)\right]'\left[A\left(x-A^-g\right)\right]=0$, yani

$$Ax = AA^-g$$

olmasıdır.

Şimdi $Ax = AA^-g$ eşitliğini sağlayan tüm x ler için,

$$x'x \geq \left(A^-g\right)'\left(A^-g\right) = x_0'x_0$$

bağıntısının elde edileceği gösterilmelidir. R^n deki tüm x vektörleri için aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$\begin{aligned}\left[A^-g+\left(I-A^-A\right)x\right]'\left[A^-g+\left(I-A^-A\right)x\right] &= \left(A^-g\right)'\left(A^-g\right)\\ &\quad+\left[\left(I-A^-A\right)x\right]'\left[\left(I-A^-A\right)x\right]\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Eğer Ax yerine $AA^{-}g$ veya denk olarak $A^{-}Ax$ yerine $A^{-}g$ konulursa (bu durumda (3.4.3) de eşitlik sağlanır), (3.4.4) deki özdeşlik,

$$x'x \;=\; \left(A^{-}g\right)'\left(A^{-}g\right)+\left(x-A^{-}g\right)'\left(x-A^{-}g\right)$$

veya

$$x \neq x_0 \text{ ise } x'x > \; x_0'x_0$$

haline gelir ve teorem ispatlanır [19].■

Not: Bu ispat E.İ.Y.Ç.'ün daima var ve tek olduğunu ortaya koyar.

Sonuç 3.4.4. Herhangi bir $m\times n$ boyutlu A matrisi ve herhangi bir $m\times 1$ boyutlu g vektörü için, x vektörü R^n üzerinde değişmek üzere, $\left(Ax-g\right)'\left(Ax-g\right)$ niceliğinin minimumu $g'\left(I-AA^{-}\right)g$ dir.

3.5. En Küçük Kareler Çözümü

Uygulamalı bilimlerde, özellikle uygulamalı istatistikte, genel olarak en küçük kareler teorisinden daha çok kullanılan bir yöntemin olmadığı söylenebilir. Bu teori başlangıç aşamasında, $Ax-g=e(x)$ şeklinde ifade edilen tutarsız denklemler sisteminin E.İ.Y.Ç. ile oldukça yakın ilişkilidir ve problem $e'(x)e(x)$ minimum olacak şekilde bir x_0 vektörü bulmaktır. Bu koşulu sağlayan herhangi bir x vektörüne (3.4.1) sisteminin bir E.K.K.Ç. (En Küçük Kareler Çözümü) denir. Bu kısımda en küçük kareler yöntemi tanımlanacak ve yararlı olabilecek bazı teoremler verilecektir.

Tanım 3.5.1 (En Küçük Kareler Çözümü): A bir $m\times n$ matris olmak üzere, x_0 vektörünün $Ax-g=e(x)$ sisteminin bir E.K.K.Ç. (En Küçük Kareler Çözümü) olarak tanımlanması için gerekli ve yeterli koşul, R^n deki tüm x ler için,

$$\left(Ax-g\right)'\left(Ax-g\right) \geq \left(Ax_0-g\right)'\left(Ax_0-g\right) \qquad (3.5.1)$$

bağıntısının sağlanmasıdır.

Not: (3.4.1) denklemindeki eşitlik durumunu sağlayacak şekildeki x lerin bir kümesi varsa E.K.K.Ç. için olan kısıtlamalar E.İ.Y.Ç. için olan kısıtlamalardan daha çok değildir. Bu gerçek, bir E.İ.Y.Ç. ve bir E.K.K.Ç. arasındaki farktır. Böylece bir sistemin birçok en küçük kareler çözümü olabilir. E.İ.Y.Ç. her zaman bir E.K.K.Ç. dür. Ancak bir E.K.K.Ç. her zaman bir E.İ.Y.Ç. değildir. Dolayısıyla E.İ.Y.Ç., E.K.K.Ç. kümesi üzerinden aranır.

Teorem 3.5.2. B matrisi, $ABA = A$ ve AB simetrik olacak şekilde herhangi bir matris olmak üzere, $x_0 = Bg$ vektörü, $Ax - g = e(x)$ sisteminin bir en küçük kareler çözümüdür.

İspat. $x_0 = Bg$ nin $e'(x)e(x)$ nin, yani $(Ax-g)'(Ax-g)$ nin bir minimumu olduğu gösterilmelidir.

B, $ABA = A$ ve AB simetrik olacak şekilde herhangi bir matris olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} A'B'A' &= A' \\ B'A' &= AB \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \left[A(x-Bg)\right]'\left[(AB-I)g\right] &= (x-Bg)'A'(AB-I)g \\ &= (x-Bg)'A'(B'A'-I)g \\ &= (x-Bg)'\left[(A'B'A'-A')g\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır; yani çapraz çarpımlar sıfır olduğundan,

$$\begin{aligned} &(Ax-g)'(Ax-g) = \left[Ax - ABg + ABg - g\right]'\left[Ax - ABg + ABg - g\right] \\ &= \left[A(x-Bg)+(AB-I)g\right]'\left[A(x-Bg)+(AB-I)g\right] \\ &= \left[A(x-Bg)\right]'\left[A(x-Bg)\right]+\left[(AB-I)g\right]'\left[(AB-I)g\right] \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

elde edilir.

Böylece (3.5.3) ten, R^n deki tüm x ler için,

$$(Ax-g)'(Ax-g) \geq \left[(AB-I)g\right]'\left[(AB-I)g\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $\left[\left(AB-I\right)g\right]'\left[\left(AB-I\right)g\right]$ niceliği $\left(Ax-g\right)'\left(Ax-g\right)$ nin bir alt sınırıdır

$x=Bg$ olduğunda, $\left(Ax-g\right)'\left(Ax-g\right)$ niceliği alt sınırına ulaşır. Böylece $x_0=Bg$, $Ax-g=e\left(x\right)$ sisteminin bir en küçük kareler çözümüdür [19]. ■

Sonuç 3.5.3. Eğer A, bir $m\times n$ matris ve B, $ABA=A$ ve AB simetrik olacak şekilde bir matris ise bu durumda $AB=AA^-$ dır.

İspat. $AB=AA^-AB=\left(AA^-\right)'\left(AB\right)'=\left(A'\right)^-A'B'A'=\left(A'\right)^-A'=AA^-$ elde edilir. ■

Teorem 3.5.4. $n\times 1$ boyutlu x_0 vektörünün $Ax-g=e\left(x\right)$ sisteminin bir E.K.K.Ç. olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\left(Ax_0-g\right)'\left(Ax_0-g\right)=g'\left(I-AA^-\right)g$$

olmasıdır.

İspat. Sonuç 3.4.4'den $\left(Ax-g\right)'\left(Ax-g\right)$ nin bir alt sınırı $g'\left(I-AA^-\right)g$ olup, bu alt sınıra daima ulaşılabilir. (Örneğin $x_0=A^-g$) [19].■

Teorem 3.5.5. Bir $n\times 1$ boyutlu x_0 vektörünün $Ax-g=e\left(x\right)$ sisteminin bir E.K.K.Ç. olmasının gerekli ve yeterli koşulu x_0 ın

$$Ax=AA^-g \tag{3.5.4}$$

matris denklemini sağlamasıdır.

İspat. $Ax=AA^-g$ matris denkleminin bir çözüme sahip olduğu aşikardır. Eğer x_0, $Ax_0=AA^-g$ yi sağlarsa bu denklem x_0 için çözülebilir ve

$$x_0=A^-g+\left(I-AA^-\right)h$$

genel çözümü elde edilir. Eğer x_0 ın bu değeri $(Ax_0 - g)'(Ax_0 - g)$ de yerine yazılırsa,

$$(Ax_0 - g)'(Ax_0 - g) = g'(I - AA^-)g$$

bulunur ve Teorem 3.5.4'den, x_0 bir E.K.K.Ç. dür. Tersine x_0, $Ax - g = e(x)$ in bir E.K.K.Ç. ve dolayısıyla

$$(Ax_0 - g)'(Ax_0 - g) = g'(I - AA^-)g$$

olduğu kabul edilsin. q vektörü, $q = x_0 - A^- g$ ve dolayısıyla $x_0 = A^- g + q$ ile tanımlansın. Eğer x_0 ın bu değeri $(Ax_0 - g)'(Ax_0 - g) = g'(I - AA^-)g$ eşitliğinde yerine yazılırsa**,**

$$q'A'Aq = 0$$

elde edilir. Bu $Aq = 0$ olduğunu vurgular ve bu nedenle $Ax_0 = AA^- g$ olur. İspat tamamlanır [19].■

Sonuç 3.5.6. Bir $n \times 1$ boyutlu x_0 vektörünün $Ax - g = e(x)$ sisteminin bir E.K.K.Ç. olması için gerekli ve yeterli koşul x_0 ın

$$A'Ax = A'g \tag{3.5.5}$$

matris denklemini sağlamasıdır [19].

$A'Ax = A'g$ denklemler kümesine $Ax - g = e(x)$ sisteminin normal denklemleri denir.

3.6 Tutarlı ve Tutarsız Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

Bu kısımda tutarlı ve tutarsız lineer denklem sistemlerinin kısıtlamalı ve kısıtlamasız olarak çözümleri incelenecek ve bunların bulunmalarıyla ilgili ayrı ayrı algoritmalar ve örnekler verilecektir.

3.6.1. Kısıtlamasız lineer denklem sistemlerinin çözümü

A bir $m \times n$ boyutlu matris, g $m \times 1$, x $n \times 1$ boyutlu vektörler ve h herhangi bir $n \times 1$ boyutlu vektör olsun.

İki durum söz konusudur:

1) Sistem tutarlı $\left(AA^{-}g = g\right)$ ise genel çözüm $x = A^{-}g + (I - A^{-}A)h$ ile,

2) Sistem tutarsız $\left(AA^{-}g \neq g\right)$ ise çözüm yoktur ve en iyi yaklaşık çözüm $x = A^{-}g$ ile bulunur.

3.6.1.1 Kısıtlamasız çözüm için bir sayısal algoritma

Algoritma 3.6.1.1.

1) A ve g matrislerini gir.
2) h matrisini gir (genel çözüm için parametre, özel için skaler olarak).
3) g' ve h' yü hesapla.
4) $g = g'$ ve $h = h'$ al.
5) A matrisinin rankını hesapla.
6) A^{-} yi hesapla.
7) $AA^{-}g$ yi hesapla.
8) $\left\|AA^{-}g - g\right\|$ yi hesapla.
9) Eğer $\left\|AA^{-}g - g\right\| < 10^{-9}$ ve A nın rankı sütun sayısına eşit ise “sistem tutarlı, A sütun ranklı ve çözüm: $x = A^{-}g$ dir” yaz.
10) Eğer $\left\|AA^{-}g - g\right\| < 10^{-9}$ ve A nın rankı sütun sayısına eşit değil ise “sistem tutarlı, A sütun ranklı değil ve çözüm $x = A^{-}g + \left(I - A^{-}A\right)h$ dir” yaz.
11) Eğer 9) ve 10) sağlanmıyorsa “sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.: $x = A^{-}g$ dir” yaz.

Örnek 3.6.1.2.

$$\begin{aligned} 2y + 4z &= 2 \\ x + 2y + 2z &= 3 \\ 3x + 4y + 6z &= -1 \end{aligned}$$

denklem sistemi için $AA^{-}g = g$ sağlandığından sistem tutarlıdır. Ayrıca sütun ranklı olduğundan tek çözümü vardır. O halde çözüm Algoritma 3.6.1.1 yardımıyla,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \; g = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur [Ek C].

Örnek 3.6.1.3.

$$\begin{aligned} 6x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= -6 \end{aligned}$$

denklem sistemi için $AA^{-}g = g$ sağlandığından sistem tutarlıdır. Fakat sütun ranklı değildir. O halde çözümü tek değildir, sonsuz çözüm vardır. Genel çözüm, Algoritma 3.6.1.1 yardımıyla,

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \; g = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

ve h herhangi bir $n \times 1$ vektör olmak üzere,

$$x = \begin{bmatrix} -0.3776 + 0.74h_1 - 0.073h_2 + 0.095h_3 + 0.23h_4 \\ -3.2891 - 0.74h_1 + 0.74h_2 - 0.95h_3 - 0.23h_4 \\ 0.7526 + 0.95h_1 - 0.95h_2 + 0122h_3 + 0.29h_4 \\ -1.2343 + 0.23h_1 - 2.32h_2 + 0.29h_3 + 0.73h_4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Özel olarak $h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$ olarak alınırsa,

$$x = \begin{bmatrix} -0.3776 \\ -3.2891 \\ 0.7526 \\ -1.2343 \end{bmatrix}$$

bulunur [Ek D].

Örnek 3.6.1.4.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 6 \\ x - 2y + z &= -1 \\ 3x - y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

denklem sistemi için $AA^{-}g \neq g$ olduğundan sistem tutarsızdır ve sonsuz çözümü vardır. O halde yaklaşık çözüm Algoritma 3.6.1.1 kullanılarak,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \; g = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$x = \begin{bmatrix} 1.6286 \\ 1.7905 \\ 0.6190 \end{bmatrix}$$

olur [Ek E].

3.6.2. Kısıtlamalı lineer denklem sistemlerinin çözümü

Üç durum söz konusudur:

1) Sistem tutarlı $\left(AA^{-}g = g\right)$ ve A matrisi sütun ranklı ise;

$x = A^{-}g + (I - A^{-}A)h$ denkleminde $A^{-}A = I$ olacağı için $x = A^{-}g$ yegane çözüm olur. Bu nedenle tutarlı durumda kısıt koymanın bir anlamı yoktur.

2) Eğer sistem tutarlı ve A matrisi sütun ranklı değil ise;

Bu durumda x üzerinde kısıt konularak, genel çözüm üzerinden en iyisini bulmak gerekebilir.

3) Sistem tutarsız ise;

Bu durumda en küçük kareler çözümleri içinden x üzerinde konulan kısıtı sağlayan en iyi çözümü bulmak gerekebilir.

Son olarak, bu kısımda 2) ve 3) durumları ele alınacaktır. Yukarıdaki en iyilik E.İ.Y.Ç. anlamındadır. E.İ.Y.Ç.'ün de E.K.K.Ç. kümesi üzerinde arandığına dikkat etmek gerekir. Burada öncelikle ele alınacak problemler tanıtılacak, sonra algoritma ve örnekler üzerinde durulacaktır.

A, bilinen bir $m \times n$ boyutlu matris, g, $m \times 1$ boyutlu bilinen bir vektör olmak üzere $Ax = g$ denklem sistemi tutarlı ve A sütun ranklı olmasın. Bu durumda h, herhangi bir $n \times 1$ parametreler vektörü olmak üzere,

$$x = A^{-}g + \left(I - A^{-}A\right)h$$

şeklinde bulunan her vektör sistem için bir çözümdür. Bu sistemin tüm çözümlerinin kümesi S_G ile gösterilsin. (A nın sütun ranklı olması durumunda $A^{-}A = I$ olacağından $x = A^{-}g$ nin yegane çözüm olacağına ve bunununda 1) yardımıyla ifade edildiğine dikkat etmek gerekir)

Problem, bir $x_0 \in R^{n\times 1}$ vektörü verildiğinde,

$$\|\hat{x} - x_0\| = \min_{x \in S_G} \|x - x_0\|$$

olacak şekildeki $\hat{x} \in S_G$ yi bulmaktır.

Aşağıdaki teorem bu problemin analitik çözümünü ortaya koymaktadır.

Teorem 3.6.2.1. A $m \times n$ bilinenler matrisi ve g, $m \times 1$ boyutlu bilinenler vektörü olmak üzere, $Ax = g$ denklem sistemi tutarlı ve $x_0 \in R^{n\times 1}$ verilen herhangi bir bilinenler vektörü olsun. Bu durumda,

$$\|\hat{x} - x_0\| = \min_{x \in S_G} \|x - x_0\|$$

olacak şekildeki $\hat{x}$ vektörü,

$$\hat{x} = A^{-}g + \left(I - A^{-}A\right)x_0$$

ile verilir.

İspat. $x \in S_G$ ise $h \in R^{n\times 1}$ herhangi bir vektör olmak üzere Teorem 3.3.1'den,

$$x = A^- g + \left(I - A^- A\right) h \tag{3.6.2.1}$$

biçimindedir. Burada problem, bir bakıma

$$A^- g + \left(I - A^- A\right) h = x_0$$

veya

$$(I - A^- A)h = x_0 - A^- g$$

sisteminin E.İ.Y.Ç.'nü bulmaya indirgenmiş olur. Teorem 2.2.14'den ve Teorem 3.4.3'den,

$$\begin{aligned}\hat{h} &= \left(I - A^- A\right)\left(x_0 - A^- g\right)\\ &= x_0 - A^- g - A^- A x_0 + A^- A A^- g\\ &= x_0 - A^- g - A^- A x_0 + A^- g\\ &= x_0 - A^- A x_0\\ &= \left(I - A^- A\right) x_0\end{aligned}$$

bulunur. h için bulunan bu $\hat{h}$ değeri (3.6.1) de yerine yazılarak sistemin E.İ.Y.Ç. ü,

$$\begin{aligned}\hat{x} &= A^- g + (I - A^- A)(I - A^- A)x_0\\ &= A^- g + (I - A^- A)x_0\end{aligned}$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanır. ■

Bu kısımda ikinci olarak ele alınacak olan problem şudur:

A bilinen bir $m \times n$ matris, g bilinen bir $m \times 1$ vektör, x de $n \times 1$ bilinmeyenler vektörü olmak üzere $Ax = g$ denklem sistemi tutarsız olsun ve bu sistemin tüm E.K.K.Ç. nün kümesi S_E ile gösterilsin.

Problem bir $x_0 \in R^{n\times 1}$ vektörü verildiğinde,

$$\left\|\hat{x} - x_0\right\| = \min_{x \in S_E} \left\|x - x_0\right\|$$

olacak şekildeki $\hat{x} \in S_E$ yi bulmaktır. Bunun için öncelikli olarak E.K.K.Ç. kümesini ortaya koyacak olan aşağıdaki yardımcı teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.6.2.2. $x \in R^{n\times 1}$ vektörü $Ax = g$ tutarsız sisteminin bir E.K.K.Ç. ise, $h \in R^{n\times 1}$ herhangi bir vektör olmak üzere, bu x vektörü,

$$x = A^{-}g + (I - A^{-}A)h$$

biçiminde yazılabilir.

İspat. $Ax - g = e(x)$ olsun. E.K.K.Ç. lerinin kümesi $e'(x)e(x)$ i minimum yapacak olan x vektörlerinden oluşur. Buradan,

$$\begin{aligned} e'(x)e(x) &= (Ax-g)'(Ax-g) \\ &= x'A'Ax - x'A'g - g'Ax + g'g \\ &= x'A'Ax - 2x'A'g + g'g \end{aligned}$$

bulunur. x e göre türev alınır ve sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left[e'(x)e(x)\right]}{\partial x} &= 2A'Ax - 2A'g \\ &= 0 \end{aligned}$$

veya

$$A'Ax = A'g$$

normal denklemleri bulunur. Bu sistem daima tutarlı olup genel çözümü, $h \in R^{n\times 1}$ herhangi bir parametreler vektörü olmak üzere,

$$\begin{aligned} x &= (A'A)^{-} A'g + \left[I - (A'A)^{-}(A'A)\right]h \\ &= A^{-}(A')^{-} A'g + \left[I - A^{-}(A')^{-} A'A\right]h \\ &= A^{-}g + \left(I - A^{-}A\right)h \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teorem yukarıda açıklanan ana problemin analitik çözümünü ortaya koymaktadır.

Teorem 3.6.2.3. A bir $m\times n$ bilinenler matrisi, g, $m\times 1$ bilinenler vektörü, x, $n\times 1$ bilinmeyenler vektörü ve $x_0 \in R^{n\times 1}$ verilen herhangi bir bilinenler vektörü olsun. Bu durumda,

$$\|\hat{x} - x_0\| = \min_{x\in S_E}\|x - x_0\|$$

olacak şekildeki $\hat{x}$ vektörü,

$\hat{x} = A^{-}g + (I - A^{-}A)x_0$

ile verilir.

İspat. $x \in S_E$ ise Yardımcı Teorem 3.6.2.2'den $h \in R^{n\times 1}$ herhangi bir parametreler vektörü olmak üzere,

$x = A^{-}g + (I - A^{-}A)h$

biçimindedir. Bu ise (3.6.2.1) ile aynı biçime sahiptir. İspatın bundan sonraki kısmında oradaki gibi ilerlenerek,

$\hat{x} = A^{-}g + (I - A^{-}A)x_0$

olduğu görülür. ■

Uyarı 3.6.2.4. Teorem 3.6.2.1 ve Teorem 3.6.2.3'de ele alınan problemlerin analitik çözümlerinin aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

3.6.2.1 Kısıtlamalı çözüm için bir sayısal algoritma

Algoritma 3.6.2.1.

1) A, x_0, g matrislerini gir.
2) g' ve x_0' yü hesapla.
3) $g = g'$ ve $x_0 = x_0'$ al.
4) A matrisinin rankını hesapla.
5) A^{-} yi hesapla.
6) $AA^{-}g$ yi hesapla.
7) $\|AA^{-}g - g\|$ yi hesapla.
8) Eğer $\|AA^{-}g - g\| < 10^{-9}$ ve A nın rankı sütun sayısına eşit ise "sistem tutarlı, A sütun ranklı ve çözüm: $x = A^{-}g$ dir" yaz.

9) Eğer $\left\| AA^{-}g - g \right\| < 10^{-9}$ ve A nın rankı sütun sayısına eşit değil ise "sistem tutarlı, A sütun ranklı değil ve çözüm: $x = A^{-}g + \left(I - A^{-}A \right) x_0$ dir" yaz.

10) Eğer 8) ve 9) sağlanmıyorsa "sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.: $x = A^{-}g + \left(I - A^{-}A \right) x_0$ dir" yaz.

Örnek 3.6.2.2. Algoritma 3.6.2.1 kullanılarak, örnek 3.6.1.2'deki sistem için $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}'$ olmak üzere yukarıdaki problemin çözümü $\hat{x} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}'$ elde edilir. Burada kısıt ne olursa olsun çözüm hep aynıdır. Çünkü sistem tutarlı ve A matrisi sütun ranklı olduğundan çözüm tektir [Ek F].

Örnek 3.6.2.3. Algoritma 3.6.2.1 kullanılarak, örnek 3.6.1.3 deki sistem için $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}'$ olmak üzere yukarıdaki problemin çözümü $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.2453 \\ -3.9120 \\ 1.5535 \\ 0.7235 \end{bmatrix}$ elde edilir [Ek G].

Örnek 3.6.2.4. Algoritma 3.6.2.1 kullanılarak, örnek 3.6.1.4 deki sistem için $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}'$ kısıtlaması altındaki en iyi yaklaşık çözümü $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0,6857 \\ 2,1048 \\ 2,1905 \end{bmatrix}$ elde edilir [Ek H].

BÖLÜM 4. LİNEER MATRİS DENKLEMLERİ

4.1. Giriş

A, B ve C sırasıyla $m_1 \times m_2$, $m_3 \times m_4$ ve $m_1 \times m_4$ boyutlu bilinen matrisler ve X bir $m_2 \times m_3$ boyutlu bilinmeyenler matrisi olmak üzere,

$$AXB = C \tag{4.1.1}$$

şeklindeki bir denkleme genel olarak bir lineer matris denklemi denir. Bu kısımda (4.1.1) şeklindeki matris denklemleri ve bu tür denklemlerle ilişkili, Bölüm 3 te ele alınan problemlere benzer problemler ele alınacaktır. Diğer deyişle bu bölümde, Bölüm 3 te ele alınan problemlerin genelleştirilmeleri üzerinde durulacaktır. Ayrıca, ele alınan problemlerle ilgili, özellikle literatürde var olan çalışmalardaki örnekler esas alınarak, sayısal algoritmalar ve örnekler verilerek karşılaştırmalar yapılacaktır. Bundan sonra bu tür lineer matris denklemleri ele alınacak ve kısaca matris denklemi ifadesi kullanılacaktır.

4.2. Matris Denklemlerinin Çözümlerinin Varlığı

(4.1.1) denklemini sağlayacak en az bir $m_2 \times m_3$ boyutlu X matrisi varsa matris denklemine tutarlıdır denir. Aksi halde denkleme tutarsızdır denir. Aşağıdaki teorem tutarlılıkla ilgili gerekli ve yeterli koşulu vermektedir.

Teorem 4.2.1. (4.1.1) deki matris denkleminin tutarlı olmasının gerekli ve yeterli koşulu $AA^{-}CB^{-}B = C$ olmasıdır.

İspat. (4.1.1) deki matris denklemi tutarlı ve X_1, denklemi sağlayan, yani $AX_1B = C$ olan bir matris olsun. Bu ifade soldan AA^{-} ve sağdan $B^{-}B$ ile çarpılarak,

$$AA^{-}AX_1BB^{-}B = AA^{-}CB^{-}B$$

elde edilir. Ancak sol yan, $AX_1B = C$ dir. Dolayısıyla $AA^-CB^-B = C$ olur.

Şimdi $AA^-CB^-B = C$ olsun. Buradan, özel olarak, $X = A^-CB^-$ alınır ve denklemde yerine yazılırsa $AA^-CB^-B = C$ elde edilir. Buradan $X = A^-CB^-$ bir çözümdür. ■

Aşağıdaki teorem (4.1.1) deki $AXB = C$ matris denkleminin tüm çözümlerinin biçimini ortaya koymaktadır.

Teorem 4.2.2. (4.1.1) deki $AXB = C$ matris denklemi bir çözüme sahipse, her $m_2 \times m_3$ boyutlu H matrisi için,

$$X_1 = A^-CB^- + H - A^-AHBB^- \tag{4.2.2}$$

ile tanımlanan X_1 matrisi bir çözümdür. Bundan başka, matris denkleminin her çözümü bir $m_2 \times m_3$ boyutlu H matrisi için (4.2.2) biçiminde yazılabilir.

İspat. Denklem bir çözüme sahip kabul edildiğinden, Teorem 4.2.1'e göre $AA^-CB^-B = C$ dir. Buradan, (4.2.2) deki X_1 in bir çözüm olduğunu ispatlamak için, (4.2.2) soldan A ve sağdan B ile çarpılarak,

$$\begin{aligned} AX_1B &= AA^-CB^-B + AHB - AA^-AHBB^-B \\ &= AA^-CB^-B + AHB - AHB \\ &= AA^-CB^-B \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak eşitliğin sağ yanındaki son ifade, yine Teorem 4.2.1'e göre C dir. Böylece $AX_1B = C$ olur. Yani (4.2.2) ile verilen X_1 bir çözümdür. Şimdi X_1 in $AXB = C$ nin herhangi bir çözümü olduğu kabul edilip X_1 in (4.2.2) biçiminde yazılabileceği bir $m_2 \times m_3$ matrisinin var olduğu gösterilmelidir. X_1 bir çözüm olduğundan, $AX_1B = C$ dir. Bu eşitlik soldan A^- ve sağdan B^- ile çarpılarak,

$$A^-AX_1BB^- = A^-CB^-$$

veya

$$0 = A^-CB^- - A^-AX_1BB^-$$

elde edilir. Her iki yana X_1 eklenirse,

$$X_1 = A^-CB^- + X_1 - A^-AX_1BB^-$$

bulunur. Bu ise $H = X_1$ olmak üzere, (4.2.2) biçimindedir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi farklı bir açıdan yaklaşılacaktır. Bu bölümün başında belirtildiği gibi matris denklemleri, lineer denklem sistemlerinin bir genelleştirilmesi olarak ele alınabilir. Bu özdeşleştirme gerçekten yerindedir. Çünkü $AXB = C$ denklemi Kronecker çarpım yardımıyla,

$$(B' \otimes A)x = c \tag{4.2.3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada x, X in sütunlarının sırasıyla alt alta yazılmasıyla elde edilen bilinmeyenler sütun vektörü ve c, C nin sütunlarının sırasıyla alt alta yazılmasıyla elde edilen bilinenler sütun vektörüdür. Bu gösterim çerçevesinde (4.2.2) biçiminin doğrudan doğruya (3.1.1) den hareketle elde edilebileceğine dikkat etmek gerekir. (3.1.1)'in genel çözümüne benzer şekilde, Teorem 3.3.1'den $(B' \otimes A)x = c$ lineer denklem sisteminin genel çözümü,

$$x = (B' \otimes A)^{-} c + \left[I - (B' \otimes A)^{-} (B' \otimes A) \right] h \tag{4.2.4}$$

olarak elde edilir. Burada h keyfi uygun boyutlu bir sütun vektördür. Elde edilen bu x, tekrar matris formatında yazılarak,

$$X = A^{-}CB^{-} + H - A^{-}AHBB^{-}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, (4.2.4) ile (4.2.2) nin denk oldukları görülür.

4.3. Tutarsız Matris Denklemlerinin Yaklaşık Çözümleri

Öncelikli olarak şu temel kavramı vermek gerekir. $A = (a_{ij})$ herhangi bir $m \times n$ boyutlu matris olmak üzere, $\|A\|$ sembolü ile,

$$\|A\| = \left(\sum a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

ifadesi anlaşılacaktır. Bu ifade (reel matrisler için) Frobenius normu olarak bilinir.

Lineer denklem sistemlerinde olduğu gibi $AXB = C$ matris denkleminin tutarsız olduğu yani, bu denklemi sağlayan herhangi bir X matrisinin olmadığı kabul edilirse, bu durumda $\|AXB - C\|$ küçük olacak şekilde bir X matrisi araştırılmak istenebilir. Bu şekildeki bir X matrisine matris denkleminin bir yaklaşık çözümü denir. Eğer bir X_0 matrisi diğer tüm bu şekildeki X matrislerine göre $\|AXB-C\|$ yi daha küçük yapıyorsa X_0 a en iyi yaklaşık çözüm denir.

$AXB=C$ matris denkleminin $(B'\otimes A)x=c$ alışılagelmiş lineer denklem sistemi olarak yazılabileceği biliniyor. Sonuç olarak, böyle bir denklem sisteminin yaklaşık çözümleri ve E.İ.Y.Ç. leri Bölüm 3'teki gibi ilerlenerek elde edilebilir. Hatta, E.İ.Y.Ç.'ün Bölüm 3'de verildiği gibi E.K.K.Ç.'leri içerisinden aranmasının yeterli olacağını da vurgulamakta yarar vardır.

Son olarak, esas problemlere geçmeden önce bir önemli özelliği daha vurgulamak gerekir:

$\|AXB-C\|=\|(B'\otimes A)x-c\|$

daima doğrudur.

Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3.1. $AXB=C$ matris denkleminin E.İ.Y.Ç. ü,

$$X = A^{-}CB^{-} \qquad (4.3.1)$$

dir.

İspat. $AXB=C$ matris denklemi, x ve c Kısım 4.2 de açıklandığı gibi olmak üzere, $(B'\otimes A)x=c$ denklemine denktir. Bu denklemin E.İ.Y.Ç.'ü ise $x=(B'\otimes A)^{-}c$ şeklinde olduğu Teorem 3.4.3'den görülür. Bu ise matris formatında E.İ.Y.Ç.'ün $X = A^{-}CB^{-}$ olduğunu söyler. ■

Yukarıdaki özellik ve bilgiler çerçevesinde matris denklemleri ile ilgili E.K.K.Ç.'lerinin de Bölüm 3'teki gibi ifade edilebileceği açıktır. Buna rağmen matris denklemleri için E.K.K.Ç.'leri ile ilgili aşağıdaki teoremi vermekte yarar vardır.

Teorem 4.3.2. X matrisinin $AXB = C$ tutarsız sisteminin bir E.K.K.Ç. olmasının gerekli ve yeterli koşulu, X matrisinin

$$AXB = AA^{-}CB^{-}B \tag{4.3.2}$$

eşitliğini sağlamasıdır.

İspat. $AXB = C$ matris denklemi denk olarak $(B' \otimes A)x = c$ şeklinde yazılmak suretiyle Teorem 3.5.5'teki gibi ilerlenerek gerekli ve yeterli koşulunun

$$(B' \otimes A)x = (B' \otimes A)(B' \otimes A)^{-} c$$

şeklinde olduğu görülür. Bu eşitlik matris formatında yazılmak istenirse,

$$(B' \otimes A)x = (B' \otimes A)(B' \otimes A)^{-} c$$
$$(B' \otimes A)x = (B' \otimes A)\left[(B')^{-} \otimes A^{-}\right]c$$
$$(B' \otimes A)x = \left[B'(B')^{-} \otimes AA^{-}\right]c$$

bulunur. Bu ise,

$$AXB = AA^{-}CB^{-}B$$

ifadesine denktir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.3.2. X matrisinin $AXB = C$ matris denkleminin bir E.K.K.Ç. olmasının gerekli ve yeterli koşulu,

$$(A'A)X(BB') = A'CB' \tag{4.3.3}$$

olmasıdır.

İspat. Teorem 4.3.2'deki (4.3.2) ifadesi soldan A' ve sağdan B' ile çarpılırsa, $A'AXBB' = A'AA^{-}CB^{-}BB'$ olur. Tanım 2.2.1'den AA^{-} ve $B^{-}B$ simetrik olduklarından, yerlerine transpozeleri yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}(A'A)X(BB') &= A'AA^{-}CB^{-}BB' \\ &= A'(A')^{-}A'CB'(B')^{-}B' \\ &= A'CB'\end{aligned}$$

olur. Tersine olarak, (4.3.3) ifadesi soldan $(A')^{-}$ ve sağdan $(B')^{-}$ ile çarpılırsa,

$$(A')^{-}A'AXBB'(B')^{-} = (A')^{-}A'CB'(B')^{-}$$

$$\left(AA^{-}\right)' AXB\left(B^{-}B\right)' = \left(AA^{-}\right)' C\left(BB^{-}\right)'$$

$$AA^{-}AXBB^{-}B = AA^{-}CBB^{-}$$

$$AXB = AA^{-}CBB^{-}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.3.2) ifadesi (4.3.3) ifadesine denktir. Böylece, Teorem 4.3.2'den iddianın doğru olduğu görülür. ■

$AXB = C$ şeklindeki matris denklemleri uygulamalı bilimlerde sıklıkla karşılaşılan problemlerdir. Çoğu kez bu matris denklemleri tutarlı olmaz. Bu durumda E.K.K.Ç.'leri ve E.İ.Y.Ç.'leri aranır. Bundan önceki kısımlarda verilenlerden, bu problemlere analitik olarak yaklaşılabileceği görülmektedir. Ayrıca, $AXB = C$ matris denklemleri tutarlı olduğunda genel çözüm içerisinden $\left(S_G\right)$ ve hatta başka özelliklere de sahip çözümler içerisinden olmak üzere, bazı özel kısıtlamaları da gerçekleyen çözümleri bulmak da gerekebilir.

Bu kısımda son zamanlarda literatürde yer alan temel olarak bu tür iki problem ele alınacaktır. Bunlardan birincisi; $AXB = C$ matris denkleminin tutarlı olması durumunda verilen herhangi bir uygun boyutlu X_0 bilinenler matrisi için, $\left\|\hat{X} - X_0\right\| = \min_{X \in S_G}\left\|X - X_0\right\|$ olacak şekildeki $\hat{X}$ yı bulmaktır. İkinci temel problem ise; $AXB = C$ matris denkleminin tutarsız olması durumunda, yine verilen herhangi bir uygun boyutlu X_0 bilinenler matrisi için, $\left\|\hat{X} - X_0\right\| = \min_{X \in S_E}\left\|X - X_0\right\|$ olacak şekildeki $\hat{X}$ yı bulmaktır. Burada S_E matris denkleminin E.K.K.Ç.'leri kümesidir.

Ayrıca yukarıdaki problemler ele alınırken aranan çözüm üzerine simetrik veya yarı simetrik olma gibi koşullar konularak da benzer problemler ele alınmaktadır. Detaylı bilgiler için [20], [21] ve [22]'ye bakılabilir.

4.4. Kısıtlamalı Matris Denklemleri

Teorem 4.4.1. A, B ve C sırasıyla $m_1 \times m_2$, $m_3 \times m_4$ ve $m_1 \times m_4$ boyutlu bilinen matrisler ve X, $m_2 \times m_3$ boyutlu bilinmeyenler matrisi olmak üzere, $AXB = C$

denklem sistemi tutarlı ve $X_0 \in R^{m_2 \times m_3}$ verilen herhangi bir bilinenler matrisi olsun. Bu durumda,

$$\left\| \hat{X} - X_0 \right\| = \min_{X \in S_G} \left\| X - X_0 \right\|$$

olacak şekildeki $\hat{X}$ matrisi,

$$\hat{X} = A^{-}CB^{-} + X_0 - A^{-}AX_0BB^{-}$$

ile verilir.

İspat. $X \in S_G$ ise, $H \in R^{m_2 \times m_3}$ herhangi bir matris olmak üzere, Teorem 4.2.2'den

$$X = A^{-}CB^{-} + H - A^{-}AHBB^{-}$$

biçimindedir. Bu ifadenin,

$$x = \left(B' \otimes A\right)^{-} c + \left[I - \left(B' \otimes A\right)^{-}\left(B' \otimes A\right)\right] h$$

(4.4.1)

ifadesine denk olduğu daha önce belirtilmişti. Burada c, h, x ve x_0 vektörleri sırasıyla C, H, X ve X_0 matrislerinin sütunlarının sırasıyla alt alta yazılmasıyla elde edilen $m_1m_4 \times 1$, $m_2m_3 \times 1$, $m_2m_3 \times 1$ ve $m_2m_3 \times 1$ boyutlu sütun vektörlerdir. Dolayısıyla, problem

$$\left(B' \otimes A\right)^{-} c + \left[I - \left(B' \otimes A\right)^{-}\left(B' \otimes A\right)\right] h = x_0$$

veya

$$\left[I - \left(B' \otimes A\right)^{-}\left(B' \otimes A\right)\right] h = x_0 - \left(B' \otimes A\right)^{-} c$$

sisteminin E.İ.Y.Ç.'nü bulmaya indirgenmiş olur. Teorem 2.2.14 ve Teorem 2.2.15 göz önüne alınarak, Teorem 3.4.3'den,

$$\hat{h} = \left[I - \left(B' \otimes A\right)^{-}\left(B' \otimes A\right)\right]\left[x_0 - \left(B' \otimes A\right)^{-} c\right]$$

$$= x_0 - \left(B' \otimes A\right)^{-} c - \left(B' \otimes A\right)^{-}\left(B' \otimes A\right)x_0 + \left(B' \otimes A\right)^{-}\left(B' \otimes A\right)\left(B' \otimes A\right)^{-} c$$

$$= x_0 - \left(B' \otimes A\right)^{-} c - \left(B' \otimes A\right)^{-}\left(B' \otimes A\right)x_0 + \left(B' \otimes A\right)^{-} c$$

$$= x_0 - \left(B' \otimes A\right)^{-}\left(B' \otimes A\right)x_0$$

$$= \left[I - \left(B' \otimes A\right)^{-}\left(B' \otimes A\right)\right] x_0$$

bulunur. Bu $\hat{h}$ değeri (4.4.1) de h yerine yazılarak sistemin E.İ.Y.Ç.'ü,

$$\hat{x} = \left(B' \otimes A\right)^{-} c + \left[I - \left(B' \otimes A\right)^{-} \left(B' \otimes A\right)\right]\left[I - \left(B' \otimes A\right)^{-} \left(B' \otimes A\right)\right]x_0$$

$$= \left(B' \otimes A\right)^{-} c + \left[I - \left(B' \otimes A\right)^{-} \left(B' \otimes A\right)\right]x_0$$

olarak bulunur. Bu ifade matris biçiminde yazılarak,

$$\hat{X} = A^{-}CB^{-} + X_0 - A^{-}AX_0BB^{-}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.4.2. $X \in R^{m_2 x m_3}$ matrisi $AXB = C$ tutarsız sisteminin bir E.K.K.Ç. ise, bir $H \in R^{m_2 \times m_3}$ parametreler matrisi için,

$$X = A^{-}CB^{-} + H - A^{-}AHBB^{-}$$

biçiminde yazılabilir.

İspat. $AXB = C$ matris denkleminin $\left(B' \otimes A\right)x = c$ lineer denklemler sistemine denk olduğu biliniyor. Burada x ve c, (4.2.3) de verildikleri anlamdadır. $\left(B' \otimes A\right)x - c = e\left(x\right)$ olsun. E.K.K.Ç.'lerinin kümesi $e'\left(x\right)e\left(x\right)$ i minimum yapacak olan x vektörleridir. Buradan,

$$\begin{aligned} e'\left(x\right)e\left(x\right) &= \left[\left(B' \otimes A\right)x - c\right]' \left[\left(B' \otimes A\right)x - c\right] \\ &= \left[x'\left(B' \otimes A\right)' - c'\right]\left[\left(B' \otimes A\right)x - c\right] \\ &= \left[x'\left(B \otimes A'\right) - c'\right]\left[\left(B' \otimes A\right)x - c\right] \\ &= x'\left(B \otimes A'\right)\left(B' \otimes A\right)x - x'\left(B \otimes A'\right)c - c'\left(B' \otimes A\right)x + c'c \\ &= x'\left(B \otimes A'\right)\left(B' \otimes A\right)x - 2x'\left(B \otimes A'\right)c + c'c \end{aligned}$$

bulunur. x e göre türev alınır ve sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left[e\left(x\right)e\left(x\right)\right]}{\partial x} &= 2\left(B \otimes A'\right)\left(B' \otimes A\right)x - 2\left(B \otimes A'\right)c \\ &= 0 \end{aligned}$$

veya

$$\left(B' \otimes A\right)' \left(B' \otimes A\right)x = \left(B' \otimes A\right)' c$$

normal denklemleri bulunur. Bu sistem daima tutarlı olup genel çözümü, $h \in R^{m_2 m_3 \times 1}$ herhangi bir parametreler vektörü olmak üzere,

$$x=\left[\left(B'\otimes A\right)'\left(B'\otimes A\right)\right]^{-}\left(B'\otimes A\right)'c+\left[I-\left[\left(B'\otimes A\right)'\left(B'\otimes A\right)\right]^{-}\left[\left(B'\otimes A\right)'\left(B'\otimes A\right)\right]\right]h$$

$$=\left[\left(B\otimes A'\right)\left(B'\otimes A\right)\right]^{-}\left(B\otimes A'\right)c+\left[I-\left[\left(B\otimes A'\right)\left(B'\otimes A\right)\right]^{-}\left[\left(B\otimes A'\right)\left(B'\otimes A\right)\right]\right]h$$

$$=\left[\left(B'\right)^{-}B^{-}B\otimes A^{-}\left(A'\right)^{-}A'\right]c+\left[I-\left[\left(BB'\right)^{-}BB'\right]\otimes\left[\left(A'A\right)^{-}A'A\right]\right]h$$

$$=\left(B'\otimes A\right)^{-}c+\left[I-\left(B'\otimes A\right)^{-}\left(B'\otimes A\right)\right]h$$

şeklindeki vektörler kümesidir. Bu ise matris biçiminde,

$$X = A^{-}CB^{-} + H - A^{-}AHBB^{-}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Uyarı 4.4.3. Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.4.2'ye göre $AXB=C$ matris denkleminin tutarlı olduğu durumdaki genel çözüm yapısı ile tutarsız olduğu durumdaki E.K.K.Ç. yapısının aynı olduğuna dikkat etmek gerekir.

Teorem 4.4.1 yukarıdaki birinci problemin analitik çözümünü ortaya koymaktadır Teorem 4.4.2 ve Uyarı 4.4.3 dikkate alındığında, aslında Teorem 4.4.1 in yukarıdaki ikinci problem için de bir analitik yaklaşımı ortaya koyduğu görülmektedir.

4.5. Bazı Kısıtlamalı Matris Denklemleri İçin Sayısal Algoritmalar ve Örnekler

$A\in R^{m\times n}$, $B\in R^{n\times p}$, $C\in R^{m\times p}$, $X\in SSR^{n\times n}$ burada $SSR^{n\times n}$, $n\times n$ boyutlu yarı simetrik ($A\in R^{n\times n}$ olsun. Eğer $A'=-A$ ise A matrisine yarı simetriktir denir.) matrislerin kümesi olmak üzere,

$$\begin{aligned} AXB&=C\\ B'XA'&=-C' \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

matris denklemlerinin veya denk olarak,

$$\begin{bmatrix} B'\otimes A \\ A\otimes B' \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix} \tag{4.5.2}$$

lineer denklemler sisteminin tutarlı olması koşulu altında verilen bir $X_0\in R^{n\times n}$ matrisi için,

$$\left\|\hat{X}-X_0\right\| = \min_{\mathbf{X}\in S_E}\left\|X-X_0\right\|$$

olacak şekildeki $\hat{X}$ yı bulma problemi [20]'de ele alınmıştır. Burada x, c_1 ve c_2 sırasıyla X, C ve C' matrislerinin sütunlarının alt alta yazılmasıyla elde edilen sütun vektörler ve S_E (4.5.1) lineer matris denklemler sisteminin çözümleri kümesini göstermektedir. Söz konusu çalışmada problemin çözümü ile ilgili bir iteratif yöntem ortaya konulmuştur. Ayrıca bir sayısal örnekte verilerek yöntemin etkinliği ile ilgili yorum yapılmıştır.

Aşağıdaki sayısal algoritma, Teorem 4.4.1 çerçevesinde olmak üzere söz konusu problemin analitik bir çözümünü ortaya koymaktadır. Algoritma, (4.5.1) lineer matris denklemler sistemi yerine, denk olarak (4.5.2) lineer denklemler sistemi esas alınarak düzenlenmiştir.

Algoritma 4.5.1.

1) A, B, C ve X_0 matrislerinin gir.

2) C ve X_0 matrislerini c ve x_0 atamasıyla vektör formatına getir.

3) $B' \otimes A$ matrisini oluştur.

4) $A \otimes B'$ matrisini oluştur.

5) $\begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix}$ matrisini oluştur.

6) $\begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix}$ matrisini oluştur.

7) $\begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix}$ matrisinin g-tersini hesapla.

8) $x = \begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix}^{-} \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix} + x_0 - \begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix}^{-} \begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix} x_0$ değerini hesapla.

Aşağıdaki örnek yukarıda bahsedilen çalışmadan alınmış olup çözümü bu algoritmayla verilmektedir.

Örnek 4.5.2. [20, Example 1.]

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 & -9 \\ 2 & 0 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 9 & 6 & -8 \\ 3 & 6 & 2 & 27 & -13 \\ -5 & 5 & -22 & -1 & -11 \\ 8 & 4 & -6 & -9 & -19 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & -5 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 9 & 2 & -6 \\ -2 & 7 & -8 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 171 & -537 & 74 & -29 & -281 \\ 142 & -278 & 212 & -92 & -150 \\ 196 & -523 & -59 & -111 & 24 \\ 661 & -1507 & 922 & -234 & -1003 \\ -39 & -192 & -207 & 186 & -227 \\ -165 & -292 & -1154 & 76 & 422 \end{bmatrix},$$

matrisleri verildiğinde,

$$X_0=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 7 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 8 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$ matrisi üzerinde $\hat{X}$ çözüm matrisi Algoritma 4.5.1

kullanılarak,

$$\hat{X}=\begin{bmatrix} 0.0000 & 2.0000 & -1.0000 & -2.0000 & 0.0000 \\ -2.0000 & 0.0000 & 2.0000 & 1.0000 & -4.0000 \\ 1.0000 & -2.0000 & 0.0000 & -1.0000 & -0.0000 \\ 2.0000 & -1.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -4.0000 \\ 0.0000 & 4.0000 & -0.0000 & 4.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

bulunur [Ek I].

A, B, C, x, c yukarıdaki gibi ve $SR^{n\times n}$, $n\times n$ boyutlu simetrik matrislerin kümesi olmak üzere,

$$\begin{aligned} AXB &= C \\ B'XA' &= C' \end{aligned} \qquad (4.5.3)$$

matris denkleminin veya denk olarak,

$$\begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{4.5.4}$$

lineer denklem sisteminin tutarsız olması durumunda verilen bir $X_0 \in SR^{n\times n}$ matrisi için,

$$\left\| \hat{X} - X_0 \right\| = \min_{X \in S_E} \left\| X - X_0 \right\|$$

olacak şekildeki $\hat{X}$ yı bulma problemi [21]'de ele alınmış, problemin çözümü ile ilgili bir yöntem ortaya konulmuş ve sayısal bir örnek verilerek yöntemin etkinliği yorumlanmıştır. Ancak burada,

$$S_E = \left\{ X \text{ I } X \in SR^{nxn},\ \left\| AXB - C \right\| = \min_{Y \in SR^{nxn}} \left\| AYB - C \right\| \right\}$$

dir. Diğer deyişle, burada S_E $AXB = C$ matris denkleminin simetrik E.K.K.Ç. nün kümesidir. Sonuç olarak yukarıdaki problemin bir analitik çözümünün, Uyarı 4.4.3 dikkate alınmak suretiyle Teorem 4.4.1 çerçevesinde olmak üzere,

$$x = \begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix}^{-} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + x_0 - \begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix}^{-} \begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix} x_0$$

olduğu görülür.

Aşağıda bu problemin çözümü ile ilgili sayısal bir algoritma verilmiştir.

Algoritma 4.5.3.

1) A, B, C ve X_0 matrislerini gir.
2) C ve X_0 matrislerini c ve x_0 atamasıyla vektör formatına getir.
3) $B' \otimes A$ matrisini oluştur.
4) $A \otimes B'$ matrisini oluştur.
5) $\begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix}$ matrisini oluştur.
6) $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ matrisini oluştur.
7) $\begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix}$ matrisinin g-tersini hesapla.

8) $x = \begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix}^{-} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + x_0 - \begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix}^{-} \begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix} x_0$ değerini hesapla.

Aşağıdaki örnek bahsedilen çalışmadan alınmış olup çözümü buradaki algoritma ile verilmektedir.

Örnek 4.5.4. [21, Example 1.]

$$A = \begin{pmatrix} J(5,5) & 0(5,4) \\ 0(4,5) & \text{pascal}(4) \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \text{hankel}(1:4) & 0(4,5) \\ 0(5,4) & 0(5,5) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \text{toeplitz}(1:4) & 0(4,5) \\ 0(5,4) & \text{hilb}(5) \end{pmatrix}, \; X_0 = \begin{pmatrix} I_4 & \frac{1}{2}J(4,5) \\ \frac{1}{2}J(5,4) & I_5 \end{pmatrix},$$

Burada $\text{hilb}(n)$ ve $\text{pascal}(n)$ sırasıyla n-boyutlu Hilbert ve Pascal matrislerini, $\text{toeplitz}(1:n)$ ve $\text{hankel}(1:n)$de sırasıyla n-boyutlu Toeplitz ve Hankel matrislerini;

$$\text{hilb}(5) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}, \quad \text{hankel}(1:4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{pascal}(4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}, \quad \text{toeplitz}(1:4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ve I_n, $J(m,n)$ ve $0(m,n)$ sırasıyla n-boyutlu birim matrisi, tüm elemanları 1 olan $m\times n$ boyutlu matrisi ve tüm elemanları 0 olan $m\times n$ boyutlu matrisi göstermektedir. Algoritma 4.5.3 ile,

$$\hat{X}=\begin{bmatrix} 0.8258 & -0.2692 & -0.2480 & -0.2214 & 0.4129 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2692 & 0.6358 & -0.3430 & -0.3164 & 0.3179 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2480 & -0.3430 & 0.6783 & -0.2952 & 0.3391 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2214 & -0.3164 & -0.2952 & 0.7314 & 0.3657 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4129 & 0.3179 & 0.3391 & 0.3657 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur [Ek J].

[20]'de ortaya konulan iteratif yöntemde lineer matris denklemi tutarlı ve X_0 simetrik değil, [21]'de ortaya konulan yöntemde lineer matris denklemi tutarsız ve X_0 simetriktir. Bu bölümdeki tartışmalardan anlaşılmaktadır ki X_0 matrisi simetrik olsun ya da olmasın aranan çözüm (yarı simetriklik ve simetriklik kavramları hariç) aynı tiplidir. Diğer deyişle söz konusu çalışmalarda olduğu gibi ayrı ayrı irdelenmelerine gerek yoktur.

Bundan başka [22]'de ortaya konulan iteratif yöntemde lineer matris denklemi tutarsız ve X_0 simetrik değildir. Yani [21]'de ele alınan problemden farklı olarak, verilen X_0 matrisi simetrik değil. Bu çalışmada da ortaya konan yöntem bu duruma göre ortaya konulmuştur. Yukarıda belirtildiği gibi bu probleme de ayrıca yaklaşmaya gerek yoktur. X_0 ın simetrik olmaması durumunda, X simetrik olmak üzere,

$$\left\|X-X_0\right\|^2=\left\|X-\frac{1}{2}\left(X_0+X_0'\right)\right\|^2+\left\|\frac{1}{2}\left(X_0-X_0'\right)\right\|^2$$

dır. Dolayısıyla X_0 ın simetrik olmaması durumunda, simetrik matrisler üzerinden $\left\|X-X_0\right\|$ ı minimumlaştırma problemi, simetrik matrisler üzerinden

$\left\| X - \frac{1}{2}\left(X_0 + X_0'\right) \right\|$ yi minimumlaştırma problemine denktir (Bkz. [21, Remark 3.1]).

Sonuç olarak, Algoritma 4.5.3 te X_0 yerine $\frac{1}{2}\left(X_0 + X_0'\right)$ alınmak suretiyle problem çözülebilir. Bunu açıklamak amacıyla aşağıda verilen örnek söz konusu çalışmadan alınmış olup Algoritma 4.5.3'te X_0 yerine $\frac{1}{2}\left(X_0 + X_0'\right)$ yazmak suretiyle çözüm elde edilmiştir.

Örnek 4.5.5. [22, Problem1.1]

Bu örnekte ele alınan problem $A \in R^{m\times n}, B \in R^{n\times p}$ ve $C \in R^{m\times p}$ olmak üzere $AXB = C$ nin simetrik çözümleri içerisinden $\|X - X_0\|$'ı minimum yapan $\hat{X}$ yı bulmaktır.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & 3 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & -4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 3 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 3 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 & -3 & 4 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 5 & -3 & -3 \\ -6 & 2 & -6 & -6 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & -8 & -8 & 4 & 4 \\ 4 & -5 & 4 & 3 & -2 & -7 \\ -3 & 2 & -3 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 43 & -54 & 73 & -54 & 51 & -54 \\ -31 & 37 & -61 & 37 & -53 & 37 \\ 43 & -54 & 73 & -54 & 51 & -54 \\ -31 & 37 & -61 & 37 & -53 & 37 \\ 47 & -54 & 73 & -54 & 21 & -54 \\ -31 & 27 & -61 & 27 & -53 & 27 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -3 & 2 & -3 & 4 \\ -3 & 3 & -3 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & -2 & 2 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 1.7699 & 1.8581 & -3.5455 & 2.8924 & 0.5920 & 0.8523 & 2.3693 \\ 1.8581 & -0.6722 & 1.8908 & -1.9156 & 3.1173 & 0.5698 & -1.0561 \\ -3.5455 & 1.8908 & -0.5812 & 1.3562 & -3.9861 & 1.7472 & 2.2490 \\ 2.8924 & -1.9156 & 1.3562 & -3.8543 & -0.6224 & 0.3241 & 3.6833 \\ 0.5920 & 3.1173 & -3.9861 & -0.6224 & -2.3618 & -2.2044 & 3.2716 \\ 0.8523 & 0.5698 & 1.7472 & 0.3241 & -2.2044 & -0.0556 & 2.7992 \\ 2.3693 & -1.0561 & 2.2490 & 3.6833 & 3.2716 & 2.7992 & 0.0308 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur [Ek K].

Uyarı 4.5.6. Algoritma 4.5.1 ve Algoritma 4.5.3’deki x in, aranan $\hat{X}$ matrisinin sütunlarının sırasıyla alt alta yazılarak elde edilen vektörü ifade ettiğine dikkat etmek gerekir.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Birinci bölümde genelleştirilmiş ters (Moore-Penrose ters) veya kısaca g-ters kavramının kısa bir tarihsel gelişimi ortaya konulmuştur.

İkinci bölümde, uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan reel matrislerin g-tersleri ile ilgili temel kavram ve özellikler verilmiştir. Ayrıca verilen bir matrisin g-tersinin MATLAB 7.5 da "pinv" komutuyla hazır olarak hesaplanabildiği bilinmektedir. Fakat MATLAB 7.5 içindeki g-ters kavramı için yapılan algoritmanın yapısı incelenemediğinden alternatif bir yol olarak farklı ve belki daha da basit bir algoritmayla g-tersin bulunabileceği vurgulanmış ve verilen algoritma kullanılarak birkaç örnekle matrislerin g-tersleri hesaplanmıştır.

Üçüncü bölüm şöyle düzenlenmiştir. Her şeyden önce, reel hayatta ortaya çıkan problemlerin birçoğunda karşılaşılan $Ax = g$ şeklindeki lineer denklem sistemlerinin her zaman tutarlı olamayacağını ve bu durumda yaklaşık çözümler bulmak gerekebileceğini vurgulamakta yarar vardır. Bu bölümde, öncelikle $Ax = g$ şeklindeki lineer denklem sisteminin tutarlı olması ve tutarlı olmaması durumundaki çözümleri ve çözüm biçimleri tanıtılmaktadır. Bununla birlikte, tutarlı olması durumunda genel çözümleri, tutarsız olması durumunda en küçük kareler çözümleri ve bu çözümler arasından aranması gereken en iyi yaklaşık çözüm karakterize edilmekte ve MATLAB 7.5 çerçevesinde bunlarla ilgili algoritma ve örnekler ortaya konulmaktadır.
Son olarak $Ax = g$ lineer denklem sisteminin tutarlı olması durumunda genel çözümleri içerisinden ve tutarsız olması durumunda da en küçük kareler çözümleri içerisinden, verilen bir $x_0 \in R^{n\times 1}$ vektörü için $x - x_0$ ın normunu minimum yapacak olan x vektörünü elde etmek şeklindeki bir problem de ele alınarak, çözüm

karakterize edilmekte ve MATLAB 7.5 da sayısal bir algoritma oluşturularak sayısal örnekler verilmektedir.

Bu bölümde yapılan çalışmalarla ilgili aşağıdakiler vurgulamaya değerdir.

$Ax = g$ lineer denklem sistemi için çözüm, kısıtlama olmaksızın, h bir parametreler vektörü olmak üzere

$$x = A^{-}g + \left(I - A^{-}A\right)h \tag{3.3.1}$$

ile bulunur. Fakat $Ax = g$ sistemi tutarlı olduğunda ve A matrisinin rankı sütun sayısına eşit olduğunda $A^{-}A = I$ olacağı Sonuç 3.3.2 ve Sonuç 3.3.3 de verilmiştir. Bu durum da sistemin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm $x = A^{-}g$ dir. Sistem tutarlı fakat A matrisinin rankı sütun sayısına eşit değilse, sistemin sonsuz çözümü vardır ve çözümler (3.3.1) şeklindedir. $Ax = g$ sistemi tutarsız olduğunda ise sistemin E.İ.Y.Ç.'ü $x = A^{-}g$ dir. Buradan görülüyor ki, $Ax = g$ sistemi tutarlı ve A sütun ranklı olduğundaki çözüm ile sistemin tutarsız olduğu durumdaki E.İ.Y.Ç.'ü aynıdır.

Dördüncü bölüm çalışmanın ana bölümü sayılabilir. Bu bölümde, $AXB = C$ şeklindeki lineer matris denklemleri ve bunlarla ilgili son zamanlarda literatürde yer alan bazı özel problemler ele alınmıştır. Ele alınan problemlerle ilgili analitik yaklaşımlar ortaya konularak bu yaklaşımlara göre MATLAB 7.5 da algoritmalar kurulup, sayısal örnekler verilmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürdekilerle karşılaştırılmıştır. Detaya girmeksizin bu bölümde yapılanları aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür:

$AXB = C$ matris denkleminin tutarlı olduğu durumdaki genel çözümü $\left(S_G\right)$, H bir uygun boyutlu parametreler matrisi olmak üzere,

$$X = A^{-}CB^{-} + H - A^{-}AHBB^{-} \tag{4.2.2}$$

şeklindedir. Ayrıca $AXB = C$ lineer matris denklemi, $Ax = g$ lineer denklemler sisteminin bir genelleştirilmesi olarak kabul edilebilir. Çünkü, $AXB = C$ matris denklemi Kronecker çarpım yardımıyla, denk olarak $\left(B' \otimes A\right)x = c$ şeklinde yazılabilir. Bu denklik yardımıyla $AXB = C$ lineer matris denkleminin tutarsız olduğu durumda herhangi bir E.K.K.Ç.'nünde (4.2.2) biçiminde yazılabileceği, Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.4.2'de belirtilmiştir.

[20]’de, $AXB = C$ tutarlı matris denklemleri ile ilgili bir minimumlaştırma problemi ortaya konularak, çözümü için bir iteratif metot verilip sayısal algoritması ile birlikte, MATLAB 6.5.1 kullanılarak örneklendirilmiştir.

Bu çalışmada söz konusu problemin çözümü için,

$$\begin{aligned} &AXB = C \\ &B'XA' = -C' \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

lineer matris denklemleri yerine,

$$\begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix} \tag{4.5.2}$$

denk lineer denklemler sistemi alınarak öncelikle bir analitik yaklaşım verilmiştir. Sonra, Algoritma 4.5.1 inşa edilmiş ve bu algoritmayla bir örnek [20, Example 1.] çözülmüştür:

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 2.0000 & -1.0000 & -2.0000 & 0.0000 \\ -2.0000 & 0.0000 & 2.0000 & 1.0000 & -4.0000 \\ 1.0000 & -2.0000 & 0.0000 & -1.0000 & -0.0000 \\ 2.0000 & -1.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -4.0000 \\ 0.0000 & 4.0000 & -0.0000 & 4.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Bu matris [20]’deki iterasyon yöntemiyle bulunan çözüm ile aynıdır. Ancak, bu matris Algoritma 4.5.1 ile analitik olarak bulunurken [20]’de verilen iterasyon yöntemiyle 17. adımda bulunmuştur. Ayrıca bulunan bu çözüm için $\|AXB - C\|$ normu ve verilen,

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 7 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 8 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi için $\|\hat{X} - X_0\|$ normu hesaplanacak olursa, $\|\hat{X} - X_0\| = 17.6635$ ve $\|AXB - C\| = 0$ bulunur. Sistem tutarlı olduğu için, bu beklenen bir sonuçtur.

[21]’de $AXB = C$ tutarsız lineer matris denklemi ile ilgili bir minimumlaştırma problemi tanıtılmış ve problemin çözümü için bir yöntem ortaya konulmuştur. Ayrıca

MATLAB 6.5 kullanılarak verilen yönteme göre, bir algoritma oluşturularak, sayısal bir örnek verilmiştir.

Bu çalışmada, söz konusu çalışmada ele alınan problemin çözümü için,

$$\begin{aligned} AXB &= C \\ B'XA' &= C' \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

lineer matris denklemleri yerine,

$$\begin{bmatrix} B' \otimes A \\ A \otimes B' \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{4.5.4}$$

denk lineer denklemler sistemi alınarak, Algoritma 4.5.3 oluşturulmuş ve bir örnek [21, Example 1.] bu algoritma ile çözülmüştür:

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 0.8258 & -0.2692 & -0.2480 & -0.2214 & 0.4129 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2692 & 0.6358 & -0.3430 & -0.3164 & 0.3179 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2480 & -0.3430 & 0.6783 & -0.2952 & 0.3391 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2214 & -0.3164 & -0.2952 & 0.7314 & 0.3657 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4129 & 0.3179 & 0.3391 & 0.3657 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu çözüm, [21]'de verilen algoritma yardımıyla bulunan çözüm ile aynıdır. Ayrıca verilen,

$$X_0 = \begin{pmatrix} I_4 & \frac{1}{2}J(4,5) \\ \frac{1}{2}J(5,4) & I_5 \end{pmatrix}$$

matrisi için, $\left\| \hat{X} - X_0 \right\| = 4.4141$ ve $\left\| AXB - C \right\| = 5.7358$ dır.

[22]'de $AXB = C$ tutarsız lineer matris denklemi ile ilgili bir minimumlaştırma problemi tanıtılmış ve problemin çözümü için bir iteratif yöntem ortaya konulmuştur. MATLAB 6.1 kullanılarak, verilen iteratif yönteme göre bir algoritma oluşturularak bir sayısal örnek verilmiştir. Söz konusu çalışmada verilen örnek, bu çalışmadaki Algoritma 4.5.3 kullanıldığında, bulunan çözüm,

$$X=\begin{bmatrix} 1.7699 & 1.1527 & -3.1332 & 2.2741 & -0.1126 & -0.0500 & 3.0677 \\ 2.5634 & -0.6722 & 1.9667 & -1.5215 & 2.9366 & -1.8711 & 1.2666 \\ -3.9578 & 1.8149 & -0.5812 & 1.9618 & -4.3705 & 0.7862 & 2.2351 \\ 3.5107 & -2.3097 & 0.7505 & -3.8543 & -0.5622 & 0.1177 & 3.8695 \\ 1.2966 & 3.2980 & -3.6017 & -0.6827 & -2.3618 & -2.7041 & 1.1243 \\ 1.7547 & 3.0106 & 2.7082 & 0.5304 & -1.7047 & -0.0556 & 4.8428 \\ 1.6709 & -3.3788 & 2.2629 & 3.4972 & 5.4189 & 0.7555 & 0.0308 \end{bmatrix}$$

olarak bulunmuştur. Fakat bulunan bu matris simetrik değildir. Ancak, Örnek 4.5.4'den sonraki vurgulama göz önüne alınarak, Algoritma 4.5.3'te X_0 yerine $\frac{1}{2}\left(X_0+X_0'\right)$ yazılarak elde edilen algoritmaya göre çözüm arandığında,

$$\hat{X}=\begin{bmatrix} 1.7699 & 1.8581 & -3.5455 & 2.8924 & 0.5920 & 0.8523 & 2.3693 \\ 1.8581 & -0.6722 & 1.8908 & -1.9156 & 3.1173 & 0.5698 & -1.0561 \\ -3.5455 & 1.8908 & -0.5812 & 1.3562 & -3.9861 & 1.7472 & 2.2490 \\ 2.8924 & -1.9156 & 1.3562 & -3.8543 & -0.6224 & 0.3241 & 3.6833 \\ 0.5920 & 3.1173 & -3.9861 & -0.6224 & -2.3618 & -2.2044 & 3.2716 \\ 0.8523 & 0.5698 & 1.7472 & 0.3241 & -2.2044 & -0.0556 & 2.7992 \\ 2.3693 & -1.0561 & 2.2490 & 3.6833 & 3.2716 & 2.7992 & 0.0308 \end{bmatrix}$$

olarak bulunmuştur. Bu çözüm [22]'de bulunan çözüm ile aynıdır.

Buradan anlaşılıyor ki verilen A, B, C matrisleri için, (4.5.4) sistemi tutarsız ve X_0 matrisi simetrik değil ise çözüm matrisinin simetrik olması için X_0 yerine $\frac{1}{2}\left(X_0+X_0'\right)$ alınması gerekmektedir. Aksi takdirde yukarıda da gösterildiği gibi bulunan çözüm simetrik olmaz. Sistemin tutarsız olması nedeniyle çözüm E.K.K.Ç.'leri kümesi üzerinden aranmaktadır. Eğer X_0 simetrik değil ise bu durum beklenen bir durumdur.

Aslında, gerek Algoritma 4.5.1 ve gerekse Algoritma 4.5.3'de X_0 simetrik olduğundan, X_0 yerine $\frac{1}{2}\left(X_0+X_0'\right)$ yazmak bir şey değiştirmez. Sonuç olarak, Algoritma 4.5.1 veya Algoritma 4.5.3'de X_0 yerine çözüm aranması durumunda $\frac{1}{2}\left(X_0+X_0'\right)$ ve yarı simetrik çözüm aranması durumunda ise $\frac{1}{2}\left(X_0-X_0'\right)$ yazarak genel bir algoritma oluşturulmuş olur. Diğer deyişle verilen sistemin "tutarlı ya da tutarsız” ve verilen X_0 matrisinin “simetrik ya da simetrik değil” durumuna bakmaksızın genel bir yaklaşım ortaya konulmuş olur.

Son olarak verilenlerin, sezgisel olarak doğru olduğu açık olmasına rağmen analitik olarak daha net ve anlaşılır biçimde ileri düzeyde çalışmalar yapmak mümkündür. Bundan başka, birden fazla matris denklemi göz önünde bulundurularak benzer şekilde çözümler, en küçük kareler çözümleri, en iyi yaklaşık çözümler, şeklindeki problemler de ele alınabilir. Ayrıca bu durumlarda da, bu kısımda bahsedilen çalışmalardaki problemlere benzer problemler hatta daha genelleştirilmeleri de ele alınabilir. Literatürden anlaşılmaktadır ki bu konular hem güncel hem de yüksek derecede uygulanabilirliğe sahip konulardır.

KAYNAKLAR

[1] TSENG, Y. , Generalized inverses of unbounded operators between two unitory spaces, Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.), 67, pp. 431-434, 1949.

[2] TSENG, Y. , Properties and classifications of generalized inverses of closed operators, Dokl. Akad. Nauk. USSR, 67, pp. 607-610, 1949.

[3] TSENG, Y. , Virtual solutions and generalized inversions, Uspehi Math. Nauk. (N.S.), 11, pp. 213-215, 1956.

[4] MITRA, S.K. , On a generalized inverse of a matrix and applications, Sankhya, Ser. A, 30, pp. 107-114, 1968.

[5] MITRA, S.K. , A new class of g-inverse of square matrices, Sankhya, Ser. A. , 30, pp. 323-330, 1968.

[6] MITRA, S.K. , and RAO, C.R. , Simultaneous reduction of a pair of quadratic forms, Sankhya, Ser. A, 30, pp. 313-322, 1968.

[7] MITRA, S.K. , and RAO, C.R. , Some results in estimation and tests of linear hypothesis under the Gauss-Markoff model, Sankhya, Ser. A, 30, pp. 281-290, 1968.

[8] MITRA, S.K. , and RAO C.R, Conditions for optimality and validity of simple least squares theory, Ann. Math. Statist, 40, 1617- 1624, 1969.

[9] GREVILLE, T. and BEN-ISRAEL, A. , Generalized Inverses: Theory and Applications. , United States of America, 1974.

[10] BJERHAMMER, A. , Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations. Bull. Geodesique, 52, pp. 188-220, 1951.

[11] BJERHAMMER, A. , Application of calculus of matrices to mathod of least squares with special reference to geodetic calculations, Kungl. Tekn. Högsk. Handl. Stockholm, 49, pp. 1-86, 1957.

[12] BEN-ISRAEL, A. , and CHARNES A. , Contribution to the theory of generalized inverses, SIAM J. Appl. Math. , 11, pp. 667-699, 1963.

[13] CHIPMAN, J.S. , On the least-squares with insufficient observations, J. Amer. Statist. Assoc. , 59, pp. 1078-1111, 1964.

[14] CHIPMAN, J.S. and RAO, M.M., Projections, generalized inverse and quadratic forms, J. Math, Anal. Appl. , 9, pp. 1-11, 1964.

[15] SCROGGS, J.E. and ODELL, P.L., An alternative definition of the pseudoinverse of a matrix, SIAM J. Appl. Math. , 14, pp. 796-810, 1966.

[16] BOSE, R.C. , Analysis of variance. Unpublished lecture notes, University of North Carolina, Chopel Hill. , 1959.

[17] BOTT, R. and DUFFIN, R.J. , On the algebra of networks, Trans. Amer. Math. Soc. , 74, pp. 99-109, 1953.

[18] CHERNOFF, H. , Locally optimal designs for estimating parameters, Ann. Math. Statist. , 24, pp. 586-602, 1953.

[19] GRAYBILL, F.A., Matrices with applications in statistics, Colorado State University, Fort Collins, Wadsworth, 1983.

[20] HUANG, G., YIN, F. and GUO, K. , An iterative method for the skew-symmetric solution and the optimal approximate solution of the matrix equation $AXB = C$. Journal of Computational and Applied Mathematics, 212, pp. 231-244, 2008.

[21] LIAO, A. and LEI, Y. , Optimal approximate solution of the matrix equation $AXB = C$ over symmetric matrices. , Journal of Computational Mathematics, 25, 5, pp. 543-552, 2007.

[22] PENG, Z. , An iterative method for the least squares symmetric solution of the linear matrix equation $AXB = C$. Applied Mathematics and Computation. 170, 1, pp. 711-723, November 2005.

[23] RAO, C.R. and MITRA, S.K. , Generalized Inverse of Matrices and its Application. , United States of America, April 1971.

[24] PENROSE, R. , On best approximate solutions of linear matrix equations, Proc. Comt. Philos. Soc. , 52, pp. 17-19, 1956.

[25] SEBER, G. A. F. , The Linear Hypothesis: A General Theory, Hafner, New York, 1966.

[26] GREVILLE, T.N.E. , The pseudoinverse of a rectangular or singular matrix and its application to the solution of system of linear equations, SIAM News Letter, 5, pp. 3-6, 1957.

[27] BEN-ISRAEL, A. , and CHARNES A. , Generalized inverses and the Bott-Duffin network analysis. J. Math. Anal. Appl. 7, pp. 428-435, 1963.

[28] BJERHAMMER, A. , A generalized matrix algebra, Kungl. Tekn. Högsk. Handl. Stockholm, 124, pp. 1-32, 1958.

[29] VENIT, S. and BISHOP, W. , Elementary linear algebra, California State University at Los Angeles, PWS Publishers, 1985.

EKLER

Ek A. Örnek 2.4.2 nin Program ve Çıktısı

```
A=[1 0 -2
   0 1 -1
   -1 1 1
   2 -1 2];

B=A'*A;
r=rank(A);
c1=eye(3);
if r~=1
for i=2:r
    c2=((1/(i-1))*iz(c1*B,3)*eye(3))-c1*B;
    c1=c2;
end
t=r*c2*A';
s=iz(c2*B,3);
ters=t/s
else
    ters=(eye(3)*A')/(iz(eye(3)*B,3))
end
```

$$\texttt{ters} = A^{-} = \begin{bmatrix} 0.2667 & 0.3333 & 0.0667 & 0.4000 \\ 0.1333 & 0.0667 & 0.5333 & 0.2000 \\ -0.2000 & 0 & 0.2000 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

Ek B. Örnek 2.4.3 ün Program ve Çıktısı

```
A=[-1 -2
    0 0
    2 4
    1 2
    3 6];

B=A'*A;
r=rank(A);
c1=eye(2);
if r~=1
for i=2:r
    c2=((1/(i-1))*iz(c1*B,2)*eye(2))-c1*B;
    c1=c2;
end
t=r*c2*A';
s=iz(c2*B,2);
ters=t/s
else
    ters=(eye(2)*A')/(iz(eye(2)*B,2))
end
```

$$\text{ters} = A^{-} = \begin{bmatrix} -0.0133 & 0 & 0.0267 & 0.0133 & 0.0400 \\ -0.0267 & 0 & 0.0533 & 0.0267 & 0.0800 \end{bmatrix}$$

Ek C. Örnek 3.6.1.2. nin Program ve Çıktısı

```
syms h1 h2 h3 h4 h5 h6 h7 h8 h9 h10 h11 h12 h13 h14 h15 h16
h17 h18 h19 h20

A=[0 2 4
   1 2 2
   3 4 6];

g=[2 3 -1];

h=[h1 h2 h3];

r=rank(A);
B=pinv(A);
k=A*B*g';
t=k-g';
z=eye(3)-(B*A);
norm=sqrt(sum(diag(t'*t)));

if norm<1e-9&r==3
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı ve çözüm:')
    x=B*g'

elseif norm<1e-9&r<3
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı değil ve çözüm:')
    x=B*g'+z*h'

else
    disp('sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.:')

    x=B*g'

end

sistem tutarlı, A sütun ranklı ve çözüm:
```

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ek D. Örnek 3.6.1.3. ün Program ve Çıktısı

```
syms h1 h2 h3 h4 h5 h6 h7 h8 h9 h10 h11 h12 h13 h14 h15 h16
h17 h18 h19 h20
A=[6 -1 -3 -1
   4 -1 1 -2
   1 3 4 -1];

g=[0 5 -6];

hx=[h1 h2 h3 h4];
hy=[0 0 0 0];

r=rank(A);
B=pinv(A);
k=A*B*g';
t=k-g';
z=eye(4)-(B*A);
norm=sqrt(sum(diag(t'*t)));
if norm<1e-9&r==4
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı ve çözüm:')
    x=B*g'
elseif norm<1e-9&r<4
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı değil ve çözüm:')
    x1=B*g'+z*hx'
    x2=B*g'+z*hy'
else
    disp('sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.:')

    x=B*g'
end
```

sistem tutarlı, A sütun ranklı değil ve çözüm:

$$x_1 = \begin{bmatrix} -0.3776 + 0.74h_1 - 0.073h_2 + 0.095h_3 + 0.23h_4 \\ -3.2891 - 0.74h_1 + 0.74h_2 - 0.95h_3 - 0.23h_4 \\ 0.7526 + 0.95h_1 - 0.95h_2 + 0122h_3 + 0.29h_4 \\ -1.2343 + 0.23h_1 - 2.32h_2 + 0.29h_3 + 0.73h_4 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} -0.3776 \\ -3.2891 \\ 0.7526 \\ -1.2343 \end{bmatrix}$$

Ek E. Örnek 3.6.1.4. ün Program ve Çıktısı

```
syms h1 h2 h3 h4 h5 h6 h7 h8 h9 h10 h11 h12 h13 h14 h15 h16
h17 h18 h19 h20

A=[2 1 1
   1 -2 1
   3 -1 2];

g=[6 -1 4];

hx=[h1 h2 h3 h4];
hy=[0 0 0 0];

r=rank(A);
B=pinv(A);
k=A*B*g';
t=k-g';
z=eye(3)-(B*A);
norm=sqrt(sum(diag(t'*t)));

if norm<1e-9&r==3
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı ve çözüm:')
    x=B*g'
elseif norm<1e-9&r<3
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı değil ve çözüm:')
    x1=B*g'+z*hx'
    x2=B*g'+z*hy'
else
    disp('sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.:')

    x=B*g'
end

sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.:
```

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1.6286 \\ 1.7905 \\ 0.6190 \end{bmatrix}$$

Ek F. Örnek 3.6.2.2. nin Program ve Çıktısı

```
A=[0 2 4
   1 2 2
   3 4 6];

g=[2 3 -1];

x0=[1 2 3];

r=rank(A);
B=pinv(A);
k=A*B*g';
t=k-g';
z=eye(3)-B*A;
norm=sqrt(sum(diag(t'*t)));

if norm<1e-9&r==3
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı ve çözüm:')
    x=B*g'
elseif norm<1e-9&r<3
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı değil ve çözüm:')
    x=B*g'+z*x0'
else
    disp('sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.:')

    x=B*g'+z*x0'
end

sistem tutarlı, A sütun ranklı ve çözüm:
```

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ek G. Örnek 3.6.2.3. ün Program ve Çıktısı

```
A=[6 -1 -3 -1
   4 -1 1 -2
   1 3 4 -1];

g=[0 5 -6];

x0=[1 2 0 3];

r=rank(A);
B=pinv(A);
k=A*B*g';
t=k-g';
z=eye(4)-B*A;
norm=sqrt(sum(diag(t'*t)));

if norm<1e-9&r==4
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı ve çözüm:')
    x=B*g'
elseif norm<1e-9&r<4
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı değil ve çözüm:')
    x=B*g'+z*x0'
else
    disp('sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.:')

    x=B*g'+z*x0'
end

sistem tutarlı, A sütun ranklı değil ve çözüm:
```

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.2453 \\ -3.9120 \\ 1.5535 \\ 0.7235 \end{bmatrix}$$

Ek H. Örnek 3.6.2.4. ün Program ve Çıktısı

```
A=[2 1 1
   1 -2 1
   3 -1 2];

g=[6 -1 4];

x0=[0 1 2];

r=rank(A);
B=pinv(A);
k=A*B*g';
t=k-g';
z=eye(3)-B*A;
norm=sqrt(sum(diag(t'*t)));

if norm<1e-9&r==3
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı ve çözüm:')
    x=B*g'
elseif norm<1e-9&r<3
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı değil ve çözüm:')
    x=B*g'+z*x0'
else
    disp('sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.:')

    x=B*g'+z*x0'
end

sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.:
```

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.6857 \\ 2.1048 \\ 2.1905 \end{bmatrix}$$

Ek I. Örnek 4.5.2. nin Program ve Çıktısı

```
A=[1 3 -5 7 -9
   2 0 4 6 -1
   0 -2 9 6 -8
   3 6 2 27 -13
   -5 5 -22 -1 -11
   8 4 -6 -9 -19];

B=[4 0 8 -5 4
   -1 5 0 -2 3
   4 -1 0 2 5
   0 3 9 2 -6
   -2 7 -8 1 11];

C=[171 -537 74 -29 -281
   142 -278 212 -92 -150
   196 -523 -59 -111 24
   661 -1507 922 -234 -1003
   -39 -192 -207 186 -227
   -165 -292 -1154 76 422];

cussu=[171 -537 74 -29 -281 142 -278 212 -92 -150 196 -523 -59
-111 24 661 -1507 922 -234 -1003 -39 -192 -207 186 -227 -165
292 -1154 76 422];

c=[171 142 196 661 -39 -165 -537 -278 -523 -1507 -192 -292 74
212 -59 922 -207 -1154 -29 -92 -111 -234 186 76 -281 -150 24 -
1003 -227 422];

x0=[1 5 -1 2 0 0 3 -2 6 3 4 2 0 1 1 -1 7 -1 8 4 0 4 0 -4 2];

D=kron(B',A);

E=kron(A,B');

F=[D;E];

Dters=pinv(D);

Fters=pinv(F);

t=[c';-cussu'];

k=F*Fters*t-t

z=k'*k
 r=rank(F);

if z<1e-9
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı ve çözüm:')
```

```
x=(Fters*t)+x0'-Fters*F*x0'

elseif z<1e-9
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı değil ve çözüm:')

     x=(Fters*t)+x0'-Fters*F*x0'

else
    disp('sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.:')


     x=(Fters*t)+x0'-Fters*F*x0'
end

sistem tutarlı, A sütun ranklı ve çözüm:
```

$$\hat{X}=\begin{bmatrix} 0.0000 & 2.0000 & -1.0000 & -2.0000 & 0.0000 \\ -2.0000 & 0.0000 & 2.0000 & 1.0000 & -4.0000 \\ 1.0000 & -2.0000 & 0.0000 & -1.0000 & -0.0000 \\ 2.0000 & -1.0000 & 1.0000 & 0.0000 & -4.0000 \\ 0.0000 & 4.0000 & -0.0000 & 4.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

Ek J. Örnek 4.5.4. nin Program ve Çıktısı

```
A=[1 1 1 1 1 0 0 0 0
    1 1 1 1 1 0 0 0 0
    1 1 1 1 1 0 0 0 0
    1 1 1 1 1 0 0 0 0
    1 1 1 1 1 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 1 1 1 1
    0 0 0 0 0 1 2 3 4
    0 0 0 0 0 1 3 6 10
    0 0 0 0 0 1 4 10 20];

B=[1 2 3 4 0 0 0 0 0
    2 3 4 0 0 0 0 0 0
    3 4 0 0 0 0 0 0 0
    4 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 0 0 0 0 0];

C=[1 2 3 4 0 0 0 0 0
    2 1 2 3 0 0 0 0 0
    3 2 1 2 0 0 0 0 0
    4 3 2 1 0 0 0 0 0
    0 0 0 0 1 1/2 1/3 1/4 1/5
    0 0 0 0 1/2 1/3 1/4 1/5 1/6
    0 0 0 0 1/3 1/4 1/5 1/6 1/7
    0 0 0 0 1/4 1/5 1/6 1/7 1/8
    0 0 0 0 1/5 1/6 1/7 1/8 1/9];

cussu=[1 2 3 4 0 0 0 0 0 2 1 2 3 0 0 0 0 0 3 2 1 2 0 0 0 0 0 4
3 2 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/2 1/3 1/4 1/5 0 0 0 0 1/2 1/3 1/4
1/5 1/6 0 0 0 0 1/3 1/4 1/5 1/6 1/7 0 0 0 0 1/4 1/5 1/6 1/7
1/8 0 0 0 0 1/5 1/6 1/7 1/8 1/9];

c=[1 2 3 4 0 0 0 0 0 2 1 2 3 0 0 0 0 0 3 2 1 2 0 0 0 0 0 4 3 2
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1/2 1/3 1/4 1/5 0 0 0 0 1/2 1/3 1/4 1/5
1/6 0 0 0 0 1/3 1/4 1/5 1/6 1/7 0 0 0 0 1/4 1/5 1/6 1/7 1/8 0
0 0 0 1/5 1/6 1/7 1/8 1/9];

x0=[1 0 0 0 1/2 1/2 1/2 1/2 1/2 0 1 0 0 1/2 1/2 1/2 1/2 1/2 0
0 1 0 1/2 1/2 1/2 1/2 1/2 0 0 0 1 1/2 1/2 1/2 1/2 1/2 1/2 1/2
1/2 1/2 1 0 0 0 0 1/2 1/2 1/2 1/2 0 1 0 0 0 1/2 1/2 1/2 1/2 0
0 1 0 0 1/2 1/2 1/2 1/2 0 0 0 1 0 1/2 1/2 1/2 1/2 0 0 0 0 1];

D=kron(B',A);

E=kron(A,B');
```

```
F=[D;E];

Dters=pinv(D);

Fters=pinv(F);

t=[c';cussu'];

k=F*Fters*t-t

z=k'*k

r=rank(F);

if z<1e-9
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı ve çözüm:')

     x=(Fters*t)+x0'-Fters*F*x0'

elseif z<1e-9
    disp('sistem tutarlı, A sütun ranklı değil ve çözüm:')

   x=(Fters*t)+x0'-Fters*F*x0'

else
    disp('sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.:')

    x=(Fters*t)+x0'-Fters*F*x0'
end

sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.:
```

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 0.8258 & -0.2692 & -0.2480 & -0.2214 & 0.4129 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2692 & 0.6358 & -0.3430 & -0.3164 & 0.3179 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2480 & -0.3430 & 0.6783 & -0.2952 & 0.3391 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2214 & -0.3164 & -0.2952 & 0.7314 & 0.3657 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4129 & 0.3179 & 0.3391 & 0.3657 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ek K. Örnek 4.5.5. ün Program ve Çıktısı

```
A=[4 3 -1 3 1 -3 2
3 -2 3 -4 3 2 1
4 3 -1 3 1 -3 2
3 -1 3 -1 3 2 1
4 3 -1 3 1 -3 2
3 -1 3 -1 3 2 1];

B=[-3 4 -3 -3 4 4
5 -3 5 5 -3 -3
-6 2 -6 -6 2 2
-8 4 -8 -8 4 4
4 -5 4 3 -2 -7
-3 2 -3 -3 2 2
-1 -2 -1 -1 -2 -2];

cussu=[43 -54 73 -54 51 -54 -31 37 -61 37 -53 37 43 -54 73 -54
51 -54 -31 37 -61 37 -53 37 47 -54 73 -54 21 -54 -31 27 -61 27
-53 27];

c=[43 -31 43 -31 47 -31 -54 37 -54 37 -54 27 73 -61 73 -61 73
-61 -54 37 -54 37 -54 27 51 -53 51 -53 21 -53 -54 37 -54 37 -
54 27];

x0=[-1 2 -3 2 -2 2.5 2 2 -1 3 -3 2 0 1 -3 3 -3 3 -2 1 0 2 -3 3
2 2 1.5 3.5 -2 2 -2 2 -1 2.5 0.5 2.5 0 1 1.5 2.5 1 0 2 1 0 3.5
0.5 0 1];

x0ussu=[-1 2 -3 2 -2 2.5 2 2 -1 3 -3 2 0 1 -3 3 -3 3 -2 1 0 2
-3 3 2 2 1.5 3.5 -2 2 -2 2 -1 2.5 0.5 2.5 0 1 1.5 2.5 1 0 2 1
0 3.5 0.5 0 1];

D=kron(B’,A);

E=kron(A,B’);

F=[D;E];

Dters=pinv(D);

Fters=pinv(F);

 t=[c’;cussu’];

if F*Fters*t-t==0
    disp('sistem tutarlıdır ve çözüm:')
   x=(Fters*t)+x0’-Fters*F*x0’

else
    disp('sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.:')
```

```
x=(Fters*t)+x0'-Fters*F*x0'
end
sistem tutarsızdır ve E.İ.Y.Ç.:
```

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 1.7699 & 1.8581 & -3.5455 & 2.8924 & 0.5920 & 0.8523 & 2.3693 \\ 1.8581 & -0.6722 & 1.8908 & -1.9156 & 3.1173 & 0.5698 & -1.0561 \\ -3.5455 & 1.8908 & -0.5812 & 1.3562 & -3.9861 & 1.7472 & 2.2490 \\ 2.8924 & -1.9156 & 1.3562 & -3.8543 & -0.6224 & 0.3241 & 3.6833 \\ 0.5920 & 3.1173 & -3.9861 & -0.6224 & -2.3618 & -2.2044 & 3.2716 \\ 0.8523 & 0.5698 & 1.7472 & 0.3241 & -2.2044 & -0.0556 & 2.7992 \\ 2.3693 & -1.0561 & 2.2490 & 3.6833 & 3.2716 & 2.7992 & 0.0308 \end{bmatrix}$$

ÖZGEÇMİŞ

Gül İNCE, 22.09.1983 tarihinde Kocaeli'nin Derince ilçesinde doğdu. İlkokulu 15.Kolordu İlköğretim Okulu'nda 1994'te, ortaokulu Sırrıpaşa İlköğretim Okulu'nda 1997'de ve liseyi 19 Mayıs Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'nde 2001 yılında tamamladı. 2002'de Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı ve 2006 yılında mezun oldu. Aynı yıl yine Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. 2006-2008 yılları arasında Kocaeli'nde özel bir eğitim kurumunda matematik öğretmeni olarak görev yaptı.