

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLÜ DENKLEMLER İÇİN
NEWTON METODU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Enser EKŞİ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Abdullah YILDIZ

Haziran 2008

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLÜ DENKLEMLER
İÇİN NEWTON METODU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Enser EKŞİ

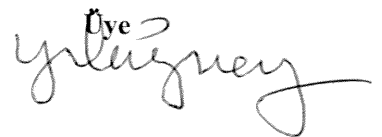

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 12/06/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr.
Abdullah YILDIZ
Jüri Başkanı

Prof. Dr.
Metin BAŞARIR

Yrd. Doç. Dr.
Yılmaz GÜNEY



TEŞEKKÜR

Beni böyle bir çalıŐmaya yönlendiren, zamanını ve desteğini esirgemeyen tez danıŐmanım Sayın Prof. Dr. Abdullah YILDIZ hocama teşekkür eder, saygılar sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	vi
ÖZET.....	vii
SUMMARY	viii
BÖLÜM 1.	
TEĞETLER YÖNTEMİ VE DARALMA DÖNÜŞÜM PRENSİBİ.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Daralma Dönüşüm Prensibi	2
1.3. Newton Metodu (Teğetler Yöntemi).....	4
BÖLÜM 2.	
LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERİN TÜREVLERİ	9
2.1. Giriş.....	9
2.2. Lineer Olmayan Operatörlerin Fechet Türevi.....	10
2.3. F – Türevlenebilir Operatörler için Riemann Anlamında İntegrallenebilme ve Ortalama Değer Teoremi.....	16
2.4. Lineer Olmayan Operatörlerin Gato Türevi.....	19
BÖLÜM 3.	
NEWTON METODU	23
3.1. Giriş.....	23
3.2. Banach Uzaylarında Lineer Olmayan Operatörlü Denklemler İçin Newton Metodu.....	25

BÖLÜM 4.

NEWTON METODUNUN UYGULAMALARI.....	37
4.1. Lineer Olmayan Cebirsel Denklem Sistemine Newton Metodunun Uygulanması	37
4.2. Newton Metodunun İntegral Denklemlere Uygulamaları.....	45

BÖLÜM 5.

SONUÇ	91
KAYNAKLAR	92
EKLER.....	93
ÖZGEÇMİŞ	102

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

\forall	: Her
\in	: Elemanıdır
\subset	: Alt küme
\mathbb{R}	: Reel sayılar Kümesi
\mathbb{R}^n	: Tüm sıralı reel sayı n lilerin kümesi
$C[a,b]$: $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$S_r(x_0)$: x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{S_r(x_0)}$: x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
$[F'(\cdot)]^{-1}$: F Operatörünün türevinin tersi
D^0	: D' nin içi
F-türevi	: Freshe türevi
G-türevi	: Gato türevi
$dF(x_0, h)$: Freshe diferensiyeli
$L(X, Y)$: X' den Y' ye sınırlı lineer operatörler kümesi
(x_n)	: x_n dizisi
I	: Birim operatör

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1.	$y = F(x)$ fonksiyonunun ve ona teğet olan doğruların grafiği	23
Şekil 4.1.	$T(x) = 0$ denkleminin kökü	58
Şekil 4.2.	$\int_0^1 (1 - 3xy)u(y)dy - u(x) = x^3$ denkleminin çözümü	74
Şekil 4.3.	$[0,1]$ aralığını 9 alt parçaya böldüğümüzde elde edilen çözüm	74
Şekil 4.4.	$[0,1]$ aralığını 99 alt parçaya böldüğümüzde elde edilen çözüm	75
Şekil 4.5.	$[0,1]$ aralığını 9 eşit parçaya böldüğümüzde elde edilen çözüm	77
Şekil 4.6.	$[0,1]$ aralığını 99 parçaya ayırdığımızda elde edilen çözüm	78
Şekil 4.7.	Birinci yaklaşımımız sonucunda elde ettiğimiz grafik	91
Şekil 4.8.	İkinci yaklaşımımız sonucunda elde ettiğimiz grafik	91
Şekil 4.9.	Üçüncü yaklaşımımız sonucunda elde ettiğimiz grafik	92
Şekil 4.10.	Dördüncü yaklaşımımız sonucunda elde ettiğimiz grafik	92
Şekil 4.11.	Mathematica çözümü (gerçek çözüm)	93
Şekil 4.12.	Mathematica çözümü ile birinci yaklaşımın mutlak farkı	93
Şekil 4.13.	Mathematica çözümü ile ikinci yaklaşımın mutlak farkı	94
Şekil 4.14.	Mathematica çözümü ile üçüncü yaklaşımın mutlak farkı	94
Şekil 4.15.	Mathematica çözümü ile dördüncü yaklaşımın mutlak farkı	95

ÖZET

Anahtar kelimeler: Lineer olmayan, Operatör, Ardışık yaklaşımlar, Newton metodu.

Lineer olmayan operatörlü denklemler için Newton metodu konusunda yapılanların derlendiği bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde daralma dönüşüm prensibi, reel değerli ve reel değişkenli fonksiyonlar için Newton metodu verildi.

İkinci bölümde lineer olmayan operatörlerin Frechet ve Gato anlamında türevleri, Riemann integrali ve ortalama değer teoremi açıklandı.

Üçüncü bölümde Banach uzaylarında lineer olmayan operatörlü denklemler için Newton metodu ifade edildi.

Dördüncü bölümde Newton metodunun lineer olmayan cebirsel denklem sistemlerine, integral denklemlere ve sınır değer problemlerine uygulaması, örnek problemler ve çözümleri verildi.

NEWTON METHOD FOR NONLINEAR EQUATIONS OF OPERATORS

SUMMARY

Key words: Nonlinear, Operator, Iteration process, Newton method.

This thesis is about Newton method for nonlinear equations of operators was explained in four sections.

In the first section, contraction mapping theorem and Newton method for the functions with real variables were given.

In the second section, Frechet and Gato derivatives, Reimann integral of operators and the mean value theorem were explained.

In the third section, Newton method for nonlinear equations of operators in Banach spaces was given.

In the fourth section, application of Newton method to the nonlinear algebraic system equations, integral equations and boundary value problems were given in detail and some exercises were solved about this section.

BÖLÜM 1. TEĞETLER YÖNTEMİ VE DARALMA DÖNÜŞÜM PRENSİBİ

1.1. Giriş

X bir Banach uzayı ve $F : X \rightarrow X$ bir operatör olmak üzere

$$F(x) = 0 \tag{1.1}$$

operatör denklemini verilmiş olsun. Bu denklem

$$x = Ax$$

olarak yazılabilir.

Tanım 1.1: Eğer $x^* = Ax^*$ olacak şekilde bir $x^* \in X$ vektörü bulunabiliyorsa bu vektöre A operatörünün sabit noktası denir.

$A : X \rightarrow X$ operatörünün bir sabit noktasının varlığı aynı zamanda (1.1) denkleminin çözümünün varlığı demektir. Ardışık yaklaşımlar metodu (1.1) şeklindeki denklemlerin çözümünde kullanılan metotlardan biridir. Bu yöntemle göre herhangi bir $x_0 \in X$ vektörü başlangıç yaklaşım olmak üzere terimleri,

$$x_n = Ax_n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.2}$$

şeklinde olan (x_n) çözümler dizisi oluşturulur. Eğer $x^* \in X$ vektörü (x_n) dizisinin bir limiti ve A operatörü bu noktada sürekli ise x^* limiti A operatörünün sabit

noktası dolayısı ile (1.1) denkleminin çözümüdür. Buna göre (x_n) dizisinin yakınsaklık koşulları (1.1) denkleminin çözümünün varlık koşulları olur.

Ardışık yaklaşımlar ile alakalı ilk teorik sonuçlar Polonyalı matematikçi Stefan Banach tarafından elde edilmiş olup bu teorem “Banach Sabit Nokta Teoremi” veya “daralma dönüşüm prensibi” olarak bilinir.

1.2. Daralma Dönüşüm Prensibi

Tanım 1.2: X Banach uzayının D cümlesinde tanımlı bir $A: D \rightarrow X$ operatörü verilmiş olsun. Eğer $\forall x, y \in D$ için

$$\|A(x) - A(y)\| \leq \alpha \|x - y\| \quad (1.3)$$

olacak şekilde bir $0 < \alpha < 1$ sayısı varsa $A: X \rightarrow X$ operatörüne daralma dönüşüm operatörü denir. (1.3) koşulu Lipschitz koşuludur. (1.3) ifadesindeki α sayısına daralma katsayısı denir.

Teorem 1.1 (*Daralma Dönüşüm Prensibi*): D kapalı bir cümle olsun, $A: X \rightarrow X$ operatörü D 'yi D 'ye çeviren bir operatör olsun: $A(D) \subset D$. Bu durumda A operatörünün D 'de tek bir sabit x^* noktası vardır. Başka bir ifade ile (1.1) denkleminin tek bir $x^* \in D$ çözümü vardır, bu çözüm (1.2) formülü ile tanımlanmış (x_n) dizisinin limiti şeklinde bulunabilir. Burada x_0 , D 'nin herhangi bir vektörüdür. (x_n) dizisinin x^* çözümüne yaklaşma hızı,

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\| \quad (1.4)$$

eşitsizliği ile verilir.

İspat: $x_{n+1} = Ax_n$, $x_n = Ax_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$ olduğundan (1.3)'e göre

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leq \alpha \|x_n - x_{n-1}\|$$

olur. Benzer eşitsizlikler ardı ardına kullanılarak

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha^n \|x_1 - x_0\|$$

eşitsizliği elde edilir. Buna göre $\forall \rho, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|x_{n+\rho} - x_n\| &\leq \|x_{n+\rho} - x_{n+\rho-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq (\alpha^{n+\rho-1} + \dots + \alpha^n) \\ \|x_{n+\rho} - x_n\| &\leq \frac{1 - \alpha^\rho}{1 - \alpha} \alpha^n \|x_1 - x_0\| \end{aligned} \quad (1.5)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ iken $\lim \alpha^n = 0$ olduğundan son eşitsizliğe göre (x_n) dizisi Cauchy dizisidir. X uzayı tam olduğuna göre öyle $x^* \in X$ vektörü vardır ki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ olur. Her $n = 0, 1, \dots$ için $x_n \in D$ ve D kapalı olduğundan $x^* \in D$ olur.

(1.3)'e göre

$$\|x_{n+1} - Ax^*\| = \|Ax_n - Ax^*\| \leq \alpha \|x_n - x^*\|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0$$

olduğuna göre $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - Ax^*\| = 0$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = Ax^*$ 'dir.

Buradan $x^* = Ax^*$ yani $x^* \in D$ vektörü (1.1) denkleminin çözümüdür.

Bunun tek bir çözüm olduğunu gösterelim.

Buna göre $y^* \in D$ vektörü (1.1) denkleminin bir diğer çözümü olsun. Bu halde

$$\|x^* - y^*\| = \|Ax^* - Ay^*\| \leq \alpha \|x^* - y^*\|$$

olduğundan $\|x^* - y^*\| = 0$ ve dolayısı ile $x^* = y^*$ 'dir. (1.5) eşitsizliğinde $\rho \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse (1.4) eşitsizliği elde edilir.

Genel anlamda operatörler için ispat ettiğimiz daralma dönüşüm prensibini özel olarak reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar için de ispatı yukarıda verilen ispata benzerdir, yalnızca burada $A(x)$ operatörü yerine $\varphi(x)$ fonksiyonunu, $D \subset X$ cümlesi yerine R 'nin bir alt cümlesi olan $[a, b]$ kapalı aralığı alınarak, aşağıdaki gibi yeni bir tanım yapılabilir.

$\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ dönüşümü, $q < 1$ ve $\forall x, y \in [a, b]$ için

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y| \quad (1.6)$$

(Lipschitz) koşulunu sağlıyorsa $\varphi(x)$, $[a, b]$ kapalı aralığında bir daralma dönüşümü olur. Buna göre $\varphi(x)$ 'in $[a, b]$ 'de tek bir $x^* = \varphi(x^*)$ eşitliğini sağlayan çözümü vardır. Bu çözüm; terimleri,

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (1.7)$$

şeklinde verilmiş olan (x_n) (iterasyon) dizisinin limiti olarak bulunur. (x_n) dizisinin x^* köküne yaklaşma hızı,

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n |x_0 - x_1|}{1 - q} \quad (1.8)$$

eşitsizliği ile verilir. $\varphi(x)$ için daralma dönüşümü prensibinin ispatı $A(x)$ operatörü için olana benzerdir, bu nedenle burada onun ispatı verilmemiştir.

1.3. Newton Metodu (Teğetler Yöntemi)

Kabul edelim ki $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için $f'(x)$ ve $f''(x)$ türevleri var ve sürekli olup sıfırdan farklıdır. Öyle $x_0 \in [a, b]$ var ki

$f'(x_0), f''(x_0) > 0$ olsun. Yani $f'(x_0)$ ve $f''(x_0)$ aynı işaretlidirler, buna göre $[a, b]$ kapalı aralığında

$$f(x) = 0 \quad (1.9)$$

denkleminin tek bir çözümü vardır.

İspatı:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (1.10)$$

fonksiyonu için ardışık yaklaşımları

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

şeklinde kurulur, $\varphi'(x)$ türevi

$$\varphi'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

olduğundan $\varphi'(x^*) = 0$ olur ve dolayısı ile $\varphi'(x)$ sürekli olduğundan x^* çözümünün öyle bir komşuluğu vardır ki, bu komşuluktaki bütün x' ler için $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ olur. Buna göre de (1.11) formülü ile verilen (x_n) dizisi x^* çözümüne yakınsar. Bu metodun hatası şöyle formüle edilir. Önce $f(x)$ fonksiyonu x^* 'in komşuluğunda Taylor serisine açılır. Buna göre

$$f(x^*) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x^* - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x_{n-1})^2$$

Burada ξ , x^* ve x_n arasında bir noktadır. $f(x^*) = 0$ olduğundan

$$x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} - x^* = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_{n-1})} (x^* - x_{n-1})^2$$

olur. (1.11) formülü dikkate alındığında

$$x_n - x^* = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_{n-1})} (x^* - x_{n-1})^2$$

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_1}{2M_2} |x_{n-1} - x^*|^2 \quad (1.12)$$

olur. Burada $M_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, $M_2 = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$ dir.

Eğer x_0 başlangıç yaklaşımı için $\frac{M_1}{2M_2} |x_0 - x^*| \leq c < 1$

koşulu sağlanır ise, o zaman teğetler yöntemi daha hızlı yakınsar. Gerçekten de bu durumda (1.12) eşitsizliğinden aşağıdaki

$$|x_n - x^*| \leq \frac{2M_2}{M_1} c^{2^n}$$

eşitsizliği elde edilir.

Problem 1.1: $f(x) = e^x - 1.5 - \tan^{-1} x$ fonksiyonu için $f(x) = 0$ denkleminin $x_0 = -7$ noktası civarındaki çözümünü Newton yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

formülü kullanılacaktır. Bunun için $f'(x)$ hesaplanacak olursa

$$f'(x) = e^x - (1 + x^2)^{-1}$$

çıkar. Başlangıç noktası yerine koyulursa

$$f(x_0) = -0.702 \times 10^{-1}$$

bulunur. $f'(x_0)$ ise

$$f'(x_0) = -0.0190881$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

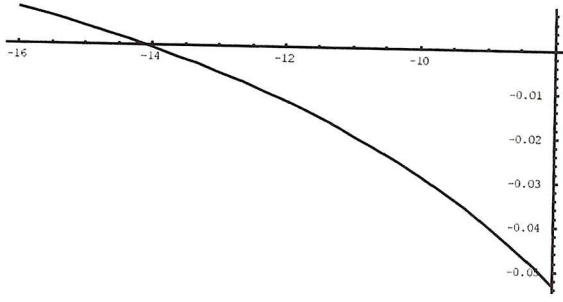
$$x_1 = -10.67709617664001399296984386$$

bulunur. Bu nokta fonksiyonda yerine koyulursa

$$f(x_1) = -0.226 \times 10^{-1}$$

çıkar. Gerekli işlemleri yapıldığında aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

$x_2 = -13.27916737563271290859786319$	$f(x_2) = -0.437 \times 10^{-2}$
$x_3 = -14.05365585426923873474831753$	$f(x_3) = -0.239 \times 10^{-3}$
$x_4 = -14.10110995686641347616312706$	$f(x_4) = -0.800 \times 10^{-6}$
$x_5 = -14.10126977093941594621579506$	$f(x_5) = -0.901 \times 10^{-11}$
$x_6 = -14.10126977273996842508300314$	$f(x_6) = -0.114 \times 10^{-20}$
$x_7 = -14.10126977273996842531155122$	$f(x_7) = -0.000$
$x_8 = -14.10126977273996842531155122$	$f(x_8) = -0.000$



Grafik 1. $f(x) = e^x - 1.5 - \tan^{-1} x$ fonksiyonunun köküne $x_0 = -7$ noktamızdan yaklaşım grafiği

BÖLÜM 2. LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERİN TÜREVLERİ

2.1. Giriş

Lineer olmayan fonksiyonel denklemlerin incelenmesi yerel olarak lineer operatörlerle yaklaşımları yardımıyla yapılabilir. Bu nedenle normlu uzaylarda lineer olmayan operatörlerin diferensiyel hesabının araştırılması önem taşımaktadır.

Bu bölümde lineer olmayan fonksiyonel analize kısa bir giriş olarak lineer olmayan operatörlerin Freshe ve Gato türevleri tanımlanacak ve operatörlerin Riemann anlamında integralinden bahsedilecektir.

Analizden bilindiği gibi, bir $f : (a, b) \rightarrow R$ fonksiyonunun bir $x_0 \in (a, b)$ noktasında türeve sahip olması

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad (2.1)$$

eşitliğini sağlayan bir $f'(x_0) \in R$ sayısının varlığı demektir. Fakat bu eşitliğin $f : R^n \rightarrow R^m$ veya genel olarak X ve Y Banach uzayları olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ şeklindeki operatörler için bir anlamı yoktur. Ancak uygun bir geçiş ile bu kavram operatörler içinde genelleştirilebilir.

(2.1) eşitliğinden yola çıkarak $\lambda(h) = f'(x_0)h$ şeklinde tanımlanan $\lambda : R \rightarrow R$ (h 'a göre) lineer dönüşümü için (2.1) eşitliği

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda(h)}{h} = 0 \quad (2.2)$$

eşitliğine denk olur. $\lambda : R \rightarrow R$ lineer dönüşümü göz önünde tutularak türevin yeni bir tanımı yapılır, şöyle ki; bir $f : (a, b) \rightarrow R$ fonksiyonunun bir $x_0 \in (a, b)$ noktasında türeve sahip olması demek (2.2) eşitliğini sağlayacak şekilde bir λ lineer dönüşümünün var olması demektir.

Bu tanıma göre $f : (a, b) \rightarrow R$ fonksiyonunun bir $x_0 \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olması demek, $x = x_0 + h$ ve $w(x) = f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)$ olmak üzere

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + w(x), \quad x \in (a, b)$$

olacak şekilde bir $\lambda : R \rightarrow R$ (h 'a göre) lineer dönüşümünün ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{w(x)}{x - x_0} = 0$$

koşulunu sağlayan bir $w : (a, b) \rightarrow R$ fonksiyonunun var olması demektir. Bu şekilde bir tanım X ve Y Banach uzayları olması halinde $F : X \rightarrow Y$ operatörü için de genelleştirilebilir.

2.2. Lineer Olmayan Operatörlerin Frechet Türevi

Tanım 2.1: X ve Y Banach uzayları ve $D \subset X$ olmak üzere lineer olmayan $F : D \rightarrow Y$ operatörü verilmiş olsun. Eğer $\forall x \in D$ için

$$F(x) = F(x_0) + A(x - x_0) + w(x - x_0) \quad (2.3)$$

koşulunu sağlayan $A \in L(X, Y)$ operatörü ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|w(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \quad (2.4)$$

olacak şekilde $W : D \rightarrow Y$ operatörü varsa, $F(x)$ operatörüne $x_0 \in \overset{0}{D}$ noktasında *Frechet* türevlenebilir (*F*- türevlenebilir) denir. (2.3) ifadesindeki A operatörüne $F(x)$ operatörünün x_0 noktasında *Frechet* türevi denir $F'(x_0)$ veya $DF(x_0)$ şeklinde gösterilir. $x - x_0 = h$ alınırsa (2.3) ve (2.4) eşitlikleri sırasıyla

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + w(h) \quad (2.5)$$

ve

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.2: Eğer $F(x) : D \subset X \rightarrow Y$ operatörü $x \in \overset{0}{D}$ noktasında *F*- türevlenebilirse

$$dF(x_0, h) = F'(x_0)h$$

ifadesine $F(x)$ operatörünün x_0 noktasında h artımına uygun *Frechet* diferensiyeli (*F*- diferensiyeli) denir.

Böylece $dF(x_0, h) = F$ -diferensiyeli, h elemanının $F'(x_0)$ lineer operatörü altındaki görüntüsüdür. Eğer, $F(x)$ operatörü x_0 noktasında *F*- türevlenebilirse, $F(x)$ x_0 noktasında süreklidir. Gerçekten de

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x - x_0) = 0$$

olduğundan (2.3)'e göre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$$

olur.

Eğer $A \in L(X, Y)$ olmak üzere $F(x) = Ax$ ise $F(x)$ operatörü $\forall x_0 \in X$ noktasında F - türevlenebilirdir ve onun *Frechet* türevi;

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = A(x_0 + h) - A(x_0) = Ah$$

olduğu elde edilir. Türev almada bazı genel kurallar dikkate alınır.

1) $D \subset X$ açık kümesinde sabit bir $F : X \rightarrow Y$ operatörü için D üzerinde $F'(x) = \theta$ olur.

2) $F : X \rightarrow Y$ ve $G : X \rightarrow Y$, $x_0 \in X$ noktasında F - türevlenebilir operatörler ve α, β birer skaler olmak üzere

$$(\alpha F + \beta G)'(x) = \alpha F'(x_0) + \beta G'(x_0) \text{ dır.}$$

3) X, Y ve Z Banach uzayları $G(z) : Z \rightarrow X$ operatörü $z_0 \in Z$ noktasında, $F(x) : X \rightarrow Y$ operatörü $x_0 = G(z_0) \in X$ noktasında F - türevlenebilir ise $(F \circ G)(z) = F[G(z)] : Z \rightarrow Y$ operatörü z_0 noktasında F - türevlenebilir ve onun *Frechet* türevi

$$(F \circ G)'(z_0) = F'(x_0)G'(z_0)$$

olur, bu kural zincir kuralı olarak adlandırılır.

Örnek 2.1: $D \subset R^n$ bir açık küme ve

$$F : D \rightarrow R^m, f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$$

operatörü verilmiş olsun. Burada f_1, \dots, f_m fonksiyonları D 'den R 'ye tanımlı reel değerli fonksiyonlardır ve bu fonksiyonların, D üzerinde sürekli $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, i = 1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, n$ kısmi türevleri var olsun. Bu durumda D 'ye ait $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $x + h = (x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n)$ noktaları için

$$\begin{aligned} f_i(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f_i(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= a_{i1}h_1 + \dots + a_{in}h_n + w_i(h), i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.7)$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} w(h) &= (w_1(h), \dots, w_m(h)), h = (h_1, \dots, h_n) \\ \|w\| &= \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_m^2}, \|h\| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2} \end{aligned}$$

olmak üzere $\|h\| \rightarrow 0$ iken $\|w(h)\| = o(\|h\|)$ dir.

$$A = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right), i = 1, \dots, m \text{ ve } j = 1, \dots, n$$

matrisine $f : D \rightarrow R^m$ operatörünün Jakobi matrisi veya fonksiyonel matris denir.

$A \in L(R^n, R^m)$ operatörü $f : D \rightarrow R^m$ operatörünün $x \in D$ noktasında Frechet türevidir, yani $A = f'(x)$. Analizden bilindiği gibi $f : D \rightarrow R^m$ operatörü $x \in D$

noktasında diferensiyellenebilirse bu noktada $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ kısmi türevleri vardır (2.7)'deki

a_{ij} 'lar

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}, i = 1, \dots, m \quad \text{ve} \quad j = 1, \dots, n$$

gibi tanımlanır. Eğer

$$g : \Delta \subset R^p \rightarrow R^n, g(z) = (g_1(z), \dots, g_n(z)), z = (z_1, \dots, z_p) \in \Delta$$

operatörü $z^0 = (z_1^0, \dots, z_p^0) \in \Delta$ noktasında, $f : D \subset R^n \rightarrow R^m$ operatörü $x^0 = g(z^0) \in D (x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)), x_k^0 = g_k(z_1^0, \dots, z_p^0), k = 1, 2, \dots, n$ noktasında F -türevlenebilirse

$$g'(z^0) = \left(\frac{\partial g_j(z^0)}{\partial z_k} \right), f'(x^0) = \left(\frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_j} \right)$$

$$j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, p; i = 1, \dots, m$$

olur. Bu durumda $(f \circ g)z = f(g(z)) : \Delta \rightarrow R^m$ operatörü z^0 noktasında F -türevlenebilir ve onun *Frechet* türevi

$$(f \circ g)'(z^0) = f'(x^0)g'(z^0) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_j} \frac{\partial g_j(z^0)}{\partial z_k} \right) \in L(R^p, R^m)$$

operatörü olur.

Örnek 2.2: $D = [a, b]^2 \times R$ ve $f(x, s, u) : D \rightarrow R$ fonksiyonu ve onun $f(x, s, u)$ kısmi türevi D üzerinde sürekli olsun. Bu durumda

$$F(u)(x) = u(x) - \int_a^b f(x, s, u(s)) ds \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanan $F : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ operatörünün $\forall u_0 \in C[a, b]$ noktasında *Frechet* türevine sahip olduğunu ve

$$F'(u_0)h = h(x) - \int_a^b f_u(x, s, u_0(s))h(s) ds \quad (2.9)$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: Her bir $h(x) \in C[a, b]$ için

$$F(u_0 + h) - F(u_0) = h(x) - \int_a^b f_u(x, s, u_0(s))h(s) ds - w(u_0, h) \quad (2.10)$$

dir. Burada $0 \leq \theta \leq 1$ olmak üzere

$$w(u_0, h)(x) = - \int_a^b \left\{ \int_0^1 [f_u(x, s, u_0(s) + \theta h(s)) - f_u(x, s, u_0(s))] h(s) d\theta \right\} ds \quad (2.11)$$

olduğu açıktır. $r > 0$ olmak üzere R^3 'ün kapalı ve sınırlı

$$T_r = \{(x, s, u) : x, s \in [a, b], u_0(s) - r \leq u \leq u_0(s) + r\}$$

kümesi dikkate alınır. $f_u(x, s, u)$ fonksiyonu T_r üzerinde düzgün sürekli olduğundan

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki keyfi $(x_1, s_1, u_1), (x_2, s_2, u_2) \in T_r$ için

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (s_1 - s_2)^2 + (u_1 - u_2)^2} < \delta \Rightarrow |f_u(x_1, s_1, u_1) - f_u(x_2, s_2, u_2)| < \varepsilon$$

olur. (2.10) ve (2.11) ifadelerinde $\|h\|_\infty < \delta$ olsun. Bu durumda her bir $x, s \in [a, b]$ ve

$\theta \in [0, 1]$ için $(x, s, u_0(s) + \theta h(s)) \in T_r$ olur.

$$x_1 = x_2 = x, \quad s_1 = s_2 = s, \quad u_1 = u_0(s) + \theta h(s), \quad u_2 = u_0(s)$$

denirse $\forall x, s \in [a, b]$ için $\|h\|_\infty < \delta$ olacağından

$$\|w(u_0, h)\|_\infty \leq \max \left\{ \int_a^b \left[\int_0^1 |f(x, s, u_0(s) + \theta h(s)) - f_u(x, s, u_0(s))| h(s) d\theta \right] ds : x \in [a, b] \right\} < \varepsilon \|h\|_\infty$$

elde edilir. Dolayısı ile $\|h\|_\infty \rightarrow 0$ iken $\|w(u_0, h)\| = o(\|h\|_\infty)$ olur. Buradan (2.8) ifadesiyle tanımlı F operatörünün $u_0 \in C[a, b]$ noktasında F - türevlenebilir olduğu ve (2.9) ifadesinin doğru olduğu görülür.

2.3. F – Türevlenebilir Operatörler için Riemann Anlamında İntegrallenebilme ve Ortalama Değer Teoremi

Tanım 2.3: X Banach uzayı ve $f : [0, 1] \rightarrow X$ fonksiyonu verilmiş olsun, $[0, 1]$ aralığını

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$$

özelliğini sağlayan t_0, t_1, \dots, t_n noktaları yardımıyla n tane $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, \dots, n$) alt aralığa bölünsün. Buna göre

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

kümesine $[0, 1]$ aralığının bir parçalanması denilir.

$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $\|P\| = \max\{\Delta t_k : k = 1, \dots, n\}$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, n$ olmak üzere

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \Delta t_k$$

limiti sonluysa, f fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir denir ve bu limit

$$\int_0^1 f(t) dt$$

ile gösterilir.

X ve Y Banach uzayları ve $([x_0, x_0 + \Delta x] = \{x \in X : x = x_0 + t\Delta x, t \in [0,1]\})$ olmak üzere

$$A : [x_0, x_0 + \Delta x] \rightarrow L(X, Y)$$

operatörü verildiğinde tanıma göre

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} A(x) dx = \int_0^1 A(x_0 + t\Delta x) \Delta x dt = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A(x_0 + \tau_k \Delta x) \Delta x \Delta t_k$$

dir. A sürekli operatör ise yukarıda ifade edilen sonlu toplam dolayısı ile

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} A(x) dx$$

integrali mevcuttur. Özel olarak $A = F'$ ise burada $F, D \subset X$ açık kümesini Y 'ye dönüştüren ve $[x_0, x_0 + \Delta x] \subset D$ kapalı aralığında sürekli F - türevlenebilir operatör ise kolayca gösterilebilir ki integral hesabının temel teoreminin (Newton-Leibnitz formülünün) bir genelleştirilmesi olan

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} F'(x) dx = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \quad (2.12)$$

formülü doğrudur.

Teorem 2.1: (Ortalama Değer Teoremi): $F : X \rightarrow Y$ operatörü dışbükey bir $D \subset X$ kümesinde sürekli F - türevlenebilir olsun. Bu durumda her bir $x_0, x \in D$ noktaları için

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^1 F'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) d\theta \quad (2.13)$$

Lagrange formülü doğrudur.

İspat: $x = G(\theta) = x_0 + \theta(x - x_0), 0 \leq \theta \leq 1$ ($G : [0,1] \rightarrow D$) olmak üzere $F \circ G : [0,1] \rightarrow Y$ operatörü göz önüne alınsın, burada $G'(\theta) = x - x_0$ olacağından zincir kuralı dolayısı ile

$$(F \circ G)'(\theta) = F'(G(\theta)) \cdot G'(\theta)$$

veya

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} F(x_0 + \theta(x - x_0)) &= F'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) \\ &= F'(x_0 + \theta(x - x_0)) d(x_0 + \theta(x - x_0)) \end{aligned}$$

olur. Buradan (2.12) ifadesine göre

$$\begin{aligned} \int_0^1 F'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) d\theta &= \int_0^1 F'(x_0 + \theta(x - x_0)) d(x_0 + \theta(x - x_0)) = \\ &= \int_{x_0}^x F'(t) dt = F(x) - F(x_0) \end{aligned}$$

olduğu ve dolayısıyla (2.13) ifadesinin doğruluğu elde edilir.

Teorem 2.2: $F : X \rightarrow Y$ dışbükey bir $E \subset X$ kümesinde F - türevlenebilir bir operatör ve E üzerinde

$$\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

olacak şekilde bir $L > 0$ pozitif sayısı var olsun. Bu durumda herhangi $x_1, x_2 \in E$ noktaları için

$$\|F(x_1) - F(x_2) - F'(x_2)(x_1 - x_2)\| \leq \frac{L}{2}\|x_1 - x_2\|^2 \quad (2.14)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: Önce (2.13) Lagrange formülünden, sonra $F'(x)$ Frechet türevi için Lipschitz koşulundan herhangi $x_1, x_2 \in E$ için

$$\begin{aligned} & \|F(x_1) - F(x_2) - F'(x_2)(x_1 - x_2)\| = \\ & = \left\| \int_0^1 [F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2)) - F'(x_2)] d\theta(x_1 - x_2) \right\| \\ & \leq \int_0^1 \|F'(x_2 + \theta(x_1 - x_2)) - F'(x_2)\| d\theta \|x_1 - x_2\| \\ & \leq L \int_0^1 \theta d\theta \|x_1 - x_2\|^2 = \frac{L}{2} \|x_1 - x_2\|^2 \end{aligned}$$

olduğu ve dolayısıyla (2.14) eşitsizliğinin doğru olduğu görülür.

2.4. Linear Olmayan Operatörlerin Gato Türevi

X ve Y Banach uzayları olmak üzere $x_0 \in X$ noktasının S komşuluğunda tanımlı

$F : S \rightarrow Y$ operatörü verilmiş olsun.

Tanım 2.4: Eğer $\forall h \in X$ için

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} \quad (2.15)$$

limiti $\delta F(x_0, h)$ ile gösterilir ve bu limit varsa bu limite F operatörünün x_0 noktasında Lagrange anlamında birinci varyasyonu denir. Burada yaklaşım Y 'nin normu anlamındadır.

Genellikle $DF(x_0, h)$ birinci varyasyonu h 'a göre lineer olmayan bir operatördür.

Tanım 2.5: $A \in L(X, Y)$ olmak üzere F operatörünün $x_0 \in X$ noktasında $\delta F(x_0, h) = Ah$ şeklinde birinci varyasyonu varsa $F : X \rightarrow Y$ operatörü x_0 noktasında Gato türevlenebilirdir (G - türevlenebilir) denir. A operatörüne F operatörünün Gato türevi (G - türevi) denir ve $A = F'(x_0)$ şeklinde yazılır. Bu durumda

$$\delta F(x_0, h) = F'(x_0)h \quad (2.16)$$

birinci varyasyonuna F operatörünün x_0 noktasında Gato diferensiyeli denir. Eğer $F : X \rightarrow Y$ ve $H : X \rightarrow Y$ operatörleri $x_0 \in X$ noktasında G - türevlenebilir ise herhangi $\alpha, \beta \in R$ sayıları için $\alpha F + \beta H$ operatörü x_0 noktasında G - türevlenebilirdir ve bu türev

$$(\alpha F + \beta H)'(x_0) = \alpha F'(x_0) + \beta H'(x_0)$$

şeklinde olur.

$F : X \rightarrow Y$ operatörünün $x_0 \in X$ noktasında F - türevlenebilir olmasından x_0 noktasında G - türevlenebilir olduğu açıktır. Gerçekten de F operatörünün x_0 noktasında F - türevlenebilir olması durumunda yeteri kadar küçük h için

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + w(x_0, h)$$

olur. Burada $\|h\| \rightarrow 0$ iken $\|w(x_0, h)\| = o(\|h\|)$ ve $F'(x_0), F$ operatörünün x_0 noktasında *Frechet* türevidir. Şu halde $0 < |t| < 1$ için

$$F(x_0 + th) - F(x_0) = F'(x_0)th + w(x_0, th)$$

ve burada $t \rightarrow 0$ iken $\|w(x_0, th)\| = o(\|h\|)$ dır. Son eşitlikten ise

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = F'(x_0)h$$

olduğu elde edilir. (2.15) ve (2.16) dolayısıyla F operatörü x_0 noktasında *Gato* türevlenebilir ve onun x_0 noktasında *Gato* türevi $F'(x_0)$ olur.

Örnek 2.3:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ ise} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ operatörü $(0, 0)$ noktasında *G*- türevlenebilirdir fakat *F*- türevlenebilir değildir.

Gerçekten de f fonksiyonunun \mathbb{R}^2 'de sürekli olduğu açıktır. Herhangi $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(h_1, h_2)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t_2 h_1^3 h_2}{t^2 h_1^4 + h_2^2} = 0$$

olduğundan f fonksiyonu $(0,0)$ noktasında *Gato* türevlenebilir ve $f'(0,0)=0$ olur.

Fakat $\left(\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)$ olduğundan ve

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0)}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{h_1^3 h_2}{(h_1^4 + h_2^2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

limiti var olmadığından f fonksiyonu $(0,0)$ noktasında *Frechet* türevlenebilir değildir.

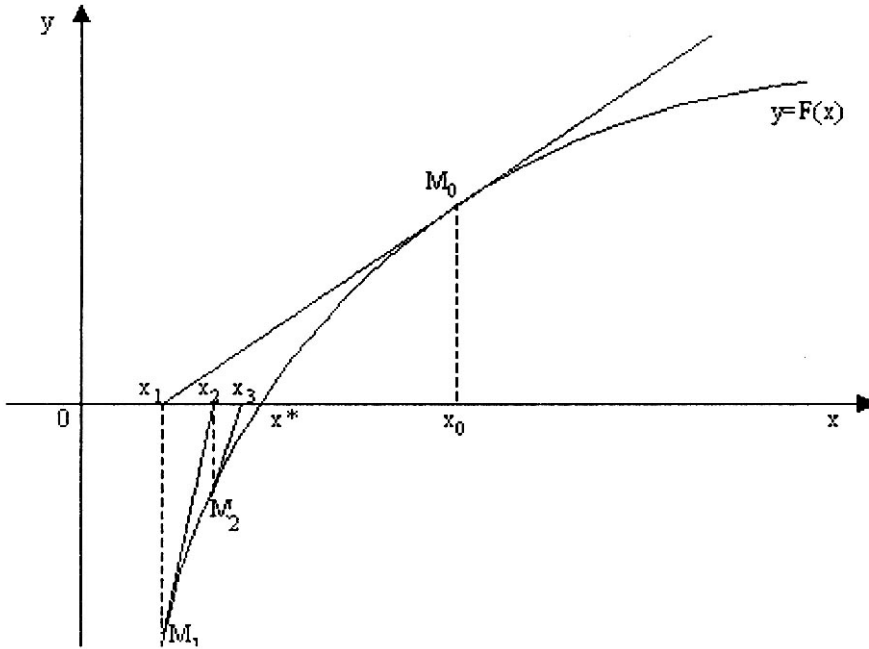
BÖLÜM 3. NEWTON METODU

3.1. Giriş

Lineer olmayan fonksiyonel (cebirsel, diferensiyel, integral vb.) denklemlerin incelenmesinde en çok kullanılan metotlardan biri de Newton metodudur. İlk kez bu metod reel değişkenli ve reel değerli $F : R \rightarrow R$ fonksiyonu

$$F(x) = 0 \quad (3.1)$$

şeklindeki denklemler için Newton tarafından ileri sürülmüş ve Banach uzaylarında verilen operatörlü denklemler için L.V. Kantoroviç tarafından genelleştirilmiştir.



Şekil 3.1. $y = F(x)$ denklemini ve ona teğet olan doğruların grafiği

Newton metodunu (3.1) şeklinde olan skaler denklemler ($F : R \rightarrow R$ halinde) için tanımlayalım. (3.1) denkleminin x^* kökü komşuluğunda F kesin artan ve dışbükey bir fonksiyon olsun (Şekil 1). x^* köküne yeteri kadar yakın olan x_0 başlangıç yaklaşımı seçerek $M_0(x_0, F(x_0))$ noktasında $y = F(x)$ eğrisine çizilen $y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$ teğet denklemi yazılır. $F'(x_0) \neq 0$ olduğunda bu doğru ile x ekseninin kesiştiği nokta $x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$ olur. Sonra $M_1(x_1, F(x_1))$ noktasında $y = F(x)$ eğrisine çizilen teğet denklemi

$$y = F(x_1) + F'(x_1)(x - x_1)$$

yazılır ve $F'(x_1) \neq 0$ olduğunda bu doğrunun x eksenini kesiştiği

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}$$

noktası bulunur. $F'(x_{n-1}) \neq 0, n = 2, 3, \dots$ olduğunda bu işlem benzer şekilde devam ettirildiğinde

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}, n = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanan $(x_n) \subset R$ dizisi kurulmuş olur. $|x_0 - x^*|$ yeteri kadar küçük olduğunda (x_n) dizisi x^* köküne yüksek hızla yaklaşır. Skaler denklemler için verilen bu yönteme ((3.2) ardışık yaklaşımlarına) Newton teğetler metodu adı verilir.

3.2. Banach Uzaylarında Lineer Olmayan Operatörlü Denklemler İçin Newton Metodu

X ve Y Banach uzayları ve $F : X \rightarrow Y$ lineer olmayan bir operatör olmak üzere

$$F(x) = 0 \quad (3.3)$$

şeklindeki denklem için F operatörü $r > 0$ yarıçaplı $S_r(x_0)$ yuvarında ($x_0 \in X$ olarak (3.3) denkleminin aranan x^* çözümü için başlangıç yaklaşım olarak kabul edilir) F - türevlenebilir olmak üzere sonraki yaklaşımların

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1} F(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

formülleri (ardışık yaklaşımlar işlemi) yardımı ile hesaplanır.

Sonsuz boyutlu uzaylar halinde $[F'(x_{n-1})]^{-1}$ ters operatörlerin bulunması, yeteri kadar karmaşık bir problem olduğundan (3.4) formülleri yardımıyla bulunan (x_n) dizisi yerine terimleri

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_0)]^{-1} F(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

biçiminde tanımlanan (x_n) dizisinin göz önüne alınması daha uygundur. (3.5) dizisini bulmak için $[F'(\cdot)]^{-1}$ ters operatörü her adımda değil, yalnız x argümanının tek bir $x = x_0$ değerinde bulunur. (3.5) dizisi (3.4) dizisiyle mukayesede daha yavaş hızla yaklaşmasına rağmen hesaplama açısına göre (3.5) algoritmasında kullanılması daha faydalı olur. Kaynaklarda (3.4) yöntemine esas Newton metodu, (3.5) yöntemine ise basitleştirilmiş Newton metodu (Newton ardışık yaklaşımlar işlemi) adı verilir.

Şimdi (3.4) ve (3.5) Newton ardışık yaklaşımlar işlemlerinin yakınsaklığı ile ilgili bazı teoremler ispatları ile verilecektir.

Teorem 3.1: X ve Y Banach uzayları olmak üzere $F : X \rightarrow Y$ operatörü aşağıdaki koşulları sağlasın:

1) $r > 0$ ve $x_0 \in X$ olmak üzere F operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında *Frechet* türevlenebilirdir.

2) $F'(x)$ türevi $S_r(x_0)$ yuvarında $\ell > 0$ katsayısı ile Lipschitz koşulunu sağlar.

3) $F'(x) : S_r(x_0) \rightarrow L(X, Y)$ operatörünün sürekli tersi var ve

$$\forall x \in S_r(x_0)$$

için

$$\|[F'(x)]^{-1}\| \leq m \quad (3.6)$$

olacak şekilde bir $m > 0$ sayısı ve

$$4) \|[F(x_0)]\| \leq \eta$$

olacak şekilde bir $\eta > 0$ sayısı var olsun. Bu durumda eğer

$$q = \frac{1}{2} m^2 \ell \eta < 1$$

ve

$$r' = m\eta \sum_{k=0}^{\infty} q^{2^{k-1}} < r \quad (3.7)$$

ise (3.3) denkleminin (3.4) Newton ardışık yaklaşımlarının yakınsadığı bir

$$x^* \in \overline{S_r(x_0)}$$

çözümü vardır ve terimleri (3.4) biçiminde tanımlanan (x_n) dizisinin x^* 'a yaklaşma hızı

$$\|x_n - x^*\| \leq m\eta \frac{q^{2^{n-1}}}{1 - q^{2^n}}$$

eşitsizliği yardımıyla verilir.

İspat: Teorem, Tümevarım yöntemi yardımıyla ispatlanır. İşlemlerde kolaylık sağlanması için

$$\begin{aligned} r(x) &= [F'(x)]^{-1}, \quad r_n = r(x_n), \\ F_n &= F(x_n), \\ F'_n &= F'(x_n) \end{aligned}$$

şeklinde notasyonlar kullanılır. (3.4) Newton ardışık yaklaşımları bu notasyonlar yardımıyla

$$x_{n+1} = x_n - r_n F_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

şeklinde yazılabilir.

Önce $(x_1) \in \overline{S_{r'}(x_0)}$ olduğu gösterilir. $x_1 - x_0 = r_0 F_0$ olduğundan $\|x_1 - x_0\| \leq \|r_0\| \|F_0\| \leq m\eta$ ve (3.7) dolayısıyla $x_1 \in \overline{S_{r'}(x_0)}$ olduğu elde edilir.

$$F_0 + F'_0(x_1 - x_0) = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1 - F_0 - F'_0(x_1 - x_0) \\ &= F(x_1) - F(x_0) - F'(x_0)(x_1 - x_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan (2.14)'e dayanarak

$$\|F_1\| \leq \frac{1}{2} \ell \|x_1 - x_0\|^2$$

elde edilir. Herhangi $n > 1$ doğal sayısı için $x_n \in \overline{S_{r'}(x_0)}$ olduğu ve

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq m\eta q^{2^{n-1}}, \quad (3.9)$$

$$\|F_n\| \leq \frac{1}{2} \ell \|x_n - x_{n-1}\|^2 \quad (3.10)$$

eşitsizliklerinin doğruluğu varsayalım. Şimdi $x_{n+1} \in \overline{S_{r'}(x_0)}$ olduğunu ve

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq m\eta q^{2^n}, \quad (3.11)$$

$$\|F_{n+1}\| \leq \frac{1}{2} \ell \|x_{n+1} - x_n\|^2 \quad (3.12)$$

eşitsizliklerinin doğruluğu gösterilsin. (3.8), (3.6), (3.10) ve (3.9) dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|r_n F_n\| \\ &\leq m \|F_n\| \\ &\leq \frac{1}{2} m \ell \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} m \ell (m\eta)^2 q^{2^n-2} \\ &= m\eta \left(\frac{1}{2} m^2 \ell \eta \right) q^{2^n-2} \\ &= m\eta q^{2^n-1} \end{aligned}$$

olduğu ve bu sebepten (3.11) eşitsizliğinin doğruluğu görülür. (3.7)'ye göre

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_0\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| + \cdots + \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \\
&\leq m\eta + m\eta q + m\eta q^3 + \cdots + m\eta q^{2^n - 1} \\
&\leq m\eta \sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k - 1} \\
&= r'
\end{aligned}$$

olduğundan $x_{n+1} \in \overline{S_{r'}(x_0)}$ olur.

(3.8)'e göre $F_n + F'_n(x_{n+1} - x_n) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= F_{n+1} - F_n - F'_n(x_{n+1} - x_n) \\
&= F(x_{n+1}) - F(x_n) - F'(x_n)(x_{n+1} - x_n)
\end{aligned}$$

olur ve (2.14) eşitsizliği gereğince

$$\|F_{n+1}\| \leq \frac{1}{2} \ell \|(x_{n+1} - x_n)\|^2$$

eşitsizliğinin doğruluğu elde edilir.

(x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilir. (3.11) eşitsizliği kullanılarak her bir $p \geq 1$ doğal sayısı için

$$\begin{aligned}
\|x_{n+p} - x_n\| &\leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}\| + \cdots \\
&\quad + \|x_{n+1} - x_n\| \leq m\eta \sum_{k=n}^{n+p-1} q^{2^k - 1}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

olduğu elde edilir. $\sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k - 1}$ serisi yakınsak olduğundan $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+p} - x_n\| = 0$$

olduğu ve dolayısıyla ve (3.4) biçiminde tanımlanan (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. X tam bir uzay olduğundan (x_n) yakınsak bir dizidir. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ diyelim. $(x_n) \subset \overline{S_{r'}(x_0)}$ ve $\overline{S_{r'}(x_0)}$ yuvarı kapalı olduğundan $x^* \in \overline{S_{r'}(x_0)}$ dır.

Şimdi x^* elemanın $F(x) = 0$ denkleminin bir çözümü olduğu gösterilsin. Bu nedenle (3.8) eşitliğinde $n \rightarrow \infty$ iken limite geçilmesi yeterlidir. O zaman $x^* = x^* - r(x^*)F(x^*)$ olduğu ve $r(x^*) = [F'(x^*)]^{-1}$ operatörünün tersi var olduğundan $F(x^*) = 0$ olduğu görülür.

(3.13) eşitsizliğinde $p \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n\| &\leq m\eta \sum_{k=n}^{\infty} q^{2^k - 1} \\ &= m\eta \sum_{s=0}^{\infty} q^{2^n 2^s - 1} \\ &= m\eta q^{2^n - 1} \sum_{s=0}^{\infty} q^{2^n(2^s - 1)} \end{aligned}$$

olur. Her $s \geq 0$ tam sayısı için $2^s - 1 \geq s$ ve dolayısıyla $q^{2^n(2^s - 1)} \leq q^{2^n s}$ ve $0 < q < 1$

olduğundan $\sum_{s=0}^{\infty} q^{2^n(2^s - 1)} \leq \sum_{s=0}^{\infty} q^{2^n s} = \frac{1}{1 - q^{2^n}}$ olur. Bu durumda son eşitsizlikten

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{m\eta q^{2^n - 1}}{1 - q^{2^n}}$$

ifadesinin doğruluğu elde edilir. Böylelikle Teorem 3.1 ispatlanmış olur.

Teorem 3.2: X Banach uzayı olmak üzere, $F : X \rightarrow X$ operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında F - türevlenebilir ve $\forall x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq \ell \|x - y\| \quad (3.14)$$

olacak şekilde $\ell > 0$ sayısı mevcut olsun. Ayrıca, $F'(x_0) \in L(X)$ operatörünün $[F'(x_0)]^{-1}$ tersi mevcut ve

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \leq m, \quad \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\| \leq \eta \quad (3.15)$$

olacak şekilde $m > 0, \eta > 0$ sayıları var olsun. Eğer $2m\ell\eta < 1$ ve

$$r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2m\ell\eta}}{m\ell} \leq r$$

ise (3.3) denkleminin $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ tek bir çözümü vardır ve terimleri (3.5) biçiminde tanımlanan Newton ardışık yaklaşımları x^* çözümüne

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{(1 - \sqrt{1 - 2m\ell\eta})^n}{\sqrt{1 - 2m\ell\eta}} m\eta \quad (3.16)$$

hızla yaklaşır.

İspat: Önce, $\phi(x) = x - [F'(x_0)]^{-1}F(x)$ operatörünün $\overline{S_{r_0}(x_0)}$ yuvarını kendisine dönüştürdüğü gösterilir. (3.15) koşulları ve (2.14) eşitsizliği dolayısıyla $\forall x \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ için

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - x_0\| &\leq \|\phi(x) - \phi(x_0)\| + \|\phi(x_0) - x_0\| \\ &= \|[F'(x_0)]^{-1}(F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0))\| + \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\| \\ &\leq m\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\| + \eta \leq \frac{m\ell}{2}\|x - x_0\|^2 + \eta \\ &\leq \frac{1}{2}mlr_0^2 + \eta \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. r_0 sayısı $\frac{1}{2}mlr^2 - r + \eta = 0$ denkleminin küçük kökü olduğundan son eşitsizliğin sağ tarafı r_0 'a eşit olur. Böylece, her $x \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ için $\|\phi(x) - x_0\| \leq r_0$ ve dolayısıyla

$$\phi(\overline{S_{r_0}(x_0)}) \subset \overline{S_{r_0}(x_0)}$$

olur. $\phi(x)$ operatörünün $S_{r_0}(x_0)$ yuvarında bir daralma operatörü olduğu gösterilir.

Herhangi $x, y \in S_{r_0}(x_0)$ için

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(y) &= x - y [F'(x_0)]^{-1} (F(x) - F(y)) \\ &= [F'(x_0)]^{-1} [F'(x_0)(x - y) - F(x) + F(y)] \\ &= [F'(x_0)]^{-1} \int_0^1 [F'(x_0) - F'(y + \theta(x - y))] d\theta (x - y) \end{aligned}$$

eşitliği doğru olduğundan (3.14) koşulu gereğince

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - \phi(y)\| &\leq m \int_0^1 \|F'(x_0) - F'(y + \theta(x - y))\| d\theta \|x - y\| \\ &\leq ml \int_0^1 \|x_0 - (y + \theta(x - y))\| d\theta \|x - y\| \\ &\leq mlr_0 \|x - y\| \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, $mlr_0 = 1 - \sqrt{1 - 2ml\eta} < 1$ olduğundan $\phi(x)$ operatörü $S_r(x_0)$ yuvarında $q = 1 - \sqrt{1 - 2ml\eta}$ katsayısıyla Lipschitz koşulunu sağlar.

$$1 - q = \sqrt{1 - 2ml\eta}$$

ve

$$\|\phi(x_0) - x_0\| = \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \leq \eta$$

olduğundan daralma dönüşüm prensibine göre $x = \phi(x)$ denkleminin ve $F(x) = 0$ denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve (3.5) biçiminde tanımlanan (x_n) dizisi x^* çözümüne (3.16) hızla yaklaşır.

Şimdi $F(x)$ operatörünün $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ şeklinde gösterilebildiğini varsayalım. Eğer $F_1(x)$ operatörünün $F_1'(x)$ Frechet türevinin $[F_1'(x)]^{-1}$ tersi varsa ve kolayca hesaplanabiliyorsa ve $F_2(x)$ operatörü norma göre yeteri kadar küçük bir operatör ise

$$F_1(x) + F_2(x) = 0 \quad (3.17)$$

denkleminin tahmini çözümünün bulunması için; terimleri,

$$x_n = x_{n-1} - [F_1'(x_{n-1})]^{-1} (F_1(x_{n-1}) + F_2(x_{n-1})), n = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

biçiminde veya

$$x_n = x_{n-1} - [F_1'(x_0)]^{-1} (F_1(x_{n-1}) + F_2(x_{n-1})), n = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

biçiminde olan iterasyon işlemlerinden birisinin kullanılması faydalı olur. Örneğin, (3.19) işleminin yakınsaklığına dair şu teorem ispatlanabilir.

Teorem 3.3: X bir Banach uzayı, $F_1 : X \rightarrow X$ operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında F_1 -türevlenebilir ve $\forall x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\|F_1'(x) - F_1'(y)\| \leq \ell_1 \|x - y\| \quad (3.20)$$

olacak şekilde $\ell_1 > 0$ sayısı ve $F_1'(x_0) \in L(X)$ operatörünün $[F_1'(x_0)]^{-1}$ tersi mevcut ve

$$\| [F_1'(x_0)]^{-1} \| \leq m_1, \| [F_1'(x_0)]^{-1} F_1(x_0) \| \leq \eta_1 \quad (3.21)$$

olacak şekilde $m_1 > 0, \eta_1 > 0$ sayıları var olsun. $F_2 : X \rightarrow X$ operatörü için $\forall x \in S_r(x_0)$ için

$$\| [F_1'(x_0)]^{-1} F_2(x) \| \leq \eta^2 \quad (3.22)$$

ve $\forall x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\| F_2(x) - F_2(y) \| \leq \ell_2 \|x - y\| \quad (3.23)$$

olacak şekilde $\eta_2 > 0, \ell_2 > 0$ sayıları var olsun. Eğer

$$m_1^2 \ell_2^2 < 1 - 2m_1 \ell_1 (\eta_1 + \eta_2)$$

ve

$$\delta_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2m_1 \ell_1 (\eta_1 + \eta_2)}}{m_1 \ell_1} \leq r$$

ise (3.17) denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve terimleri (3.19)

biçiminde tanımlanan ardışık yaklaşımlar işlemi x^* çözümüne

$$q_1 = 1 - \sqrt{1 - 2m_1 \ell_1 (\eta_1 + \eta_2)} + m_1 \ell_2$$

olmak üzere

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{q_1^n}{1 - q_1} (\eta_1 + \eta_2), n = 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

hızla yaklaşır.

İspat:

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= x - [F_1'(x_0)]^{-1} F_1(x), \\ \phi_2(x) &= -[F_1'(x_0)]^{-1} F_2(x)\end{aligned}$$

ve

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x), \quad x \in S_r(x_0)$$

olmak üzere (3.17) denklemi

$$x = \phi(x)$$

denklemi şeklinde yazılabilir. $\phi(x)$ operatörünün $\overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ yuvarını kendisine dönüştürdüğü gösterilir. Her $x \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ için

$$\begin{aligned}\phi(x) - x_0 &= [F_1'(x_0)]^{-1} (F_1'(x_0)(x - x_0) - F_1(x) + F_1(x_0)) \\ &\quad - [F_1'(x_0)]^{-1} F_1(x_0) - [F_1'(x_0)]^{-1} F_2(x_0)\end{aligned}$$

eşitliği doğru olduğundan (3.20)-(3.22) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\|\phi(x) - x_0\| \leq \frac{1}{2} m_1 \ell_1 \delta_0^2 + \eta_1 + \eta_2$$

olduğu elde edilir. δ_0 sayısı $\frac{1}{2} m_1 \ell_1 \delta^2 - \delta + \eta_1 + \eta_2 = 0$ denkleminin küçük kökü

olduğundan son eşitsizliğin sağ yanı δ_0 'a eşit olur. Böylece

$$x \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$$

için $\|\phi(x) - x_0\| \leq \delta_0$ ve dolayısıyla da $\phi(\overline{S_{\delta_0}(x_0)}) \subset \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ olur.

$\phi(x)$ operatörünün $S_{\delta_0}(x_0)$ yuvarında bir daralma operatörü olduğu gösterilir.

Herhangi $x, y \in S_{\delta_0}(x_0)$ için

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi(y) &= x - y - [F_1'(x_0)]^{-1}(F_1(x) - F_1(y)) \\ &\quad - [F_1'(x_0)]^{-1}(F_2(x) - F_2(y)) \end{aligned}$$

olduğundan (3.20), (3.21) ve (3.23) koşulları gereğince

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq (m_1 \ell_1 \delta_0 + m_1 \ell_2) \|x - y\|$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla, $m_1^2 \ell_2^2 < 1 - 2m_1 \ell_1 (\eta_1 + \eta_2)$ durumunda $m_1 \ell_1 \delta_0 + m_1 \ell_2 < 1$ olduğundan $\phi(x)$ operatörü $S_{\delta_0}(x_0)$ yuvarında,

$$q_1 = 1 - \sqrt{1 - 2m_1 \ell_1 (\eta_1 + \eta_2)} + m_1 \ell_2$$

katsayısıyla Lipschitz koşulunu sağlar.

$$1 - q_1 = \sqrt{1 - 2m_1 \ell_1 (\eta_1 + \eta_2)} - m_1 \ell_2$$

ve

$$\|\phi(x_0) - x_0\| \leq (1 - q_1) \delta_0$$

olduğundan, daralma dönüşüm prensibi dolayısıyla (3.17) denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve (3.19) şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi x^* çözümüne (3.24) hızla yaklaşır.

Not: $F_1(x) = 0$ denkleminin bir x_0^* çözümü varsa (3.19) ardışık yaklaşımlar işleminde x_0 başlangıç yaklaşım olarak x_0^* elemanı veya x_0^* elemanına yakın olan herhangi bir eleman ele alınması faydalı olur.

BÖLÜM 4. NEWTON METODUNUN UYGULAMALARI

4.1. Lineer Olmayan Cebirsel Denklem Sistemine Newton Metodunun Uygulanması

Newton metodu, lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözümünün bulunmasında kullanılabilir. Bunun için

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

denklem sistemini göz önüne alalım. m boyutlu $X = R^m$ uzayında

$$F(x) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)), x = (x_1, \dots, x_m)$$

biçiminde tanımlanan $F : X \rightarrow X$ operatörü yardımıyla (4.1) sistemi

$$F(x) = 0$$

operatör denklemi şeklinde yazılabilir. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ başlangıç yaklaşım olmak üzere

$$F'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + F(x^{(0)}) = 0$$

denklemini

$$F'(x^{(0)}) = \left(\frac{\partial f_i(x^{(0)})}{\partial x_j} \right), i, j = 1, 2, \dots, m \quad (4.2)$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f_j(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})}{\partial x_i} (x_i - x_i^{(0)}) = -f_j(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}), j = 1, \dots, m$$

biçiminde yazılabilir ve bu denklem sisteminin $x = (x_1, \dots, x_m)$ çözümü 1. yaklaşım olarak kabul edilir ve $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)})$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde sonraki yaklaşımlar bulunur. $X = R^m$ Banach uzayında Teorem 3.2'ye göre (4.1) denklem sistemi için şu teorem doğrudur.

Teorem 4.1: $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ başlangıç yaklaşımı ve

$$f_1, \dots, f_m : R^m \rightarrow R$$

fonksiyonları için;

1) (4.2) matrisinin determinanı $\Delta = \det F'(x^{(0)}) \neq 0$ ve

$$A_{ji}, i, j = 1, \dots, m$$

sayıları $\frac{\partial f_j(x^{(0)})}{\partial x_i}$ elemanının kofaktörü olmak üzere

$$\frac{1}{|\Delta|} \sum_{i=1}^m |A_{ji}| \leq m_0, j = 1, \dots, m;$$

$$2) \quad \forall x, y \in \overline{S_r(x^{(0)})} = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m : |x_i - x_i^{(0)}| \leq r, i = 1, \dots, m\}$$

noktaları için

$$\begin{aligned} \|F'(x) - F'(y)\|_\infty &= \max \left\{ \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial f_j(y)}{\partial x_i} \right| : j = 1, \dots, m \right\} \\ &\leq \ell_0 \|x - y\|_\infty ; \end{aligned}$$

$$3) \quad \left\| [F'(x^{(0)})]^{-1} \cdot F(x^{(0)}) \right\|_\infty \leq \eta_0 ;$$

$$4) \quad 2m_0 \ell_0 \eta_0 < 1$$

olacak şekilde m_0 , ℓ_0 ve η_0 sayıları mevcut olsun. Bu durumda

$$r_0 m_0 \ell_0 = 1 - \sqrt{1 - 2m_0 \ell_0 \eta_0} < r m_0 \ell_0$$

ise (4.1) denklem sisteminin tek bir $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*) \in \overline{S_r(x^{(0)})}$ çözümü vardır ve bu denklem, terimleri

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f_j(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})}{\partial x_i} (x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}) = -f_j(x_1^{(n-1)}, \dots, x_m^{(n-1)})$$

$j = 1, \dots, m$ $n = 1, 2, \dots$ veya kısaca

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - [F'(x^{(0)})]^{-1} F(x^{(n-1)}), n = 1, 2, \dots$$

biçiminde tanımlanan

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}), n = 1, 2, \dots$$

dizisinin limiti olarak bulunabilir. $(x^{(n)})$ dizisi x^* çözümüne

$$\|x^{(n)} - x^*\|_{\infty} \leq \frac{(1 - \sqrt{1 - 2m_0 \ell_0 \eta_0})^n}{\sqrt{1 - 2m_0 \ell_0 \eta_0}} m_0 \eta_0$$

hızla yaklaşır.

Problem 4.1: Başlangıç yaklaşım $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0, 0)$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + 30x_2 - 31 = 0 \\ x_2^2 - 2x_2 - 16x_1 + 1 = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

denklem sisteminin Newton metodu ile çözümünü bulunuz.

Çözüm: $F(x) = (x_1^2 + x_2^2 + 30x_2 - 31, x_2^2 - 2x_2 - 16x_1 + 1)$, $x = (x_1, x_2)$

operatörü yardımıyla (4.3) denklem sistemi $F(x) = 0$ operatörlü denklem şeklinde yazılabilir. F operatörünün *Frechet* türevi;

$$F'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 + 30 \\ -16 & 2x_2 - 2 \end{pmatrix}, x = (x_1, x_2)$$

matrisi olduğundan

$$F'(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ -16 & -2 \end{pmatrix},$$

$$[F'(x^{(0)})]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{240}{1} & \frac{16}{0} \end{pmatrix},$$

$$[F'(x^{(0)})]^{-1} F(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & -31 \\ 15 & 30 \end{pmatrix}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\| [F'(x^{(0)})]^{-1} \|_{\infty} &= \max \left\{ \frac{1}{240} + \frac{1}{16}, \frac{1}{30} \right\} = \frac{1}{15} = m_0, \\ \| [F'(x^{(0)})]^{-1} F(x^{(0)}) \|_{\infty} &= \frac{31}{30} = \eta_0\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}f_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 + 30x_2 - 31, \\ f_2(x) &= x_2^2 - 2x_2 - 16x_1 + 1 : R^2 \rightarrow R\end{aligned}$$

fonksiyonları için

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 2x_1, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 2x_2 + 30, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -16, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 2x_2 - 2\end{aligned}$$

olduğundan $\ell_0 = 4$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\| F'(x) - F'(y) \|_{\infty} &= \max \left\{ \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial f_j(y)}{\partial x_i} \right| : j = 1, 2 \right\} \\ &\leq \ell_0 \|x - y\|_{\infty}\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

$$\begin{aligned}
2m_0\ell_0\eta_0 &= \frac{62}{225} < 1, \\
r_0 &= \frac{1 - \sqrt{1 - 2m_0\ell_0\eta_0}}{m_0\ell_0} \\
&= \frac{15 - \sqrt{101}}{4}
\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 4.1 dolayısıyla (4.3) denklem sisteminin $(R^2; \|\cdot\|_\infty)$ uzayının $\overline{S_{r_0}(x^{(0)})}$ yuvarında $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ tek bir çözümü vardır. Bu çözümün $x^* = (0,1)$ olduğu açıktır.

Problem 4.2: $F : R^2 \rightarrow R^2$ operatörü

$$F(x) = (3x_1^2x_2 + x_2^2 - 1, x_1^4 + x_1x_2^3 - 1)$$

olarak tanımlanmaktadır. $F(x) = 0$ denkleminin köklerini Newton yöntemi ile $x_0 = (0.98, 0.32)$ noktası civarında bulun.

Çözüm: Newton yönteminden bilindiği gibi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \quad (*)$$

idi. Bu düzenlenirse $x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1} F(x_n)$ şeklinde yazılabilir.

Burada $F'(x)$ 'i $F(x)$ 'in jakobiyeni olarak

$$F'(x) = \begin{bmatrix} 6x_1x_2 & 3x_1^2 + 2x_2 \\ 4x_1^3 + x_2^3 & 3x_1x_2^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca verilen x_0 başlangıç noktası yerine koyulursa

$$F(x_0) = (0.024384, -0.146938)$$

bulunur. $F'(x_0)$ için verilen değerler yerine koyulursa

$$F'(x_0) = \begin{bmatrix} -42.5351 & 3.63667 \\ 3.37203 & -6.80559 \end{bmatrix}$$

bulunur. $[F'(x_0)]^{-1}$ de hesaplanırsa

$$[F'(x_0)]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0235101 & 0.274977 \\ 0.296557 & -0.146938 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu bulunan değerler (*) da yerine koyulursa

$$x_1 = (0.9930902, 0.30608026)$$

bulunur. Böylece devam edilirse ve gerekli işlemleri yapılırsa

$$F(x_1) = (-0.00721266, 0.00112212)$$

ve

$$[F'(x_1)]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0205492 & 0.262897 \\ 0.290541 & -0.134273 \end{bmatrix}$$

bulunur. Yine bu bulunan değerler (*) da yerine koyulursa

$$x^2 = (0.99278020, 0.30644049)$$

bulunur. Böyle devam edilirse sırasıyla aşağıdaki değerlere ulaşılır.

$$F(x_2) = (5.24613 \times 10^{-7}, 8.05387 \times 10^{-7}) \quad [F'(x_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0206195 & 0.263175 \\ 0.290678 & -0.134547 \end{bmatrix}$$

Yine bu ikisi (*) da yerine koyulursa

$$x_3 = (0.9927799948511854, 0.3064404465110144)$$

bulunur. Aynı şekilde devam edilerek

$$F(x_3) = (9.19959 \times 10^{-14}, 2.43257 \times 10^{-13}) \quad [F'(x_3)]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0206195 & 0.263175 \\ 0.290678 & -0.134547 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu iki değer de (*) da yerine koyulursa

$$x_4 = (0.9927799948511232, 0.3064404465110204)$$

elde edilir. Bu nokta da yerine koyulursa

$$F(x_4) = (-1.38778 \times 10^{-16}, -2.15106 \times 10^{-16})$$

elde edilir. Burada her adımdaki hatalar ise

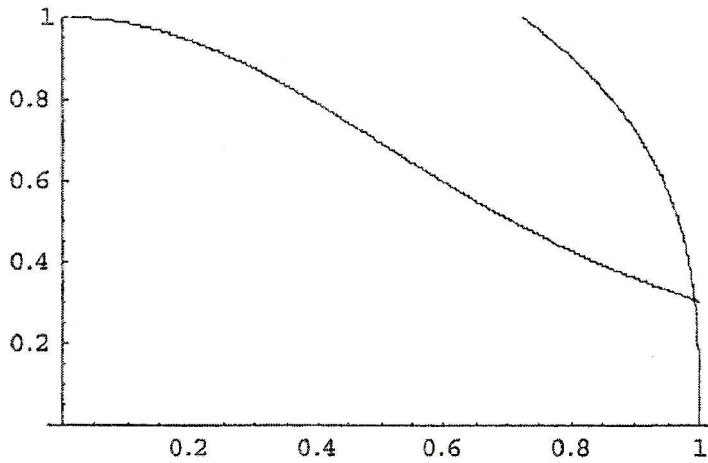
$$F(x_1), F(x_2), F(x_3), F(x_4) \text{ dir.}$$

Aynı örnek basitleştirilmiş Newton yöntemiyle yapılırsa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \text{ formülünden yararlanılarak}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= (0.99309, 0.30608) & F(x_1) &= (-0.000721266, 0.00112212) \\
x_2 &= (0.992765, 0.306459) & F(x_2) &= (-0.0000388585, 0.0000539304) \\
x_3 &= (0.99278025, 0.30643959) & F(x_3) &= (-2.58654 \times 10^{-6}, 7.59127 \times 10^{-7}) \\
x_4 &= (0.99277998, 0.30644047) & F(x_4) &= (5.77853 \times 10^{-8}, -5.79247 \times 10^{-8})
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da görüldüğü gibi Newton yöntemi basitleştirilmiş Newton yöntemine oranla çok daha hızlı yakınsamaktadır.



Şekil 4.1. $T(x) = 0$ denkleminin kökü

4.2. Newton Metodunun İntegral Denklemlere Uygulamaları

Lineer olmayan diferensiyel ve integral denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında en çok Newton metodu kullanılır.

$$x(t) = \int_a^b f(t, s, x(s)) ds, \quad a \leq t \leq b \quad (4.4)$$

Lineer olmayan Fredholm integral denklemini göz önüne alalım. Burada $f(t, s, x)$ sürekli ve x değişkenine göre 1. mertebeden sürekli kısmi türevelere sahip olan bir fonksiyondur. $X = (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ Banach uzayında

$$F(x)(t) = x(t) - \int_a^b f(t, s, x(s)) ds, \quad a \leq t \leq b$$

biçiminde tanımlanan $F : X \rightarrow X$ operatörü yardımıyla (4.4) denklemi $F(x) = 0$ operatörlü denklem şeklinde yazılabilir. Bu denklem için (3.5) Newton ardışık yaklaşımları şu şekilde kurulur. $x_0 \in C[a, b]$ başlangıç yaklaşım olsun. Birinci yaklaşım olan $x_1(t)$ fonksiyonu

$$F'(x_0)h_1 = -F(x_0) \quad (4.5)$$

denklemden ($h_1(t) = x_1(t) - x_0(t)$ bilinmeyen fonksiyondur) bulunur.

$$F'(x_0)h_1 = h_1(t) - \int_a^b f_x(t, s, x_0(s))h_1(s) ds$$

olduğundan (4.5) denklemi çekirdeği $k(t, s) = f_x(t, s, x_0(s))$ olan

$$h_1(t) - \int_a^b k(t, s)h_1(s) ds = g_0(t)$$

lineer integral denklemini biçiminde yazılabilir, burada

$$h_1(t) = x_1(t) - x_0(t), \quad g_0(t) = \int_a^b f(t, s, x_0(s)) ds - x_0(t)$$

dır. Sonraki $x_n(t), n = 2, 3, \dots$ yaklaşımlar

$$h_n(t) - \int_a^b k(t,s)h_n(s)ds = g_{n-1}(t)$$

denklemden bulunur, burada

$$h_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t),$$

$$g_{n-1}(t) = \int_a^b f(t,s,x_{n-1}(s))ds - x_{n-1}(t), n = 2, \dots$$

dır. $r > 0$ olmak üzere

$$G = \{(t,s,x) \in R^3 : a \leq t, s \leq b, -r \leq x \leq r\}$$

olsun. Teorem 3.2 dolayısıyla şu teorem ispatlanabilir.

Teorem 4.2: $x_0(t) \in C[a,b]$ başlangıç yaklaşımı ve $f(t,s,x)$ fonksiyonu için:

1) $f(t,s,x)$ ve $f_x(t,s,x)$ fonksiyonları G üzerinde sürekli ve

$$\forall (t,s) \in [a,b]^2 \quad \text{ve} \quad x_1, x_2 \in [-r,r]$$

için

$$|f_x(t,s,x_1) - f_x(t,s,x_2)| \leq \ell_0 |x_1 - x_2|;$$

2) $R(t,s)$ fonksiyonu $k(t,s) = f_x(t,s,x_0(s))$ çekirdeğinin rezolventası olmak üzere

$$\max \left\{ \int_a^b |R(t,s)| ds : t \in [a,b] \right\} \leq m_0;$$

$$3) \|g_0\|_\infty \leq p_0 ;$$

$$4) q_0 = 2(b-a)(1+m_0)^2 \ell_0 p_0 < 1$$

olacak şekilde negatif olmayan m_0, ℓ_0 ve p_0 sayıları mevcut olsun. Bu durumda

$$r_0(b-a)(1+m_0)\ell_0 = 1 - \sqrt{1-q_0} < r(b-a)(1+m_0)\ell_0$$

ise (4.4) denkleminin $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ tek bir çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$x_n(t) = \int_a^b f(t, s, x_{n-1}(s)) ds + \int_a^b R(t, s) \left[\int_a^b f(s, \xi, x_{n-1}(\xi)) d\xi - x_{n-1}(s) \right] ds$$

$n = 1, 2, \dots$ biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti olarak bulunabilir ve $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t)$ çözümüne

$$\|x_n - x^*\|_\infty \leq \frac{(1 - \sqrt{1-q_0})^n}{\sqrt{1-q_0}} (1+m_0)p_0$$

hızla yaklaşır.

Gerçekten, Teorem 4.2 koşulları altında $\forall x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\|F'(x) - F'(y)\|_\infty \leq (b-a)\ell_0 \|x - y\|_\infty$$

ve

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\|_\infty \leq 1 + m_0,$$

$$\|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\|_\infty \leq (1+m_0)p_0$$

ifadeleri doğru olduğundan Teorem 3.2'deki m, ℓ, η sayılarını sırasıyla $1 + m_0, (b - a)\ell_0, (1 + m_0)p_0$ sayıları olarak alınırsa, Teorem 3.2'nin koşullarının sağlandığı ve dolayısıyla Teorem 4.2'nin doğruluğu görülür.

$$Q(t, s, x) = f(t, s, x) - H(t, s, x)$$

ve

$$F_1(x)(t) = x(t) - \int_a^b H(t, s, x(s)) ds,$$

$$F_2(x)(t) = - \int_a^b Q(t, s, x(s)) ds$$

olmak üzere (4.4) denklemi

$$F_1(x) + F_2(x) = 0 \quad (4.6)$$

şeklinde yazılır. Bu denklem için (3.19) ardışık yaklaşımlar dizisi şu şekilde kurulur. $x_0 \in C[a, b]$ herhangi başlangıç yaklaşım olmak üzere birinci yaklaşım olan $x_1(t)$ fonksiyonu

$$F_1'(x_0)h_1 = -F_1(x_0) - F_2(x_0) \quad (4.7)$$

denkleminde bulunur. ($h_1(t) = x_{1(t)} - x_0(t)$ bilinmeyen fonksiyondur)

$$F_1'(x_0)h_1 = h_1(t) - \int_a^b H_x(t, s, x_0(s))h_1(s) ds$$

olduğundan (4.7) denklemi çekirdeği $\tilde{k}(t, s) = H_x(t, s, x_0(s))$ olan

$$h_1(t) - \int_a^b \tilde{k}(t, s)h_1(s) ds = \tilde{g}_0(t)$$

lineer integral denklemi şeklinde yazılabilir, burada $h_1(t) = x_1(t) - x_0(t)$ ve

$$\tilde{g}_0(t) = \int_a^b H(t, s, x_0(s)) ds + \int_a^b Q(t, s, x_0(s)) ds - x_0(s)$$

dır. Sonraki $x_n(t), n = 2, 3, \dots$ yaklaşımlar

$$h_n(t) - \int_a^b \tilde{k}(t, s) h_n(s) ds = \tilde{g}_{n-1}(t)$$

denkleminde bulunur. Burada $h_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t)$ ve

$$\tilde{g}_{n-1}(t) = \int_a^b H(t, s, x_{n-1}(s)) ds + \int_a^b Q(t, s, x_{n-1}(s)) ds - x_{n-1}(t), n = 2, 3, \dots$$

Teorem 3.3 dolayısıyla şu teorem ispat edilebilir.

Teorem 4.3: $x_0(t) \in C[a, b]$ başlangıç yaklaşımı ve $H(t, s, x), Q(t, s, x)$ fonksiyonları için

1) $H(t, s, x)$ ve $H_x(t, s, x)$ fonksiyonları G üzerinde sürekli ve $\forall (t, s) \in [a, b]^2$ ve $\forall x_1, x_2 \in [-r, r]$ için

$$|H_x(t, s, x_1) - H_x(t, s, x_2)| \leq \ell'_0 |x_1 - x_2|;$$

2) $\tilde{R}(t, s)$ fonksiyonu $\tilde{k}(t, s) = H_x(t, s, x_0(s))$ çekirdeğinin rezolventası olmak üzere

$$\max \left\{ \int_a^b |\tilde{R}(t, s)| ds : t \in [a, b] \right\} \leq m'_0 ;$$

$$3) \|F_1(x_0)\|_\infty \leq p'_0 ;$$

$$4) \max \left\{ \int_a^b |Q(t, s, x)| ds : t \in [a, b], |x - x_0(s)| \leq r \right\} \leq \eta'_0 ;$$

$$5) \forall (t, s) \in [a, b]^2 \text{ ve } \forall x_1, x_2 \in [-r, r] \text{ için}$$

$$|Q(t, s, x_1) - Q(t, s, x_2)| \leq L'_0 |x_1 - x_2| ;$$

6) $q'_0 = 1 - 2(1 + m'_0)^2 (b - a) \ell'_0 (p'_0 + \eta'_0) > (m'_0 L'_0)^2$ olacak şekilde negatif olmayan $m'_0, \ell'_0, p'_0, \eta'_0, L'_0$ sayıları mevcut olsun.

$$\text{Bu durumda } (1 + m'_0)(b - a) \ell'_0 \delta_0 = 1 - \sqrt{1 - q'_0} < r(1 + m'_0)(b - a) \ell'_0 \text{ ise } (4.6)$$

denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \int_a^b H(t, s, x_{n-1}(s)) ds + \int_a^b Q(t, s, x_{n-1}(s)) ds \\ &+ \int_a^b \tilde{R}(t, s) [H(s, \xi, x_{n-1}(\xi)) d\xi + Q(s, \xi, x_{n-1}(\xi)) d\xi - x_{n-1}(s) ds], \\ &n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti olarak bulunabilir ve

$$q_2 = 1 - \sqrt{1 - q'_0} + (1 + m'_0)(b - a) L'_0$$

olmak üzere $(x_n(t))$ dizisinin x^* çözümüne yaklaşma hızı

$$\|x_n - x^*\|_\infty \leq \frac{q_2^n}{1 - q_2} (1 + m'_0) (p'_0 + \eta'_0)$$

eşitsizliği yardımıyla verilir.

İspat: Teorem 4.3'ün koşulları altında $\forall x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\|F_1'(x) - F_1'(y)\|_\infty \leq (b - a)\ell'_0$$

ve

$$\|[F_1'(x_0)]^{-1}\|_\infty \leq 1 + m'_0, \|[F_1'(x_0)]^{-1}F_1(x_0)\|_\infty \leq (1 + m'_0)p'_0$$

olur. Ayrıca, $\forall x \in S_r(x_0)$ için

$$\|[F_1'(x_0)]^{-1}F_2(x)\|_\infty \leq (1 + m'_0)\eta'_0$$

ve $\forall x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\|[F_2(x) - F_2(y)]\|_\infty \leq L'_0(b - a)\|x - y\|_\infty$$

ifadeleri doğru olduğundan Teorem 3.3'teki $\ell, m_1, \eta_1, \eta_2$ ve ℓ_2 sayıları olarak sırasıyla $(b - a)\ell'_0, 1 + m'_0, (1 + m'_0)p'_0, (1 + m'_0)\eta'_0$ ve $(b - a)L'_0$ sayıları alınırsa Teorem 3.3'ün koşullarının sağlandığı ve dolayısıyla Teorem 4.3'ün doğruluğu görülür.

Teorem 4.2'nin koşulları x_0 başlangıç yaklaşımın (4.4) denkleminin çözümüne yeteri kadar yakın olduğu durumunda sağlanabilir. Benzer durum Teorem 4.3 için de geçerlidir. Bu nedenle söz konusu özelliğe sahip başlangıç yaklaşımların iyi seçilmesi önem taşımaktadır.

Eğer Teorem 4.3'de adı geçen $H(t, s, x)$ fonksiyonu $f(t, s, x)$ fonksiyonuna yeteri kadar yakın bir fonksiyon ise

$$x(t) = \int_a^b H(t, s, x(s)) ds \quad (4.8)$$

denkleminin çözümünün (4.4) ve (4.6) denklemleri için başlangıç yaklaşım olarak kabulü faydalı olur. Örneğin, $H(t, s, x)$ fonksiyonu olarak $f(t, s, x)$ fonksiyonunun herhangi bir tam ortonormal $(w_k(s))_{k=1}^{\infty}$ fonksiyonlar sistemine göre

$$f(t, s, x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t, x) w_k(s)$$

Fourier serisinin m . kısmi toplamı, yani

$$H(t, s, x) = \sum_{k=1}^m f_k(t, x) w_k(s)$$

fonksiyonu seçilebilir. Bu durumda (4.8) denklemi dejenere çekirdekli bir lineer integral denklem olduğundan bu denklemin $\tilde{R}(t, s)$ resolvantası kolayca bulunabilir.

Örnek 4.2:

$$x(t) = \int_0^1 \left[1 + \frac{1}{2} x^2(s) \sin ts \right] ds \quad (4.9)$$

integral denklemi için bir $x_0(t)$ başlangıç yaklaşım bulalım.

$$\sin ts = st - \frac{s^3 t^3}{6} + \frac{s^5 t^5}{120} - \dots$$

Taylor formülünden yararlanarak $f(t, s, x) = 1 + \frac{1}{2} x^2 \sin ts$ fonksiyonuna yakın olan

$$H(t, s, x) = 1 + \frac{1}{2}tsx^2$$

fonksiyonu ele alınır. Bu durumda (4.8) denklemi

$$x(t) = \int_0^1 \left[1 + \frac{1}{2}tsx^2(s) \right] ds \quad (4.10)$$

biçiminde olur. (4.10) denkleminin çözümü

$$c = \frac{1}{2} \int_0^1 sx^2(s) ds \quad (4.11)$$

olmak üzere $x(t) = 1 + ct$ şeklindedir. $x(t)$ 'nin bu ifadesini (4.11)'de yerine koyulursa

$$3c^2 - 16c + 6 = 0$$

denklemi elde edilir. $c = 0,405887$ bu denklemin bir çözümü olduğundan $x_0(t) = 1 + 0,405887t$ fonksiyonu (4.9) denklemi için bir başlangıç yaklaşım olarak seçilebilir.

Problem 4.3: $x_0(t) = 0.9t$ başlangıç yaklaşım olmak üzere;

$$x(t) = \int_0^1 tsx^2(s) ds + \frac{3}{4}t \quad (4.12)$$

integral denklemini Newton metodu ile çözüünüz.

Çözüm: Teorem 4.2'nin koşullarının gerçekleştiği gösterilir. $f(t, s, x) = tsx^2$ ve $f_x(t, s, x) = 2tsx$ fonksiyonları

$$G = \{(t, s, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad -\infty < x < \infty\}$$

üzerinde sürekli olduğu ve $\forall (t, s) \in [0, 1]^2$ ve $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ için

$$|f_x(t, s, x_1) - f_x(t, s, x_2)| = 2ts|x_1 - x_2| \leq 2|x_1 - x_2|$$

olduğu açıktır. Böylece $\ell_0 = 2$ olduğu elde edilir. Şimdi $x_0(t) = 0.9t$ başlangıç yaklaşım olmak üzere, $k(t, s) = f_x(t, s, x_0(s)) = 1.8ts^2$ çekirdeğinin $R(t, s)$ rezolvantası bulunur. Bu nedenle

$$F(x)(t) = x(t) - \int_0^1 tsx^2(s)ds - \frac{3}{4}t$$

biçiminde tanımlanan $F : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ operatörünün $x_0(t) = 0.9t$ noktasında Frechet türevi

$$\begin{aligned} F'(x_0)h &= h(t) - 2 \int_0^1 tsx_0(s)h(s)ds \\ &= h(t) - 1.8 \int_0^1 ts^2h(s)ds \end{aligned}$$

olduğundan $q(t) \in C[0, 1]$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$h(t) - 1.8 \int_0^1 ts^2h(s)ds = q(t) \tag{4.13}$$

lineer integral denkleminin çözümünün bulunması gerekir. (4.13) denkleminin

çözümü $c = \int_0^1 s^2h(s)ds$ olmak üzere $h(t) = 1.8ct + q(t)$ biçiminde olduğu görülür. Bu

c sayısını bulmak için

$$h(s) = 1.8cs + q(s)$$

eşitliğini s^2 ile çarparak bulunan eşitliğin $[0,1]$ üzere integrali alınması gerekir.

$$\int_0^1 s^2 h(s) ds = 1.8c \int_0^1 s^3 h(s) ds + \int_0^1 s^2 q(s) ds$$

olduğu ve dolayısıyla

$$c = \frac{20}{11} \int_0^1 s^2 q(s) ds$$

bulunur. Böylece (4.13) denkleminin çözümü

$$h(t) = q(t) + \frac{36}{11} \int_0^1 ts^2 q(s) ds$$

olur. Buradan $R(t,s) = \frac{36}{11} ts^2$ olduğu görülür.

$$\int_0^1 |R(t,s)| ds = \frac{12}{11} t$$

olduğundan

$$\max \left\{ \int_0^1 |k(t,s)| ds : t \in [0,1] \right\} = \frac{12}{11}$$

olur. Öte yandan

$$g_0(t) = \frac{9}{10}t + \frac{81}{100} \frac{1}{4}t + \frac{3}{4}t = \frac{21}{400}t$$

olduğundan

$$\|g_0\|_\infty = \max \left\{ \frac{21}{400}t : t \in [0,1] \right\} = \frac{21}{400}$$

Böylece, $\ell_0 = 2, m_0 = \frac{12}{11}, p_0 = \frac{21}{400}$ ve $b - a = 1$ olduğundan

$$q_0 = 2(b-a)(1+m_0)^2 \ell_0 p_0 = \frac{11109}{12100} < 1$$

olduğu görülür. Bu durumda Teorem 4.2 dolayısıyla $r_0 = \frac{110 - \sqrt{991}}{460}$ olmak üzere

(4.12) denkleminin $x^*(t) \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ tek bir çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$x_n(t) = \frac{3}{4} + t \int_0^1 s x_{n-1}^2(s) ds + \frac{36}{11} t \int_0^1 s^2 \left[-x_{n-1}(s) + s \int_0^1 \xi x_{n-1}^2(\xi) d\xi + \frac{3}{4} s \right] ds$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ fonksiyon dizisinin limiti olarak bulunabilir ve $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t) = t$ çözümüne

$$\|x_n - x^*\|_\infty \leq \frac{460}{\sqrt{991}} \left(\frac{110 - \sqrt{991}}{110} \right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

hızla yaklaşır.

Problem 4.4:

$$\int_0^1 (1 - 3xy)u(y)dy - u(x) = x^3 \quad \text{Fredholm integral denklemini yamuklar yöntemiyle}$$

çözünüz.

Çözüm: Burada $a = 0$ ve $b = 1$ 'dir. $[0,1]$ aralığı

$$x_1 = 0, x_2 = 0.25, x_3 = 0.5, x_4 = 0.75, u_5 = 1$$

şeklinde ayrılınsın.

$$x_1 = 0 \text{ için}$$

$$\int_0^1 (1-0)u(y) dy - u(0) = 0^3 \text{ elde edilir. Buradaki integralimizin yerine nümerik}$$

metotlar kullanılırsa

$$\frac{1}{8} [u(0) + 2u(0.25) + 2u(0.5) + 2u(0.75) + u(1)] - u(0) = 0$$

elde edilir.

$$x_2 = 0.25 \text{ için}$$

$$\int_0^1 (1-0.75y)u(y) dy - u(0.25) = (0.25)^3 \text{ elde edilir. Gene burada da yaklaşık}$$

hesaplama

$$\frac{1}{8} \left[(1-0.75 \cdot 0)u(0) + 2(1-0.75 \cdot 0.25)u(0.25) + 2(1-0.75 \cdot 0.5)u(0.5) + \right. \\ \left. + 2(1-0.75 \cdot 0.75)u(0.75) + (1-0.75 \cdot 1)u(1) \right] - u(0.25) = (0.25)^3$$

elde edilir.

$$x_3 = 0.5 \text{ için}$$

$$\int_0^1 (1 - 3(0.5)y)u(y)dy - u(0.5) = (0.5)^3 \text{ elde edilir. } \int k(x_i, y)u(y)dy - \lambda u(x_i) = f(x_i)$$

formülü dolayısıyla

$$\frac{1}{8} \left[(1 - 1.5 \cdot 0)u(0) + 2(1 - 1.5 \cdot 0.25)u(0.25) + 2(1 - 1.5 \cdot 0.5)u(0.5) + \right. \\ \left. + 2(1 - 1.5 \cdot 0.75)u(0.75) + (1 - 1.75 \cdot 1)u(1) \right] - u(0.5) = (0.5)^3$$

elde edilir.

$$x_4 = 0.75 \text{ için}$$

$$\int_0^1 (1 - 3(0.75)y)u(y)dy - u(0.75) = (0.75)^3 \text{ elde edilir. Buradan}$$

$$\frac{1}{8} \left[(1 - 2.25 \cdot 0)u(0) + 2(1 - 2.25 \cdot 0.25)u(0.25) + 2(1 - 2.25 \cdot 0.5)u(0.5) + \right. \\ \left. + 2(1 - 2.25 \cdot 0.75)u(0.75) + (1 - 2.25 \cdot 1)u(1) \right] - u(0.75) = (0.75)^3$$

elde edilir.

$$x_5 = 1 \text{ için}$$

$$\int_0^1 (1 - 3y)u(y)dy - u(1) = 1^3 \text{ elde edilir. Buradan}$$

$$\frac{1}{8} \left[(1 - 3 \cdot 0)u(0) + 2(1 - 3 \cdot 0.25)u(0.25) + 2(1 - 3 \cdot 0.5)u(0.5) + \right. \\ \left. + 2(1 - 3 \cdot 0.75)u(0.75) + (1 - 3 \cdot 1)u(1) \right] - u(1) = 1$$

elde edilir.

Böylece beş bilinmeyenli beş lineer denklem takımı elde edilmiş olur. Gerekli düzenlemeler yapıp katsayılar matrisi oluşturulur.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -7/8 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/8 \\ 1/8 & -51/64 & 5/32 & 7/64 & 1/32 \\ 1/8 & 5/32 & -15/16 & -1/32 & -1/16 \\ 1/8 & 7/64 & -1/32 & -75/64 & -5/32 \\ 1/8 & 1/16 & -1/8 & -5/16 & -5/4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} u(0) \\ u(0.25) \\ u(0.5) \\ u(0.75) \\ u(1) \end{pmatrix}}_U = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/64 \\ 1/8 \\ 27/64 \\ 1 \end{pmatrix}}_X$$

A matrisinin inversini alınıp X matrisiyle soldan işleme sokulur

$$U = \text{invers}A \cdot X$$

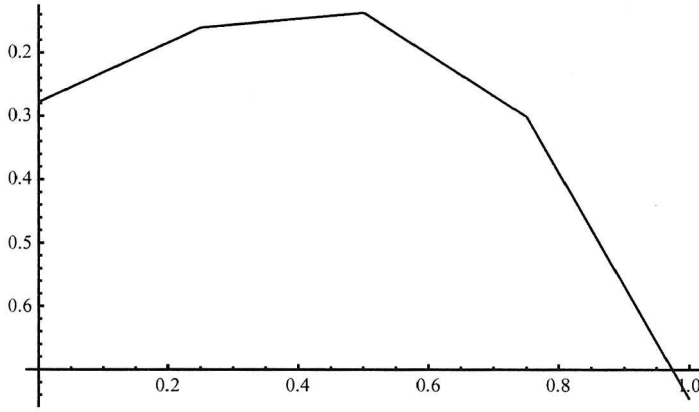
$$\underbrace{\begin{pmatrix} u(0) \\ u(0.25) \\ u(0.5) \\ u(0.75) \\ u(1) \end{pmatrix}}_U = \underbrace{\begin{pmatrix} -257/192 & -53/96 & -41/96 & -29/96 & -17/192 \\ -53/192 & -137/96 & -29/96 & -17/96 & -5/192 \\ -41/192 & -29/96 & -113/96 & -5/96 & -7/192 \\ -29/192 & -17/96 & -5/96 & -89/96 & 19/192 \\ -17/192 & -5/96 & 7/96 & 19/96 & -161/192 \end{pmatrix}}_{\text{invers}(A)} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/64 \\ 1/8 \\ 27/64 \\ 1 \end{pmatrix}}_X$$

Buradaki gerekli işlemler yapılırsa:

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ u(0.25) \\ u(0.5) \\ u(0.75) \\ u(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.277995 \\ -0.160807 \\ -0.13737 \\ -0.301432 \\ -0.746745 \end{pmatrix}$$

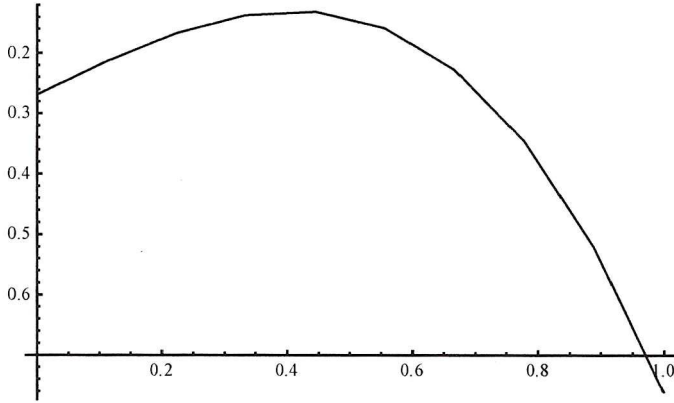
elde edilir. Görüldüğü gibi çözüm beş adet nokta ikilisi olacak şekilde bulundu.

Şimdi bu noktalarımızı fonksiyon üzerinde gösterelim.

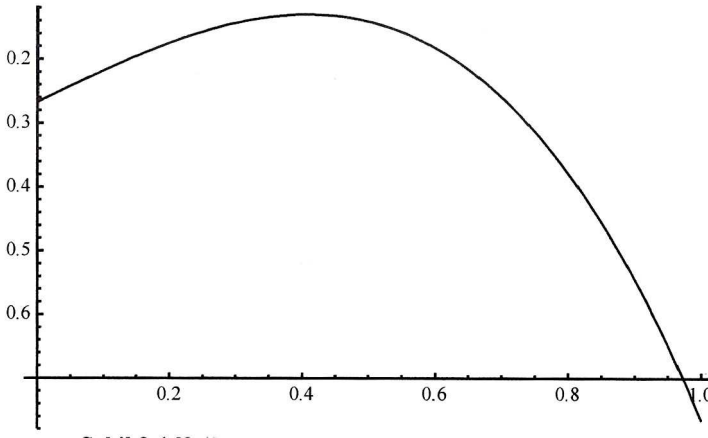


Şekil 4.2. $\int_0^1 (1 - 3xy)u(y)dy - u(x) = x^3$ denkleminin çözümü

[0,1] aralığı dört alt parçaya bölünmüştü. Bu aralık sayısı artırıldığında gerçek çözüme daha çok yaklaşılabileceği unutulmamalıdır. Aşağıdaki iki şekilde [0,1] aralığı sırasıyla 9 ve 99 alt parçaya ayrıldığında bulunan çözümler gözükmemektedir.



Şekil 4.3. [0,1] aralığı 9 alt parçaya bölündüğünde elde edilen çözüm



Şekil 4.4. $[0,1]$ aralığı 99 alt parçaya bölündüğünde

Problem 4.5: $u_0(x) = 0.5x$ başlangıç yaklaşım olmak üzere;

$u(x) = \int_0^1 xyu^2(y)dy + \frac{3}{4}x$ integral denklemini Newton metodu ile çözüünüz.

Çözüm:

$$u_0(x) = 0.5x ; u(x) - \int_0^1 xyu^2(y)dy - \frac{3}{4}x = 0$$

non-linear integral denklemini Frechet türevi yardımıyla lineer integral denklem haline getirilir.

$$h_1(x) - \int_0^1 2xyu_0(x)h_1(y)dy = -F(u_0)$$

şimdi de $F(u_0) = u_0 - \int_0^1 xyu_0^2 dy - \frac{3}{4}x$ olup $u_0 = 0.5x$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
F(u_0) &= 0.5x - \int_0^1 xy(0.5)^2 x^2 dy - \frac{3}{4}x \\
&= -0.25x - \int_0^1 x^3 y(0.25) dy \\
&= -0.25x - x^3(0.25) \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \\
&= -0.25x - 0.125x^3
\end{aligned}$$

O halde $-F(u_0) = 0.25x + 0.125x^3$ olur. Bu değer yerine yazılırsa

$$h_1(x) - \int_0^1 x^2 y h_1(y) dy = 0.25x + 0.125x^3 \text{ integral denklemimiz lineer hale}$$

getirilmiş olur.

Buradan sonrası lineer integral denklem çözümünde kullandığımız formüllerle elde edilir. Mathematica programı yardımıyla $a=0; b=1$ integral sınırları için, $N=9$ aralığa bölünerek

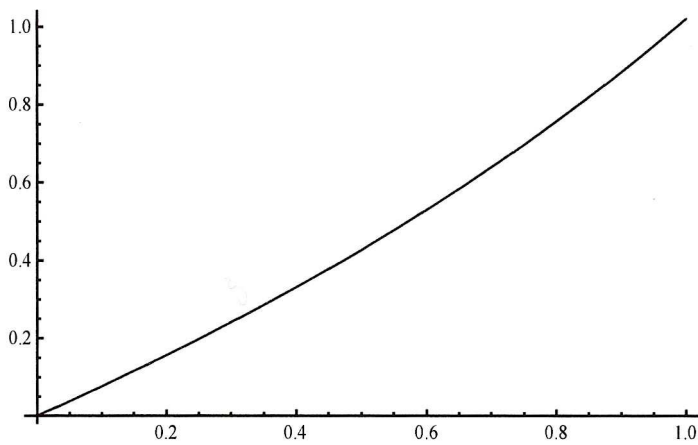
$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, x_2 = \frac{1}{9}, \\
x_3 &= \frac{2}{9}, x_4 = \frac{3}{9}, \\
x_5 &= \frac{4}{9}, x_6 = \frac{5}{9}, \\
x_7 &= \frac{6}{9}, x_8 = \frac{7}{9}, \\
x_9 &= \frac{8}{9}, x_{10} = 1
\end{aligned}$$

şeklinde ayrılışın. $K(x, t) = x^2 y$ lineer integral denklemin çekirdeğidir.

$f(x) = 0.25x + 0.125x^3$ Mathematica programında veriler girilerek elde edilen sonuçlara göre çözümümüz

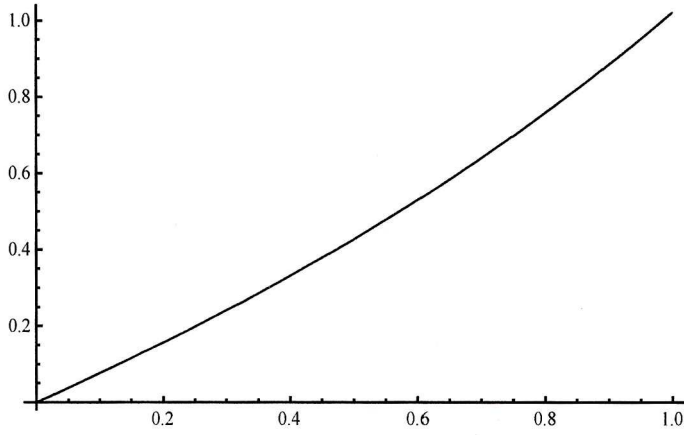
$$\text{çözüm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & 0.0297569 \\ \frac{2}{9} & 0.0641578 \\ \frac{1}{3} & 0.104232 \\ \frac{4}{9} & 0.151007 \\ \frac{5}{9} & 0.205513 \\ \frac{2}{3} & 0.268778 \\ \frac{7}{9} & 0.341832 \\ \frac{8}{9} & 0.425702 \\ 1 & 0.521418 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi çözümümüz on adet nokta ikilisi olacak şekilde bulundu. Şimdi bu noktalar mathematica yardımıyla $u_0(x) = 0.5x$ başlangıç fonksiyonumuzun üzerine eklenirse aşağıdaki birinci yaklaşım grafiği elde edilir.



Şekil 4.5. $[0,1]$ aralığını 9 eşit parçaya böldüğünde elde edilen çözüm

Biz $[0,1]$ aralığını dokuz alt parçaya bölmüştük. Bu aralık sayısını artırdığımızda gerçek çözüme daha çok yaklaşılr. Aşağıdaki şekilde $[0,1]$ aralığını 99 alt parçaya ayırdığımızda bulunan çözümler gözükmemektedir.



Şekil 4.6 $[0,1]$ aralığı 99 parçaya ayrıldığında elde edilen çözüm

Görüldüğü gibi çözümümüz $y = x$ eğrisine yaklaşmaktadır.

Problem 4.5: $x_0(t) = 0,01 + \cos 2\pi t$ başlangıç yaklaşım olmak üzere

$$x(t) = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 t \sin 2\pi s x^2(s) ds + \cos 2\pi t \quad (4.14)$$

integral denklemini Newton metodu ile çözümler.

Çözüm: Teorem 4.2'nin koşullarının gerçekleştiği gösterilsin

$$f(t, s, x) = -\frac{\pi}{2} t \sin 2\pi s x^2$$

ve

$$f_x(t, s, x) = -\pi \sin 2\pi s x$$

fonksiyonlarının

$$G = \{(t, s, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1, -\infty < x < +\infty\}$$

üzerinde sürekli olduğu ve $\forall (t, s) \in [0, 1]^2$ ve $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ için

$$|f_x(t, s, x_1) - f_x(t, s, x_2)| = \pi |\sin 2\pi s| |x_1 - x_2| \leq \pi |x_1 - x_2|$$

olduğu açıktır. Böylece $\ell_0 = \pi$ olur.

Şimdi $k(t, s) = f_x(t, s, x_0(s)) = -\pi \sin 2\pi s (0, 01 + \cos 2\pi s)$ çekirdeğinin $R(t, s)$ rezolventası bulunur. Bu nedenle

$$F(x)(t) = x(t) + \frac{\pi}{2} \int_0^1 t \sin 2\pi s x^2(s) ds - \cos 2\pi$$

biçiminde tanımlanan $F : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ operatörünün $x_0(t)$ noktasında F - türevi

$$\begin{aligned} F'(x_0)h &= h(t) + \pi \int_0^1 t \sin 2\pi s x_s h(s) ds \\ &= h(t) + \pi \int_0^1 t \sin 2\pi s (0, 01 + \cos 2\pi s) h(s) ds \end{aligned}$$

olduğundan $q(t) \in C[0, 1]$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$h(t) + \pi \int_0^1 t \sin 2\pi s (0, 01 + \cos 2\pi s) h(s) ds = q(t) \quad (4.15)$$

lineer integral denkleminin çözümünün bulunması gerekir. (4.15) denkleminin çözümü

$$c = \int_0^1 \sin 2\pi s (0,01 + \cos 2\pi s) h(s) ds$$

olmak üzere $h(t) = -\pi ct + q(t)$ biçiminde olduğu görülür. Bu c sayısını bulmak için $h(s) = -\pi cs + q(s)$ eşitliğini $\sin 2\pi s (0,01 + \cos 2\pi s)$ ile çarparak bulunan eşitliğin $[0,1]$ üzere integrali alınması gerekir. O zaman

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin 2\pi s (0,01 + \cos 2\pi s) h(s) ds \\ &= -\pi c \int_0^1 s (0,01 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi s ds \\ &+ \int_0^1 (0,01 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi s q(s) ds \end{aligned} \quad (4.16)$$

olduğu ve

$$\begin{aligned} \int_0^1 s (0,01 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi s ds &= 0,01 \int_0^1 s \sin 2\pi s ds + \int_0^1 s \cos 2\pi s \sin 2\pi s ds \\ &= 0,01 \cdot \left(-\frac{1}{2\pi} \right) + \left(-\frac{1}{8\pi} \right) \\ &= -\frac{13}{100\pi} \end{aligned}$$

olduğundan (4.16) eşitliği dolayısıyla

$$c = \frac{100}{87} \int_0^1 (0,01 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi s q(s) ds$$

olur. Böylece, (4.15) denkleminin çözümü

$$h(t) = q(t) - \frac{100}{87} \int_0^1 t(0.01 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi s q(s) ds$$

olur. Buradan $R(t, s) = -\frac{100\pi}{87} t(0.01 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi s$ olduğu görülür.

$$\int_0^1 |R(t, s)| ds = -\frac{100\pi}{87} t \int_0^1 |0.01 + \cos 2\pi s| |\sin 2\pi s| ds \leq \frac{101}{87} t$$

olduğundan

$$\max \left\{ \int_0^1 |R(t, s)| ds : t \in [0, 1] \right\} \leq \frac{101}{87}$$

ve dolayısıyla $m_0 = \frac{101}{87}$ olduğu görülür. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} g_0(t) &= x_0(t) + \frac{\pi}{2} \int_0^1 t \sin 2\pi s x_0^2(s) ds - \cos 2\pi t \\ &= 0.01 + \frac{\pi}{2} \int_0^1 t \sin 2\pi s (0.01 + \cos 2\pi s)^2 ds \\ &= 0.01 + (0.01)^2 \frac{\pi}{2} t \int_0^1 \sin 2\pi s ds + 0.01\pi \int_0^1 \sin 2\pi s \cos 2\pi s ds \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \int_0^1 t \sin 2\pi s \cos^2 2\pi s ds \\ &= 0.01 \end{aligned}$$

olduğundan $\|g_0\|_\infty = 0.01$ dir.

Böylece $\ell_0 = \pi, m_0 = \frac{101}{87}, p_0 = 0.01, b - a = 1$ olduğundan;

$$g_0 = 2(b-a)(1+m_0)^2 \ell_0 p_0 = \frac{35344}{378450} < 1$$

olur. Bu durumda Teorem (4.2) dolayısıyla $r_0 = \frac{87}{188\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{171553}{189225}}\right)$ olmak üzere

(4.14) denkleminin tek bir $x^*(t) \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$\begin{aligned} x_n(t) = & -\frac{\pi}{2} t \int_0^1 \sin 2\pi s x_{n-1}^2(s) ds + \cos 2\pi t \\ & + \frac{100\pi}{87} t \int_0^1 (0.01 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi s \\ & \cdot \left[x_{n-1}(s) + \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \sin 2\pi \xi x_{n-1}^2(\xi) d\xi - \cos 2\pi s \right] ds, n = 1, \dots \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ fonksiyon dizisinin limiti gibi bulunabilir ve $(x_n(t))$ dizisi, $x^*(t) = \cos 2\pi t$ çözümüne

$$\|x_n - x^*\|_\infty \leq \frac{47}{2175} \sqrt{\frac{189925}{174555}} \left(1 - \sqrt{\frac{174555}{189225}}\right)^n, n = 1, \dots$$

hızla yaklaşır.

Problem 4.6: Newton yöntemini kullanarak aşağıdaki Volterra tipli

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1 + \varphi^2(t)}{1 + t^2} dt$$

integral denklemini çözelim.

Çözüm: Bu denklemi birinci yaklaşımı $\varphi_0(x) = 0$ alarak ardışık yaklaşımlar yöntemi ile aşağıdaki şekilde çözülebilir.

$\varphi_0(x) = 0$ olsun

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \frac{1 + \arctan^2 t}{1+t^2} dt = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan^3 x$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) = \int_0^x \frac{1 + \left(\arctan t + \frac{1}{3} \arctan^3 t \right)^2}{1+t^2} dt = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan^3 x + \\ + \frac{2}{3 \times 5} \arctan^5 x + \frac{1}{7 \times 9} \arctan^7 x, \end{aligned}$$

$\arctan x = u$ yazılırsa $\varphi_n(x)$ için elde edilen ifade B_ν 'ler Bernulli sayıları olmak üzere

$$\tan u = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{2^{2\nu} (2^{2\nu} - 1)}{(2\nu)^*} B_{2\nu} u^{2\nu-1}, \quad |u| < \frac{\pi}{2}$$

ile kıyaslanırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \tan(\arctan x) = x$$

olduğu görülür. $\varphi(x) = x$ 'in verilen integral denklemin çözümü olduğu ise kolayca anlaşılabilir.

Şimdi ise verilmiş Volterra integral denkleminin Newton metodu ile çözümünü araştıralım. Bu maksatla denklem

$$F(\varphi)(x) = \varphi(x) - \int_0^x \frac{1 + \varphi^2(t)}{1+t^2} dt$$

operatör formunda yazılır. $F'(\varphi)$ Frechet türevini bulalım, bu türev

$$F'(\varphi)(x)h = h(x) - \int_0^x \frac{2\varphi(t)}{1+t^2} h(t) dt$$

olur. Bundan sonra başlangıç yaklaşımımızı $\varphi_0(x) = 0$ almakla aşağıdaki şekilde

$$F'(\varphi_0)(x)h_1 = -F(\varphi_0)(x)$$

Newton ardışık yaklaşımları oluşturulur. Bu ifadeden bulunan $h_1(t) = \varphi_1(t) - \varphi_0(t)$ bilinmeyen fonksiyonları yardımı ile

$$\varphi_n(t) = h_n(t) + \varphi_{n-1}(t)$$

dizisi oluşturulur ve aranan çözüm bu dizinin limiti şeklinde bulunur. Bu problem için yazılmış mathematica programı ekte verilmiştir.

Problem 4.7: $x_0(t) = 0$ başlangıç yaklaşım olmak üzere

$$\begin{cases} x''(t) - [x(t)]^2 = f(t), 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

sınır - değer problemini Newton metodu ile çözüyoruz. Burada $f(t), [0,1]$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

Çözüm: Bilindiği gibi

$$-x''(t) = g(t), \quad x(0) = x(1) = 0$$

sınır - değer probleminin $C^2[0,1]$ den olan çözümü

$$M(t,s) = \begin{cases} S(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \text{ ise} \\ t(1-S), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$x(t) = \int_0^1 M(t,s)g(s)ds$$

biçiminde olduğundan (4.17) problemi $C[0,1]$ uzayında

$$x(t) = -\int_0^1 M(t,s)[x(s)]^2 ds - \int_0^1 M(t,s)f(s)ds \quad (4.18)$$

lineer olmayan integral denklemine denktir. $f(t,s,x) = -M(t,s)x^2$ fonksiyonu ve onun $f_x(t,s,x) = -2M(t,s)x$ kısmi türevi,

$$G = \{(t,s,x) : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1, -\infty < x < \infty\}$$

üzerinde sürekli olduğu ve $\forall(t,s) \in [0,1]^2$ ve $x_1, x_2 \in (-\infty, \infty)$ için

$$|f_x(t,s,x_1) - f_x(t,s,x_2)| = 2M(t,s)|x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2| \text{ ve } \ell_0 = 1 \text{ olduğu açıktır.}$$

$$F(x)(t) = x(t) + \int_0^1 M(t,s)[x(s)]^2 ds + \int_0^1 M(t,s)f(s)ds$$

biçiminde tanımlanan $F : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ operatörünün $x_0(t) = 0$ noktasında F – türevi

$$F'(x_0)h(t) = h(t) + 2 \int_0^1 M(t,s)x_0(s)h(s)ds = h(t)$$

olduğundan $F'(x_0) = I$ birim operatördür. Dolayısıyla

$$R(t, s) = 0 \quad \text{ve} \quad m_0 = 0$$

olur. Diğer taraftan

$$g_0(t) = -F(x_0)(t) = -\int_0^1 M(t, s) f(s) ds$$

olduğundan

$$\|g_0\|_\infty \leq \|f\|_\infty \max \left\{ \int_0^1 M(t, s) ds : 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

olur.

$$\int_0^1 M(t, s) ds = \int_0^t s(1-t) ds + \int_t^1 t(1-s) ds = \frac{1}{2}(1-t)t$$

olduğundan

$$\|g_0\|_\infty \leq \frac{1}{8} \|f\|_\infty$$

ve dolayısıyla $p_0 = \frac{1}{8} \|f\|_\infty$ olur. Böylece,

$$q_0 = 2(b-a)(1+m_0)^2 p_0 \ell_0 = 2 \cdot \frac{1}{8} \|f\|_\infty = \frac{1}{4} \|f\|_\infty$$

olur. Eğer $\frac{1}{4} \|f\|_\infty < 1$ ise Teorem 4.2 dolayısıyla $\|f\|_\infty < 4$ ise (4.18) denkleminin

$r_0 = 1 - \sqrt{1 - \frac{\|f\|_\infty}{4}}$ olmak üzere tek bir $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve bu çözüm

$$x_n(t) = -\int_0^1 M(t,s)[x_{n-1}(s)]^2 ds - \int_0^1 M(t,s)f(s)ds, n = 1,2,\dots$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ fonksiyon dizisinin limiti olarak bulunabilir ve $(x_n(t))$ dizisi $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ çözümüne

$$\|x_n - x^*\|_\infty \leq \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\|f\|_\infty}{4}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\|f\|_\infty}{4}}} \frac{1}{8} \|f\|_\infty, n = 1,2,\dots$$

hızla yaklaşır.

Problem 4.8: $F : C^2[a,b] \rightarrow C[a,b]$ operatörü verilsin.

$y_0 = \cos t(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ için $F(y) = y'' + \sin(y)$ için $F(y) = 0$ ın Newton yöntemiyle çözümünü bulunuz.

Çözüm: Bu operatörümüz lineer olmadığından Frechet türevini almalıyız. Bunun için;

$$F(y+h) = (y+h)'' + \sin(y+h) \text{ ve}$$

$$F(y) = y'' + \sin(y) \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} F(y+h) - F(y) &= (y+h)'' - y'' + \sin(y+h) - \sin(y) \\ &= y'' + h'' - y'' + \sin(y+h) - \sin(y) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\sin(y+h)$ 'in h civarında Taylor seri açılımına geçilirse

$$\sin(y+h) = \sin(y) + \sin'(y)h + \frac{\sin''(y)}{2!}h^2 + \dots$$

şeklinde yazılabildiğinden

$$F(y+h) - F(y) = h'' - \sin(y) + \sin(y) + \sin'(y)h + \frac{\sin''(y)}{2!}h^2 + \dots$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$F(y+h) - F(y) = h'' + \underbrace{\sin'(y)h + \frac{\sin''(y)}{2!}h^2 + \dots}_{\omega(h)}$$

çıkar.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\omega(h)\|}{\|h\|} = 0$ olduğundan F operatörünün *Frechet* türevi mevcuttur

$$F'(y)h = h'' + \sin'(y)h$$

Ayrıca,

$$y_1 = y_0 + h_1 = y_0 - \frac{F(y_0)}{F'(y_0)}$$

$$y_1 - y_0 = h_1 = y_0 - \frac{F(y_0)}{F'(y_0)} \quad (y_1 - y_0 = h_1) \quad F'(y_0)h = -F(y_0)$$

olduğundan ve bulduğumuz *Frechet* türevi yerine yazılırsa

$$h'' + \cos(y_0) \cdot h = -F(y_0) \text{ olur. Şimdi } y_0 = \cos t \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

yaklaşımı ile Newton yöntemini uygulamaya başlarsak

$$\begin{aligned}
 h'' + \cos(\cos t) \cdot h &= -(\cos'' t + \sin(\cos t)) \\
 h'' + \cos(\cos t) \cdot h &= \cos t - \sin(\cos t) \quad h(0) = 0 \quad h'(0) = 0
 \end{aligned}$$

olur. Şimdi bu denklemin çözümü için dördüncü dereceden Runge Kutta metodunu kullanalım.

$$h = u(t) \quad h' = v(t) \quad h'' = v'(t) \quad u'(t) = v(t) \quad \text{için,}$$

$$u'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = -\cos(\cos t) \cdot u(t) + \cos(t) - \sin(\cos t) \quad \text{olur.}$$

$$u'(t) = f(t, u, v) \quad \text{ve} \quad v'(t) = g(t, u, v) \quad \text{dersek;}$$

$$f(t, u, v) = v \quad \text{ve}$$

$$g(t, u, v) = \cos(t) - \sin(\cos t) - \cos(\cos t) \cdot u$$

haline getirilir.

$t = 0 \quad u(0) = 0 \quad v(0) = 0 \quad \delta = 0.01$ (δ artım miktarı) iken Runge Kutta metoduna geçilirse

$$v(0) = v_{10} \quad u(0) = u_{10} \quad \text{için}$$

$$k_{11} = f\left(t_0, u_{10}, v_{10}\right)$$

$$k_{21} = g\left(t_0, u_{10}, v_{10}\right)$$

$$k_{12} = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, u_{10} + \frac{h}{2}k_{11}, v_{10} + \frac{h}{2}k_{21}\right)$$

$$k_{22} = g\left(t_0 + \frac{h}{2}, u_{10} + \frac{h}{2}k_{11}, v_{10} + \frac{h}{2}k_{21}\right)$$

$$k_{13} = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, u_{10} + \frac{h}{2}k_{12}, v_{10} + \frac{h}{2}k_{22}\right)$$

$$k_{23} = g\left(t_0 + \frac{h}{2}, u_{10} + \frac{h}{2}k_{12}, v_{10} + \frac{h}{2}k_{22}\right)$$

$$k_{14} = f(t_0 + h, u_{10} + hk_{13}, v_{10} + hk_{23})$$

$$k_{24} = g(t_0 + h, u_{10} + hk_{13}, v_{10} + hk_{23})$$

formülleri kullanılırsa yeni noktalarımız;

$$u_{11} = u_{10} + \frac{h}{6}(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14})$$

$$v_{11} = v_{10} + \frac{h}{6}(k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24})$$

olur. Yani:

$$\begin{array}{cccc} k_{11} = 0 & k_{12} = 0.000792645 & k_{13} = 0.000792616 & k_{14} = 0.00158521 \\ k_{21} = 0.158529 & k_{22} = 0.158523 & k_{23} = 0.158521 & k_{24} = 0.158502 \end{array}$$

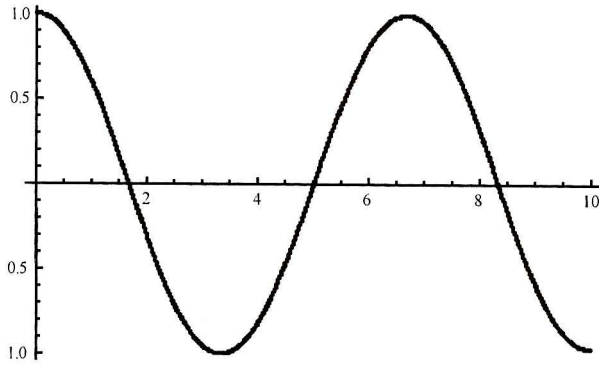
elde edilir. Buradan yeni noktalarımız

$$u_{11} = 7.92622 \times 10^{-6} \quad v_{11} = 0.0015852$$

çıkar.

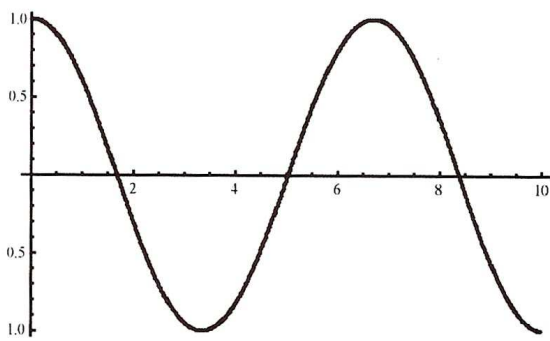
Şimdi elde ettiğimiz bu u_{11} ve v_{11} değerlerini başta aldığımız v_{10} ve u_{10} değerleri ile değiştirelim (u_{10} yerine u_{11} ve v_{10} yerine v_{11}). Ve başlangıç noktamıza her bir adımımızda $\delta = 0.01$ artımı verelim. Böylece çıkan değerleri daima bir öncekilerin yerine koyup devam edelim. Sonuçta bu şekilde 100 adım yaparsak her bir t noktasına karşılık gelen u değerleri için oluşan nokta ikilileri bizim h çözümümüz olur. Bu çözümümüze (nokta ikililerine) bir fonksiyon uydururuz. (Nokta ikililerine fonksiyon uydurma mathematica ile yapıldı.) Ve $h = y_1 - y_0$ eşitliğini kullanırsak $y_1 = h + y_0$ den birinci yaklaşımımız olan $y_1 = h + \cos t$ olacak

şekilde elde ederiz. Bu elde ettiğimiz birinci yaklaşımımızın fonksiyonu çizilirse Şekil 4.7 elde edilir.



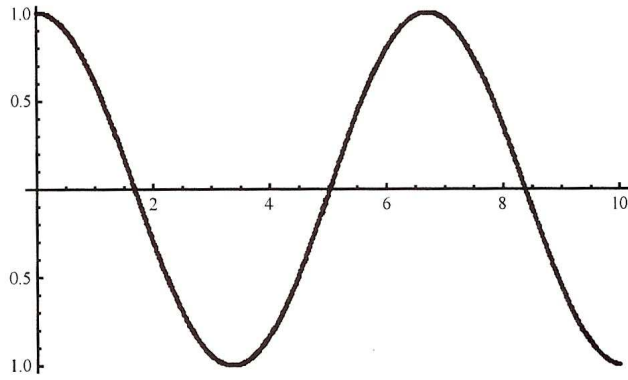
Şekil 4.7. Birinci yaklaşımımız sonucunda elde edilen grafik

$h'' + \text{Cos}(y_0) \cdot h = -F(y_0)$ denkleminde yaklaşımımızdaki $y_0 = \cos(t)$ yerine y_1 fonksiyonu ele alınır ve Newton yöntemini uygulamaya devam edilir. Ve bulunan h_1 çözümünden $y_2 = h_1 + y_1$ den y_2 yaklaşımımız elde edilir.



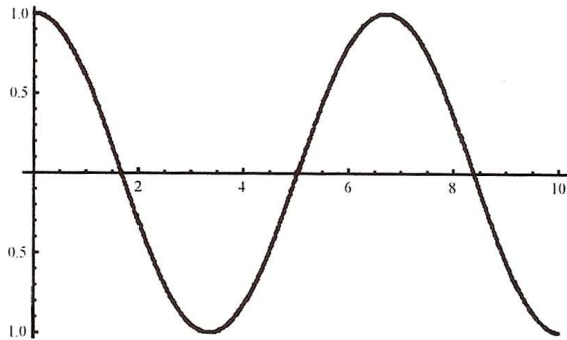
Şekil 4.8. İkinci yaklaşımımız sonucunda elde edilen grafik

Gene bu bulduğumuz y_2 yaklaşımını denkleminizde kullanıp üstteki işlemler tekrarlanırsa y_3 yaklaşımı elde edilir.



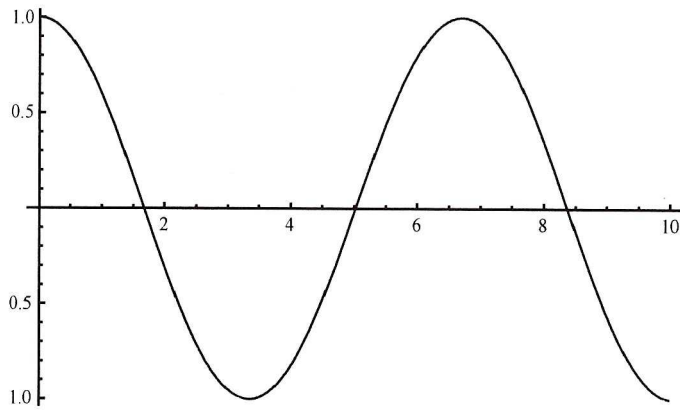
Şekil 4.9. Üçüncü yaklaşımımız sonucunda elde edilen grafik

Aynı şekilde devam edilirse y_4 yaklaşımımız aşağıdaki gibi olur.



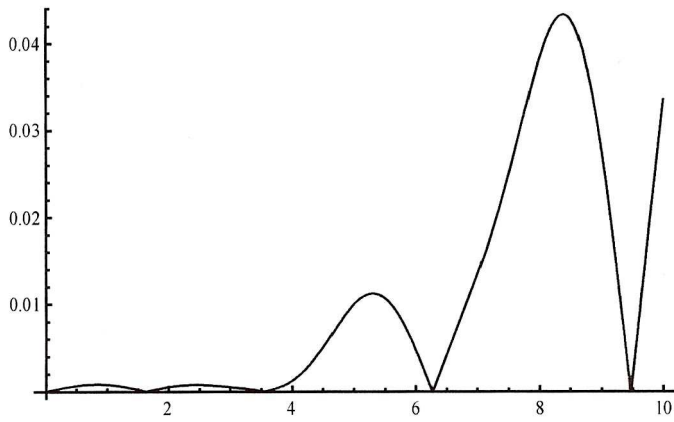
Şekil 4.10. Dördüncü yaklaşımımız sonucunda elde edilen grafik

Sonuç olarak aşağıda da görüleceği gibi bu yaklaşım gerçek çözümümüze çok yakındır.

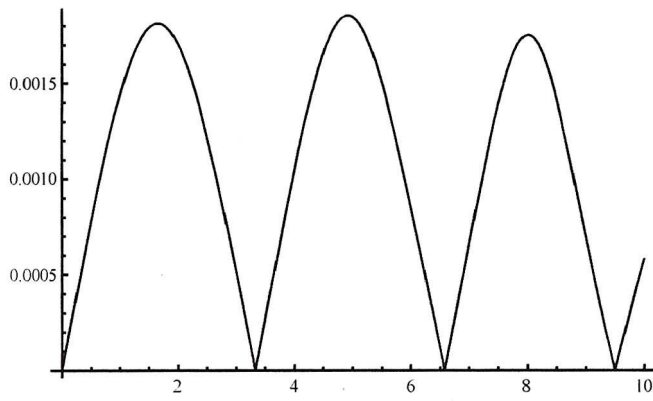


Şekil 4.11. Mathematica çözümü (gerçek çözüm)

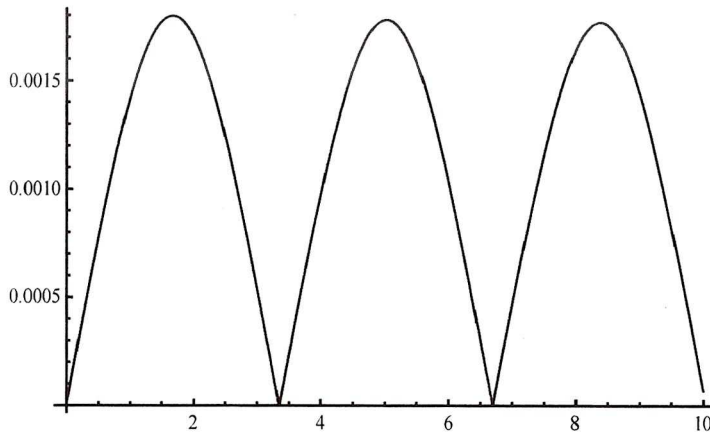
$y_0 = \cos(t)$ ile başlayan yaklaşım dizisi $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ hesaplanarak grafikleri çizilmiştir. Bunların gerçek çözümle arasındaki mutlak hatalar aşağıda verilmiştir.



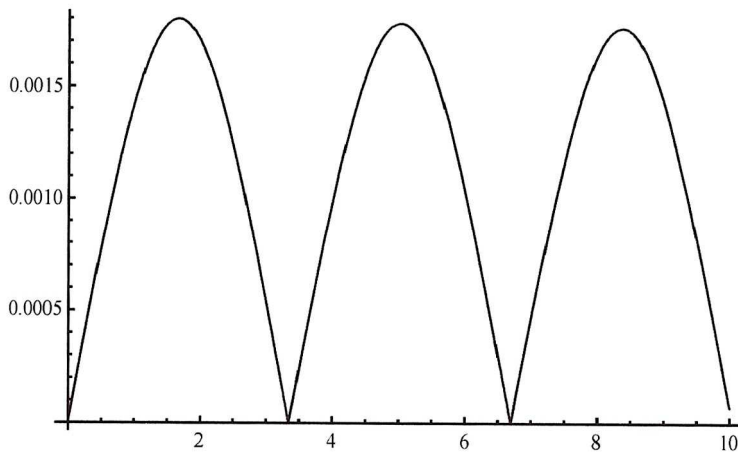
Şekil 4.12. Mathematica çözümü ile birinci yaklaşımın mutlak farkı



Şekils 4.13. Mathematica çözümü ile ikinci yaklaşımın mutlak farkı



Şekil 4.14. Mathematica çözümü ile üçüncü yaklaşımın mutlak farkı



Şekil 4.15. Mathematica çözümü ile dördüncü yaklaşımın mutlak farkı

Ama dördüncü mertebeden sonra Newton metodunun'un yakınsama hatası azalmaktadır.

Problem 4.9:

$$\varphi(t) = \int_0^1 e^{st} e^{-[\varphi(s)]^2} ds + \sqrt{t} - \frac{1}{t-1} [e^{t-1} - 1] \quad (4.19)$$

integral denklemini Newton metodu ile çözüünüz.

Çözüm: $\varphi(t) = \sqrt{t}$ fonksiyonu (4.19) denkleminin bir çözümü olduğundan $x(t) = 0$ fonksiyonu

$$x(t) - \int_0^1 e^{s(t-1)} [e^{-2\sqrt{s}x(s)-x^2(s)} - 1] ds = 0 \quad (4.20)$$

denkleminin bir çözümü olduğu açıktır.

$$H(s, x) = e^{-2\sqrt{s}x - x^2} - 1,$$

$$Q(t, s, x) = (1 - e^{s(t-1)}) (e^{-2\sqrt{s}x - x^2} - 1)$$

ve

$$F_1(x)(t) = x(t) - \int_0^1 H(s, x(s)) ds,$$

$$F_2(x)(t) = x(t) - \int_0^1 Q(t, s, x(s)) ds$$

olmak üzere (4.20) denklemini

$$F_1(x) + F_2(x) = 0$$

operatörlü denklem şeklinde yazabiliriz. Teorem 4.3'ün koşullarının gerçekleştiğini gösterelim. $0 < r < 1$ olmak üzere

$$x_0 \in \overline{S}_{\frac{r}{2}}(\theta) = \left\{ x \in C[0,1] : \|x\|_{\infty} \leq \frac{r}{2} \right\}$$

ve

$$G = \left\{ (t, s, x) \in R^3 : 0 \leq t, s \leq 1, x_0(s) - \frac{r}{2} \leq x \leq x_0(s) + \frac{r}{2} \right\}$$

olsun.

$$H(s, x) = e^{-2\sqrt{s}r - r^2} - 1,$$

$$H_x(s, x) = -2(\sqrt{s} + x)e^{-2\sqrt{s}r - r^2}$$

fonksiyonlarının G üzerinde sürekli oldukları açıktır. $g(x) = -2\sqrt{s}x - x^2$ olmak üzere

$\forall s \in [0,1]$ ve $\forall x_1, x_2 \in \left[x_0(s) - \frac{r}{2}, x_0(s) + \frac{r}{2} \right]$ için

$$H_x(s, x_2) - H_x(s, x_1) = 2(\sqrt{s} + x_1)(e^{g(x_1)} - e^{g(x_2)}) + 2(x_1 - x_2)e^{g(x_2)}$$

olur. $g(x_1) - g(x_2) = -2\sqrt{s}(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ olduğundan, her

$$x_1, x_2 \in \left[x_0(s) - \frac{r}{2}, x_0(s) + \frac{r}{2} \right] (0 \leq s \leq 1) \text{ için}$$

$$\begin{aligned} e^{g(x_2)} &\leq 1, \\ |g(x_1) - g(x_2)| &\leq 2(1+r)|x_1 - x_2|, \\ |e^{g(x_1)} - e^{g(x_2)}| &\leq 2(1+r)|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle $\forall s \in [0,1]$ ve $\forall x_1, x_2 \in \left[x_0(s) - \frac{r}{2}, x_0(s) + \frac{r}{2} \right] (0 \leq s \leq 1)$ için

$$|H_x(s, x_1) - H_x(s, x_2)| \leq 2(1 + 2(1+r)^2)|x_1 - x_2|$$

olur. Böylece $\bar{\ell}_0 = 2(1 + 2(1+r)^2)$ olur. $x_0 \in \overline{S_{\frac{r}{2}}(\theta)}$ bir başlangıç yaklaşım olmak

üzere $k(s) = H_x(s, x_0(s)) = -2(\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}r_0(s) - r_0^2(s)}$ çekirdeğinin $\tilde{R}(s)$ rezolventasını bulalım. Bu nedenle

$$F_1(x)(t) = x(t) - \int_0^1 H(s, x(s)) ds$$

biçiminde tanımlanan $F_1 : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ operatörünün $x_0(t)$ noktasında F - türevi

$$F_1'(x_0)h(t) = h(t) + 2 \int_0^1 (\sqrt{2} + x_0(s)) e^{-2\sqrt{s}r_0(s) - r_0^2(s)} h(s) ds$$

olduğundan $q(t) \in C[0,1]$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$h(t) + 2 \int_0^1 (\sqrt{2} + x_0(s)) e^{-2\sqrt{s}r_0^2(s)} h(s) ds = q(t) \quad (4.22)$$

lineer integral denkleminin çözümünün bulunması gerekir. (4.22) denkleminin çözümü

$$c = 2 \int_0^1 (\sqrt{2} + x_0(s)) e^{-2\sqrt{s}r_0(s) - r_0^2(s)} h(s) ds \quad (4.23)$$

olmak üzere $h(t) = q(t) - c$ biçimindedir. $h(t)$ 'nin bu ifadesini (4.23) denkleminde yerine koyulursa

$$c \left[1 + 2 \int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s)) e^{-2\sqrt{s}r_0(s) - r_0^2(s)} ds \right] = 2 \int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s)) e^{-2\sqrt{s}r_0(s) - r_0^2(s)} q(s) ds$$

denklemini elde edilir. $x_0 \in \overline{S_r(\theta)}$ başlangıç yaklaşım için

$$T(x_0) = 1 + 2 \int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s)) e^{-2\sqrt{s}r_0(s) - r_0^2(s)} ds \neq 0 \quad (4.24)$$

koşulu sağlansın. Bu durumda

$$c = \frac{2}{T(x_0)} \int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s)) e^{-2\sqrt{s}r_0(s) - r_0^2(s)} q(s) ds$$

olduğu görülür. Böylece (4.22) denkleminin çözümü

$$\tilde{R}(s) = \frac{-2}{T(x_0)} (\sqrt{s} + x_0(s)) e^{-2\sqrt{s}r_0(s) - r_0^2(s)}$$

olmak üzere

$$h(t) = [F_1'(x_0)]^{-1} q(t) = q(t) + \int_0^1 \tilde{R}(s) q(s) ds$$

bulunur.

$$\int_0^1 |\tilde{R}(s)| ds \leq \frac{2}{|T(x_0)|} \int_0^1 \left| \left(\sqrt{s} + x_0(s) \right) e^{-2\sqrt{s}r_0(s) - r_0^2(s)} \right| ds$$

olduğundan Teorem 4.3'teki m'_0 sayısı olarak

$$\overline{m}'_0 = \frac{2}{|T(x_0)|} \int_0^1 \left| \left(\sqrt{s} + x_0(s) \right) e^{-2\sqrt{s}r_0(s) - r_0^2(s)} \right| ds$$

alabiliriz.

$$\overline{P}'_0 = \max \left\{ \left| x_0(t) - \int_0^1 \left(e^{-2\sqrt{s}r_0(s) - r_0^2(s)} - 1 \right) ds \right| : t \in [0,1] \right\}$$

$$\overline{\eta}'_0 = \max \left\{ \int_0^1 \left| 1 - e^{s(t-1)} \left| e^{-2\sqrt{s}r(s) - r^2(s)} - 1 \right| ds : t \in [0,1], x(s) \leq r \right\}$$

diyelim.

Her $(t,s) \in [0,1]^2$ ve $\forall x_1, x_2 \in [-r, r]$ için

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}(t,s,x_1) - \mathcal{Q}(t,s,x_2)| &= \left| \left(1 - e^{s(t-1)} \right) \left(e^{g(x_1)} - e^{g(x_2)} \right) \right| \\ &\leq 2(e-1)(1+r)|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 4.3'teki L'_0 sayısı olarak $\overline{L}'_0 = 2(e-1)(r+1)$ alınabilir.

Böylece, Teorem 4.3 dolayısıyla $x_0 \in \overline{S}_r(\overline{\theta})$ başlangıç yaklaşımı için (4.24) koşulu

ve

$$\begin{aligned}
\bar{q}'_0 &= 1 - 2[(1 + \bar{m}'_0)\bar{\ell}'_0]^2 (\bar{p}'_0 + \bar{\eta}'_0) \\
&> (\bar{m}'_0 \bar{L}'_0)^2, \\
(1 + \bar{m}'_0)\bar{\ell}'_0 \delta_0 &= \sqrt{1 - \bar{q}'_0} \\
&< r(1 + \bar{m}'_0)\frac{\bar{\ell}'_0}{2}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri gerçekleşiyorsa (4.21) denkleminin tek bir $x^*(t) = 0$ çözümü vardır ve bu çözüm

$$\tilde{R}(s) = \frac{-1}{T(x_0)} (\sqrt{s} + x_0(s)) e^{-2\sqrt{s}r_0(s) - r_0^2(s)}$$

olmak üzere terimleri

$$\begin{aligned}
x_n(t) &= -\int_0^1 e^{s(t-1)} \left(1 - e^{-2\sqrt{s}r_{n-1}(s) - x_{n-1}^2(s)} \right) ds \\
&\quad - \int_0^1 \tilde{R}(s) \left[x_{n-1}(s) + \int_0^1 e^{r(s-1)} \left(1 - e^{-\sqrt{r}x_{n-1}(r)} \right) dr \right] ds, n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti gibi bulunabilir ve $(x_n(t))$ dizisinin $x^*(t) = 0$ çözümüne $\bar{q}_2 = 1 - \sqrt{1 - \bar{q}'_0} + (1 + \bar{m}'_0)\bar{L}'_0$ olmak üzere

$$\|x_n\|_\infty \leq \frac{(\bar{q}_2)^n}{1 - \bar{q}_2} (1 + \bar{m}'_0)(\bar{p}'_0 + \bar{\eta}'_0), n = 1, 2, \dots$$

hızla yaklaşır.

Problem 4.10:

$$\begin{cases} -x''(t) + f(t, x(t)) = 0, 0 < t < 1 \\ x(0) = \alpha_0, x(1) = \alpha_1 \end{cases} \quad (4.25)$$

sınır-değer problemini Newton metodu ile çözüünüz. Burada $f(t, x)$ ve $f_x(t, x)$ fonksiyonları

$$G = \{(t, x) \in R^2 : 0 \leq t \leq 1, -\infty < \alpha < +\infty\}$$

üzerinde sürekli fonksiyonlardır.

Çözüm: $X = C^{(2)}[0,1]$ ve $Y = C[0,1] * R^2$ olsun. $x \in X$ ve $y = (q, d_1, d_2) \in Y$ elemanlarının normları sırasıyla

$$\|x\|_x = \|x\|_\infty + \|x''\|_\infty, \|y\| = \|q\|_\infty + \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

biçiminde verildiğinde $(X, \|\cdot\|_x)$ ve $(Y, \|\cdot\|_y)$ Banach uzayları olduğu açıktır.

$$F(x) = \{-x''(t) + f(t, x(t)); x(0) - \alpha_0, x(1) - \alpha_1\} \quad (4.26)$$

biçiminde tanımlanan $F : X \rightarrow Y$ operatörü yardımıyla (4.25) problemi $F(x) = 0$ operatörlü denklem şeklinde yazılabilir. $F : X \rightarrow Y$ operatörünün $\forall x_0 \in X$ noktasında F - türevlenebilirdir ve

$$F'(x_0)h = \{-h''(t) + f_x(t, x_0(t))h(t); h(0), h(1)\}$$

olur. Her $u, v \in X$ için

$$F'(u)h - F'(v)h = \{[f_x(t, u(t)) - f_x(t, v(t))]h(t); 0, 0\}$$

olduğundan

$$\|F'(u)h - F'(v)h\| \leq L\|h\| \quad (4.27)$$

olur, burada

$$L = \max\{|f_x(t, u(t)) - f_x(t, v(t))| : t \in [0, 1]\}$$

X uzayında $r > 0$ yarıçaplı

$$S_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\|_X = \|x - x_0\|_\infty + \|x'' - x_0''\|_\infty < r\}$$

yuvarına bakalım. Eğer herhangi $u, v \in S_r(x_0)$

$$|f_x(t, u(t)) - f_x(t, v(t))| \leq l|u(t) - v(t)|$$

olacak şekilde $l > 0$ sayısı varsa (4.27) eşitsizliği gereğince $\forall u, v \in S_r(x_0)$ için

$$\|F(u) - F(v)\|_{X \rightarrow Y} \leq l\|u - v\|_X$$

bulunur. $\eta \geq 0$ yeteri kadar küçük sayı olmak üzere $\|F(x_0)\|_Y \leq \eta$ olacak şekilde $x_0 \in X$ fonksiyonu mevcut olsun. (4.26) dolayısıyla bu

$$\| -x''(\cdot) + f(\cdot, x_0(\cdot)) \|_\infty + \sqrt{(x_0(0) - \alpha_0)^2 + (x_0(1) - \alpha_1)^2} \leq \eta$$

olması demektir. Her $y = (q, \alpha_0, \alpha_1) \in Y$ için

$$\begin{aligned} -h''(t) + f_x(t, x_0(t))h(t) &= q(t) \\ h(0) &= \alpha_0, h(1) = \alpha_1 \end{aligned}$$

lineer sınır-değer probleminin $h(t) \in X$ çözümü için

$$\|h\|_X \leq m(\|q\|_\infty) + \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} = m\|y\|$$

olacak şekilde $m > 0$ sayısı var olsun. Bu $\| [F'(x_0)]^{-1} \|_{X \rightarrow Y} \leq m$ olması demektir. Bu durumda

$$\| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \|_{X \rightarrow Y} \leq m \cdot \eta$$

olur. Eğer $q = 2m^2\eta\ell < 1$ ise Teorem 4.2 dolayısıyla

$$r_0 = (1 - \sqrt{1 - q}) / m\ell \leq r$$

olmak üzere (4.25) sınır-değer probleminin tek $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve

$$\begin{aligned} -x''_{n+1}(t) + f_x(t, x_0(t))x_{n+1}(t) &= f_x(t, x_0(t))x_n(t) - f(t, x_n(t)), \\ x_{n+1}(0) = \alpha_0, x_{n+1}(1) &= \alpha_1, n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

lineer sınır-değer problemlerinin çözümlerinden oluşan $(x_n(t))$ fonksiyon dizisi $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ çözümüne

$$\|x_n - x^*\|_X \leq \frac{(1 - \sqrt{1 - q})^n}{\sqrt{1 - q}} m^2 \eta$$

hızla yaklaşır.

BÖLÜM 5. SONUÇ

Bu çalışmada Newton metodunun lineer olmayan (cebirsal, diferensiyel, integral) denklemlerin çözümüne uygulanışı detaylı ele alındı. Başta Newton metoduna teorik bir zemin olması açısından daralma dönüşüm prensibi açıklandı, ardından reel değerleri ve reel değişkenli sonuçlar için Newton metodu verilerek çözülmüş problemler ile konunun ve uygulanmasının kavranması sağlandı.

Lineer olmayan denklemlerin Newton metodu yardımıyla yaklaşık çözümlerinin bulunmasında ihtiyaç duyulan operatörlerin türevleri, reel değerli ve reel değişkenli fonksiyonlar için verilmiş türev tanımından yola çıkılarak bu tanımın uygun bir geçiş ile operatörlerin türevlerine genelleştirilmesi şeklinde açıklandı.

Newton metodunun operatör denklemlere uygulanışı üç temel teorem şeklinde verilerek bu metodun sırası ile cebirsal integral ve diferensiyel denklemlere uygulanışı teorik olarak ifade edildi. Ardından çok sayıda çözülmüş problemler ve bu problemlerin bazılarının çözümü için yazılan mathematica programları ile bu tür problemlerin çözümü için sıkça kullanılan bu metodun işlerliği hakkında yeterli bilgi verildi. Yazılan mathematica programları ayrıca tezin sonunda yer alan ekte verilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] ŐUHUBİ, E. S. , Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, 580, 2005.
- [2] HÜSEYİNOV, Z. , Nümerik Analiz, Adilođlu Matbaası, 23, 2003.
- [3] MUSAYEV, B. , ALP, M. , Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, 380, 2000.
- [4] KANTOROVİÇ, L.V. , AKİLOV, G.P. , Fonsiyonalniy Analiz, 674,1984.
- [5] KOLMOGOROV, A.N. , FOMİN, S.V. , Elementi Teorii Funksiy İ Funksiyonalnogo Analiza, 456, 1977.

EKLER

Problem 1.1. için Mathematica Programı

```
x0 = -7; M = 15; δ = 0.0000000001; ε = 0.0000000001;
f[x_] := Exp[x] - 1.5 - ArcTan[x]; Plot[f[x], {x, -20, 1}];
Do[x1 = x0 - f[x0] / f'[x0]; v = f[x1]; If[Or[Abs[x1 - x0] < δ, Abs[v] < ε], Goto[10]];
  x0 = x1; Print["n=", n, "x1=", x1, "v=", v], {n, 1, M}]; Label[10];
FindRoot[Exp[x] - 1.5 - ArcTan[x] = 0, {x, -14}] Print["x1=", x1, "v=", v]
```

Problem 4.2. için Mathematica Programı

```
f[x_, y_] := 3*x^2*y + y^2 - 1; g[x_, y_] := x^4 + x*y^3 - 1; h0 =  $\begin{pmatrix} 0.98 \\ 0.32 \end{pmatrix}$ ;
J =  $\begin{pmatrix} \partial_x f[x, y] & \partial_y f[x, y] \\ \partial_x g[x, y] & \partial_y g[x, y] \end{pmatrix}$ ; δ = 0.0000000001; ε = 0.0000000001; F =  $\begin{pmatrix} f[x, y] \\ g[x, y] \end{pmatrix}$ ; Do[
  h = N[Inverse[J /. {x → h0[[1, 1]], y → h0[[2, 1]]}].(F /. {x → h0[[1, 1]], y → h0[[2, 1]]})];
  h1 = h + h0; vv = -F /. {x → h1[[1, 1]], y → h1[[2, 1]]}; If[Or[Norm[h0 - h1] < δ, Norm[vv] < ε],
    Goto[10]; h0 = h1; Print["n=", n, "h1=", h1, "vv=", vv], {n, 1, 120}]; Label[10];
  gr1 = Plot3D[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]; gr2 = Plot3D[g[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1}];
  show[gr1, gr2];
```

Problem 4.6. için Mathematica Programı

```
Clear[kk, ff];
a=0;b=4;nn=4;h=(b-a)/(nn-1);kk=Table[0,{nn},{nn}];ff=Table[0,{nn},{1}];z=Table[0,{nn},{2}];
k[x_,y_]:=0.;
f[x_]=ArcTan[x];kk[[1,1]]=1.;Do[ff[[i,1]]=N[f[a+(i-1)*h]],{i,1,nn}];
Do[kk[[i,1]]=-0.5*h*k[a+(i-1)*h,a],{i,2,nn}];
Do[kk[[i,i]]=1-0.5*h*k[a+(i-1)*h,a+(i-1)*h],{i,2,nn}];
Do[
  Do[
    kk[[i,j]]=-k[a+(i-1)*h,a+(j-1)*h];
    ,{j,2,i-1}],{i,3,nn}];
sol=Inverse[kk].ff;
Do[z[[i,1]]=a+(i-1)*h;z[[i,2]]=sol[[i,1]],{i,1,nn}];
g11=ListPlot[z,PlotJoined→True];
birçöz=Interpolation[z];g12=Plot[birçöz[x],{x,0,4}];
Show[g11,g12];
kk=Table[0,{nn},{nn}];ff=Table[0,{nn},{1}];z=Table[0,{nn},{2}];
k[x_,y_]:=

$$\int_0^x \frac{1 - \text{birçöz}[y]}{1 - y^2} dy$$

f[x_]:=

$$\int_0^x \frac{1 - \text{birçöz}[y]}{1 - y^2} dy$$

  Do[ff[[i,1]]=N[f[a+(i-1)*h]],{i,1,nn}];
  Do[kk[[i,1]]=-0.5*h*k[a+(i-1)*h,a],{i,2,nn}];
  Do[kk[[i,i]]=1-0.5*h*k[a+(i-1)*h,a+(i-1)*h],{i,2,nn}];
Do[
```

```

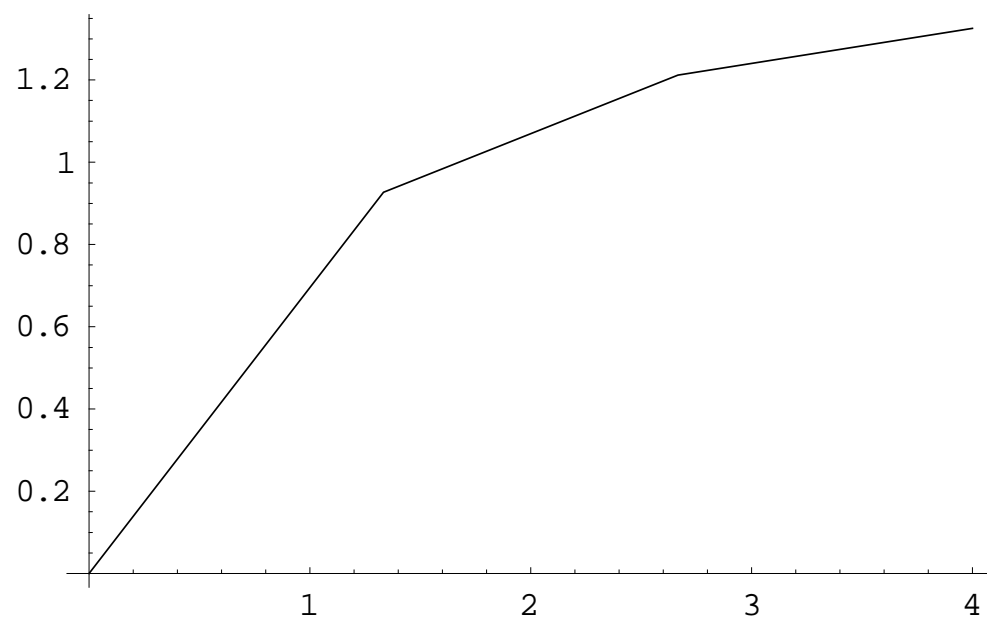
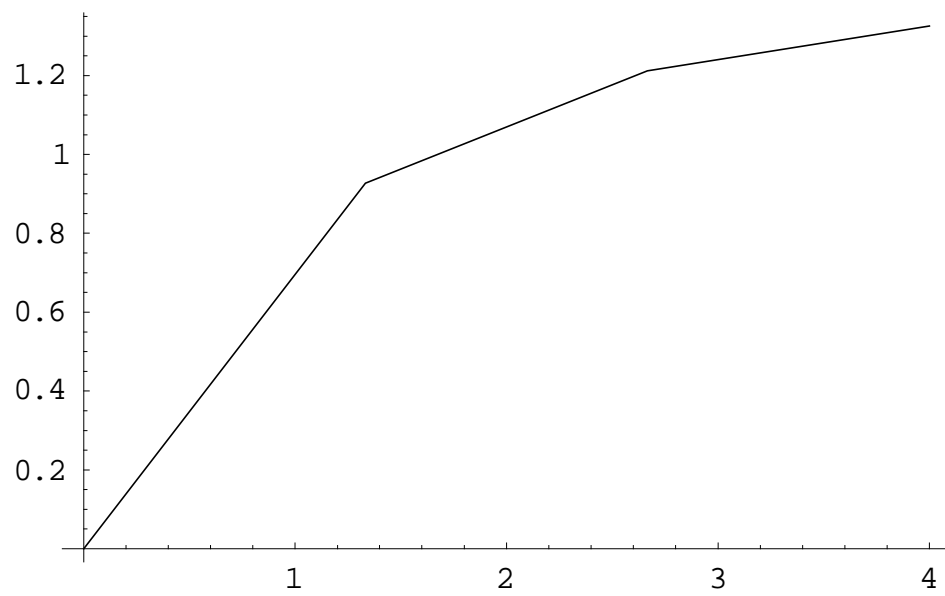
kk[[i,j]]=-k[a+(i-1)*h,a+(j-1)*h];
,{j,2,i-1},{i,3,nn}];
sol=Inverse[kk].ff;
Do[z[[i,1]]=a+(i-1)*h;z[[i,2]]=sol[[i,1]]+birçöz[a+(i-1)*h},{i,1,nn}];
g21=ListPlot[z,PlotJoined→True];
ikiçöz=Interpolation[z];g22=Plot[ikiçöz[x],{x,0,4}];g23=Plot[x,{x,0,4}];
Show[g21,g22,g23];

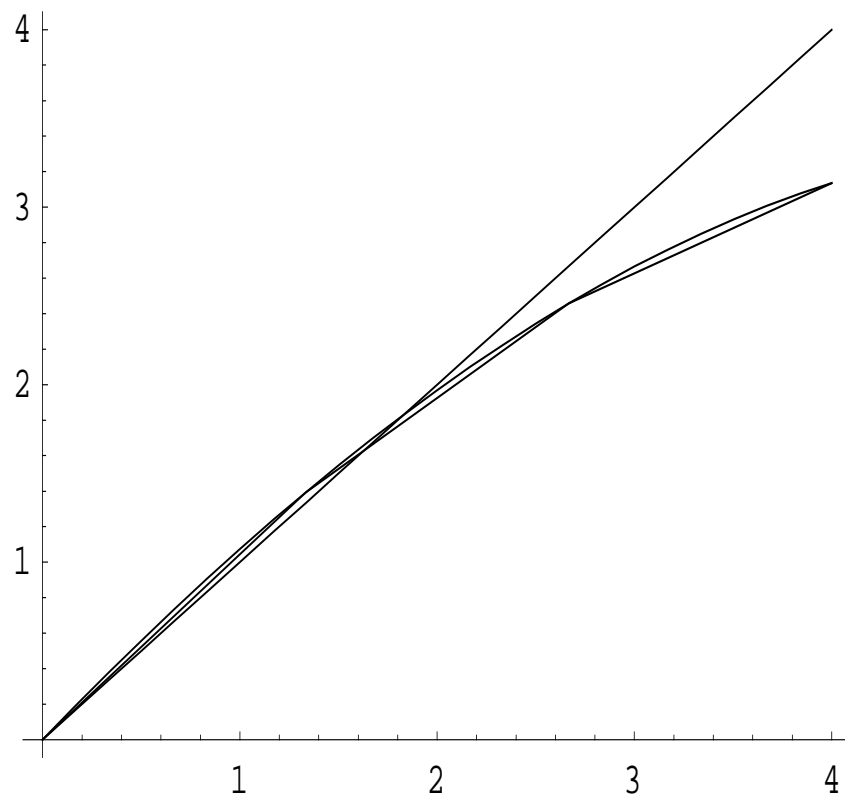
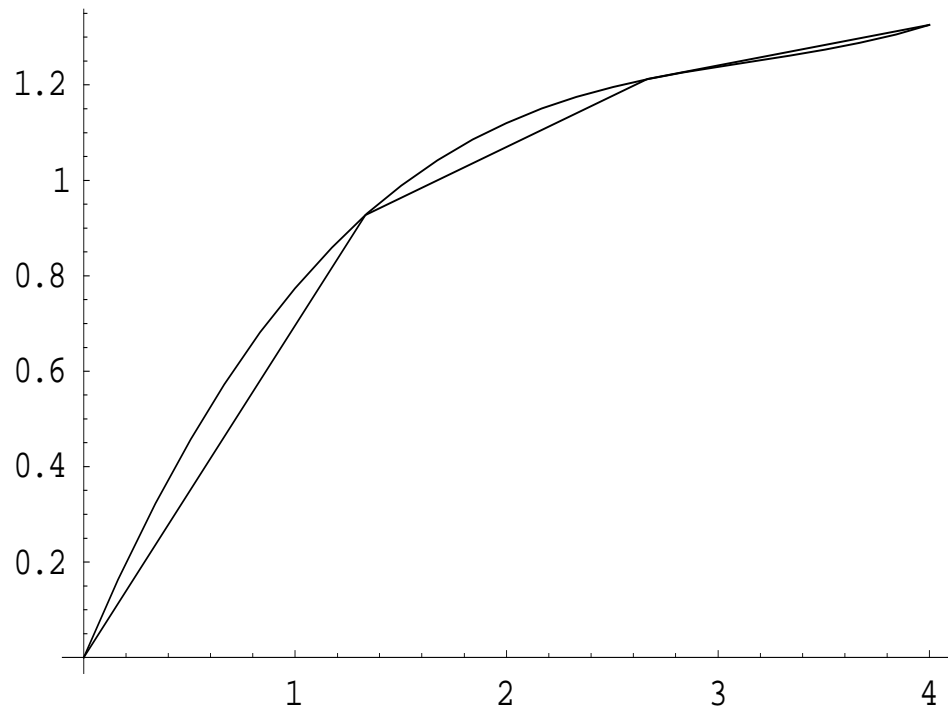
kk=Table[0,{nn},{nn}];ff=Table[0,{nn},{1}];z=Table[0,{nn},{2}];
k[x_,y_]:= (2*ikiçöz[x])/(1+y^2);

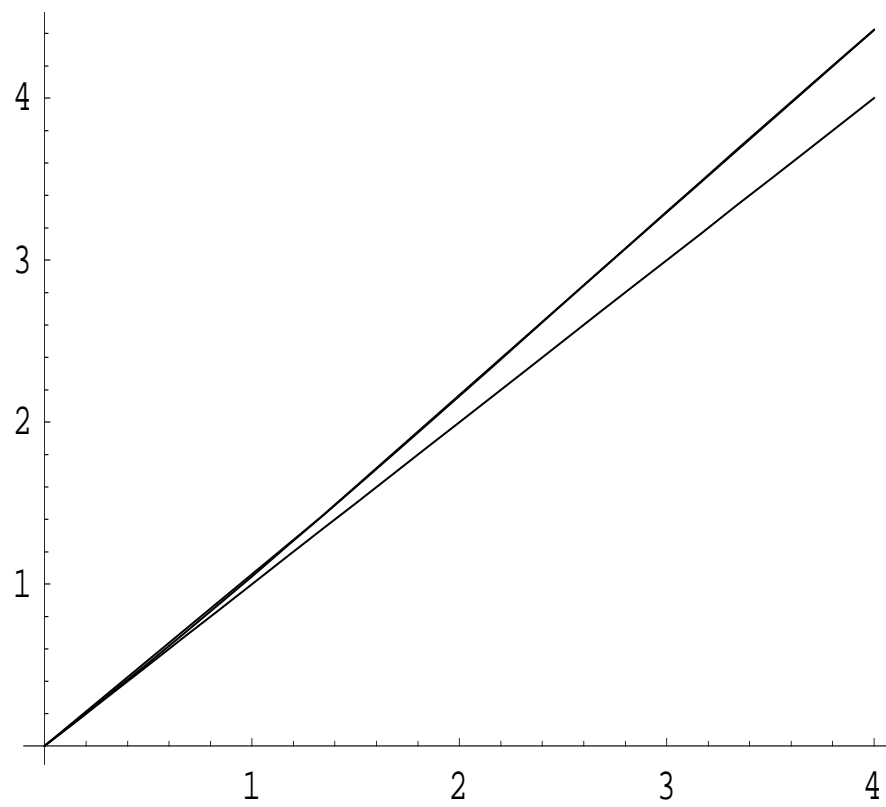
$$f[x_] := \int_0^x \frac{ikiçöz[y]}{1+y^2} dy$$

ikiçöz[x];kk[[1,1]]=1.;Do[ff[[i,1]]=N[f[a+(i-1)*h]},{i,1,nn}];
Do[kk[[i,1]]=-0.5*h*k[a+(i-1)*h,a},{i,2,nn}];
Do[kk[[i,i]]=1-0.5*h*k[a+(i-1)*h,a+(i-1)*h},{i,2,nn}];
Do[
Do[
kk[[i,j]]=-k[a+(i-1)*h,a+(j-1)*h];
,{j,2,i-1},{i,3,nn}];
sol=Inverse[kk].ff;
Do[z[[i,1]]=a+(i-1)*h;z[[i,2]]=sol[[i,1]]+ikiçöz[a+(i-1)*h]},{i,1,nn}];
g31=ListPlot[z,PlotJoined→True];
üççöz=Interpolation[z];g32=Plot[üççöz[x],{x,0,4}];g33=Plot[x,{x,0,4}];
Show[g31,g32,g33];

```







Problem 4.8. için Mathematica Programı

```

result = NDSolve[{y''[t] + Sin[y[t]] = 0, y[0] == 1., y'[0] = 0}, y, {t, 0, 10}];
Print["Mathematica z m "]; PGER ek = Plot[y[t] /. result, {t, 0, 10}]

(*****Birinci
Yakla im*****)(*R2=
NDSolve[{h'[t]+Cos[Cos[t]]*h[t]=Cos[t]-Sin[Cos[t]],h[0]=0,h'[0]=0},h,{t,0,10}];*)
M = 1000; t0 = 0.; u10 = 0; v10 = 0; h = 0.01;
f[t_, u_, v_] := v;
g[t_, u_, v_] := Cos[t] - Sin[Cos[t]] - Cos[Cos[t]] * u;
aa = Table[0, {M + 1}, {2}];
Do[
  k11 = f[t0, u10, v10]; k21 = g[t0, u10, v10];
  k12 = f[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k11, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k21]; k22 = g[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k11, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k21];
  k13 = f[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k12, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k22]; k23 = g[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k12, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k22];
  k14 = f[t0 + h, u10 + h * k13, v10 + h * k23]; k24 = g[t0 + h, u10 + h * k13, v10 + h * k23];
  u11 = u10 + (h/6) * (k11 + 2 * k12 + 2 * k13 + k14);
  v11 = v10 + (h/6) * (k21 + 2 * k22 + 2 * k23 + k24);
  u10 = u11; v10 = v11; (*Print["k=",k," t=",t," u10=",u10]*);
  aa[[k, 2]] = u10 + Cos[t0]; aa[[k, 1]] = t0; t0 = t0 + h
, {k, 1, M + 1}];
Print["Birinci yakla im"]; P1 = ListPlot[aa]
biryak = Interpolation[aa]
Plot[biryak[t], {t, 0, 10}]
(*****

(*
(* ikinci T rev hesabı*)
aat=Table[0,{M+1}];
Do[aa[[k]]= $\frac{1}{h^2}$ *(2*aa[[k,2]]-5*aa[[k+1,2]]+4*aa[[k+2,2]]-aa[[k+3,2]]);
, {k, 1, M-2}];
aat[[M-1]]= $\frac{1}{h^2}$ *(2*aa[[M-1,2]]-aa[[M-4,2]]+4*aa[[M-3,2]]-5*aa[[M-2,2]]);
aat[[M]]= $\frac{1}{h^2}$ *(2*aa[[M,2]]-aa[[M-3,2]]+4*aa[[M-2,2]]-5*aa[[M-1,2]]);
aat[[M+1]]= $\frac{1}{h^2}$ *(2*aa[[M+1-1,2]]-aa[[M-2,2]]+4*aa[[M-1,2]]-5*aa[[M,2]]);
(*****
*)

(***** ikinci Yakla im*****
t0 = 0.; u10 = 0; v10 = 0;
f[t_, u_, v_] := v;
g[t_, u_, v_] := -biryak''[t] - Sin[biryak[t]] - Cos[biryak[t]] * u;
bb = Table[0, {M + 1}, {2}];
Do[
  k11 = f[t0, u10, v10]; k21 = g[t0, u10, v10];
  k12 = f[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k11, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k21]; k22 = g[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k11, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k21];
  k13 = f[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k12, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k22]; k23 = g[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k12, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k22];
  k14 = f[t0 + h, u10 + h * k13, v10 + h * k23]; k24 = g[t0 + h, u10 + h * k13, v10 + h * k23];
  u11 = u10 + (h/6) * (k11 + 2 * k12 + 2 * k13 + k14);
  v11 = v10 + (h/6) * (k21 + 2 * k22 + 2 * k23 + k24);

```

```

u10 = u11; v10 = v11; (*Print["k=",k," t=",t," u10=",u10]*);
bb[[k, 2]] = u10 + biryak[t0]; bb[[k, 1]] = t0; t0 = t0 + h
, {k, 1, M + 1}];
Print[" kinci yakla im"]; P2 = ListPlot[bb]
ikiyak = Interpolation[bb]
Plot[ikiyak[t], {t, 0, 10}]
(*****

(***** nc Yakla im*****
t0 = 0.; u10 = 0; v10 = 0;
f[t_, u_, v_] := v;
g[t_, u_, v_] := -ikiyak''[t] - Sin[ikiyak[t]] - Cos[ikiyak[t]] * u;
cc = Table[0, {M + 1}, {2}];
Do[
k11 = f[t0, u10, v10]; k21 = g[t0, u10, v10];
k12 = f[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k11, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k21]; k22 = g[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k11, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k21];
k13 = f[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k12, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k22]; k23 = g[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k12, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k22];
k14 = f[t0 + h, u10 + h * k13, v10 + h * k23]; k24 = g[t0 + h, u10 + h * k13, v10 + h * k23];
u11 = u10 + (h/6) * (k11 + 2 * k12 + 2 * k13 + k14);
v11 = v10 + (h/6) * (k21 + 2 * k22 + 2 * k23 + k24);
u10 = u11; v10 = v11; (*Print["k=",k," t=",t," u10=",u10]*);
cc[[k, 2]] = u10 + ikiyak[t0]; cc[[k, 1]] = t0; t0 = t0 + h
, {k, 1, M + 1}];
Print[" nc yakla im"]; P3 = ListPlot[cc]
yak = Interpolation[cc]
Plot[ yak[t], {t, 0, 10}]
(*****

(*****D rd nc Yakla im*****
t0 = 0.; u10 = 0; v10 = 0;
f[t_, u_, v_] := v;
g[t_, u_, v_] := - yak''[t] - Sin[ yak[t]] - Cos[ yak[t]] * u;
dd = Table[0, {M + 1}, {2}];
Do[
k11 = f[t0, u10, v10]; k21 = g[t0, u10, v10];
k12 = f[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k11, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k21]; k22 = g[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k11, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k21];
k13 = f[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k12, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k22]; k23 = g[t0 +  $\frac{h}{2}$ , u10 +  $\frac{h}{2}$  * k12, v10 +  $\frac{h}{2}$  * k22];
k14 = f[t0 + h, u10 + h * k13, v10 + h * k23]; k24 = g[t0 + h, u10 + h * k13, v10 + h * k23];
u11 = u10 + (h/6) * (k11 + 2 * k12 + 2 * k13 + k14);
v11 = v10 + (h/6) * (k21 + 2 * k22 + 2 * k23 + k24);
u10 = u11; v10 = v11; (*Print["k=",k," t=",t," u10=",u10]*);
dd[[k, 2]] = u10 + yak[t0]; dd[[k, 1]] = t0; t0 = t0 + h
, {k, 1, M + 1}];
Print["D rd nc yakla im"]; P3 = ListPlot[dd]
d rtyak = Interpolation[dd]
Plot[d rtyak[t], {t, 0, 10}]
(*****

```

(*****Fark Grafikleri*****)

```
Print["Mathematica z m ile Birinci Yakla ımın Mutlak farkı"];
Plot[Abs[(y[t] /. result) - biryak[t]], {t, 0, 10}]
Print["Mathematica z m ile ikinci Yakla ımın Mutlak farkı"];
Plot[Abs[(y[t] /. result) - ikiyak[t]], {t, 0, 10}]
Print["Mathematica z m ile nc Yakla ımın Mutlak farkı"];
Plot[Abs[(y[t] /. result) - yak[t]], {t, 0, 10}]
Print["Mathematica z m ile D rd nc Yakla ımın Mutlak farkı"];
Plot[Abs[(y[t] /. result) - d rtyak[t]], {t, 0, 10}]
```

(*****)

```
Do[Print[y[k/100] /. result, " ", biryak[k/100], " ",
      ikiyak[k/100], " ", yak[k/100], " ", d rtyak[k/100]], {k, 1, 1001}]
```

Problem 4.4. (İntegral Denklem) için Mathematica Programı

```
a = 0; b = 1; NN = 5; λ = 1; h = (b - a) / (NN - 1); d = h / 2; k[x_, y_] := 1 - 3*x*y; f[x_] := x^3;
KK = Table[0, {NN}, {NN}]; Do[KK[[1, 1]] = d*k[a + (i - 1)*h, a], {i, 1, NN}];
Do[KK[[i, NN]] = d*k[a + (i - 1)*h, b], {i, 1, NN}];
Do[
  Do[
    KK[[i, j]] = 2*d*k[a + (i - 1)*h, a + (j - 1)*h]
    , {j, 2, NN - 1}
    , {i, 1, NN}];
ff = Table[0, {NN}, {1}]; Do[ff[[i, 1]] = f[a + (i - 1)*h], {i, 1, NN}];
A = KK - λ*IdentityMatrix[NN];
sol = N[Inverse[A].ff]; z = Table[0, {NN}, {2}];
Do[ z[[i, 1]] = a + (i - 1)*h; z[[i, 2]] = sol[[i, 1]], {i, 1, NN}];
Print[" z m=", z // MatrixForm];
Print["katsayılar matrisi=" MatrixForm[A]]; Print["sa taraf" MatrixForm[ff]];
Print["katsayılar matrisinin inversi=" MatrixForm[Inverse[A]]]
ListPlot[ z, PlotJoined -> True] Plot[ z, {x, 1, 5}]
```

Problem 4.5. (İntegral Denklem) için Mathematica Programı

```
a = 0; b = 1; NN = 100; λ = 1; h = (b - a) / (NN - 1); d = h / 2; u0[x_] = 0.5*x;
k1[x_, y_, u_] := 2*x*y*u; f1[x_, y_, u_] := u - ∫01 x*y*u2 dy -  $\frac{3}{4}$ *x;
k[x_, y_] := k1[x, y, u0[x]]; f[x_] := -f1[x, y, u0[x]];
KK = Table[0, {NN}, {NN}];
Do[KK[[1, 1]] = d*k[a + (i - 1)*h, a] /. x -> a + (i - 1)*h, {i, 1, NN}];
Do[KK[[i, NN]] = d*k[a + (i - 1)*h, b] /. x -> a + (i - 1)*h, {i, 1, NN}];
(*Print["KK=", KK // MatrixForm];*)
```

```

Do[
  Do[
    KK[[1, j]] = 2*d*k[a + (i-1)*h, a + (j-1)*h] /. x -> a + (i-1)*h
    , {j, 2, NN-1}]
  , {i, 1, NN}];
ff = Table[0, {NN}, {1}]; Do[ff[[i, 1]] = f[a + (i-1)*h] /. x -> a + (i-1)*h, {i, 1, NN}];
(*Print["ff=", ff//MatrixForm];*)
A = -KK + λ * IdentityMatrix[NN]; (*Print["A=", A//MatrixForm];*)
sol2 = N[Inverse[A].ff]; Print["sol2=", sol2];
z2 = Table[0, {NN}, {2}];
Do[ z2[[i, 1]] = a + (i-1)*h; z2[[i, 2]] = sol2[[i, 1]], {i, 1, NN}];
Print["ikinci yakla ım"]; ListPlot[ z2, Joined -> True]
ikiyak = Interpolation[ z2]; iki z[x_] := ikiyak[x] + u0[x];
Print["h-nin grafi i"]; Plot[ikiyak[x], {x, 0, 1}]
Print["kinci yakla ımın grafi i"]; Plot[iki z[x], {x, 0, 1}]

k[x_, y_] := k1[x, y, iki z[x]]; f[x_] := -f1[x, y, iki z[x]];
KK = Table[0, {NN}, {NN}];
Do[KK[[1, 1]] = d*k[a + (i-1)*h, a] /. x -> a + (i-1)*h, {i, 1, NN}];
Do[KK[[1, NN]] = d*k[a + (i-1)*h, b] /. x -> a + (i-1)*h, {i, 1, NN}];
(*Print["KK=", KK//MatrixForm];*)

```

ÖZGEÇMİŞ

Enser EKŞİ 28.04.1979'da Ardahan'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul Pendik'te, lise öğrenimini Kocaeli Gebze'de tamamladı.2004'te Azerbaycan Devlet Pedagoji Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden mezun oldu. Bir süre özel kurumlarda matematik öğretmenliği görevinde bulundu. Halen eğitim amaçlı gittiği İngiltere'de alanı ile ilgili çeşitli çalışmalarda bulunmaktadır.