T.C
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERMITE POLİNOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ebru UZEL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Şevket GÜR

Ağustos 2008

T.C
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERMITE POLİNOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ebru UZEL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 08 /08/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Abdullah YILDIZ Jüri Başkanı	Doç. Dr. Elman ALİYEV Jüri Üyesi	Yrd. Dç. Dr. Şevket GÜR Jüri Üyesi

TEŞEKKÜR

Çalışmamın başlangıcından sonuna kadar değerli bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan, yol gösteren ve bana sabırla tahammül eden değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Şevket GÜR'e her zaman bana destek olan eşime ve kardeşime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$H_n(x)$	: Hermite polinomu
$P_n(x)$	: Legendre polinomu
$(c)_n$	: Faktöriyel fonksiyonu
$F(a,b,c,x)$	: Hipergeometrik fonksiyon
D_x^n	: x e göre n. basamaktan türev operatörü
$h_n(x)$	: Normalleştirilmiş Hermite fonksiyonu
$\tilde{h}_n(x)$	: H operatörünün öz fonksiyonu

ÖZET

Anahtar kelimeler : Hermite Diferensiyel Denklemi, Hermite Polinomları, Doğurucu Fonksiyon

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Hermite polinomlarının kullanım alanlarından bahsedilerek teze giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde tekil Sturm-Liouville sınır değer problemi yardımıyla Hermite diferensiyel denklemi ve Hermite polinomu elde edilmiştir. Hermite polinomuyla ilgili örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde Hermite polinomlarının özellikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde tez çalışmasından elde edilen sonuçlar belirtilmiştir.

HERMITE POLYNOMIALS

SUMMARY

Key Words: Hermite Differential Equation, Hermite polynomials, Generating Functions.

This thesis is consists of five chapters.

In the first chapter , it is mentioned about the using areas of the Hermite polinomials and there is an introduction to the thesis.

In the second chapter, main definitions and concepts used in the thesis are given.

In the third chapter, the Hermite differential equation and Hermite polinomials are obtained with singular Sturm-Liouville problems . Some examples are given

In the fourth part, the features of the Hermite equation are emphasized.

In the fifth chapter, the results are stated gained through the study of thesis.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematiksel fizik problemleri çoğu zaman katsayıları değişkenlerine bağlı olan Adi Diferensiyel Denklemler veya Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler yardımıyla ifade edilmektedir. Bu tipteki denklemlerin özelliği araştırma yapılan bölgede veya bölgenin sınır çizgisinin üzerinde katsayıların tekil (singüler) olmasıdır. Yani bölgenin bazı noktalarında katsayıların sıfır olması veya belirsizlik halinde bulunmasıdır. Böyle tipteki denklemlere dönüşen fiziksel problemlerin analitik çözümlerini bulmak çok zor olduğu gibi bazı durumlarda çözüme ulaşmak da mümkün değildir. Problemin zorluğu, denklemin çözümünün sonsuz seri şeklinde aranmasından kaynaklanmaktadır. Böyle durumlarda ise karşımıza yeni bir problem çıkmaktadır. Bu da denklemin tüm özel durumları için sonsuz serinin yakınsaklığının ispatlanması ve özdeğer fonksiyonlarının ortogonalliğinin gösterilmesidir. Ayrıca matematiksel fizik probleminin çözümünün kararlılığını ispatlamak ve korumak da gerekir.

Bu cins fiziksel problemlere uyan denklemler Bessel, Legendre, Chebyshev-Hermite, Chebyshev- Laguerre tipindeki denklemlerdir. Bu tipteki denklemlere fiziksel problemlerin çözümlerinde sıkça rastlanmaktadır. Örneğin bu uygulama klasik mekanik problemlerinde başlamış, elektromanyetik teori, kuantum mekaniği, kuantum fiziği ve termodinamik problemlerinde de kullanılmıştır.

Bu zorlukları aşmak için bilimde birçok önemli özel fonksiyonlar sınıfı oluşturulmuştur. Bunlardan en çok kullanılan silindirik fonksiyonlar (Bessel, Hankel, Weber, Neuman fonksiyonları) , küresel fonksiyonlar (Legendre polinomları) ve özel polinomların (Chebyshev-Hermite, Chebyshev- Laguerre polinomları) oluşturduğu sınıflardır. Bu tür denklemlerin yardımıyla ve özel fonksiyonların kullanılması ile çeşitli fiziksel olaylarda ve tekniğin önemli problemlerinde yaklaşık çözümler bulmakta ve problemlere açıklık getirebilmektedir.

Bu nedenlerle konunun önemi dikkate alınarak bu tezde, Hermite diferensiyel denklemi, onun çözümü olan Hermite polinomlarının özellikleri incelenerek tek bir kaynakta toplanmıştır.

Hermite polinom sistemi cebir ve sayılar teorisindeki çalışmalarıyla tanınan Fransız matematikçi Charles HERMITE (1822-1901) tarafından bulunmuştur.

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1. Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerin bulunması problemine Başlangıç Değer Problemi denir. Verilen şartlara da Başlangıç Şartları denir.

Tanım 2.2. Diferensiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri üzerinde bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar altında çözümlerin bulunması problemine Sınır Değer Problemi denir. Verilen şartlara da Sınır Şartları denir.

Tanım 2.3. Birinci mertebeden bir diferensiyel denklem aranan fonksiyon ile onun türevine göre lineerse, bu durumda denkleme birinci mertebeden lineer diferensiyel denklem denir.

Tanım 2.4. Reel değişkenli $f(x)$ fonksiyonu, h nin komşuluğunda $(x-h)$ nin kuvvetlerine göre Taylor serisine açılabiliyorsa bu fonksiyon h de analitiktir. Bir (a,b) aralığının her noktasında analitik olan bir fonksiyon o aralıkta analitiktir.

Karmaşık değişkenli ve tek değerli bir f fonksiyonu, D nin ancak bazı noktaları hariç diğer noktalarında türevlenebiliyorsa, bu fonksiyon D de analitiktir. Eğer bu fonksiyon D nin bütün noktalarında türevlenebiliyorsa buna düzgün analitik fonksiyon denir. Örneğin,

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonu, $z=1$ noktası hariç her yerde analitiktir.

Tanım 2.5. $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ denkleminde $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları x_0

noktasında analitik iseler, x_0 noktasına adi nokta denir.

Tanım 2.6. Tanım 2.5 deki $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları x_0 da analitik değil iseler bu taktirde x_0 noktasına, $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ denkleminin tekil noktasıdır denir. [2]

Tanım 2.7. λ gerçel (veya karmaşık) parametre olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \qquad a \le x \le b \tag{2.1}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. L diferensiyel operatörü

$$Ly = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y \tag{2.2a}$$

olarak tanımlanırsa (2.1) denklemi bu operatör yardımıyla

$$Ly - \lambda\rho(x)y = 0 \tag{2.2b}$$

biçiminde yazılabilir. Burada L ye ikinci mertebeden lineer diferensiyel operatör, λ sayısına spektral parametre, $q(x)$ fonksiyonuna ise potansiyel fonksiyonu denir.

(2.2a, b) denkleminin

$$\begin{aligned} U_1 y &= A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \\ U_2 y &= A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

sınır koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine Sturm-Liouville sınır değer problemi adı verilir. Burada A_1 , A_2 , B_1 , B_2 reel sabitler olup $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$ $A_2^2 + B_2^2 \neq 0$ koşulları sağlanmaktadır.

Tanım 2.8. (2.1) ifadesi, λ spektral parametresine bağlı bir denklemler ailesidir. $y(x)=0$ fonksiyonu λ nın her bir değerinde denklemi ve verilmiş sınır koşullarını sağladığına göre aşikar bir çözümdür. Eğer bu homojen denklemin, λ nın herhangi bir değerinde (2.3) homojen sınır koşullarını sağlayan sıfırdan farklı çözümü varsa, λ nın bu değerine sınır değer probleminin özdeğeri , bu özdeğere karşılık gelen çözüme ise özfonksiyon denir.

Tanım 2.9. $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_n$ sabit gerçel sayılar olmak üzere

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

şeklindeki diferensiyel denkleme Euler-Cauchy diferensiyel denklemi denir.

Tanım 2.10. $A \subset R$ ve V bir vektör uzayı olsun. A nın her bir elemanına V nin bir ve yalnız bir elemanını karşılık getiren fonksiyona bir vektör değerli fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.11. F ve G vektör değerli fonksiyonlar olsun. $\forall t \in A$ için $F(t).G(t)=0$ üzerinde ortogonaldir(diktir) denir.

Tanım 2.12.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$$

denklemi uygulamalarda karşılaşılan ve özfonksiyonlarına özel fonksiyon denilen bir dizi denklemin genel biçimidir. Regüler Sturm-Liouville probleminden farklı olarak, $p(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığının uç noktalarında sıfır olması veya bu aralığın sonsuz olması halinde bu denklemler için tanımlanan sınır değer problemi tekil Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır. O halde özel fonksiyonlar, tekil Sturm-Liouville sınır değer probleminin çözümleri olan fonksiyonlardır.

Tanım 2.13. c herhangi bir reel sayı ve n bir doğal sayı olmak üzere faktöriyel fonksiyonu,

$$(c)_n = c(c+1)(c+2)....(c+n-1) \qquad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $(c)_n$ sembolü, c çarpanından başlayarak her bir çarpanın bir öncekinden bir fazla olduğu n tane çarpanın çarpımını göstermektedir. Özel olarak,

$$(c)_0 = 1 \qquad c \neq 0 \text{ için}$$

olarak tanımlanır. Faktöriyel fonksiyonu

$$(1)_n = 1.2.3...n = n!$$

için bilinen faktöriyelin genişletilmişidir.

Tanım 2.14. $x > 0$ olmak üzere Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

ile tanımlanır.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad x>0$$

bağıntısı vardır ve bu bağıntının tekrar tekrar kullanılmasıyla bir n tamsayısı için

$$\begin{aligned}\Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1) \\ &= (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2) \\ &\;. \\ &\;. \\ &\;. \\ &= (a)_n\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Faktöriyel fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \qquad n \text{ tamsayı} \qquad n > 0 \;\; ve \; a > 0$$

bağıntısı vardır. $n \geq 1$ tamsayısı için $x = n$ alırsak,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = ... = n!\Gamma(1)$$

ve

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

olduğundan

$$\Gamma(n+1) = n!$$

bulunur.

Tanım 2.15. a, b, c sabit parametreler olmak üzere,

$$x(1-x)y'' + \left[c - (a+b+1)x\right]y' - aby = 0 \tag{2.5}$$

denklemine Hipergeometrik denklem adı verilir. (2.5) denkleminin bir özel çözümü

$$y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}$$

şeklindedir. Bu özel çözüm hipergeometrik fonksiyon olarak adlandırılır ve

$$F(a,b;c;x)$$

sembolü ile gösterilir. Yani,

$$F(a,b;c;x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n x^n}{(c)_n n!}$$

denkleminin bir çözümüdür.

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

Tanım 2.16. ile gösterilen Beta fonksiyonu Gamma fonksiyonu yardımıyla

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.17. n bir parametre olmak üzere

$$y''-2xy'+2ny=0$$

diferensiyel denklemine Hermite denklemi adı verilir. Bu denklemin çözümü tüm sonlu x ve a_0, a_1 keyfi değerleri için

$$a_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(-n)(-n+2)...(-n+2k-2)x^{2k}}{(2k)!}\right]$$

$$+a_1\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(1-n)(1-n+2)...(1-n+2k-2)x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] \qquad (2.7)$$

şeklindedir. Eğer n sıfır veya pozitif tamsayı ise Hermite denklemi daima n inci dereceden (2.7) şeklinde polinomsal bir çözüme sahiptir. Bu polinomsal çözüm; $\left[\frac{1}{2}n\right]$, $\frac{1}{2}n$ büyük ya da eşit olan en büyük tamsayı olmak üzere $H_n(x)$ ile gösterilir ve

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{n!}{(n-2k)!k!}(2x)^{n-2k}$$

fonksiyonu ile tanımlanır ve Hermite polinomu olarak bilinir.

Tanım 2.18. $\{f_n(x)\}$ şeklinde gösterilen fonksiyonlar kümesi için doğurucu fonksiyon

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n f_n(x)t^n$$

şeklindedir. Burada c_n, $\{f_n(x)\}$ kümesinin parametrelerini içeren n nin bir fonksiyonu x *ve* t ise bağımsız değişkenlerdir. Örnek olarak $\{1,x,x^2,.....x^n,.....\}$ fonksiyon kümesinin bir doğurucu fonksiyonu $\exp\{xt\}$ dir. Çünkü

$$\exp\{xt\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xt)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n t^n$$

yazılabilmektedir. Burada $G(x,t)$ yerine $\exp\{xt\}$, c_n yerine $\frac{1}{n!}$ ve $f_n(x)$ yerine x^n gelmiştir.

Tanım 2.19. $G(x,y,t)$ fonksiyonu

$$G(x,y,t)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n f_n(x)f_n(y)t^n$$

Şeklinde t nin kuvvetlerine göre açılabiliyorsa $G(x,y,t)$ ye bilineer doğurucu fonksiyon denir. Burada g_n, x *ve* y den bağımsızdır.

BÖLÜM 3. HERMITE DİFERENSİYEL DENKLEMİ

3.1. Hermite Diferensiyel Denklemi

Hermite diferensiyel denklemi

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0 \qquad (3.1.1)$$

(3.1.1) ile verilen denklemde $p(x)=e^{-x^2}$, $\rho(x)=e^{-x^2}$, $q(x)=0$, $a=-\infty$, $b=\infty$ alınarak

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right)-0+\lambda e^{-x^2}y=0$$

$$\left(e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right)'+\lambda e^{-x^2}y=0$$

$$-2xe^{-x^2}\frac{dy}{dx}+e^{-x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)'\lambda e^{-x^2}y=0$$

$$e^{-x^2}y''-2xe^{-x^2}y'+\lambda e^{-x^2}y=0$$

$$y''-2xy'+\lambda y=0 \qquad (\lambda=2n,\ n=0,1,2.....)$$

elde edilmiş olur.

3.2.Hermite Diferensiyel Denkleminin Çözümü

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \qquad (3.2.1)$$

Hermite diferensiyel denkleminin

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

şeklinde bir çözümü bulunabilir. y nin kendisi ve

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

türevleri (3.2.1) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

elde edilir.

Bu denklemde x in aynı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse

x^0 : $\qquad 2(1)\, a_2 + (\lambda - 2n)\, a_0 = 0$

veya

$$a_2 = -\frac{\lambda}{2.1} a_0$$

x^1 : $\qquad 3(2) a_3 + (\lambda - 2) a_1 = 0$

veya

$$a_3 = \frac{2-\lambda}{2.3} a_1$$

x^2 : $$4(3)a_4 + (\lambda - 4)a_2 = 0$$

veya

$$a_4 = \frac{4-\lambda}{3.4} a_2$$

x^3 : $$5(4)a_5 + (\lambda - 6)a_3 = 0$$

veya

$$a_5 = \frac{6-\lambda}{4.5} a_3$$

x^n : $$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2na_n + \lambda a_n = 0$$

veya katsayıları 0 'a eşitlersek

$$a_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)} a_n, \qquad n \geq 0 \qquad (3.2.2)$$

yazılabilir.

$$a_4 = \frac{(4-\lambda)}{3.4} a_2$$
$$= \frac{(4-\lambda)(-\lambda)}{4!} a_0,$$

$$a_5 = \frac{(6-\lambda)}{5.4} a_3$$
$$= \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!} a_1,$$

$$a_6 = \frac{(8-\lambda)}{5.6} a_4$$

$$= \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)(-\lambda)}{6!} a_0 ,$$

$$a_7 = \frac{(10-\lambda)}{7.6} a_5$$

$$= \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!} a_1 ,$$

$$a_8 = \frac{(12-\lambda)}{7.8} a_6$$

$$= \frac{(12-\lambda)(8-\lambda)(4-\lambda)(-\lambda)}{8!} a_0 ,$$

olur.

Bu şekilde devam edilirse (3.2.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü;

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ...$$

$$y(x) = a_0 \left[1 - \frac{\lambda}{1.2} x^2 - \frac{\lambda(4-\lambda)}{1.2.3.4} x^4 + ... \right] + a_1 \left[x + \frac{(2-\lambda)}{2.3} x^3 + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)}{2.3.4.5} x^5 + ... \right]$$

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} - \frac{\lambda(4-\lambda).....(4n-4-\lambda)}{(2n)!} x^{2n}$$

$$y_2(x) = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-\lambda)(6-\lambda).....(4n-2-\lambda)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

şeklinde bulunur.

$a_0 = c_1$

$a_1 = c_2$

alınırsa Hermite denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

şeklinde bulunur.

Eğer n çift ise y_1 için sonsuz seri sınırlandırılır ve $n.$ dereceden bir polinom elde edilir. Yani y_2 çözümü sonsuz terimli seri olur. Eğer n tek ise bu kez y_2 sınırlandırılır ve yine $n.$ dereceden bir polinom elde edilir. Sonuç olarak Hermite diferensiyel denkleminin n parametresinin her tamsayı değeri için, çözümlerden biri daima polinom olur, diğeri sonsuz terimli seri olarak kalır. Verilen bir $\lambda = 2n$ değeri için polinom olan çözüm Hermite Polinomu olarak adlandırılır ve H_n ile gösterilir.

Hermite polinomları ise
n çift olması durumunda

$$H_n(x) = a_0 \left[1 - \frac{n}{1.1!} x^2 - \frac{n(n-2)}{1.3} \frac{x^4}{2!} - \frac{n(n-2)(n-4)}{1.3.5} \frac{x^6}{3!} + ... \right]$$

n tek olması durumunda

$$H_n(x) = a_1 \left[x - \frac{(n-1)}{3} \frac{x^3}{1!} + \frac{(n-1)(n-3)}{3.5} \frac{x^5}{2!} - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{3.5.7} \frac{x^7}{3!} + ... \right]$$

şeklinde verilir.

a_0 ve a_1 katsayıları 2^n olacak şekilde seçilirse; tek ve çift n değerleri için Hermite polinomunun toplam formülü

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!k!} (2x)^{n-2k} \qquad (3.2.3)$$

elde edilir.

Örnek: $H_5(x)$ i (3.2.3) ü kullanarak bulalım.

Çözüm: Burada $\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{5}{2}\right]$=2

$$H_5(x)=\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\frac{5!}{(5-2k)!k!}(2x)^{5-2k}$$

$$=\frac{5!(2x)^5}{5!0!}-\frac{5!(2x)^3}{3!1!}+\frac{5!(2x)^1}{1!2!}$$

$$=32x^5-160x^3+120x$$

Örnek: $n=6$ için Hermite polinomunu bulalım. (a_0=1, a_1=0)

Çözüm: (3.2.2) yi kullanırsak

$$a_{n+2}=\frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)}\,a_n\,,$$

$n=0$ $\quad a_2=\frac{2(0-6)}{1.2}.1$

$a_2=6$

$n=1$ $\quad a_4=\frac{2(2-6)}{3.4}$(-6)

$a_4=\frac{12}{3}$

$n=2$ $\quad a_6=\frac{2(4-6)}{5.6}.\frac{12}{3}$

$a_6=-\frac{8}{15}$

$$H_6(x) = 1 - 6x^2 + 4x^4 - \frac{8}{15}x^6$$

Örnek: $n = 5$ için Hermite polinomu $y'' - 2xy' + 10y = 0$ ise $y(x)$ i bulalım. (a_0=1, a_1=0)

Çözüm: $a_1 = a_3 = \ldots = 0$

$$a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n ,$$

$n = 0$ $\quad a_2 = \frac{2(0-5)}{1.2} a_0$

$$a_2 = \frac{2(-5)}{1.2}$$

$n = 2$ $\quad a_4 = \frac{2(2-5)}{3.4} a_2$

$$a_4 = \frac{2^2(-5)(-3)}{4!}$$

$n = 4$ $\quad a_6 = \frac{2(4-5)}{5.6} a_4$

$$a_6 = \frac{2^3(-5)(-3)(-1)}{6!}$$

genelleştirirsek

$$a_{2n} = \frac{2^n(-5)(-3)(-1)...(2n-7)}{(2n)!} \qquad n = 0,1,2,.....$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(-5)(-3)(-1)...(2k-7)}{(2n)!} x^{2n}$$

Örnek: $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ denkleminin çözümleri

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{(n-2k)!k!} n!$$

şeklindeki polinomun açılımıdır.

$n = 0$ için; $$H_0(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{0}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{-2k} 0!}{(-2k)!k!} = \frac{(-1)^0 (2x)^0 1}{0!0!} = 1$$

$$H_0(x) = 1$$

$n = 1$ için; $$H_1(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{1}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{-2k} 1!}{(1-2k)!k!} = \frac{(-1)^0 (2x) 1}{1!0!}$$

$$H_1(x) = 2x$$

$n = 2$ için; $$H_2(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{2}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{2-2k} 2!}{(2-2k)!k!} = \frac{(-1)^0 (2x)^2 2!}{0!2!} + \frac{(-1)^1 (2x)^0 2!}{1!0!}$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$n = 3$ için; $$H_3(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{3}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{3-2k} .3!}{(3-2k)!.k!} = \frac{(-1)^0 (2x)^3 3!}{0!3!} + \frac{(-1)^1 (2x) 3!}{1!1!}$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$n = 4$ için; $$H_4(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{4}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{4-2k} .4!}{(4-2k)!.k!}$$

$$=\frac{(-1)^0(2x)^4 4!}{0!4!}+\frac{(-1)^1(2x)^2 4!}{1!2!}+\frac{(-1)^2(2x)^0 4!}{2!0!}$$

$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$$

$n=5$ için; $$H_5(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{5}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2x)^{5-2k}5!}{(5-2k)!k!}$$

$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$$

3.3. Hermite Polinomları

Hermite polinomunun doğurucu fonksiyonu

$$H(x,t)=e^{2xt-t^2} \quad ,|t|<\infty \ , \qquad |x|<\infty \qquad (3.3.1)$$

şeklindedir.. Hermite polinomunun serisel ifadesi bu bağıntıdan yararlanılarak elde edilir.

$f(x,t)=e^{2xt-t^2}$ nin t ye göre türevleri alınırsa

$$f'(t)=(2x-2t)e^{2xt-t^2}$$
$$f''(t)=2x(2x-2t)e^{2xt-t^2}-2e^{2xt-t^2}-2t(2x-2t)e^{2xt-t^2}$$
$$f'''(t)=2^{2xt-t^2}(x-t)\left\{2\left[4\left(x-t\right)^2-2\right]-8\right\}$$

.

.

.

$$f(0)=1$$
$$f'(0)=2x$$
$$f''(0)=4x^2-2$$
$$f'''(0)=8x^3-12x$$

$f(t)$ fonksiyonunun seriye göre açılımı:

$$=1+\frac{2xt}{1!}+(-2+4x^2)\frac{t^2}{2!}+\frac{(-12x+8x^3)t^3}{3!}+...$$

Hermite polinomunun serisel ifadesi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n=e^{2xt-t^2}$$

şeklinde elde edilir.

3.4. Rodrigues Formülü

Hermite polinomları Rodrigues formülü adı verilen bir formül yardımıyla da bulunabilir. Hermite polinomunun

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n=e^{2xt-t^2}$$

doğurucu fonksiyonunu kullanalım. e^{2xt-t^2} nin t ye göre türevleri daha önce elde ettiğimiz

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2x)^{n-2k}n!}{k!(n-2k)!}$$

ifadesi ile elde edebilir ve

$n=0$ için; $\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{0}{2}\right]}\frac{(-1)^0(2x)^0}{0!0!}0!=1$

$n=1$ için; $\sum_{k=0}^{\left[\frac{1}{2}\right]} \frac{(-1)^0 (2x)^1}{0!1!} 1! = 2x$

$n=2$ için; $\sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k (2x)^{2-2k}}{k!(2-2k)!} 2! = \frac{(2x)^2 2!}{2!} + \frac{(-1)(2x)^0 2!}{1!0!} = 4x^2 - 2$

$n=3$ için; $\sum_{k=0}^{\left[\frac{3}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{3-2k}}{k!(3-2k)!} 3! = 8x^3 - 12x$

. .

. .

.

$$H_n(x) = \left[\frac{d^n}{dt^n} e^{2xt-t^2} \right]_{t=0}$$

şeklinde yazılabilir.

$$= \left[\frac{d^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2} e^{x^2} \right]_{t=0}$$

$$e^{-x^2} H_n(x) = \left[\frac{d^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2} \right]_{t=0}$$

$x - t = w$ dönüşümü yapılırsa

$$e^{-x^2} H_n(x) = (-1)^n \left[\frac{d^n}{dw^n} e^{-w^2} \right]_{w=x}$$

elde edilir. Eğer $D = \frac{d}{dx}$ olarak alınırsa

$$e^{-x^2} H_n(x) = (-1)^n D^n e^{-x^2}$$

Hermite polinomları için Rodrigues formülü

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n e^{-x^2} \tag{3.4.1}$$

şeklinde elde edilir.

.

BÖLÜM 4. HERMITE POLİNOMUNUN ÖZELLİKLERİ

4.1. Doğurucu Fonksiyonlar

4.1.1. $H(x,t)=e^{2xt-t^2}$, $|x|<\infty$ $\quad |t|<\infty$ fonksiyonuna Hermite polinomlarının doğurucu fonksiyonu denir.

$f(t)=e^{2xt}$ nin t ye göre türevleri

$$f(0)=1$$

$f'(t)=2xe^{2xt}$ $\qquad f'(0)=1$

$f''(t)=4x^2e^{2xt}$ $\qquad f''(o)=4x^2$

$f'''(t)=8x^3e^{2xt}$ $\qquad f'''(0)=8x^3$

. .

.

seriye açılımı

.

$$f(0)+\frac{f'(0)t}{1!}+\frac{f''(0)t^2}{2!}+...+\frac{f^n(0)t^n}{n!}$$

$$1+\frac{2xt}{1!}+\frac{4x^2t^2}{2!}+\frac{8x^3t^2}{3!}+...+\frac{f^n(0)t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2xt)^n}{n!} \qquad (4.1.1.a)$$

şeklindedir.

$g(t)=e^{-t^2}$ nin t ye göre türevleri

$$g(0)=1$$

$$g' = -2te^{-t^2}$$
$$g'' = -2e^{-t^2} + 4t^2e^{-t^2}$$
$$g''' = 4te^{-t^2} + 8te^{-t^2} - 4t^2\,2te^{-t^2} = 12te^{-t^2} - 8t^2e^{-t^2}$$
$$g'''' = 12e^{-t^2} - 24t^2e^{-t^2} - 24t^2e^{-t^2} + 16t^4e^{-t^2}$$

$$g'(0) = 0$$
$$g''(0) = -2$$
$$g'''(0) = 0$$
$$g''''(0) = 12$$

seriye açılımı

$$1 + 0 - \frac{2t^2}{2!} + 0 + \frac{12t^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^k}{k!} \tag{4.1.1.b}$$

şeklindedir. (4.1.1.a) ve (4.1.1.b) yi çarptığımızda

$$e^{2xt-t^2} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2xt)^n}{n!}\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^k}{k!}\right]$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n t^n}{n!}\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k} t^{n-2k+2k}}{(n-2k)!k!}$$

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{(n-2k)!k!} n!$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} = e^{2xt-t^2} \tag{4.1.1.c}$$

elde edilir.

4.1.2.

$$\left(1-2xt\right)^{-c}\ {}_2F_0\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}c,\frac{1}{2}c+\frac{1}{2};\frac{-4t^2}{(1-2xt)^2}\\ -\end{matrix}\right]$$

$$=e^{2xt-t^2}\left[1+2yt(x-t)\right]^{-c}\ {}_2F_0\left[\frac{1}{2}c\ ,\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\ ;\frac{-4y^2t^2}{\left[\left(1+2yt-2yt^2\right)\right]^2}\right]$$

eşitliğini elde etmek için (3.2.3) den

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2x)^{n-2k}t^n}{(n-2k)!k!} \qquad (4.1.2.a)$$

yazabiliriz. Eşitliğin her iki tarafını $(c)_n$ faktöriyel fonksiyonuyla çarpalım.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(c)_n\frac{H_n(x)t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(c)_n(2x)^{n-2k}t^n}{(n-2k)!k!}$$

$n=n+2k$ dönüşümü yardımıyla

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(c)_{n+2k}(2x)^n t^{n+2k}}{n!k!}$$

yazabiliriz. Ayrıca $(c)_{n+2k}=(c+2k)_n(c)_{2k}$ olduğundan

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(c+2k)_n(c)_{2k}(2xt)^n t^{2k}}{n!k!}$$

yazılabilir. Faktöriyel fonksiyonun özelliğinden

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (c)_{2k} t^{2k}}{k!(1-2xt)^{c+2k}}$$

yazılabilir. $(c)_{2k}=2^{2k}\left(\frac{c}{2}\right)_k\left(\frac{c+1}{2}\right)_k$ yardımıyla

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (\frac{c}{2})_k 2^{2k} (\frac{c+1}{2})_k t^{2k}}{k!(1-2xt)^{c+2k}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (\frac{c}{2})_k (\frac{c+1}{2})_k}{k!(1-2xt)^{c}}\left(\frac{2t}{1-2xt}\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{2}\right)_k\left(\frac{c+1}{2}\right)_k}{k!(1-2xt)^{c}}\left[\frac{-4t^2}{(1-2xt)^2}\right]^k$$

Hipergeometrik fonksiyonlar yardımıyla,

$$\left(1-2xt\right)^{-c}\,{}_2F_0\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}c,\ \frac{1}{2}c+\frac{1}{2};\ \dfrac{-4t^2}{(1-2xt)^2}\\ -\end{matrix}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n H_n(x)}{n!}t^n \qquad (4.1.2.b)$$

eşitliği elde edilir. (4.1.2.b) eşitliğinde

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+k}(x)t^n v^k}{n!k!}=e^{2xt-t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_k(x-t)v^k}{k!}$$

bağıntısı uygulanırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c)_k H_k(x-t)(-ty)^k}{k!}=e^{t^2-2xt}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(c)_k\frac{H_{n+k}(x)t^n(-ty)^k}{k!n!}$$

elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}A(k,n-k)$$

olduğundan

$$=e^{t^2-2xt}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(c)_k y^k t^n H_n(x)}{k!(n-k)!}$$

yazılabilir.

$$(-n)_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(c)_k y^k n!}{k!(n-k)!}$$

bağıntısından ve faktöriyel fonksiyonundan

$$e^{-2xt+t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c)_k H_k(x-t)(-yt)^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}_2F_0(-n;c;-;y)H_n(x)t^n}{n!}$$

(4.1.2.b) den

$$\left(1-2xt\right)^{-c}\ {}_2F_0\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}c,\frac{1}{2}c+\frac{1}{2};\dfrac{-4t^2}{(1-2xt)^2}\\ -\end{matrix}\right]$$

$$=e^{2xt-t^2}\left[1+2yt(x-t)\right]^{-c}\ {}_2F_0\left[\frac{1}{2}c\,,\frac{1}{2}c+\frac{1}{2};\frac{-4y^2t^2}{\left[\left(1+2yt-2yt^2\right)\right]^2}\right]$$

4.1.3. Bilineer Doğurucu Fonksiyon

Hermite polinomlarının bilineer doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)t^n}{n!} = (1-4t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\left[y^2 - \frac{(y-2xt)^2}{1-4t^2}\right]} \qquad (4.1.3.a)$$

şeklindedir. Şimdi bunu gösterelim.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)t^n}{n!}$ de $H_n(x)$ in serisel ifadesinin yerine yazılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k} H_n(y)t^n}{k!(n-2k)!}$$

bağıntısı elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} A(k,n+2k)$$

olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^n H_{n+2k}(y)t^{n+2k}}{k!n!}$$

eşitliği yazılabilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+k}(x)t^n}{n!} = e^{2xt-t^2} H_k(x-t)$$

bağıntısı $H_{n+2k}(y)$ ye uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(y)t^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+2k}(y)(2xt)^n}{n!}\frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{4yxt-4x^2t^2}H_{2k}(y-2xt)(-1)^k t^{2k}}{k!}$$

olarak elde edilir.

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k n!(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

bağıntısından

$$H_{2k}(y-2xt)=\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^s(2k)!(2y-4xt)^{2k-2s}}{s!(2k-2s)!}$$

olarak yazılabilir. $(2k)!$ yerine

$$(2k)!=2^{2k}k!\left(\frac{1}{2}\right)_k$$

yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(y)t^n}{n!}=e^{4xyt-4x^2t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_{2k}(y-2xt)(-1)^k t^{2k}}{k!}$$

$$=e^{4xyt-4x^2t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^{s+k}2^{2k}(\frac{1}{2})_k(2y-4xt)^{2k-2s}t^{2k}}{s!(2k-2s)!}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafına

$$(c)_{n+2k}=(c+2k)_n(c)_{2k}$$

özelliği uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(y)t^n}{n!}=e^{4xyt-4x^2t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2s+2k}(\frac{1}{2})_{k+s}(2y-4xt)^{2k}t^{2k+2s}}{s!(2k)!}$$

eşitliği ve

$$(2k)!=2^{2k}k!\left(\frac{1}{2}\right)_k$$

değeri yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(y)t^n}{n!}=e^{4xyt-4x^2t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2s}(\frac{1}{2})_{k+s}(2y-4xt)^{2k}t^{2k+2s}}{s!k!(\frac{1}{2})_k}$$

elde edilir.

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{k+s}=\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{1}{2}+k\right)_s$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(y)t^n}{n!}=e^{4xyt-4x^2t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+k)_s 2^{2s}t^{2s}}{s!}\frac{(-1)^k(2y-4xt)^{2k}t^{2k}}{k!}$$

dır. Faktöriyel fonksiyonundan

$$(1-4t^2)^{-\frac{1}{2}-k}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+k)_s(4t^2)^s}{s!}$$

eşitliğini göz önüne alırsak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(y)t^n}{n!}=e^{4xyt-4x^2t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}(2y-4xt)^{2k}}{k!(1-4t^2)^{\frac{1}{2}+k}}$$

$$= e^{4xyt-4x^2t^2}(1-4t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{(-4t^2)(y-2xt)^2}{1-4t^2}}$$

olarak yazılabilir. Sonuç olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)t^n}{n!} = (1-4t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\left[y^2 - \frac{(y-2xt)^2}{1-4t^2}\right]}$$

elde edilmiş olur.

4.2. Diferensiyel İndirgeme Bağıntıları

Bu kısımda Hermite polinomları ile ilgili bazı indirgeme bağıntıları elde edilecektir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2xt-t^2} \qquad (4.2.1)$$

ifadesinde eşitliğin her iki tarafının x e göre türevinin alınmasıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)t^n}{n!} = 2te^{2xt-t^2}$$

elde edilir. Her iki taraf $\frac{1}{t}$ ile çarpılıp düzenlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)t^{n-1}}{n(n-1)!} = 2e^{2xt-t^2}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (4.2.1) yardımıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)t^{n-1}}{(n-1)!} = 2n\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)t^{n-1}}{(n-1)!}$$

şeklinde yazılabilir. t nin aynı kuvvetlerinin katsayılarının karşılaştırılmasıyla,

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \qquad\qquad n = 1,2,3... \qquad\qquad (4.2.2)$$

elde edilir.

Şimdi de (4.2.1) ifadesinde eşitliğin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)nt^{n-1}}{n!} = (2x-2t)e^{2xt-t^2}$$

$$= 2xe^{2xt-t^2} - 2te^{2xt-t^2}$$

elde edilir. (4.2.1) yardımıyla eşitliği

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)nt^{n-1}}{n(n-1)!} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t_n}{n!} - 2t\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$$

veya

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)t^n}{n!} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^{n+1}}{n!}$$

şeklinde yazabiliriz. t nin kuvetleri aynı olacak şekilde düzenlendiğinde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)t^n}{n!} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)t^n}{(n-1)!} \qquad (4.2.3)$$

elde edilir. (4.2.3) eşitliğinde t nin aynı kuvvetlerinin katsayılarının karşılaştırılmasıyla,

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.2.2) yerine yazılırsa

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x) \tag{4.2.4}$$

veya

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x) \tag{4.2.5}$$

elde edilir. (4.2.4) eşitliğinin x e göre türevi alınırsa

$$H'_{n+1}(x) = 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H''_n(x)$$

elde edilir. (4.2.2) yardımıyla $H'_{n+1}(x) = 2(n+1)H_n(x)$ ifadesi yerine yazılarak düzenlenirse

$$2(n+1)H_n(x) = 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H''_n(x)$$
$$2nH_n(x) = 2xH'_n(x) - H''_n(x)$$
$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0 \tag{4.2.6}$$

elde edilir.

4.3. Öz Fonksiyon

$H_n(x)$ $n.$ dereceden Hermite polinomu, $\tilde{h}_n(x)$, $n.$ dereceden Hermite fonksiyonu olmak üzere Quantum mekaniğindeki $A = -\dfrac{d}{dx} + x$ ve $A^* = \dfrac{d}{dx} + x$ operatörleri yardımıyla

$$\tilde{h}_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad n = 0,1,2.... \tag{4.3.1}$$

yazılabilir. (4.3.1) de x ' e göre türev alınırsa

$$\tilde{h}_n'(x) = H'_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2} - xe^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen eşitlikte (4.2.2) yerine yazılırsa

$$\tilde{h}_n{}'(x) + xe^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x) = 2n\tilde{h}_{n-1}(x)$$

bulunur. Bu ifade (4.3.1) yardımıyla

$$\tilde{h}_n{}'(x) + x\tilde{h}_n(x) = 2n\tilde{h}_{n-1}(x) \qquad (4.3.2)$$

veya

$$(\frac{d}{dx} + x)\tilde{h}_n(x) = 2n\tilde{h}_{n-1}(x) \qquad (4.3.3)$$

şeklinde yazılabilir.

(4.2.4) bağıntısı (4.3.1) yardımıyla

$$\tilde{h}'_{n+1}(x)e^{\frac{1}{2}x^2} = 2x\tilde{h}_n(x)e^{\frac{1}{2}x^2} - 2n\tilde{h}_{n-1}(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$$

veya

$$\tilde{h}'_{n+1}(x) = 2x\tilde{h}_n(x) - 2n\tilde{h}_{n-1}(x) \qquad (4.3.4)$$

şeklinde yazılabilir. (4.3.2) ve (4.3.4) bağıntılarının alt alta toplanmasıyla

$$\tilde{h}_n{}'(x) + \tilde{h}_{n+1}(x) = x\tilde{h}_n(x) \qquad (4.3.5)$$

veya

$$(-\frac{d}{dx} + x)\tilde{h}_n(x) = \tilde{h}_{n+1}(x) \qquad (4.3.6)$$

elde edilir.

A ve A^* operatörleri yardımıyla (4.3.3) ve (4.3.6) nın alt alta yazılarak toplanmasıyla

$$2x\tilde{h}_n(x) = \tilde{h}_{n+1}(x) + 2n\tilde{h}_{n-1}(x) \tag{4.3.7}$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

H Hermite operatörü A ve A^* operatörleri yardımıyla

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$$

şeklinde yazılabilir.

$$H = \frac{1}{2}(AA^* + A^*A) \tag{4.3.8}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} + x\right) + \left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(-\frac{d}{dx} + x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{dx}{dx} + \frac{xd}{dx} + x^2 - \frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx} + \frac{dx}{dx} + x^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-2d^2}{dx^2} + 2x^2\right]$$

$$= -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$$

O halde $\tilde{h}_n(x)$ Hermite fonksiyonlarının H operatörünün öz fonksiyonları olduğu, (4.3.3), (4.3.6) ve (4.3.8) yardımıyla gösterilebilir.

$$H(\tilde{h}_n) = \frac{1}{2}(AA^* + A^*A)\tilde{h}_n$$

ifadesinde A ve A^* operatörlerinin yerine yazılmasıyla

$$H\left(\tilde{h}_n\right) = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} + x\right) + \left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(-\frac{d}{dx} + x\right)\right]\tilde{h}_n$$

elde edilir. Eşitliğin düzenlenmesiyle

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{dx^2}\tilde{h}_n-\frac{dx}{dx}\tilde{h}_n+\frac{xd}{dx}\tilde{h}_n+x^2\tilde{h}_n-\frac{d^2}{dx^2}\tilde{h}_n-x\frac{d}{dx}\tilde{h}_n+\frac{dx}{dx}\tilde{h}_n+x^2\tilde{h}_n\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-2\tilde{h}_n''+2x^2\tilde{h}_n\right]$$

$$=-\tilde{h}_n''+x^2\tilde{h}_n$$

elde edilir. (4.3.1) de x' e göre türev alınarak yerine yazılırsa

$$=-2n(x\tilde{h}_{n-1}-\tilde{h}_n)+x\left(2n\tilde{h}_{n-1}-x\tilde{h}_n\right)+\tilde{h}_n+x^2\tilde{h}_n$$

$$=-2nx\tilde{h}_{n-1}+2n\tilde{h}_n+2xn\tilde{h}_{n-1}-x^2\tilde{h}_n+\tilde{h}_n+x^2\tilde{h}_n$$

$$H(\tilde{h}_n)=(2n+1)\tilde{h}_n \tag{4.3.9}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.1 **:** $|t|<1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{h}_n(x)\tilde{h}_n(y)}{2^n n!}t^n=(1-t^{2)})^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{1+t^2}{1-t^2}(x^2+y^2)\right]+\frac{2t}{1+t^2}xy} \tag{4.3.10}$$

İspat :

$$e^{-x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2+2ixu}du \tag{4.3.11}$$

eşitliğinin her iki tarafının x'e göre türevleri alınırsa

$$\frac{de^{-x^2}}{dx}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(e^{-u^2+2ixu})}{dx}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}2iue^{-u^2+2ixu}du$$

$$\frac{d^2e^{-x^2}}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(2iu)^2e^{-u^2+2ixu}du$$

.

.

$$\frac{d^ne^{-x^2}}{dx^n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(2iu)^ne^{-u^2+2ixu}du$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen eşitliği Rodrigues formülüne göre düzenlersek

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{(2i)^n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^ne^{-u^2+2ixu}du$$

$$H_n(x)=\frac{(-2i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^ne^{-u^2+2ixu}du \qquad (4.3.12)$$

olarak yazılabilir.

(4.3.1) den dolayı (4.3.11) x ve y değişkenlerine göre yazılırsa

$$\tilde{h}_n(x)=\frac{(-2i)^n e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^ne^{-u^2+2ixu}du \qquad (4.3.13)$$

$$\tilde{h}_n(y)=\frac{(-2i)^n e^{\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}v^ne^{-v^2+2iyn}dv \qquad (4.3.14)$$

elde edilir. (4.3.12) ve (4.3.13) (4.3.10) nun yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{h}_n(x)\tilde{h}_n(y)}{2^n n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n e^{\frac{x^2}{2}}(-2i)^n e^{\frac{y^2}{2}}}{\pi 2^n n!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}t^n u^n v^n e^{-u^2-v^2+2ixy+2iyv}dudv \tag{4.3.15}$$

elde edilir. Şimdi (4.3.14) eşitliğinin sağ tarafı düzenlenirse

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\frac{x^2+y^2}{2}}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-2tuv)^n}{n!}e^{-u^2-v^2+2ixy+2iyv}dudv$$

$$=\frac{e^{\frac{x^2+y^2}{2}}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty}e^{-v^2+2iyv}e^{-u^2+2ixu-2uvt}dudv$$

(4.3.11) yardımıyla

$$=\frac{e^{\frac{x^2+y^2}{2}}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\pi}e^{-y^2+u^2t^2-2utyi-u^2+2ixu}du$$

$$=\frac{e^{\frac{x^2+y^2}{2}}}{\pi}\sqrt{\pi}e^{-y^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2(1-t^2)+2iu(-yt+t)}du$$

$$=\frac{e^{\frac{x^2+y^2}{2}}}{\pi}\sqrt{\pi}e^{-y^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left[u\sqrt{1-t^2}\right]^2+2iu(-yt+x)}du$$

$k=u\sqrt{1-t^2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$=\frac{e^{\frac{x^2-y^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k^2+2ik\left(\frac{-yt+x}{\sqrt{1-t^2}}\right)}\frac{dk}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \frac{e^{\frac{x^2-y^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{-\left[\frac{-yt+x}{\sqrt{1-t^2}}\right]^2}$$

$$= e^{\frac{x^2-y^2}{2}} e^{-\left[\frac{-yt+x}{\sqrt{1-t^2}}\right]^2} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{1+t^2}{1-t^2}(x^2+y^2)\right]+\frac{2t}{1+t^2}xy}$$

Teorem 4.3.2 : $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\tilde{h}_n(x)\right]^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$

İspat : Teorem 4.3.1 de $x = y$ yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{h}_n(x)\tilde{h}_n(y)}{2^n n!} t^n = (1-t^2)^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{x^2-y^2}{2}} e^{-\frac{(x-xt)^2}{1-t^2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\tilde{h}_n(x)\right]^2}{2^n n!} t^n = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} e^0 e^{-\frac{(x-xt)^2}{1-t^2}}$$

$$= (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-x^2(1-t)}{(1+t)}}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının $(-\infty, \infty)$ aralığında genelleştirilmiş integrali alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\tilde{h}_n(x)\right]^2 dx \frac{t^n}{2^n n!} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2(1-t)}{(1+t)}} dx$$

$$= (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)^2} dx \qquad (4.3.16)$$

elde edilir. (4.3.16) da $u = x\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$$

$$=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$$

$$=\sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{1-t}$$

olur.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{h}_n(x)\right]^2 dx\right\}\frac{t^n}{2^n n!}=\frac{\sqrt{\pi}}{1-t}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\tilde{h}_n(x)\right]^2 dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

bulunur.

Normalleştirilmiş Hermite fonksiyonu

$$h_n(x)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\tilde{h}_n(x)$$

ile tanımlanır.

4.4. Hermite Polinomunun Hipergeometrik Formu

Öncelikle

$$F\begin{bmatrix} a,b; & \\ & z \\ c; & \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanan hipergeometrik fonksiyonu ve onun genelleştirilmesi olan

$${}_pF_q\begin{bmatrix} a_1, a_2, ..., a_p; & \\ & z \\ b_1, b_2, ..., b_q; & \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n ... (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n ... (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}$$

eşitliğini verelim. Burada hiçbir payda parametresi sıfır ya da negatif tamsayı değildir. Buna rağmen p ve q nun sıfırdan farklı olmasına gerek yoktur. Şimdi ${}_pF_q$ notasyonunu $H_n(x)$ Hermite polinomlarının gösterilmesinde kullanalım. Hermite polinomlarının,

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!k!} (2x)^{n-2k}$$

şeklindeki ifadesinde

$$(n-2k)! = \frac{n!}{(-n)_{2k}}$$

$$(-n)_{2k} = 2^{2k} \left(-\frac{n}{2}\right)_k \left(\frac{-n+1}{2}\right)_k$$

değerlerinin yerine yazılmasıyla,

$$= (2x)^n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{2^{2k} \left(-\frac{n}{2}\right)_k \left(-\frac{n+1}{2}\right)_k (-x^{-2})^k}{2^{2k} k!}$$

$$= (2x)^n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)_k \left(-\frac{n+1}{2}\right)_k}{k!} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k$$

$$H_n(x) = (2x)^n\, {}_2F_0\left(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}; -; -\frac{1}{x^2}\right)$$

elde edilir.

4.5. Hermite Polinomlarının Dikliği

Teorem: Hermite polinomları e^{-x^2} ağırlık fonksiyonuna göre (-∞,∞) aralığında birbirine diktir. Yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & m = n \end{cases}$$

İspat: $\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda \rho(x) y = 0$ denkleminde $(-\infty, \infty)$ aralığında $p(x) = e^{-x^2}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, $q(x) \equiv 0$ alınarak düzenlenirse

$$\left[e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right]' + \lambda e^{-x^2} y = 0$$

$$(e^{-x^2} y')' + \lambda e^{-x^2} y = 0 \tag{4.5.1}$$

$H_n(x)$ ve $H_m(x)$ polinomları (4.5.1) denkleminin birer çözümü olduklarından $m \neq n$

$$\left[e^{-x^2} H_n'(x)\right]' + 2ne^{-x^2} H_n(x) = 0 \tag{4.5.2}$$

$$\left[e^{-x^2} H_m'(x)\right]' + 2me^{-x^2} H_m(x) = 0 \tag{4.5.3}$$

bağıntılarını sağlamaktadır. (4.5.2) $H_m(x)$ ile ve (4.5.3) de $H_n(x)$ ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\left[e^{-x^2}H_n'(x)\right]' H_m(x) + 2ne^{-x^2}H_n(x)H_m(x) = 0$$

$$\left[e^{-x^2}H_m'(x)\right]' H_n(x) + 2me^{-x^2}H_m(x)H_n(x) = 0$$

$$\left[e^{-x^2}H_n'(x)\right]' H_m(x) - \left[e^{-x^2}H_m'(x)\right]' H_n(x) + 2(n-m)e^{-x^2}H_m(x)H_n(x) = 0$$

elde edilir.

$$\left[(e^{-x^2})'H_n'(x) + e^{-x^2}H_n''(x)\right]H_m(x) - \left[(e^{-x^2})'H_m'(x) + e^{-x^2}H_m''(x)\right]H_n(x) +$$
$$2(n-m)e^{-x^2}H_n(x)H_m(x) = 0 \qquad (4.5.4)$$

olduğundan (4.5.4) denklemi

$$e^{-x^2}\left[H_n(x)H_m'(x) - H_m(x)H_n'(x)\right]' = 2(n-m)e^{-x^2}H_n(x)H_m(x) \qquad (4.5.5)$$

olarak yazılabilir.

(4.5.5) denkleminin $(-\infty, \infty)$ aralığında integrali alınırsa

$$e^{-x^2}\left[H_n(x)H_m'(x) - H_m(x)H_n'(x)\right]\Big|_{-\infty}^{\infty} = 2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x) \qquad (4.5.6)$$

elde edilir.

$$2(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x) = 0 \qquad (4.5.7)$$

yazılabilir. Bu durumda $m \neq n$ dir.

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \qquad (4.5.8)$$

denkleminde $n \to n-1$ alınıp $e^{-x^2}H_n(x)$ ile çarpılırsa

$$H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) = 0$$

$$e^{-x^2}H^2{}_n(x) - 2xe^{-x^2}H_n(x)H_{n-1}(x) + 2(n-1)e^{-x^2}H_n(x)H_{n-2}(x) = 0 \qquad (4.5.9)$$

elde edilir. (4.5.9) denkleminin $(-\infty,\infty)$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H^2{}_n(x) - 2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}H_n(x)H_{n-1}(x) + 2(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_{n-2}(x) = 0$$

elde edilir. (4.5.7) den

$$2(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_{n-2}(x) = 0$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H^2{}_n(x)dx - 2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}H_n(x)H_{n-1}(x)dx = 0 \qquad (4.5.10)$$

elde edilir.(4.5.8) denklemi $e^{-x^2}H_{n-1}(x)$ ile çapılıp $(-\infty,\infty)$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_{n+1}(x)H_{n-1}(x)dx - 2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}H_n(x)H_{n-1}(x)dx + 2n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_{n-1}(x)H_{n-1}(x).dx = 0$$

elde edilir. (4.5.7) den

$$-2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}H_n(x)H_{n-1}(x)dx + 2n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_{n-1}(x)H_{n-1}(x)dx = 0 \qquad (4.5.11)$$

(4.5.10) ve (4.5.11) denklemleri karşılaştırılırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H^2{}_n(x)dx = 2n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H^2{}_{n-1}(x)dx \qquad n = 1,2,3..... \qquad (4.5.12)$$

elde edilir. (4.5.12) denkleminde

$n=1$ $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x)dx = 2n\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_0^2(x)dx$$

$$= 2\sqrt{\pi}$$

$n=2$ $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_2^2(x)dx = 2.2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x)dx$$

$$= 2.2.2\sqrt{\pi}$$

$n=3$ $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_3^2(x)dx = 2.3\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_2^2(x)dx$$

$$= 2.3.2.2.2.\sqrt{\pi}$$

$n=4$ $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_4^2(x)dx = 2.4\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_3^2(x)dx$$

$$= 2.4.2.3.2.2.2.\sqrt{\pi}$$

.

.

.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx = 2^n n!\sqrt{\pi} \qquad m=n \tag{4.5.13}$$

olarak bulunur.(4.5.7) ile (4.5.13) teoremin doğruluğunu kanıtlar.

4.6. Hermite Polinomlarının Tek-Çift Olma Durumu

$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{(n-2k)!k!} n!$ formülüne göre $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ tir. Gerçekten

$H_n(x)$, $H_n(-x)$'e bölünürse

$$\frac{H_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}}{H_n(-x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(-2x)^{n-2k}}$$

$$\frac{H_n(x)}{H_n(-x)}=\frac{(2x)^n(2x)^{-2k}}{(-2x)^n(-2x)^{-2k}}$$

$$H_n(-x)=(-1)^n H_n(x)$$

Tek dereceli Hermite polinomları tek, çift dereceli Hermite polinomları çift fonksiyondur.

4.7. Hermite Polinomlarının Legendre Polinomları ile Gösterimi

Hermite polinomlarının Legendre polinomlarıyla gösterebilmek için öncelikle Hermite polinomunun

$$e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n$$

doğurucu fonksiyonunu düzenleyelim. Eşitliğin sol tarafı seriye göre açılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n t^n}{n!}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(t^2\right)^k}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n\right) \tag{4.7.1}$$

şeklinde yazılabilir.

Serilerin özelliklerinden, çift indisli ve $A(k,n)$ genel terimli bir seri

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n-k) \tag{4.7.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} A(k,n-2k) \tag{4.7.3}$$

bağıntılarını sağlar. (4.7.2) ve (4.7.3) ün bir sonucu olarak ve $A(k,n-k)=C(k,n)$ konularak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} C(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C(k,n-k) \tag{4.7.4}$$

yazılabilir.

(4.7.1) eşitliğini (4.7.3) e göre düzenlersek

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{H_{n-2k}(x)}{(n-2k)!} t^{n-2k} \frac{\left(t^2\right)^k}{k!}$$

$$x^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{H_{n-2k}(x)(-1)^k n!}{k!(n-2k)!2^n} \tag{4.7.5}$$

elde edilir.

(4.7.5) ü kullanarak Hermite polinomları için Legendre polinomları genişletilebilir. Seriyi dikkate alırsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (\frac{1}{2})_{n-k} (2x)^{n-2k} t^n}{k!(n-2k)!} \tag{4.7.6}$$

Legendre polinomunda $n = n + 2k$ dönüşümü yapıldığında

$$= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{1}{2})_{n+k} (2x)^n t^{n+2k}}{k!n!} \tag{4.7.7}$$

eşitliği elde edilir.. (4.7.4) teki eşitliği

$$\frac{(2x)^n}{n!}=\sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{H_{n-2s}(x)}{s!(n-2s)!}$$

şeklinde düzenlenerek (4.7.7) de yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=\sum_{n,k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(\frac{1}{2})_{n+k}(2x)^{n-2k}H_{n-2s}(x)t^{n+2k}}{s!(n-2s)!k!}$$

elde edilir. $n=n+2s$ ve $k=k-s$ dönüşümleri yapılarak

$$=\sum_{n,k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^{k-s}(\frac{1}{2})_{n+k+s}H_n(x)t^{n+2k}}{s!n!(k-s)!} \tag{4.7.8}$$

eşitliği elde edilir. (4.7.8) eşitliği

$$(c)_{n+2k}=(c+2k)_n(c)_{2k}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{n+k+s}=(\frac{1}{2}+n+k)(\frac{1}{2})_{n+k}$$

özelliklerinden dolayı

$$=\sum_{n,k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^{-s}(\frac{1}{2}+n+k)_s(-1)^k(\frac{1}{2})_{n+k}H_n(x)t^{n+2k}k!}{s!n!(k-s)!k!}$$

ve faktöriyel fonksiyonunun özelliklerinden dolayı

$$= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{{}_2F_0(-k, \frac{1}{2}+n+k; -; 1)(-1)^k (\frac{1}{2})_{n+k} H_n(x) t^{n+2k}}{n!k!} \tag{4.7.9}$$

şeklinde yazılabilir. $n = n - 2k$ dönüşümü yapıldığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{{}_2F_0(-k, \frac{1}{2}+n+k; -; 1)(-1)^k (\frac{1}{2})_{n-k} H_{n-2k}(x) t^n}{(n-2k)!k!}$$

yani

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{{}_2F_0(-k, \frac{1}{2}+n+k; -; 1)(-1)^k (\frac{1}{2})_{n-k} H_{n-2k}(x)}{(n-2k)!k!}$$

olur. (4.1.2.a) eşitliğinde

$$x^n = \frac{n!}{2^n} \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(2n-4s+1) P_{n-2s}(x)}{s!(\frac{3}{2})_{n-s}}$$

özelliği yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n,k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k t^{n+2k} (2n-4s+1) P_{n-2s}(x)}{(\frac{3}{2})_{n-s} s!k!}$$

elde edilir. $n = n + 2s$ ve $k = k - s$ dönüşümleri yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n,k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^{k-s} t^{n+2k} (2n+1) P_n(x)}{(\frac{3}{2})_{n+s} s!(k-s)!}$$

$$= \sum_{n,k=0}^{\infty} {}_1F_1(-k;\frac{3}{2}+n;1)\frac{(-1)^{k-s}t^{n+2k}(2n+1)P_n(x)}{(\frac{3}{2})_n k!}$$

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}_1F_1(-k;\frac{3}{2}+n;1)\frac{(-1)^{k-s}n!(2n-4k+1)P_{n-2k}(x)}{(\frac{3}{2})_{n-2k} k!}$$

elde edilir.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde Hermite diferensiyel denklemi tekil Sturm-Liouville sınır değer problemi yardımıyla elde edilmiştir. Hermite diferensiyel denkleminin çözümleri olan Hermite polinomları elde edilmiş ve onların özelliklerinden bahsedilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] ALİYEV, G.G., TURHAN, H.N., Özel Fonksiyonlar, Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Ankara 2000.

[2] AYDIN, M., KURYEL, B. ,GÜNDÜZ, G.. Diferensiyel Denklemler ve Uygulamaları, B.C. Mühendislik Fakültesi, İzmir 2001.

[3| BALCI, M., Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Eylül 1997.

[4| DEMİRTAŞ, A., Ansiklopedik Matematik Sözlüğü, Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara 1986.

[5] GÜR, Ş., Doğurucu Fonksiyonlar, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 1996.

[6] TEMUR, P., Legendre Polinomları, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 2006.

[7] HASANOV, E., UZGÖREN, G., BÜYÜKAKSOY. A., Diferensiyel Denklemler Teorisi, Mart 2002.

[8] ÖZER, N. , ESER, D. ,DiferensiyeI Denklemler, Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Eskişehir 2000.

[9] RAINVILLE, E. D., Special Functions. Mac Millan, Newyork 1960.

[10] WAYLAND, H., Differential Equations Applied in Science and Engineering, California Institute of Technology, 1980.

[11] YAŞAR, İ. B. , Diferensiyel Denklemler ve Uygulamaları, Ankara 1999.

[l2] ÖNEM, C., Mühendislik ve Fizikte Matematik Metodlar, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

1978' de Ankara'da doğdu. 1996 yılında Hacettepe Üniversitesi, Matematik Öğretmenliği Bölümüne girdi ve 2002 yılında mezun oldu. 2003 yılından beri matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.