T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BORSA İŞLEMLERİNDE OYUN TEORİSİ KULLANIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat.Öğr. Yıldıray SANCAK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr.Hüseyin KOCAMAN**

Temmuz 2008

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BORSA İŞLEMLERİNDE OYUN TEORİSİ KULLANIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat.Öğr. Yıldıray SANCAK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 08/07/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin Kocayusufpaşaoğlu	Prof. Dr. Abdullah Yıldız	Y. Doç. Dr. Bayram Topal
Jüri Başkanı	Üye	Üye

ÖNSÖZ

Türkiye’de oyun teorisi, son yıllarda akademik olduğu kadar günlük hayatta da -özellikle Akıl Oyunları adlı filmin ülkemizde vizyona girmesinden sonra- ilgi odağı oldu. Yine son yıllarda Nobel Ekonomi Ödülü özellikle oyun teorisi alanında yapılan çalışmalara verildi. 1994’te John Nash’in bu ödüle layık görülmesinden sonra, 2002 yılında Daniel Kahneman, 2005’te Thomas Schelling ve Robert Aumann, 2007’de Leonid Hurwicz, Eric Maskin ve Roger Myerson da bu ödüllere hak kazanarak, oyun teorisi alanında yapılan çalışmalara verilen önemi göstermektedirler.

İnsan ilişkileri ve karşılaşılan doğal durumlar karşısında geliştirilecek stratejileri ve davranışları incelemekte oldukça yarar sağlayan oyun teorisinin, ekonomi alanında ve özellikle sıfır toplamlı bir oyun olan borsada kullanılması ile nasıl bir durumla karşılaşılacağı analiz edildi. Piyasanın dış etkenler ile genel etkilenmesi durumu dışında, toplam likitte de değişme olmadığı görüldü.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Borsa, oyun teorisi, karar verme, sıfır toplam

Sayısal bilimin bir ürünü olmasına rağmen sosyal bilimlerde sıklıkla kullanılan oyun teorisinin genel amacı, rakiplerin birbirlerine üstünlük sağlamaya çalışırken geliştirdikleri stratejilerin ve bu stratejileri geliştirirken kullandıkları yöntemlerin incelenmesidir. Ekonomi dalında ve özellikle borsada, oyuncu olarak hisse sahipleri, oyun olarak da devamlı surette bu hisse senetlerinin el değiştirmesi göz önüne alındığında, aslında oyun teorisinin borsada pek çok kullanım alanının bulunabileceği aşikardır.

Öncelikle, oyun teorisi ile ilgili temel kavramlar, oyun çeşitleri ve oyuncuların stratejilerini belirlerken kullandığı yöntemler, borsa ve oyun teorisi ilişkisinin anlaşılması için gereklidir. Şu an borsada bulunan yüzlerce kağıt ve milyonlarca hisse senedi sahibinin, 5 adet hisse senedi ve bunlara sahip 4 oyuncu üzerinden değerlendirilmesi, borsa mantığının anlaşılmasına ışık tutacaktır. Burada esas alınan, piyasadaki toplam miktarın sabit, ancak oyuncular arasında ve kağıtlar arasında, oyuncuların belirledikleri stratejilere bağlı olarak yaşanan kâr ve zararlardır.

USAGE OF THE GAME THEORY AT STOCK EXCHANGE

SUMMARY

Keywords: Stock exchange, game theory, decision making, zero sum

Although, the game theory is a work of numerical science, it is being used at social science requently. Aim of the game theory is researching the strategies of rival and used methods in developing these strategies. At the branch of economy and espacially at the stock exchange, in appropriating the share certificate owner as player, and exchanging of these certificates as the play, it’s clear that there are a lot of usage areas of game theory at stock exchange.

In this thesis at first, explained the basic concepts about the game theory, variety of games and the methods of the game strategy determination. It’s necessary to understand the affinity between the stock exchange and game theory. At the moment, there are hundreds of share certificates and millions of owners of these certificates. I have worked with 5 share certificates different from real ones, and 4 owners to light the way for understanding the exchange logic. Total summary is fixed, but gain and loss between players and between certificates dependent on determinated strategies is the base of this thesis.

BÖLÜM 1. RİSK VE BELİRSİZLİK ORTAMLARINDA KARAR VERME

1.1. Giriş

Akademik araştırmalarda kullanım alanları yaygınlaştıkça önemi anlaşılan bu araç, 1990'lardan itibaren Amerika'da yaygın olarak uygulanmaya başlandı. Özellikle ekonomi alanında ihale düzenlemelerinden rekabet analizlerine kadar geniş bir uygulama alanı ortaya çıktı.

Türkiye'de oyun teorisi ancak son yıllarda akademik olduğu kadar günlük hayatta da- özellikle de Akıl Oyunları adlı filmin ülkemizde vizyona girmesinden sonra- ilgi odağı oldu. Aslında, modern oyun teorisi bugün karsımıza çıkan şekline uzun bir gelişme sürecinden sonra ulaştı. Bu sürece kısaca göz atmak "Oyun Teorisi" isminin nereden geldiğini anlamamıza yardımcı olabilir.

Satranç, poker, briç gibi oyunlarda oyuncuların davranışlarını modellemek ve akılcı strateji seçimleri üzerine çalışan Macar asıllı Amerikalı John von Neuman, oyunlar üzerine ilk makalesini 1928 yılında yayınladı. Hidrojen bombası ve ilk bilgisayarın mucitlerinden sayılan bu dahi matematikçi, bir ekonomist olan Oskar Morgenstern ile birlikte, oyun teorisini 1944 yılında basılan "Oyun Teorisi ve Ekonomik Davranış" isimli kitaplarında ilk defa ekonomi alanına taşıdılar. Bu çalışmada iki oyunculu, sıfır toplamlı oyunları ve işbirlikçi oyunları incelediler. John F. Nash, 1950-53 yılları arasında yayınladığı dört çalışması ile oyun teorisini geliştirdi ve hem rekabetçi hem de işbirlikçi oyunlarda kullanılabilecek bir denge kavramını ortaya çıkardı. Halen oyun teorisinin ağır yükünü onun ortaya attığı Nash dengesi çekmektedir. Martin Shubik 1959 basımlı “Strateji ve Pazar Yapısı: Rekabet, Oligopol ve Oyun Teorisi” kitabında rekabetçi oyun teorisini ilk defa oligopollere (az sayıda firmanın olduğu piyasa yapısına) uyguladı. 1965’te Reinhard Selten, Nash dengesini yaygın biçimdeki oyunlarda (oyuncuların sıra ile stratejilerini seçtikleri oyunlar) kullanılabilecek şekilde geliştirdi. Üç seri makalesi ile John Harsanyi, 1967-68 yıllarında teorinin oyuncuların eksik bilgi sahibi olduğu oyunlara nasıl uygulanabileceğini gösterdi.

Gittikçe gelişen, oyunlar teorisi, ekonomi bilimi için olduğu kadar, hukuk, politika, işletme, uluslararası ilişkiler ve hatta biyoloji gibi bilimler için de vazgeçilmez bir matematiksel araç oldu. Ekonomide, özellikle de endüstriyel organizasyon alanında teorik gelişmelere yol açtı ve yön verdi. Oyun teorisi aynı zamanda stratejik karşılaşmaların incelenmesinde standart bir dil haline geldi.

Oyunlar, kazançları açısından sıfır toplamlı ve sıfır toplamlı olmayan oyunlar olarak iki şekilde incelenir. Oyunun , sıfır toplamlı olarak isimlendirilmesinin sebebi ise oyun sonunda elde edilen kar ve zararın toplamının “0” a eşit olmasıdır. Oyunda bir oyuncunun , diğerinin kaybettiğini kazanmasından dolayı net kazanç “0” a eşittir.

Oyunda bir kişinin kazanabilmesi için diğerinin kaybetmesi gerekir. Bu nedenle oyuncular rakiptirler. Tarafların ulaşmak istedikleri amaçlar çatışmaktadır. Oyuncular aralarında birleşerek veya bir kombinasyon yaparak bir kazanç sağlamaları imkansızdır.

1.2. Temel Kavramlar

Karar Verme: Birden fazla seçenek içinden seçim yapma işlemidir. Süreklilik gösteren bir işlevdir.

Karar Süreci:

1. Problem nedir?
2. Seçenekler nelerdir?
3. En iyi seçenek hangisidir?

"Problem nedir?" sorusunun doğru cevaplanabilmesi için;

- Karar vericiler ve amaçları,
- Karar değişkenleri (Kontrol edilebilir değişkenler)
- Parametreler (Kontrol edilemeyen değişkenler)
- Kısıtlar belirlenmelidir.

Karar Ortamları:

- Belirlilik Ortamında Karar: Parametrelerin değerleri biliniyordur.
- Risk Ortamında Karar: Parametrelerin olasılıkları biliniyordur.
- Belirsizlik Ortamında Karar: Parametrelerin alabilecekleri değerler bilinmiyordur.

Strateji: Risk veya belirsizlik ortamında karar verme sürecindeki seçenektir. Elde edilecek sonuç yönünden karar vericinin yaklaşımına bağlıdır.

Doğal Durum: Karar verme evresinde kontrol edilemeyen değişkenlerin alabileceği her farklı değer bir doğal durumdur.

Risk veya belirsizlik ortamında karar verme durumunda kalan bir kişi:

- Uygulayabileceği stratejileri geliştirir.

-Karşılaşabileceği doğal durumları saptar.

- Her bir stratejinin bu doğal durumlara katkısını ölçer.

- Stratejilerini değerlendirerek seçimini yapar.

Karar Matrisi: Karar probleminde, uygulanabilir m tane strateji geliştirilsin.

Bu stratejiler, $i = 1,2,3,\ldots,m$ için S_i lerle gösterilsin.

Karşılaşılabilir doğal durumlar n tane olsun.
Bu doğal durumlar, $j = 1,2,3,\ldots,n$ için D_j lerle gösterilsin.

Karar vericinin fayda/değer fonksiyonu, $f(S_i,D_j)$ şeklinde belirlensin.

i-inci strateji uygulandığında j-inci doğal durumla karşılaşılıyorsa elde edilecek fayda $f(S_i,D_j)=K_{ij}$ ile gösterilsin.

$$
\text{Stratejiler}\;
\begin{array}{c|c}
 & \text{Doğal Durumlar} \\
 & \begin{array}{ccccc} D_1 & D_2 & D_3 & \ldots\ldots & D_n \end{array} \\ \hline
\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_m \end{array} & \left[\begin{array}{ccccc} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \ldots\ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \ldots\ldots & K_{2n} \\ K_{31} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & K_{3n} \\ \vdots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ K_{m1} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & K_{mn} \end{array}\right]
\end{array}
$$

Şekil 1. Kazanç Matrisi

1.3. Risk Ortamında Karar Ölçütleri

Risk ortamında karar söz konusu iken D_1, D_2, …, D_n doğal durumlarının ayrık ve bütünü oluşturan olaylar olduğu ve j-inci doğal durumun ortaya çıkma olasılığının P_j olduğu göz önüne alınırsa,

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = 1$$

dir.

1.3.1. En iyi beklenen değer ölçütü

Eğer problem katkı, kazanç yapılı ise kazançların en büyüğüne; maliyet yapılı ise masrafların en küçüğüne karşılık gelen strateji benimsenir.

j-inci doğal durumun ortaya çıkma olasılığı P_j ve

i-inci strateji uygulandığında beklenen değer $B[S_i]$ ile gösterilsin.

Her bir stratejinin beklenen değeri: $B[S_i] = \sum_{j=1}^{n} P_j K_{ij}$

Kazanç yapılı problemde $Max\{B[S_i]\} = B[S_r]$ eşitliğine karşılık gelen r-inci strateji,

Maliyet yapılı problemde $Min\{B[S_i]\} = B[S_k]$ eşitliğine karşılık gelen k-ıncı strateji benimsenir.

Örnek – 1: İki farklı durum bulunan ortamda olasılıklar, stratejiler ve kârlar aşağıdaki gibidir:

Tablo 1.1. En İyi Beklenen Değer Ölçütü

		D_1	D_2	Beklenen Kâr
	Olasılık	0,4	0,6	$B[S_i]$
Stratejiler	S_1	3	7	5,4
	S_2	8	1	3,8
	S_3	7	5	5,8 → $Max\{B[S_i]\}$

$$B[S_1] = 3\times0,4 + 7\times0,6 = 5,4$$
$$B[S_2] = 8\times0,4 + 1\times0,6 = 3,8$$
$$B[S_3] = 7\times0,4 + 5\times0,6 = 5,8$$

Öyleyse S_3 stratejisi önerilir.

Örnek – 2: Bir firmanın mala olan devrelik talep dağılımı tablodaki gibidir:

Tablo 1.2. En iyi Beklenen Değer Ölçütü

Talep (Adet)	Olasılık
10	0,15
12	0,25
15	0,30
16	0,20
18	0,10

Birim maliyet: 120 TL

Birim satış fiyatı: 150 TL

Satılmayan malın değeri yoktur.

x_i → üretim, y_j → talep, K_{ij} → Kâr

Talep > Üretim → $K_{ij} = (150 - 120).\ x_i$

Talep ≤ Üretim → $K_{ij} = 150.\ y_j - 120.\ x_i$

Tablo 1.3. Talep Düzeyi ve Olasılık

	Üretim Düzeyi	0,15 10	0,25 12	0,30 15	0,20 16	0,10 18	Beklenen Kâr
S_1	10	300	300	300	300	300	300
S_2	12	60	360	360	360	360	315
S_3	15	-300	0	450	450	450	225
S_4	16	-420	-120	330	480	480	150
S_5	18	-660	-360	90	240	540	-60

$$K_{11} = 150.10 - 120.10 = 300$$
$$K_{12} = K_{13} = K_{14} = K_{15} = (150 - 120).10 = 300$$
$$K_{21} = 150.10 - 120.12 = 60$$
$$K_{22} = K_{23} = K_{24} = K_{25} = (150 - 120).12 = 360$$
$$K_{31} = 150.10 - 120.15 = -300$$
$$K_{32} = 150.12 - 120.15 = 0$$
$$K_{33} = K_{34} = K_{35} = (150 - 120).15 = 450$$
$$K_{41} = 150.10 - 120.16 = -420$$
$$K_{42} = 150.12 - 120.16 = -120$$
$$K_{43} = 150.15 - 120.16 = 330$$
$$K_{44} = K_{45} = (150 - 120).16 = 480$$

Öyleyse, en yüksek kâra karşılık gelen S_2 stratejisi benimsenmelidir.

1.3.2. En büyük olasılık ölçütü

Risk ortamında hareket eden bazı kişiler, stratejilerini ortaya çıkma olasılığı en yüksek olan doğal duruma göre belirlerler. Böylece problem, belirlilik ortamına indirgenerek en iyi kazancı veren strateji benimsenir.

Doğal durumların olasılığı Pj ler için $\underset{j}{Max}\left\{P_j\right\}=P_d$ ise seçim d-inci doğal duruma göre yapılır.

$Eniyi\left\{K_{id}\right\}=K_{rd}$ ise benimsenecek strateji S_r dir.

Örnek – 3: Örnek – 1'de en iyi beklenen değer ölçütüne göre S_3 stratejisi önerilirken, D_2 nin ortaya çıkma olasılığı %60 olduğundan en büyük olasılık ölçütüne göre D_2'nin kârlarına bakılır ve bunlar arasında en büyük olana göre strateji belirlenir.

$Max\left\{K_{i2}\right\}=Max\left\{7,1,5\right\}=7$ olduğundan S_1 stratejisi benimsenir.

Örnek – 4: Devrelik üretimin kararlaştırıldığı Örnek–2'de en büyük olasılık ölçütüne göre,

$$Max\left\{0.15, 0.25, 0.30, 0.20, 0.10\right\}=0.30$$

olduğundan üçüncü doğal duruma göre davranılacak ve talebin 15 adet olduğu varsayılarak bu durumdaki en büyük kâr;

$$Max\left\{300, 360, 450, 330, 90\right\}=450$$

olduğundan bu kâra karşılık gelen üçüncü stratejideki 15 adet üretime karar verilmesi önerilir.

1.3.3. Hırs düzeyi ölçütü

İlgilenilen olayın sonucunda elde edilebilecek katkıların düzeyine ve sınırına göre davranış belirlenmesidir. Bir işçinin kabul edebileceği en düşük ücret, işletme bütçesi planındaki en düşük kâr, bir mala ödenmesi göze alınan en yüksek fiyat vb. durumlarda karar vericinin tutumu, önceden belirlediği değerlerle karşılaştırmalı olarak şekillenir.

Bir problemde strateji belirlenmesine esas olan katkının değerine hırs düzeyi, bu yöndeki ölçüte hırs düzeyi ölçütü denir. Bu ölçütte kârı maksimize etmek yada maliyeti minimize etmek söz konusu değildir.

Kazanç yapılı problemde hırs düzeyi, olay sonucunda elde edilmesi beklenen en düşük kazançtır. Bu durumda, sadece hırs düzeyini (en düşük kazancı) veya daha fazlasını veren stratejiler benimsenebilir. Eğer birden fazla stratejinin hırs düzeyinde kazanç sağlaması söz konusu ise, bunlardan en büyük olasılığa karşılık gelen strateji benimsenir.

Maliyet yapılı problemde hırs düzeyi, ödenmesi göze alınan en büyük masraftır. Buna eşit veya daha düşük olan stratejiler benimsenebilir. Bu şekilde birden fazla strateji varsa yine en büyük olasılık ölçütü uygulanır.

Kazanç yapılı bir problemde hırs düzeyi H_d ile gösterilsin. Karar verici her stratejiyi uygulaması halinde elde edebileceği kazancın hırs düzeyine eşit yada fazla çıkma olasılıkları hesaplanır.

$$
\begin{aligned}
&P\{Kazanç \geq H_d / S_1\} = h_1 \\
&P\{Kazanç \geq H_d / S_2\} = h_2 \\
&\vdots \\
&P\{Kazanç \geq H_d / S_m\} = h_m
\end{aligned}
$$

ile gösterilir ve $\max_i \{h_i\} = h_w$ ise S_w stratejisinin benimsenmesi önerilir.

Eğer son eşitlikte birden fazla strateji aynı değeri veriyorsa karar verici bunlardan birini uygulayabilir.

Örnek – 5: Devrelik üretim miktarının kararlaştırılması istenen Örnek-2'de devre kârının en az 400 TL olmasının istenmesi halinde benimsenecek olan stratejiyi bulunuz.

Çözüm: Bu örnekte, H_d = 400 olarak verilmiştir.

Tablo 1.4. Hırs Düzeyi Ölçütü

	Üretim Düzeyi	0,15 10	0,25 12	0,30 15	0,20 16	0,10 18	Beklenen Kâr
S_1	10	300	300	300	300	300	300
S_2	12	60	360	360	360	360	315
S_3	15	-300	0	450	450	450	225
S_4	16	-420	-120	330	480	480	150
S_5	18	-660	-360	90	240	540	-60

$$P\left\{K\hat{a}r \geq 400 / S_1\right\} = 0$$
$$P\left\{K\hat{a}r \geq 400 / S_2\right\} = 0$$
$$P\left\{K\hat{a}r \geq 400 / S_3\right\} = P\left\{D_3 \vee D_4 \vee D_5\right\} = 0,60$$
$$P\left\{K\hat{a}r \geq 400 / S_4\right\} = P\left\{D_4 \vee D_5\right\} = 0,30$$
$$P\left\{K\hat{a}r \geq 400 / S_5\right\} = P\left\{D_5\right\} = 0,10$$

olup,

$$\max\left\{\ 0;\ \ 0;\ \ 0,60;\ \ \ 0,30;\ \ \ 0,10\ \right\} = 0,60$$

bulunur ki, en az 400 TL kâr elde etmek isteyen karar vericiye üçüncü stratejiyi benimsemesi yani 15 adet üretim yapması önerilir.

1.4. Belirsizlik Ortamında Karar Ölçütleri

Doğal durumların ortaya çıkma olasılıklarının bilinmediği problemlerde, verilecek kararı belirleyecek olan tutum ve davranışlar belirsizlik ortamında karar ölçütleri başlığında incelenir.

1.4.1. Eşit olasılıklı durumlar (Laplace) ölçütü

Doğal durumlardan birinin ortaya çıkma olasılığının, diğer durumların olasılığından fazla olması için bir neden bulunmadığında her doğal durumun ortaya çıkma olasılığı eşit kabul edilirse bu yaklaşıma "eşit olasılı durumlar" denir. Laplace ölçütünde, m doğal durum varsa, j inci doğal durumun ortaya çıkma olasılığı;

$$P\left(D_j\right) = \frac{1}{m}, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, m$$

olur ve karşılaşılan problem risk ortamına dönüştürülmüş olur.

Bundan sonra da bilinen ölçütlerle strateji seçimi yapılır. Ancak olasılıklar eşit olduğundan, en büyük olasılık ölçütünün kullanılamayacağı açıktır.

Laplace'ın kullandığı ölçüt, en iyi beklenen değer ölçütüdür. Bu takdirde, i-inci stratejinin beklenen değeri,

$$B\left[S_i\right] = \sum_j P\left(D_j\right) K_{ij} = \sum_j \frac{1}{m} K_{ij} = \frac{1}{m} \sum_j K_{ij}$$

olup, Bu değer ilgili stratejiye karşılık gelen katkıların aritmetik ortalaması olur.

Örnek – 6: Bir kazanç problemine ilişkin karar matrisi aşağıda verilmiştir. Laplace ölçütüne göre benimsenecek stratejiyi bulunuz.

Tablo 1.5. Eşit Olasılıklı Durumlar Ölçütü

Stratejiler	Doğal Durumlar D_1	D_2	D_3	$(K_{ij})/3$
S_1	4	3	2	9/3
S_2	2	4	2	8/3
S_3	5	3	2	10/3
S_4	4	1	3	8/3

Bu örnekte üç durum söz konusu olduğundan her birinin ortaya çıkma olasılığı 1/3 olarak kabul edilir. Daha sonra stratejilerin beklenen kazançları bulunur ve en büyük kazanç seçilirse üçüncü stratejinin benimsenmesi önerilir.

$$\max_i B[S_i] = \frac{10}{3}$$

1.4.2. Kötümserlik (Wald) ölçütü

Belirsizlik ortamında karar vermek durumunda kalan karamsar kişilerin izledikleri, “kötülerin içinden az kötü olana göre davranma” yaklaşımıdır.

Kazanç yapılı bir problemde uygulanmak istenirse, her strateji karşılığında elde edilebilecek en küçük kazançlar bulunur ve bunlardan en büyüğüne karşılık gelen strateji benimsenir. Kazanç yapılı problemde benimsenecek strateji

$$\max_i \left\{ \min_j \left(K_{ij} \right) \right\}$$

işlemiyle bulunur.

Maliyet yapılı bir karar matrisinde kötümserlik ölçütü uygulanmak istenirse, karşılaşılabilir en büyük maliyetlerin en küçüğüne karşılık gelen strateji benimsenir.

$$\min_i \left\{ \max_j \left(K_{ij} \right) \right\}$$

Örnek – 7: Bir kazanç problemine ilişkin karar matrisi aşağıda verilmiştir. Kötümserlik ölçütüne göre benimsenecek stratejiyi bulunuz.

Tablo 1.6. Kötümserlik Ölçütü

Stratejiler	D_1	D_2	D_3	D_4	$Min(K_{ij})$	
S_1	-1	3	1	0	-1	
S_2	2	1	3	1	1	→ MaxMin
S_3	0	-1	2	4	-1	

Çözüm: Her bir strateji karşılığı elde edilebilecek en küçük kazançlar strateji sırasına göre -1, 1, -1 olup bunların en büyüğüne karşılık gelen strateji S_2 dir.

1.4.3. İyimserlik (Plunger) ölçütü

Bütünüyle iyimser karar vericilerin davranışlarına ilişkin bir genellemedir. Bu ölçüt, karar vericinin her bir strateji karşılığı elde edebileceği en iyi katkıların en iyisine göre seçim yapmasıdır.

Bu ölçüte göre benimsenecek strateji,

kazanç yapılı problemlerde, $\max_i \left\{ \max_j \left(K_{ij} \right) \right\}$

maliyet yapılı problemlerde, $\min_i \left\{ \min_j \left(K_{ij} \right) \right\}$ işlemleri ile bulunur.

Örnek – 8: Bir maliyet problemine ilişkin karar matrisi aşağıdaki gibi verilmiştir. İyimserlik ölçütüne göre benimsenecek olan stratejiyi bulalım.

Tablo 1.7. İyimserlik Ölçütü

Stratejiler	D_1	D_2	D_3	D_4	Min(K_{ij})
S_1	3	2	5	4	2
S_2	2	3	1	5	1
S_3	7	3	2	4	2
S_4	2	1	3	5	1

$$\min_i \left\{ \min_j \left(K_{ij} \right) \right\}$$

Her bir stratejide karşılaşılabilecek en küçük maliyetler sırasıyla 2, 1, 2, 1 dir. Bunlardan en küçüğüne karşılık gelen iki strateji vardır. İyimserlik ölçütüne göre seçim yapmak isteyen karar verici ikinci yada dördüncü stratejiyi uygulayabilir. Bu iki strateji arasında fark yoktur.

1.4.4. Genelleştirilmiş iyimserlik (Hurwicz) ölçütü

İyimserlik ve kötümserlik ölçütleri, belirsizlik ortamlarında iki uç davranış biçimidir. Gerçek hayatta bu şekilde karar veren sayısı az olduğundan, Hurwicz, karar vericinin ve olayın yapısına göre belirlenecek iyimserlik derecesine göre bir formül geliştirmiştir.

Hurwicz – α ölçütüne göre, karar vericinin deneyimine, riske katlanabilmesine ve olayın yapısına bağlı bir iyimserlik derecesi vardır. Karar probleminde iyimserlik derecesi α ise $\left(0 \le \alpha \le 1\right)$ kötümserlik derecesi 1 – α olur.

Karar verici, her bir strateji karşılığında elde edebileceği katkıların en iyisini iyimserlik derecesi ile, en kötüsünü de kötümserlik derecesi ile çarpar. Elde ettiği değerleri toplar ve bu toplamlar içinden en iyisine karşılık gelen stratejiyi benimser.

Hurwicz – α ölçütüne göre seçim yapacak olan karar verici, eğer problem;

kazanç yapılı ise, $\max\limits_{i}\left\{\alpha.\max\limits_{j}\left\{\left(K_{ij}\right)\right\}+\left(1-\alpha\right).\min\limits_{j}\left\{\left(K_{ij}\right)\right\}\right\}$,

maliyet yapılı ise, $\min\limits_{i}\left\{\alpha.\min\limits_{j}\left\{\left(K_{ij}\right)\right\}+\left(1-\alpha\right).\max\limits_{j}\left\{\left(K_{ij}\right)\right\}\right\}$

işlemine karşılık gelen stratejiyi benimser.

Görüldüğü gibi, α = 1 ise, kişi tamamen iyimser demektir. Bu durumda, kazanç yapılı problemde benimsenecek strateji, katkılar arasında, en büyüklerin en büyüğünü veren max(max) işlemi ile belirlenir.

Örnek – 9: Bir kazanç yapılı probleme ilişkin karar matrisi aşağıdaki gibi verilmiştir. α = 0,3 ise benimsenecek olan stratejiyi bulalım.

Tablo 1.8. Genelleştirilmiş İyimserlik Ölçütü

	D_1	D_2	D_3
S_1	-1	2	3,5
S_2	3	-1,5	4,5
S_3	2	2,3	-0,5

Çözüm: α = 0,3 ise 1– α = 0,7 olur. Problem kazanç yapılı olduğundan her strateji için,

$$0,3.\max_{j}\left\{\left(K_{ij}\right)\right\}+0,7.\min_{j}\left\{\left(K_{ij}\right)\right\}$$

değeri hesaplanır. Bunlar arasından en büyüğüne karşılık gelen stratejinin benimsenmesi önerilir. Bunun için aşağıdaki işlemler yapılır:

Tablo 1.9. Genelleştirilmiş İyimserlik Ölçütü

Strateji	max(K_{ij})	min(K_{ij})	0,3.max(K_{ij}) + 0,7.min(K_{ij})		
S_1	3,5	-1	1,05 – 0,7	=	0,35
S_2	4,5	-1,5	1,35 – 1,05	=	0,30
S_3	2,3	-0,5	0,69 – 0,35	=	0,34

Bu durumda karar vericinin 0,35 iyimserlik derecesine göre birinci stratejiyi benimsemesi önerilir.

1.4.5. Pişmanlık (Savage) ölçütü

Her problemde, benimsenen strateji ile beklenen katkıların yanında, benimsenmemiş olan stratejiler nedeniyle göze alınan kayıplar söz konusudur. Sanki karar verilmiş gibi düşünülerek, göze alınan kayıplar ile maliyet yapılı bir karar matrisi oluşturulur.

Her doğal durum karşısında karar vericinin birinci öncelikle benimseyeceği stratejinin katkısına göre diğer stratejileri uygulaması halinde göze aldığı kayıplar, problemin pişmanlık matrisini oluşturur.

Kazanç yapılı bir karar matrisi aşağıdaki gibi verilmiş olsun:

Tablo 1.10. Pişmanlık Ölçütü

	D_1	D_2	D_3
S_1	3	1	7
S_2	5	3	1
S_3	2	4	3

Bu problemde D_1 doğal durumu ile karşılaşılacağı bilinirse karar verici S_2 stratejisini uygular ve 5 birim kazanç sağlar. Eğer S_1 benimsenir ve D_1 ortaya çıkarsa karar verici 5 – 3 = 2 birimlik bir kazancı kayıp ettiğini varsayar. Pişmanlık 2 birimdir. Eğer S_3 ü uyguladığında D_1 ortaya çıkarsa, 5 – 2 = 3 birimlik kazanç kayıp edilmiş olur. Ancak S_2 yi uygular ve D_1 ortaya çıkarsa pişmanlık duymayacaktır. Benzer düşünceyle, diğer doğal durumlara karşılık gelen pişmanlıklar da hesaplanırsa, bu olayda pişmanlık matrisi Tablo 1.11. deki gibi olur.

Tablo 1.11. Pişmanlık Ölçütü

	D_1	D_2	D_3
S_1	2	3	0
S_2	0	1	6
S_3	3	0	4

Benimsenecek olan stratejiyi belirlemek için pişmanlık matrisinin ele alınması halinde başlangıç probleminin yapısı nasıl olursa olsun, pişmanlık matrisinin maliyet yapılı olduğuna dikkat edilmelidir.

Savage, pişmanlık matrisinde karar vericinin, en büyük pişmanlıklar içinden en küçüğüne karşılık gelen stratejinin benimsenmesini önerir. Pişmanlık ölçütünde önerilen işlem, maliyet yapılı bir problemde kötümserlik yaklaşımıdır. Pişmanlık matrisi maliyet yapılı bir problem olarak ele alınır ve belirsizlik ortamında her ölçütle benimsenecek olan stratejiyi benimsemek mümkündür.

Her sütunda en az bir sıfır olacağından iyimserlik ölçütü her zaman duyarlı sonuç vermez.

Örnek – 10: Bir maliyet problemine ilişkin karar matrisi aşağıdaki gibi verilmiştir. Pişmanlık matrisinden yararlanarak eşit olasılıklı durumlar ve kötümserlik ölçütüne göre benimsenecek olan stratejileri bulalım.

Tablo 1.12. Pişmanlık Ölçütü

	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	5	6	7	6
S_2	7	8	4	6
S_3	10	10	5	8

Çözüm: Problemin pişmanlık matrisi aşağıdaki gibidir.

Tablo 1.13. Pişmanlık Ölçütü

	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	0	0	3	0
S_2	2	2	0	0
S_3	5	4	1	2

Eşit olasılıklı durumlar ölçütüne göre,

$$\min\left\{\frac{3}{4}, \frac{2+2}{4}, \frac{5+4+1+2}{4}\right\} = \frac{3}{4}$$

olduğundan, S_1 benimsenir. Eğer kötümserlik ölçütüne göre seçim yapılmak istenirse,

$$\min\left\{\max\left(K_{ij}\right)\right\} = \min\{3, 2, 5\} = 2$$

olduğundan, buna karşılık gelen S_2 nin benimsenmesi önerilir.

BÖLÜM 2. OYUNLAR: ÇATIŞMA ORTAMINDA KARAR VERME

2.1. Genel Açıklamalar

Çatışma ortamında karar verme , rekabet söz konusu olduğunda, tarafların strateji belirleme kriterleri ve bunları belirleme olasılıkları bilinmediğinde ortaya çıkan bir durumdur. Bu durumda en iyi stratejiyi seçme işi, karşılaşılan doğal durumlara göre değil, başka karar vericinin uygulayabileceği stratejilere bağlıdır. Her karar vericinin, kendisi için iyi, karşıdaki için tersi durumu sağlayan stratejiyi belirlerken sergilediği davranışlar bir oyun oluşturur. Karşılıklı çatışma veya rekabet içindeki karar vericilerin en iyi stratejiyi bulmaları ile ilgili kavram, teknik, model ve genellemeler "Oyun Kuramı" başlığında toplanır.

Oyun kuramında esas olan, özel durumlarla karşı karşıya gelen karar vericilerin dizisel karar verme olanağına sahip olmalarıdır. Karar vericilerin davranışlarında oyunun belirli evrelerinde durağanlaşma olur. Bu esnada, karar vericilerin rakiplerine karşı uygulayacakları stratejiler konusunda belirsizlik yada risk ortamına geçmiş olurlar.

Oyun kuramında kavram, teknik ve stratejilerde aşağıdaki durumların gerçekleştiği durumlar da uygulanır:

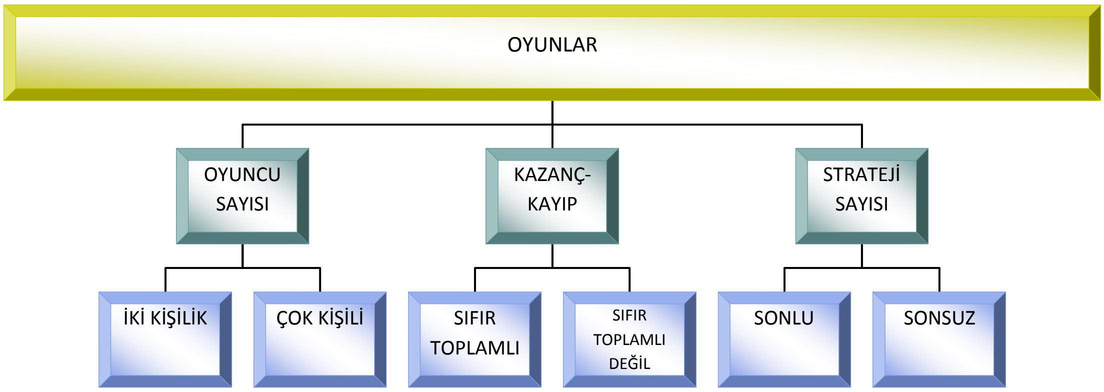
1. Oyuna taraf olan kişi yada grupların uygulayabilecekleri farklı stratejiler vardır ve bunlar bilinmektedir.
2. Taraflar, her evrede bir strateji seçmek zorundadır.
3. Taraflar, kendi stratejileri ve karşı tarafın stratejileri hakkında tüm ayrıntıları bilmektedir.

4. Oyunun herhangi bir evresinde taraflar, karşı tarafın hangi stratejiyi uygulayacağını kesin olarak bilmemekte ancak bu strateji hakkında sezgi, öngörü gibi değerlendirmelerde bulunabilmektedir.

5. Tarafların kazanç yada kayıpları sadece kendi davranışların değil aynı zamanda diğer tarafların uygulayacağı stratejilere de bağlıdır.

6. Tarafların stratejilerine bağlı olarak diğer tarafların uygulayabilecekleri stratejilere göre elde edecekleri kazanç ve kayıpları olup bunlar taraflarca bilinmektedir.

Oyunlar, tarafların sayısına ve kazanç-kayıp durumuna göre şu şekilde sınıflandırılabilir:



Şekil 2.1. Oyunların Sınıflandırılması

Buna göre oyun türleri kazanç-kayıp durumlarına göre şu başlıklarda toplanabilir:

- İki kişili sıfır toplamlı
- İki kişili sıfır toplamlı değil
- n-kişili sıfır toplamlı
- n-kişili sıfır toplamlı değil

Oyuncu sayısı ikiden fazla ve oyun sonunda kazanç kayıp toplamının sıfırdan farklı olduğu oyunlar için matematik modelleme ve çözüm teknikleri yeterince geliştirilmemiştir. Burada, oyun kuramı konusunda, sonlu stratejili, sıfır toplamlı iki kişilik oyunlar üzerinde durulacaktır.

2.2. Sıfır Toplamlı İki Kişilik Oyunlar

2.2.1. Genel gösterim ve temel kavramlar

Bu tür oyunlarda iki taraf vardır. Birinin benimsediği stratejiye bağlı olarak elde edeceği kazanç, diğerinin kaybına eşittir.

İki kişilik bir oyunda taraflar A ve B, bunların uygulayabilecekleri stratejiler;

a_i: A'nın stratejileri , $i = 1, 2, 3, . . . , m$

b_j: B'nin stratejileri , $j = 1, 2, 3, . . . , n$

iken, A i-inci stratejiyi uyguladığında B j-inci stratejiyi uyguladığı durumda

K_{ij}: A'nın kazancı

$- K_{ij}$: B'nin kazancı olsun.

Bu durumda, oyunun kazanç matrisi şu şekilde olur:

Tablo 2.1. Kazanç Matrisi

				B		
	Stratejiler	b_1	b_2	b_3	. . .	b_n
	a_1	K_{11}	K_{12}	K_{13}		K_{1m}
	a_2	K_{21}	.	.		.
	a_3	K_{31}	.	.		.
A	.	.	.	.		.
	.	.	.	.		.
	a_m	K_{m1}	.	.		K_{mn}

Oyun sıfır toplamlı değilse, karar matrisinde oyuncuların ayrı ayrı katkı (kazanç/kayıp) göstergeleri belirtilmelidir. Sıfır toplamlı oyunun karar matrisinde göstergeler, bunlara karşılık gelen stratejilere bağlı olarak tarafların katkılarını (kazancını yada kaybını) göstermektedir. Kij >0 ise A'nın kazancı B'nin kaybı, Kij<0 ise A nın kaybı B'nin kazancı vardır.

İki kişilik oyunlara dikdörtgen oyun veya mxn boyutlu oyun denir. Burada m A'nın, n ise B'nin uygulanabilir strateji sayısıdır.

2.2.2. Sıfır toplamlı iki kişilik oyunun çözümü

Oyun kuramında, tarafların karşılıklı benimseyip uygulayacakları stratejiler hakkında belirsizlikten kurtulmaları esastır. İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda, her iki tarafında benimseyecekleri en iyi stratejileri ve karşı gelen katkılarını bulma işlemine oyunun çözümü denir.

Oyun kuramında, tarafların nasıl davranacakları ve nasıl davranmaları gerektiği tartışılır. Akıl yürüterek yapılan yargılamalarla oyunun çözümü araştırılır. Eğer bu yargılamalara bağlı işlemler ile tarafların sürekli uygulayacakları stratejiler bulunabilirse kesinlikle saptanmış oyun, bulunamazsa karma strateji uygulanacak oyun söz konusudur. İki kişilik sıfır toplamlı oyunların çözümü bu iki duruma göre çözülür. Ancak, oyunun çözümüne doğrudan yansıyan özel bir durum vardır.

Tanım: Bir oyun matrisinde, bütün j ler ve $i \neq r$ için $K_{ij} \geq K_{rj}$ ise, birinci oyuncunun i-inci stratejisi r-inci stratejisine baskındır denir. Bu stratejiye egemen strateji de denir.

Çözüm aşamasında öncelikle her iki oyuncu için de baskın stratejiler araştırılmalıdır. Eğer tarafların baskın stratejileri varsa, çözüm işlemlerine indirgenmiş oyun matrisinden başlanır.

Örnek – 1: Aynı bölgede mallarını pazarlayan iki firma, sürekli biri diğerinin müşterilerini kazanmak için uğraşmaktadır. Bu amaçla firmalar prim ve reklam gibi özel satış artırıcı çabalara girmektedirler. Yapılan araştırma sonuçlarına göre, uygulanan özel çabalara bağlı olarak karşılıklı müşteri kazanç ve kayıpları aşağıdaki gibi bulunmuştur:

Tablo 2.2. Kazanç Matrisi

		B Firması		
	Stratejiler	TV Reklam	Radyo Reklam	Özel Prim
A Firması	TV Reklam	16	12	-5
	Radyo Reklam	8	-2	-4
	Özel Prim	4	-2	6

A ve B firmaları arasındaki bu oyunda, reklam özellikleri ve ortamlarıyla prim sistemleri, bunların uygulayabilecekleri stratejilerdir. Birinin kazanacağı müşteriyi diğeri kaybedeceğinden, sıfır toplamlı bir oyun söz konusudur. Matristeki değerler, A'nın kazandığı, aynı zamanda B'nin kaybettiği müşteriyi göstermektedir.

A firması TV reklamı uyguladığında B firması da TV reklamı uygularsa A 16 müşteri kazanacak, B 16 müşteri kaybedecektir (-16 kazanç). Eğer A birinci stratejiyi (TV reklamı) uyguladığında, B özel prim sistemine giderse, A 5 müşteri kaybetmekte ve B, -5 kayıp göstergesi ile 5 müşteri kazanmaktadır.

A firmasının uygulanabilir stratejilerinden hiçbiri diğerine baskın değildir. B firması için kazançlar oyun matrisindeki göstergelerin ters işaretlileridir. Bundan dolayı B'nin birinci stratejisi için;

Tablo 2.3. Kazanç – Kayıp İlişkisi

Kazanç		Kayıp
- 16 < - 12		12 < 16
- 8 < 2	veya	- 2 < 8
- 4 < 2		- 2 < 4

ilişkilerinin sonucu olarak, A'nın uygulayabileceği stratejilere göre, B'nin radyo ile reklam stratejisi televizyonla reklam stratejisine baskındır. Yani B firması TV reklamı stratejisini uyguladığında A firmasına müşteri kaptıracağını bildiğinden bunu yapmak istemeyecektir. Bu durumda oyun aşağıdaki indirgenmiş matristen sürdürülecektir.

Tablo 2.4. Kazanç Matrisi

B

		b_1	b_2
A	a_1	12	-5
	a_2	-2	-4
	a_3	-2	6

2.2.3. Kesinlikle saptanmış oyunların çözümü

İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunun kazanç matrisi aşağıdaki gibi olsun.

Tablo 2.5. Kazanç Matrisi

B

		b_1	b_2	b_3	....		b_n
A	a_1	K_{11}	K_{12}	K_{13}	....	....	K_{1n}
	a_2	K_{21}					.
	a_3	K_{31}					.
	.	.					.
	.	.					.
	. .	.					.
	a_m	K_{m1}	....	....	....	....	K_{mn}

B oyuncusu, A'nın uygulayabileceği her stratejiyi bildiğinden, A'nın davranışına bağlı olarak en az kayıp vereceği stratejiyi seçecektir. Bu nedenle, A oyuncusu uygulayacağı stratejiyi araştırırken B'nin karşı stratejilerini de göz önüne alarak, her strateji karşılığı elde edebileceği en küçük kazançlardan hareketle bunların içinden en büyük kazanca karşı gelen stratejiyi benimser. Böylece A'nın strateji seçimindeki davranışı kötümserlik ölçütüne göre olup, benimsenecek strateji A oyuncusu için K_{ij}'ler kazanç göstergesi olduğundan,

$$\underset{i}{Max}\left\{\underset{j}{Min}\left(K_{ij}\right)\right\}$$

şeklinde belirlenir. Aynı mantıkla, B oyuncusu da A'nın stratejilerine göre en büyük kayıplarını göz önüne alarak, bunların içinden en küçük kaybı vereceği stratejiyi benimser. Yani B oyuncusu da genel karar kuramındaki kötümser yaklaşımla hareket ederek, K_{ij}' ler B oyuncusu için kayıp göstergesi olduğundan, benimseyeceği strateji;

$$\underset{i}{Min}\left\{\underset{j}{Max}\left(K_{ij}\right)\right\}$$

şeklinde belirlenir.

Buna göre, A'nın her strateji karşılığı sağlayabileceği en küçük kazanç ve B'nin her strateji karşılığı uğrayabileceği en büyük kayıp, katkı matrisine son sütun ve son satır olarak eklenir. A oyuncusu bu en küçük kazançlar arasından en büyüğünü (kazanç durumunda kötümserlik ölçütü), B oyuncusu ise en büyük kayıplar içinden en küçüğünü (kayıp durumunda kötümserlik ölçütü) veren stratejiyi benimseyeceklerdir.

Örnek – 2: İki kişilik bir oyuna ait katkı matrisi aşağıdaki gibi verilsin:

Tablo 2.6. Kazanç Matrisi

		B	
		b_1	b_2
	a_1	- 1	3
A	a_2	1	2
	a_3	- 3	- 5

Oyuna A oyuncusu açısından bakıldığında, eğer A, a_1 stratejisini seçerse en küçük kazancı -1, a_2'yi seçerse 1 ve a_3'ü seçerse -5 birim olmaktadır. Böylece A oyuncusu için,

$$Min\{K_{1j}\} = -1$$
$$Min\{K_{2j}\} = 1$$
$$Min\{K_{3j}\} = -5$$

olup, bunlardan A için en fazla katkı sağlayan a_2 olup elde edilecek kazanç 1 birimdir.

Buradan görüleceği gibi A'nın benimseyeceği strateji,

$$\underset{i}{Max}\left\{\underset{j}{Min}\left(K_{ij}\right)\right\} = 1$$

şeklindeki 2. stratejidir. B oyuncusunun benimseyeceği strateji ise;

$$\underset{i}{Min}\left\{\underset{j}{Max}\left(K_{ij}\right)\right\}$$

ölçütüne göre

$$Max\{K_{i1}\} = 1$$
$$Max\{K_{i2}\} = 2$$

değerlerinin en küçüğü olan

$$Min\{1,2\}=1$$

şeklindeki 1. stratejidir.

Bu örnekte görüldüğü gibi, A'nın en iyi stratejisi olarak benimseyeceği a_2 ile elde edeceği kazanç 1 birim olup, bu değer B'nin en iyi strateji olarak benimseyeceği b_1 ile uğrayacağı kayba eşittir. Bu oyunda A ve B'nin nasıl davranacakları araştırılarak nasıl davranmaları gerektiği bulunmuş yani oyun çözülmüştür. Çözümde oyunun değeri 1 olarak bulunmuştur.

İki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda, yukarıda karşılaşılan durum genelleştirilemez. Başka bir deyişle, oyuncuların uygulayacağı en iyi stratejiler her zaman kesinlikle bulunamaz. Oyunun çözülebilirliği konusunu genel olarak incelemek amacıyla aşağıdaki kavrama ihtiyaç vardır:

Tanım: İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda;

$$\underset{i}{Max}\left\{\underset{j}{Min}\left(K_{ij}\right)\right\}=\underset{j}{Min}\left\{\underset{i}{Max}\left(K_{ij}\right)\right\}$$

ise, oyuna Kesinlikle Belirlenmiş Oyun ve bu değere de Tatmin Noktası yada Eyer (Saddle) Noktası denir.

Oyunda eyer noktası varsa, her iki oyuncunun en iyi stratejileri çakışır. Böylece tarafların uygulayacakları stratejiler kesinlikle belirlenebilmektedir.

2.3. Karma Strateji Vektörünün Bulunması

Bazı oyunlarda eyer noktası yoktur. Diğer bir deyişle, tarafların uygulayabilecekleri en iyi stratejilere karşı katkı göstergeleri farklı olabilir. Yani;

$$\underset{i}{Max}\left\{\underset{j}{Min}\left(K_{ij}\right)\right\} \neq \underset{j}{Min}\left\{\underset{i}{Max}\left(K_{ij}\right)\right\}$$

durumu söz konusudur. Kesinlikle belirlenmemiş bu tür oyunlarda tarafların nasıl davranacakları ve nasıl davranmaları gerektiği sorularına doğrudan cevap bulunmaz. Belirsizlik altında özel bir karar verme işlemi olan bu tür oyunların kesin çözümü yoktur.

Taraflar, hangi stratejiyi uygulamaları gerektiğini kesinlikle bilmediklerinden, oyuna bir strateji ile başlayacak, karşı tarafın uyguladığı stratejiye bağlı olarak izleyen aşamalarda amacına en uygun gelen stratejilere geçecektir. Yani oyun boyunca taraflar karma strateji uygulayacaklardır.

Kesinlikle belirlenmemiş oyunların çözümüyle, oyuncuların karşı karşıya kaldıkları belirsizlik ortamının risk ortamına dönüşümü yapılır. Bu amaçla, oyunun en iyi sürdürülebilmesi için, uygulanacak stratejilerin göreli sıklıkları araştırılır.

Eyer noktası olmayan oyunların genel çözümünü vermeden önce, aşağıdaki örneği incelemekte yarar vardır.

Örnek – 3:

Tablo 2.7. Kazanç Matrisi

		B Oyuncusu b_1	b_2	A'nın En Küçük Kazançları $Min(K_{ij})$
A Oyuncusu	a_1	7	2	2
	a_2	-3	6	-3
B'nin En Büyük Kayıpları $Max(K_{ij})$		7	6	

Bu örnekte,

$$\left.\begin{array}{ll} Max\left\{Min\left(K_{ij}\right)\right\}=2, & a_1 \text{ için} \\ \\ Min\left\{Max\left(K_{ij}\right)\right\}=6\ , & b_2 \text{ için} \end{array}\right\} \text{olup, oyunun eyer noktası yoktur.}$$

A oyuncusu en küçük kazançların en büyüğü olarak a_1 stratejisini uyguladığında, B oyuncusu b_2'yi uygulayarak 2 birimlik kayba uğrayacaktır. Ancak B'nin ikinci stratejiyi uygulayacağını bilen A oyuncusu, a_2 stratejisini uygulayarak kazancını 6 birim yapabilecektir. Böyle bir durumda B oyuncusu b_1'i uygulayarak A'ya 3 birim kayıp verdirebilecektir. Görüldüğü gibi, tarafların hangi stratejiyi niçin benimsemeleri gerektiği belirsizdir. Bu oyunun çözümüyle taraflara uygulanabilir stratejilerin göreli sıklıkları yani stratejilerin olasılık vektörleri verilerek, belirsizlikten risk ortamına dönüş sağlanır.

İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda; birinci oyuncunun uygulanabilir stratejilerine karşılık gelen dizin kümesi

$$I=\left\{i\,\middle|\,i=1,2,\dots,m\right\}$$

ve ikinci oyuncunun uygulanabilir stratejilerine karşılık gelen dizin kümesi

$$J = \{ j \mid j = 1, 2, ..., n \}$$

olsun. Birinci oyuncunun oyun boyunca i'inci stratejiyi uygulama sayısının toplam uygulanan strateji sayısına oranı x_i ise, A oyuncusunun karma strateji vektörü

$$X = [x_1, x_2, ..., x_n], \quad x_i \geq 0 \ , \ \sum x_i = 1$$

şeklinde yazılır.

Aynı şekilde B'nin karma strateji vektörü de

$$Y = [y_1, y_2, ..., y_n], \quad y_j \geq 0 \ , \ \sum y_j = 1$$

olur. Bu gösterimlerde oyun kesinlikle saptanmamışsa oyunun çözümüyle X ve Y'nin bulunması amaçlanır.

Oyuncuların karma strateji vektörlerinin bulunmasıyla, her bir oyuncu karşı tarafın hangi stratejiyi hangi sıklıkla uygulayacağını yani hangi stratejiyi hangi olasılıkla benimseyeceğini bilir duruma gelmektedir.

2.3.1. İkişer stratejili iki kişilik oyunlarda karma strateji vektörünün bulunması

Önceki örnekte B oyuncusunun b_1 stratejisini göreli uygulama sıklığı y_1, b_2'yi göreli uygulama sıklığı y_2 olsun.

$$y_1, y_2 \geq 0 \;\; ve \;\; y_1 + y_2 = 1$$

olması gerektiğinden, $y_1 = y$ alınırsa $y_2 = 1 - y_1$ yazılır.

Benzer şekilde A oyuncusunun a_1 stratejisini benimsemesinin göreli sıklığı x iken, bu oyuncunun a_2'yi benimsemesinin göreli sıklığı 1 – x olur. Böylece oyunun ödemeler matrisi her stratejinin göreli uygulama sıklıkları ile birlikte,

Tablo 2.8. Ödemeler Matrisi

		y b_1	1 – y b_2
x	a_1	7	2
1 – x	a_2	-3	6

şeklinde ele alınır.

B oyuncusu b_1 stratejisini uygularsa bu stratejinin A'ya getireceği beklenen kazanç $B[b_1]$, A nın stratejilerini benimseme olasılıkları ve her bir strateji karşılığı elde edeceği kazançlara göre;

$$B[b_1] = 7x - 3(1 - x)$$

yazılır.

Benzer şekilde, B oyuncusunun b_2 stratejisini benimsemesi halinde A'nın beklenen kazancı,

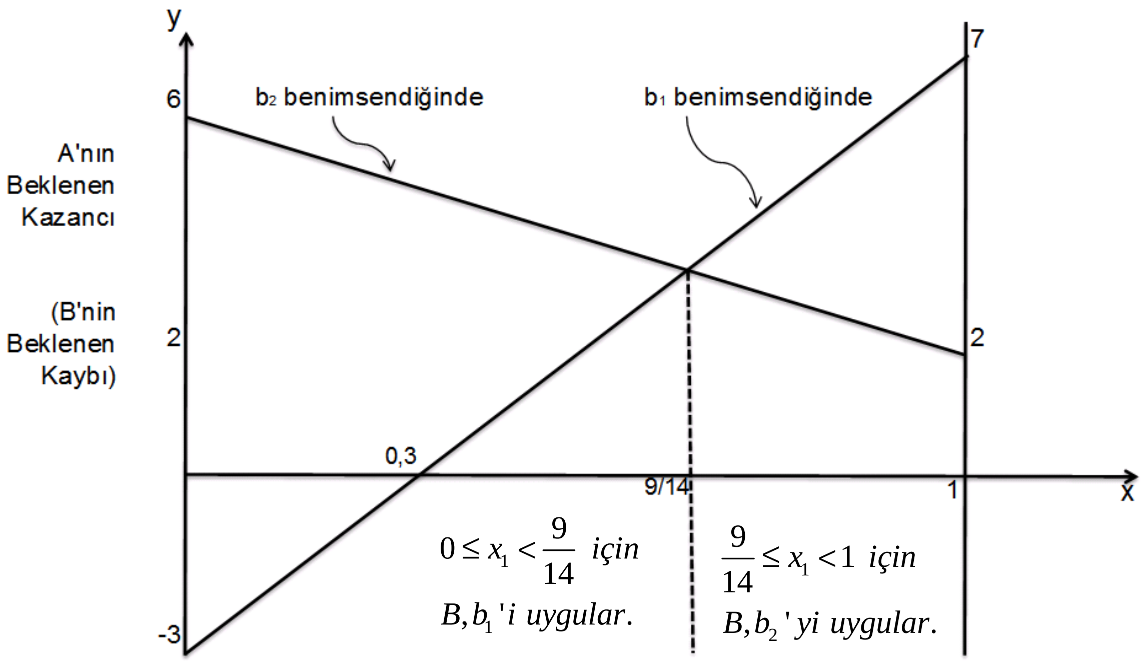
$$B[b_2] = 2x + 6(1 - x)$$

şeklinde bulunur. B oyuncusunun uygulayabileceği stratejilere göre, A'nın beklenen kazançları yazılabildiğinden A, stratejilerinin sıklığını (genelde karma strateji vektörünü) yukarıdaki ifadeleri olabildiğince büyütecek şekilde belirleyecektir. Diğer bir deyişle, A, x'e değer atarken,

$$\underset{x}{Max}\{B[b_1];B[b_2]\}$$

$$\underset{x}{Max}\{7x-3(1-x),2x+6(1-x)\}$$

ilişkisine göre davranmak isteyecektir. B oyuncusu ise, A'nın kazancını olabildiğince azaltmak isteyeceğinden, x_1'in bilinen değerine göre, A'nın beklenen kazançlarından hangisi daha küçük ise, karşı gelen stratejisini benimseyecektir. x_1'in değerine bağlı olarak sürdürülen bu yargılama, aşağıdaki şekilde de kolaylıkla görülebilir.



Şekil 2.2. Strateji Belirleme Eğilimi

x'in değerine bağlı olarak B oyuncusunun kendisine daha uygun olan stratejiyi benimseyeceğini bilen A oyuncusu, kendi açısından olaya bakarak, B hangi stratejiyi uygularsa uygulasın beklenen kazancının değişmediği noktada x'in değer almasını isteyecektir. Bu duruma göre, A için x'in alabileceği en iyi değer B'nin uygulanabileceği her iki strateji için de, beklenen kazançların eşit olduğu, x=9/14 değeridir.

Böylece A'nın karma strateji vektörü

$$X=\left(\frac{9}{14},\frac{5}{14}\right)$$

olarak bulunur. x'in belirlenen bileşenlerine karşı gelen oyunun değeri ise,

$$D = 7.\frac{9}{14} - 3.\frac{5}{14} = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}$$

olur. Oyunun çözümünde ikinci işlem B'nin karma strateji vektörünün belirlenmesidir. Eğer A, a_1'i uygularsa, B'nin beklenen kaybı,

$$B[a_1] = 7y + 2(1-y) \quad \text{olur.}$$

Oyunun çözümünde, A'nın beklenen kazancı, B'nin beklenen kaybına eşit olacağından,

$$7y + 2(1-y) = D = \frac{24}{7}$$

eşitliğinden $y = \frac{2}{7}$ olarak bulunup, B'nin karma strateji vektörü,

$$Y = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

olur. B'nin karma strateji vektörü, A'nın karma strateji vektörü araştırılırken yapılan açıklamalar ve izlenen yolla da bulunabilir. Böyle bir yakaşımla, B'nin uygulayabileceği her strateji için A'nın beklenen kazançlarının eşit olduğu y değeri,

$$7y + 2(1-y) = -3y + 6(1-y)$$

eşitliğinin çözümüyle $y = \frac{2}{7}$ olarak bulunacaktır ki, bu değer bir önceki değere eşittir.

Yukarıdaki örnekte A oyuncusunun karma strateji vektörünün

$$X = \left(\frac{9}{14}, \frac{5}{14}\right)$$

olarak bulunması, oyunun devam etmesi durumunda, A toplam oyun sayısının $\frac{9}{14}$ ünde birinci stratejisini, $\frac{5}{14}$ ünde ikinci stratejisini uygulayacak demektir. Eğer oyun bir kez olacaksa, yani A ve B bulundukları ortamda bir kez karar vereceklerse her iki oyuncunun stratejilerini benimseme olasılıkları, karma strateji vektörlerinin karşı gelen öğeleri kadar olacaktır.

İki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda eyer noktası olmadığı zaman, karma strateji vektörünün bulunması aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

Oyunun ödemeler matrisi, stratejiler ve bunların uygulanma olasılıkları ile birlikte aşağıdaki gibi verilsin.

Tablo 2.9. Ödemeler Matrisi

B \ A		y	1 – y
		b_1	b_2
x	a_1	K_{11}	K_{12}
1 – x	a_2	K_{21}	K_{22}

B'nin benimseyeceği stratejilere göre A'nın karşı gelen beklenen kazançları,

B oyuncusu b_1'i benimserse, $x.K_{11} + (1-x)K_{21}$ şeklinde,

b_2'yi benimserse, $x.K_{12} + (1-x)K_{22}$ şeklindedir.

A oyuncusu, uygulayacağı stratejileri seçerken, B'nin tutumunu da göz önüne alacaktır. Yani, A stratejilerinin sıklığını öyle belirleyecektir ki, B hangi stratejiyi benimserse benimsesin beklenen kazancı aynı olsun. Böylece, A oyuncusunun davranışlarına göre değer alan x için yukarıdaki beklenen değerler aynı olacağından,

$$x.K_{11} + (1-x)K_{21} = x.K_{12} + (1-x)K_{22}$$

eşitliği gerçekleşecektir. Bu denklemi çözen x ve 1 – x değerleri A'nın karma strateji vektörünü verir.

Aynı yaklaşımla, A'nın benimseyeceği stratejiye göre beklenen kazançların B'nin karşı gelen kayıpları olup, bu değerler:

A oyuncusu, a_1'i benimserse, $y.K_{11} + (1-y)K_{12}$,

a_2'yi benimserse, $y.K_{21} + (1-y)K_{22}$

ifadelerine eşdeğerdir. y ve 1 – y değerleri, B'nin stratejilerini uygulama sıklığı olduğuna göre, bunların alacakları değerler doğrudan B'nin davranışlarına bağlıdır. B oyuncusu kendi kaybını en aza indirmeye çalışırken, A'nın kazancını da en aza indirgemeye çalışmaktadır. Öyleyse, stratejilerini uygulama sıklığında, A hangi stratejisini benimserse benimsesin beklenen kaybının aynı olacak şekilde kendi stratejilerinin sıklığını yani y'yi belirleyecektir. Böylece B'nin birinci stratejisini uygulama sıklığı;

$$y.K_{11} + (1-y)K_{12} = y.K_{21} + (1-y)K_{22}$$

eşitliğini sağlayan y kadar olacaktır.

Örnek – 4: İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunun ödemeler matrisi şöyledir:

Tablo 2.10. Ödemeler Matrisi

		B Oyuncusu			
		b_1	b_2	A'nın En Küçük Kazançları Min(Kij)	
A Oyuncusu	a_1	10	-5	-5	
	a_2	-2	4	-2	Max(Min (Kij))
B'nin En Büyük Kayıpları Max(Kij)		10	4		
			Min(Max (Kij))		

Oyunda,

$$\underset{i}{Max}\left\{\underset{j}{Min}\left(K_{ij}\right)\right\} \neq \underset{j}{Min}\left\{\underset{i}{Max}\left(K_{ij}\right)\right\}$$

olduğundan eyer noktası, yani kesinlikle saptanması mümkün stratejiler yoktur. O halde, taraflar her seferinde benimseyecekleri stratejilerini, karşı tarafın davranışına göre belirleyecektir.

B hangi stratejiyi uygularsa uygulasın, A beklenen kazancını değiştirmeyecek şekilde a_1 ve a_2'yi tekrarlayacağından, bunların sıklığı x ve 1 – x iken B'nin beklenen kayıplarını aynı tutan

$$10x-2\left(1-x\right)=-5x+4\left(1-x\right)$$

eşitliğine göre,

$x=\frac{2}{7}$ ve $1-x=\frac{5}{7}$ olup, A'nın karma strateji vektörü, $X=\left(\frac{2}{7},\frac{5}{7}\right)$ olur.

Bu sonuca göre, A ikinci stratejisini daha sık uygulamaktadır.

Benzer şekilde B'nin davranışına esas olan y ve 1 – y ler de B oyuncusu, A hangi stratejiyi benimserse benimsesin A'nın beklenen kazancının aynı olmasını isteyeceğinden,

$$10y - 5(1 - y) = -2y + 4(1 - y)$$

eşitliğine göre B'nin birinci stratejisini uygulama sıklığı $y = \frac{3}{7}$ ve ikinci stratejisini uygulama sıklığı $1 - y = \frac{4}{7}$ olarak bulunur.

Örnek – 5: Benzer malı üreten 4 şirketin 3'ü kendi aralarında anlaşarak bir birlik kurmuşlar, diğer şirket pazarda birliğe karşı rekabet etmek durumunda kalmıştır. Firma'nın malı için üç farklı fiyat uygulayabileceği, birliğin de üç farklı dağıtım stratejisi geliştirdiği, pazarda alıcı sayısının kısa dönemde değişmediği, müşterilerin ya birliğin yada yalnız kalan firmanın malını aldığı bilinmektedir. Her iki taraf da mümkün olduğunca fazla sayıda müşteri kazanmayı istemektedirler. Yapılan araştırmalara göre, birliğin izleyebileceği her bir dağırım politikalarına bağlı olarak farklı ücretlendirme kararlarında firmanın kazanacağı müşteri sayıları aşağıdaki gibi bulunmuştur:

Tablo 2.11. Ücretlendirme Kararları

Firmanın Fiyatları	Birliğin Dağıtım Politikaları		
	D_1	D_2	D_3
F_1	-2	3	-1
F_2	-1	1	3
F_3	4	2	4

Bu örnekte, her iki tarafın da 3'er stratejisi olan sıfır toplamlı iki kişilik bir oyun söz konusudur. Çözüm işlemlerine önce baskın stratejilerin araştırılmasıyla başlanacaktır.

Ödemeler matrisine firma açısından bakıldığında, firmanın 3. fiyat stratejisini uygulaması halinde, birlik hangi dağıtım politikasını uygularsa uygulasın 2. fiyat stratejisine göre daha avantajlı olduğu görülmektedir. Diğer bir deyişle,

$$K_{31} = 4 > K_{21} = -1$$

$$K_{32} = 2 > K_{22} = 1$$

$$K_{33} = 4 > K_{23} = 3$$

olduğundan, bütün j'ler için $K_{3j} > K_{2j}$ dir. Böylece firmanın 3. fiyat stratejisi 2. fiyat stratejisine egemen olup, firma F_3 stratejisini her zaman F_2'ye tercih edeceğinden F_2'yi işlem dışı bırakacaktır.

Ödemeler matrisine birlik açısından bakıldığında birlik, dağıtım politikalarını karşılaştırdığında firma hangi fiyat politikasını uygularsa uygulasın, D_1'in D_3'e göre her zaman daha avantajlı olduğunu görecektir. Yani birlik için D_1, D_3'e egemen olup D_3 işlem dışı tutulacaktır.

Oyunda baskın stratejiler olduğuna göre oyun matrisi işlem dışı tutulacak stratejiler ve karşı gelen ödemeler itibariyle indirgenerek aşağıdaki oyun elde edilir.

Tablo 2.12. İndirgenmiş Ödemeler Matrisi

Birlik

		D_1	D_2	$Min(K_{ij})$
Firma	F_1	-2	3	-2
	F_3	4	2	2
	$Max(K_{ij})$	4	3	

$$\underset{i}{Max}\left\{\underset{j}{Min}\left(K_{ij}\right)\right\}$$

$$\underset{j}{Min}\left\{\underset{i}{Max}\left(K_{ij}\right)\right\}$$

Tablo 2.12. İndirgenmiş ödemeler matrisinde,

$$\underset{i}{Max}\left\{\underset{j}{Min}\left(K_{ij}\right)\right\} \neq \underset{j}{Min}\left\{\underset{i}{Max}\left(K_{ij}\right)\right\}$$

olduğundan oyunun kesin çözümü yoktur. Yani oyun kesinlikle saptanmamış olup taraflar karma strateji uygulayacaklardır.

Tarafların stratejilerini uygulama olasılıkları birlik için y ve 1 – y , firma için x ve 1 – x olsun. Birlik hangi stratejisini uygularsa uygulasın, firmanın beklenen kazançlarını eşitleyen x değeri,

$$-2x+4(1-x)=3x+2(1-x)$$

denkleminin çözümüyle, $x=\frac{2}{7}$ olarak bulunur.

Böylece firmanın karma strateji vektörü;

$$X=\left(\frac{2}{7},\frac{5}{7}\right)$$

olup, A’nın beklenen kazancı, yani oyunun değeri,

$$D=-2.\frac{2}{7}+4.\left(1-\frac{2}{7}\right)=\frac{16}{7} \quad \text{dir.}$$

Firma hangi stratejisini uygularsa uygulasın, birliğin beklenen kayıplarını eşitleyen y değeri,

$$-2y+3(1-y)=4y+2(1-y)$$

denkleminden, $y=\frac{1}{7}$ olarak bulunur. Bu durumda birliğin karma strateji vektörü

$$Y=\left(\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right)$$

olur. Birlik için oyunun beklenen kaybı,

$$-2.\frac{1}{7}+3.\left(1-\frac{1}{7}\right)=\frac{16}{7}$$

olduğu görülür. Bu değer firmanın kazancına da eşit olup, aynı zamanda oyunun değeridir.

2.3.2. Çok stratejili iki kişilik oyunların çözümü

mxn'lik iki kişilik sıfır toplamlı bir oyunun kesin çözümü olmasın. Bu durumda, her iki tarafın da karma strateji vektörleri oyunun çözümü olacaktır.

Oyuncular A ve B ile gösterilsin. A'nın karma strateji vektörü,

$$X = [x_1, x_2, ..., x_m]$$

iken, B'nin karma strateji vektörü

$$Y = [y_1, y_2, ..., y_n]$$

olsun. A'nın kazanç matrisi (ödemeler matrisi)

$$K = (K_{ij})_{mxn}$$

şeklinde verilsin. Oyuncuların kazanç (yada kayıpları) karşı tarafın stratejilerini uygulama olasılıklarına bağlı olduğundan, oyunun herhangi bir anında yapılacak ödemeler rassal niteliktedir. O halde oyunun beklenen değeri söz konusu olacaktır ki bu da,

$$B[X, Y] = \sum_i \sum_j x_i K_{ij} y_j$$

şeklinde gösterilebilir. A oyuncusu, en küçük gelirlerinin (kazançlarının) en büyüğünü elde edecek şekilde davranacağından, A için oyunun beklenen değeri;

$$D_A = \max_x \left\{ \min_y B(X, Y) \right\}$$

iken, benzer şekilde B için oyunun beklenen değeri,

$$D_B = \min_y \left\{ \max_x B(X, Y) \right\}$$

olacaktır. Sıfır toplamlı iki kişilik oyunlarda her iki oyuncu için de en iyi stratejiler olup, bunlar X ve Y ise,

$$B\left[X^*, Y^*\right] = D_A = D_B = D$$

eşitliğini sağlarlar. Bu özelliğe göre oyuncuların karma stratejilerini, yani oyunun çözümünü elde etmek, yukarıdaki eşitliği sağlayan X* ve Y* vektörlerini bulmakla aynı şeydir.

A'nın en iyi stratejisi X (karma) ve oyunun değeri D ise, X*,

$$X\ K \geq D \text{..........}(1)$$
$$X \geq 0 \text{...........}(2)$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \text{.......}(3)$$

sisteminin çözümü olacaktır. Burada (1) nolu eşitsizlik takımı, B hangi stratejisini uygularsa uygulasın, A'nın beklenen değerinin oyunun değerinden büyük veya eşit olmasını sağlar.

Aynı şekilde B'nin karma strateji vektörü Y*,

$$K\ Y \leq D \text{...........}(4)$$
$$Y \geq 0 \text{...........}(5)$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \text{........}(6)$$

sisteminin çözümü olacaktır. Görüldüğü gibi X* ve Y* ın değerleri araştırılırken, (1) ve (4) nolu eşitsizliklerde aynı değişken (oyunun değeri olan D) yer almaktadır. O halde çözüm işlemlerinde, (1), (2), (3), (4), (5) ve (6) nolu bağlantılar birlikte düşünülecektir.

Yukarıda açıklanan özellikler ışığında, mxn'lik sıfır toplamlı oyunlar farklı tekniklerle çözülebilmektedir. İzleyen paragraflarda cebirsel çözüm ve doğrusal programlama ile çözüm üzerinde durulacaktır.

2.3.2.1. Cebirsel çözüm

Oyuncuların eşit stratejilerinin olduğu durumda başvurulabilen bir çözüm şeklidir. Her iki oyuncunun da aynı sayıda stratejileri varsa, ödemeler matrisi bir kare matris olur.

Bu yöntemde, A'nın beklenen değerlerinden hareketle,

$$X\ K = D$$
$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$$

sisteminin çözümü araştırılır. D'nin önceki değeri göz önüne alınmaz ise, bu sistemde de (m+1) değişken ve (m+1) denklem vardır. Eğer sistemin çözümü bulunur ve $Y \geq 0$ koşulu da sağlanırsa, bulunan değer B'nin karma strateji vektörü olan Y* dır.

Bu açıklamalardan da anlaşılacağı gibi, cebirsel yolla strateji sayıları eşit olsa bile (1) ve (4) nolu eşitsizlikleri eşitlik haline dönüştürerek her zaman karma strateji vektörleri doğrudan bulunamayabilir.

Örnek – 6: A ve B oyuncularından oluşan sıfır toplamlı bir oyunda A'nın kazanç matrisi aşağıda verilmiştir. Oyunun çözümünü ve değerini bulalım.

Tablo 2.13. Kazanç Matrisi

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ \text{A} & \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

A’nın karma strateji vektörü, $X = [x_1, x_2, x_3]$ satır vektörüyle, B’nin karma strateji vektörü $Y = [y_1, y_2, y_3]$ sütun vektörüyle gösterilsin.

Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
& -x_1 + x_2 + 3x_3 \geq D \\
& 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq D \\
& x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq D \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
& -y_1 + 2y_2 + y_3 \leq D \\
& y_1 - 2y_2 + 2y_3 \leq D \\
& 3y_1 + 4y_2 - 3y_3 \leq D \\
& \qquad\qquad y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

bağıntıları yazılır. İlk üç eşitsizlik, eşitlik olarak ele alınıp dördüncü denklemle birlikte çözümü araştırılırsa,

$$x_1 = \frac{17}{46}, x_2 = \frac{20}{46}, x_3 = \frac{9}{46},\ D = \frac{30}{46}$$

olarak bulunur.

Aynı şekilde B’nin beklenen değerleri oyunun değerine eşitlenir, elde edilen sistemin çözümü araştırılırsa,

$$y_1 = \frac{14}{46}, y_2 = \frac{12}{46}, y_3 = \frac{20}{46}$$

olarak bulunur ki, $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ ve tüm $y_j \geq 0$ olduğundan oyunun çözümü bulunmuş olup, A’nın karma strateji vektörü,

$$X = \left[\frac{17}{46}, \frac{20}{46}, \frac{9}{46}\right]$$

B’nin karma strateji vektörü,

$$Y = \left[\frac{14}{46}, \frac{12}{46}, \frac{20}{46}\right]$$

ve oyunun değeri $D = \dfrac{30}{46}$ dır.

2.3.2.2. Doğrusal programlama ile çözüm

Önceki kısımda açıklandığı gibi, oyunun çözümü için bir dizi bağıntıyı aynı anda sağlayan değişkenlerin değerleri araştırılmaktadır.

A oyuncusu için öngörülen (1), (2) ve (3) nolu bağıntılar ele alındığında A, sonuçta kazancını en büyük yapmak isteyeceğinden, A için problem;

$$X \ K \geq D$$
$$X \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

kısıtları altında,

$$\max X_0 = D$$

şeklinde ifade edilebilir ki, böylece bir doğrusal programlama modeli söz konusu olur.

İkinci oyuncu, kayıplarını minimize etmek istediğinden, kendi karma strateji vektörünü belirlerken, oyunun değerini minimize etmek isteyecektir. Böylece B için problem,

$$K \ Y \leq D$$
$$Y \geq 0$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_i = 1$$

kısıtları altında,

$$\min Y_0 = D$$

şeklinde ele alınır ki yine bir doğrusal karar modeli söz konusudur.

Doğrusal karar modellerinin çözüm tekniklerinin çok gelişmiş olduğu göz önüne alındığında, sıfır toplamlı iki kişilik oyunların çözümü için doğrusal programlamanın ne denli etkin bir teknik olduğu görülür. Kaldı ki, oyunun çözümünün doğrusal programlama ile bulunmak istenmesi halinde iki modeli de çözmeye gerek yoktur. Açıkça görüleceği gibi, A ve B oyuncuları için yazılan modellerin biri diğerinin ikizidir. Bu nedenle bir modelin en iyi çözümünden hareketle, diğerinin en iyi çözümü kolaylıkla yazılır.

Oyunun çözümünün doğrusal programlama ile bulunmak istenmesi halinde, eşitsizliklerin sağ tarafında yer alan D'nin de bir değişken olduğuna dikkat edilmelidir. Oyunun değeri olan D, aynı zamanda amaç fonksiyonudur ve D pozitif, sıfır veya negatif değer alabilir. O halde çözüm işlemlerine başlamadan önce, ya D serbest değişkeni yerine negatif olmayan iki yeni değişken farkı konur yada model, özel dönüşümlere tabi tutulur. Aslında, doğrusal karar modelinin sağ taraf sabitlerinin büyük bir çoğunluğunun sıfır olması simpleks algoritması için istenen bir durum olmadığından, özel dönüşümlerle sağ taraf sabitlerinin sıfır olmaktan kurtarılmaları yerinde bir işlem olur. Bu amaçla, A oyuncusu için geliştirilen model açık olarak yazılırsa,

$$K_{11}x_1 + K_{21}x_2 + K_{31}x_3 + \dots\dots + K_{m1}x_m \geq D$$
$$.$$
$$.$$
$$K_{n1}x_1 + K_{n2}x_2 + K_{n3}x_3 + \dots\dots + K_{mn}x_m \geq D$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m \geq 0$$

kısıtları altında

$$\max X_0 = D$$

elde edilir.

Bu modelde tüm K_{ij}'ler pozitif ise, D de pozitif olmak zorundadır. Böyle bir özellik geçerli değilse bile karar matrisinin tüm öğelerine aynı sayının eklenmesiyle K_{ij}'ler pozitif hale getirilir. O halde, D>0 kabul edilip uygun dönüşümler yapılabilir.

D > 0 olmak üzere, yukarıdaki modelde, $x_i = P_i.D$ dönüşümü yapılırsa, ilk grup eşitsizliklerin sağ tarafları 1 olur.

$$\sum_i x_i = 1$$

eşitliğinden,

$$\sum_i P_i.D = 1$$

$$D = \frac{1}{\sum P_i}$$

elde edilir. Böylece model,

$$K_{11}P_1 + K_{21}P_2 + K_{31}P_3 + \ldots\ldots + K_{m1}P_m \geq 1$$
$$.$$
$$.$$
$$K_{n1}P_1 + K_{n2}P_2 + K_{n3}P_3 + \ldots\ldots + K_{mn}P_m \geq 1$$
$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_m \geq 0$$

kısıtları altında,

$$\max X_0 = \frac{1}{\sum P_i}$$

veya aynı kısıtlar altında

$$\min X_0^{'} = \sum_i P_i$$

şeklinde yazılır ki, modelin bu haliyle çözümü daha kolaydır.

Örnek – 7: İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunun birinciye göre kazanç matrisi aşağıdaki gibi olsun. Oyunun çözümü ve değerini bulunuz.

Tablo 2.14. Kazanç Matrisi

$$\begin{array}{cc} & \text{2. Oyuncu} \\ \text{1. Oyuncu} & \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bu oyunun çözümü doğrusal programlama ile bulunmak istenirse, önceki paragraflarda açıklandığı üzere, öncelikle ödemeler matrisinin tüm elemanlarını negatif olmaktan kurtarmak gerekir. Bu amaçla, ödemeler matrisindeki her bir öğeye 3 eklenirse, genişletilmiş ödemeler matrisi,

Tablo 2.15. Kazanç Matrisi

$$\begin{array}{cc} & \text{2. Oyuncu} \\ \text{1. Oyuncu} & \begin{bmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklini alır. Bu durumda da oyuncuların davranışlarında değişme olmayacağı, ama oyunun gerçek değerinin 3 fazlasının elde edileceği açıktır.

1. oyuncunun karma strateji vektörü $X = [x_1, x_2, x_3]$ satır vektörüyle gösterildiğinde, bu oyuncunun karma stratejisi için çözülecek karar modeli,

$$\begin{aligned} 6P_1 + 2P_2 &\geq 1 \\ 3P_2 &\geq 1 \\ 8P_1 + P_2 &\geq 1 \\ P_1, P_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

kısıtları altında

$$\min x_0' = P_1 + P_2 \quad \text{yazılır.}$$

Bu modelin ikiz modeli ise, q_1, q_2, q_3 ikiz değişkenler olmak üzere,

$$6q_1 + 8q_3 \le 1$$
$$2q_1 + 3q_2 + q_3 \le 1$$
$$q_1, q_2, q_3 \ge 0$$

kısıtları altında

$$\max y_0' = q_1 + q_2 + q_3$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi 2. oyuncunun karma strateji vektörü için çözülecek model, 1. oyuncu için yazılan modelden hareketle yazılabilmektedir. Ele alınan örnekte, her iki oyuncunun da karma strateji vektörü araştırıldığından, yukarıdaki modellerin ikisinin de çözümüne ihtiyaç vardır.

2. oyuncu için çözümü gerekli olan modelin başlangıç simpleks tablosu, q_4 ve q_5 bağımsız değişkenler olmak üzere;

Tablo 2.16. Başlangıç Simpleks Tablosu

	y'_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	Sağ Taraf
y'_0	1	-1	-1	-1	0	0	0
q_4	0	6	0	8	1	0	1
q_5	0	2	3	1	0	1	1

şeklindedir. Bu tablodan hareketle simpleks algoritmasıyla bulunan en iyi çözüm aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.17. Sonuç Simpleks Tablosu

	y'_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	Sağ Taraf
y'_0	1	1/6	0	0	1/12	1/3	5/12
q_4	0	3/4	0	1	1/8	0	1/8

q_5	0	5/12	1	0	-11/72	1	7/24

Son simpleks tablosuna göre,

$$q_2 = \frac{1}{8}, q_3 = \frac{7}{24}, \; q_2 + q_3 = \frac{5}{12}$$

olup, çözüme esas modelin çözümü, yani birinci oyuncu için P değerleri,

$$P_1 = \frac{1}{12}, P_2 = \frac{1}{3}$$

olmaktadır.

Genişletilmiş ödemeler matrisine göre oyunun değeri $D' = \frac{12}{5}$ tir.

Böylece birinci oyuncu için karma strateji vektörü,

$$x_1 = P_1.D' = \frac{1}{12}.\frac{12}{5} = \frac{1}{5}$$
$$x_2 = P_2.D' = \frac{1}{3}.\frac{12}{5} = \frac{4}{5}$$

eşitliklerine göre,

$$X = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

olmaktadır.

İkinci oyuncunun karma strateji vektörü ise,

$$y_1 = q_1.D' = 0.\frac{12}{5} = 0$$
$$y_2 = q_2.D' = \frac{1}{8}.\frac{12}{5} = \frac{4}{5}$$

eşitliklerinden, $Y = \left(0, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}\right)$ olarak bulunmaktadır.

Başlangıç ödemeler matrisine göre oyunun değeri ise, matrisin tüm elemanlarına 3 eklendiği göz önüne alınırsa;

$$D+3=D'=\frac{12}{5}$$

eşitliğinden $D=-\frac{3}{5}$ tir.

Çözüme dikkat edildiğinde, ikinci oyuncunun birinci stratejisini benimseme olasılığının sıfır olduğu görülür. Bu sonuca göre, ikinci oyuncu birinci stratejisini hiç benimsemeyecektir. Aslında, kesinlikle saptanmış bir oyun, benimsenen stratejilere karşılık gelen eleman 1, diğerleri sıfır olan strateji vektörleriyle de gösterilebilir.

BÖLÜM 3. ÖDEME (PAY-OFF) TABLOLARININ BORSADA KULLANIMI

Oyun teorisi, günümüzde serbest piyasa ekonomisinde rekabet içindeki ekonomik aktörlerin davranışlarının, uluslararası ilişkilerin analizinde ve stratejik kararların alınmasında kullanılmaktadır. Borsa da, birbirine rakip bir çok oyuncunun rol aldığı sıfır toplamlı bir oyundur. Bu oyunda, oyunculardan herhangi bir kısmının kazanç elde etmesi, diğer oyuncu ve/veya oyuncuların kaybına ve dış etkenlere de bağlıdır.

İki kişiden fazla oyuncunun bulunduğu borsadan, örneklem olarak 4 oyuncu ile isimleri borsadakiler ile birebir olmayan 5 şirket ele alınmıştır.

Tablo 3.1.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	40	60	20	60	80	260
2.Oyuncu	40	80	60	40	40	260
3.Oyuncu	20	40	80	20	20	180
4.Oyuncu	60	60	80	80	20	300
Toplam:	160	240	240	200	160	1000

4 oyuncunun aynı 5 hisseye sahip oldukları miktarlar Tablo 3.1. deki gibidir.

Tablo 3.2.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	**20**	**80**	**60**	**50**	**50**	260
2.Oyuncu	**60**	80	**70**	**30**	**20**	260
3.Oyuncu	**40**	**50**	**30**	**40**	20	180
4.Oyuncu	**40**	**30**	80	80	**70**	300
Toplam:	160	240	240	200	160	1000

Borsada genel bir çıkış veya düşüş olmadığı halde oyuncular arasında hisse alışverişi olmuştur. Bundan dolayı taloda görülen miktarlarda artış yada azalış görülmektedir. Alışveriş yapılan hisseler bold (kalın) olarak gösterilmiştir.

Tablo 3.3.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	**18**	**72**	**54**	**45**	**45**	234
2.Oyuncu	**54**	**72**	**63**	**27**	**18**	234
3.Oyuncu	**36**	**45**	**27**	**36**	**18**	162
4.Oyuncu	**36**	**27**	**72**	**72**	**63**	270
Toplam:	144	216	216	180	144	900

Kriz anında tüm hisseler aynı oranda (%10 genel düşüş) değer kaybederken, toplam mevcut likit de aynı oranda düşüş göstermiştir.

Tablo 3.4.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	**20**	**80**	**60**	**40**	**34**	234
2.Oyuncu	**30**	**70**	**40**	**20**	**74**	234
3.Oyuncu	**20**	**26**	**50**	**40**	**26**	162
4.Oyuncu	**74**	**40**	**66**	**80**	**10**	270
Toplam:	144	216	216	180	144	900

Oyuncuların kendi aralarındaki hisse alışverişlerinde olduğu gibi şirketler de ellerindeki hisseleri piyasaya sürmüşler veya çekmişlerdir.

Tablo 3.5.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam:
1.Oyuncu	**30**	**40**	60	**50**	**54**	234
2.Oyuncu	**52**	70	**70**	**10**	**32**	234
3.Oyuncu	20	**50**	**10**	**30**	**52**	162
4.Oyuncu	**42**	**56**	**76**	**90**	**6**	270
Toplam	144	216	216	180	144	900

Oyuncular firmalarla ilgili kendi aralarında alışveriş yapmışlardır. Toplamda hem firmaların reel değeri, hem oyuncuların sahip oldukları toplam değer değişmemiştir. Oyuncuların firmalardaki hisseleri farklılaşmış ancak toplam miktarlar değişmemiştir.

Tablo 3.6.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	**20**	**56**	**80**	**42**	**36**	234
2.Oyuncu	**40**	**60**	**62**	**48**	**24**	234
3.Oyuncu	**50**	**30**	**20**	**50**	**12**	162
4.Oyuncu	**34**	**70**	**54**	**40**	**72**	270
Toplam:	144	216	216	180	144	900

Oyuncular firmalarla ilgili kendi aralarında alışveriş yapmışlardır. Toplamda hem firmaların reel değeri, hem oyuncuların sahip oldukları toplam değer değişmemiştir. Oyuncuların firmalardaki hisseleri farklılaşmış ancak toplam miktarlar değişmemiştir.

Tablo 3.7.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	**10**	**40**	**90**	**40**	**54**	234
2.Oyuncu	**44**	**50**	**40**	**50**	**50**	234
3.Oyuncu	**40**	**52**	20	**40**	**10**	162
4.Oyuncu	**50**	**74**	**66**	**50**	**30**	270
Toplam:	144	216	216	180	144	900

Oyuncular firmalarla ilgili kendi aralarında alışveriş yapmışlardır. Toplamda hem firmaların reel değeri, hem oyuncuların sahip oldukları toplam değer değişmemiştir. Oyuncuların firmalardaki hisseleri farklılaşmış ancak toplam miktarlar değişmemiştir.

Tablo 3.8.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	**30**	**50**	**60**	**64**	**30**	234
2.Oyuncu	**40**	**54**	**54**	**40**	**46**	234
3.Oyuncu	**30**	**50**	**50**	**20**	**12**	162
4.Oyuncu	**44**	**62**	**52**	**56**	**56**	270
Toplam	144	216	216	180	144	900

Oyuncular firmalarla ilgili kendi aralarında alışveriş yapmışlardır. Toplamda hem firmaların reel değeri, hem oyuncuların sahip oldukları toplam değer değişmemiştir. Oyuncuların firmalardaki hisseleri farklılaşmış ancak toplam miktarlar değişmemiştir.

Tablo 3.9.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	**45**	**75**	**90**	**96**	**45**	351
2.Oyuncu	**60**	**81**	**81**	**60**	**69**	351
3.Oyuncu	**45**	**75**	**75**	**30**	**18**	243
4.Oyuncu	**66**	**93**	**78**	**84**	**84**	405
Toplam:	216	324	324	270	216	1350

Tüm hisseler %50 oranında değer kazanmıştır.

Tablo 3.10.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	**50**	**70**	**80**	**86**	**65**	351
2.Oyuncu	**70**	**75**	**90**	**80**	**36**	351
3.Oyuncu	**40**	**90**	**86**	**10**	**17**	243
4.Oyuncu	**56**	**89**	**68**	**94**	**98**	405
Toplam:	216	324	324	270	216	1350

Oyuncular firmalarla ilgili kendi aralarında alışveriş yapmışlardır. Toplamda hem firmaların reel değeri, hem oyuncuların sahip oldukları toplam değer değişmemiştir. Oyuncuların firmalardaki hisseleri farklılaşmış ancak toplam miktarlar değişmemiştir.

Tablo 3.11.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	**52**	**80**	**90**	**80**	**49**	351
2.Oyuncu	**60**	**70**	**81**	**70**	**70**	351
3.Oyuncu	**24**	**80**	**77**	**32**	**30**	243
4.Oyuncu	**80**	**94**	**76**	**88**	**67**	405
Toplam:	216	324	324	270	216	1350

Oyuncular firmalarla ilgili kendi aralarında alışveriş yapmışlardır. Toplamda hem firmaların reel değeri, hem oyuncuların sahip oldukları toplam değer değişmemiştir. Oyuncuların firmalardaki hisseleri farklılaşmış ancak toplam miktarlar değişmemiştir.

Tablo 3.12.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	**30**	80	**96**	**65**	**80**	351
2.Oyuncu	**50**	**86**	**70**	**80**	**65**	351
3.Oyuncu	**44**	**60**	**82**	**47**	**10**	243
4.Oyuncu	**92**	**98**	76	**78**	**61**	405
Toplam:	216	324	324	270	216	1350

Oyuncular firmalarla ilgili kendi aralarında alışveriş yapmışlardır. Toplamda hem firmaların reel değeri, hem oyuncuların sahip oldukları toplam değer değişmemiştir. Oyuncuların firmalardaki hisseleri farklılaşmış ancak toplam miktarlar değişmemiştir.

Tablo 3.13.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	**40**	**92**	**92**	**86**	**41**	351
2.Oyuncu	**70**	**84**	**76**	**76**	**45**	351
3.Oyuncu	**56**	**56**	**76**	**21**	**34**	243
4.Oyuncu	**50**	**92**	**80**	**87**	**96**	405
Toplam:	216	324	324	270	216	1350

Oyuncular firmalarla ilgili kendi arlarında alışveriş yapmışlardır. Toplamda hem firmaların reel değeri, hem oyuncuların sahip oldukları toplam değer değişmemiştir. Oyuncuların firmalardaki hisseleri farklılaşmış ancak toplam miktarlar değişmemiştir.

Tablo 3.14.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	**50**	**86**	**80**	**90**	**45**	351
2.Oyuncu	**66**	**88**	**84**	**60**	**53**	351
3.Oyuncu	**62**	**62**	**70**	**22**	**27**	243
4.Oyuncu	**38**	**88**	**90**	**98**	**91**	405
Toplam:	216	324	324	270	216	1350

Oyuncular firmalarla ilgili kendi arlarında alışveriş yapmışlardır. Toplamda hem firmaların reel değeri, hem oyuncuların sahip oldukları toplam değer değişmemiştir. Oyuncuların firmalardaki hisseleri farklılaşmış ancak toplam miktarlar değişmemiştir.

Tablo 3.1.

Kağıtlar / Oyuncular	Öz Gıda	Nazar Holding	Neo Boya	Gez Tur	KNP Mobilya	Toplam
1.Oyuncu	40	60	20	60	80	260
2.Oyuncu	40	80	60	40	40	260
3.Oyuncu	20	40	80	20	20	180
4.Oyuncu	60	60	80	80	20	300
Toplam:	160	240	240	200	160	1000

Başlangıç durumuna göre, Öz Gıda kağıdında 56 birim, Nazar Holding'te 84 birim, Neo Boya'da 84 birim, Gez Tur'da 70 birim, KNP Mobilya'da 56 birim artış olmuştur.

1. ve 2. oyuncuların elindeki hisselerin toplam değeri 91 birim, 3. oyuncunun 63 birim, 4. oyuncunun hisseleri toplamı ise 105 birim artmıştır.

Gerek hisselerin değerlerindeki artış oranına, gerekse de oyuncuların elindeki toplam miktarın artışına bakıldığında %35 bir artış görülmektedir. Bu artışın nedeni, Tablo 3.3. verilerine yansıyan %10 genel düşüşten sonra, Tablo 3.9. verilerine yansıyan %50 artıştır. Bunun toplamdaki net değişim oranı olan %35 hem oyuncuları, hem de hisseleri aynı şekilde etkilemiştir.

BÖLÜM 4. SONUÇ

1. bölümdeki risk ve belirsizlik ortamında karar verme ölçütlerinin ışığında 2. bölümde çatışma ortamında karar verme ve strateji belirleme durumları incelendi. Çatışma ortamında karar verirken oyun teorisini kullanabilmek için öncelikle risk ve belirsizlik ortamında karar ölçütleri tahlil edildi.

Oyun teorisi ve karar mekanizmaları ayrıntılarıyla açıklandıktan sonra, 5 şirket ve 4 oyuncu ile bir borsa örneği ele alındı. Her defasında, bu oyunculardan birinin, elindeki hisselerden birini satması durumunda diğer oyuncuların kâr-zarar durumları ile hisse değerlerindeki değişimler incelendi.

Sıfır toplamlı bir oyun olan borsada, mevcut toplam miktarın dış etkenlerle toplu olarak değer kazanması yada değer kaybetmesi dışında genel toplamda değişiklik olmamıştır. Oyunculardan birinin elindeki hisseyi satması ile o hisse değer kaybedebildiği gibi, diğer oyuncuların ilgisi ile değer kaybetmekten kurtulabildiği de görülmektedir. Ayrıca oyuncunun sahip olduğu herhangi bir hissenin tamamını elden çıkarması, o oyuncunun tamamen zararda olduğunu göstermemektedir. Oyuncu bunun yerine diğer hisselere sahip olma yoluna giderek, elindeki miktarı yine borsa ortamında değerlendirebilmektedir.

Oyuncuların belirledikleri stratejilere bağlı olarak hisselerin değerleri de artış ve azalış göstermektedir. Ancak genel toplamdaki reel değişim, özellikle piyasayı etkileyen dış etkenler ile sağlanmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] KARA, İ., Karar ve Oyun Kuramıyla İlgili Başlangıç Bilgileri, Anadolu Ü. Müh. Mim. Yay., 1985.

[2] MCMILLAN, J., Games Strategies and Managers, Oxford University Press, New York, 1992.

[3] MCDONALD, J., The Game of Business. Doubleday & Company Inc., New York, 1975.

[4] SOYTAŞ, U., Oyun mu Teori mi?, Popüler Bilim, 2003.

[5] GUILLERMO, O., Game Theory, Academic Press, İTÜ Kütüphanesi, 1994.

ÖZGEÇMİŞ

Yıldıray SANCAK, 1979 yılında Denizli'de doğdu. İlk öğrenimini Samsun'da, orta öğrenimini İstanbul Çapa Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladı. 2002 yılında 19 Mayıs Üniversitesi Amasya Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden mezun oldu. 2002 yılında Silivri Atatürk Lisesinde göreve başladı. Şu anda Beykoz Anadolu Teknik Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.