T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ KESİRLER İLE İDEALLER ARASINDAKİ İLİŞKİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Canan SÜMBÜL

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**MATEMATİK**
Tez Danışmanı	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI**

Eylül 2008

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ KESİRLER İLE İDEALLER ARASINDAKİ İLİŞKİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Canan SÜMBÜL

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 12 / 09 /2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği\Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr.	Yrd. Doç. Dr.	Yrd. Doç. Dr.
Refik KESKİN	Serpil HALICI	Yücel Türker ULUTAŞ
Jüri Başkanı	Üye	Üye

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanmasından önce ve aşamasında desteğini ve zamanını benden esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Serpil HALICI'ya, çalışmalarım boyunca bana destek olan değerli mesai arkadaşlarıma ve yaşamım boyunca her konuda destekçim olan aileme teşekkür ederim.

Canan SÜMBÜL

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
$[\ ]$	: Sürekli kesir
$\equiv$	: Denktir
$[\![\ ]\!]$	: Tam değer
$a \mid b$	: a , b’yi böler
$\|\ \|$	: Mutlak değer
$\Rightarrow$	: İse
$\in$	: Elemanıdır
$\exists$	: Vardır
$\lfloor\ \rfloor$	: Alttan sınırlı
$\lceil\ \rceil$	: Üstten sınırlı

ÖZET

Anahtar kelimeler: Sürekli Kesirler, Sonsuz Sürekli Kesirler, Periyodik Sonsuz Sürekli Kesirler, İdealler, Temel Birim

Birinci bölümde sonlu sürekli kesirler ve sonsuz sürekli kesirler ele alınmıştır. Her rasyonel sayının bir sonlu sürekli kesir olarak ifade edilebileceği ve her sonlu sürekli kesrin bir rasyonel sayıya eşit olduğu gösterilmiştir. Her sonsuz basit sürekli kesrin bir irrasyonel sayı ifade ettiğini ve her irrasyonel sayının bir sonsuz basit sürekli kesir ile ifade edilebileceği gösterilmiştir.

İkinci bölümde periyodik sonsuz sürekli kesirler incelenmiştir. Her periyodik sonsuz basit sürekli kesrin bir kuadratik irrasyonel sayıya eşit olduğu gösterilmiştir. Ayrıca pür periyodik sonsuz sürekli kesirler ve $\sqrt{D}$ nin sürekli kesirlere açılımı incelenmiştir.

Üçüncü bölümde Pell denkleminin tamsayı çözümleri ile sonsuz sürekli kesirler arasındaki bağıntılardan bahsedilmiştir

Dördüncü bölümde sürekli kesirler ile idealler arasındaki ilişki incelenmiştir.

RELATIONS BETWEEN CONTINUED FRACTIONS AND IDEALS

SUMMARY

Key Words: Continued Fractions, Infinite Continued Fractions, Pure Periodic Infinite Continued Fractions, Ideals, Fundamental Unit

In the first chapter, finite continued fractions and infinite continued fractions are studied. It is shown that every finite simple continued fraction is a ratioal number and that a rational number is expressed as a finite simple continued fraction. It is shown that every infinite simple continued fraction is represented as an irrational number. On the other hand, every irrational number is expressed as an infinite continued fractions.

In the second chapter, periodic infinite continued fractions are studied. It is shown that every periodic infinite continued fractions repsesent a quadratic irrational number and also pure periodic infinite continued fractions and the simple infinite contiued fraction exponsion of $\sqrt{D}$ are studied.

In the third chapter, relations between integer solutions Pell’s equations and infinite continued fractions are investigated.

In the fourth chapter, relations between integer continued fractions and ideals are investigated.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Sonlu Sürekli Kesirler

Tanım 1.1.1. $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ reel sayılar ve a_0 hariç hepsi pozitif tamsayı olsun.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} ... \frac{1}{+a_n} \qquad (1.1)$$

kesrine sonlu sürekli kesir denir. $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ reel sayılarına sürekli kesirlerin kısmi bölümleri denir[1].

Bir sonlu sürekli kesrin aşağıdaki gibi üç denk gösterimi mevcuttur [1].

$$\begin{aligned}[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] &= \left[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right] \\ &= a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}\end{aligned}$$

Teorem 1.1.1. Her rasyonel sayı bir sonlu sürekli kesir olarak ifade edilebilir. Tersine her sonlu sürekli kesir bir rasyonel sayıya eşittir [1].

İspat : Her bir rasyonel sayı $(u_0, u_1) = 1$ ve $u_1 > 0$ olmak üzere u_0/u_1 şeklinde yazılabilir. u_0/u_1 rasyonel sayısına Euclid Algoritması uygulanırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir [10].

$$
\begin{array}{ll}
u_0 = a_0 u_1 + u_2 & 0 < u_2 < u_1 \\
u_1 = a_1 u_2 + u_3 & 0 < u_3 < u_2 \\
u_2 = a_2 u_3 + u_4 & 0 < u_4 < u_3 \\
 & \\
u_{n-1} = a_{n-1} u_n + u_{n+1} & 0 < u_{n+1} < u_n \\
u_n = a_n \cdot u_{n+1} &
\end{array}
\tag{1.2}
$$

Burada $0 \le i \le n$ aralığındaki tüm i tamsayı değerleri için, u_i/u_{i+1} yerine β_i yazılırsa (1.2) eşitlikleri

$\beta_i = a_i$ olmak üzere $0 \le i \le n-1$ için

$$\beta_i = a_i + \frac{1}{\beta_{i+1}} \tag{1.3}$$

şeklinde ifade edilebilir.Bu eşitliklerin $i = 0$ ve $i = 1$ için ilk ikisi alınarak β_1 değeri ortadan kaldırılırsa:

$$\beta_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\beta_2}}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte β_2 yerine (1.3) den elde edilen değeri yazılır ve böylece devam edilirse,

$$\frac{u_0}{u_1} = \beta_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{1.4}$$

elde edilir. Böylece β_0 yani u_0/u_1 ’in sürekli kesre açılımı elde edilmiş olur [10].

u_0/u_1 rasyonel sayısının paydası olan $u_1 \neq 0$ tam sayısı pozitif kabul edilebilir. Fakat bu durumda aynı kabul u_0 için söylenemez. Böylece a_0 negatif tam sayı hatta sıfır olabilir. Ayrıca $0 < u_2 < u_1$ olduğu için, a_1 tam sayısı pozitiftir ve benzer şekilde $a_2, a_3, \ldots, a_n$ tam sayılarının her biri pozitiftir. $n \ge 1$ durumunda (1.2) sistemi birden fazla eşitliğe sahip olur. O zaman $a_n = u_n / u_{n+1}$ için, $0 < u_{n+1} < u_n$ olduğundan $a_n > 1$ olur.

Teoremin tersi ;

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1 \ ; a_2 \ , \ ...... \ , \ a_n \ ]}$$

eşitliği ve sürekli kesrin terimlerinin sayısı üzerinde tümevarım kullanılarak ispatlanabilir [1].

Tanım 1.1.2. Bir rasyonel sayının sürekli kesir ile gösterimine rasyonel sayının sürekli kesre açılımı denir [1].

Euclid Algoritmasını kullanarak, rasyonel sayılar sürekli kesirler olarak ifade edilebilir. Örneğin,

$$\begin{aligned}
2431 &= 14.165 + 121 \\
165 &= 1.121 + 44 \\
121 &= 2.44 + 33 \\
44 &= 1.33 + 11 \\
33 &= 3.11
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin her iki yanı kendi bölenine bölünürse;

$$\frac{2431}{165} = 14 + \frac{121}{165} = 14 + \frac{1}{\frac{165}{121}}$$

$$\frac{165}{121} = 1 + \frac{44}{121} = 1 + \frac{1}{\frac{121}{44}}$$

$$\frac{121}{44} = 2 + \frac{33}{44} = 2 + \frac{1}{\frac{44}{3}}$$

$$\frac{44}{33} = 1 + \frac{11}{33} = 1 + \frac{1}{\frac{33}{11}} ; \frac{33}{11} = 3$$

elde edilir. Bu denklemler birleştirilirse, aşağıdaki ifade bulunur:

$$\frac{2431}{165}=14+\frac{1}{165/121}=14+\frac{1}{1+\frac{1}{121/44}}=14+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{44/33}}}=14+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}$$

Sonuç 1.1.1. (1.3) ile verilen basit sürekli kesir genel olarak ;

$$\frac{a}{b}=[q_0;q_1,q_2,\ldots,q_{n-1},q_n]=[q_0;q_1,q_2,\ldots,q_{n-1},1]$$

şeklinde iki denk açılıma sahiptir. Bunlardan birisi çift sayıda terimden oluşursa diğeri tek sayıda terimden oluşur.

Ayrıca $\frac{a}{b}$ tam sayı ise,

$$\frac{a}{b}=\left[\frac{a}{b}\right]=\left[\frac{a}{b}-1\;;\;1\right]$$

şeklinde ifade edilir [4].

Önerme 1.1.1. Sonlu bir sürekli kesir rasyonel sayıdır. Tersine her rasyonel sayının tam olarak iki tip sürekli kesir açılımı vardır. Bu açılımlardan birinin uzunluğu çift, diğerinin uzunluğu tektir [4].

Teorem 1.1.2. $1\le k\le n$ olmak üzere ,

$$[a_0;a_1,\ldots,a_n]=[a_0;a_1,\ldots,a_{k-1},[a_k;a_{k+1},\ldots,a_n]]$$

dir[4].

Örnek 1.1.1. $\frac{58}{7}$, $\frac{-123}{34}$ ve $\frac{5}{7}$ sürekli kesirleri aşağıdaki gibi açılabilir:

58=8.7+2
7=3.2+1
2=2.1

olduğundan kısmi bölümler $8,3,2$ dir. Şu halde $58/7=[8;3,2]=[8;3,1,1]$ olarak bulunur.

$$\frac{-123}{34}=-4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$$

$$\frac{5}{7}=[0;1,2,2]=[0;1,2,1,1]$$

Aşağıda verilecek teorem, sabit bir rasyonel sayının sadece tek veya sadece çift açılımı kullanılmak üzere sürekli kesre açılımın tekliğini ifade etmektedir.

Teorem 1.1.3.

$[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n],[b_0;b_1,b_2,\ldots,b_m]$ sonlu birer sürekli kesir olmak üzere,

$[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n]=[b_0;b_1,b_2,\ldots,b_m]$ ve $a_n>1, b_m>1$ ise $n=m$ ve $a_i=b_i\,(0\le i\le n)$ dir.

İspat : İspatı tümevarımla yapılabilir. Önce $i=0$ ve $i=1$ için $a_i=b_i$ olduğunu göstermek için, $[b_i;b_{i+1},b_{i+2},\ldots,b_m]$ sürekli kesrinin değerine y_i denilirse,

$$y_i=[b_i;b_{i+1},b_{i+2},\ldots,b_m]=b_i+\frac{1}{[b_{i+1};\ldots,b_m]}$$

$$=b_i+\frac{1}{y_{i+1}}$$

elde edilir. Buradan $y_i > b_i$ ve $y_i > 1$ $(1 \le i \le n-1)$ ve $y_m = b_m > 1$ olduğu görülür. Dolayısıyla $0 \le i \le m$ aralığındaki tüm i tam sayı değerleri için $b_i = [y_i]$ dir. $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ sürekli kesrini de (1.4) eşitliğinde olduğu gibi β_0 ile gösterelim. Böylece

$$\beta_0 = a_i + \frac{1}{\beta_{i+1}} = \frac{u_i}{u_{i+1}} \text{ ve } 0 < u_{i+1} < u_i$$

olduğundan, tüm $0 \le i \le n$ tam sayı değerleri için $\beta_{i+1} > 1$ ve böylece (1.3) eşitliğinden $a_i = [\beta_i]$ bulunur. $y_0 = \beta_0$ olduğundan $b_0 = [y_0] = [\beta_0] = a_0$ dır. (1.3) ve sonuç 1.1.1 deki eşitliklerinden

$$\frac{1}{\beta_1} = \beta_0 - a_0 = y_0 - b_0 = \frac{1}{y_1}$$

ve böylece $\beta_i = y_i$ ve $a_i = [\beta_i] = [y_i] = b_i$ elde edilir. O halde teorem $i = 0$ ve $i = 1$ için doğrudur. Şimdi $\beta_i = y_i$ ve $a_i = b_i$ olduğunu kabul edelim ve $\beta_{i+1} = y_{i+1}$ ve $a_{i+1} = b_{i+1}$ olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için (1.3) ve (1.4) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\frac{1}{\beta_{i+1}} = \beta_i - a_i = y_i - b_i = \frac{1}{y_{i+1}}$$

elde edilir. Buradan $\beta_{i+1} = y_{i+1}$ ve $a_{i+1} = [\beta_{i+1}] = [y_{i+1}] = b_{i+1}$ bulunur.

Son olarak $m = n$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $n < m$ olsun. Elde edilen son eşitlik yardımıyla $\beta_n = y_n$ ve $a_n = b_n$ yazılabilir. Fakat (1.3) den $\beta_n = y_n$ ve $n < m$ için yine (1.3) den $y_n = b_n$ elde edilir ki bu $\beta_n = y_n$ olması ile çelişir. $n > m$ için benzer çelişki elde edilir. Şu halde $n = m$ olmalıdır [4].

Teorem 1.1.4. a_0 hariç tüm terimleri pozitif olan, (a_n) sonlu veya sonsuz reel sayı dizisi ele alındığında, $k \ge 0$ olmak üzere,

$$p_{-2}=0\ ,\ p_{-1}=1\ ,\ p_k=a_k p_{k-1}+p_{k-2}$$
$$q_{-2}=1\ ,\ q_{-1}=0\ ,\ q_k=a_k q_{k-1}+q_{k-2} \tag{1.5}$$

eşitlikleri yardımıyla $\{p_k\}$ ve $\{q_k\}$ tam sayı dizileri tanımlansın.

$$C_k=[a_0\ ;\ a_1\ ,\ \dots\ ,\ a_k]$$

iken, $C_k=\dfrac{p_k}{q_k}$ olur[11].

Tanım 1.1.3. k, n 'ye eşit yada n 'den küçük negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $[a_0;a_1,a_2,\dots,a_k]$ sürekli kesrine $[a_0;a_1,\dots,a_n]$ sürekli kesrinin k.yaklaşımı denir ve C_k ile gösterilir [6].

Teorem 1.1.5. (a_n) sonlu bir dizi, a_0 hariç, a_k ler (1.4) denklemlerindeki gibi olsun. Bu taktirde her $k\geq -1$ için,

$$p_k q_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^{k-1} \tag{1.6}$$

dir.

İspat : Teoremin ispatı için k üzerinde tümevarım uygulayalım. $k=-1$ veya $k=0$ için ifadenin doğruluğu açıktır.

$$p_k q_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^{k-1}$$

$k=-1$ için

$$p_{-1}q_{-2}-p_{-2}q_{-1}=1.1-0.0=(-1)^{-2}=1$$

k=0 için

$$p_0 q_{-1}-p_{-1}q_0=a_0.0-1.1=(-1)^{-1}=-1$$

dir.

$k=1$ için

$$p_1q_0-p_0q_1=\left(a_1a_0+1\right)\cdot 1-a_0a_1=1$$

olur. Teorem k tam sayısı için doğru olsun, yani $1\le k\le n$ olmak üzere

$$p_k\,q_{k-1}-p_{k-1}\,q_k=\left(-1\right)^{k-1}$$

olsun. O halde k+1 için;

$$\begin{aligned}p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}&=\left(a_{k+1}p_k+p_{k-1}\right)q_k-p_k\left(a_{k+1}q_k+q_{k-1}\right)\\&=p_{k-1}q_k-p_kq_{k-1}=-\left(-1\right)^{k-1}=\left(-1\right)^k\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece teoremin doğruluğu gösterilmiş olur.

Sonuç 1.1.2. Teorem 1.1.5’de tanımlanan p_k ve q_k tam sayıları aralarında asaldır.

Sonuç 1.1.3. (1.5) eşitliklerinde tanımlanan $\{p_k\}$ ve $\{q_k\}$ tam sayı dizileri ve her $k\ge 0$ için,

$$p_kq_{k-2}-p_{k-2}q_k=\left(-1\right)^k a_k \tag{1.7}$$

dır[5].

Sonuç 1.1.4. $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ (1.5) ile verilen tam sayı dizileri ve $C_k=\dfrac{p_k}{q_k}$ olsun. $k\ge 1$ için,

$$C_k-C_{k-1}=\frac{\left(-1\right)^{k-1}}{q_kq_{k-1}}$$

dir. Ayrıca her $k\ge 2$ tam sayısı için,

$$C_k-C_{k-2}=\frac{a_k\left(-1\right)^k}{q_kq_{k-2}}$$

dir[5].

Teorem 1.1.6. (1.5) te tanımlı $\{p_k\}$ ve $\{q_k\}$ dizileri ile elde edilen $C_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ değerleri

$$C_0 < C_2 < \ldots < C_3 < C_1$$

sonsuz eşitlik zincirini sağlar. Diğer bir değişle

a) Çift indisli C_k değerleri artan bir dizi,

b) Tek indisli C_k değerleri azalan bir dizi teşkil ederler.

c) $\forall n, m \in Z^+$ için C_{2n} değeri C_{2m-1} değerinden daha küçüktür[5].

Önerme 1.1.3. Eğer $C_k = p_k / q_k$, $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ sürekli kesrinin k.yaklaşımı ve $a_0 > 0$ ise ;

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0]$$

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1]$$

dir[5] .

1. 2. Sonsuz Sürekli Kesirler

a_0 pozitif olması gerekmeyen bir tam sayı ve a_1 , $a_2, \ldots$ pozitif tam sayılar olmak üzere, a_0 , a_1 , $a_2, \ldots$ sonsuz tam sayı dizisi göz önüne alınsın. (1.5) de tanımlanan eşitlikler yardımıyla

$$p_0 = a_0 \quad , \quad q_0 = 1, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1 \ , \quad q_1 = a_1$$

olarak bulunur. Ayrıca $k > 0$ için $a_k > 0$ olduğundan

$$1 = q_{-2} = q_0 < q_1 < q_2 < \ldots$$

elde edilir.

Teorem 1.2.1. (1.5) ile tanımlı $\{p_k\}$ ve $\{q_k\}$ dizileri verilsin. Bu taktirde her pozitif x reel sayısı için

$$[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},x]=\frac{xp_{k-1}+p_{k-2}}{xq_{k-1}+q_{k-2}}$$

dir[4].

İspat : İspat için tümevarım kullanılırsa $k = 0$ için

$$[x]=\frac{x}{1}=\frac{xp_{-1}+p_{-2}}{xq_{-1}+q_{-2}}$$

sağlandığı açıktır. Bu eşitliğin ilk k terim için doğru olduğunu kabul edelim.

$$[a_0;a_1,\ldots,a_k,x]=\left[a_0;a_1,\ldots,a_{k-1},a_k+\frac{1}{x}\right]=\frac{\left(a_k+\frac{1}{x}\right)p_{k-1}+p_{k-2}}{\left(a_k+\frac{1}{x}\right)q_{k-1}+q_{k-2}}$$

$$=\frac{x(a_kp_{k-1}+p_{k-2})+p_{k-1}}{x(a_kq_{k-1}+q_{k-2})+q_{k-1}}=\frac{xp_k+p_{k-1}}{xq_k+q_{k-1}}$$

elde edilir ve böylece $k+1$ terim için de eşitliğin doğru olduğu görülür [4].

Teorem 1.2.2. $\forall k\geq 0$ tam sayısı için

$$C_k=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_k] \text{ ise } C_k=\frac{p_k}{q_k}$$

dır[4].

Teorem 1.2.3. Her $k \geq 1$ için, $a_k > 0$ olmak üzere, $a_0,a_1,\ldots$ tam sayılar dizisi verildiğinde $C_k=[a_0;a_1,\ldots,a_k]$ ise $\lim\limits_{k\to\infty} C_k$ mevcuttur ve her $r,s \geq 0$ tamsayıları için

$$C_{2r} < \lim_{k\to\infty} C_k < C_{2s+1}$$

dir.

İspat : Sonuç 1.1.4 ten, $\{C_{2k}\}$ dizisi monoton artan ve herhangi bir tek yaklaşım ile üstten sınırlı olduğundan limiti mevcuttur. Benzer şekilde $\{C_{2k+1}\}$ dizisi monoton azalan ve herhangi bir tek yaklaşım ile alttan sınırlı olduğundan limiti mevcuttur.

Sonuç 1.1.4 gereği ,

$$C_{2k+1} = C_{2k} + \frac{1}{q_{2k}q_{2k+1}}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} C_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} C_{2k} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{q_{2k}q_{2k+1}}$$

yazılır. $\{q_k\}$ artan bir dizi ve her k pozitif tamsayısı için $q_k \geq k$ olduğundan

$\dfrac{1}{q_{2k}q_{2k+1}}$ ifadesinin limiti sıfıra yaklaşır. Buradan

$$\lim_{k\to\infty} C_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} C_{2k}$$

yazılır. Böylece çift ve tek yaklaşımlar dizisinin limitleri eşit olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty} C_{2k} = \lim_{k\to\infty} C_{2k+1}$$

bulunur. Her tek yaklaşım her çift yaklaşımdan büyük olduğu için istenilen eşitsizlik ispatlanmış olur.

Tanım 1.2.1. a_0 hariç hepsi pozitif tam sayı olmak üzere (a_0, sıfır veya negatif tam sayı olabilir) $a_0, a_1, a_2 \ldots$ sonsuz tam sayı dizisi ile oluşturulan $[a_0; a_1, a_2 \ldots]$ sürekli kesrine sonsuz basit sürekli kesir denir. $[a_0;a_1,a_2\ldots]$ in değeri $\lim\limits_{k\to\infty}[a_0;a_1,a_2\ldots,a_k]$ olarak tanımlanır. Bu limit Teorem 1.2.2. den $\lim\limits_{k\to\infty} C_k$ şeklinde de ifade edilebilir [8].

Tanım 1.2.2. a_0 hariç hepsi pozitif tam sayılar olan bir a_0 , a_1 , … tam sayılar dizisi, $C_k = [\, a_0 \,;\, a_1 \,,\, \ldots\, a_k \,]$ olmak üzere değeri

$$[a_0;a_1,\ldots,a_n,\ldots]=\lim_{k\to\infty} C_k$$

olan bir sonsuz sürekli kesri tanımlar. C_k ’ye sonsuz sürekli kesrin k.yaklaşımı denir.

Teorem 1.2.4. Her $[a_0\,;\,a_1\,,\,a_2\ldots]$ sonsuz basit sürekli kesrinin değeri bir irrasyonel sayıdır[3].

Teorem 1.2.5. $\beta=[a_0\,;\,a_1\,,\,a_2\ldots]$ olsun. Bu taktirde $\beta_1 = [a_1\,;\,a_2\ldots]$ olmak üzere $[\beta] = a_0$ ve $\beta = a_0 + \dfrac{1}{\beta_1}$ dir[3].

Teorem 1.2.6. Farklı iki sonsuz basit sürekli kesrin irrasyonel sayı değerleri de farklıdır[3].

İspat : Kabul edelim ki farklı $[a_0\,;\,a_1\,,\,a_2\ldots]$ ve $[b_0\,;\,b_1\,,\,b_2\ldots]$ sürekli kesirleri aynı β değerine sahip olsunlar. O zaman

$$[a_0\,;\,a_1\,,\,a_2\ldots] = [b_0\,;\,b_1\,,\,b_2\ldots] = \beta$$

yazılabilir. Teorem 1.2.5 den $[\beta] = a_0 = b_0$ ve

$$\beta=a_0+\frac{1}{[a_1;a_2,\ldots]}=b_0+\frac{1}{[b_1;b_2,\ldots]}$$

dir. Böylece $[a_0\,;\,a_1\,,\,a_2\ldots]=[b_0\,;\,b_1\,,\,b_2\ldots]$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur [3].

Sonuç 1.2.1. $\beta=[a_0\,;\,a_1\,,\,\ldots]= [b_0\,;\,b_1\,,\,\ldots]$ ise her $k > 0$ için, $a_k=b_k$ dır[3].

Her sonsuz basit sürekli kesrin bir irrasyonel sayı ifade ettiğini belirtmiştik. Şimdi her irrasyonel sayının bir sonsuz basit sürekli kesir ile ifade edileceği gösterilecektir.

Teorem 1.2.7. Her α irrasyonel sayısı bir tek sonsuz basit sürekli kesre eşittir[3].

İspat : $\alpha = \alpha_0$ ve $[\alpha] = a_0$ olsun. $\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - a_0}$ alınırsa, $0 < \alpha - a_0 < 1$

olduğundan $\alpha_1 > 1$ olacaktır.

$[\alpha_1] = a_1 \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1 - a_1}$ alınırsa ve bu şekilde devam edilirse

$\forall\, k \geq 0$ için,

$$a_k = [\alpha_k]\,,\ \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \qquad (1.8)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradaki a_k tam sayıları Tanım 1.2.2. ile verilen tam sayılardır. α_0 irrasyonel sayı olduğu için α_2 bir irrasyonel sayıdır. Ayrıca her $k \geq 1$ için $a_k \geq 1$ dir. Gerçekten

$a_{k-1} = [\alpha_{k-1}]$ ve α_{k-1} irrasyonel sayısı için

$$a_{k-1} < \alpha_{k-1} < 1 + a_{k-1},\ 0 < \alpha_{k-1} - a_{k-1} < 1$$

olduğundan

$$\alpha_k = \frac{1}{\alpha_{k-1} - a_{k-1}} > 1$$

ve böylece $a_k = [\alpha_k] \geq 1$ dir. $\alpha_k = a_k + \dfrac{1}{\alpha_{k+1}}$ eşitliğinde her $k \geq 0$ için (1.8) eşitliklerinin tekrarlı kullanımı ile

$$\alpha = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = [a_0; \alpha_1] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}} = [a_0; a_1, \alpha_2]$$

$$\alpha = \alpha_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{\alpha_k}}}}$$

elde edilir. Teorem 1.2.1 den

$$\alpha = [\, a_0 \,;\, a_1 \,,\, a_2 ,\, \ldots \,,\, a_{k-1} \,,\, \alpha_k \,] = \frac{\alpha_k p_{k-1} + p_{k-2}}{\alpha_k q_{k-1} + q_{k-2}} \quad (1.9)$$

yazılabilir. Böylece

$$\alpha - C_{k-1} = \alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{\alpha_k p_{k-1} + p_{k-2}}{\alpha_k q_{k-1} + q_{k-2}} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$$

$$= \frac{-(p_{k-1}q_{k-2} - q_{k-1}p_{k-2})}{q_{k-1}(\alpha_k q_{k-1} + q_{k-2})} = \frac{-(-1)^{k-2}}{q_{k-1}(\alpha_k q_{k-1} + q_{k-2})}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1}(\alpha_k q_{k-1} + q_{k-2})} \qquad (1.10)$$

Buradan

$$|\, \alpha - C_{k-1} \,| = \frac{1}{q_{k-1}(\alpha_k q_{k-1} + q_{k-2})}$$

yazılabilir. $\alpha_k > 1$ ve q_k pozitif tam sayıları artan bir dizi oluşturduklarından, k ’nin sonsuza gitmesi durumunda $|\, \alpha - C_{k-1} \,|$ değeri de sıfıra yaklaşacaktır. Böylece Tanım 1.2.2 den

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$$

olur [3].

Teorem 1.2.7 den α ' nın bu şekilde sürekli kesirle ifadesinin tekliği görülür.

Sonuç 1.2.2. İrrasyonel sayılar ile sonsuz sürekli kesirler arasında bire bir eşleme vardır [4].

Tanım 1.2.3. $\alpha_k = [\, a_k \; ; \; a_{k+1} \; ,\ldots]$ şeklindeki sonsuz sürekli kesire $\alpha = \alpha_0 = [\, a_0 \; ; \; a_1 ...... \,]$ sonsuz sürekli kesrinin k'ninci tamlayanı veya tamlayıcısı denir.

Teorem 1.2.8. $\alpha > 1$ bir irrasyonel sayı ve

$$\alpha = [\, b_0 \; ; \; b_1 ... \,]$$

olsun. a_0 hariç, a_k 'ler pozitif olmak üzere, a_0 , a_1 , … a_{k-1} ,$(k > 0)$ tam sayıları verildiğinde

$$[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},\alpha]=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},b_0,b_1\ldots]$$

dır[4].

Örnek 1.2.1 $\alpha=\alpha_0=\sqrt{3}$ 'ün sürekli kesir açılımını bulalım.

$$a_0=[\![\sqrt{3}]\!]=1 \qquad , \qquad \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$a_1=[\![\frac{\sqrt{3}+1}{2}]\!]=1 \qquad , \qquad \alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-a_1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$$

$$a_2=[\![\sqrt{3}+1]\!]=2 \qquad , \qquad \alpha_3=\frac{1}{\alpha_2-a_2}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$\alpha_3 = \alpha_1$ olduğundan, bundan sonraki tam bölümler tekrar eder. Bu durumda $k > 0$ için

$$a_k = \begin{cases} 1 & , \quad k \text{ tek ise} \\ 2 & , \quad k \text{ çift ise} \end{cases}$$

olur, yani $\sqrt{3} = [\,1\,;1\,,\,2\,,\,1\,,\,2\,,\ldots]$ dır. p_k ve q_k eşitliklerini kullanarak bu sonsuz sürekli kesrin k yaklaşımlarını yazabiliriz. $\sqrt{3}$ sonsuz sürekli kesrinin birkaç yaklaşımı,

$$1\,,\,2\,,\,\frac{5}{3}\,,\,\frac{7}{4}\,,\,\frac{19}{11}\,,\,\frac{26}{25}$$

şeklindedir.

$C_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ yaklaşımları , α irrasyonel sayısı için en iyi rasyonel yaklaşım dizisi oluşturur. $\alpha = [\,a_0\,;\,a_1\,,\,a_2 \ldots]$ ve her $k \geq 0$ tam sayısı için Teorem 1.2.4 ün ispatından,

$$|\,\alpha - \frac{p_k}{q_k}\,| < \frac{1}{q_k q_{k+1}}$$

ve

$$|\,\alpha q_k - p_k\,| < \frac{1}{q_{k+1}}$$

olduğu biliniyor. Buradan a_k artan bir dizi olduğundan $q_k < q_{k+1}$ dir ve böylece

$$|\,\alpha - \frac{p_k}{q_k}\,| < 1/q_k^2$$

yazılabilir.

Teorem 1.2.9. $\alpha = [a_0\,;\,a_1\,,\,\ldots\,]$ bir irrasyonel sayı olsun. Her $k \geq 0$ tam sayısı için

$$|\,\alpha - \frac{p_k}{q_k}\,| < |\,\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\,|$$

dir[4].

İspat : α_{k+1} , α irrasyonel sayısı için (k+1) inci tamlayan olsun. O halde $\alpha = [a_0 \; ; \; a_1 \; , \; \ldots \; a_k \; , a_{k+1} \;]$ yazılabilir. Teorem 1.2.1 den

$$\alpha = \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}}$$

ve buradan

$$\alpha_{k+1}(\alpha q_k - p_k) = -\alpha q_{k-1} + p_{k-1} = -q_{k-1}\left(\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right)$$

bulunur. Bu son eşitliğin her iki tarafı $\alpha_{k+1} q_k$ ile bölünürse

$$\alpha - \frac{p_k}{q_k} = -\frac{q_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k}\left(\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right)$$

elde edilir. $\alpha_{k+1} > 1$, $q_k \geq q_{k-1} > 0$ olduğu için

$$-1 < -\frac{q_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k} < 0$$

bulunur ve buradan

$$|\alpha - \frac{p_k}{q_k}| < |\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}|$$

elde edilir.

Teorem 1.2.10. α bir irrasyonel sayı ve c, d tam sayıları için $(c, \; d) = 1$ ve $d > 0$ olsun.

$$|\alpha - \frac{c}{d}| \; < \; |\alpha - \frac{p_k}{q_k}| \text{ ise } d > q_k$$

dir [4].

Teorem 1.2.11. α bir irrasyonel sayı ve c, d tam sayıları için d > 0 olsun. Her $k \geq 0$ için

$$|\alpha d - c| < |\alpha q_k - p_k| \quad \text{ise} \quad d \geq q_{k+1}$$

dir.

İspat : Farz edelim ki her $k \geq 0$ için $|\alpha d - c| < |\alpha q_k - p_k|$ iken $d < q_{k+1}$ dir.

$$xp_k + yp_{k+1} = c$$

$$xq_k + yq_{k+1} = d$$

denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı $\begin{vmatrix} p_k & p_{k+1} \\ q_k & q_{k+1} \end{vmatrix} = p_k q_{k+1} - q_k p_{k+1} = \mp 1$ olduğundan , bu denklemler sıfırdan farklı olan x, y tam sayı çözümlerine sahiptirler. x = 0 olsa, $d = y\, a_{k+1}$ dir ve buradan y > 0 olduğundan $d \geq q_{k+1}$ olur. Bu ise $d < q_{k+1}$ olması ile çelişir. $y = 0$ olsa , $c = x\, q_k$ olacağından ve $|x| \geq 1$ olduğu için

$$|\alpha d - c| = |\alpha x q_k - x p_k| = |x|\, |\alpha q_k - p_k| \geq |q_k \alpha - p_k|$$

çelişkisi ortaya çıkar.

Şimdi x ve y nin ters işaretli olduğunu gösterelim. Eğer $x < 0$ ise $xq_k = d - yq_{k+1}$ eşitliğinden $y > 0$ olmalıdır. Eğer $y > 0$ ise $d > q_{k+1}$ olup $d < y\, q_{k+1}$ dir ve buradan $x\, q_k < 0$ elde edilir. O halde $x < 0$ olmalıdır. Teorem 1.1.6 dan $\alpha q_k - p_k$ ve $\alpha q_{k+1} - p_{k+1}$ değerlerinin ters işaretli olduğu söylenebilir. Dolayısıyla $x(\alpha q_k - p_k)$ ve $y(\alpha q_{k+1} - p_{k+1})$ değerleri aynı işaretlidirler.

$$\alpha d - c = \alpha(xq_k + yq_{k+1}) - (xp_k + yp_{k+1})$$

$$= x(\alpha q_k - p_k) + y(\alpha q_{k+1} - p_{k+1})$$

yazılabilir. Son eşitliğin sağ tarafındaki iki değer aynı işaretli olduklarından, bunların toplamının mutlak değeri, ayrı ayrı mutlak değerlerinin toplamına eşittir. Buradan

$$
\begin{aligned}
|\alpha d - c| &= |x(\alpha q_k - p_k) + y(\alpha q_{k+1} - p_{k+1})| \\
&= |x(\alpha q_k - p_k)| + |y(\alpha q_{k+1} - p_{k+1})| \\
&> |x(\alpha q_k - p_k)| = |x||(\alpha q_k - p_k)| \\
&\geq |\alpha q_k - p_k|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $\exists\, k \geq 0$ için

$$|\alpha d - c| < |\alpha q_k - p_k| \text{ ise } d \geq q_{k+1} \text{ dir [3].}$$

Örnek 1.2.2. π reel sayısının sürekli kesir açılımı,

$\pi = [3;\ 7,15,\ 1,\ 29,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2\ \ldots\ ]$ dir. Bu sürekli kesrin ilk dört yaklaşımı $\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}$ tür. Bu yaklaşımlar sırası ile π den daha küçük ve π den daha büyük yaklaşımlardır. Teorem 1.2.10 dan $\frac{22}{7}$ sayısının π'nin en uygun rasyonel yaklaşımı olduğu görülür.

Teorem 1.2.12. α bir irrasyonel sayı olsun. $(c,\ d) = 1,\ d > 0$ için

$$\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| < \frac{1}{2d^2}$$

ise $\frac{c}{d}$, α nin sürekli kesirlere açılımında bir yaklaşımdır[4].

İspat : α'nin basit sürekli kesre açılımındaki yaklaşımlar p_k/q_k ler olsun. Farz edelim ki $\frac{c}{d}$ α'nin bir yaklaşımı olmasın. $q_k \leq d \leq q_{k+1}$ eşitliğini sağlayan k tam sayısını ele alalım. Bu k tam sayısı için Teorem 1.2.11 den

$$|\alpha q_k - p_k| \leq |\alpha d - c| = d\,|\alpha - \frac{c}{d}| < \frac{1}{2d}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı q_k ile bölünürse

$$|\alpha - \frac{p_k}{q_k}| < \frac{1}{2dq_k}$$

bulunur. $\frac{c}{d} \neq \frac{p_k}{q_k}$ ve $d\,p_k - cq_k$ değerinin bir tam sayı olduğu dikkate alınırsa,

$$\frac{1}{dq_k} \leq \frac{|dp_k - cq_k|}{dq_k} = \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{c}{d}\right|$$

$$= \left|\frac{p_k}{q_k} - \alpha + \alpha - \frac{c}{d}\right| \leq \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| + \left|\alpha - \frac{c}{d}\right| < \frac{1}{2dq_k} + \frac{1}{2d^2}$$

elde edilir. Bulunan eşitsizliği $2d^2 q_k$ ile çarparsak $2d < d + q_k$ ve dolayısıyla $d < q_k$ elde edilir. Bu ise kabul ile çelişir [6].

BÖLÜM 2: PERİYODİK SÜREKLİ KESİRLER

Bu bölümde periyodik sürekli kesirler ile kuadratik irrasyoneller arasındaki ilişki incelenecektir.

2.1.Periyodik Sürekli Kesirler

$n \geq k$ şartını sağlayan yeterince büyük n tamsayıları için $a_n = a_{n+r}$ olacak şekilde pozitif k ve r tam sayıları varsa $[a_0 ; a_1 , a_2 ,\ldots]$ sonsuz basit sürekli kesri periyodik olarak adlandırılır.

$n \geq k$ için

$$[a_0 ; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, ... , a_{k+r-1}, a_k, a_{k+1}, ... , a_{k+r-1}, ..., a_k, ...]$$

periyodik sonsuz sürekli kesri

$$[a_0 ; a_1 , a_2 ,... , a_{k-1}, \overline{a_k , a_{k+1} , ... , a_{k+r-1}}]$$

şeklinde gösterilebilir. $a_k , a_{k+1} , \ldots , a_{k+r-1}$ tam sayılarının üzerindeki çizgi, bu tam sayıların sırasıyla sonsuz defa tekrarlandığını gösterir. Ayrıca r pozitif tam sayılarının en küçüğüne periyodik sonsuz sürekli kesrin periyot uzunluğu veya kısaca periyodu denir. $a_1 , a_2 , \ldots , a_{k-1}$ e de bu kesrin ilk periyodu denir. Eğer k, tüm $n \geq k$ lar için $a_n = a_{n+r}$ gibi negatif olmayan en küçük tamsayı ise $a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+r-1}$ bu kesrin temel periyodu olarak isimlendirilir. Eğer $k=0$ ise periyodik sonsuz sürekli kesre pür periyodik denir. Bu durumda periyodik sürekli kesir $[\overline{a_0 ; a_1 , ... , a_{r-1}}]$şeklindedir. Örneğin, $[2; 5, 2, 5, \ldots]$ sonsuz sürekli kesri $[\overline{2;5}]$ şeklinde gösterilir. $\sqrt{3} = [1;\overline{1,2}]$ sayısının periyot uzunluğu 2 dir.

Tanım 2.1.1. α irrasyonel sayı ve α sayısı, katsayıları tam sayılar olan kuadratik bir polinomun kökü ise, α reel sayısına bir kuadratik irrasyoneldir denir; yani A, B ve C tam sayıları ve $A \neq 0$ olmak üzere $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ ise α'ya kuadratik irrasyonel sayı denir [8].

Tanım 2.1.2. u, v birer rasyonel sayı $(v \neq 0)$ ve d tam kare olmayan pozitif bir tam sayı olmak üzere $u + v\sqrt{d}$ formundaki sayılara kuadratik irrasyonel sayı denir [4].

Önerme 2.1.1. Her α kuadratik irrasyonel sayısı, D tam kare olmayan pozitif bir tam sayı ve $Q \mid D - P^2$ $(Q \neq 0, P, Q \in Z)$ olmak üzere

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{Q}$$

formunda yazılabilir.

İspat : α kuadratik irrasyonel olduğundan $\alpha = u + v\sqrt{d_0}$, $v \neq 0$, $u, v \in Q$, $d_0 > 0$ tam kare olmayan bir pozitif tamsayı olsun. a, b, c $\in$ Z , $b \neq 0$, $c \neq 0$ olmak üzere $\alpha = \dfrac{a + b\sqrt{d_0}}{c} = \dfrac{a + \sqrt{b^2 d_0}}{c} = \dfrac{a + \sqrt{d_1}}{c}$ şeklinde yazabiliriz. Burada $d_1 > 0$ tam kare olmayan bir tam sayıdır. Pay ve paydayı |c| ile çarparsak,

$$\alpha = \frac{a\,|\,c\,| + \sqrt{c^2 d_1}}{c\,|\,c\,|}$$

olur. Buradan α irrasyonel sayısını

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$$

biçiminde yazabiliriz. $P_0 = a|c|$, $D = d_1 c^2 = b^2 c^2 d_0$ ve d_0 tam kare olmadığından D tam kare değildir. Ayrıca $D - P_0^2 = d_1 c^2 - a^2 c^2 = \left(d_1 - a^2\right) c^2$ olduğundan $\pm c^2 = Q_0 \mid D - P_0^2$ elde edilir [4].

Tanım 2.1.3. $\alpha = \frac{P+\sqrt{D}}{Q}$ bir kuadratik irrasyonel olsun. α'nın eşleniği α' ile ifade edilir ve $\alpha' = \frac{P-\sqrt{D}}{Q}$ olarak tanımlanır. Burada α ve α',

$$x^2 - T(\alpha)\,x + N(\alpha) = 0$$

denkleminin kökleridir, bu kolayca görülebilir. Ayrıca

$$T(\alpha) = \alpha + \alpha' = \frac{P+\sqrt{D}}{Q} + \frac{P-\sqrt{D}}{Q} = \frac{2P}{Q}$$

olup, $T(\alpha)$ α nın izi olarak bilinir ve

$$N(\alpha) = \alpha\alpha' = \left(\frac{P+\sqrt{D}}{Q}\right)\left(\frac{P-\sqrt{D}}{Q}\right) = \frac{P^2-D}{Q^2}$$

olup, bu ifade α nın normudur[11].

Aşağıdaki önermede kuadratik irrasyonel sayılar için eşleniğin özellikleri verilecektir.

Önerme 2.1.2. $\alpha = a_1 + b_1\sqrt{D}$ ve $\beta = a_2 + b_2\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayıları için

(i) $(\alpha \pm \beta)' = \alpha' \pm \beta'$

(ii) $(\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$

(iii) $\beta \neq 0$ ise $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)' = \frac{\alpha'}{\beta'}$

eşitlikleri geçerlidir[4].

İspat : $\alpha = a_1 + b_1\sqrt{D}$ iken $\alpha' = a_1 - b_1\sqrt{D}$

$\beta = a_2 + b_2\sqrt{D}$ iken $\beta' = a_2 - b_2\sqrt{D}$

dır.

$$(\alpha\beta)' = [(a_1 + b_1\sqrt{D})(a_2 + b_2\sqrt{D})]'$$

$$= [(a_1a_2 + b_1b_2D) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{D}]'$$

$$= (a_1a_2 + b_1b_2D) - (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{D}$$

elde edilir. Diğer taraftan ,

$$\alpha'\beta' = (a_1 - b_1\sqrt{D})(a_2 - b_2\sqrt{D})$$

$$= (a_1a_2 + b_1b_2D) - (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{D}$$

bulunur. Buradan $(\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$ elde edilir. Diğerlerinin ispatı benzer yolla görülebilir[4].

Aşağıda periyodik sürekli kesirler ile kuadratik irrasyonel sayılar arasındaki bağıntılar incelenecektir.

Teorem 2.1.1. Her periyodik basit sürekli kesir, bir kuadratik irrasyonel sayıya eşittir [4].

İspat : α nın sürekli kesir değeri , $\alpha = \left[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},\overline{b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}}\right]$ olsun. $\beta = \left[\overline{b_0;b_1,b_2,\ldots,b_{n-1}}\right]$ denilirse $\beta = [b_0;b_1,\ldots,b_{n-1},\beta]$ şeklinde yazılabilir ve β'nın yaklaşımları $\dfrac{p'_k}{q'_k}$ $(k \geq 0)$ ile gösterilirse Teorem 1.2.1 den

$$\beta = \frac{\beta\, p'_{k-1} + p'_{k-2}}{\beta\, q'_{k-1} + q'_{k-2}}$$

yazılabilir. Buradan β'nin ikinci dereceden bir denklemin kökü olduğu anlaşılır ve β sonsuz sürekli kesir açılıma sahip olduğu için irrasyonel sayıdır; fakat β periyodik olduğundan kuadratik irrasyonel sayı olur. Eğer $k = 0$ ise $\alpha = \beta$ olacağından α da kuadratik irrasyonel sayı olur. Eğer $k > 0$ ise,

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \beta]$$

olur. $[a_0 \,;\, a_1 \,,\, a_2 \,, \ldots\ldots , a_{k-1}]$ in yaklaşımları $\frac{p_k''}{q_k''}$ ile gösterilirse, teorem 1.2.1 den

$$\alpha = \frac{\beta\, p_{n-1}'' + p_{n-2}''}{\beta\, q_{n-1}'' + q_{n-2}''}$$

olur. β irrasyonel olduğundan α da irrasyonel ve β kuadratik olduğundan α da kuadratik olur [4].

Teorem 2.1.2. Her kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesre açılımı periyodiktir.

İspat : $\alpha = \alpha_0 = [a_0 \,;\, a_1, \, a_2 \,, \ldots\ldots]$ kuadratik irrasyonel sayı olsun. Önerme 2.1.1 den

$$\alpha_0 = \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} \qquad , \qquad Q_0 \mid D - P_0^2$$

formunda yazabiliriz. $\alpha = \alpha_0$ için aşağıdaki eşitlikler her $k \geq 0$,

$$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k$$

$$Q_{k+1} = \frac{D - P_{k+1}^2}{Q_k} \tag{2.1}$$

biçiminde olsun. Tanımlanan bu eşitlikler için aşağıdaki ifadeler doğrudur [2]. Her $k \geq 0$ tam sayısı için,

(i) P_k ve $Q_k \in \mathbb{Z}$ ve $Q_k \neq 0$

(ii) $\alpha_k = \dfrac{P_k + \sqrt{D}}{Q_k} \quad , \quad [\alpha_k] = a_k$ (2.2)

(iii) $Q_k \mid D - P_k^2$

dır. İspatlar tümevarımla kolayca yapılabilir. α'_k ile α_k ’ nin eşleniğini gösterirsek,

$$\alpha'_k = \frac{P_k - \sqrt{D}}{Q_k} \quad \text{ve} \quad \alpha' = \alpha'_0 = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, \alpha'_k]$$

olur ve buradan

$$\alpha'_0 = \frac{\alpha'_k p_{k-1} + p_{k-2}}{\alpha'_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

elde edilir. Son eşitlikten α'_k çekilirse,

$$\alpha'_k = -\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} \left(\frac{\alpha' - p_{k-2}/q_{k-2}}{\alpha' - p_{k-1}/q_{k-1}} \right)$$

bulunur. k’nin sonsuza gitmesi durumunda limit alınırsa p_{k-2} / q_{k-2} ve p_{k-1} / q_{k-1} değerlerinin ikisi de α_0 a yaklaşır ve böylece parantez içi 1 olur. Bu yüzden N keyfi sabit bir tam sayı olmak üzere $k > N$ olacak şekilde yeterince büyük k pozitif tam sayısı için parantez içi pozitif ve $-1 < \alpha'_k < 0$ dır. Fakat α_k, her $k \geq 1$ için pozitif hatta $\alpha_k > 1$ olduğundan $k > N$ için $\alpha_k - \alpha'_k > 0$ dır. (2.2) den $\alpha_k - \alpha'_k = 2\sqrt{D} / Q_k > 0$ ve $k > N$ ve dolayısıyla $Q_k > 0$ dır. Yine (2.1) ve (2.2) eşitliklerinden $k > N$ için,

$$Q_k Q_{k+1} = D - P_{k+1}^2 \leq D \quad , \quad Q_k \leq Q_k Q_{k+1} \leq D$$

$$P_{k+1}^2 \leq P_{k+1}^2 + Q_k Q_{k+1} = D \quad , \quad | P_{k+1} | < \sqrt{D}$$

bulunur. Böylece, D sabit bir pozitif tam sayı olduğundan, Q_k ve P_{k+1} sayılarını $k > N$ için alabilecekleri değerlerin sonlu sayıda olduğu sonucuna varılır. Ayrıca bu eşitliklerin ikisini birden sağlayan (P_k , Q_k) çiftlerinin sayısı sonlu olacaktır.

Böylece, öyle m ve n tam sayıları vardır ki $P_m = P_n$ ve $Q_m = Q_n$ dir. O halde $\alpha_m = \alpha_n$ yazılabilir. Bu ise açılımın periyodik olduğunu gösterir[8].

Sonuç 2.1.1. Teorem 2.1.2 de verilen (2.1) ve (2.2) eşitlikleri yardımı ile $\alpha = \dfrac{P+\sqrt{D}}{Q}$ şeklinde verilen bir kuadratik irrasyonel sayının sonsuz sürekli kesirlere açılımı kolayca bulunabilir.

Örnek 2.1.1. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ irrasyonel sayısının sonsuz sürekli kesir açılımı bulunabilir.

D = 2, P_0 = 1, Q_0 = 3 değerleri alınarak açılım yapılamaz, çünkü $Q_0 \mid D - P_0^2$ şartı sağlanmaz. Bunun için α'yı teorem 2.1.2 den

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{18}}{9}$$

şekline getirmek gerekir. $P_0 = 3$, $Q_0 = 9$ ve $D = 18$ dır. Buradan $a_0 = [\![\alpha]\!] = 0$ ve

$$P_1 = 0.9 - 3 = -3 \qquad \alpha_1 = (-3+\sqrt{18})/1$$
$$Q_1 = (18-(-3)^2)/9 = 1 \qquad a_1 = [\![(-3+\sqrt{18})/1]\!] = 1$$

$$P_2 = 1.1-(-3) = 4 \qquad \alpha_2 = (4+\sqrt{18})/2$$
$$Q_2 = (18-4^2)/1 = 2 \qquad a_2 = [\![(4+\sqrt{18})/2]\!] = 4$$

$$P_3 = 4.2 - 4 = 4 \qquad \alpha_3 = (4+\sqrt{18})/1$$
$$Q_3 = (18-4^2)/2 = 1 \qquad a_3 = [\![(4+\sqrt{18})/1]\!] = 8$$

$$P_4 = 8.1 - 4 = 4 \qquad \alpha_4 = (4+\sqrt{18})/2$$
$$Q_4 = (18-4^2)/1 = 2 \qquad a_4 = [\![(4+\sqrt{18})/2]\!] = 4$$

ve böyle devam edilirse $P_2 = P_4$ ve $Q_2 = Q_4$ yinelemesi elde edilir. Buradan

$$(1+\sqrt{2})/3=[0;1,4,8,4,8,\ldots]=[0;1,\overline{4,8}]$$

bulunur. Burada a_k 'ler kısmi bölümler, α_k 'ler de kuadratik irrasyonellerdir.

Örnek 2.1.2. $\alpha=[5;\overline{1,10}]$ alınırsa α 'nın değerini bulmak için $\beta=\left[\overline{1;10}\right]$ alınsın. Buradan α=[5; β] olur.

$$\beta=[1;\ 10,1,\ 10,\ \ldots]\ =\ [1;\ 10,\ \beta]$$

dır. Böylece,

$$\beta=1+\frac{1}{10+\frac{1}{\beta}}\Rightarrow\beta=\frac{11\beta+1}{10\beta+1}$$

$$\Rightarrow 10\beta^2-10\beta-1=0$$

kuadratik denklemi bulunur. $\beta > 0$ olduğundan bu denklemin kökü

$$\beta=5+\sqrt{35}$$

bulunur.

$$\alpha=[5;\beta]=5+\frac{1}{5+\sqrt{35}}=\frac{45+\sqrt{35}}{85}$$

elde edilir.

Örnek 2.1.3. $\alpha\ =\ [1;\ 1,1,\ \ldots]$ sonsuz sürekli kesri irrasyonel sayı olarak ifade edilebilir.

$\alpha\ =\ [1;\ 1,1,\ \ldots]\ =\ [1;\ [1;\ 1,\ \ldots]\ ]\ =\ [1;\ \alpha]$ şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\alpha=1+\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\alpha^2-\alpha-1=0$$

kuadratik denklemi elde edilir. α pozitif olacağından,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

bulunur.

Örnek 2.1.4. $\alpha = [-1;\, 1,\, 2;\, 1,\, 2,\, \dots\,] = [-1;\, \overline{1,\, 2}]$ olarak alınsın ve $\beta = \left[\overline{1; 2}\right]$ olmak üzere,

$$\beta = [1;\, 2;\, 1, 2,\, \dots\,] = [1;\, 2,\, \beta] \Rightarrow \beta = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\beta}}$$

$$\Rightarrow 2\beta^2 - 2\beta - 1 = 0$$

kuadratik denklemi elde edilir. β pozitif olacağından,

$$\beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

bulunur.

$$\alpha = [-1;\, \beta] = -1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} - 2$$

elde edilir.

2.2. Pür Periyodik Sonsuz Sürekli Kesirler

Tanım 2.2.1. Bir kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesre açılımında periyot dışında eleman kalmıyorsa bu kesre pür periyodik sürekli kesir denir [1].

Örneğin $\left[\overline{1;\, 1,\, 4,\, 1}\right] = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$ sürekli kesri pür periyodiktir. $\sqrt{3} = \left[1;\, \overline{1,\, 2}\right]$ pür periyodik değildir.

Tanım 2.2.2. α bir kuadratik irrasyonel olsun. Eğer $\alpha > 1$ ve $-1 < \alpha' < 0$ ise α'ya indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı denir. Burada α' ile α'nın eşleniği ifade edilmektedir [5].

Örneğin $\sqrt{3}+1=[\overline{2;1}]$ bir indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayıdır. Çünkü $\alpha'=1-\sqrt{3}$ olup $-1<\alpha'<0$ şartını sağlar.

Önerme 2.2.1. Bir $n>1$ tam sayısı için $\alpha'_{n-1} < 0$ ise

i) $-1<\alpha'_n<0$,

ii) $0<P_n<\sqrt{D}$,

iii) $0<Q_n<2\sqrt{D}$

dir.

İspat : (i) $\alpha_{n-1} = a_{n-1}+\dfrac{1}{\alpha_n}$ olduğundan, eşlenik alınarak $\alpha'_{n-1} = a_{n-1}+\dfrac{1}{\alpha'_n}$ bulunur. $n>1$ için $a_{n-1}>0$ olduğundan, $\alpha'_{n-1}<0$ olduğundan $\alpha'_n<0$ olduğu anlaşılır. Buradan

$$\frac{1}{\alpha'_n} = \alpha'_{n-1} - a_{n-1} < -a_{n-1} \leq -1$$

ve $-1<\alpha'_n<0$ bulunur.

(ii) $n \neq 0$ için $\alpha_n > 1$ dir. Buradan $\alpha_n - \alpha'_n > 0$ ve $\alpha_n + \alpha'_n > 0$ bulunur.

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{D}+P_n}{Q_n} \text{ ve } \alpha'_n = \frac{-\sqrt{D}+P_n}{Q_n}$$

olduğundan,

$$\alpha_n - \alpha'_n = \frac{2\sqrt{D}}{Q_n} > 0 \Rightarrow Q_n > 0$$

bulunur.Ayrıca

$$\alpha_n + \alpha'_n = \frac{2P_n}{Q_n} > 0 \;\Rightarrow\; P_n > 0$$

dır. Son iki eşitlikten,

$$\alpha'_n = \frac{-\sqrt{D} + P_n}{Q_n} < 0 \;\Rightarrow\; P_n < \sqrt{D}$$

elde edilir. Buradan istenen ispatlanmış olur. Ayrıca aynı eşitliklerden,

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{D} + P_n}{Q_n} > 1 \;\Rightarrow\; Q_n < \sqrt{D} + P_n < 2\sqrt{D}$$

elde edilir. Buradan da (iii) gösterilmiş olur.

Teorem 2.2.1. α kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesirlere açılımının pür periyodik olması için gerek ve yeter şart, α'nın indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı olmasıdır.

İspat : $(\Rightarrow)$ $\alpha = \alpha_0$ indirgenmiş kuadratik bir irrasyonel sayı olsun. O halde $\alpha_0 > 1$ ve $-1 < \alpha'_0 < 0$ yazılabilir. Her $k \geq 0$ için

$$a_k = [\alpha_k] \qquad , \qquad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$$

olduğu biliniyor. Buradan

$$1/\alpha_{k+1} = \alpha_k - a_k$$

yazılır ve eşitliğin her iki tarafında eşlenik alınırsa

$$1/\alpha'_{k+1} = \alpha'_k - a_k$$

elde edilir. Her $k \geq 1$ için $a_k \geq 1$ ve $\alpha_k > 1$ olduğundan $a_0 = [\alpha_0] \geq 1$ dir. Böylece eğer $\alpha'_k < 0$ ise, $\dfrac{1}{\alpha'_{k+1}} < -1$ ve buradan $\alpha'_{k+1} < 0$ dır. $-1 < \alpha'_0 < 0$ olduğundan tümevarımla her $k \geq 0$ için $-1 < \alpha'_0 < 0$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla

$$\alpha'_k = a_k + \frac{1}{\alpha'_{k+1}} \Rightarrow -\frac{1}{\alpha'_{k+1}} = a_k - \alpha'_k \text{ ve } -1 < \alpha'_k < 0$$

olduğundan $a_k = \left[\!\left[-\dfrac{1}{\alpha'_{k+1}} \right]\!\right]$ olur. Kabul edelim ki, α_0 'ın sürekli kesirlere açılımındaki periyot uzunluğu n ve periyot başı a_m olsun. Periyodun son terimi a_{n+m-1} olacaktır. $m > 0$ için,

$$\alpha_m = \alpha_{m+n} \Rightarrow \alpha'_m = \alpha'_{m+n}$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{\alpha'_m} \right] = \left[-\frac{1}{\alpha'_{m+n}} \right] \Rightarrow a_{m-1} = a_{m+n-1}$$

bulunur. Ayrıca $\alpha_k = a_k + \dfrac{1}{\alpha_{k+1}}$ eşitliğini göz önüne alarak,

$$\alpha_{n+m-1} = a_{n+m-1} + \frac{1}{\alpha_{m+n}}$$

bulunur.

$$\alpha_{m-1} = a_{m-1} + \frac{1}{\alpha_m} = a_{m-1} + \frac{1}{\alpha_{m+n}}$$

olduğundan

$$\alpha_{m-1} = \alpha_{(n-1)+m}$$

sonucu elde edilir. Bu ise periyot başının a_{m-1} olduğunu gösterir. Böylece çelişki doğar. O halde $m = 0$, yani periyot başı a_0 dır. Dolayısıyla $\alpha = \alpha_0$ ' ın sürekli kesri pür periyodik olmak zorundadır.

$(\Leftarrow)$ Şimdi $\alpha = \alpha_0 = \left[\overline{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}}\right]$ sürekli kesrinin pür periyodik bir kuadratik irrasyonel olduğu kabul edilsin. $a_0 = a_k$ ve $k > 0$ olduğundan $a_0 \geq 1$ve $\alpha > 1$ dir.

$$\alpha = \frac{\alpha p_{k-1} + p_{k-2}}{\alpha q_{k-1} + q_{k-2}}$$

eşitliğinden $q_{k-1}\alpha^2 + (q_{k-2} - p_{k-1})\alpha - p_{k-2} = 0$ bulunur. Buradan α 'nın ikinci dereceden bir denklemin kökü olduğu görülür. Bu kuadratik denklemi

$$f(x) = q_{k-1}x^2 + (q_{k-2} - p_{k-1})x - p_{k-2}$$

şeklinde ifade edersek $f(\alpha) = 0$ olduğu görülür ve dolayısıyla $f(\alpha') = 0$ dır. Ayrıca $\{p_k\}$ ve $\{q_k\}$ dizileri artan olduğundan,

$$f(0) = -p_{k-2} < 0$$

$$f(-1) = (q_{k-1} - q_{k-2}) + (p_{k-1} - p_{k-2}) > 0$$

bulunur. Buradan $f(x) = 0$ denkleminin bir kökünün -1 ile 0 arasında olduğu anlaşılır. $\alpha = \alpha_0 > 1$ olduğundan bu değer ancak α' olabilir. $-1 < \alpha' < 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla α bir indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayıdır [4].

2.3. $\sqrt{D}$ nin Sürekli Kesre Açılımı

Bu kısımda D tam kare olmayan pozitif bir tam sayı olmak üzere $\sqrt{D}$ biçimindeki kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesre açılımı incelenecektir.

Teorem 2.3.1. D tam kare olmayan pozitif bir tam sayı olmak üzere $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımı;

$$\sqrt{D}=[a_0;\overline{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},2a_0}], \qquad a_n=2a_0$$

biçimindedir[4].

İspat : $\alpha=\alpha_0=\sqrt{D}>1$ kuadratik irrasyonel sayısı için $\alpha'=-\sqrt{D}<-1$ olduğundan α, indirgenmiş değildir.O yüzden $\alpha=\sqrt{D}+[\![\sqrt{D}]\!]$ irrasyonel sayısını ele alırsak $\alpha>1$ ve $0<\alpha'=-\sqrt{D}+[\![\sqrt{D}]\!]<1$ olduğundan indirgenmiştir dolayısıyla pür periyodik açılıma sahiptir. Böylece $\sqrt{D}+[\![\sqrt{D}]\!]$ sayısı, periyot uzunluğu n olmak üzere,

$$\sqrt{D}+[\![\sqrt{D}]\!]=\left[\overline{a_0;a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}}\right]=\left[a_0;\overline{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_0}\right]$$

biçiminde yazılabilir. α_i ile i 'nin tüm değerleri için $\alpha_i=[a_i;\ a_{i+1},\ ...]$ pür periyodik sürekli kesirleri gösterilirse $\alpha_0=\alpha_n=\alpha_{2n}=\ldots$ dir. Ayrıca n periyot uzunluğu olduğu için α_1 , α_2 , … , α_{n-1} değerlerinin her biri α_0 dan farklı olacaktır. Böylece $\alpha_i=\alpha_0$ olması için gerek ve yeter şart i = nk, k $\in\mathbb{N}$ yani n | i olmasıdır.

$a_0=\left[\!\left[\sqrt{D}+[\![\sqrt{D}]\!]\right]\!\right]=2[\![\sqrt{D}]\!]$ alınırsa, $\alpha=\sqrt{D}$ açılımı,

$$\alpha=\sqrt{D}+[\![\sqrt{D}]\!]=\left[a_0;\overline{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_0}\right]$$

$$\sqrt{D}=\left[\left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right];\overline{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_0}\right]$$

$$=\left[\left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right];\overline{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},2\left[\!\left[\sqrt{D}\right]\!\right]}\right]$$

elde edilir.

Teorem 2.3.2. D tam kare olmayan pozitif bir tam sayı olsun. $\alpha_k=(P_k+\sqrt{D})/Q_k\,,a_k=[\![\alpha_k]\!]$, $Q_{k+1}=(D-P_{k+1}^2)\big|Q_k$, $k\ \geq\ 0$ olarak tanımlansın. Ayrıca p_k/q_k , $\sqrt{D}$ nin sürekli kesirlere açılımında k'ninci yaklaşımı olsun. O zaman

$$p_{k-1}^2 - Dq_{k-1}^2 = (-1)^k Q_k$$

dir [8].

İspat : $\sqrt{D} = \alpha_0 = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_k}]$, $(a_k = 2a_0)$ olsun. Bu durumda,

$$\alpha_0 = \sqrt{D} = \frac{\alpha p_{k-1} + p_{k-2}}{\alpha q_{k-1} + q_{k-2}}$$

olarak yazılabilir ve $\alpha_k = (P_k + \sqrt{D}) / Q_k$ olduğundan,

$$\sqrt{D} = \frac{\left(P_k + \sqrt{D}\right) p_{k-1} + Q_k p_{k-2}}{\left(P_k + \sqrt{D}\right) q_{k-1} + Q_k q_{k-2}}$$

ve buradan

$$\sqrt{D}\left(P_k q_{k-1} + Q_k q_{k-2} - p_{k-1}\right) + Dq_{k-1} - P_k p_{k-1} - Q_k P_{k-2} = 0$$

elde edilir. $\sqrt{D}$ irrasyonel olduğundan bu eşitlikten,

$$\begin{aligned} P_k q_{k-1} + Q_k q_{k-2} &= p_{k-1} \\ P_k p_{k-1} + Q_k P_{k-2} &= Dq_{k-1} \end{aligned}$$

denklemleri yazılabilir. İlk denklemi p_{k-1} ile ikinci denklemi $-q_{k-1}$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak;

$$Q_k \left(p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1}\right) = p_{k-1}^2 - Dq_{k-1}^2$$

$$p_{k-1}^2 - Dq_{k-1}^2 = \left(-1\right)^k Q_k$$

elde edilir ve istenen sonuç elde edilmiş olur.

BÖLÜM 3 : PELL DENKLEMLERİ

Bu bölümde Pell denkleminin tam sayı çözümleri ile sonsuz sürekli kesirler arasındaki bağıntılardan bahsedilecektir ve N , D tam sayıları için,

$$x^2 - Dy^2 = N \tag{3.1}$$

biçimindeki Diophant denklemleri incelenecektir..

Tanım 3.1.1. D tam kare olmayan pozitif bir tam sayı ve $|N| < \sqrt{D}$ olmak üzere

$$x^2 - Dy^2 = N$$

denklemine genel Pell denklemi denir. Eğer $x_0^2 - Dy_0^2 = N$ olacak şekilde x_0 ve y_0 tam sayıları varsa (x_0 , y_0) ikilisine (3.1) denkleminin bir çözümü denir. Eğer x_0 ve y_0 tam sayıları pozitif ise (x_0 , y_0) ikilisi, bir pozitif çözüm olarak tanımlanır. (x_0 , y_0) bir pozitif çözüm ise $(\pm x_0 , \pm y_0)$ da bir çözümdür. O halde (3.1) denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulmak için pozitif çözümlerini bulmak yeterlidir. Bu yüzden çözüm denilince pozitif olanlar kastedilecektir [1].

Teorem 3.1.1. (3.1) denkleminin bütün pozitif çözümleri $\sqrt{D}$ nin yaklaşımlarıdır.

İspat : (x, y) , (3.1) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. Eğer N > 0 ise,

$$0 < x - y\sqrt{D} = \frac{N}{x + y\sqrt{D}} < \frac{\sqrt{D}}{x + y\sqrt{D}} = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{D}} + y} = \frac{1}{y\left(\frac{x}{y\sqrt{D}} + 1\right)}$$

olur. $0 < x - y\sqrt{D}$ için $\frac{x}{y\sqrt{D}} > 1$ olduğundan,

$$0 < x - y\sqrt{D} < \frac{1}{y\left(\frac{x}{y\sqrt{D}} + 1\right)} < \frac{1}{2y}$$

$$0 < \frac{x}{y} - \sqrt{D} < \frac{1}{2y^2}$$

elde edilir ve buradan $|\sqrt{D} - \frac{x}{y}| < \frac{1}{2y^2}$ bulunur.Teorem 1.2.12 ye göre $\frac{x}{y}$, $\sqrt{D}$ nin sürekli kesrinin bir yaklaşımıdır.

Eğer N < 0 ise, $y^2 - \frac{x^2}{D} = \frac{-N}{D} > 0$ denkleminde benzer işlemlerle yapılarak $|\frac{1}{\sqrt{D}} - \frac{y}{x}| < \frac{1}{2x^2}$ olduğu görülür. Bu ise $\frac{y}{x}$ in $\frac{1}{\sqrt{D}}$ nin bir yaklaşımı olduğunu gösterir. Buradan da $\frac{x}{y}$ nin $\sqrt{D}$ nin bir yaklaşımı olduğu ortaya çıkar [6].

Aşağıda (3.1) denkleminde $N = \pm 1$ seçilmesi durumunda oluşan

$$|x^2 - Dy^2| = 1 \tag{3.2}$$

Pell denklemleriyle ilgili bilgiler verilecektir.

Teorem 3.1.2. D tam kare olmayan pozitif bir doğal sayı, $|n| < \sqrt{D}$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $x^2 - y^2D = n$ ise, bu durumda $\frac{x}{y} = \frac{p_k}{q_k} = C_k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesir açılımının bir yaklaşımı vardır [4].

Teorem 3.1.3. D, 4 ile veya $p \equiv 3 \pmod 4$ şartını sağlayan bir p asal sayısı ile bölünebilir ise $x^2 - Dy^2 = -1$ Pell denkleminin hiçbir çözümü yoktur [4].

İspat : $x = x_0$ ve $y = y_0$ bir çözüm olsun. $p \equiv 3 \pmod 4$ ve $p \mid D$ kabul edilsin. Bu taktirde ;

$$x^2 = x_0^2 - Dy_0^2 \equiv -1 \pmod p$$

olur fakat $p \equiv 3 \pmod 4$ için bu mümkün değildir.

Benzer şekilde eğer $4 \mid D$ ise ,

$$x_0^2 = x_0^2 - Dy_0^2 \equiv -1 \pmod 4$$

olur fakat $x_0^2 \equiv 0$ veya 1 (mod 4) olduğundan bu da bir çelişki oluşturur.

Yukarıda bahsedilen metod, bir Diophantine denkleminin hiçbir çözümünün olmadığını göstermek için güzel bir yoldur.

Örnek 3.1.1. $x^2 - 7y^2 = -1$ Pell denkleminin hiçbir çözümü yoktur. Çünkü $x = x_0$, $y = y_0$ bir çözüm olsa,

$$x_0^2 = x_0^2 - 7y_0^2 \equiv -1 \pmod 7$$

olur fakat $p = 7 = 3 \pmod 4$ olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla bir çelişki elde edilir.

Teorem 3.1.4. D tam kare olmayan bir pozitif tam sayı olsun. O zaman $| x^2 - Dy^2 | = +1 \quad x,\ y \in \mathbb{Z}$, Pell denklemi

$$|\left(x + \sqrt{D}y\right)\left(x - \sqrt{D}y\right)| = 1$$

şeklinde yazılabilir.

İspat : $\alpha = x + \sqrt{D}y$ dersek $\alpha' = x - \sqrt{D}y$ olmak üzere

$| x^2 - Dy^2 | = 1$ denklemi

$|\left(x - \sqrt{D}y\right)\left(x + \sqrt{D}y\right)| = 1 \Rightarrow | \alpha \cdot \alpha' | = 1$ şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.1.5. D tam kare olmayan , pozitif bir tam sayı olsun. $\sqrt{D}$ nin periyot uzunluğu m ve yaklaşımları p_k / q_k ($k \geq 0$ için) olsun.

(i) Eğer m çift ise, $x^2 - Dy^2 = -1$ Pell denkleminin hiçbir çözümü $\left(p_k ,\ q_k\right)$ olamaz.

(ii) Eğer m tek ise, $x^2 - Dy^2 = -1$ Pell denkleminin bir çözümünün (p_k , q_k) olması için gerek ve yeter koşul $k = (2i\text{-}1)\, m - 1$ 'i sağlayan i doğal sayısı olmasıdır.

İspat : (p_k , q_k)'nın $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul teorem 2.3.2 den $(-1)^{k+1} Q_{k+1} = -1 \Leftrightarrow k+1 = mi$ tek olacak şekilde $i \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer m çift ise bu koşul sağlanmaz. Eğer m tek ise $i = 1, 3, \ldots$ olmalıdır.

Sonuç 3.1.1. $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell denkleminin sonsuz çözümü vardır. $x^2 - Dy^2 = -1$ Pell denkleminin çözümü olmayabilir; ama varsa sonsuz çözümü vardır.

Teorem 3.1.6. D tam kare olmayan pozitif bir tamsayı ve $\sqrt{D}$ nin periyot uzunluğu ℓ olmak üzere, $\alpha = \sqrt{D} = \left[a_0, \overline{a_1, a_2, ..., a_\ell}\right]$ olsun. Eğer ℓ çift ise $x^2 - y^2D = 1$ pell denkleminin tüm pozitif çözümleri $k \in \mathbb{N}$ için, $x = p_{k\ell-1}$ ve $y = q_{k\ell-1}$ dir ve $x^2 - y^2D = -1$ pell denkleminin çözümü yoktur.Eğer ℓ tek sayı ise $x^2 - y^2D = 1$ pell denkleminin tüm pozitif çözümleri $k \in \mathbb{N}$ için, $x = p_{2k\ell-1}$ ve $y = q_{2k\ell-1}$ dir ve $x^2 - y^2D = -1$ denkleminin tüm pozitif çözümleri $k \in \mathbb{N}$ için, $x = p_{(2k-1)\ell-1}$ ve $y = q_{(2k-1)\ell-1}$ dir [11].

Örnek 3.1.2. D=65 alınsın.O zaman $\sqrt{D} = \left[8; \overline{16}\right]$ dır.Buradan $\ell\left(\sqrt{65}\right) = 1$ olur.

$$
\begin{array}{ll}
p_0 = 8 & q_0 = 1 \\
p_1 = 129 & q_1 = 16 \\
p_2 = 2072 & q_2 = 257 \\
p_3 = 33281 & q_3 = 4128
\end{array}
$$

hesaplanabilir. $x^2 - y^2D = 1$ pell denkleminin tüm pozitif çözümleri $k \in \mathbb{N}$ için, $p_{2k-1}^2 - q_{2k-1}^2.65 = 1$ dir. Örneğin

$$p_1^2 - q_1^2.65 = 129^2 - 16^2.65 = p_3^2 - q_3^2.65 = 33281^2 - 4128^2.65 = 1$$

dir. $x^2 - y^2D = -1$ denkleminin tüm pozitif çözümleri $k \in \mathbb{N}$ için, $p_{2k-2}^2 - q_{2k-2}^2.65 = -1$ biçimindedir. Buradan

$$p_0^2 - q_0^2.65 = 8^2 - 1^2.65 = p_2^2 - q_2^2.65 = 2072^2 - 257^2.65 = -1$$

yazılabilir.

Örnek 3.1.3. $x^2 - 23y^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümünü bulalım. $\sqrt{23}$'ün sürekli kesir açılımı $\sqrt{23} = \left[4; \overline{1,3,1,8}\right]$'dır ve periyot uzunluğu n = 4'tür. $x^2 - 23y^2 = 1$ denkleminin pozitif çözümleri $\left(p_{4j-1},\ q_{4j-1}\right),\ j = 1, 2, 3, \ldots$ dir ve p_{4j-1} / q_{4j-1} $\sqrt{23}$'ün sürekli kesir açılımının (4j-1)'inci yaklaşımıdır. En küçük pozitif çözüm $x = p_3 = 24,\quad y = q_3 = 5$'tir. $x^2 - 23y^2 = -1$ Diophantine denkleminin hiçbir çözümü yoktur; çünkü $\sqrt{23}$'ün sürekli kesir açılımının periyot uzunluğu çifttir.

Aşağıdaki teorem yardımıyla, $\sqrt{D}$'nin sürekli kesir açılımının alt yaklaşımlarını bulmaksızın en küçük pozitif çözümden $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif çözümlerinin nasıl bulunacağının sonucu çıkarılacaktır.

Teorem 3.1.7. D tam kare olmayan pozitif bir tam sayı olmak üzere $\left(x_1,\ y_1\right),\ x^2 - Dy^2 = 1$ Diophantine denkleminin en küçük pozitif çözümü olsun. O zaman tüm $\left(x_k, y_k\right)$ pozitif çözümleri k = 1, 2, 3, … için $x_k + y_k\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^k$ ile verilir [4].

İspat : k = 1, 2, 3, … için $\left(x_k, y_k\right)$'nin bir çözüm olduğunu gösterelim. $\left(x_k, y_k\right)$'nın bir çözüm olduğunun gösterilmesi için ilk olarak $x_k + y_k\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^k$ ifadesinin eşleniği alınırsa $x_k - y_k\sqrt{D} = \left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^k$ olur.

$$x_k^2 - Dy_k^2 = \left(x_k + y_k\sqrt{D}\right)\left(x_k - y_k\sqrt{D}\right)$$

$$= \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^k$$

$$= \left(x_1^2 - Dy_1^2\right)^k = 1$$

bulunur. Böylece $\left(x_k, y_k\right)$ (k = 1, 2, 3, …) bir çözümdür.

Şimdi her pozitif çözümün, temel çözümün bir kuvveti olduğu gösterilsin. Temel çözüm, pozitif çözümler arasında en küçük olanıdır. $\left(x_k, y_k\right)$'lerin arasında olmayan bir (X,Y) pozitif çözümünün var olduğu kabul edilsin. $x_1 + y_1\sqrt{D},\ X+Y\sqrt{D} > 1$ olduğundan bir n tam sayısı vardır ve,

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n \le X + Y\sqrt{D} < \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^{n+1}$$

dir. Bu eşitlik hali olamaz. Çünkü;

$$\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{D} = X + Y\sqrt{D} \Rightarrow X = x_n,\ Y = y_n$$

dir. Bu eşitsizlik $\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^{-n}$ ile çarpılırsa,

$$1 < \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n \left(X + Y\sqrt{D}\right) < x_1 + y_1\sqrt{D}$$

elde edilir ; çünkü $x_1^2 - Dy_1^2 = 1$ olduğundan $x_1 + y_1\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^{-1}$ dir.

Şimdi a ve b tam sayılarını,

$$a + b\sqrt{D} = \left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^n \left(X + Y\sqrt{D}\right)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde tanımlanırsa,

$$a^2 - Db^2 = \left(x^2 - y^2 D\right)\left(x_1^2 - y_1^2 D\right)^n$$

$$= 1$$

elde edilir.

$a, b,\ x^2 - Dy^2 = 1$ 'in bir çözümüdür ve $1 < a + b\sqrt{D} < x_1 + y_1\sqrt{D}$ olduğu görülür. Buradan $a + b\sqrt{D} > 1$ olduğundan $0 < \left(a + b\sqrt{D}\right)^{-1} < 1$ dir ve $0 < a - b\sqrt{D} < 1$ olduğundan,

$$a = \frac{1}{2}\left[\left(a + b\sqrt{D}\right) + \left(a - b\sqrt{D}\right)\right] > 0$$

ve

$$b = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left[\left(a + b\sqrt{D}\right) - \left(a - b\sqrt{D}\right)\right] > 0$$

dır. Bu (a, b) nin bir pozitif çözüm olduğu anlamına gelir; fakat (x_1, y_1)'in temel çözüm olması nedeni ile $a > x_1$ ve $b > y_1$ olmalıdır. Bu ise $a + b\sqrt{D} < x_1 + y_1\sqrt{D}$ eşitsizliği ile çelişir. Böylece $(X, Y) = (x_k, y_k)$ elde edilir [4].

BÖLÜM 4 : SÜREKLİ KESİRLER VE İDEALLER

4.1.Temel Kavramlar

Bu bölümde sürekli kesirler ile idealler arasındaki bağlantılardan bahsedilecektir.

Tanım 4.1.1. $I : A \times A \to A$ bir fonksiyon olsun. I'ya A da bir ikili işlem denir.
R, A'da bir bağıntı olsun. Yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlayan R bağıntısına A da bir denklik bağıntısı denir.
R, A kümesinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. A da bir x elemanına denk olan bütün elemanların kümesine x'in denklik sınıfı denir. Ayrıca denklik sınıflarının sayısına da sınıf sayısı denir.

Tanım 4.1.2. $G \neq \varnothing$ bir küme olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(G,*)$ cebirsel yapısına bir grup denir.
(i) $*$,G'de ikili bir işlemdir.
(ii) $*$ işleminin G'de birleşme özelliği vardır.
(iii) $*$ işleminin G'de birim elemanı vardır.
(iv) $*$ işleminine göre G'de her elemanın bir tersi vardır.
Ayrıca eğer değişme özelliği de varsa, G'ye değişmeli grup veya abel grubu denir.

Tanım 4.1.3. G bir grup ve $\varnothing \neq H \subset G$ olsun. H, G'deki işleme göre kendi başına bir grup ise, H'ya G'nin bir alt grubu denir.

Tanım 4.1.4. $R \neq \varnothing$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem $\odot$, $*$ olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, *, \odot)$ cebirsel yapısına bir halka denir:
(i) $(R, \odot)$ değişmeli bir gruptur.

(ii) R'nin $*$ işlemine göre kapalılık özelliği vardır.

(iii) R'nin $*$ işlemine göre birleşme özelliği vardır.

(iv) $*$ işeminin $\odot$ işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.

Tanım 4.1.5. H birimli ve değişmeli bir halka olsun. H üzerinde bir modül diye bir M abel grubu ile M de aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$(c\,,\,x\,)\in\ H\ \times\ M\ \ \rightarrow\ \ c\,x\ \in\ \ M$$

dış işlemine denir. $a,b\in H$ ve $\alpha,\beta\in M$ olmak üzere

(i) $c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$

(ii) $(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha$

(iii) $(ab)\alpha=a(b\alpha)$

(iv) $1.\alpha=\alpha$

dır. H üzerindeki bir modül H-modül olarak da adlandırılır.

Tanım 4.1.6. H birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere, H üzerinde bir modül M olsun.

(i) $\alpha,\beta\in S$ ise $\alpha+\beta,\ \alpha-\beta\in S$

(ii) $\alpha\in S$ ve $c\in H$ ise $c\alpha\in S$

M'nin bir S alt cümlesi için yukarıdaki iki özellik sağlanıyor ise, S'ye M'nin bir alt modülü denir.

Tanım 4.1.7. H bir halka olsun. $I\subset H$ olmak üzere,

(i) $a,b\in I$ için $a+b,a-b\in I$

(ii) $a\in I$ ve $x\in H$ için $xa\in I$

(iii) $a\in I$ ve $x\in H$ için $ax\in I$

özelliklerini sağlayan $I\neq\varnothing$ alt cümlesine H'nın bir ideali denir.

Aşağıda sürekli kesirler ile idealler arasında bağlantıyı sağlayan temel formüller verilecektir.

$D_0>1$ karesiz olmak üzere,

$$\delta_0 = \begin{cases} 2 & , \quad D \equiv 1 \pmod 4 \\ 1 & , \quad \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$w_0 = \left(\delta_0 - 1 + \sqrt{D_0}\right) / \delta_0 \qquad \text{ve}$$

$$\Delta_0 = \left(w_0 - w_0'\right)^2 = 4D_0 / \delta_0^2$$

sayıları tanımlansın.

Δ_0 değeri, radicand D_0 ile bağlantılı temel ayıraç (temel diskriminant) olarak adlandırılır ve w_0 sayısına, Δ_0 la bağlantılı başlıca temel rasyonel olmayan sayı denir. $f_\Delta \in N$ için, $\Delta = f_\Delta^2 \Delta_0$ biçiminde tanımlanır. Eğer,

$$g = \gcd(f_\Delta\ , \delta_0)\ ,\ \delta = \delta_0 / g\ , \quad D = (f_\Delta / g)^2\ D_0$$

ve

$$\Delta = 4D / \delta^2$$

ise, o zaman, Δ ya birleşik D radicandlı bir diskriminant denir. Ayrıca, eğer

$$w_\Delta = \left(\delta - 1 + \sqrt{D}\right) / \delta$$

alınırsa, o zaman w_Δ lara $\Delta = (w_\Delta - w'_\Delta)^2$ ile bağlantılı başlıca rasyonel olmayan sayı denir. $[\alpha, \beta] = \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}$-modülü olsun. O zaman $E_\Delta = [1, w_\Delta]$, f_Δ yardımıyla $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{\Delta}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{D_0}\right)$da bir sıralama denir. $f_\Delta = 1$ alınırsa, E_Δ, K'nın tam sayı halkası veya K'de maksimal sıralama olarak adlandırılır. E_Δ nın $I \neq 0$ herhangi bir $\mathbb{Z}$-modülü; $a, c \in N$ ve $0 \leq b < a$ olmak üzere, $[a, b + cw_\Delta]$ biçimindedir. Burada, sadece $c = 1$ durumuyla (primitif durum) ilgilenecektir. E_Δ nın bir ilkel $\mathbb{Z}$-alt modülünün kanonik bir gösterimi, $\delta a = Q$ ve $b = \dfrac{P - \delta + 1}{\delta}$ yazılarak elde edilir. $P, Q \in \mathbb{Z}$ için,

$$I = \left[Q/\delta, \left(P + \sqrt{D}\right)/\delta\right] \tag{4.1}$$

dır.

(4.1) de verildiği gibi, sıfır olmayan $\mathbb{Z}$-modülü sadece ve sadece $P^2 \equiv D \pmod Q$ ise, bir ilkel E_Δ-ideal olarak adlandırılır. Bundan sonra E_Δ-ideal denildiği zaman, bir ilkel E_Δ-ideal anlaşılacaktır. Ayrıca Q/δ değeri, $N(I)$ ile gösterilir ve I nın normu olarak adlandırılır ve $\alpha=\left(P+\sqrt{D}\right)/Q$ bir kuadratik irrasyonel iken I bir E_Δ-ideal olarak adlandırılır. Bu ideal, $I=[\alpha]$ ile gösterilir. Bu, Δ ayıraçlı kuadratik irrasyoneller kümesinden, E_Δ-idealler kümesine bir dönüşüm verir:

$$\alpha \to [\alpha]$$

Bununla birlikte dönüşüm birebir değildir. Çünkü herhangi bir $n\in\mathbb{Z}$ için,

$$I=\left[Q/\delta,\left(P+\sqrt{D}\right)/\delta\right]=\left[Q/\delta, nQ\pm\left(P+\sqrt{D}\right)/\delta\right]$$

dır.

Örneğin

$$I=\left[3,\left(5+\sqrt{85}\right)/2\right]=\left[3,\left(11+\sqrt{85}\right)/2\right]=J$$

olup

$$\alpha=\frac{5+\sqrt{85}}{6}\to I=[\alpha]$$

ve

$$\beta=\frac{11+\sqrt{85}}{6}\to I=[\beta]=[\alpha]$$

olur; fakat $\alpha\neq\beta$ dır.

Tanım 4.1.8. Δ bir temel diskriminant ise, E_Δ nın bir I idealine, eğer primitifse ve $|\alpha|<N(I)$, $|\alpha'|<N(I)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir α elemanını içermiyorsa, indirgenmiş ideal denir.

Not : $\Delta<0$ olması demek, $|\alpha|<N(I)$ olacak şekilde, $\alpha\in I$ sayısının bulunmaması demektir. Burada $N(\alpha)=\alpha\alpha'=|\alpha|^2$ dir.

Lemma 4.1.1. $\Delta>0$ bir temel diskriminant olsun. E_Δ daki bir I ideali indirgenmiş ideal olur ancak ve ancak $\beta>N(I)$ ve $-N(I)<\beta'<0$ olmak üzere $I=\left[N(I),\beta\right]$ olacak şekilde bir $\beta\in I$ vardır. Bu tam olarak, $-1<\alpha'<0$ olmak üzere, $\alpha=\beta/N(I)>1$ indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayısına karşılık gelir[12].

Sonuç 4.1.1. $\Delta > 0$ bir temel diskriminant ve $\gamma = (b + w_\Delta)/a > 1$ ve $-1 < (b + w'_\Delta)/a < 0$ olmak üzere; $I = [a, b + w_\Delta]$ ideali, E_Δ da primitif bir ideal ise o zaman, I ideali indirgenmiş ideal olur[12].

Teorem 4.1.1. $\Delta > 0$ bir temel diskriminant ve $I = [a, b + w_\Delta]$, E_Δ da primitif bir idealse, bu durumda I indirgenmiş idealdir ancak ve ancak $\lfloor -(b + w'_\Delta)/a \rfloor a > a - b - w_\Delta$ dır[12].

Sonuç 4.1.2. $\Delta > 0$ ve $[a, b + w_\Delta]$ indirgenmiş ise, bu durumda $a < \sqrt{\Delta}$ dır[12].

Sonuç 4.1.3. $\Delta > 0$ ve $a < \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$ olmak üzere $[a, b + w_\Delta]$ primitif ideal ise, bu durumda I indirgenmiştir[12].

Sonuç 4.1.4. $\Delta > 0$ ve $0 \le b < a$ olmak üzere $[a, b + w_\Delta]$ primitif idealse ve $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2} \le a < \sqrt{\Delta}$ ise, bu durumda I indirgenmiş idealdir ancak ve ancak $a\text{-}w_\Delta < b < -w'_\Delta$ dır[12].

Aşağıda, yukarıda tanımlanan idealler ile sürekli kesirler arasında bağlantı kurulucaktır. I, (4.1) de verilen bir E_Δ-ideali olsun. $P_0 = P$, $Q_0 = Q$ ve $j \ge 0$ için tekrarlamalı olarak,

$$a_j = \left\lfloor \frac{P_j + \sqrt{D}}{Q_j} \right\rfloor \tag{4.2}$$

$$P_{j+1} = a_j \cdot Q_j - P_j \tag{4.3}$$

$$D = P_{j+1}^2 + Q_j \cdot Q_{j+1} \tag{4.4}$$

biçiminde tanımlansın. α nın basit sürekli kesir açılımı,

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{Q} = \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0} = [a_o; a_1, \ldots, a_k, \ldots]$$

biçimindedir. Şimdiki aşama, idealleri ve sürekli kesirleri birleştiren bir kuraldır. $I \sim J$ olarak gösterilen E_Δ de iki tane birbirine denk I ve J idealleri göz önüne alınsın. $x \in E_\Delta$ ile üretilmiş ilkel E_Δ idealini (x) ile göstererek $(\alpha)I = (\beta)J$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in E_\Delta$ sıfırdan farklı elemanlar varsa, bu durum $I \sim J$ biçiminde gösterilir.

Teorem 4.1.2. (Sürekli Kesir Algoritması) $\Delta \in N$ nin bir diskriminant olduğunu, P_j , Q_j nin (4.2) – (4.4) denklemleri yardımıyla verildiğini ve negatif olmayan $j \in Z$ sayısı için,

$$I_j = \left[Q_{j-1}/\delta, \left(P_{j-1} + \sqrt{D} \right) \Big/ \delta \right]$$

olduğu kabul edilsin. O zaman tüm $j \in N$ sayıları için $I_1 \sim I_j$ dir. Ayrıca tüm $j \geq 0$ için, I_{n+j} nin olmasını sağlayan en küçük bir n doğal sayısı vardır ve bu I_{n+j} değerleri, I_1 e denk olan tüm indirgenmiş ideallerdir[12].

Örnek 4.1.1. $\Delta = D = 385$ alınırsa, $I_1 = \left[7, \left(7 + \sqrt{385} \right) \Big/ 2 \right]$ olsun.Burada $Q_0 = 14$, $P_0 = 7$ ve δ=2 dır.

$$\alpha = \frac{7 + \sqrt{385}}{14} = \frac{P_0 + \sqrt{385}}{Q_0} = \alpha_0 \quad \text{ve} \quad a_0 = [\alpha_0] = \left[\frac{7 + \sqrt{385}}{14} \right] = 1 \quad \text{dır.}$$

$$P_1 = a_0 Q_0 - P_0 = 1.14 - 7 = 7 \quad \text{ve} \quad Q_1 = \left(D - P_1^2 \right) \Big/ Q_0 = (385 - 49)/14 = 24 \quad \text{dır.}$$

Buradan $a_1 = [\alpha_1] = \left[\dfrac{7 + \sqrt{385}}{24} \right] = 1$ bulunur.

$$P_2 = a_1 Q_1 - P_1 = 1.24 - 7 = 17 \quad \text{ve} \quad Q_2 = \left(D - P_2^2 \right) \Big/ Q_1 = (385 - 289)/24 = 4 \text{ dır.}$$

Buradan $a_2 = [\alpha_2] = \left[\dfrac{17 + \sqrt{385}}{4} \right] = 9$ bulunur. Bu şekilde devam edilerek, aşağıdaki tablo elde edilebilir:

Tablo 4.1 P ve Q değerleri

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_i	7	7	17	19	17	15	15	17	19	17	7	7	17
Q_i	14	24	4	6	16	10	16	6	4	24	14	24	4
a_i	1	1	9	6	2	3	2	6	9	1	1	1	9

Burada,

$$\ell(\alpha) = 10 = \ell(\alpha_0) \text{ ve } \alpha = \left[\overline{1;1,9,6,2,3,2,6,9,1}\right]$$

dır ve α indirgenmiş olduğundan, pür periyodiktir.

Örnek 4.1.1. den α, indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayısı ve ilgili indirgenmiş $[\alpha]$ ideali, bağlantılı bir devir oluşturur.

Tanım 4.1.9. $\Delta \in N$, D radikantlı bir diskrimant ve $I = I_1 = \left[Q_0/\delta, \left(P + \sqrt{D}\right)/\delta\right]$ indirgenmiş bir E_Δ- ideal olsun. Eğer $\ell \in N$, $I_1 = I_{\ell+1} = \left[Q_\ell/\delta, \left(P_\ell + \sqrt{D}\right)/\delta\right]$ eşitliğini sağlayan en küçük değer ise her $j \geq 0$ için,

$$\alpha_j = \frac{P_j + \sqrt{D}}{Q_j} \tag{4.5}$$

sayılarının tümü aynı periyot uzunluğuna sahiptir. Yani

$$\ell(\alpha_j) = \ell(\alpha_0) = \ell(\alpha) = \ell$$

ve

$$[\alpha_j] = [I_{j+1}] = \left[Q_j/\delta, \left(P_j + \sqrt{D}\right)/\delta\right]$$

dir.

Burada ℓ değeri ortak değerdir ve I ya denk indirgenmiş ideallerin devirinin uzunluğuna periyot uzunluğu denir.

Sürekli kesir algoritması yardımıyla eğer,

$$I = \left[Q/\delta, \left(P + \sqrt{D}\right)/\delta\right]$$

bir indirgenmiş E_Δ ideal ise o zaman,

$$\{Q_1/\delta \text{ , } Q_2/\delta \text{ ,..., } Q_\ell/\delta\}$$

kümesi, I ya denk tüm indirgenmiş ideallerin normlarını temsil eder. Bu $\alpha = \left(P + \sqrt{D}\right)/Q$ nın basit sürekli kesir açılımı vasıtasıyla elde edilir. Örneğin, örnek 4.1.1. de $\left[7, \left(7 + \sqrt{385}\right)/2\right]$ ye denk tüm ideallerin normları;

$$\{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\} = \{7, 12, 2, 3, 8, 5\}$$

tir. Bu normlar, tablo 4.1 de $j=1,2,3,4,5,6$ için verilmiş

$$I_j=\left[Q_{j-1}/\delta,\left(P_{j-1}+\sqrt{385}\right)/2\right]$$

ideallerine karşılık gelir.

Teorem 4.1.2 de verilen sürekli kesir algoritmasının bir başka gösterimi, $\alpha=\left(P+\sqrt{D}\right)/Q$ nın sürekli kesir açılımı ve $\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ nin tamsayılar halkasındaki birimler arasındaki bir bağıntıdır.

Tanım 4.1.10. $\Delta\in\mathbb{N}$ bir diskriminant olsun. Eğer $\left|N(u)\right|=1$ olacak şekilde bir $u\in E_\Delta$ elemanı varsa, u ya E_Δ nin bir birimi denir. Özel olarak, $x^2-T(\alpha)x+N(\alpha)=0$ denklemini sağlayan en küçük pozitif birime E_Δ nın temel birimi denir ve bu ε_Δ ile gösterilir.

Örneğin;

$$\varepsilon_\Delta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=w_\Delta$$

değeri,

$$E_\Delta=E_5=\left[1,\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right]$$

nin temel birimidir, çünkü $x=\varepsilon_5$ E_Δ deki $x^2-x-1=0$ denkleminin en küçük pozitif çözümüdür.

Tanım 4.1.11. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin bir sonlu genişlemesine, sayı cismi denir. Özel olarak ikinci dereceden bir genişlemesine de kuadratik sayı cismi denir.

Tanım 4.1.12. $\alpha\in C$ ve $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{Q}$ olmak üzere,

$$\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_n=0$$

denklemini sağlayan α ya, cebirsel sayı denir. Eğer her $i=1,2,3,\ldots,n$ için, $a_i\in\mathbb{Z}$ ise, α ya cebirsel tamsayı denir.

Önerme 4.1.1. Bir rasyonel sayının, cebirsel tamsayı olması için gerek ve yeter koşul tamsayı olmasıdır[4].

Teorem 4.1.3. D karesiz bir tamsayı ve $K=\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ nin cebirsel tamsayılar kümesi O_K olsun.

$$w_D=\begin{cases}\sqrt{D} & ;\ \text{eğer}\ \ D\equiv 2,3 \pmod 4\\ \dfrac{1+\sqrt{D}}{2} & ;\ \text{eğer}\ \ D\equiv 1 \pmod 4\end{cases}$$

olmak üzere O_K nin her elemanı $x,y\in Z$ olmak üzere $x+yw_D$ şeklinde yazılabilir[4].

Sonuç 4.1.5: O_K cebirsel tamsayılar kümesi, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ nin bir alt halkasını yani bir alt tamlık bölgesini oluşturur.

Tanım 4.1.13. $u\in O_K$ ve $u\,|\,1$ ise, u ya $\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ cisminin veya O_K halkasının bir aritmetik birimi veya birimsel elemanı denir ve aritmetik birimler kümesi ${O^*}_K$ ile gösterilir.

Önerme 4.1.2. $\alpha\in {O^*}_K \Leftrightarrow \forall\beta\in O_K$ için $\alpha\,|\,\beta$ olmasıdır[4].

Önerme 4.1.3. O_K halkasının birimsel elemanlar kümesi ${O^*}_K$, çarpımsal bir gruptur. Bu gruba K nın birim grubu denir[4].

Önerme 4.1.4. $u\in {O^*}_K$ ise $\pm u$, $\pm u^{-1}\in {O^*}_K$ dır. $\alpha\in {O^*}_K$ nın birimsel olması için gerek ve yeter şart $N\left(\alpha\right)=\pm 1$ olmasıdır[4].

Reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerinin belirlenmesi, detaylı olarak ele alınırsa; öncelikle $\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ cisminde sonsuz tane birimsel eleman olduğunu belirtmek gerekir. Çünkü ${O^*}_\Delta$ birim grubu olmak üzere $\alpha\in {O^*}_\Delta \Leftrightarrow N\left(\alpha\right)=\pm 1$ dir. Burada $\alpha=x+y\sqrt{D}$ $(x,y\in\mathbb{Z})$ için $N\left(\alpha\right)=x^2-Dy^2=\pm 1$ denkleminin sonsuz çözümü vardır.

Birimsel eleman sonsuz tane olduğundan, $\varepsilon\neq 1$ elemanı ele alınırsa ε birimsel iken $-\varepsilon$ de birimsel olacağından, $\varepsilon>0$ kabul edilebilir. Eğer ε birimsel ise, $\frac{1}{\varepsilon}$ de birimsel olacağından $\varepsilon>1$ kabul edilebilir. $1<\varepsilon<A$ aralığında sonlu tane birimsel olduğundan, birden büyük olan birimlerin içinde bir en küçük olanı da vardır. Bu en küçük birimsel elemana, temel birim denir.

Teorem 4.1.4. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ reel kuadratik sayı cisminin birimsel elemanları, ε temel birim olmak üzere, $\pm\varepsilon^n$ lerdir. Burada $n \in \mathbb{Z}$ dir[4].

Temel birimin normu pozitif ise, her birimsel elemanın da normu pozitiftir.

Teorem 4.1.5. $\sqrt{D}$ nin periyod uzunluğu ℓ ise, $(\ell-1)$. yaklaşım $\frac{p}{q}$ ve $\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ cisminin temel birimi ε iken, aşağıdaki durumlar söz konusudur:

a) $D \neq 1 \pmod 4$ veya $D \equiv 1 \pmod 8$ ise, $\varepsilon = p + q\sqrt{D}$ olur.

b) $D \equiv 5 \pmod 8$ ise, $\varepsilon = p + q\sqrt{D}$ veya $\varepsilon^3 = p + q\sqrt{D}$ olur.

c) ℓ çift ise, $N(\varepsilon) > 0$; ℓ tek ise, $N(\varepsilon) < 0$ olur[4].

Not : $D \equiv 5 \pmod 8$ ise, $\sqrt{D}$ nin sürekli kesirlere açılımı ile $\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ cisminin temel birimi bulunamayabilir. O yüzden $5 < D \equiv 1 \pmod 4$ ise, $\sqrt{D}$ yerine $\frac{\sqrt{D}-1}{2}$ alınabilir. $w_D = \frac{1+\sqrt{D}}{2}$ olmak üzere, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{D}\right)$ nin birimsellerini $\frac{\sqrt{D}-1}{2}$ nin yaklaşımları arasında aramak gerekir.

Örnek 4.1.2. $D = 37$ alınsın. $\sqrt{37} = \left[6;\overline{12}\right]$ ve buradan $\ell\left(\sqrt{37}\right) = 1$ dır. O zaman temel çözüm $\varepsilon_\Delta = p_0 + q_0\sqrt{D}$ olacaktır. (4.2), (4.3) ve (4.4) denklemlerinden $p_0 = 6$ ve $q_0 = 1$ dır, dolayısıyla $\varepsilon_\Delta = 6 + \sqrt{37}$ bulunur ve $N(\varepsilon_\Delta) = -1$ olur.

Örnek 4.1.3. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{41}\right)$ olsun. $\sqrt{41} = \left[6;\overline{2,2,12}\right]$ ve $\frac{p_2}{q_2} = \frac{32}{5}$ dir. $\varepsilon = 32 + 5\sqrt{41}$ temel birim olup, $N(\varepsilon_\Delta) = -1$ olur.

Örnek 4.1.4. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{19}\right)$ olsun. $\sqrt{19} = \left[4;\overline{2,1,3,1,2,8}\right]$ ve $\frac{p_5}{q_5} = \frac{170}{39}$ dir. $\varepsilon = 170 + 39\sqrt{19}$ temel birim olup, $N(\varepsilon_\Delta) = 1$ dir.

Örnek 4.1.5. $\Delta = 85 = D$ olsun. $\sqrt{85} = \left[9;\overline{4,1,1,4,18}\right]$ olup, $\ell\left(\sqrt{85}\right) = 5$ dir. $\Delta = 85 \equiv 5 \pmod 8$ olduğundan, iki farklı çözüm vardır ve $w_D = \frac{1+\sqrt{D}}{2} = \frac{1+\sqrt{85}}{2}$ dir. Ayrıca $\alpha_0 = \frac{\sqrt{85}-1}{2} = \left[4;\overline{9}\right]$ dır. $\ell(\alpha_0) = 1$ ve sıfırıncı yaklaşım, $\frac{p_0}{q_0} = \frac{4}{1}$ dir.

Buradan $\varepsilon = 4 + \frac{1+\sqrt{85}}{2} = \frac{9+\sqrt{85}}{2}$ bulunur. Ayrıca diğer çözüm, $\varepsilon^3_{\Delta} = 378 + 41\sqrt{85}$ dir.

Örnek 4.1.6. $D = 10$ olsun. $D = 10 \equiv 2 \pmod 4$ olduğundan, $w_D = \sqrt{10}$ dır. $\sqrt{10} = \left[3; \overline{6}\right]$ ve $\ell\left(\sqrt{10}\right) = 1$ dir. Periyot uzunluğu 1 olduğu için, sıfırıncı yaklaşımına bakılır. $\frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1}$ ve temel birim $\varepsilon = 3 + \sqrt{10}$ dır.

Teorem 4.1.6. (Lagrange) $\ell = \ell(I_1)$ ve Δ, I_j, P_j ve Q_j değerleri Teorem 4.1.2 deki gibi verilirse,

$$\varepsilon_{\Delta} = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{P_k + \sqrt{D}}{Q_k}$$

ve

$$N(\varepsilon_{\Delta}) = (-1)^{\ell}$$

dir[12].

Örnek 4.1.7. Örnek 4.1.1 tekrar ele alınırsa, Tablo 4.1 yardımıyla,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\Delta} = &\left(\frac{7+\sqrt{385}}{24}\right)\cdot\left(\frac{17+\sqrt{385}}{4}\right)\cdot\left(\frac{19+\sqrt{385}}{6}\right)\cdot\left(\frac{17+\sqrt{385}}{16}\right)\\ &\left(\frac{15+\sqrt{385}}{10}\right)\cdot\left(\frac{15+\sqrt{385}}{16}\right)\cdot\left(\frac{17+\sqrt{385}}{6}\right)\cdot\left(\frac{19+\sqrt{385}}{4}\right)\\ &\left(\frac{17+\sqrt{385}}{24}\right)\cdot\left(\frac{7+\sqrt{385}}{14}\right) = 95831 + 4884\sqrt{385}\end{aligned}$$

ve

$$N(\varepsilon_{\Delta}) = 1 = (-1)^{\ell} = (-1)^{10}$$

bulunur.

Son sonuç, Teorem 4.1.2 ve 4.1.6 arasındaki bağlantıyı daha anlaşılır yapmaktadır.

Teorem 4.1.7. Eğer $\Delta \in N$, (1.5) da tanımlanan $p = p_{\ell-1}$ ve $q = q_{\ell-1}$ ile $\ell = \ell\left(\sqrt{D}\right)$ ve D radicandıyla ilgili bir diskriminant ise, o zaman;

$$\varepsilon_{\Delta} = p + q\sqrt{D}$$

veya

$$\varepsilon_{\Delta}^{3} = p + q\sqrt{D}$$

dır. Burada ikinci denklem, yalnızca $D \equiv 5 \pmod{8}$ ise meydana gelir[13].

Örnek 4.1.8. Örnek 4.1.2 de $\sqrt{385}$ in basit sürekli kesir açılımında

$$\varepsilon_{\Delta} = \varepsilon_{385} = 95831 + 4884\sqrt{385}$$

$$p_{\ell-1} = p_9 = 95831 \text{ ve } q_{\ell-1} = q_9 = 4884$$

dır.

Tanım 4.1.14. Bir indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı

$$\alpha = \left[\overline{a_0; a_1, \ldots, a_{\ell-1}}\right] = \frac{P + \sqrt{D}}{Q}$$

olsun. Eğer tüm negatif olamayan $j \leq \ell - 1$ sayıları için, $q_j = q_{\ell-j-1}$ ise α, pür simetrik periyoda sahiptir denir.

Başka bir deyişle,

$$a_1 \; a_2 \ldots a_{\ell-1}$$

bir palindromdur. Palindrom, baştan ve sondan okunduğunda değeri değişmeyen sayılardır.

Örnek 4.1.9. Eğer $D = \Delta = 145$ ve $\alpha = \left(9 + \sqrt{145}\right)\big/8$ ise, (4.2) – (4.4) eşitlikleri yardımı ile pür simetrik periyoda sahip olan α, $\alpha = \left[\overline{2;1,1,1,2}\right]$ olarak bulunur.

Tanım 4.1.15. Δ bir diskrimant olsun. Eğer;

$$I = \left[Q/\delta, \left(P + \sqrt{D}\right)\big/\delta\right]$$

bir E_{Δ} - ideali ise, o zaman

$$I' = \left[Q/\delta, \left(P - \sqrt{D}\right)\big/\delta\right]$$

ifadesine, I nın eşleniği denir. Eğer $I = I'$ ise, o zaman I ya belirsiz bir ideal denir. Eğer $I \sim I'$ ise, I nın sınıfı belirsizdir denir.

Örnek 4.1.10. $D = 221 = \Delta$ ve $I = \left[5, \left(11+\sqrt{221}\right)/2\right]$ olsun. O zaman sürekli kesir algoritmasıyla belirlenen I için, sürekli kesir açılımı Tablo 4.2 yardımıyla verilir:

Tablo 4.2 P ve Q değerleri

i	0	1	2	3
P_i	11	9	5	9
Q_i	10	14	14	10
a_i	2	1	1	2

$[\alpha] = I$, $\alpha = \left(11+\sqrt{221}\right)/10 = \left[\overline{2;1,1,2}\right]$ ve α indirgenmiş olduğundan, I indirgenmiştir ve ideallerden hiçbiri belirsiz değildir. Bu yüzden, eğer bir sınıf belirsiz ideale sahipse, I sınıfının içinde belirsiz ideal olmadığı gösterilebilir.

Teorem 4.1.9. $\alpha = \left(P+\sqrt{D}\right)/Q = \left[\overline{a_0; a_1, \ldots, a_\ell}\right]$, $D \in N$ radicandlı, indirgenmiş bir kuadratik irrasyonel olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

(a) α, pür simetrik periyoda sahiptir.

(b) $N(\alpha) = \alpha\,\alpha' = -1$

(c) $D = P^2 + Q^2$

(d) $[\alpha]$ nın ideal sınıfı içinde en çok bir indirgenmiş belirsiz ideale sahiptir. Burada $[\alpha'] = [\alpha_{\ell-1}]$ dır.

(e) Tüm negatif olmayan, $j \le \ell - 1$ şartını sağlayan tamsayılar için, $\alpha'_j\,\alpha_{\ell-j} = -1$ dir. Burada α_j (4.5) ile verilen değerdir[11].

Örnek 4.1.11. Örnek 4.1.10 da, $[\alpha] = \left[\left(11+\sqrt{221}\right)/10\right]$ un sınıfında belirsiz ideallerin olmadığı örneğini gördük. Burada, α pür periyoda sahiptir.

$$D = 221 = 11^2 + 10^2 = P^2 + Q^2$$

$$N(\alpha) = \alpha \cdot \alpha' = -1$$

dır ve

$$\alpha'_3\ \alpha_1 = -1 = \alpha'_2\ \alpha_2 = \alpha'_1\ \alpha_3$$

olduğu görülür.

Tanım 4.1.16. $D \in N$ bir radicant ve $\alpha = \left[\overline{a_0; a_1, \ldots, a_\ell}\right] = \left(P + \sqrt{D}\right) / Q$ bir indirgenmiş kuadratik irrasyonelse, o zaman α nın pür simetrik olmayan periyodu vardır denir ve $j \le \ell - 1$ şartını sağlayan tüm doğal sayılar için $q_j = q_{\ell - j}$ dir.
Başka bir deyişle

$$a_1\ a_2 \ldots a_{\ell-1}$$

bir palindromdur.

Teorem 4.1.9. $\alpha = \left(P + \sqrt{D}\right) / Q$, $D \in N$ radikantıyla birlikte indirgenmiş kuadratik irrasyonel olsun. α_j, P_j, Q_j ve ℓ Tanım 4.1.2 deki gibi verilmiş olsun. O zaman aşağıda verilenler denktir:

(a) α, pür simetrik olmayan periyoda sahiptir.

(b) $\alpha \cdot \alpha'_1 = -1$ dir.

(c) $D = P_0^2 + Q_0 \cdot Q_1$

(d) $[\alpha]$ ideali belirsizdir.

(e) $j \le \ell - 1$ şartını sağlayan tüm doğal sayılar için, $\alpha_{\ell - j + 1} \cdot \alpha'_j = -1$ dir[11].

Örnek 4.1.12. $\alpha = \left(5 + \sqrt{145}\right) / 10 = \left[\overline{1; 1, 2, 2, 1}\right]$ sayısı pür simetrik olmayan periyoda sahiptir.

$$D = P_0^2 + Q_0 Q_1 = 5^2 + 10.12 \text{ olup, } \quad [\alpha] = [\alpha'] \text{ belirsizdir.}$$

$$\alpha \cdot \alpha'_1 = \left(\frac{5 + \sqrt{145}}{10}\right) \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{145}}{12}\right) = -1$$

ve $j \le 4$ olmak üzere $\forall j \in \mathbb{N}$ için $\alpha_{\ell-j+1} \cdot \alpha'_j = \alpha_{6-j} \cdot \alpha'_j = -1$ dir (Burada, $\alpha_5 = \alpha_0$ dır.).

Hem pür simetrik periyoda ve hem de pür simetrik olmayan periyoda sahip indirgenmiş kuadratik irrasyoneller mevcuttur. Fakat bunun olabilmesi için $\ell(\alpha) = 1$ olmalıdır. Örneğin $\alpha = 8 + \sqrt{65} = \left[\overline{16}\right]$ her iki periyoda sahiptir. Böylece $65 = P_0^2 + Q_0^2 = 8^2 + 1^2$ dir. Bu özel durum palindromun ve sürekli kesirlerin dikkate alınmasını gerektirir.

4.2 Örnekler

4.2.1. $D = 145$ alınsın. $\sqrt{D} = \left[12; \overline{24}\right]$ ve $\ell\left(\sqrt{145}\right) = 1$ dir.

$p_0 = a_0 p_{-1} + p_{-2} = 12.1 + 0 = 12$ $\qquad$ $q_0 = a_0 q_{-1} + q_{-2} = 12.0 + 1 = 1$

$p_1 = a_1 p_0 + p_{-1} = 24.12 + 1 = 289$ $\qquad$ $q_1 = a_1 q_0 + q_{-1} = 24.1 + 0 = 24$

$p_2 = a_2 p_1 + p_0 = 24.289 + 12 = 6948$ $\qquad$ $q_2 = a_2 q_1 + q_0 = 24.24 + 1 = 577$

şeklinde devam edilebilir.

ℓ tek olduğu için, $x^2 - Dy^2 = 1$ denkleminin çözümleri, $x = p_{2k-1}$ ve $y = q_{2k-1}$ dir.

k=1 için $p_1^2 - q_1^2 D = 289^2 - 24^2.145 = 1$

k=2 için $p_3^2 - q_3^2 D = 1$ çözümleri olur ve bu şekilde devam edilir.

$x^2 - Dy^2 = -1$ denkleminin çözümleri $x = p_{2k-2}$ ve $y = q_{2k-2}$ dir.

k=1 için $p_0^2 - q_0^2 D = 12^2 - 1^2.145 = -1$

k=2 için $p_2^2 - q_2^2 D = 6948^2 - 577^2.145 = -1$ çözümleri olur ve bu şekilde devam edilir.

4.2.2. $D = 385$ alınsın. C sıralamasındaki indirgenmiş ideallerini $\alpha = \left(7 + \sqrt{385}\right)/14$ alarak bulalım. $\alpha = \left[\overline{1; 1, 9, 6, 2, 3, 2, 6, 9, 1}\right]$ ve $\ell(\alpha) = 10$ dur.

Tablo 4.3 P ve Q değerleri

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_i	7	7	17	19	17	15	15	17	19	17	7	7	17
Q_i	14	24	4	6	16	10	16	6	4	24	14	24	4
a_i	1	1	9	6	2	3	2	6	9	1	1	1	9

Yukarıdaki tablodan $[\alpha_i] = \left[Q_i/\delta, \left(P_i + \sqrt{D}\right)/\delta\right]$ ideallerini bulalım.

$$[\alpha_0] = \left[7, \left(7+\sqrt{385}\right)/2\right], [\alpha_1] = \left[12, \left(7+\sqrt{385}\right)/2\right],$$
$$[\alpha_2] = \left[2, \left(17+\sqrt{385}\right)/2\right], [\alpha_3] = \left[3, \left(19+\sqrt{385}\right)/2\right],$$
$$[\alpha_4] = \left[8, \left(17+\sqrt{385}\right)/2\right], [\alpha_5] = \left[5, \left(15+\sqrt{385}\right)/2\right],$$
$$[\alpha_6] = \left[8, \left(15+\sqrt{385}\right)/2\right], [\alpha_7] = \left[3, \left(17+\sqrt{385}\right)/2\right],$$
$$[\alpha_8] = \left[2, \left(19+\sqrt{385}\right)/2\right], [\alpha_9] = \left[12, \left(17+\sqrt{385}\right)/2\right]$$

dir ve bu indirgenmiş idealler $C = \{[\alpha_0]\}$ içinde bir sıralama oluşturur. Ayrıca burada, $\left[\alpha_{\ell(C)}\right] = [\alpha_{10}] = [\alpha_0]$ dır.

4.2.3. $\Delta = D = 145$ ve $I = [6, 2 + w_\Delta] = \left[6, \left(5+\sqrt{D}\right)/2\right]$ alınsın. $\alpha = \left(5+\sqrt{145}\right)/12$ nın sürekli kesir açılımı aşağıdaki tabloyu verir.

Tablo 4.4 P ve Q değerleri

i	0	1	2	3	4	5	6
P_i	5	7	9	7	5	5	7
Q_i	12	8	8	12	10	12	8
a_i	1	2	2	1	1	1	2

Buradan,

$$\varepsilon_\Delta = \prod_{i=1}^{5} \alpha_i = \left[\left(7+\sqrt{145}\right)/8\right]\left[\left(9+\sqrt{145}\right)/8\right]\left[\left(7+\sqrt{145}\right)/12\right]\left[\left(5+\sqrt{145}\right)/10\right]\left[\left(5+\sqrt{145}\right)/12\right]$$
$$= 12 + \sqrt{145}$$

temel birimi bulunur. $N(\varepsilon_\Delta) = (-1)^\ell = (-1)^5 = -1$ dir.

4.2.4. $\Delta = 1224$ ve $D = 306$ alınsın. Eğer $\alpha = \left(15 + \sqrt{306}\right)/9$ alınırsa sürekli kesir açılımı aşağıdaki tabloyu verir.

Tablo 4.5 P,Q ve a değerleri

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P_i	15	12	6	9	6	12	15	12	6
Q_i	9	18	15	15	18	9	9	18	15
a_i	3	1	1	1	1	3	3	1	1

$$\varepsilon_\Delta = \prod_{i=1}^{6} \alpha_i = \left[\left(12+\sqrt{306}\right)/18\right]\left[\left(6+\sqrt{306}\right)/15\right]\left[\left(9+\sqrt{306}\right)/15\right]\left[\left(6+\sqrt{306}\right)/18\right]$$

$$\left[\left(12+\sqrt{306}\right)/9\right]\left[\left(15+\sqrt{306}\right)/9\right] = 35+2\sqrt{306}$$

temel birimi bulunur. Dikkat edilirse bu örnekte $\Delta \neq D$ dir.

4.2.5. $D = 145$ ve $\alpha = \left(9 + \sqrt{145}\right)/8$ alınırsa $\alpha = \left[\overline{2;1,1,1,2}\right]$ pür periyodik açılımı elde edilir ve $\ell\left(\alpha\right) = 5$ dir.

4.2.6. $D = 15$ alınsın. $\sqrt{15} = \left[3;\overline{1,6}\right]$ ve $\ell\left(\sqrt{15}\right) = 2$ dir.

$D = 85$ alınsın. $\sqrt{85} = \left[9;\overline{4,1,1,4,18}\right]$ ve $\ell\left(\sqrt{85}\right) = 5$ dir.

$D = 313$ ise, $\sqrt{313} = \left[17;\overline{1,2,4,11,1,1,3,2,2,3,1,1,11,4,2,1,34}\right]$ ve $\ell\left(\sqrt{313}\right) = 17$ dir.

4.2.7. $D = \Delta = 85$ ve $I = \left[3, \left(5+\sqrt{D}\right)/2\right]$ indirgenmiş ideali dikkate alınsın. $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{85}}{6}$ sürekli kesrinin açılımı aşağıdaki tabloyu verir:

Tablo 4.6 P ve Q değerleri

i	0	1	2	3	4	5
P_i	5	7	5	5	7	5
Q_i	6	6	10	6	6	10
a_i	2	2	1	2	2	1

Buradan

$I_j = \left[Q_{j-1}/\delta, \left(P_{j-1}+\sqrt{D}\right)/\delta\right]$ olduğundan,

$$I_1 = \left[Q_0/\delta, \left(P_0+\sqrt{D}\right)/\delta\right] = \left[3, \left(5+\sqrt{D}\right)/2\right]$$

$$I_2 = \left[Q_1/\delta, \left(P_1+\sqrt{D}\right)/\delta\right] = \left[3, \left(7+\sqrt{D}\right)/2\right]$$

$$I_3 = \left[Q_2/\delta, \left(P_2+\sqrt{D}\right)/\delta\right] = \left[5, \left(5+\sqrt{D}\right)/2\right]$$

$$I_4 = \left[Q_3/\delta, \left(P_3+\sqrt{D}\right)/\delta\right] = \left[3, \left(5+\sqrt{D}\right)/2\right] = I_1$$

$$I_5 = \left[Q_4/\delta, \left(P_4+\sqrt{D}\right)/\delta\right] = \left[3, \left(7+\sqrt{D}\right)/2\right] = I_2$$

$$I_6 = \left[Q_5/\delta, \left(P_5+\sqrt{D}\right)/\delta\right] = \left[5, \left(5+\sqrt{D}\right)/2\right] = I_3$$

elde edilir ve bu yalnızca $\{I\}$ indirgenmiş idealleri içindedir. Burada $\ell(\alpha) = 3$ tür. Ayrıca $I_1 \sim I_2 \sim I_3 \sim I_4$ dir.

BÖLÜM 5: SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Sonlu sürekli kesirler, detaylı bir şekilde incelendi. Her rasyonel sayının bir sonlu sürekli kesir olarak ifade edilebileceği ve her sonlu sürekli kesrin bir rasyonel sayıya karşılık geldiği gösterildi. Sonsuz süreksiz kesirler araştırıldı ve her sonsuz sürekli kesrin değerinin bir irrasyonel sayı olarak ifade edilebileceği , bir irrasyonel sayının bir sonsuz sürekli kesir olarak yazılabileceği gösterildi. Daha sonra, periyodik sonsuz sürekli kesirler incelendi. Her kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesre açılımının periyodik olduğu gösterildi. Özellikle indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesirlere açılımının pür periyodik olduğu gösterildi. $\sqrt{D}$ nin sürekli kesirlere açılımı yardımı ile, Pell denklemlerinin çözümleri incelendi. Ayrıca bu çalışmada, sürekli kesirler ile idealler arasındaki ilişki incelenerek, w_Δ nın başlıca rasyonel olmayan sayı ve belli halkalar için kanonik temel elemanı olduğunu belirtildi. $E_\Delta = [1, w_\Delta]$, f_Δ yardımıyla da $K = Q(\sqrt{\Delta}) = Q(\sqrt{D_0})$ da bir sıralama olduğu belirtildi. E_Δ nin bir ilkel z-alt modülünün kanonik bir gösteriminin $I = \left[Q/\delta, \left(P + \sqrt{D}\right)/\delta\right]$ ve modülün sadece $P^2 = D \text{ (mod Q)}$ ise, bir ilkel E_Δ ideal olduğu incelendi. Bir kuadratik irrasyonel sayının I da bir E_Δ ideali olarak gösterilebileceği belirtildi. İndirgenmiş bir kuadratik irrasyonel sayısının ilgili ideali, bağlantılı bir devir (cycle) oluşturduğu ve bunun periyot uzunluğu olduğu belirtildi. Sürekli kesir algoritması, kuadratik irrasyonel sayıların sürekli kesir açılımları ve tamsayılar halkasındaki birimler arasındaki ilişkiler genel olarak incelendi. $\sqrt{D}$ nin periyot uzunluğu ve yaklaşımları ile temel birim arasındaki ilişki üzerinde detaylı olarak çalışıldı. Sürekli kesirlerin daha fazla uygulamaları ile ilgili bilgiler için [1], [3] ve [4] nolu kaynaklara bakılabileceği gibi, sürekli kesirler ve idealler ile ilgili daha ayrıntılı bilgiler için ise, [11] ve [12] nolu kaynaklara bakılabilir. Bu çalışmanın devamı olarak, ideallerin sürekli kesirler ve Pell denklemleri ile ilişkileri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] McCOY, N.H., 1965 The Theory of Numbers, Macmillan, New York.

[2] HERMSTEIN, I. N. , 1964. Topic in Algebra, Blasdell Pub. Co., New York.

[3] NIVER, I and Zuckerman , h. S. 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley and Sons, New York.

[4] ÇALLIALP, Fethi, 1999, Sayılar Teorisi, İstanbul.

[5] OLDS, C., D. , Continued Fractions, Random House, The L.W Singer Company, Third Printing 1963.

[6] IVAN, N., HERBERT, S. ZUCKERMAN, H., L., M., An Introduction To Number Theory, dohn Wiley And Sons, Inc., 1991.

[7] WAJDA, H., 1979. A Note on The Pell Equation, Tokyo J. Math, 2, 1, 133-136.

[8] ROSEN, H., K., Elementary Number Theory And Its Application 3d Edition, Addison-Wesley, 1993.

[9] DEVELİ, M. H., 1990, R-d Tipinde Kuadratik Sayı Cisimlerinde Sınıf Sayısının 1 Olması için Bazı Kriterler, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.

[10] STARK, H., M., An Introduction To Number Theory, Markham Pub. Co., Chicago, 1997.

[11] MOLLİN, R., A., Continued Fraction Gems, Nieuw Archief voor Wiskunde 17(1999), 383-405.

[12] MOLLİN, R., A., Quadratics, CRC Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo (1996).

[13] ROCKETT, Andrew.SZÜSZ, Peter, Continued Fractions, 1998.

[14] PEKASİL, M, 2006, Sürekli Kesirler Ve Pell Denklemleri, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

ÖZGEÇMİŞ

Canan SÜMBÜL, 02.05.1981 de Lüleburgaz'da doğdu. İlk ve orta eğitimini Sakarya'da tamamladı. 1999 yılında Ali Dilmen Lisesi'nden mezun oldu. 1999 yılında başladığı SAU Matematik Bölümü'nü 2003 yılında bitirdi. 2003 – 2004 yılları arasında ÇOMÜ'de tezsiz yüksek lisansını yaptı. 2004 – 2007 yılları arasında Ada-Tümay Dershanesi'nde Matematik Öğretmeni olarak çalıştı. Şu anda Teksen Dershanesi'nde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.