T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONFERANS MATRİS VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Salih BOZDAĞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr.Ö.Faruk GÖZÜKIZIL

Haziran 2009

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONFERANS MATRİS VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Salih BOZDAĞ

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 19/06/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr.	Yrd. Doç. Dr.	Yrd. Doç. Dr.
Ömer Faruk GÖZÜKIZIL	İbrahim ÖZGÜR	Yılmaz GÜNEY
Jüri Başkanı	Üye	Üye

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana öneren, çalışmam sırasında yardımını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Ömer Faruk GÖZÜKIZIL hocama teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tez çalışmamın yazımı esnasında yardımcı olan Şenol TEKİN arkadaşıma teşekkürü bir borç bilir, çalışmam sırasında manevi desteği olan bütün öğrencilerime, öğretmen arkadaşlarıma ve aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A^T	: Bir *A* matrisinin transpozesi
A'	: Bir *A* matrisinin elemanlarının tersinin transpozesi
C-matris	: Konferans matris
det	: Determinant
GF(q)	: *q* mertebeden Galois cismi
I_n	: $n \times n$ tipinde birim matris
$\otimes$	: Kronecker çarpım

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar kelimeler: Konferans matris, Hadamard matris, Jacket konferans matris

Konferans matrisler; geometride kombinatoryal tasarımlar, mühendislik, istatistik ve cebir gibi çeşitli alanlarda görülmektedir.

Bu çalışmada konferans matrislerin tanımı, bazı özel matrisler ile ilişkileri, konferans matrisler ile ilgili bazı teorem ve özellikler üzerinde durulmuştur. Son olarak konferans matris tiplerinden Jacket konferans matris ve genelleştirilmiş konferans matris incelenmiştir.

CONFERENCE MATRIX AND ITS APPLICATIONS

SUMMARY

Key Words: Conference matrices, Hadamard matrices, Jacket conference matrices

Conference matrices appear at various places in connection with combinatorial designs in geometry, engineering, statistics, and algebra.

This study focused on description of the conference matrix, relationships with some special matrices, some theorems and properties related to the conference matrices. Finally, Jacket matrix, a type of the conference matrix and generalized conference matrix were examined.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

C-matrisler literatürde geometride kombinatoryal tasarımlar, mühendislik, istatistik ve cebir gibi çeşitli alanlarda görülmektedir.

Paley, Hadamard matrislerinin oluştururken *C*-matrislerini kullanmıştır. Eliptik geometride *C*-matrisleri van Lint ve Seidel tarafından tartışılmıştır. Belevitch, telefon konferansları için bir network oluşturma işinde, kendisinin konferans matris olarak adlandırdığı, *C*-matris çalışmalarına başlangıç yapmıştır. İstatistikte Raghavarao'nun tartma tasarımlarıyla ilişkili olarak işlenmiştir. Dik Latin karelerle ilişkileri vardır (Bruck). *C*-matrisleri, Erdös ve Rényi'nin Δ grafikleri ve Sachs'ın kendini tamamlayan grafiklerinin bitişiklik matrisleri olarak yorumlanabilir. D. G. Higman tarafından yapılan sonlu permütasyon grupları ile *C*-matrisleri ilişkilendirilmiştir[4].

Bu çalışmanın ikinci bölümünde konferans matrisler(*C*-matris) tanımı verilmiştir ve hangi durumlarda simetrik ve ters simetrik *C*-matrislerin var olacağı anlatılmıştır. Paley konferans matrislerin tanımı verilmiştir.

Üçüncü bölümde genel simetrik *C*-matrislerinin gösterimleri göz önüne alınmıştır. Paley tipi matrislere denk olmayan matrislerin varlığı 26. mertebeden bir örnek üzerinde gösterilmiştir. Ayrıca bazı özel matrisler(Hadamard ve tartma) ile konferans matris arasındaki ilişkiler işlenmiştir.

Dördüncü bölümde konferans matrislerle ilgili bazı teorem ve özellikler verilmiştir.

Beşinci bölümde konferans matrislerin tiplerinden Jacket konferans matris ve genelleştirilmiş konferans matris incelenmiştir.

BÖLÜM 2. KONFERANS MATRİSLER

Tanım 2.1. (Konferans Matris)

$C=\left[c_{ij}\right]\in R^{n\times n}$ ve $c_{ij}=\begin{cases}0 \ , & i=j \quad ise\\ \pm 1 \ , & i\neq j \quad ise\end{cases}$ olmak üzere $C.C^T=(n\text{-}1).I_n$ sağlanıyorsa C matrisine konferans matris denir. Bir başka deyişle n. mertebeden bir konferans matris köşegen elemanları 0, diğer elemanları +1 ve -1' lerden oluşan bir kare matristir öyle ki, C bir konferans matris olmak üzere $C.C^T=(n\text{-}1).I_n$ dır. Konferans matrisler C-matris olarak da adlandırılır.

Konferans matris tipleri arasında simetrik konferans matris, ters simetrik konferans matris, Paley konferans matrisi, Jacket konferans matrisi ve genelleştirilmiş konferans matris yer alır.

Tanım 2.2. (Simetrik ve Ters Simetrik Konferans Matris)

C bir konferans matris olmak üzere, $C^T=C$ ise simetrik ve $C^T=-C$ ise ters simetrik konferans matristir.

Örnek.

Aşağıdaki matrisler 2. mertebeden simetrik matrislerdir.

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Aşağıdaki matris 2. mertebeden ters simetrik matristir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Simetrik ve ters simetrik konferans matrislerin hangi mertebeler için var olduğu aşağıdaki gibidir:

C simetrik matrisler için $v \equiv 2 \pmod 4$ ve $v-1 = a^2 + b^2$ (a ve b tamsayılar) ve C ters simetrik matrisler için $v \equiv 2$ veya $v \equiv 0 \pmod 4$ dir. Ancak şimdiye kadar oluşturulan C-matrisler mertebesi

$$v = p^h + 1 \equiv 2 \pmod{4}, \quad p \text{ asal sayı}$$

olan simetrik matrisler, mertebesi

$$v = 2^t \prod_{t=1}^{r} (p_i^{h_i} + 1) \text{ ve } (p_i^{h_i} + 1) \equiv 0 \pmod{4}, \quad p \text{ tek asal sayı, } t,\ r,\ h_i \text{ pozitif tamsayılar}$$

ters-simetrik matrislerdir.

Örnek.

Simetrik konferans matrisler için olası mertebeler; 2, 6, 10, 14, 18, (22 değil 21 iki kare toplamı değil), 26, 30, (34 değil 33 iki kare toplamı değil), 38, 42, 46, 50, 54, (58 değil), 62,…[1].

2.1. Paley Konferans Matrisler

Tanım 2.1.1 (Euler Kriteri)

p bir asal sayı, $d = (n, p-1)$ ve $a \equiv 0 \pmod p$ olsun. $a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1 \pmod p$ ancak ve ancak $x^n \equiv a \pmod p$ denkliği çözülebilir. Eğer çözülebiliyorsa, d tane farklı çözümü vardır.

Tanım 2.1.2. (Kuadratik rezidü)

a bir tamsayı $a \equiv 0 \pmod p$ iken $a \equiv x^2 \pmod p$ denkleminin çözümü varsa, a' ya p modülüne göre kuadratik rezidü, çözüm yoksa kuadratik nonrezidü denir.

Tanım 2.1.3. (Legendre Sembolü)

$p > 2$ asal sayıları için, $\left(\dfrac{a}{p}\right)$ ifadesine Legendre sembolü denir:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1; & a,\ p \text{ modülünde kuadratik rezidü ise,} \\ -1; & a,\ p \text{ modülünde kuadratik nonrezidü ise,} \\ 0; & a \equiv 0 \ (\bmod p) \text{ ise,} \end{cases}$$

Tanım 2.1.4. (Galois Cismi)

Bütün sonlu cisimlerin karakteristikleri asaldır. Verilen her p asal sayısı ve r pozitif tamsayısı için karakteristiği p olan p^r tane elemanlı bir tek sonlu cisim vardır. Bu cisme mertebesi p^r olan Galois cismi denir ve $GF(p^r)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5 (Paley Konferans Matrisi)

p asal sayı ve $p \neq 2$, mertebesi $q = p^k$ olan Galois cismi $GF(q)$ üzerinde iki boyutlu bir vektör uzayı V olsun. χ Legendre sembolü tanımlansın öyle ki $\alpha \neq 0$ ın $GF(q)$ de kare veya değil olmasına bağlı olarak $\chi(0) = 0$, $\chi(\alpha) = 1$ veya -1 dir. Bu durumda $q \equiv 1$ veya $-1 \pmod 4$ olmasına bağlı olarak $\chi(-1) = 1$ veya -1 dir. det, determinant olmak üzere $\chi \det$ fonksiyonu, V üzerinde herhangi bir değişen bilineer formdur. $PG(1,q)$ projektif doğrusunun $q+1$ projektif noktaları V nin bir boyutlu alt uzayı olmak üzere V, hiç bir ikisi bağımlı olmayan $x_0, x_1, ..., x_q$ vektörleri ile temsil edilir. $q+1$ vektörlü C Paley matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır[4]:

$$C = \left[\chi \det(x_i, x_j)\right], \quad i, j = 0,1,...,q.$$

Başka bir deyişle; $GF(p)$ sonlu bir cisim ve elemanları $c_1, c_2, ..., c_p$ olmak üzere $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{p+1}$ Paley konferans matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanır[3]:

$$a_{ij}=\begin{cases} 0, & i=j \text{ ise;} \\ 1, & i=1,\ j\neq 1 \text{ ise;} \\ 1, & \mathrm{j}=1, i\neq 1 \text{ ise;} \\ \chi_2(c_{i-1}-c_{j-1}), & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad \chi_2(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \text{ ise;} \\ +1, & \exists y\in GF(p): y^2=x \text{ ise;} \\ -1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

İlave olarak, orjinden geçmeyen bir doğru üzerinde $y_1, y_2, ..., y_q$ olan q vektörün S çizgi matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S=\left[\chi \det(y_i, y_j)\right], \quad i, j=1,2,...,q.$$

Kare matrisler üzerinde

(1) herhangi bir satır ve ona karşılık gelen sütunun -1 ile çarpımı,

(2) satırların ve aynı anda onlara karşılık gelen sütunların kendi arasında değişimi

işlemleri denklik denen bir bağıntı oluşturur. İkinci işlem tek başına yapılırsa bir bağıntı oluşur ki buna da permütasyon denkliği denir.

Paley tipi simetrik matris, A ve B simetrik ve dairesel olmak üzere $\begin{bmatrix} A & B \\ B & -A \end{bmatrix}$ matris formuna denktir.

Teorem 2.1.

$q+1$ mertebeden $i\neq j,\ i, j=0,1,...,q$ için $c_{ii}=0,\ c_{ij}=\pm 1,\ C.C^T=qI$ sağlayan ve $q+1\equiv 2 \pmod 4$ ise simetrik, $q+1\equiv 0 \pmod 4$ ise ters simetrik olmak üzere C Paley matrisinin denklik sınıfı $PG(1,q)$ projektif doğrusuna bağlanır[4].

İspat.

Paley matrisleri üzerindeki (1) ve (2) işlemleri, sırasıyla herhangi iki vektörün kendi arasında değişimi ve $GF(q)$ nın kare olmayan bir elemanı ile herhangi bir vektörün çarpımı tarafından etkilenir. Dolayısıyla $q+1$ mertebeden her Paley matris birbirine denktir. Sadece bir C-matrisi için $C.C^T = q.I$ sadece özelliğini ispatlamak yeterlidir. Bunun için x ve y bağımsız ve α_i, $GF(q)$ den geçmek üzere x ve $y+\alpha_i x$ vektörlerinin Paley matrisleri göz önüne alınır.

$$C = \chi \det(x,y)\begin{bmatrix} 0 & j^T \\ j\chi(-1) & \chi(\alpha_i - \alpha_j) \end{bmatrix}, \quad i,j = 1,2,\dots,q.$$

İstenen özellik o zaman aşağıda Jacobsthal'in formülünden:

$$\sum\nolimits_{\alpha\in GF(q)} \chi(\alpha)\chi(\alpha+\beta) = -1, \quad \beta \in GF(q), \beta \neq 0.$$

elde edilir[4].

Teorem 2.2.

q mertebeden her S çizgi matrisleri permütasyon denkliğidir. Bunlar

$$S.S^T = q.I - J, \qquad SJ = JS = 0.$$

sağlar. Bunlar bir çoklu dairesel matrise permütasyon denkliğidir. Bunlar, A ve B $\frac{1}{2}(q-1)$ mertebeden dairesel matris olmak üzere matris formu

$$\begin{bmatrix} 0 & j^T & -j^T \\ \chi(-1)j & A & B \\ -\chi(-1)j & \chi(-1)B^T & -A \end{bmatrix}$$

olan matrise permütasyon denkliğidir[4].

İspat.

$GF(q)$ nın elemanları $\alpha_1,...,\alpha_i$ olmak üzere, $y+\alpha_1 x,...,y+\alpha_i x$ vektörlerinin çizgi matrisi

$$S=\chi\det(x,y)\left[\chi(\alpha_i-\alpha_j)\right],\quad i,j=1,...,q.$$

dır. Eğer $\chi\det(x,y)=-1$, o zaman bazı kare olmayan γ'lar için her $\alpha_i\gamma$ birbirinden farklı ve S, $\left[\chi(\alpha_i-\alpha_j)\right]$ya permütasyon denkliğidir. Bu yüzden her çizgi matris, permütasyon denkliğidir. S için bağıntılar

$$qI=C.C^T=\begin{bmatrix}0 & j^T\\ j\chi(-1) & S\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & j^T\chi(-1)\\ j & S^T\end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Çoklu dairesel form $q=p$ için aşikardır ve buradan da $q=p^k$ kolayca bulanabilir. Son standart form $\chi\det(y,x)=1$ alarak ve vektörler

$$y,\ y+x\eta^2,\ y+x\eta^4,...y,\ y+x\eta^{q\text{-}1},\ y+x\eta,\ y+x\eta^3,...,\ y+x\eta^{q-2}$$

olarak düzenlenerek elde edilir. Burada η, $GF(q)$ nın herhangi primitif bir elemanı olarak tanımlıdır. Böylece teorem ispatlanmıştır[4].

Örnek.

$q=5$ için $GF(5)=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

$1^2=1,\ \ 2^2=4,\ \ 3^2=4,\ \ 4^2=1\ (\text{mod } 5)$

Legendre sembolü tanımından

$\chi(0)=0,\ \ \chi(1)=1,\ \ \chi(2)=-1,\ \ \chi(3)=-1,\ \ \chi(4)=1$ elde edilir.

Paley konferans matrisinin tanımından

$$\chi(\alpha_i-\alpha_j)=\begin{bmatrix}\chi(0-0) & \chi(0-1) & \chi(0-2) & \chi(0-3) & \chi(0-4)\\ \chi(1-0) & \chi(1-1) & \chi(1-2) & \chi(1-3) & \chi(1-4)\\ \chi(2-0) & \chi(2-1) & \chi(2-2) & \chi(2-3) & \chi(2-4)\\ \chi(3-0) & \chi(3-1) & \chi(3-2) & \chi(3-3) & \chi(3-4)\\ \chi(4-0) & \chi(4-1) & \chi(4-2) & \chi(4-3) & \chi(4-4)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\chi(0) & \chi(-1) & \chi(-2) & \chi(-3) & \chi(-4)\\ \chi(1) & \chi(0) & \chi(-1) & \chi(-2) & \chi(-3)\\ \chi(2) & \chi(1) & \chi(0) & \chi(-1) & \chi(-2)\\ \chi(3) & \chi(2) & \chi(1) & \chi(0) & \chi(-1)\\ \chi(4) & \chi(3) & \chi(2) & \chi(1) & \chi(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\chi(0) & \chi(4) & \chi(3) & \chi(2) & \chi(1)\\ \chi(1) & \chi(0) & \chi(4) & \chi(3) & \chi(2)\\ \chi(2) & \chi(1) & \chi(0) & \chi(4) & \chi(3)\\ \chi(3) & \chi(2) & \chi(1) & \chi(0) & \chi(4)\\ \chi(4) & \chi(3) & \chi(2) & \chi(1) & \chi(0)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

elde edilir.

6. mertebeden Paley konferans matrisi, $j=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ olmak üzere

$$C=\begin{bmatrix}0 & j^T\\ j\chi(-1) & \chi(\alpha_i-\alpha_j)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

$C.C^T=(6-1)I_6=5.I_6$ olduğundan C-matrisi bir Paley konferans matristir.

C-matrisi simetrik matristir. Teorem 2.1. in ifadesine göre mertebesi $q+1=5+1=6\equiv 2 \pmod 4$ dır.

Örnek.

$q=11$ için $GF(11)=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

$$\begin{matrix} 1^2=1, & 2^2=4, & 3^2=9, & 4^2=5, & 5^2=3, \\ 6^2=3, & 7^2=5, & 8^2=9, & 9^2=4, & 10^2=1 \end{matrix} \quad (\text{mod } 11)$$

Legendre sembolü tanımından

$\chi(0)=0,\ \chi(1)=1,\ \chi(2)=-1,\ \chi(3)=1,\ \chi(4)=1,\ \chi(5)=1,$
$\chi(6)=-1,\ \chi(7)=-1,\ \chi(8)=-1,\ \chi(9)=1,\ \chi(10)=-1,$

elde edilir. Paley konferans matrisinin tanımından

$$\chi(\alpha_i-\alpha_j)=\begin{bmatrix} \chi(0-0) & \chi(0-1) & \cdots & \chi(0-10) \\ \chi(1-0) & \chi(1-1) & \cdots & \chi(1-10) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi(10-0) & \chi(10-1) & \cdots & \chi(10-10) \end{bmatrix}_{11\times 11}$$

$$=\begin{bmatrix} \chi(0) & \chi(-1) & \cdots & \chi(-10) \\ \chi(1) & \chi(0) & \cdots & \chi(-9) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi(10) & \chi(9) & \cdots & \chi(0) \end{bmatrix}_{11\times 11} = \begin{bmatrix} \chi(0) & \chi(10) & \cdots & \chi(1) \\ \chi(1) & \chi(0) & \cdots & \chi(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi(10) & \chi(9) & \cdots & \chi(0) \end{bmatrix}_{11\times 11}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

12. mertebeden Paley konferans matrisi,

$$C=\begin{bmatrix} 0 & j^T \\ j\chi(-1) & \chi(\alpha_i-\alpha_j) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

$C.C^T=(12-1)I_{12}=11.I_{12}$ olduğundan C-matrisi bir Paley konferans matristir.

C-matrisi ters simetrik matristir. Teorem 2.1. in ifadesine göre mertebesi $q+1=11+1=12\equiv 0 \pmod{4}$ dır.

BÖLÜM 3. C-MATRİSLER VE BAZI ÖZEL MATRİS İLİŞKİLERİ

3.1. Simetrik C-Matrisler

Bu bölümde Simetrik C-matrisler incelenmiştir ve *C*-matrisler ile bazı özel (Hadamard, tartma) matrisler arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Teorem 3.1

Bir v mertebeden simetrik *C*-matrisin olması için gerekli koşullar, $i \neq j,\ i, j = 1,...,v$ için $c_{ii} = 0;\ c_{ij} = c_{ji} = \pm 1,\ \ v \equiv 2 \ (\text{mod } 4)$, a ve b tamsayı olmak üzere $v - 1 = a^2 + b^2,\ \ C^2 = (v-1).I$ dır[4].

Bu teorem ilk defa Belevitch tarafından ortaya atılmış ve ilk olarak Raghavarao tarafından Hasse-Minkowski metodu ile ispatlanmıştır. Bu teoremdeki matrisler simetrik *C*-matrisler olarak adlandırılır.

Lemma 3.1.

a, b reel sayılar, herhangi P ve Q reel kare matrisler için $v - 1 = a^2 + b^2$ olmak üzere dönüşüm matrisi düzgündür ki v mertebeden simetrik *C*-matrisi simetrik olarak aşağıdaki gibi kısımlara ayrılır[4]:

$$C = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(A+aI) & PB+bQ \\ QB^T + bP & Q(D-aI) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} aI & bI \\ bI & -aI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(A+aI) & PB+bQ \\ QB^T + bP & Q(D-aI) \end{bmatrix}$$

İspat.

Mertebeleri eşit olmak üzere herhangi *C, D, R* kare matrisleri için $C^2 = D^2 = (v-1)I$ ve $(RC+DR)C = D(RC+DR)$ dır. Bu lemmanın ifadesi anlamındadır.

Teorem 3.1 açısından mümkün olduğundan *P, Q, a ve b* yi rasyonel alarak simetrik *C*-matrislerin rasyonel gösterimi elde edilir. Benzer olarak, ters simetrik *C*-matrislerin rasyonel gösterimi elde edilebilir çünkü mertebesi $v \equiv 0 \pmod 4$ olan öyle bir matris vardır ki karesi birim matrisin $(1-v)$ katı olur.

Teorem 3.2.

Herhangi simetrik *C*-matrisi, *r* ve *s* rasyonel sayı olmak üzere, elemanları $r + s\sqrt{v-1}$ formunda olan bazı *N* kare matrisler için

$$\sqrt{v-1}\begin{bmatrix} 2(I+NN^T)^{-1} - I & -2(I+NN^T)^{-1}N \\ -2(I+NN^T)^{-1}N^T & I - 2(I+NN^T)^{-1} \end{bmatrix}$$

formunda bir matrise permütasyon denktir[4].

İspat.

Uygun simetrik permütasyona göre

$$C = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & V \\ W & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I\sqrt{v-1} & 0 \\ 0 & -I\sqrt{v-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U^T & W^T \\ V^T & X^T \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} U & V \\ W & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U^T & W^T \\ V^T & X^T \end{bmatrix} = I$$

Tekil olmayan $2\sqrt{v-1}UU^T = A + I\sqrt{v-1}$ için yazılabilir.

Ayrıca

$$2\sqrt{v-1}XX^T = I\sqrt{v-1} - D$$

tekil değildir. $a = \sqrt{v-1},\ b = 0$ için Lemma 3.1. uygulanırsa,

$$P = \left\{A + I\sqrt{v-1}\right\}^{-1}, \quad Q = \left\{D - \sqrt{v-1}I\right\}^{-1},$$

ve $PB = -N$ dersek, $QB^T = N^T$ elde edilir.

$$C = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} = \sqrt{v-1}\begin{bmatrix} I & -N \\ N^T & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -N \\ N^T & I \end{bmatrix}$$
$$= \sqrt{v-1}\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + 2\sqrt{v-1}\begin{bmatrix} I & N \\ N^T & -I \end{bmatrix}^{-1}$$

ve bu da teoremde bahsedilen matristir.

Bazı n reel sayıları için

$$NJ = N^T J = nJ \tag{3.1}$$

özel özelliğini sağlayan Teorem 3.2. formunda simetrik C-matrisler için,

$$JA = AJ = -JD = -DJ = \frac{1-n^2}{1+n^2}\sqrt{v-1}J,$$
$$JB = BJ = \frac{2n}{1+n^2}\sqrt{v-1}J.$$

sonucuna ulaşılır. Her iki formülde J nin katsayıları

$$a = \frac{1-n^2}{1+n^2}\sqrt{v-1}, \qquad b = \frac{2n}{1+n^2}\sqrt{v-1},$$

sırasıyla bir tamsayıdır. Aslında a çift, b tektir. $a^2 + b^2 = v-1$ olduğu için, (3.1) özelliği ile Teorem 3.1 de elde edilen simetrik C-matrisleri için a ve b tamsayılarının bir yorumu elde edilir. Ayrıca, eğer böyle bir matris $a = 0$ için sağlanıyorsa, bütün satırların toplamları aynıdır. $v-1$ in iki tamsayının kareleri toplamı ayrışımı bir tane olduğu için mertebesi

$$v = p^{2k} + 1\,, \quad p \equiv -1 \pmod 4\,, \quad p \text{ asal sayı,}$$

olan simetrik C-matrisleri (3.1) özelliğini sağlar. (3.1) özelliğini sağlayan C-matris'e denk olmayan hiç bir simetrik C-matris örneği bilinmemektedir[4].

Teorem 3.3.

$a^2 + b^2 = q$ *ve* $\det(A + aI) \neq 0$ sağlayan a ve b herhangi rasyonel sayı ve N simetrik, dairesel ve rasyonel olmak üzere, $q+1$ mertebeden herhangi simetrik Paley matrisi

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & -A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -N \\ N & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} aI & bI \\ bI & -aI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -N \\ N & I \end{bmatrix}$$

formunda bir matrise denktir[4].

İspat.

Teorem 2.1 de elde edilen matris kullanılarak $P = -Q = (A + aI)^{-1}$ için Lemma 3.1. uygulanır. $(A + aI)^{-1}(B - bI) = N$ koyarak, A ve B de bu özelliklere sahip olduğu için N nin simetrik ve dairesel olduğu gözlemlenir. Bu teoremi ispatlamış olur.

$25 = 4^2 + 3^2$ ve $25 = 0^2 + 5^2$ ayrışımları ile ilgili olarak, $v = 26$ mertebe için özellikle iki simetrik C-matris bilinir. A ve B, 13. mertebeden dairesel matrisler olmak üzere

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & -A \end{bmatrix}$$

formundadır. Bu matris $a = 4,\ b = 3$ iken birinci satırı

$0 - + + + - + + - + + + -, \quad - + - - + + + + + + - - +$

olan bir Paley matristir. Buna uyan 25. mertebeden matris, blokları

$$I - J,\ \ J - 2I - 2P,\ \ J - 2I - 2P^2,\ \ J - 2I - 2P^3,\ \ J - 2I - 2P^4$$

lerin dairesel olarak değişiminden oluşan S matrisine permütasyon denktir. Burada 5. mertebeden P, $j-i \equiv 1 \pmod 5$ ise $p_{ij}=1$ aksi halde $p_{ij}=0$ şeklinde tanımlıdır. Bu S, $(5,3)$ ağının (yani 5. mertebeden bir Latin kareye karşılık gelen çizgesinin) $(-1,1)$ bitişiklik matrisidir.

Birinci satırı

$0-+--+++++--+-, \quad --+-++++++-+++$

olan 26. mertebeden C-matrisi istisnai C-matrisi olarak adlandırılır. Bu matris için $a=0,\ b=5,\ A^2=13I-J,\ BB^T=12I+J$ dir. Burada simetrik olan B, $PG(2,\ 3)$ ün noktalarının ve doğrularının $(-1,\ 1)$ çakışıklık matrisidir[4].

Teorem 3.4.

İstisnai C-matrisi ve 26. mertebeden Paley matrisi birbirine denk değildir[4].

İspat.

Denklik işlemleriyle 26. mertebeden istisnai C-matrisin birinci ve ikinci satır ve sütunu

$0++...++...+, \quad +0+...+-...-.$

ifadesine dönüştürülür. Daha sonra, 12. mertebeden 4 alt matris oluşur. Şimdi Paley matris ile denklik, Teorem 2.2. göz önüne alındığında, bu alt matrislerin her birinin bir dairesel matrise değiştirilebilir olduğu anlamına gelmektedir. Dolayısıyla herhangi bir alt kare matrisinin her satırları aynı sayılardan oluşmak zorundadır. Ancak, gözlemlendiği zaman durumun böyle olmadığı görülmektedir[4].

3.2. Bazı Matrisler ile Konferans Matris Arasındaki Bağıntılar

Tanım (Hadamard Matris)

n. mertebeden bir Hadamard matris, elemanları -1 ve $+1$'lerden oluşan $n \times n$ tipinde bir kare matristir. H_n ile gösterilir. I_n, *n.* mertebeden birim matris olmak üzere; $H.H^T = n.I_n$ dır.

Lemma 3.2.

Eğer C ters simetrik bir konferans matris ise; $I_n + C$, *n.* mertebeden bir Hadamard matristir.

İspat.

$H = I_n + C$ olmak üzere, $(I_n + C).(I_n + C)^T$ doğrudan hesaplanır.
$(I_n + C)^T = I_n + C^T$ ise, $H.H^T = n.I_n$ olduğu gösterilir.

$$
\begin{aligned}
H.H^T &= (I_n + C).(I_n + C^T) \\
&= I_n + C^T + C + CC^T \qquad (C \text{ ters simetrik old. } C = -C^T) \\
&= I_n - C + C + CC^T \qquad (C \text{ konferans matris old. } C.C^T = (n-1).I_n) \\
&= I_n + (n-1).I_n \\
&= I_n + n.I_n - I_n \\
&= n.I_n \\
H.H^T &= n.I_n
\end{aligned}
$$

ispat tamamlanmıştır.

Lemma 3.3.

Eğer C, $n \times n$ tipinde bir simetrik konferans matris ise; $H = \begin{pmatrix} I_n + C & -I_n + C \\ -I_n + C & -I_n - C \end{pmatrix}$

$2n \times 2n$ tipinde bir simetrik Hadamard matristir.

İspat.

H simetrik olduğundan $H = H^T$ tir.

$$H.H^T = \begin{pmatrix} I_n + C & -I_n + C \\ -I_n + C & -I_n - C \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} I_n + C & -I_n + C \\ -I_n + C & -I_n - C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \text{ burada}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= (I_n + C)^2 + (-I_n + C)^2 \\ A_2 &= (I_n + C)(-I_n + C) + (-I_n + C)(-I_n - C) \\ A_3 &= (-I_n + C).(I_n + C) + (-I_n - C).(-I_n + C) \\ A_4 &= (-I_n + C)^2 + (-I_n - C)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= 2C^2 + 2(I_n)^2 \qquad (C^2 = C.C = C.C^T = (n-1)I_n) \\ &= 2(n-1)I_n + 2(I_n) \\ &= 2n.I_n \end{aligned}$$

Benzer şekilde $A_4 = 2n.I_n$ ve A_2 ile A_3 $n \times n$ tipinde 0 matrisidir.

$$H.H^T = \begin{pmatrix} 2n.I_n & 0 \\ 0 & 2n.I_n \end{pmatrix}$$

$$H.H^T = 2n. \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

$$H.H^T = 2n.I_{2n}$$

ispat tamamlanmıştır.

3.2.1 C-matrisler ve Hadamard matrisler

Bu bölümde işareti $\pm$ olarak düzenlenmiş v mertebeden

$$C_v = \begin{bmatrix} 0 & j^T \\ \pm j & S_{v-1} \end{bmatrix}$$

formunda simetrik ve ters simetrik C-matrisleri ele alınmıştır. Burada $v-1$ mertebeden S_{v-1} aşağıdakileri sağlar[4]:

$$S.S^T = (v-1)I - J, \quad SJ - JS = 0, \quad S^T = \pm S$$

ve tersine C_v ’yi belirl**e**r. S_{v-1}, C_v çifti ileride kullanılacaktır.

Örnek.

3. mertebeden $S_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ ve $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. Yukarıdaki bağıntılar uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+b & a+b \\ -a+c & -a+c & a+c \\ -b-c & -b-c & -b-c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a-b & a-c & b+c \\ -a-b & a-c & b+c \\ -a-b & a-c & b+c \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b = -(a+b) \Rightarrow a+b = 0 \\ a+b = a-c \Rightarrow b = -c \\ a+b = b+c \Rightarrow a = c \end{array}\right\} a = 1, b = -1, c = 1 \text{ seçilirse}$$

$S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir. $j^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ alınarak

4. mertebeden $C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur.

$C.C^T = (4-1)I_4 = 3.I_4$ olduğundan C matrisi ters simetrik konferans matristir

Teorem 3.5.

S_n, C_{n+1} çifti varsa, bir simetrik S_{n^2}, C_{n^2+1} çifti de vardır[4].

İspat.

Belevitch tarafından n^2 mertebeden $S_{n^2} = S_n \otimes S_n + I_n \otimes J_n - J_n \otimes I_n$ köşegen elemanları 0, diğer elemanları ± 1 olan matrisi simetriktir ve üstte S için bahsedilen bağıntıları sağlar. Kronecker çarpımın özellikleri kullanarak doğrudan bu ifadeler elde edilir[4].

Örnek.

Bir önceki örnekte elde edilen $S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ alınırsa

$n = 3$ için

$S_{3^2} = S_3 \otimes S_3 + I_3 \otimes J_3 - J_3 \otimes I_3$

$$S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. O zaman

$$C_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$C.C^T = (10-1)I_{10} = 9.I_{10}$ olduğundan C matrisi simetrik konferans matristir.

Sonuç 3.1.

$i = 1,...,r$ için h, k, h_i negatif olmayan sayılar, p, p_i tek asal sayılar olmak üzere

$N = p^h + 1 \equiv 2(\text{mod}\,4)$ ve

$$N = 2^k \prod_{i=1}^{r} (p_i^{h_i} + 1), \qquad p_i^{h_i} + 1 \equiv 0(\text{mod}\,4)$$

için simetrik $S_{(N-1)^2}, C_{(N-1)^2+1}$ çifti vardır[4].

İspat.

Paley N mertebeden simetrik C-matrisleri ve Williamson da yine N mertebeden ters simetrik C-matrislerini oluşturmuştur. Bu nedenle S_{N-1}, C_N çifti vardır ve Teorem 3.5 uygulanabilir[4].

Teorem 3.6.

n ve $n+2$ mertebeden simetrik veya ters simetrik C-matrisleri varsa n^2 mertebeden bir Hadamard matris vardır[4].

İspat.

S_{n-1}, C_n ve S_{n+1}, C_{n+2} çiftleri varsa o zaman çiftlerden biri simetrik, diğeri ters simetriktir. n^2-1 mertebeden, elemanları ± 1 olan ve $KK^T = n^2 I - J, KJ = JK = J$ ifadesini sağlayan

$$K = S_{n-1} \otimes S_{n+1} + I_{n-1} \otimes J_{n+1} - J_{n-1} \otimes I_{n+1} - I_{n-1} \otimes I_{n+1}$$

matrisi doğrudan hesaplanabilir. O halde

$$H = \begin{bmatrix} -1 & j^T \\ j & K \end{bmatrix}$$

n^2 mertebeden bir Hadamard matristir[4].

Örnek.

Teorem 3.6. ya göre $n = 2$ mertebeden simetrik C-matris varsa $n^2 = 2^2 = 4$ mertebeden bir Hadamard matris vardır. $S_1 = [0]$ ve $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ alınırsa

$$K = S_1 \otimes S_3 + I_1 \otimes J_3 - J_1 \otimes I_3 - I_1 \otimes I_3$$

$$K = [0] \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + [1] \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - [1] \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [1] \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$K = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ bulunur. $j = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alınırsa

$$H = \begin{bmatrix} -1 & j^T \\ j & K \end{bmatrix} \Rightarrow H_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

bulunur ve $H.H^T = 4.I_4$ olduğundan 4. mertebeden Hadamard matrisi elde edilir.

İleride referans almak için genelleştirilmiş permütasyon matrisleri tanımlanacaktır:

$$P_m = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_{\frac{1}{2}m}, \qquad K_m = \overline{K}_4 \otimes I_{\frac{1}{4}m}, \qquad L_m = \overline{L}_4 \otimes I_{\frac{1}{4}m},$$

$$M_m = \overline{M}_4 \otimes I_{\frac{1}{4}m},$$

burada $\overline{K}, \overline{L}, \overline{M}$ 4. mertebeden kuaterniyon matrislerdir. P, K, L, M ters simetrik ve

$$PP^T = KK^T = LL^T = MM^T = I, \quad KL = M, \quad LM = K, \quad MK = L$$

sağlar.

Teorem 3.7.

Eğer bir $m > 1$ mertebeden bir Hadamard matris ve n mertebeden bir simetrik C-matris varsa, mn mertebeden bir Hadamard matris vardır[4].

İspat.

H_m bir Hadamard matris, P_m genelleştirilmiş permütasyon matris ve C_n bir sistematik C-matris olsun. $H_{mn} = H_m \otimes C_n + P_m H_m \otimes I_n$ doğrudan hesaplanır ki bir mn mertebeden Hadamard matristir[4].

Örnek.

$m = 4$ mertebeden bir Hadamard matris $H_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ve

$n = 2$ mertebeden bir simetrik C-matris $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Teorem 3.7 e göre $m.n = 4.2 = 8$ mertebeden bir Hadamard matris vardır.

$$H_8 = H_{4.2} = H_4 \otimes C_2 + P_4 H_4 \otimes I_2$$

dir. Bunu göstermek için ilk olarak yukarıdaki permütasyon matrisi tanımından P_4 bulunur:

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$H_8 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
H_8 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

bulunur ve $H.H^T = 8.I_8$ olduğundan 8. mertebeden Hadamard matrisi elde edilir.

Sonuç 3.2.

Eğer bir $m > 1$ mertebeden bir Hadamard matris ve N Sonuç 3.1 deki gibi tanımlı ise, $m((N-1)^2 + 1)$ mertebeden bir Hadamard matris vardır[4].

Teorem 3.8.

Eğer bir $m > 1$ mertebeden bir Hadamard matris ve n mertebeden bir simetrik *C*-matris varsa, $mn(n-1)$ mertebeden bir Hadamard matris vardır[4].

İspat.

H_m bir Hadamard matris, P_m genelleştirilmiş permütasyon matris ve simetrik S_{n-1}, C_n çifti için

$$K = H_m \otimes C_n \otimes S_{n-1} + P_m H_m \otimes C_n \otimes I_{n-1} + H_m \otimes I_n \otimes J_{n-1}$$

matrisi elemanları ± 1 dir, $mn(n-1)$ mertebedendir ve $KK^T = mn(n-1)I$ sağlar.

Teorem 3.9.

Eğer bir $m > 2$ mertebeden bir Hadamard matris ve n, $n+4$ mertebelerden simetrik C-matrisler varsa, $mn(n+3)$ mertebeden bir Hadamard matris vardır.

İspat.

H_m bir Hadamard matris, K_m, L_m genelleştirilmiş permütasyon matrisler ve simetrik S_{n-1}, C_n ve S_{n+3}, C_{n+4} çiftleri için

$$K = H_m \otimes C_n \otimes S_{n+3} + K_m H_m \otimes C_n \otimes I_{n+3} + L_m H_m \otimes I_n \otimes (2I - J)_{n+3}$$

matrisi $mn(n+3)$ mertebeden bir Hadamard matristir.

Teorem 3.7, Teorem 3.8, Teorem 3.9 teoremleri Williamson'ın simetrik C-matrisler yerine $m > 1$ ve $m > 2$ sınırlamaları kullanmadan ters simetrik C-matrisler için ispatladığı teoremlerin bir karşılığıdır. Teorem 3.8. ve Teorem 3.9 teoremleri ise Williamson'ın sonuçlarının geliştirilmesidir. Williamson bu teoremleri $m = n_1 n_2$ için ispatlamıştır burada $n_1 > 1$ ve $n_2 > 1$ ler Hadamard matrislerin mertebeleridir ve n ve $n+4$ ün her ikisi de p tek asal olmak üzere $p^h + 1 \equiv 2 \pmod 4$ formundadır.

Bazı sayısal sonuçlar şu şekildedir. $N = 16$ için Sonuç 3.1 Paley matris olmayan 226. mertebeden yeni bir simetrik C-matris elde edilmiştir. Sonuç 3.2'den, 452. ve 904. mertebeden yeni Hadamard matrisleri elde edilmiştir. Teorem 3.8 den $2 \times 17 \times 18 = 612$. mertebeden ve $2 \times 25 \times 26 = 1300$. mertebeden; Teorem 3.9 dan ise $4 \times 25 \times 29 = 3016$. mertebeden Hadamard matrisleri elde edilmiştir[4].

3.2.2. Paley dönüşümü

$A_n = \left[a_{ij} \right]$ ve $B_m = \left[b_{ij} \right]$ olmak üzere kronecker çarpım $A \otimes B$ aşağıdaki şekilde tanımlanır[2]:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki formülde $a_{ij}B$ bir alt-matristir (bir eleman değildir).

C, $m \times m$ simetrik konferans matris olsun. Paley ifadesi

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

için

$$S_{2m} = A_2 \otimes C_m + B_2 \otimes I_m$$

matrisi Hadamard matristir[2].

Örnek.

2×2 mertebeden simetrik konferans matris $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Paley ifadesi

$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ için

$$S_4 = A_2 \otimes C_2 + B_2 \otimes I_2$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

bulunur ve $S.S^T = 4.I_4$ olduğundan 4. mertebeden Hadamard matristir.

Önerme 3.1.

C , $m \times m$ konferans matris ve A ile B $n \times n$ Hadamard matris verilsin.

$$S_{nm} = A_n \otimes C_m + B_n \otimes I_m \tag{3.1}$$

matrisi ancak ve ancak

$$A_n B_n^T + B_n A_n^T = 0 \tag{3.2}$$

olduğunda Hadamard matristir[2].

İspat.

S_{mn} nin Hadamard matris olduğunu göstermek için $S_{mn} S_{mn}^T = mnI_{mn}$ olduğu gösterilmelidir.

$$S_{mn}^T = A_n^T \otimes C_m^T + B_n^T \otimes I_m$$

olduğundan

$$\begin{aligned} S_{mn} S_{mn}^T &= \left(A_n \otimes C_m + B_n \otimes I_m\right)\left(A_n^T \otimes C_m^T + B_n^T \otimes I_m\right) = \\ &= \left(A_n \otimes C_m\right)\left(A_n^T \otimes C_m^T\right) + \left(A_n \otimes C_m\right)\left(B_n^T \otimes I_m\right) + \\ &+ \left(B_n \otimes I_m\right)\left(A_n^T \otimes C_m^T\right) + \left(B_n B_n^T\right) \otimes I_m = \\ &= \left(A_n \otimes C_m\right)\left(A_n^T \otimes C_m^T\right) + \left(B_n B_n^T\right) \otimes I_m + \\ &+ \left(A_n B_n^T\right) \otimes C_m + \left(B_n B_n^T\right) \otimes C_m^T \end{aligned}$$

$C_m^T = C_m$ ve A_n ile C_n ortogonal matrislerdir dolayısıyla $A_n \otimes C_m$ de ortogonal matristir ve B_n Hadamard matristir. Bu yüzden

$$S_{mn} S_{mn}^T = (mn - n) I_{mn} + nI_{mn} + \left(A_n B_n^T + B_n A_n^T\right) \otimes C_m$$

S_{mn} Hadamard matris (yani $S_{mn} S_{mn}^T = mnI_{mn}$) olması için $A_n B_n^T + B_n A_n^T = 0$ olacaktır.

Bu ifadede $n = 2$ durumu Paley yapısını verir[2].

Tanım 3.2.

$\left(A_n, B_n\right)$ ikilisinde $n.$ mertebeden Hadamard matrisler ancak ve ancak (3.2) eşitliği sağlanırsa uyumludur denir[2].

3.2.3. Genelleştirilmiş Paley yapı

Burada matrislerin çeşitli uyumlu ikilileri bulunacaktır.

Önerme 3.2.

$\left(A_n, B_n\right)$ uyumlu ikili ve D_r Hadamard matris olduğunda
$\left(A_n, B_n\right) \otimes D_r = \left(A_n \otimes D_r, B_n \otimes D_r\right)$ da uyumlu ikilidir[2].

İspat.

A_n, B_n ve D_r Hadamard matrisler olduğundan, $A_n \otimes D_r$ ve $B_n \otimes D_r$ matrisleri de Hadamard matrislerdir. Aşağıdaki hesaplama ile $\left(A_n \otimes D_r, B_n \otimes D_r\right)$ ikilisinin uyumlu ikili olduğunun ispatı elde edilebilir.

$$[A \otimes D]_{nr} [B \otimes D]'_{nr} + [B \otimes D]_{nr} [A \otimes D]'_{nr} = \left(A_n B'_n + B_n A'_n\right) \otimes \left(D_r D'_r\right) = 0$$

Önerme 3.2.

X ve Y, $2n \times n$ mertebeden matrisler ve $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_{2n}$ bileşik matrisi Hadamard olduğunda

$$\left(U_{2n}, V_{2n}\right) = \left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_{2n}, \begin{bmatrix} Y \\ -X \end{bmatrix}_{2n} \right)$$

uyumlu ikili matrisleridir[2].

İspat.

Tanım gereği birinci matris Hadamard'tır ve ikincinin de Hadamard olduğu aşikardır. (3.2) denklemi kontrol edilmelidir,

$$\langle a_v, b_u \rangle + \langle a_u, b_v \rangle = 0, \forall u, v \in \{1, 2, ..., m\} \tag{3.3}$$

şeklinde yazılır.

U_{2n} ve V_{2n} matrisleri (işarete bağlı olarak) 1 den oluşan satırlara ve aynı Hadamard matrise sahiptir. Kolayca gösterilebilir ki (3.3) teki iç çarpımlar, karşılık gelen satırların özdeş olmaları durumu dışında 0 olacaktır. Tanım olarak

$i = 1, 2, ..., n$ için $u_i = -v_{i+n}$ ve $i = n+1, n+2, ..., 2n$ için $u_i = v_{i-n}$

dır. Bu yüzden, (3.3) teki ilk iç çarpım 0 değilse, birinde $\pm 2n$ iken diğerinde $\mp 2n$ olmalıdır. Dolayısıyla toplam 0'dır[2].

3.2.4. C-matrisler ve tartma matrisler

Tanım 3.2. (Tartma Matrisi)

n. mertebeden bir tartma matrisi, elemanları $0, \pm 1$ ve ağırlığı *k* olan $n \times n$ tipinde bir kare matristir. $W(n,k)$ ile gösterilir. I_n, *n*. mertebeden birim matris olmak üzere; $W.W^T = k.I_n$ dır[7].

Sonuç 3.3.

$W(n, n-1)$ tartma matrisi, *n*. mertebeden bir konferans matristir. $W(n,n)$ tartma matrisi, *n*. mertebeden bir Hadamard matristir[7].

BÖLÜM 4. KONFERANS MATRİS İLE İLGİLİ BAZI TEOREM VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde konferans matrislerle ilgili bazı teoremler ve özellikler ele alınmıştır.

Teorem 4.1.

n mertebeden bir konferans matris varsa o zaman n çifttir ek olarak eğer $n \equiv 2 \pmod 4$ ise her asal $p \equiv 3 \pmod 4$ için, $n-1$ i bölen p nin en yüksek kuvveti çifttir[5].

Örnek.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A 2. mertebeden simetrik konferans matrisi, B 4. mertebeden ters-simetrik konferans matrisi, C 6. mertebeden normalleştirilmiş konferans matrisi göstermektedir.

Teorem 4.2.

$n \equiv 2 \pmod 4$ mertebeden her normalleştirilmiş konferans matrisin çekirdeği simetriktir ve $n \equiv 0 \pmod 4$ mertebeden her normalleştirilmiş konferans matris çekirdeği ters simetriktir[5].

Teorem 4.3.

$4n$ mertebeden ters Hadamard matris ancak ve ancak $4n$ mertebeden ters simetrik konferans matris varsa vardır[5].

Teorem 4.4. (Paley)

q tek asal kuvvet olsun.

1. Eğer $q \equiv 1 \pmod 4$ ise $(q+1)$ mertebeden bir simetrik konferans matris vardır.
2. Eğer $q \equiv 3 \pmod 4$ ise $(q+1)$ mertebeden bir ters simetrik konferans matris vardır[5].

Teorem 4.5.

Eğer $q \equiv 1 \pmod 4$ asal kuvvet ise, 2 dairesel tipin $(q+1)$ mertebeden simetrik konferans matris vardır[5].

Teorem 4.6.

q asal kuvvet, $q \equiv 3 \pmod 4$ ve $(q+3)$ bir konferans matrisin mertebesi olduğunda, $q^2(q+2)+1$ mertebeden bir konferans matris vardır[5].

Teorem 4.7.

$t \geq 0$, $5(9^{2t+1})+1$ mertebeden konferans matrisler vardır[5].

Tablo 4.1. Küçük *n* ler için *2n* mertebeden konferans matrisler tablosu.

n	Durum	Açıklamalar
$8 \neq n < 11$	Var	Teorem 4.4.
8	Var	Teorem 4.3.
11	Yok	21=3.7 ve Teorem 4.1.
$11 < n < 17$	Var	Teorem 4.4.
17	Yok	33=3.11 ve Teorem 4.1.
18	Var	Teorem 4.3.
$18 < n \neq 20 < 23$	Var	Teorem 4.4.
20	Var	Teorem 4.3.
23	Var	Teorem 4.6 de $q = 3$
$23 < n < 26$	Var	Teorem 4.4.
26	Var	Teorem 4.3.
27	Var	Teorem 4.4.
28	Var	Teorem 4.3.
29	Yok	57=3.19 ve Teorem 4.1.
$29 < n < 32$	Var	Teorem 4.4.
32	Var	Teorem 4.3.
33	Belirsiz	2 dairesel tipten değil

Teorem 4.8.

Eğer simetrik konferans matrisin mertebesi n ise $n-1$ iki tamsayının kareleri toplamıdır.

İspat.

$CC^T = (n-1)I$ ifadesi I ve $(n-1)I$ rasyonel olarak eş olduğunu gösterir. (Eğer $RAR^T = B$ şeklinde bir R rasyonel matrisi varsa A ve B matrisleri rasyonel olarak eştir). İyi bilinen bir özellik (özellikle Lagrange'nin dört kare teoremi) ifade eder ki her pozitif rasyonel α sayısı için, 4×4 tipinde αI_4, I_4 matrisine rasyonel olarak eştir. $n \times n$ tipinde matris αI_n, $\mathrm{diag}(1,...,1,\alpha,...,\alpha)$ ya rasyonel olarak eştir ki burada 1 lerin adedi 4 ile bölünür. $n \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$ olduğu için, I $\mathrm{diag}(1,...,1,n-1,n-1)$ ya rasyonel olarak eş olmalıdır. Bu da $n-1$ iki kare toplamı olduğunu gösterir.

Özellik 4.1.

Eğer C $n \times n$ tipinde bir konferans matris ise,

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}}C$$

ortogonal bir matristir.

İspat.

C konferans matris ise, $C.C^T = (n-1).I_n$ dır.

$$\frac{1}{(n-1)}C.C^T = I_n$$

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}}\frac{1}{\sqrt{n-1}}C.C^T = I_n$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}C\right).\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}C^T\right) = I_n$$

dır. Bir A matrisin ortogonal olması için $A.A^T = I_n$ gerektiğinden ve sağlandığından

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}}C$$

ortogonaldir.

Özellik 4.2.

Eğer C $n \times n$ tipinde bir konferans matris ise, $\forall x \in R^n$ olmak üzere,

$$\|Cx\| = \sqrt{n-1}\|x\|$$

dir.

İspat.

C konferans matris ise,

$$C.C^T = (n-1).I_n\,,\ \sqrt{C.C^T} = \sqrt{n-1}$$

ve $\|x\| = \sqrt{x.x^T}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\|Cx\| &= \sqrt{Cx.(Cx)^T} = \sqrt{Cx.x^T C^T}\\ &= \sqrt{C}\sqrt{x.x^T}\sqrt{C^T}\\ &= \sqrt{C}.\sqrt{C^T}\sqrt{x.x^T}\\ &= \sqrt{C.C^T}\sqrt{x.x^T}\\ &= \sqrt{(n-1).I_n}\sqrt{x.x^T}\\ &= \sqrt{n-1}\|x\|\end{aligned}$$

dır.

Özellik 4.3.

$n\times n$ tipinde bir C konferans matrisin bütün özdeğerleri, mutlak değerce $\sqrt{n-1}$ değerine sahiptir.

İspat.

C, $n\times n$ tipinde bir konferans matris olsun.

$$C.C^T = (n-1).I_n$$

dir.

$$C.x = \lambda x$$

eşitliğini sağlayan λ değerleri, C nin özdeğerleri olsun.

$$C.x = \lambda x$$

eşitliğinde her iki tarafın transpozesi alınırsa

$$\left(C.x\right)^T = \left(\lambda x\right)^T$$

$\Rightarrow x^T.C^T = x^T.\lambda$ (sağdan C ile çarpılır)

$\Rightarrow x^T C^T.C = x^T.\lambda.C$ ($C.C^T = (n-1).I_n$ eşitliğinden)

$\Rightarrow x^T.(n-1).I_n = x^T.\lambda.C$

$\Rightarrow (n-1).x^T = x^T.\lambda.C$ (sağdan x ile çarpılır)

$\Rightarrow (n-1).x^T.x = x^T.\lambda.C.x$ ($C.x = \lambda x$ eşitliğinden)

$\Rightarrow (n-1).x^T.x = x^T.\lambda.\lambda.x$

$\Rightarrow (n-1).x^T = x^T.\lambda.\lambda$

$\Rightarrow (n-1).x^T = x^T.\lambda^2$

$\Rightarrow (n-1).x^T = \lambda^2.x^T$

$\Rightarrow (n-1) = \lambda^2$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{n-1}$

Özellik 4.4.

C, $n\times n$ tipinde konferans matris ise

$$\det C = \pm(n-1)^{\frac{n}{2}}$$

dir.

İspat.

C , $n\times n$ tipinde bir konferans matris ise, $C.C^T = (n-1)I_n$ dir.

$\det(C.C^T) = \det((n-1).I_n)$ (determinant özelliğinden)

$(\det C).(\det C^T) = \det((n-1).I_n)$ ($A_{n\times n}$ olmak üzere $\det(k.A) = k^n \det A$)

$(\det C)^2 = (n-1)^n \det(I_n)$ ($\det C \neq 0$)

$(\det C)^2 = (n-1)^n.1$

$\sqrt{(\det C)^2} = \sqrt{(n-1)^n}$

$\det C = \pm(n-1)^{\frac{n}{2}}$

ispat tamamlanmıştır.

BÖLÜM 5. BAZI KONFERANS MATRİS TİPLERİ

Bu bölümde konferans matris tiplerinden Jacket konferans matris ve genelleştirilmiş konferans matris çeşitleri ele alınmıştır.

Tanım 5.1. (Jacket Matris)

F cisminde tanımlı $J = [\, j_{ik} \,]$ $n \times n$ tipinden bir kare matris olmak üzere, $J.J' = n.I_n$ dır öyle ki burada $J' = [\, j'_{ki} \,]$ J matrisinin elemanlarının tersinin transpoz matrisidir başka bir deyişle $j'_{ik} = (\, j_{ki} \,)^{-1}$ dir[2].

5.1. Jacket Konferans Matris

Burada X_n nin transpoz matrisini kullanmak yerine ters eleman traspoz matrisi kullanabilir bunu da $X_n{}'$ burada $x'_{ij} = \left(x_{ji} \right)^{-1}$ ile gösterilecektir. A ve B Hadamard matris olarak kullanılacak fakat C_m özel olarak seçilmeli ve C'_m daha farklı şekilde tanımlanmalıdır[2].

Tanım 5.2

Bir $n \times n$ kare matrisi A olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa A ya Jacket konferans matrisi denir:

1. $i = 1, 2, \ldots, n$ için $a_{ii} = 0$
2. $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ve $i \neq j$ için $a_{ij} \neq 0$
3. $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ve $i \neq j$ için $\sum_{s \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i,j\}} a_{is}.(a_{sj})^{-1} = 0$

Bu matris için aşağıdaki özellik de sağlanıyorsa bu matrise reciprocal(ters) matris denir[2].

4. $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ ve $i \neq j$ için $a_{ij} = (a_{ji})^{-1}$

Eğer $[\mathrm{C}]_m$ matrisi Jacket konferans matrisi ise, $[C]_m'$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$[C]_m' : c_{ij}' = \begin{cases} (c_{ji})^{-1}, & i \neq j \ \ ise \\ 0, & i = j \ \ ise \end{cases}$$

4. mertebeden ters Jacket konferans matris $[JC]$ yi oluşturmak istenirse

$$[JC]_4 = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ \frac{1}{a} & 0 & d & e \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{d} & 0 & f \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{e} & \frac{1}{f} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[JC]_4 . \left([JC]_4\right)' = (4-1).I_4 = 3.I_4$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ \frac{1}{a} & 0 & d & e \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{d} & 0 & f \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{e} & \frac{1}{f} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ \frac{1}{a} & 0 & d & e \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{d} & 0 & f \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{e} & \frac{1}{f} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0 + a.\frac{1}{a} + b.\frac{1}{b} + c.\frac{1}{c} & 0.a + a.0 + b.\frac{1}{d} + c.\frac{1}{e} & 0.b + a.d + b.0 + c.\frac{1}{f} & 0.c + a.e + b.f + c.0 \\ \frac{1}{a}.0 + 0.\frac{1}{a} + d.\frac{1}{b} + e.\frac{1}{c} & \frac{1}{a}.a + 0.0 + d.\frac{1}{d} + e.\frac{1}{e} & \frac{1}{a}.b + 0.d + d.0 + e.\frac{1}{f} & \frac{1}{a}.c + 0.e + d.f + e.0 \\ \frac{1}{b}.0 + \frac{1}{d}.\frac{1}{a} + 0.\frac{1}{b} + f.\frac{1}{c} & \frac{1}{b}.a + \frac{1}{d}.0 + 0.\frac{1}{d} + f.\frac{1}{e} & \frac{1}{b}.b + \frac{1}{f}.d + 0.0 + f.\frac{1}{f} & \frac{1}{b}.c + \frac{1}{d}.e + 0.f + f.0 \\ \frac{1}{c}.0 + \frac{1}{e}.\frac{1}{a} + \frac{1}{f}.\frac{1}{b} + 0.\frac{1}{c} & \frac{1}{c}.a + \frac{1}{e}.0 + \frac{1}{f}.\frac{1}{d} + 0.\frac{1}{e} & \frac{1}{c}.b + \frac{1}{e}.d + \frac{1}{f}.0 + 0.\frac{1}{f} & \frac{1}{c}.c + \frac{1}{e}.e + \frac{1}{f}.f + 0.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{b}{d}+\frac{c}{e} & a.d+\frac{c}{f} & a.e+b.f \\ \frac{d}{b}+\frac{e}{c} & 3 & \frac{b}{a}+\frac{e}{f} & \frac{c}{a}+d.f \\ \frac{1}{d.a}+\frac{f}{c} & \frac{a}{b}+\frac{f}{e} & 3 & \frac{c}{b}+\frac{e}{d} \\ \frac{1}{e.a}+\frac{1}{f.b} & \frac{a}{c}+\frac{1}{f.d} & \frac{b}{c}+\frac{d}{e} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{b.e+a.c}{d.e} & \frac{a.d.f+c}{f} & a.e+b.f \\ \frac{d.c+e.b}{b.c} & 3 & \frac{b.f+e.a}{a.f} & \frac{c+a.d.f}{a} \\ \frac{c+d.a.f}{d.a.c} & \frac{a.e+f.b}{b.e} & 3 & \frac{c.d+e.b}{b.d} \\ \frac{f.b+e.a}{e.a.f.b} & \frac{a.f.d+c}{c.f.d} & \frac{b.e+d.c}{c.e} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} b.e+a.c=0 \\ a.d.f+c=0 \\ a.e+b.f=0 \\ c.d+e.b=0 \end{array} \right\} \Rightarrow i^2=-1 \text{ olmak üzere } \begin{array}{l} c=-a.d.f \\ b=i.a.d \\ e=-i.d.f \end{array}$$

elde edilir. Burada $a=d=f=1$ seçilirse ters Jacket konferans matris

$$[JC]_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & i & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -i \\ -i & 1 & 0 & 1 \\ -1 & i & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

olarak bulunur. Böylece Paley yapısı uygulanarak daha büyük Jacket matrisler oluşturulabilir[2].

Örnek.

(5.1) teki matris kullanılarak düzenlenmiş Paley dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki Jacket matris elde edilir.

$$[J]_8 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -i & 1 & 1 & 1 & i & -1 \\ -1 & 1 & -1 & i & 1 & 1 & 1 & -i \\ i & -1 & 1 & -1 & -i & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & 1 & -1 & i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & i & -1 & -1 & 1 & i & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -i & 1 & -1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & 1 & -i & 1 & -1 & 1 \\ -1 & i & 1 & 1 & -1 & i & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5.2. Genelleştirilmiş Konferans Matrisler

Tanım 5.3 (Genelleştirilmiş Konferans Matris)

H bir çarpımsal sonlu bir grup ve $\overline{H} = H \cup \{0\}$ olmak üzere $\forall x \in \overline{H}$ için $0.x = x.0 = 0$ sağlansın ve $\lambda \in Z^+$ olsun. H da tanımlı λ indeksli bir genelleştirilmiş konferans matris olmak üzere $GC(H;\lambda)$ matrisi $W = \left[w_{ij}\right]$ şeklinde bir kare matristir öyle ki $w_{ii} = 0\,(\forall i$ için) ve $w_{ih} \neq 0$ (herhangi farklı i ve h satır indisleri için) $\left\{w_{ij}w_{hj}^{-1} : j \neq i,\, j \neq h\right\}$ kümesi H ın bütün elemanlarının tam olarak λ kopyalarını kapsar[6].

Dolayısıyla $n \geq 2$ olmak üzere $2n$ mertebeden bir konferans matris, 2. dereceden $\{1,-1\}$ grubu üzerinde $n-1$ indeksli genelleştirilmiş konferans matristir.

Genel olarak $GC(H;\lambda)$ in mertebesi $\lambda|H|+2$ dır.

Örnek.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & w & w^3 & w^2 & w^6 & w^4 & w^5 \\ 1 & 1 & 0 & w^3 & w & w^6 & w^2 & w^5 & w^4 \\ 1 & w & w^3 & 0 & 1 & w^4 & w^5 & w^2 & w^6 \\ 1 & w^3 & w & 1 & 0 & w^5 & w^4 & w^6 & w^2 \\ 1 & w^2 & w^6 & w^4 & w^5 & 0 & 1 & w & w^3 \\ 1 & w^6 & w^2 & w^5 & w^4 & 1 & 0 & w^3 & w \\ 1 & w^4 & w^5 & w^2 & w^6 & w & w^3 & 0 & 1 \\ 1 & w^5 & w^4 & w^6 & w^2 & w^3 & w & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ indisli mertebesi $\lambda|H| + 2 = 1.7 + 2 = 9$ olan $GC(Z_7;1)$ genelleştirilmiş konferans matrisi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & w^2 & w & w & w^2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & w^2 & w & w & w^2 \\ 1 & w^2 & 1 & 0 & 1 & w^2 & w & w \\ 1 & w & w^2 & 1 & 0 & 1 & w^2 & w \\ 1 & w & w & w^2 & 1 & 0 & 1 & w^2 \\ 1 & w^2 & w & w & w^2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & w^2 & w & w & w^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$ indisli mertebesi $\lambda|H| + 2 = 2.3 + 2 = 8$ olan $GC(Z_3;2)$ genelleştirilmiş konferans matrisi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -i & -k & -j & i & j & k \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -j & -i & -k & k & i & j \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -k & -j & -i & j & k & i \\ -1 & i & j & k & 0 & -1 & 1 & -i & -k & -j \\ -1 & k & i & j & 1 & 0 & -1 & -j & -i & -k \\ -1 & j & k & i & -1 & 1 & 0 & -k & -j & -i \\ -1 & -i & -k & -j & i & j & k & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -j & -i & -k & k & i & j & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -k & -j & -i & j & k & i & -1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ indisli mertebesi $\lambda|H| + 2 = 1.8 + 2 = 10$ olan $GC(Q_8;1)$ genelleştirilmiş konferans matrisi

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada konferans matrisler tanıtılmış, 6. mertebeden simetrik ve 12. mertebeden ters simetrik Paley konferans matris örnek olarak verilmiştir. Daha büyük mertebeler için de incelenebilir. Hadamard matrisler ile konferans matris ilişkileri incelenmiştir. Konferans matrislerin blok tasarımlardaki uygulamaları incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Conference_matrix, Nisan 2009.

[2] LEE, M.H., VAVREK, V.V., Eleventh International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory; 16-22 June, 2008, Pamporovo, Bulgaria; pp. 181-185.

[3] LEE, M.H., VAVREK, V.V., Linear-fractional Function, Elliptic Curves, and Parameterized Jacket Matrices; Institute of Information and Communication Chonbuk National University, Jeonju, Korea; 561-756.

[4] GOETHALS, J.M., SEIDEL, J.J., Orthogonal matrices with zero diagonal. Canadian Journal of Mathematics, vol. 19, 1967, pp. 1001-1010.

[5] CHARLES J. C., JEFFREY H. D., Handbook of Combinatorial Designs, 2006, 306-309.

[6] IONİN Y.J., Generalized conference matrices ve projective planes, European Journal of Combinatorics 28 (2007), 1943–1954.

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Weighing_matrix, Nisan 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Salih BOZDAĞ, 08.03.1981 de Balıkesir'in Sındırgı İlçesi'nde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sındırgı'da tamamladı. 1997 yılında Sındırgı İmam Hatip Lisesinden mezun oldu. 1997 yılında başladığı Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2001 yılında bitirdi. 2001 yılında Manisa İli Köprübaşı İlçesinde Matematik öğretmenliğine başladı. Manisa, Şanlıurfa, Hakkari, Sakarya illerinde öğretmen olarak görev yaptı. 2006 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Programına kaydoldu. Şu anda Balıkesir İstanbulluoğlu Anadolu Öğretmen Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.